

KOMISJA WYDAWNICZA
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Prof. dr. inż. LEON STANIEWICZ

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI
WARSZAWSKIEJ

Nr. Inwent. 1550

TEORJA PRĄDÓW ZMIENNYCH

CZĘŚĆ I.

(dalszy ciąg „PODSTAW ELEKTROTECHNIKI“, wykładany
w sem. V-ym wydz. Elektrycznego Politechniki Warszawskiej).

WYDANIE DRUGIE

Piotr Benderski



Nr. wyd. 197.

WARSZAWA

Drukarnia i Litografia „SATURN” Marszałkowska 91. Telef. 20-44.

1927.

v. 2 3206



Od wydawców.

2.67
C. 1061

Myśl ponownego wydania cz. I-ej Teorii Prądów zmiennych jak również rozpoczęcia II-ej części tegoż skryptu — spotkała się z bardzo przychylnem stanowiskiem Pana Profesora L. Staniewicza, pomimo trudów, jakich wymagało przejrzanie i uzupełnienie poprzedniego wydania oraz przygotowanego materiału do nowego działu.

Niniejszem przeto korzystamy z okazji, by spełnić miły obowiązek wyrażając na tem miejscu najserdeczniejsze podziękowanie Panu Profesorowi, którego łaskawej pomocy instytucja nasza nie tylko w dziedzinie wydawnictw, ale w całej swej działalności wiele zawdzięcza.

KOMISJA WYDAWNICZA
Tow. Br. Fom. Stud. Pol. Warsz.

Marzec, 1927 r.

BG02P/421-17

R O Z D Z I A Ł I.

PRĄDY ODKSZTAŁCONE.

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ Nr. Inwent. <u>155a</u>
--

§ 1. Szereg Fouriera. Prądy zmienne, spotykane w praktyce, często nie są dokładnie sinusoidalne, chociaż są okresowo zmienne, czyli inaczej, ich napięcie i natężenie są perjodycznymi funkcjami czasu. Takie prądy będziemy nazywali prądami odkształconymi. Analiza ich opiera się na znanym twierdzeniu Fouriera.

Niech będzie $f(x)$, gdzie $x = \frac{2\pi t}{T}$, jednoznaczna funkcja perjodyczna czasu t z okresem T ; znaczy to, że wartości tej funkcji będą się powtarzały w odstępach czasu, różniących się o okres T lub o całkowitą liczbę okresów. Oznaczając przez k dowolną liczbę całkowitą, możemy napisać:

$$f\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = f\left[\frac{2\pi}{T} (t+kT)\right] = f\left(\frac{2\pi t}{T} + 2k\pi\right).$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Zakładając $\frac{2\pi t}{T} = x$, otrzymamy:

$$x = \omega t = \frac{2\pi}{T} t$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi)$$

czyli, że wartości funkcji będą się powtarzały dla wartości x różniących się o całkowitą liczbę 2π .

Stędy według Fouriera:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots + A_n \cos nx +$$

$$\begin{aligned} &+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots + B_n \sin nx = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin kx \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

gdzie $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots, B_1, \dots, B_n$ są wielkościami stałymi, zaś n może być liczbą skończoną lub nieskończoną.

Dla znalezienia tych stałych postępujemy w następujący sposób. Mnożymy obie strony wzoru /1/ przez dx i całkujemy w granicach od 0 do 2π albo od dowolnej wartości x do $x+2\pi$.

W ten sposób otrzymamy:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx + \dots + \int_0^{2\pi} A_k \cos kx dx + \dots + \int_0^{2\pi} B_k \sin kx dx + \dots$$

Wszystkie całki określone postaci $\int_0^{2\pi} A_k \cos kx dx$ i $\int_0^{2\pi} B_k \sin kx dx$ są zerami, ponieważ ich całki nieokreślone $\frac{1}{k} \sin kx$ i $-\frac{1}{k} \cos kx$ mają tę samą wartość na początku i na końcu okresu. Zatem

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx = A_0 \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \cdot A_0;$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad \dots \quad (2).$$

Dla znalezienia każdego ze współczynników mnożymy

obie strony wzoru /1/ przez $\cos kx$ i całkujemy jak poprzednio. Otrzymamy wtedy:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = A_0 \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx + \dots + A_i \int_0^{2\pi} \cos ix \cos kx \, dx + \dots + A_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx + \dots + B_i \int_0^{2\pi} \sin ix \cos kx \, dx + \dots$$

Pierwsza całka jest zerem, cośmy już wyprowadzili poprzednio. Każda z całek typu:

$$\int_0^{2\pi} \cos ix \cos kx \, dx \quad (i \neq k) \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} \sin ix \cos kx \, dx$$

jest również zerem, bo funkcja podcałkowa daje się zamienić na sumę 2-ch funkcji trygonometrycznych, a tych całki w rozpatrywanych granicach są, jakśmy już widzieli, zerami.

Otrzymujemy zatem:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = A_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx ;$$

Ale
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2kx \, dx}{2} = \pi$$

skąd

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = A_k \cdot \pi ;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \dots (3).$$

Zupełnie tak samo, mnożąc obie strony wzoru /1/ przez $\sin kx$ i całkując znajdziemy:

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \dots (4)$$

Dla celów elektrotechniki czasami przekształcamy szereg Fouriera jeszcze inaczej, możemy mianowicie połączyć sinusy i cosinusy, których argumenty są te same, pisząc jedną tylko funkcję sinusoidalną. Zakładając:

$$A_k \cos kx + B_k \sin kx = F_k \sin(kx + \varphi_k)$$

będziemy mieli:

$$A_k \cos kx + B_k \sin kx = F_k \sin kx \cos \varphi_k + F_k \cos kx \sin \varphi_k;$$

Skąd

$$\begin{aligned} F_k \cos \varphi_k &= B_k; & F_k \sin \varphi_k &= A_k; \\ F_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; & \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{A_k}{B_k}; \end{aligned}$$

Na tej podstawie szereg Fouriera możemy napisać w postaci:

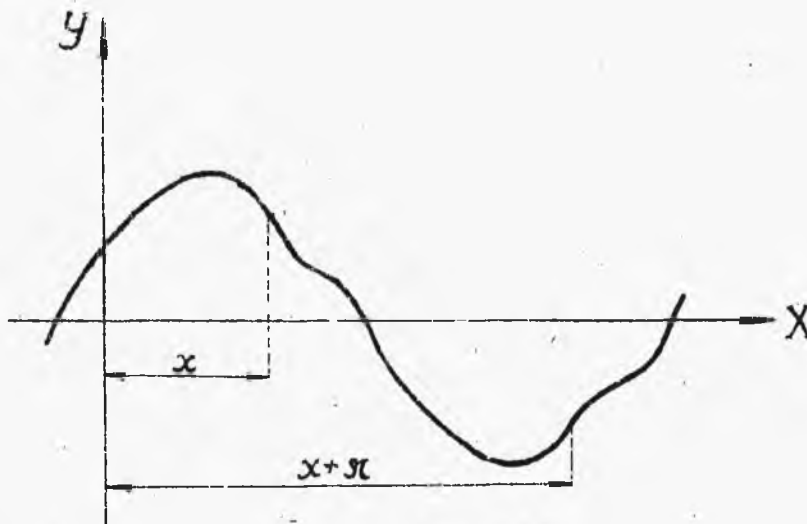
$$f(x) = A_0 + F_1 \sin(x + \varphi_1) + F_2 \sin(2x + \varphi_2) + \dots + F_k \sin(kx + \varphi_k) + \dots (5)$$

Sinusoida $F_1 \sin(x + \varphi_1)$ nazywa się główną sinusoidą, albo główną falą. Inne sinusoidy noszą nazwę harmonicznych rozpatrywanej funkcji i w zależności

od wskaźnika wielokrotności argumentu głównej sinusoidy mówimy w skróceniu 2-ga, 3-cia i t.d. harmoniczna.

§ 2. Przypadki szczególne.

1/ Krzywa, stanowiąca wykres rozpatrywanej funkcji, jest symetryczną względem osi X w ten sposób, że połowa fali, znajdująca się pod osią X , jest jakby zwierciadlanym odbiciem połowy fali, przebiegającej nad osią X , przesuniętą naprzód o π /rys. 1/.



RYS. 1.

znaczy: $f(x+\pi) = -f(x)$.

Aby temu zadośćuczynić, w szeregu Fouriera nie powinno być stałej A_0 , pozatem zginąć powinny

W tym wypadku dla 2-oh punktów krzywej, których odcięte różnią się o π , rzędne będą się różniły tylko znakami. To

wyrazy, zawierające funkcje trygonometryczne od argumentów, stanowiących parzyste wielokrotności x . Mogą pozostać tylko wyrazy z argumentami o nieparzystych wielokrotnościach x , gdyż tylko te wyrazy zmieniają znak przy zamianie x na $(x + \pi)$. Zatem w tym wypadku:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + \dots + A_{2k+1} \cos(2k+1)x + \dots + \\ &+ B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} A_{2k+1} \cos(2k+1)x + \sum_{k=0}^{k=n} B_{2k+1} \sin(2k+1)x \dots (6) \end{aligned}$$

Przy wyznaczeniu współczynników wystarczy całkowanie w granicach od 0 do π i pomnożenie rezultatów przez 2. W ten sposób:

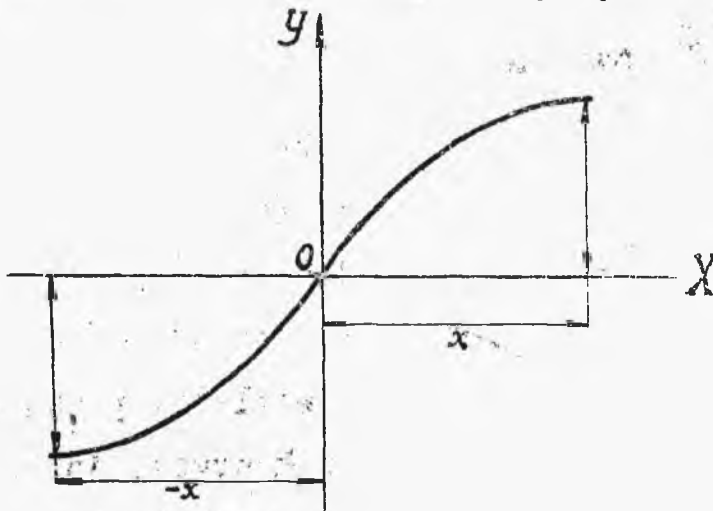
$$A_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2k+1)x \, dx; \quad B_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2k+1)x \, dx; \quad (7)$$

2/. Krzywa jest symetryczną względem swego początku. Jeżeli początek osi współrzędnych umieścimy w początku krzywej, to symetria będzie polegała na tem, że dwa punkty krzywej, mające odcięte $+x$ i $-x$ będą miały rzędne o tej samej wartości, przytem znaki tych rzędnych mogą być różne lub jednakowe; rozpatrzmy więc dwa wypadki:

a/ przy zamianie x na $-x$ znak rzędnych się zmienia, czyli

$$f(-x) = -f(x),$$

jak to ma miejsce dla krzywej na rys.2.



rys.2.

W tym wypadku w szeregu Fouriera /1/ nie powinno być stałej A_0 oraz wyrazów, zawierających cosinusy, otrzymany

więc szereg w postaci:

$$\begin{aligned} f(x) &= B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_k \sin kx + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin kx \end{aligned} \quad (8)$$

b/ przy zmianie x na $-x$ znak rzędnych się nie zmienia, czyli

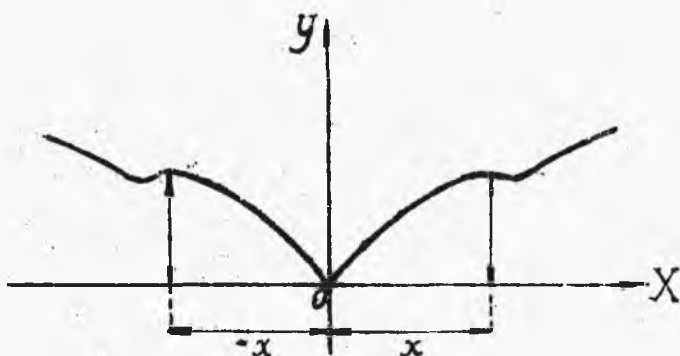
$$f(-x) = f(x),$$

jak to np. ma miejsce dla krzywej na rys.3.

Łatwo jest zauważyć, że w tym wypadku w szeregu Fouriera /1/ nie powinno być wyrazów, zawierających sinusy; będziemy więc mieli szereg:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_k \cos kx + \dots =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cdot \cos kx \quad \dots (9)$$



rys. 3.

3/ Krzywa jest symetryczna względem osi X , jak w przypadku 1/ i względem początku krzywej, jak w przypadku 2 a.

Wtedy na zasadzie poprzednich rozumowań w szeregu Fouriera mogą pozostać tylko wyrazy, zawierające sinusy argumentów, stanowiących nieparzyste wielokrotności x , czyli

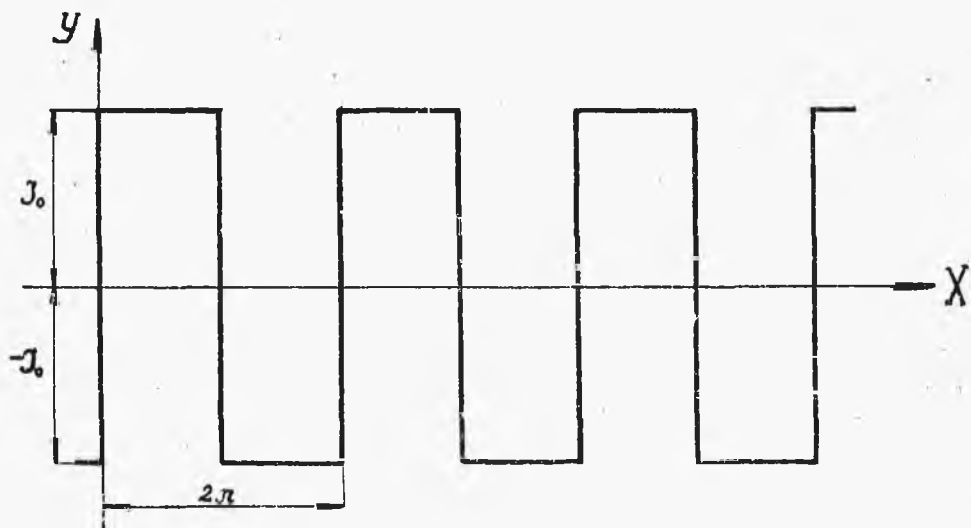
$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin (2k+1)x + \dots (10)$$

Ponieważ w tym wypadku można podzielić krzywą, odpowiadającą jednej fali na 4 równe części, o takim samym przebiegu, więc przy obliczaniu współczynników wystarczy całkowanie w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i pomnożenie rezultatu przez 4. W ten sposób:

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1)x \, dx \quad \dots (11)$$

§ 3. Przykłady.

Przykład 1. Prąd o natężeniu stałym J_0 zmienia okresowo kierunek /rys.4/



rys. 4.

Zachodzi tu ostatnio rozpatrywany wypadek szczególny; stosujemy zatem wzory /10/ i /11/

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x \, dx; \quad f(x) = J_0 = \text{const.}$$

$$B_{2k+1} = \frac{4J_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x \, dx = \frac{4J_0}{\pi(2k+1)} \left[-\cos(2k+1)x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4J_0}{\pi(2k+1)} \left[1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} \right];$$

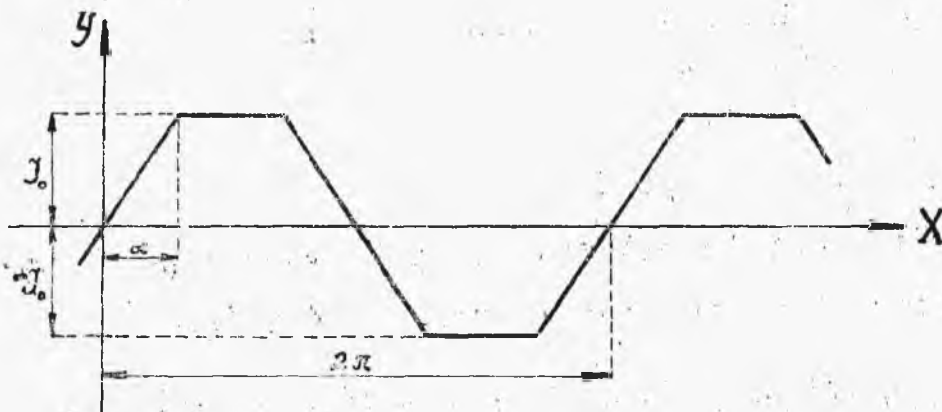
$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} = 0; \quad B_{2k+1} = \frac{4J_0}{\pi(2k+1)};$$

Ostatecznie:

$$f(x) = \frac{4J_0}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right];$$

Dana funkcja jest wypadkową nieskończonego szeregu sinusoid, których okresy i amplitudy maleją, jak szereg naturalny liczb nieparzystych, a początek wszystkich jest wspólny. Główna fala ma amplitudę $\frac{4J_0}{\pi} \approx 1,3J_0$, trzecia harmoniczna $\frac{4J_0}{3\pi} \approx 0,4J_0$ i t.d.

Przykład 2. Funkcja zmienia się w sposób trapezoidalny /rys. 5/.



rys. 5.

Rozpatrujemy ćwierć fali:

Dla

$$0 \leq x \leq \alpha; \quad f(x) = \frac{J_0}{\alpha} x;$$

$$\alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad f(x) = J_0;$$

Mamy:

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + B_{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} f(x) \sin(2k+1)x \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x \, dx;$$

$$\int_0^{\alpha} f(x) \sin(2k+1)x \, dx = \int_0^{\alpha} \frac{J_0}{\alpha} x \sin(2k+1)x \, dx = \frac{J_0}{(2k+1)^2 \alpha} \int_0^{\alpha} (2k+1)x \sin(2k+1)x \, d(2k+1)x;$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x;$$

$$\int_0^{\alpha} (2k+1)x \sin(2k+1)x \, d(2k+1)x = \left[-(2k+1)x \cos(2k+1)x + \sin(2k+1)x \right]_0^{\alpha} = \sin(2k+1)\alpha - (2k+1)\alpha \cdot \cos(2k+1)\alpha;$$

$$\int_0^{\alpha} f(x) \sin(2k+1)x \, dx = \frac{J_0}{\alpha} \left[\frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2} - \frac{\alpha \cos(2k+1)\alpha}{2k+1} \right];$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x \, dx = J_0 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x \, dx =$$

$$= \frac{J_0}{2k+1} \left[-\cos(2k+1)x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{J_0}{2k+1} \cos(2k+1)\alpha;$$

gdz

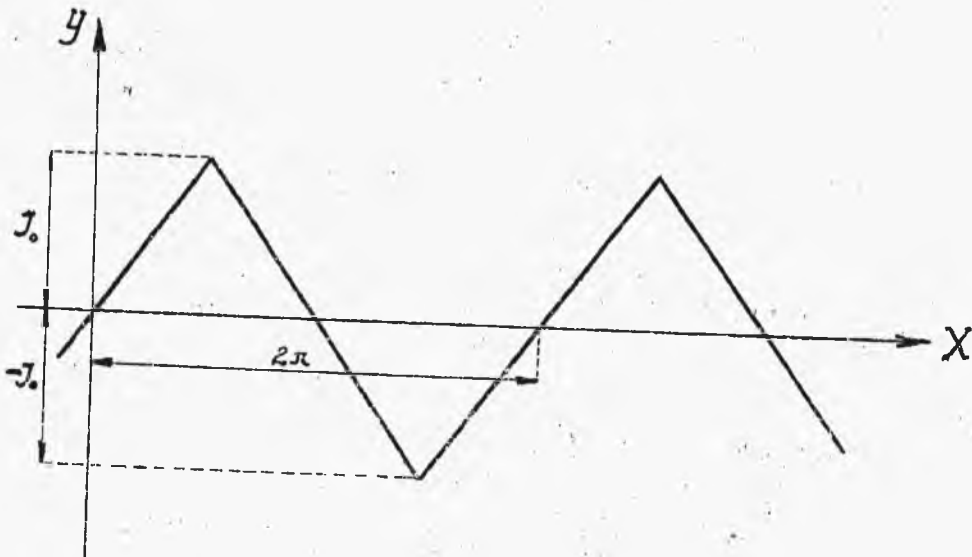
$$\cos(2k+1) \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\alpha} \left[\frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2} - \frac{\alpha}{(2k+1)} \cos(2k+1)\alpha \right] +$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{J_0}{2k+1} \cos(2k+1)\alpha &= \frac{4J_0}{\pi\alpha} \cdot \frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2} - \\
 - \frac{4J_0}{\pi(2k+1)} \cos(2k+1)\alpha &+ \frac{4J_0}{\pi(2k+1)} \cos(2k+1)\alpha = \\
 &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\alpha} \frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4J_0}{\pi\alpha} \left\{ \frac{\sin\alpha \sin x}{1^2} + \frac{\sin 3\alpha \sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5\alpha \sin 5x}{5^2} \right\} \\
 &= \frac{4J_0}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sin(2k+1)\alpha \sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} ;
 \end{aligned}$$

Przykład 3. Prąd wzrasta i maleje naprzemiennie proporcjonalnie do czasu między stałymi wartościami /rys.6/.



rys. 6.

Jest to graniczny wypadek przykładu poprzednie-
go przy $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \sin 3\alpha = \sin \frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$\sin 5\alpha = \sin \frac{5\pi}{2} = 1; \quad \dots$$

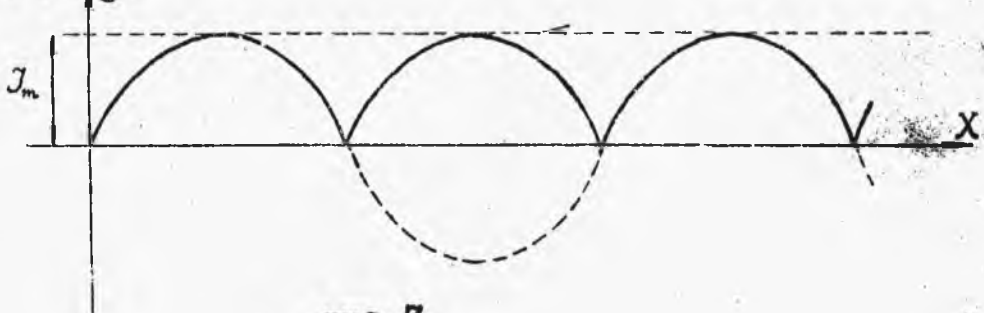
$$\dots \sin (4l+1)\alpha = \sin (4l+1)\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\sin (4l+3)\alpha = \sin (4l+3)\frac{\pi}{2} = -1;$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8J_0}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right\} = \\ &= \frac{8J_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\sin (2k+1)x}{(2k+1)^2}; \end{aligned}$$

Przykład 4. Prąd zmienny sinusoidalny zmienia
swój kierunek w drugiej połowie okresu, stając się
w ten sposób prądem jednokierunkowym-tętniącym

/rys. 7/.



rys. 7.

Mamy tu przypadek szczególny 2 b/, więc stosuje-
my wzór /9/:

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx.$$

Rozpatrywana funkcja, mając wartość maksymalną J_m , zmienia się od zera do J_m w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \text{w granicach od } 0 \text{ do } \pi \dots & f(x) = J_m \sin x, \\ \text{" " " } \pi \text{ " } 2\pi \dots & f(x) = -J_m \sin x. \end{aligned}$$

Obliczamy współczynniki:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} J_m \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -J_m \sin x \, dx \right] = \\ &= \frac{J_m}{2\pi} \left[\left| -\cos x \right|_0^{\pi} + \left| \cos x \right|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{2J_m}{\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} J_m \sin x \cos kx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -J_m \sin x \cos kx \, dx \right] = \\ &= \frac{J_m}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(k+1)x - \sin(k-1)x] \, dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} [\sin(k+1)x - \sin(k-1)x] \, dx \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{J_m}{2\pi} \left[\left| -\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right|_0^{\pi} - \left| -\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right|_{\pi}^{2\pi} \right] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{J_m}{2\pi} \left[\frac{-\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} \right] = \\ &= \frac{J_m}{\pi} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} - \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} \right]; \end{aligned}$$

przy k nieparzystym

$$\cos(k+1)\pi = \cos(k-1)\pi = 1$$

wtedy, co łatwo zauważyć,

$$A_k = 0$$

przy k parzystym

$$\cos(k+1)\pi = \cos \pi = -1$$

$$\cos(k-1)\pi = \cos(-\pi) = -1,$$

wtedy

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{J_m}{\pi} \left[\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k-1} \right] = \frac{2J_m}{\pi} \cdot \frac{(k-1) - (k+1)}{(k+1)(k-1)} = \\ &= -\frac{4J_m}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2-1}. \end{aligned}$$

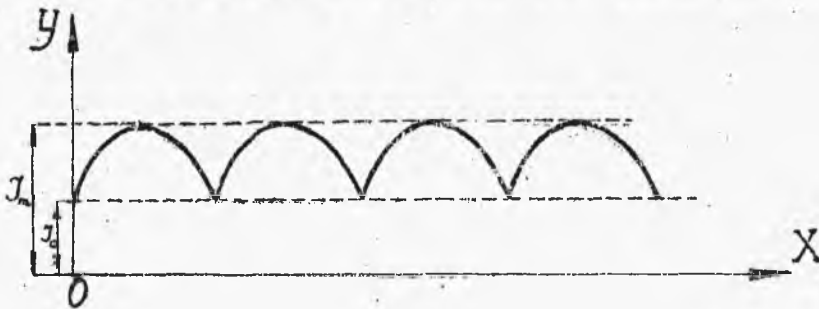
Podstawiając wartości A_0 i A_k do wzoru na rozpa-



trywaną funkcję otrzymamy:

$$f(x) = \frac{2J_m}{\pi} \left[1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4x - \right. \\ \left. - \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6x - \dots \right]$$

Jeżeli mamy prąd tętniący, którego wartości zmieniają się nie od 0 do J_m , lecz od J_0 do J_m gdzie $J_0 > 0$ /rys.8/, wówczas dla znalezienia



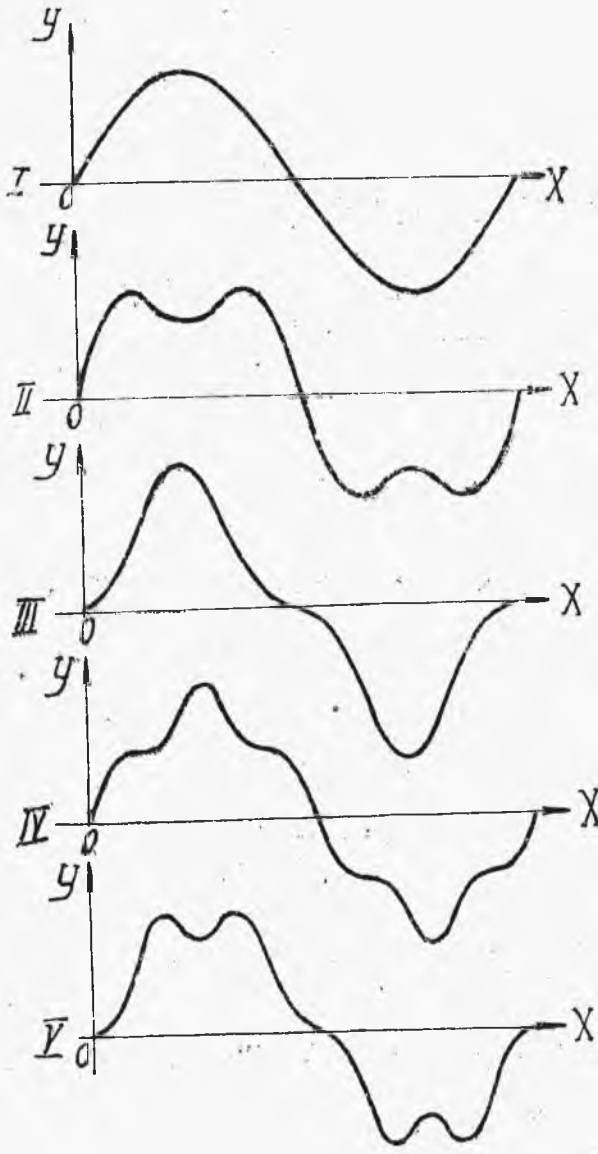
rys.8.

funkcji, przedstawiającej krzywą prądu, trzeba tylko do poprzedniego wzoru dodać J_0 .

§ 4. Analiza krzywych. W rozpatrywanych przykładach wyższe harmoniczne wywierają coraz mniejszy wpływ na kształt krzywej, tak, że uwzględniając tylko niewielką ilość harmonicznych, otrzymamy względnie znaczną dokładność. W praktyce uwzględniamy najczęściej harmoniczne do 9-ej włącznie.

Bardzo ważny ze względu na kształt krzywej jest

znak 3-ej harmonicznej; jeżeli jest dodatni, to krzywa ma wierzchołki stępione w stosunku do 1-ej harmonicznej, jeżeli jest ujemny, to wierzchołki są zastrzone. Zupełnie odwrotnie wpływa znak 5-ej harmonicznej.



Na rys. 9
uwidoczniony
jest wpływ
tych harmo-
nicznych na
kształt krzy-
wej.

Równania
tych krzywych
są następują-
ce:

$$I. y = I_m \sin x$$

$$II. y = I_m \sin x + \frac{1}{3} I_m \sin 3x$$

$$III. y = I_m \sin x - \frac{1}{3} I_m \sin 3x$$

$$IV. y = I_m \sin x + \frac{1}{5} I_m \sin 5x$$

$$V. y = I_m \sin x - \frac{1}{5} I_m \sin 5x$$

rys. 9.

Istnieje bardzo wiele sposobów analizowania krzywych. Rozpatrzmy tu sposób Fischer-Hinnena, polegający na następującym twierdzeniu:

Sumy

$$\sin x + \sin(x+\alpha) + \sin(x+2\alpha) + \dots + \sin[x+(p-1)\alpha]; \quad (12)$$

$$\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+2\alpha) + \dots + \cos[x+(p-1)\alpha]; \quad (13)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{2k\pi}{p}$$

k i p liczby całkowite, są równe $p \cdot \sin x$ wzgl. $p \cos x$, jeżeli $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą i równą się 0, jeżeli $\frac{k}{p}$ jest ułamkiem.

Jak wiadomo:

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$

Zamieniając według tego wzoru wszystkie sinusy w sumie /12/ otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} + \frac{e^{(x+\alpha)i} - e^{-(x+\alpha)i}}{2i} + \frac{e^{(x+2\alpha)i} - e^{-(x+2\alpha)i}}{2i} + \dots + \frac{e^{[x+(p-1)\alpha]i} - e^{-[x+(p-1)\alpha]i}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \left[e^{xi} + e^{(x+\alpha)i} + e^{(x+2\alpha)i} + \dots + e^{[x+(p-1)\alpha]i} \right] - \\ & \quad - \frac{1}{2i} \left[e^{-xi} + e^{-(x+\alpha)i} + e^{-(x+2\alpha)i} + \dots + e^{-[x+(p-1)\alpha]i} \right]. \end{aligned}$$

W nawiasach mamy 2 postępy geometryczne o wykładnikach e^{ai} i e^{-ai} ; ich sumy

$$\sum_1 = \frac{e^{(x+p\alpha)i} - e^{xi}}{e^{\alpha i} - 1};$$

$$S = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - (z^n - 1)}{1 - z} = \frac{2 - (z^n - 1)}{1 - z}$$

$$\sum_2 = \frac{e^{-(x+p\alpha)i} - e^{-xi}}{e^{-\alpha i} - 1};$$

Zatem dla całej sumy otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{(x+p\alpha)i} - e^{xi}}{e^{\alpha i} - 1} - \frac{e^{-(x+p\alpha)i} - e^{-xi}}{e^{-\alpha i} - 1} \right] = \\ & = \frac{1}{2i} \frac{e^{[x+(p-1)\alpha]i} - e^{(x-\alpha)i} - e^{(x+p\alpha)i} + e^{xi} - e^{-[x+(p-1)\alpha]i} + e^{-(x-\alpha)i} + e^{-(x+p\alpha)i} - e^{-xi}}{2 - e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}} = \\ & = \frac{\sin[x+(p-1)\alpha] - \sin(x-\alpha) - \sin(x+p\alpha) + \sin x}{2 - 2 \cos \alpha}; \quad (14) \end{aligned}$$

Zakładając $\alpha = \frac{2k\pi}{p}$ otrzymamy dla sumy wzór:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(x + 2k\pi - \frac{2k\pi}{p}) - \sin(x - \frac{2k\pi}{p}) - \sin(x + 2k\pi) + \sin x}{2(1 - \cos \frac{2k\pi}{p})} = \\ & = \frac{\sin(x - \frac{2k\pi}{p}) - \sin(x - \frac{2k\pi}{p}) - \sin x + \sin x}{2(1 - \cos \frac{2k\pi}{p})} = \frac{0}{1 - \cos \frac{2k\pi}{p}} \end{aligned}$$

Jeżeli $\frac{k}{p}$ nie jest liczbą całkowitą, to $\cos \frac{2k\pi}{p}$ nie jest jednością i wzór /14/ daje w rezultacie 0.

Jeżeli $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą, to daje nieokreśloność, lecz łatwo znaleźć wartość sumy w tym wypadku, gdyż oznaczając $\frac{k}{p} = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, będziemy mieli $\alpha = \frac{2k\pi}{p} = 2m\pi$ i suma /12/ da

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin(x + 2m\pi) + \sin(x + 4m\pi) + \dots + \sin[x + (p-1)2m\pi] = \\ & = \sin x + \sin x + \sin x + \dots + \sin x = p \cdot \sin x \end{aligned}$$

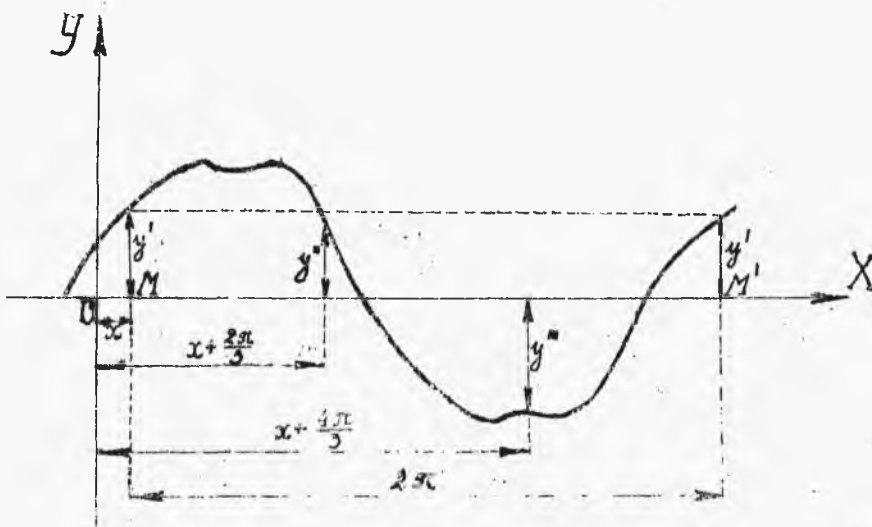
Analogicznie możemy dowieść powyższe twierdzenie dla sumy /13/.

Sposób Fischer-Hinnena rozpatrzemy najpierw w przypadku, kiedy krzywa jest symetryczna względem osi odciętych /rys.10/; wtedy szereg Fouriera posiada, jak wiadomo, tylko harmoniczne rzędów nieparzystych, mianowicie według wzoru /6/

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} [A_{2k+1} \cos(2k+1)x + B_{2k+1} \sin(2k+1)x] \dots (15) \end{aligned}$$

Ograniczymy liczbę harmonicznych do 9-ej włącznie.

Najpierw wybieramy początek osi współrzędnych w dowolnym punkcie 0 na osi X /osi symetrii rozpatrywanej krzywej/. Przypuśćmy, że od dowolnego punktu M na osi X , którego odcięta jest x , odlo-



rys. 10.

żymy na tejże osi $MM' = 2\pi$, niech rzędną krzywej, odpowiadającą punktowi M , będzie y' , wtedy

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x +$$

$$+ \dots + A_9 \cos 9x + B_9 \sin 9x = y' \quad \dots /16/$$

Podzielmy MM' na 3 równe części i niech y' , y'' , y''' oznaczają rzędne w punktach podziału, których odcięte stanowią x , $x + \alpha$, $x + 2\alpha$, gdzie

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Te same wartości rzędnych musimy otrzymać, zakładając we wzrze /15/ zamiast x kolejno x , $x + \alpha$, $x + 2\alpha$. Oznaczając sumę

$$y' + y'' + y''' = S_3$$

będziemy mieli:

$$\begin{aligned}
 & A_1 [\cos x + \cos(x+\alpha) + \cos(x+2\alpha)] + B_1 [\sin x + \sin(x+\alpha) + \sin(x+2\alpha)] + \\
 & + A_3 [\cos 3x + \cos(3x+3\alpha) + \cos(3x+6\alpha)] + \\
 & + B_3 [\sin 3x + \sin(3x+3\alpha) + \sin(3x+6\alpha)] + \\
 & + \dots + A_9 [\cos 9x + \cos(9x+9\alpha) + \cos(9x+18\alpha)] + \\
 & + B_9 [\sin 9x + \sin(9x+9\alpha) + \sin(9x+18\alpha)] = S_3
 \end{aligned}$$

Na podstawie poprzednio wyprowadzonego twierdzenia, przy $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 3A_3 \cos 3x + 3B_3 \sin 3x + 3A_9 \cos 9x + \\
 + 3B_9 \sin 9x = S_3 \quad \dots /17/
 \end{aligned}$$

Następnie dzielimy ten sam odcinek MM' na 5 równych części, edmierzamy rzędne w punktach podziału $x, x+\alpha, x+2\alpha, x+3\alpha, x+4\alpha$, gdzie $\alpha = \frac{2\pi}{5}$. Korzystając ze wzoru /15/ i biorąc sumę rzędnych, którą oznaczymy przez S_5 , otrzymamy, jak poprzednio:

$$5A_5 \cos 5x + 5B_5 \sin 5x = S_5 \quad \dots \dots \dots /18/$$

Dzielać następnie MM' na 7, a wreszcie na 9 równych części, otrzymamy:

$$7A_7 \cos 7x + 7B_7 \sin 7x = S_7 \quad \dots\dots\dots/19/$$

$$9A_9 \cos 9x + 9B_9 \sin 9x = S_9 \quad \dots\dots\dots/20/$$

gdzie S_7 i S_9 oznaczają sumy 7-miu i 9-ciu rzędnych w odpowiednich punktach podziału.

Pięć wzorów 16, 17, 18, 19 i 20 zawiera 10 niewiadomych współczynników A i B , dla znalezienia których potrzeba mieć 10 niezależnych od siebie równań. Równania te możemy z łatwością ułożyć, przeprowadzając obliczenia dla dwóch rozmaitych wartości x ; w tym wypadku najdogodniej wziąć najpierw $x=0$, następnie $x=\frac{\pi}{2}$. Jeżeli dla $x=0$ oznaczymy rzędną przez y_1 , sumy S_3, S_5, S_7, S_9 odpowiednio przez y_3, y_5, y_7, y_9 , zaś dla $x=\frac{\pi}{2}$ oznaczymy rzędną przez y'_1 i sumy odpowiednio przez y'_3, y'_5, y'_7, y'_9 , wtedy ze wzorów 16, 17, 18, 19 i 20 otrzymamy:

dla $x=0$

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 &= y_1 \\ 3A_3 + 3A_9 &= y_3 \\ 5A_5 &= y_5 \\ 7A_7 &= y_7 \\ 9A_9 &= y_9 \end{aligned} \right\} \dots/21/$$

dla $x = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + B_9 &= y_1' \\ -3B_3 + 3B_9 &= y_3' \\ 5B_5 &= y_5' \\ -7B_7 &= y_7' \\ 9B_9 &= y_9' \end{aligned} \right\} \dots\dots/22/$$

skąd odrazu znajdujemy wartości poszukiwanych współczynników.

Sposób postępowania w przypadku krzywej, symetrycznej względem osi odciętych, będzie więc następujący: bierzemy dowolny punkt na osi X , jako początek współrzędnych; od tego punktu ($x=0$) odkładamy na osi X odcinek równy 2π , odpowiadający jednemu okresowi; odmierzamy rzędną krzywej na początku współrzędnych y_1 ; następnie dzielimy odcinek kolejny na 3, 5, 7 i 9 równych części, odmierzając za każdym razem odpowiednie rzędne i sumując je przy uwzględnieniu znaków tych rzędnych; w ten sposób znajdujemy y_3, y_5, y_7, y_9 ; następnie przesuwamy się na osi X od początku współrzędnych o $1/4$ okresu ($x = \frac{\pi}{2}$) i postępujemy w sposób analogiczny, wyznaczając $y_1', y_3', y_5', y_7', y_9'$. Znaleziono wartości podstawiamy do układu równań /21/ i /22/

i rozwiązujemy te równania; obliczone wartości współczynników A i B podstawiamy do wzoru /15/, który określi analitycznie badaną krzywą.

W wypadku ogólnym, gdy badana krzywa nie wykazuje symetrii, musimy przedewszystkiem stwierdzić, czy szereg Fouriera /1/, określający poszukiwaną funkcję, zawiera stałą A_0 , która się oblicza ze wzoru /2/:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx;$$

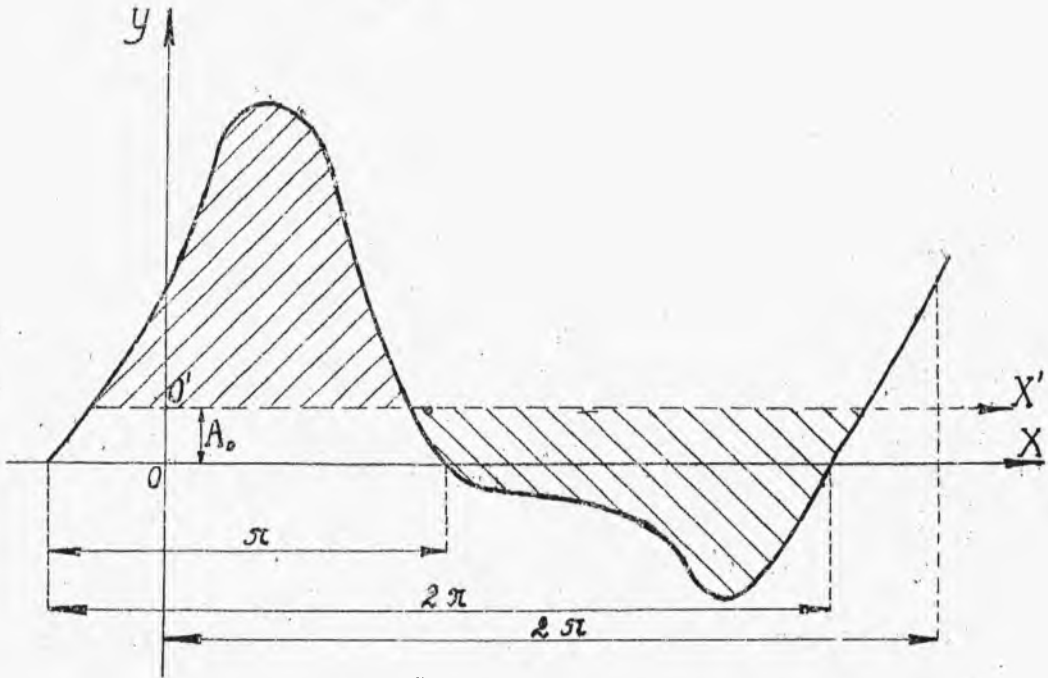
wyraz ten stanowi średnią rzędną wszystkich punktów krzywej, zawartych pomiędzy $x=0$ i $x=2\pi$, a więc w granicach całego okresu; ponieważ w jednej połowie okresu rzędne są dodatnie, w drugiej ujemne, przeto w rezultacie dla ogólnej średniej otrzymamy albo wielkość dodatnią, albo wielkość ujemną, albo zero. Praktycznie taką średnią możemy znaleźć, dzieląc okres od dowolnego punktu na osi X /np. od $x=0$ do $x=2\pi$ / na mniejszą lub większą liczbę części, w zależności od stopnia odkształcenia krzywej; liczba ta powinna być parzysta, aby w każdej połowie okresu wypadła jednakowa liczba działek; następnie edmierzamy wszyst-

kie rzędne, odpowiadające punktem podziału, obliczamy ich sumę z uwzględnieniem znaków, wreszcie dzielimy tę sumę przez liczbę rzędnych; otrzymany w ten sposób rezultat da nam A_0 . Jeżeli A_0 nie będzie równe zero /praktycznie - blizkie zero/, wtedy, przesuwając oś odciętych równolegle na odległość równą A_0 w stronę dodatnią lub ujemną, w zależności od znaku A_0 , otrzymany nowe osi współrzędnych, względem których odcięte krzywej pozostaną te same, zaś wszystkie rzędne będą zmniejszone o A_0 . W ten sposób w nowym układzie współrzędnych w szeregu Fouriera pozbedziemy się wyrazu stałego.

Na rys. 11 pokazana jest taka krzywa niesymetryczna; w jednej połowie okresu mamy przebieg inny, aniżeli w drugiej połowie; średnia wszystkich rzędnych, odpowiadających jednemu okresowi, wyniesi $OO' = A_0$;

wypadła ona w tym wypadku dodatnią. Po przeniesieniu osi OX do położenia $O'X'$, otrzymujemy nowy układ współrzędnych $O'X', O'Y'$, względem którego rozpatrywana krzywa określona będzie szeregiem Fouriera, zawierającym wyłącznie cosinusy i sinusy.

Znalezienie średniej rzędnej czyli A_0 może być uskuteczniene jeszcze lepiej za pomocą planimetru /przyrządu do określania pola powierzchni/. Rozpa-



rys. 11.

trując bowiem wyraz

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \, dx$$

i biorąc początek współrzędnych ($x=0$) w punkcie przecięcia się krzywej z osią X , od którego zaczynając rzędne krzywej przyjmują wartości dodatnie, będziemy mieli:

$$\int_0^{2\pi} y \, dx = \int_0^{\pi} y \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} y \, dx = S_1 - S_2,$$

gdzie S_1 oznacza pole powierzchni, zawartej pomiędzy krzywą i osią X w granicach $x=0$ i $x=\pi$.

zaś S_2 - pole powierzchni, ograniczonej krzywą i osią X w granicach $x = \pi$ i $x = 2\pi$; wyraz wzięty ze znakiem $-$, ponieważ w rozpatrywanych tutaj granicach wszystkie rzędne krzywej będą ujemne. Jeżeli więc za pomocą planimetru określimy pola S_1 i S_2 , to dla znalezienia A_0 trzeba różnicę tych wartości podzielić przez 2π . Jasnym jest, że po przesunięciu osi X do położenia $O'X'$ pola powierzchni, odpowiadające dodatnim i ujemnym rzędnym krzywej, będą sobie równe; na rys. 11 pola te są zakreskowane.

Przystępując do analizy krzywej, nie zawierającej w szeregu Fouriera stałej A_0 , musimy znaleźć współczynniki przy cosinusach i sinusach wszystkich harmonicznych, zarówno nieparzystych, jak i parzystych. Ograniczymy i w tym wypadku liczbę harmonicznych do 9-jej włącznie. Ustaliwszy w dowolnym punkcie na osi odciętych początek osi współrzędnych, odkładamy od dowolnego punktu na tej osi z odciętej x odcinek równy 2π . Odcinek ten dzielimy kolejno na 2, 3, 4, ..., 9 równych części, odmierzamy rzędne krzywej w punktach podziału i obliczamy odpowiednie sumy rzędnych z uwzględnieniem znaków rzędnych. Oznaczając jak i poprzednio przez y' rzędną krzywej, dla odciętej x , zaś przez

S_2, S_3, \dots, S_9 sumy rzędnych, odpowiadających 2, 3..9
działkom, otrzymamy, rozumując tak samo jak w po-
przednio rozpatrzonym przypadku, następujące wzo-
ry:

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \dots + A_9 \cos 9x + B_9 \sin 9x = y'$$

$$2A_2 \cos 2x + 2B_2 \sin 2x + 2A_4 \cos 4x + 2B_4 \sin 4x +$$

$$+ 2A_6 \cos 6x + 2B_6 \sin 6x + 2A_8 \cos 8x + 2B_8 \sin 8x = S_2$$

$$3A_3 \cos 3x + 3B_3 \sin 3x + 3A_6 \cos 6x +$$

$$+ 3B_6 \sin 6x + 3A_9 \cos 9x + 3B_9 \sin 9x = S_3$$

$$4A_4 \cos 4x + 4B_4 \sin 4x + 4A_8 \cos 8x + 4B_8 \sin 8x = S_4$$

$$5A_5 \cos 5x + 5B_5 \sin 5x = S_5$$

$$6A_6 \cos 6x + 6B_6 \sin 6x = S_6$$

$$7A_7 \cos 7x + 7B_7 \sin 7x = S_7$$

$$8A_8 \cos 8x + 8B_8 \sin 8x = S_8$$

$$9A_9 \cos 9x + 9B_9 \sin 9x = S_9$$

Dla znalezienia współczynników A i B musimy
ułożyć 18 równań niezależnych. Najpierw bierzemy
 $x = 0$, to znaczy wybieramy pierwszy punkt po-
działu w początku współrzędnych; oznaczając rzędna
krzywej w tym punkcie przez y_1 , zaś sumy rzęd-
nych przy kolejnych dzieleniach w tym wypadku
przez y_2, y_3, \dots, y_9 otrzymane z powyższych wzo-
rów:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_9 = y_1$$

$$A_2 + A_4 + A_6 + A_8 = \frac{y_2}{2}$$

$$A_3 + A_6 + A_9 = \frac{y_3}{3}$$

$$A_4 + A_8 = \frac{y_4}{4}$$

$$A_5 = \frac{y_5}{5}$$

$$A_6 = \frac{y_6}{6}$$

$$A_7 = \frac{y_7}{7}$$

$$A_8 = \frac{y_8}{8}$$

$$A_9 = \frac{y_9}{9}$$

skąd określamy wszystkie współczynniki A .

Dla znalezienia współczynników B musimy dać x jakąkolwiek inną wartość, ale taką, aby te współczynniki pozostały we wzorach, czyli aby żaden z sinusów nie stał się równym zero /przy $x = \frac{\pi}{2}$ jak to czyniliśmy w poprzednim przypadku zginęłyby we wzorach współczynniki B z parzystymi indeksami/. Oczywiście dogodniej jest przyjąć dla x wartość taką, aby ona stanowiła π podzielone przez liczbę całkowitą większą niż 9 np. $\frac{\pi}{10}$ lub $\frac{\pi}{12}$. Odmierzając od nowego punktu od-

ciętej odcinek równy 2π i postępując jak poprzednio, otrzymamy jeszcze 9 równań dla znalezienia współczynników B .

§ 5. Sumowanie prądów. Wiadomo, że suma 2-ch prądów sinusoidalnych o tym samym okresie a różnych amplitudach i fazach jest również prądem sinusoidalnym o tym samym okresie. Oznaczmy wartości chwilowe 2-ch prądów przez i_1 i i_2 , ich amplitudy przez J_1 i J_2 , kąt przesunięcia fazy drugiego prądu względem pierwszego przez φ . Prąd wypadkowy niech ma wartość chwilową i oraz amplitudę J ; kąt przesunięcia fazy prądu wypadkowego względem pierwszego z danych prądów oznaczmy przez ψ , zaś pulsację przez ω . Wtedy mamy:

$$i_1 = J_1 \cdot \sin \omega t; \quad i_2 = J_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi);$$

$$i = J \cdot \sin(\omega t + \psi); \quad i = i_1 + i_2.$$

Zatem

$$J_1 \sin \omega t + J_2 \sin(\omega t + \varphi) = J \cdot \sin(\omega t + \psi);$$

$$J_1 \sin \omega t + J_2 \sin \omega t \cos \varphi + J_2 \cos \omega t \sin \varphi =$$

$$= J \sin \omega t \cos \psi + J \cos \omega t \sin \psi;$$

$$(J_1 + J_2 \cos \varphi - J \cos \psi) \sin \omega t + (J_2 \sin \varphi - J \sin \psi) \cos \omega t = 0;$$

Ponieważ równość ta zachodzi dla wszystkich wartości t , więc musi być:

$$I_1 + I_2 \cos \varphi - I \cos \psi = 0; \quad I_2 \sin \varphi - I \sin \psi = 0;$$

Skąd

$$I \cos \psi = I_1 + I_2 \cos \varphi; \quad I \sin \psi = I_2 \sin \varphi.$$

Podnosząc oba ostatnie równania do kwadratu i dodając stronami znajdziemy:

$$I^2 = I_1^2 + 2 I_1 I_2 \cos \varphi + I_2^2;$$

skąd

$$I = \sqrt{I_1^2 + 2 I_1 I_2 \cos \varphi + I_2^2}$$

dzieląc zaś drugie równanie przez pierwsze otrzymamy:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \psi = \frac{I_2 \sin \varphi}{I_1 + I_2 \cos \varphi}}}$$

W ten sposób znaleźliśmy amplitudę i kąt przesunięcia fazy prądu wypadkowego.

Jeżeli amplitudy prądów składowych są jednakowe

$$I_1 = I_2,$$

wtedy

$$I = \sqrt{2 I_1^2 + 2 I_1^2 \cos \varphi} = I_1 \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = \underline{\underline{2 I_1 \cos \frac{\varphi}{2}}};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{I_1 \sin \varphi}{I_1 + I_1 \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2};$$

$$\psi = \frac{\varphi}{2};$$

Przypuśćmy teraz, że mamy dwa jednakowe prądy odkształcone, przesunięte względem siebie o kąt φ_1 ; ich harmoniczne jednakowego rzędu k oznaczmy przez i_{1k} , i_{2k} ; mają one oczywiście równe amplitudy I_k , lecz są przesunięte względem siebie o pewien kąt.

$$i_{1k} = I_k \sin k\omega t; \quad i_{2k} = I_k \sin k(\omega t + \varphi_1) = \\ = I_k \sin(k\omega t + k\varphi_1);$$

oznaczmy

$$k\varphi_1 = \varphi_k.$$

Suma tych 2-ech harmonicznych da nam sinusoidę o tej samej oczywiście częstotliwości, a której amplituda i kąt przesunięcia razy będą

$$I'_k = 2 I_k \cos \frac{\varphi_k}{2} = 2 I_k \cos \frac{k\varphi_1}{2}; \\ \psi_k = \frac{\varphi_k}{2} = \frac{k\varphi_1}{2}.$$

Będzie to zatem harmoniczna prądu wypadkowego tego samego rzędu:

$$i_k = i_{1k} + i_{2k} = 2 I_k \cos \frac{k\varphi_1}{2} \sin(k\omega t + \frac{k\varphi_1}{2});$$

W szczególnym przypadku harmoniczne prądów składowych mogą się znosić i prąd wypadkowy może być pozbawiony odpowiedniej harmonicznej. Trzeba na to, żeby

$$I_k' = 2 I_k \cos \frac{k\varphi_1}{2} = 0; \quad \cos \frac{k\varphi_1}{2} = 0; \quad \frac{k\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2}(2m-1);$$

$$k\varphi_1 = \pi(2m-1); \quad \varphi_1 = \frac{2m-1}{k} \pi;$$

Czyli prąd wypadkowy będzie pozbawiony harmonicznej pewnego rzędu, o ile kąt przesunięcia faz prądów składowych tak się ma do π , jak dowolna liczba nieparzysta ma się do wskaźnika rzędu zniesionej harmonicznej.

Odpowiednia harmoniczna prądu wypadkowego osiągnie największą amplitudę, kiedy

$$\cos \frac{k\varphi_1}{2} = 1; \quad \frac{k\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 2m; \quad k\varphi_1 = 2m\pi;$$

$$\varphi_1 = \frac{2m}{k} \pi;$$

to jest kiedy kąt przesunięcia fazy tak się ma do π , jak dowolna liczba parzysta ma się do wskaźnika rzędu wzmożonej harmonicznej.

§ 6. Wpływ samoindukcji i pojemności na kształt krzywej prądu. Przypuśćmy, że w obwód prądu od-

kształconego o napięciu, którego wartość chwilowa jest

$$v = \sum_{k=0}^{k=n} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t),$$

albo

$$v = \sum_{k=0}^{k=n} V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

włączyliśmy samoindukcję \mathcal{L} . Przypuśćmy, że możemy pominąć wszelkie inne opory czyli, że całkowite napięcie zewnętrzne idzie na pokonanie napięcia samoindukcji. To ostatnie zaś równe jest, jak wiadomo, iloczynowi współczynnika samoindukcji przez przyrost prądu w czasie

$$v = \mathcal{L} \frac{di}{dt};$$

Stąd

$$di = \frac{1}{\mathcal{L}} v dt;$$

$$i = \int \frac{1}{\mathcal{L}} v dt = \frac{1}{\mathcal{L}} \int v dt;$$

Ale

$$\begin{aligned} \int v dt &= \int \left[\sum_{k=0}^{k=n} V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) \right] dt = \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \int V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{k=0}^{k=n} \frac{V_{km}}{k\omega} \cos(k\omega t + \varphi_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{V_{km}}{k\omega} \sin(k\omega t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}) ; \end{aligned}$$

Wobec tego

$$i = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{V_{km}}{k\omega L} \sin(k\omega t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}) ;$$

Widzimy, że wszystkie sinusoidy prądów są opóźnione o kąt prosty względem swoich napięć, zaś amplitudy prądów będą równe

$$I_{km} = \frac{V_{km}}{k\omega L} ;$$

Wyraz ωL , jak wiadomo, stanowi oporność indukcyjną w obwodzie prądu sinusoidalnego przy pulsacji ω ; wyraz $k\omega L$ będzie stanowił oporność indukcyjną, odpowiadającą harmonicznej ze wskaźnikiem k .

Doszliśmy więc do następującego wniosku:

Prąd jest względem napięcia opóźniony o kąt prosty. Amplituda każdej harmonicznej prądu równa się amplitudzie napięcia tej samej harmonicznej, podzielonej przez oporność indukcyjną tej harmo-

nicznej. Wynika stąd, że amplituda harmonicznej
prądu jest tem mniejsza w stosunku do odpowiedniej
harmonicznej napięcia, im wskaźnik harmonicznej
jest wyższy, czyli samoindukcja tłumi bardziej har-
moniczne wyższe. W ten sposób przez wprowadzenie
do obwodu samoindukcji zbliżamy krzywą prądu do
sinusoidy.

Przypuśćmy teraz, że w obwód tego prądu od-
kształconego o napięciu

$$v = \sum_{k=0}^{k=n} V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

włączamy kondensator o pojemności C i że możemy
pominąć wszelkie inne opory, czyli, że całkowite
napięcie zewnętrzne idzie na pokonanie napięcia
na kondensatorze. To ostatnie zaś równe jest,
jak wiadomo, iloczynowi odwrotności pojemności
przez całkę prądu

$$v = \frac{1}{C} \int i dt$$

Różniczkując, mamy:

$$dv = \frac{1}{C} i dt ; i = C \frac{dv}{dt} ;$$

Ale

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{k=n} V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) \right] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{d}{dt} \left[V_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} V_{km} k\omega \cos(k\omega t + \varphi_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} k\omega V_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k + \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

Wobec tego

$$i = \sum_{k=0}^{k=n} k\omega C V_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k + \frac{\pi}{2}\right);$$

Z tego wzoru widać, że wszystkie sinusoidy prądów są przyspieszone o kąt prosty względem swoich napięć, zaś amplitudy prądów będą równe

$$I_{km} = k\omega C V_{km} = \frac{1}{\frac{1}{k\omega C}} V_{km}.$$

Wyraz $\frac{1}{\omega C}$ stanowi oporność pojemnościową w obwodzie prądu sinusoidalnego przy pulsacji ω , wyraz $\frac{1}{k\omega C}$ będzie stanowił oporność pojemnościową, odpowiadającą harmoniczej ze wskaźnikiem k .

Otrzymaliśmy więc następujący rezultat:

Prąd wyprzedza napięcie o kąt prosty. Amplituda każdej harmoniczej prądu równa się amplitudzie napięcia tej samej harmoniczej, podzielonej przez

oporność pojemnościową tej harmonicznej. Wynika stąd, że amplituda harmonicznej prądu jest tem większa w stosunku do odpowiedniej harmonicznej napięcia, im wskaźnik harmonicznej jest wyższy, czyli pojemność potęguje harmoniczne wyższe.

W ten sposób przez wprowadzenie do obwodu pojemności krzywa prądu będzie bardziej odkształcona, czyli bardziej oddalona od sinusoidy, niż krzywa napięcia.

§ 7. Spółczynnik kształtu i spółczynnik amplitudy. Spółczynnikiem kształtu krzywej prądu nazywamy stosunek jego wartości skutecznej do wartości średniej

$$S_k = \frac{Y}{Y_s};$$

Wartość skuteczna jest określona wzorem:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 dx},$$

zaś wartość średnia

$$Y_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx;$$

w wypadkach szczególnych, gdy mamy krzywe symetryczne, możemy rozpatrywać tylko część krzywej, odpowiadającą 1/2 lub 1/4 okresu.

Spółczynnikiem amplitudy krzywej prądu nazywamy stosunek jego wartości maksymalnej do wartości skutecznej

$$S_a = \frac{Y_m}{Y} ;$$

Znajdziemy te spółczynniki dla niektórych krzywych:

a/ Sinusoidea /rozpatrujemy 1/2 okresu/.

$$Y_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Y_m \sin x dx =$$

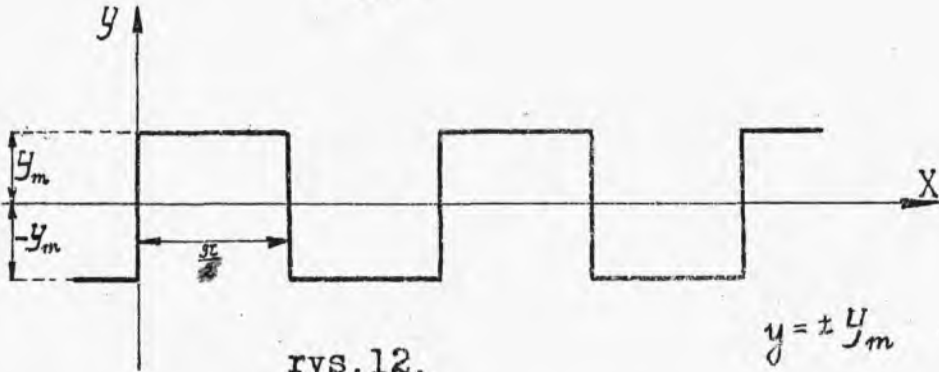
$$= \frac{1}{\pi} Y_m \left| -\cos x \right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} Y_m ;$$

$$Y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}} ;$$

$$S_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{Y_m/\sqrt{2}}{2/\pi \cdot Y_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 ;$$

$$S_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{Y_m/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41 ;$$

b/ Krzywa płaska, to jest krzywa prądu, zmieniającego się w ten sposób, że jest w ciągu każdego półokresu stały, poczem zmienia znaki, zachowując tę samą wartość bezwzględną /rys.12/ ; rozpatrujemy 1/2 okresu.



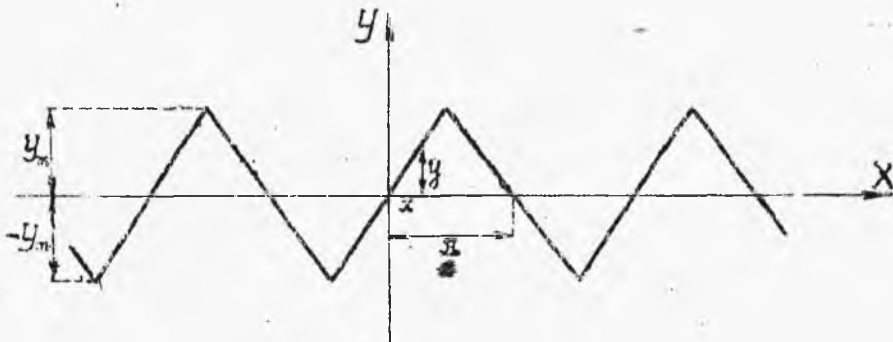
$$Y = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y_m^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{\pi} y_m^2 \int_0^{\pi} dx} = \sqrt{\frac{1}{\pi} y_m^2 \pi} = y_m;$$

$$Y_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y_m dx = \frac{1}{\pi} y_m \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} y_m \pi = y_m;$$

$$s_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{y_m}{y_m} = 1;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{y_m}{y_m} = 1;$$

c/ Krzywa ostra /w postaci trójkąta/, to jest krzywa prądu, zmieniającego się linjowo od największej do najmniejszej wartości bezwzględnie równych, które osiąga co pół okresu /rys.13/.



rys.13.

Rozpatrujemy 1/4 okresu.

$$y = Y_m \cdot \frac{x/\pi}{2} = Y_m \cdot \frac{2x}{\pi};$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} y^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} Y_m^2 \cdot \frac{4x^2}{\pi^2} dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot Y_m^2 \int_0^{\pi/2} x^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{\pi^3} \cdot Y_m^2 \cdot \frac{\pi^3}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{Y_m^2}{3}} = \frac{Y_m \sqrt{3}}{3};$$



$$Y_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} y dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} Y_m \frac{2x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot Y_m \int_0^{\pi/2} x dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \cdot Y_m \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot 2} = \frac{Y_m}{2};$$

$$\delta_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{Y_m/3 \cdot \sqrt{3}}{Y_m/2} = \frac{2}{3} \sqrt{3} \approx 1,15;$$

$$\delta_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{Y_m/3 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,73;$$

Zestawiając otrzymamy:

Kształt krzywej	δ_k	δ_a
	1	1
Sinusoida	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$	$\sqrt{2} \approx 1,41$
	$\frac{2}{3} \sqrt{3} \approx 1,15$	$\sqrt{3} \approx 1,73$

Zwracamy uwagę, że krzywa płaska ma dwa współczynniki mniejsze, krzywa ostra większe, niż sinusoida.

§ 8. Wartość skuteczna prądu odkształconego.

Jak wiadomo, wartością skuteczną funkcji okresowo zmiennej nazywamy wyrażenie

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 dx} ;$$

Dla prądu zmiennego odkształconego mamy :

$$y = \sum_{k=0}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) ;$$

Jeżeli tę sumę podniesiemy do kwadratu, otrzymamy sumę wyrazów następujących postaci:

$$A_k^2 \cos^2 kx ; 2A_k B_k \cos kx \sin kx ; B_k^2 \sin^2 kx ;$$

$$A_k A_l \cos kx \cos lx ; A_k B_l \cos kx \sin lx ; B_k B_l \sin kx \sin lx ;$$

Całka sumy równa się sumie całek, zatem pod pierwiastkiem otrzymamy sumę całek wyrazów tych postaci, wziętych w granicach od 0 do 2π . Mieliśmy już poprzednio /str.4/, że

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos kx dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$$
$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0;$$

bo każdy taki iloczyn można zamienić na sumę 2-ech funkcji trygonometrycznych, a tych całki są właśnie zerami. Pozostaną zatem jedynie wyrażenia postaci;

$$i \quad \int_0^{2\pi} A_k^2 \cos^2 kx dx$$

$$\int_0^{2\pi} B_k^2 \sin^2 kx dx;$$

Ale

$$i \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi;$$

Skąd

$$\int_0^{2\pi} A_k^2 \cos^2 kx dx = \pi A_k^2; \quad \int_0^{2\pi} B_k^2 \sin^2 kx dx = \pi B_k^2;$$

Zatem wartość skuteczna

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \right]^2 dx} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{k=n} (\pi A_k^2 + \pi B_k^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2)} ; \end{aligned}$$

Ale szereg

$$y = \sum_{k=0}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

możemy przedstawić też w postaci:

$$y = \sum_{k=0}^{k=n} F_k \sin(kx + \varphi_k),$$

gdzie

$$A_k \cos kx + B_k \sin kx = F_k \sin(kx + \varphi_k);$$

$$F_k^2 = A_k^2 + B_k^2 ; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k} ;$$

Zatem wartość skuteczna będzie:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} (A_k^2 + B_k^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} F_k^2} ;$$

Wartość skuteczna napięcia /wzgl. natężenia/
prądu odkształconego równa się pierwiastkowi kwa-

dratowemu z połowy sumy kwadratów amplitud napięć /wzgl. natężeń/ wszystkich harmoniczych.

Ale wartość skuteczna funkcji sinusoidalnej, a więc napięcie, wzgl. natężenie, każdej harmonicznej równa się wartości maksymalnej, podzielonej przez $\sqrt{2}$;

$$Y_k = \frac{Y_{km}}{\sqrt{2}}; \quad 2 Y_k^2 = Y_{km}^2;$$

Zatem

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} \sum Y_{km}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \sum Y_k^2} = \sqrt{\sum Y_k^2};$$

Dla napięcia

$$V = \sqrt{\sum V_k^2} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \dots + V_n^2};$$

Dla prądu

$$J = \sqrt{\sum J_k^2} = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \dots + J_n^2};$$

Wartość skuteczna napięcia /wzgl. natężenia/ prądu odkształconego równa się pierwiastkowi kwadratowemu sumy kwadratów wartości skutecznych napięć /wzgl. natężeń/ wszystkich harmoniczych.

Stosunek wartości skutecznej prądu odkształconego do wartości skutecznej głównej fali stanowi współczynnik krzywej prądu /napięcia lub natężenia/.

Dla krzywej napięcia będzie to

$$s = \frac{V}{V_1} = \frac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}}{V_1}.$$

§ 9. Obwód prądu odkształconego.

Rozpatrując obwód, w którym mamy oporności: rzeczywistą, indukcyjną i pojemnościową, możemy napisać dla prądu sinusoidalnego:

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V_m \sin \omega t.$$

To równanie daje, jak wiadomo:

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

gdzie:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Rozpatrzmy teraz obwód, w którym działa napięcie o przebiegu odkształconym. Wiemy, że napięcie takie rozpada się na szereg harmonicznym o przebiegu sinusoidalnym, o różnych amplitudach i częstotliwościach. Wobec niezależności prądów, płynących w jednym obwo-

dzie, każda harmoniczna napięcia daje, niezależnie od innych, prąd o przebiegu sinusoidalnym o częstotliwości tej samej, co powodujące go napięcie. Wszystkie te prądy, dodając się, dadzą prąd wypadkowy, dla którego będą zatem harmonicznymi, przyczem każda harmoniczna napięcia da harmoniczną prądu tego samego rzędu. Zależność ich wzajemna będzie tej samej postaci, co zależność napięć i natężeń zwykłego prądu sinusoidalnego. Ponieważ częstotliwość harmonicznej rzędu k jest k razy większa od częstotliwości prądu wypadkowego, zatem

$$I_k = \frac{V_k}{\sqrt{R^2 + (k\omega L - 1/k\omega C)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{k\omega L - 1/k\omega C}{R}$$

Zbadajmy, jakie warunki muszą być spełnione, aby wpływy samoindukcji i pojemności znosiły się wzajemnie dla danej harmonicznej, czyli, żeby dana harmoniczna dawała rezonans napięć. Będzie to wtedy, gdy

$$k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0; \quad k\omega L = \frac{1}{k\omega C};$$

$$k^2 \omega^2 LC = 1; \quad LC = \frac{1}{k^2 \omega^2};$$

Stąd

$$k = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}}$$

Ale wobec $\omega = 2\pi f$

$$k = \frac{1}{2\pi f \sqrt{LC}}$$

Widzimy stąd, że rezonans może zachodzić najwyżej dla jednej harmonicznej naraz i to tylko wtedy, kiedy spełniony jest warunek $\mathcal{L}C = \frac{1}{k^2 \omega^2}$.

Jeżeli dla danej harmonicznej zachodzi rezonans napięć, to dla tej harmonicznej oporność pozorna staje się najmniejszą i równą oporności rzeczywistej, a zatem natężenie prądu tej harmonicznej będzie największe; inaczej, wpływ danej harmonicznej napięcia na prąd wypadkowy potęguje się. To zjawisko pozwala nam wyodrębnić w badaniu poszczególne harmoniczne napięcia.

§ 10. Moc prądu odkształconego. Równoważny prąd sinusoidalny.

Każda harmoniczna prądu odkształconego, jako prąd sinusoidalny, daje moc równą iloczynowi napięcia przez natężenie prądu i przez współczynnik mocy,

zależny od przesunięcia fazy prądu względem napięcia. Dla otrzymania mocy prądu odkształconego musimy wziąć sumę mocy wszystkich harmonicznych tego prądu. W ten sposób możemy napisać dla mocy P prądu odkształconego wzór następujący:

$$P = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + V_n I_n \cos \varphi_n .$$

Wyobraźmy sobie prąd sinusoidalny, którego napięcie i natężenie mają wartości skuteczne V i I , zupełnie takie same, jak wartości skuteczne napięcia i natężenia prądu odkształconego, to znaczy:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2} , \quad \dots \dots \dots /21/$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2} . \quad \dots \dots \dots /22/$$

Niech natężenie prądu I będzie przesunięte względem napięcia V o kąt φ , dobrany w ten sposób, aby moc tego prądu sinusoidalnego wypadła taka sama, jak dla prądu odkształconego; wtedy będziemy mieli:

$$P = V I \cos \varphi = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 +$$

$$+ \dots + V_n I_n \cos \varphi_n \quad \dots \dots \dots /23/$$

Taki prąd sinusoidalny, którego napięcie i natężenie mają te same wartości skuteczne, co i prąd odkształcony i którego moc równa się mocy prądu odkształconego, nazywamy prądem sinusoidalnym równoważnym prądowi odkształconemu.

$\cos \varphi$ nazywamy współczynnikiem mocy równoważnego prądu; ten współczynnik zawsze może być odpowiednio dobrany, wynika to z tego, że na podstawie wzorów /23/ oraz /21/ i /22/:

$$\cos \varphi = \frac{V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + V_n I_n \cos \varphi_n}{V(\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2})(I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2)} ; \quad \dots /24/$$

otóż łatwo można dowieść, że mianownik w ostatnim wzorze nie może być mniejszy od licznika, czyli że wyraz ten jest albo mniejszy albo równy jedności; inaczej mówiąc, zawsze można dobrać kąt φ dla otrzymania potrzebnego współczynnika mocy.

W wypadku, gdy w obwodzie prądu odkształconego mamy oporność rzeczywistą R , i gdy wielkość tę przyjmiemy stałą dla wszystkich częstotliwości /harmonicznych/, to znaczy nie weźmiemy pod uwagę działania naskórkowości, wówczas możemy napisać:

$$VI \cos \varphi = I^2 R \quad , \quad \dots \dots \dots /25/$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 I_1 \cos \varphi_1 = I_1^2 R, \\ \dots \\ V_n I_n \cos \varphi_n = I_n^2 R ; \end{array} \right\} \dots /26/$$

wzór /25/ daje

$$\cos \varphi = \frac{JR}{V} = R \cdot \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}}, \quad \dots /27/$$

określając zaś ze wzorów /26/ wartości I_1, \dots, I_n i podstawiając do /27/ otrzymamy:

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{V_1^2 \cos^2 \varphi_1 + V_2^2 \cos^2 \varphi_2 + \dots + V_n^2 \cos^2 \varphi_n}{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}}$$

§ 11. Wpływ kształtu krzywej prądu przy pomiarach indukcyjności i pojemności.

Przypuśćmy, że do zacisków prądu zmiennego sinusoidalnego o napięciu V załączymy tylko oporność indukcyjną, na przykład cewkę o bardzo małej oporności rzeczywistej w porównaniu do indukcyjności własnej \mathcal{L} . Wówczas, oznaczając przez I natężenie prądu, płynącego w takim obwodzie, będziemy

mieli przy pulsacji ω

$$V = I \omega L,$$

skąd dla indukcyjności otrzymujemy:

$$L = \frac{V}{I \omega}.$$

Jeżeli zaś taką samą cewkę załączymy do napięcia o takiej samej wartości skutecznej V , lecz o przebiegu odkształconym /bierzemy krzywą symetryczną względem osi X i początku/, wtedy będziemy mieli przy wartości chwilowej napięcia:

$$v = V_{1m} \sin \omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin 5\omega t + \dots$$

prąd o wartości chwilowej:

$$i = \frac{V_{1m}}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{V_{3m}}{3\omega L} \sin\left(3\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) + \\ + \frac{V_{5m}}{5\omega L} \sin\left(5\omega t - \frac{5\pi}{2}\right) + \dots$$

Skąd dla wartości skutecznych będziemy mieli:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_3^2 + V_5^2 + \dots}$$

$$I = \frac{1}{\omega L} \sqrt{V_1^2 + \frac{V_3^2}{3^2} + \frac{V_5^2}{5^2} + \dots}$$

Oznaczając wyraz $\frac{V}{\omega I}$ przy prądzie odkształconym przez L' , będziemy mieli:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot \sqrt{\frac{V_1^2 + V_3^2 + V_5^2 + \dots}{V_1^2 + \frac{V_3^2}{3^2} + \frac{V_5^2}{5^2} + \dots}}$$

Ponieważ podpierwiastkowa jest większa od jedności, gdyż licznik jest większy od mianownika, przeto oczywiście:

$$\mathcal{L}' > \mathcal{L};$$

to znaczy, że przy mierzeniu indukcyjności własnej prądem odkształconym otrzymujemy rezultat większy, niż przy prądzie sinusoidalnym.

Do analogicznego rezultatu dojdziemy również przy mierzeniu pojemności. Jeżeli mianowicie do napięcia V załączymy kondensator o pojemności C ze znikomą małą opornością rzeczywistą, wtedy przy prądzie sinusoidalnym

$$V = I \frac{1}{\omega C},$$

skąd

$$C = \frac{I}{\omega V}.$$

Przy prądzie odkształconym:

$$v = V_{1m} \sin \omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin 5\omega t + \dots ;$$

$$i = V_{1m} \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + V_{3m} 3\omega C \sin\left(3\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) + \\ + V_{5m} 5\omega C \sin\left(5\omega t + \frac{5\pi}{2}\right) + \dots ;$$

zatem

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_3^2 + V_5^2 + \dots} ,$$

$$J = \omega C \sqrt{V_1^2 + 3^2 V_3^2 + 5^2 V_5^2 + \dots} .$$

Oznaczając przy prądzie odkształconym $\frac{J}{\omega V}$ przez C' będziemy mieli

$$C' = C \sqrt{\frac{V_1^2 + 3V_3^2 + 5V_5^2 + \dots}{V_1^2 + V_3^2 + V_5^2 + \dots}} ,$$

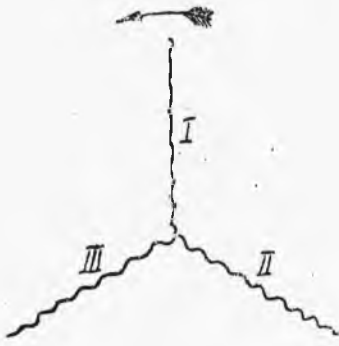
skąd wnioskujemy, że

$$C' > C .$$

§ 12. Trójfazowe prądy odkształcone.

a/ Połączenie gwiazdowe /rys. 14/.

Przy prądzie sinusoidalnym mamy w poszczególnych fazach napięcia sinusoidalne o przebiegu następującym:



$$v_I = V_m \sin \omega t;$$

$$v_{II} = V_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$v_{III} = V_m \sin(\omega t - 240^\circ);$$

Przy prądzie odkształconym napięcie każdej fazy będzie miało przebieg:

rys. 14.

$$v_I = V_{1m} \sin \omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin 5\omega t + \dots$$

$$v_{II} = V_{1m} \sin(\omega t - 120^\circ) + V_{3m} \sin 3(\omega t - 120^\circ) + V_{5m} \sin 5(\omega t - 120^\circ) + \dots$$

$$v_{III} = V_{1m} \sin(\omega t - 240^\circ) + V_{3m} \sin 3(\omega t - 240^\circ) + V_{5m} \sin 5(\omega t - 240^\circ) + \dots$$

Wzory te możemy przepisać w sposób następujący:

$$v_I = V_{1m} \sin \omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin 5\omega t + \dots$$

$$v_{II} = V_{1m} \sin(\omega t - 120^\circ) + V_{3m} \sin(3\omega t - 360^\circ) + V_{5m} \sin(5\omega t - 600^\circ) + \dots$$

$$v_{III} = V_{1m} \sin(\omega t - 240^\circ) + V_{3m} \sin(3\omega t - 720^\circ) + V_{5m} \sin(5\omega t - 1200^\circ) + \dots$$

albo jeszcze inaczej:

$$v_I = V_{1m} \sin \omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin 5\omega t + \dots$$

$$v_{II} = V_{1m} \sin(\omega t - 120^\circ) + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin(5\omega t - 240^\circ) + \dots$$

$$v_{III} = V_{1m} \sin(\omega t - 240^\circ) + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin(5\omega t - 120^\circ) + \dots$$

Widzimy stąd, że harmoniczne o wskaźniku, podzielny przez 3, a więc 3, 9 i t.d., znajdują się w fazie we wszystkich uzwojeniach. Napięcia międzyprzewodowe skojarzone będą miały wartości chwilowe, równe różnicy takichże wartości napięć fazowych, np. między I i II przewodem.

$$\begin{aligned}u_{I-II} = v_I - v_{II} &= V_{1m} [\sin \omega t - \sin(\omega t - 120^\circ)] + \\ &+ V_{3m} [\sin 5\omega t - \sin(5\omega t - 240^\circ)] + \dots = \\ &= V_{1m} \sqrt{3} \sin(\omega t + 30^\circ) + V_{3m} \sqrt{3} \sin(5\omega t - 30^\circ) + \dots,\end{aligned}$$

więc zginą w nich te harmoniczne, rząd których określony jest liczbą, wielokrotną 3-oh. Jeżeli w układzie gwiazdowym mamy przewód zerowy, to przez ten przewód nawet przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz będzie płynął prąd, powstający pod wpływem tych napięć, które między przewodami się znoszą, t.zn. napięć harmonicznych, rząd których określony jest liczbą wielokrotną 3-oh.

b/ Połączenie trójkątne /rys.15/.

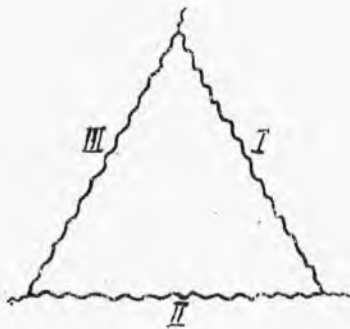
I tu, jak poprzednio, dla prądu sinusoidalnego:

$$v_I = V_m \sin \omega t ;$$

$$v_{II} = V_m \sin(\omega t - 120^\circ) ;$$

$$v_{III} = V_m \sin(\omega t - 240^\circ)$$

i w tym wypadku suma wartości chwilowych napięć poszczególnych faz jest stale równa zero. Przy prądzie



rys.15.

odkształconym znajdziemy, jak poprzednio, że harmoniczne o wskaźnikach, niepodzielnych przez 3 są przesuwane każda względem następnej o 120° , wobec czego przy sumowaniu wartości chwilowe tych harmo-

nicznych znoszą się, natomiast wartości chwilowe harmonicznych, podzielnych przez 3, dają stale sumę różną od zera, a więc w trójkącie będziemy mieli w rezultacie napięcie, skutkiem czego stale będzie płynął prąd, zawierający harmoniczne 3, 9 i t.d.

Zwykle rzadko stosuje się w prądnicach układ trójkątny, gdyż twornik takiej maszyny przy odkształconym napięciu dawałby straty na ciepło Joule'a nawet wówczas, gdy prąd na zewnątrz nie byłby pobierany.

R O Z D Z I A Ł II.

PRZEWODY DŁUGIE.

§ 1. Stałe obwodu. Dotychczas w obwodach prądu zmiennego zakładaliśmy, że pojemność i indukcyjność są skupione w poszczególnych miejscach obwodu w postaci kondensatorów i cewek indukcyjnych. W urządzeniach elektrycznych mamy również do czynienia z pojemnością i indukcyjnością, rozłożonemi wzdłuż obwodu. Ma to miejsce w przewodach, łączących źródło prądu z odbiornikami, a także we wszelkiego rodzaju przyrządach /jak np. transformatory, prądnice it.p./ zawierających przewody. W przewodach krótkich, łączących źródła z odbiornikiem, wpływ pojemności i indukcyjności samych przewodów jest zwykle nieznaczny, natomiast w przewodach dłuższych musimy przyjmować te wielkości do obliczeń.

Mówimy o równomiernem i nierównomiernem rozłożeniu pojemności i indukcyjności. Pierwsze zachodzi, jeżeli wartości tych wielkości dla odcinka przewodu danej długości są jednakowe wzdłuż całej linii elektrycznej; w przeciwnym wypadku mamy rozłożenie nierównomierne. Zajmiemy się tylko pierwszym przypadkiem.

Przy większej długości przewodów należy się liczyć jeszcze ze stratami, spowodowanymi przez:
1/ niedoskonałość izolacji, 2/ /w kablach/ przez zjawisko histerezy dielektrycznej, zależnej, jak wiadomo, od częstotliwości prądu, pojemności przewodnika i napięcia, wreszcie w liniach napowietrznych, przy wysokim napięciu, może zachodzić wyładowanie elektryczności czyli t.zw. ulot w rozmaitych postaciach aż do ^{powstania} korony świetlnej. Straty te powodują stopniowe zmniejszenie się natężenia prądu o pewną wartość, zwaną prądem upływu, wprost proporcjonalną do napięcia. Czynniki proporcjonalności nazywamy spółczynnikami upływu lub wprost upływnością i oznaczamy przez A . Jeżeli prąd upływu przy napięciu V oznaczmy przez J_u będziemy mieli:

$$A = \frac{J_u}{V} ; \quad J_u = A V.$$

Zależność ta jest analogiczna do zależności między napięciem, natężeniem i przewodnością rzeczywistą:

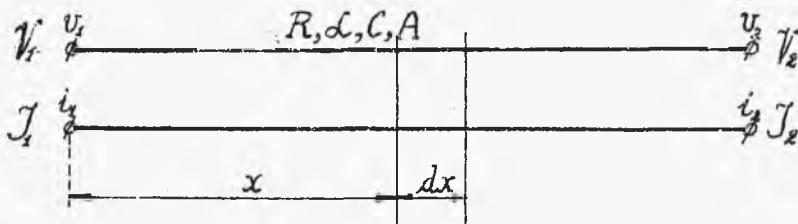
$$G = \frac{J}{V} ; \quad J = G V.$$

Jak widać z tych wzorów upływność może być

określona w tych samych jednostkach, co i przewodność, a więc w Mho lub Siemensach.

Oporność rzeczywistą, indukcyjność, pojemność i upływność przewodu będziemy podawali w odniesieniu do jednostki długości linii /w praktyce na 1 km./ i oznaczali je przez R, L, C i A . Linja zatem o długości l posiada oporność rzeczywistą Rl , indukcyjność Ll , pojemność Cl i upływność Al .

§ 2. Równania zasadnicze. Rozpatrzmy linię dwuprzewodową, na początku której /u źródła/ wartości



chwilowe napięcia /na zaciskach/ i prądu wypływającego na linię są

rys. 16.

V_1 i I_1 , zaś wartości skuteczne V_2 i I_2 ; na końcu /u odbiornika/ oznaczmy te wielkości odpowiednio przez v_2, i_2, V_2 i I_2 /rys. 16/. Wartości R, L, C i A odnosimy do jednostki długości obu przewodów. Rozpatrzmy odcinek tej linii nieskończenie małej długości dx ,

odległy o x od jej początku. Niech wartości chwilowe napięcia i prądu w tym miejscu będą v_x i i_x , skuteczne V_x i I_x . Oporność, indukcyjność, pojemność i upływność tego odcinka będą miały wartości Rdx , Ldx , Cdx i $A dx$.

Napięcie v_x i prąd i_x są funkcjami dwóch zmiennych: czasu t oraz odległości x . Na rozpatrywanym odcinku dx zachodzi zmiana wartości zarówno napięcia, jak i natężenia prądu. Idąc w kierunku dodatnim, t. j. od strony źródła do odbiornika, będziemy mieli na początku tego odcinka napięcie v_x i prąd i_x , zaś w końcu odcinka napięcie $v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$ oraz prąd $i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx$. Zmiana tych wielkości wyniesie wobec tego dla napięcia

$$v_x - (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) = - \frac{\partial v_x}{\partial x} dx;$$

dla prądu:

$$i_x - (i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx) = - \frac{\partial i_x}{\partial x} dx.$$

Zmiana napięcia spowodowana jest spadkiem napięcia na oporności rzeczywistej i oporności indukcyjnej badanego odcinka i powinna się równać sumie tych spadków napięć.

Możemy więc napisać:

$$-\frac{\partial v_x}{\partial x} dx = R dx \cdot i_x + \mathcal{L} dx \cdot \frac{\partial i_x}{\partial t}.$$

Zmiana wartości natężenia prądu musi być równa sumie prądu upływu i prądu ładowania odcinka dx . Pierwszy równy jest iloczynowi upływności odcinka przez napięcie na nim, czyli $A dx \cdot v_x$, drugi iloczynowi pojemności przez pochodną napięcia względem czasu t. j. $C dx \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t}$. Wobec tego będziemy mieli:

$$-\frac{\partial i_x}{\partial x} dx = A dx v_x + C dx \frac{\partial v_x}{\partial t}.$$

Zestawiając równania, po skróceniu przez dx otrzymamy:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v_x}{\partial x} = R i_x + \mathcal{L} \frac{\partial i_x}{\partial t}; & /1/ \\ -\frac{\partial i_x}{\partial x} = A v_x + C \frac{\partial v_x}{\partial t}; & /2/ \end{cases}$$

Dla rozwiązania tego układu równań różniczkowych musimy je przekształcić tak, ażeby każde z nich zawierało tylko jedną niewiadomą funkcję, albo

v_x albo i_x . W tym celu bierzemy pochodne względem x z obu stron tych równań:

$$-\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = R \frac{\partial i_x}{\partial x} + \mathcal{L} \frac{\partial^2 i_x}{\partial x \partial t}; \quad /3/$$

$$-\frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = A \frac{\partial v_x}{\partial x} + C \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t}. \quad /4/$$

Ostatnie wyrazy otrzymanych równań można przedstawić w następujący sposób:

$$\mathcal{L} \frac{\partial^2 i_x}{\partial x \partial t} = \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i_x}{\partial x} \right);$$

$$C \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right).$$

W tych wzorach wartości pochodnych cząstkowych, stojących w nawiasach, mamy z równań /1/ i /2/; biorąc pochodne po t będziemy mieli:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i_x}{\partial x} \right) = A \frac{\partial v_x}{\partial t} + C \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2};$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = R \frac{\partial i_x}{\partial t} + \mathcal{L} \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2}.$$

Podstawiając te wartości oraz wartości z /1/ i /2/ do równań /3/ i /4/ otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = RA v_x + RC \frac{\partial v_x}{\partial t} + Ad \frac{\partial v_x}{\partial t} + Cd \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = RA i_x + RC \frac{\partial i_x}{\partial t} + Ad \frac{\partial i_x}{\partial t} + Cd \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2}$$

i po zgrupowaniu:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = RA v_x + (RC + Ad) \frac{\partial v_x}{\partial t} + Cd \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}; \quad /5/$$

$$\frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = RA i_x + (RC + Ad) \frac{\partial i_x}{\partial t} + Cd \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2}; \quad /6/$$

Widzimy, że równania /5/ i /6/ dla u_x i i_x są tej samej postaci i mają te same współczynniki. Zatem rozwiązaniem ogólnym dla u_x i i_x będzie ta sama funkcja odległości i czasu.

$$u_x = f(x, t); \quad i_x = f(x, t).$$

§ 3. Rozwiązanie metodą symboliczną. Równania powyższe będziemy rozwiązywali ogólnie przy badaniu prądów nieustalonych. Dla prądów ustalonych możemy zagadnienie znacznie uprościć. Rozpatrując mianowicie prąd sinusoidalny, możemy zamiast wartości chwilowych wprowadzić wartości skuteczne, stosując metodę symboliczną. Wartości skuteczne, jako niezależne od czasu, będą funkcjami tylko odległości x , więc zamiast równań o pochodnych cząstkowych otrzymamy równania o pochodnych zwyk-

łych. -

Stosując tę metodę bierzemy w równaniach /1/ i /2/ zamiast wartości chwilowych wartości skuteczne V_x i I_x , jako wektory napięcia i prądu w rozpatrywanym punkcie w odległości x od początku linii. Ponadto przyjmujemy pod uwagę, że pochodne takich wektorów względem czasu są odpowiednio równe $j\omega \hat{V}_x$ oraz $j\omega \hat{I}_x$. W ten sposób otrzymamy następujące równania:

$$-\frac{d\hat{V}_x}{dx} = R\hat{I}_x + dj\omega L\hat{I}_x = (R + j\omega L)\hat{I}_x; \quad /7/$$

$$-\frac{d\hat{I}_x}{dx} = A\hat{V}_x + Cj\omega\hat{V}_x = (A + j\omega C)\hat{V}_x. \quad /8/$$

W celu otrzymania równań, zawierających tylko jedną niewiadomą funkcję, bierzemy pochodne względem x , co nam da:

$$-\frac{d^2\hat{V}_x}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{d\hat{I}_x}{dx}; \quad /9/$$

$$-\frac{d^2\hat{I}_x}{dx^2} = (A + j\omega C)\frac{d\hat{V}_x}{dx} \quad /10/$$

i podstawiamy wartości $\frac{d\hat{I}_x}{dx}$ i $\frac{d\hat{V}_x}{dx}$, otrzymane ze wzorów /7/ i /8/. Wtedy będziemy mieli:

$$\frac{d^2\hat{V}_x}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\hat{V}_x; \quad /11/$$

$$\frac{d^2 \hat{J}_x}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C) \hat{J}_x. \quad /12/$$

W tych wzorach \hat{V}_x i \hat{J}_x czynią zadość temu samemu równaniu różniczkowemu, stanowiąc równanie postaci :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = k^2 y, \quad /13/$$

gdzie

$$k = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}. \quad /14/$$

Jego^o równanie charakterystyczne:

$$z^2 = k^2$$

ma dwa pierwiastki:

$$z_1 = +k; \quad z_2 = -k$$

i daje całkę ogólną:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx},$$

gdzie C_1 i C_2 są to stałe dowolne, e podstawa logarytmów naturalnych.

W ten sposób otrzymamy:

$$\hat{V}_x = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \quad /15/$$

Z równania /12/ moglibyśmy napisać i dla \hat{J}_x analogiczne rozwiązanie, w którym mielibyśmy dwie

inne stałe dowolne. Dogodniej będzie uniknąć wprowadzenia nowych stałych, otrzymując \hat{J}_x bezpośrednio ze wzoru /7/:

$$\hat{J}_x = -\frac{d\hat{V}_x}{dx} / (R + j\omega L)$$

Ale ze wzoru /15/:

$$\frac{d\hat{V}_x}{dx} = kC_1 e^{kx} - kC_2 e^{-kx},$$

więc

$$\hat{J}_x = \frac{-k(C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx})}{R + j\omega L}$$

Podstawiając wartość k ze wzoru /14/, otrzymamy:

$$\hat{J}_x = \frac{-\sqrt{(R+j\omega L)(A+j\omega C)}}{R+j\omega L} \cdot (C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx}) =$$

$$= \sqrt{\frac{A+j\omega C}{R+j\omega L}} \cdot (-C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}) \quad /16/$$

Wzory /15/ i /16/ można przekształcić jeszcze inaczej, przyjmując pod uwagę, że wykładnik potęgi k jest naogół liczbą zespoloną; rzeczywiście możemy założyć:

$$k = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = a + jb.$$

Dla znalezienia współczynników a i b podnosimy obie strony do kwadratu:

$$AR - \omega^2 LC + j\omega(AL + RC) = a^2 - b^2 + j2ab.$$

Skąd

$$a^2 - b^2 = AR - \omega^2 LC; \quad /17/$$

$$2ab = \omega(AL + RC);$$

Podnosimy oba równania do kwadratu i dodajemy:

$$\begin{aligned} a^2 - 2a^2b^2 + b^2 &= A^2R^2 - 2\omega^2ARLC + \omega^4L^2C^2; \\ + \quad 4a^2b^2 &= \omega^2A^2L^2 + 2\omega^2ARLC + \omega^2R^2C^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= A^2(R^2 + \omega^2L^2) + \omega^2C^2(R^2 + \omega^2L^2) = \\ &= (A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2). \end{aligned}$$

Wyciągamy pierwiastek z obu stron tego równania:

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2)}. \quad /18/$$

Dodając i odejmując równania /17/ i /18/, dzieląc następnie przez 2 i wyciągając pierwiastek, otrzymamy:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2C^2)(R^2 + \omega^2L^2)} + AR - \omega^2LC \right\}}; \quad /19/$$

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} - AR + \omega^2 LC \right)}; \quad /20/$$

Na zasadzie wzoru Eulera:

$$e^{m \pm jn} = e^m (\cos n \pm j \sin n)$$

możemy napisać:

$$e^{bx} = e^{ax+jbx} = e^{ax} (\cos bx + j \sin bx),$$

$$e^{-ix} = e^{-ax-jbx} = e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

Oznaczmy:

$$\sqrt{\frac{R+j\omega L}{A+j\omega C}} = \hat{Z}. \quad /21/$$

Symbol \hat{Z} nazywamy opornością charakterystyczną lub opornością falową.

Podstawiając powyższe wzory do równań /15/ i /16/ otrzymamy:

$$\hat{V}_x = C_1 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + C_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx), \quad /22/$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = -C_1 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + C_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx). \quad /23/$$

§ 4. Stałe całkowania. Możemy teraz określić stałe całkowania. Przypuśćmy, że mamy dane napięcie i prąd w początku linii, mianowicie: dla $x=0$ jest

$$\hat{V}_x = \hat{V}_2, \hat{J}_x = \hat{J}_1. \text{ Wtedy}$$

$$e^{+ax} = e^{-ax} = e^0 = 1; \cos bx = \cos 0 = 1; \sin bx = \sin 0 = 0;$$

zatem

$$\hat{V}_x = C_1 + C_2;$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = -C_1 + C_2.$$

Dodając wzgl. odejmując i dzieląc przez 2 otrzymamy:

$$C_2 = \frac{\hat{V}_x + \hat{J}_x \hat{Z}}{2}; \quad C_1 = \frac{\hat{V}_x - \hat{J}_x \hat{Z}}{2},$$

więc ostatecznie:

$$\hat{V}_x = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_x - \hat{J}_x \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + (\hat{V}_x + \hat{J}_x \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}; \quad /24/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \frac{1}{2} \left\{ -(\hat{V}_x - \hat{J}_x \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + (\hat{V}_x + \hat{J}_x \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}. \quad /25/$$

Często przy projektowaniu linii elektrycznej wiadome są napięcie i prąd w miejscu zużycia energii, czyli \hat{V}_2 i \hat{J}_2 . W tym wypadku dogodniej jest obliczać odległość x nie od początku linii, lecz od jej końca. Również stałe C_1 i C_2 należy określić przez \hat{V}_2 i \hat{J}_2 . W takim razie we wzorach /22/ i /23/ trzeba x zmienić na $-x$, gdyż sposób rozumowania przy wyprowadzaniu tych wzorów pozostanie ten sam, tylko odległość odmierza się w kierunku przeciwnym. Warunki dla określenia stałych C_1 i C_2

będą inne, a mianowicie przy $x=0$, $\hat{V}_x = \hat{V}_2$; $\hat{J}_x = \hat{J}_2$.
Zmieniając w równaniach /22/ i /23/ znak przy x
i zakładając $x=0$, będziemy mieli

$$\hat{V}_2 = C_1 + C_2 ;$$

$$\hat{J}_2 \hat{Z} = C_2 - C_1 .$$

Stąd

$$C_2 = \frac{\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}}{2} ; C_1 = \frac{\hat{V}_2 - \hat{J}_2 \hat{Z}}{2}$$

i po podstawieniu tych wartości stałych:

$$\hat{V}_x = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + (\hat{V}_2 - \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} ; /26/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - (\hat{V}_2 - \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} . /27/$$

W dalszych zagadnieniach będziemy przeważnie ko-
rzystali z tych ostatnich wzorów.

Wzory /24/ i /25/ względnie /26/ i /27/ można na-
pisać w innej postaci, wprowadzając funkcje hiperbo-
liczne.

Zakładając mianowicie:

$$e^{\pm ax} (\cos bx \pm j \sin bx) = e^{\pm kx} ,$$

gdzie $k = a + jb$,

i przyjmując pod uwagę, że

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cos \operatorname{hip} kx, \\ \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sin \operatorname{hip} kx, \end{array} \right.$$

otrzymamy z /24/ i /25/

$$\hat{V}_x = \hat{V}_1 \cos \operatorname{hip} kx - \hat{J}_1 \hat{Z} \sin \operatorname{hip} kx ; \quad /24'/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = -\hat{V}_1 \sin \operatorname{hip} kx + \hat{J}_1 \hat{Z} \cos \operatorname{hip} kx, \quad /25'/$$

oraz z /26/ i /27/

$$\hat{V}_x = \hat{V}_2 \cos \operatorname{hip} kx + \hat{J}_2 \hat{Z} \sin \operatorname{hip} kx. \quad /26'/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \hat{V}_2 \sin \operatorname{hip} kx + \hat{J}_2 \hat{Z} \cos \operatorname{hip} kx. \quad /27'/$$

§ 5. Fale napięcia i prądu. W równaniach powyższych \hat{V}_2 oraz $\hat{J}_2 \hat{Z}$ są wektorami, ich suma i różnica są zatem też wektorami. Oznaczmy:

$$\frac{1}{2}(\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}) = \hat{P}_1 ; \quad /28/$$

$$\frac{1}{2}(\hat{V}_2 - \hat{J}_2 \hat{Z}) = \hat{P}_2 . \quad /29/$$

Wartości chwilowe tych wektorów muszą mieć przebieg sinusoidalny, jeżeli taki przebieg mają wartoś-

ci chwilowe wektorów składowych.

Możemy zatem napisać dla wartości chwilowych wektorów P_1 i P_2 :

$$p_1 = P_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \quad p_2 = P_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Podstawmy te wartości do równań /26/ i /27/, zamieniając w tych ostatnich wartości skuteczne na wartości chwilowe.

$$v_x = P_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + P_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx);$$

$$\hat{I}_x = P_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - P_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)$$

Wykonując mnożenia w nawiasach zwróćmy uwagę, że mnożenie wektora przez j jest równoważne obróceniu go o kąt prosty w kierunku dodatnim czyli dodaniu $\frac{\pi}{2}$ do jego kąta fazy. Zatem

$$j \sin bx \sin(\omega t + \psi_1) = \sin bx \sin(\omega t + \psi_1 + \frac{\pi}{2}) = \sin bx \cos(\omega t + \psi_1);$$

$$j \sin bx \sin(\omega t + \psi_2) = \sin bx \sin(\omega t + \psi_2 + \frac{\pi}{2}) = \sin bx \cos(\omega t + \psi_2).$$

Otrzymamy zatem:

$$v_x = P_{1m} e^{ax} [\cos bx \sin(\omega t + \psi_1) + \sin bx \cos(\omega t + \psi_1)] + \\ + P_{2m} e^{-ax} [\cos bx \sin(\omega t + \psi_2) - \sin bx \cos(\omega t + \psi_2)];$$

$$i_x \hat{I} = P_{1m} e^{ax} [\cos bx \sin(\omega t + \psi_1) + \sin bx \cos(\omega t + \psi_1)] - \\ - P_{2m} e^{-ax} [\cos bx \sin(\omega t + \psi_2) - \sin bx \cos(\omega t + \psi_2)],$$

albo.

$$v_x = P_{1m} e^{ax} \sin(\omega t + \psi_1 + bx) + P_{2m} e^{-ax} \sin(\omega t + \psi_2 - bx); \quad /30/$$

$$i_x \hat{L} = P_{1m} e^{ax} \sin(\omega t + \psi_1 + bx) - P_{2m} e^{-ax} \sin(\omega t + \psi_2 - bx). \quad /31/$$

Wartość chwilowa napięcia prądu oraz iloczyn wartości chwilowej jego natężenia przez oporność charakterystyczną linii są sumą względnie różnicą 2-ech wyrazów postaci:

$$P_m e^{\pm ax} \sin(\omega t + \psi \pm bx).$$

W każdym z nich jeden czynnik P_m ma wartość stałą /niezależną od czasu, ani od przestrzeni/; drugi $e^{\pm ax}$ zależy jedynie od odległości. Wobec tego wartość maksymalna /amplituda/ napięcia wzgl. natężenia prądu jest funkcją tylko odległości. Faza $(\omega t + \psi \pm bx)$ zależy zarówno od odległości jak od czasu i zmienia się okresowo, to znaczy powtarza się z biegiem czasu i w pewnych odstępach odległości, to samo wobec tego można powiedzieć o wartościach napięcia wzgl. natężenia prądu, inaczej mówiąc napięcie i natężenie prądu wzdłuż linii rozchodzą się falowo.

Przystąpimy do obliczenia długości i szybkości

tych fal. Dla znalezienia długości zbadamy, w jakiej odległości znajdują się punkty, w których składniki napięcia wzgl. prądu mają tę samą fazę. Na to trzeba, żeby faza różniła się wogóle o całkowitą wielokrotność 2π , w szczególności dla długości jednej fali o 2π . Przypuśćmy, że kąt $\omega t + \psi \pm bx$ wzrośnie wzgl. zmaleje o 2π , kiedy x wzrośnie o λ . Mamy:

$$\omega t + \psi \pm b(x + \lambda) = \omega t + \psi \pm bx \pm 2\pi;$$

$$\pm b\lambda = \pm 2\pi;$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{b}.$$

/32/

To znaczy, że wartości składników napięcia wzgl. prądu są w jednakowej fazie w punktach, najbliższa odległość których wynosi $\lambda = \frac{2\pi}{b}$, czyli taka jest długość fali napięcia lub prądu; b nazywamy spółczynnikiem długości fali.

Dla znalezienia szybkości rozchodzenia się fal, przypuśćmy, że w danym punkcie x w pewnej chwili t mamy określoną fazę składników napięcia wzgl. prądu i że tę samą fazę mamy po czasie dt w punkcie odległym o dx , czyli w czasie $t + dt$ w punkcie $x + dx$. Przyrównujemy fazy w obu wy-

padkach, otrzymamy:

$$\omega t + \psi \pm bx = \omega(t + dt) + \psi \pm b(x + dx);$$

$$\cancel{\omega t + \psi \pm bx} = \cancel{\omega t + \omega dt + \psi \pm bx} \pm b dx.$$

Stąd

$$\omega dt \pm b dx = 0;$$

$$\omega dt = \mp b dx.$$

Prędkość rozchodzenia się fali:

$$v = \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\omega}{b}.$$

Pomijając znak:

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{2\pi f}{b} = \frac{2\pi}{bT} = \frac{\lambda}{T}, \quad /33/$$

gdzie f oznacza częstotliwość, T - okres prądu zmiennego. Wynika stąd, że prędkość rozchodzenia się fali równa się ilorazowi długości fali przez okres prądu zmiennego; inaczej w ciągu jednego okresu prąd przebiega długość jednej fali. Znak przy prędkości v wskazuje na kierunek rozchodzenia się fali: czy w kierunku dodatnich x , czy też ujemnych.

Rozpatrując wzór /26/ widzimy, że dla napięcia \hat{V}_x otrzymujemy sumę dwóch fal, przebiegających w rozmaitych kierunkach z jednakową prędkością; jedna fala przebiega od początku linii do jej koń-

ca, druga odwrotnie. Pierwsza nazywa się falą główną, druga - falą odbitą. Czynniki $e^{\pm ax}$ wskazują, że amplituda, czyli wartość maksymalna, zmienia się w zależności od odległości; a jest to spółczynnik tłumienia. Dla prądu \hat{I}_x , jak widać ze wzoru /27/, otrzymujemy różnicę dwóch fal, przebiegających tak samo, jak fale napięcia w dwóch przeciwnych kierunkach, lecz których amplitudy są zmniejszone w stosunku oporności charakterystycznej \hat{Z} .

§ 6. Linja bez strat. Dla bliższego zbadania otrzymanych wzorów rozpatrzmy najpierw rozchodzenie się prądu w linii bez strat, to jest takiej, w której niema oporności rzeczywistej, ani upływności, a jedynie indukcyjność i pojemność. A więc:

$$R=0; \quad A=0; \quad /34/$$

Oporność charakterystyczna takiej linii będzie:

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{A+j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z \quad /35/$$

nie jest ^{ona} wielkością symboliczną, gdyż nie zawiera czynnika j . Znajdźmy współczynniki a i b :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} + AR - \omega^2 LC \right\}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\omega^2 C^2 \cdot \omega^2 L^2} - \omega^2 LC \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - \omega^2 LC \right\}} = 0; /36/$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} - AR + \omega^2 LC \right\}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\omega^2 C^2 \cdot \omega^2 L^2} + \omega^2 LC \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + \omega^2 LC \right\}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \omega^2 LC} = \sqrt{\omega^2 LC} = \omega \sqrt{LC}. \quad /37/$$

Stąd

$$e^{ax} = e^{-ax} = e^0 = 1.$$

Największe wartości składników napięcia i natężenia prądu nie zmieniają się z odległością, czyli nie zachodzi tłumienie. Prędkość rozchodzenia się fal

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad /38/$$

nie zależy od częstotliwości prądu.

W liniach wykonanych indukcyjność i pojemność zmieniają się w niewielkich granicach; średnio

możemy przyjąć:

$$L \cong 0,1 \text{ mH/km} ; C \cong 0,1 \text{ nF/km.}$$

W liniach napowietrznych indukcyjność jest nieco większa, pojemność mniejsza, w kablach odwrotnie; iloczyn pozostaje mniej więcej stały; w jednostkach bezwzględnych /C.G.S./:

$$1 \text{ H} = 10^9 \text{ (C.G.S.)} \quad 1 \text{ mH} = 10^6 \text{ (C.G.S.)}$$

$$1 \text{ F} = 10^{-9} \text{ (C.G.S.)} \quad 1 \text{ nF} = 10^{-15} \text{ (C.G.S.)}$$

Stąd

$$L \cong 0,1 \text{ mH/km} = 10^5 \text{ (C.G.S.)/km. ;}$$

$$C \cong 0,1 \text{ nF/km} = 10^{-16} \text{ (C.G.S.)/km. ;}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{10^5 \cdot 10^{-16}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-11}}} = \sqrt{10^{11}} \cong 3 \cdot 10^5 \text{ km/sek.}$$

Prędkość rozchodzenia się fal napięcia i prądu jest zatem mniej więcej równa prędkości światła. Przy częstotliwości $f = 50$, przeważnie spotykanej w urządzeniach prądu silnego, długość fali:

$$\lambda = v \cdot T = 300\,000 \cdot \frac{1}{50} = 6000 \text{ km.}$$

dorównywa długości promienia ziemskiego. Przy częstotliwości $f = 3000$, którą mamy np. w telefonicznych liniach

$$\lambda = v T = 300\,000 \cdot \frac{1}{3000} = 100 \text{ km.}$$

Fale radiowe są znacznie krótsze, dochodząc w radjofonii do paruset metrów, zaś w radjotelegrafii nawet do kilku metrów, co odpowiadałoby częstotliwości dochodzącej do kilkudziesięciu milionów.

Równania /26/ i /27/ w przypadku linii bez strat przekształca się wobec $e^{ax} = e^{-ax} = 1$; $\hat{Z} = Z$ na:

$$\begin{aligned} \hat{V}_x &= \frac{1}{2} \{ (\hat{V}_2 + \hat{I}_2 Z) (\cos bx + j \sin bx) + (\hat{V}_2 - \hat{I}_2 Z) (\cos bx - j \sin bx) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ 2 \cdot \hat{V}_2 \cos bx + 2j \hat{I}_2 Z \sin bx \} = \\ &= \hat{V}_2 \cos bx + j \hat{I}_2 Z \sin bx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_x Z &= \frac{1}{2} \{ (\hat{V}_2 + \hat{I}_2 Z) (\cos bx + j \sin bx) - (\hat{V}_2 - \hat{I}_2 Z) (\cos bx - j \sin bx) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ 2 \hat{I}_2 Z \cos bx + 2j \hat{V}_2 \sin bx \} = \hat{I}_2 Z \cos bx + j \hat{V}_2 \sin bx, \end{aligned}$$

czyli ostatecznie

$$\hat{V}_x = \hat{V}_2 \cos bx + j \hat{I}_2 Z \sin bx; \quad \left. \vphantom{\hat{V}_x} \right\} \quad /39/$$

$$\hat{I}_x Z = \hat{I}_2 Z \cos bx + j \hat{V}_2 \sin bx. \quad \left. \vphantom{\hat{I}_x Z} \right\} \quad /40/$$

Wartości V_x i I_x z wyprowadzonych wzorów możemy znaleźć albo sposobem analitycznym, stosując metodę symboliczną, albo też sposobem wykreślnym. Stosując metodę symboliczną musimy najpierw na pod-

stawie wiadomych L i C obliczyć oporność charakterystyczną Z według wzoru /35/ oraz współczynnik długości fali b ze wzoru /37/; następnie dla wiadomej odległości x obliczamy bx i znajdujemy $\cos bx$ i $\sin bx$. Napięcie V_2 , prąd I_2 i współczynnik mocy $\cos \varphi$ przy odbiorniku przyjmujemy jako wiadome. Za podstawowy kierunek wektorów najdogodniej jest przyjąć kierunek wektora V_2 . Oznaczają przez ψ_x niewiadomy kąt pomiędzy \hat{V}_x i V_2 oraz przez ψ'_x kąt pomiędzy \hat{I}_x i V_2 otrzymany za podstawie wzorów /39/ i /40/

$$\begin{aligned} \hat{V}_x &= V_2 \cos bx + j I_2 Z \sin bx (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \\ &= (V_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2) + j I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_x Z &= I_2 Z \cos bx (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) + j V_2 \sin bx = \\ &= I_2 Z \cos bx \cos \varphi_2 + j (I_2 Z \cos bx \sin \varphi_2 + V_2 \sin bx), \end{aligned}$$

skąd

$$V_x = \sqrt{(V_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2)^2 + (I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2)^2};$$

$$\operatorname{tg} \psi_x = \frac{I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2}{V_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2};$$

$$I_x Z = \sqrt{(I_2 Z \cos bx \cos \varphi_2)^2 + (I_2 Z \cos bx \sin \varphi_2 + V_2 \sin bx)^2};$$

$$\operatorname{tg} \psi'_x = \frac{I_2 Z \cos bx \sin \varphi_2 + V_2 \sin bx}{I_2 Z \cos bx \cos \varphi_2}$$

Kąt φ_x pomiędzy \hat{I}_x i \hat{V}_x znajdziemy, mając kąty ψ_x i ψ'_x , mianowicie:

$$\varphi_x = \psi'_x - \psi_x$$

Bardzo łatwo możemy znaleźć napięcie \hat{V}_x i prąd \hat{I}_x sposobem wykreślnym. W tym celu z dowolnego punktu 0 /rys. 17/ przeprowadzamy dowolną linię prostą, jako kierunek \hat{V}_2 i na niej odmierzamy w odpowiedniej skali odcinek $OV_2 = \hat{V}_2$. Pod kątem φ_2 do tego wektora przeprowadzamy kierunek \hat{I}_2 i w tym kierunku odmierzamy odcinek $OI_2 = \hat{I}_2 Z$; oczywiście mnożenie wektora przez oporność charakterystyczną Z , która w tym wypadku nie jest wielkością symboliczną, daje nam wektor $\hat{I}_2 Z$, kierunek którego jest taki sam, co i kierunek wektora \hat{I}_2 . Następnie z punktu 0 pod kątem bx do \hat{V}_2 przeprowadzamy prostą, na której odmierzamy $OA = \hat{V}_2$ i $OC = \hat{I}_2 Z$, zataczając w tym celu łuki koła o promieniu OV_2 i OI_2 , aż do przecięcia tej prostej. Z punktów A i C opuszczamy prostopadłe AB i CD na OV_2 . Oczywiście:

$$OB = V_2 \cos bx; \quad OD = \hat{J}_2 Z \cos bx;$$

$$AB = V_2 \sin bx; \quad CD = \hat{J}_2 Z \sin bx;$$

znaleźliśmy więc wartości /moduły/ wektorów wchodzących do wzorów /39/ i /40/, teraz musimy wykonać wskazane w tych wzorach działania geometryczne, uwzględniając również kierunki wektorów.

Na podstawie wzoru /39/ dla otrzymania \hat{V}_x musimy do $\hat{V}_2 \cos bx$ dodać geometrycznie $j \hat{J}_2 Z \sin bx$; pierwszy z tych wektorów ma kierunek V_2 , więc odcinek OB odpowiada wektorowi $V_2 \cos bx$ i co do wartości i co do kierunku.

Drugi wektor ma wartość $\hat{J}_2 Z \sin bx$, odmierzoną odcinkiem CD , ale kierunek wektora

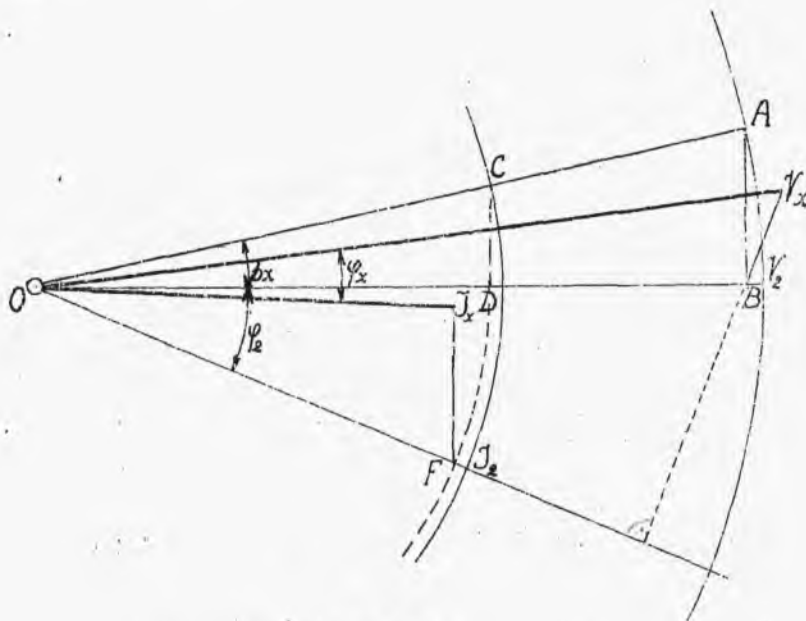
$\hat{J}_2 Z \sin bx$ musi być zgodny z kierunkiem $O\hat{J}_2$, zaś kierunek wektora $j \hat{J}_2 Z \sin bx$ musi być wzięty pod kątem prostym naprzód do kierunku $O\hat{J}_2$; z tego wynika, że od punktu B , końca wektora $V_2 \cos bx$, przeprowadzamy wektor

$B\hat{V}_x = j \hat{J}_2 Z \sin bx$, prostopadle do $O\hat{J}_2$ i równy co do wartości odcinkowi CD ; łącząc O z \hat{V}_x otrzymujemy wektor $O\hat{V}_x = \hat{V}_x$.

Analogicznie, na podstawie wzoru /40/, do $\hat{J}_2 Z \cos bx$ musimy dodać geometrycznie $j \hat{V}_2 \sin bx$. Wektor $\hat{J}_2 Z \cos bx$ ma kierunek $O\hat{J}_2$; przerzucając

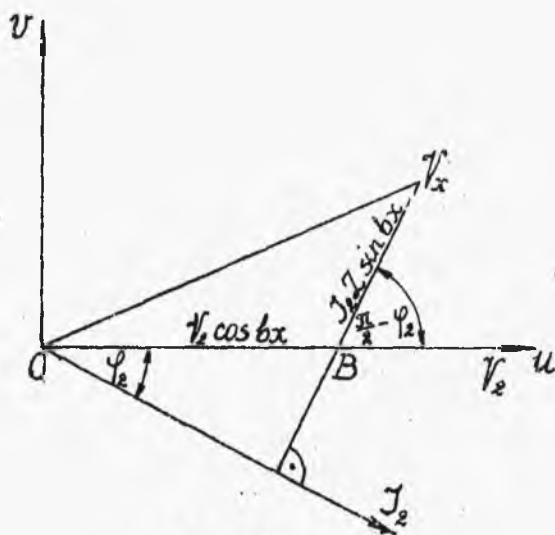
odcinek $OD = I_x Z \cos \beta_x$ na ten kierunek, otrzymamy $OF = I_x Z \cos \beta_x$, do tego wektora dodajemy geometrycznie $FJ_x = j \hat{V}_2 \sin \beta_x$, mianowicie odcinek $FJ_x = AB = V_2 \sin \beta_x$, wektor zaś $j \hat{V}_2 \sin \beta_x$ powinien być przeprowadzony pod kątem prostym naprzód względem wektora \hat{V}_2 , więc kierunek AB i także sam kierunek FJ_x odpowiada kierunkowi $j \hat{V}_2 \sin \beta_x$; łącząc wreszcie punkt J_x z O , otrzymamy wektor $OJ_x = \hat{I}_x Z$. Za pomocą kątomierza możemy łatwo zmierzyć kąt

$\hat{\varphi}_x = \angle V_x O J_x$ przesunięcia fazy \hat{I}_x względem \hat{V}_x .



Rys.17.

Miejszem geometrycznym końców wektora \vec{V}_x na wykresie powyższym /rys.17/ przy zmianie kąta bx od 0 do 2π jest elipsa. Dla dowiedzenia tego wprowadźmy do rys.17 prostokątny układ współrzędnych (u, v) , umieszczając jego początek



rys.18.

w punkcie O /rys. 18/ i kierując oś u wzdłuż OV_2 .

Wtedy

$$\angle V_x B V_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2.$$

Oznaczając współrzędne zmiennego punktu V_x przez (u, v) będziemy

nieli

$$u = OB + B V_x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) =$$

$$= V_2 \cos bx + J_2 \sin bx \sin \varphi_2; \quad /I/$$

$$v = B V_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) =$$

$$= J_2 \sin bx \cos \varphi_2; \quad /II/$$

Z tych równań rugujemy zmienną niezależną x .

Z równania /II/

$$\sin bx = \frac{v}{J_2 Z \cos \varphi_2};$$

$$\cos bx = \sqrt{1 - \sin^2 bx} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}}.$$

Podstawiamy znalezione wartości do równania /I/.

$$u = V_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}} + J_2 Z \sin \varphi_2 \cdot \frac{v}{J_2 Z \cos \varphi_2};$$

$$u = V_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}} + v \cdot \operatorname{tg} \varphi_2;$$

$$u - v \operatorname{tg} \varphi_2 = V_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}}.$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$u^2 - 2uv \operatorname{tg} \varphi_2 + v^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 = V_2^2 - \frac{V_2^2 v^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}$$

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę:

$$u^2 - 2uv \operatorname{tg} \varphi_2 + v^2 \left(\operatorname{tg}^2 \varphi_2 + \frac{V_2^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2} \right) - V_2^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie 2-go stopnia, niezawie-
rające zmiennych w stopniu 1-szym, czyli równanie
typu:

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + F = 0.$$

Takie równanie przedstawia elipsę, o ile

$$B^2 - 4AC < 0; \quad F < 0;$$

W naszym przypadku:

$$B^2 - 4AC = 4 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \frac{4V_2^2}{J_1^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2} = -\frac{4V_2^2}{J_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2} < 0;$$

$$F = -V_2^2 < 0.$$

Wobec tego wnioskujemy, że równanie nasze przedstawia elipsę. -

W szczególnym przypadku odbiornika bezindukcyjnego i bezpojemnościowego, względnie odbiornika dającego rezonans napięć, mamy:

$$\varphi_2 = 0; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 0; \quad \cos \varphi_2 = 1.$$

Wtedy równanie nasze przyjmie postać:

$$u^2 + v^2 \frac{V_2^2}{J_2^2 Z^2} = V_2^2;$$

albo

$$\frac{u^2}{V_2^2} + \frac{v^2}{J_2^2 Z^2} = 1,$$

to znaczy, że półosiami otrzymanej elipsy są V_2 i $J_2 Z$.

Gdy przytem wyjątkowo $J_2 Z = V_2$, zamiast elipsy

otrzymujemy koło. Napięcie i prąd mają wtedy wzdłuż całej linii wartość stałą.

§ 7. Linja bez strat w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Stan, w którym linja nie jest obciążona, to znaczy odbiornik nie jest włączony do zacisków końca linii, nazywamy stanem jałowym. W tym wypadku

$I_2 = 0$. Napięcie w końcu linii zależne jest od napięcia na jej początku, więc w stanie jałowym moglibyśmy, zmieniając napięcie na początku, osiągnąć dowolną wartość napięcia na końcu; dobierzmy taką wartość napięcia na początku, aby w stanie jałowym, w końcu napięcie stało się równem V_2 ; oznaczymy to potrzebne napięcie przez V_{10} i nazwiemy go napięciem na początku w stanie jałowym. Przy takim napięciu popłynie na początku linii prąd, którego natężenie oznaczymy przez I_{10} ; będzie to prąd na początku w stanie jałowym. Dla dowolnego punktu linii w odległości x od jej końca napięcie i natężenie prądu w stanie jałowym niech wynoszą V_{x0} i I_{x0} , wtedy, zakładając we wzorach /39/ i /40/ $I_2 = 0$, otrzymamy:

$$\hat{V}_{x0} = \hat{V}_2 \cos bx, \quad \dots \dots \dots /41/$$

$$\hat{I}_{x0} Z = j \hat{V}_2 \sin bx . \quad \dots \dots \dots /42/$$

Największa wartość napięcia zachodzi dla $\cos bx = \pm 1$, $bx = 0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$, gdzie k liczba całkowita, czyli dla $x = 0, \frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}, \dots, \frac{k\pi}{b}$.

Ponieważ długość fali na podstawie wzoru /33/ wynosi

$$\lambda = \frac{2\pi}{b},$$

przeto napięcie będzie miało największe swe wartości na końcu linii oraz w odległościach, wynoszących całkowity iloraz połowy długości fali. -

W liniach prądu silnego, których długość jest zwykle mniejsza od połowy długości fali, napięcie wzrasta od początku linii ku końcowi, gdzie jest największe. Zjawisko to po raz pierwszy było spostrzeżone na kablu koncentrycznym przez inżyniera Ferranti na wystawie w Londynie i dla tego nazywa się zjawiskiem Ferranti 'ego.

Widzimy następnie, że prąd w stanie jałowym wyprzedza napięcie o kąt prosty, czyli o 1/4 okresu, przyjmuje największą wartość tam, gdzie wartość napięcia przechodzi przez 0 i odwrotnie, przyjmuje wartość 0 tam, gdzie napięcie przechodzi przez swoje maximum.

Stan, w którym końce linii są ze sobą połączone bezpośrednio, czyli bez oporności, nazywamy stanem zwarcia. W tym wypadku napięcie $V_2 = 0$. Natężenie

prądu w końcu linii będzie zależne od napięcia, które przyłożymy na początku. Dobierzmy taką wartość napięcia na początku, aby w stanie zwarcia natężenie prądu, płynącego w końcu linii, stało się równem J_2 . Oznaczmy to napięcie przez V_{1z} ; będzie to napięcie na początku w stanie zwarcia. Przy tem napięciu na początku linii popłynie prąd, którego natężenie oznaczymy przez J_{1z} ; nazwiemy go prądem na początku w stanie zwarcia. Dla dowolnego punktu linii w odległości x od jej końca napięcie i natężenie prądu w stanie zwarcia niech wynoszą V_{xz} i J_{xz} , wtedy, zakładając we wzorach /39/ i /40/ $V_2 = 0$, otrzymamy:

$$\hat{V}_{xz} = j \hat{J}_2 Z \sin bx, \quad \dots \dots /43/$$
$$\hat{J}_{xz} Z = \hat{J}_2 Z \cos bx. \quad \dots \dots /44/$$

Największa wartość prądu zachodzi dla $\cos bx = 1$, czyli na końcu linii oraz w odległościach, wynoszących całkowity iloraz połowy długości fali.

Widzimy, że prąd w stanie zwarcia opóźnia się względem napięcia o kąt prosty, czyli o $1/4$ okresu, przyjmuje, podobnie jak poprzednio, największą wartość tam, gdzie wartość napięcia przechodzi przez 0 i odwrotnie, przyjmuje wartość 0 tam, gdzie na-

pięcie przechodzi przez swoje maximum.

W obydwu rozpatrzonych wypadkach wektory napięć i prądów nie zmieniają swoich kierunków, inaczej mówiąc napięcie oraz prąd mają wzdłuż całej linii tę samą fazę; zamiast elipsy otrzymujemy na wykresie linię prostą. Napięcie i prąd zmieniają tylko swoje wartości w zależności od odległości x , tworząc w ten sposób fale stojące. -

Takie samo zjawisko otrzymamy również w wypadku, gdy pomiędzy napięciem i prądem w końcu linii istnieje różnica faz, równa 90° , to znaczy $\cos \varphi_2 = 0$; wtedy bowiem we wzorach /39/ i /40/ wektory $j\hat{I}_2 Z$ będą miały kierunek wektora napięcia \hat{V}_2 , zaś wektory $j\hat{V}_2$ kierunek wektora prądu \hat{I}_2 ; więc zarówno dla napięcia, jak i dla prądu otrzymamy, jako wykres, linię prostą.

Zestawiając wypadki, gdy w linii bez strat otrzymują się fale stojące dla napięcia i prądu, możemy wyprowadzić wniosek, że takie zjawisko ma miejsce, gdy: 1/ $\hat{I}_2 = 0$, 2/ $\hat{V}_2 = 0$ i 3/ $\cos \varphi_2 = 0$, to znaczy, gdy

$$V_2 I_2 \cos \varphi = 0,$$

czyli wtedy, gdy w końcu linii nie jest oddawana moc prądu.

Z porównania wzorów /39/, /41/ i /43/ oraz /40/, /42/ i /44/, wynika, że

$$\begin{aligned}\hat{V}_x &= \hat{V}_{x0} + \hat{V}_{xz} ; \\ \hat{I}_x \mathcal{L} &= \hat{I}_{x0} \mathcal{L} + \hat{I}_{xz} \mathcal{L} ; \\ \hat{I}_x &= \hat{I}_{x0} + \hat{I}_{xz} .\end{aligned}$$

To znaczy, że napięcie względnie prąd w stanie obciążenia są równe sumie napięć względnie prądów w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

§ 8. Linja, w której stałe tworzą proporcję.

Zbadajmy teraz, jako szczególny przypadek, linje, której oporność rzeczywista, indukcyjność, wpływność i pojemność tworzą proporcję:

$$\frac{R}{\mathcal{L}} = \frac{A}{C} , \quad \dots \dots \dots /45/$$

skąd

$$A\mathcal{L} = RC ;$$

oporność charakterystyczna takiej linji będzie

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R+j\omega\mathcal{L}}{A+j\omega C}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}(\frac{R}{\mathcal{L}}+j\omega)}{C(\frac{A}{C}+j\omega)}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}} = Z ;$$

nie jest ^{ona} wielkością symboliczną i równa się odpor-

ności charakterystycznej linii bez strat o takiejże indukcynności i pojemności.

Obliczmy ze wzorów /19/ i /20/ współczynniki a i b :

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} \right\}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \sqrt{\omega^2 C^2 \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right) \cdot \omega^2 L^2 \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)} \right\}}$$

Z proporcji /45/ mamy:

$$\frac{R^2}{\omega^2 L^2} = \frac{A^2}{\omega^2 C^2}, \quad 1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} = 1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2},$$

więc

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \omega^2 LC \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)^2} \right\}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR - \omega^2 LC + \omega^2 LC \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \right\}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR + \omega^2 LC \left(-1 + 1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ AR + \frac{CR^2}{L} \right\}}$$

Z proporcji /45/

$$A = \frac{RC}{L}; \quad AR = \frac{CR^2}{L},$$

wobec czego:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \frac{CR^2}{L} + \frac{CR^2}{L} \right\}} = \sqrt{\frac{CR^2}{L}} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \dots \dots /46/$$

Ponieważ

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

więc

$$a = \frac{R}{Z} \dots \dots \dots /47/$$

Spółczynnik tłumienia linii równy jest stosunkowi jej oporności rzeczywistej do oporności charakterystycznej.

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + \sqrt{A^2 \left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{A^2}\right) R^2 \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + AR \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{A^2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)} \right\}} . \end{aligned}$$

Z proporcji /45/ mamy:

$$\frac{\omega^2 L^2}{R^2} = \frac{\omega^2 C^2}{A^2} .$$

Zatem

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + AR \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right)^2} \right\}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC - AR + AR \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right) \right\}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + AR \left(-1 + 1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right) \right\}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + \omega^2 \frac{AL^2}{R} \right\}}.$$

Z proporcji /45/ mamy:

$$\frac{AL}{R} = C, \quad \frac{AL^2}{R} = CL,$$

więc

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \omega^2 LC + \omega^2 LC \right\}} = \sqrt{\omega^2 LC} = \omega \sqrt{LC} \dots /48/$$

Spółczynnik długości fali linii, czyniącej zadość proporcji /45/, równy jest temuż współczynnikowi linii bez strat o takiej samej indukcyjności i pojemności. Równe zatem będą również długości oraz prędkości fali w obu wypadkach.

Równania /26/ i /27/ przy uwzględnieniu, że Z nie jest symbolem, przyjmą postać:

$$\hat{V}_x = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_2 + \hat{J}_2 Z) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \right. \\ \left. + (\hat{V}_2 - \hat{J}_2 Z) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\}; \dots /49/$$

$$\hat{J}_x Z = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_2 + \hat{J}_2 Z) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \right. \\ \left. - (\hat{V}_2 - \hat{J}_2 Z) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots /50/$$

Rozpatrzmy linię w stanie jałowym. Oznaczmy,

jak i poprzednio, napięcie i natężenie prądu w odległości x od końca przez \hat{V}_{x0} i \hat{I}_{x0} . Podstawiając do powyższych wzorów $\hat{I}_2=0$, znajdziemy:

$$\hat{V}_{x0} = \frac{1}{2} \hat{V}_2 \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \}; \quad \dots /51/$$

$$\hat{I}_{x0} Z = \frac{1}{2} \hat{V}_2 \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \}. \quad \dots /52/$$

Rozpatrzmy następnie linję w stanie zwarcia, oznaczając analogicznie napięcie i prąd przez \hat{V}_{xz} i \hat{I}_{xz} . Podstawiając $\hat{V}_2=0$, otrzymamy:

$$\hat{V}_{xz} = \frac{1}{2} \hat{I}_2 Z \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \}; \quad \dots /53/$$

$$\hat{I}_{xz} Z = \frac{1}{2} \hat{I}_2 Z \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \}. \quad \dots /54/$$

Bezpośrednio z porównania wzorów /49/, /51/ i /53/ oraz /50/, /52/ i /54/ wynika, że

$$\hat{V}_x = \hat{V}_{x0} + \hat{V}_{xz}; \quad \dots /55/$$

oraz

$$\hat{J}_x \mathcal{L} = \hat{J}_{x0} \mathcal{L} + \hat{J}_{xz} \mathcal{L} ;$$

$$\hat{J}_x = \hat{J}_{x0} + \hat{J}_{xz} . \quad /56/$$

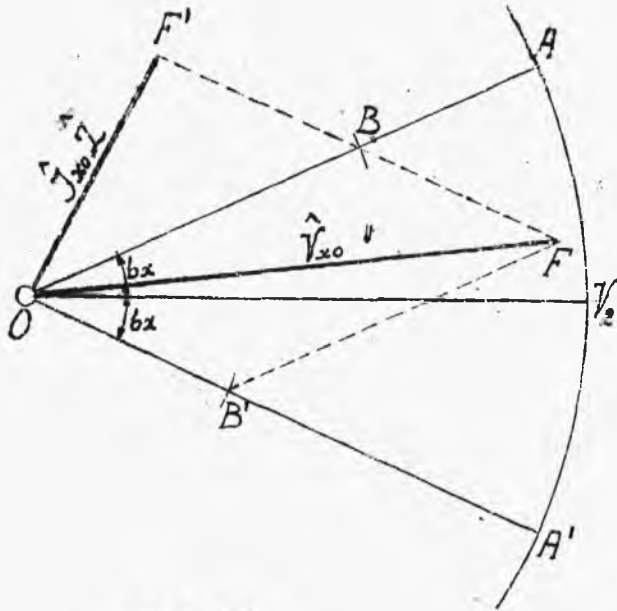
Napięcie, względnie prąd w danym punkcie linii w stanie obciążenia są równe sumie napięć, względnie prądów, w tym punkcie w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Zależność, wyrażona we wzorach /55/ i /56/ pozwala nam wytworzyć metodę wykreślną znajdowania napięcia i prądu w dowolnym miejscu linii.

Opieramy się na spostrzeżeniu, że w każdym ze wzorów /51/, /52/, /53/ i /54/ na \hat{V}_{x0} , \hat{J}_{x0} , \hat{V}_{xz} i \hat{J}_{xz} występuje tylko jeden z wektorów \hat{V}_z lub \hat{J}_z , pozatem tylko funkcje wykładnicze i zespolone trygonometryczne.

Przedewszystkiem obliczamy analitycznie wartości a i b współczynników tłumienia i długości fali, następnie dla danej odległości x wartości funkcji wykładniczych e^{ax} i e^{-ax} oraz kąta bx .

Odmierzamy teraz w odpowiedniej skali, w kierunku, który bierzemy jako kierunek zasadniczy, napięcie końca linii \hat{V}_z /rys.19/. Niech to będzie odcinek OV_z . Z punktu O zataczamy koło promieniem



rys. 19.

OV_2 i odmierzamy od OV_2 w obie strony przy punkcie O kąty bx . Wiesz drugie ramiona tych kątów przetną koło w punktach A i A' .

$$\sphericalangle V_2 OA = bx;$$

$$\sphericalangle V_2 OA' = -bx.$$

OA i OA' możemy rozpatrywać jako wektory, określo-

ne w sposób następujący:

$$\hat{OA} = V_2 (\cos bx + j \sin bx);$$

$$\hat{OA}' = V_2 (\cos bx - j \sin bx).$$

Analitycznie mnożymy teraz V_2 przez $\frac{1}{2} e^{ax}$ i $\frac{1}{2} e^{-ax}$ i odmierzamy otrzymane iloczyny na liniach OA i OA' jako OB i OB' . Będzie zatem:

$$\hat{OB} = \frac{1}{2} V_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx);$$

$$\hat{OB}' = \frac{1}{2} V_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

Budujemy sumę tych wektorów OF i ich różnicę OF' , czyli

$$\hat{O}\hat{F} = \hat{O}\hat{B} + \hat{O}\hat{B}' ;$$

$$\hat{O}\hat{F}' = \hat{O}\hat{B} - \hat{O}\hat{B}' .$$

Oczywiście

$$\hat{O}\hat{F} = \frac{1}{2} \hat{V}_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \frac{1}{2} \hat{V}_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) ;$$

$$\hat{O}\hat{F}' = \frac{1}{2} \hat{V}_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \frac{1}{2} \hat{V}_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) .$$

Porównyując otrzymane wzory ze wzorami /51/
i /52/ widzimy, że

$$\hat{O}\hat{F} = \hat{V}_{x0} ;$$

$$\hat{O}\hat{F}' = \hat{I}_{x0} Z .$$

W ten sposób znaleźliśmy napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii w stanie jałowym. Przystąpimy teraz do znalezienia tych samych wielkości w stanie zwarcia.

Porównyując wzory /54/ i /53/ na prąd i napięcie w stanie zwarcia ze wzorami /51/ i /52/ na napięcie i prąd w stanie jałowym

$$\hat{I}_{x0} Z = \frac{1}{2} \hat{I}_2 Z \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \} ;$$

$$\hat{V}_{x0} = \frac{1}{2} \hat{V}_2 \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \} ,$$

oraz

$$\hat{V}_{xz} = \frac{1}{2} \hat{J}_2 Z \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \},$$

$$\hat{J}_{x0} Z = \frac{1}{2} \hat{V}_2 \{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \},$$

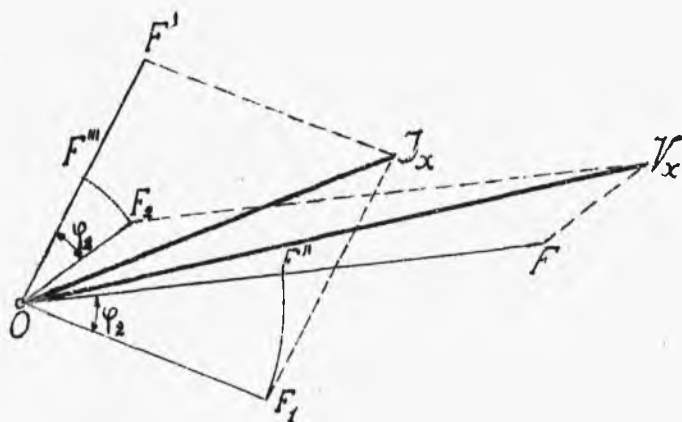
widzimy, że prąd i napięcie w stanie zwarcia zupełnie tak samo zależą od prądu końca linii, jak napięcie i prąd w stanie jałowym od napięcia końca linii. Dla ich znalezienia powinniśmy wykonać wykres zupełnie podobny do poprzedniego, odmierzając tylko wektor $\hat{J}_2 Z$ zamiast wektora \hat{V}_2 . Korzystając z tego samego wykresu powinniśmy skalę zmienić w stosunku $\frac{V_2}{J_2 Z}$, następnie kierunek każdego z wektorów powinien być przesunięty o kąt φ_2 , ponieważ wektor $\hat{J}_2 Z$ tworzy taki kąt z wektorem \hat{V}_2 .

W ten sposób wektory \hat{OF} i \hat{OF}' w nowej skali i przesunięte o kąt φ_2 , dadzą nam prąd i napięcie w danym punkcie w stanie zwarcia.

$$\hat{OF} = \hat{J}_{xz} Z ; \quad \hat{OF}' = \hat{V}_{xz} .$$

Aby przy pomocy rozważanego wykresu znaleźć napięcie i prąd w danym punkcie linii w stanie zwykłego obciążenia, postępujemy w następujący sposób
/rys:20/:

Mnożymy długość wektorów OF i OF' przez stosunek $\frac{J_2 Z}{V_2}$ i odmierzamy w tych samych kierunkach,



rys. 20.

jako OF'' i OF''' . Te wektory OF'' i OF''' przedstawiają co do wielkości /ale nie kierunku/ w skali pierwotnego wykresu prąd i napięcie w stanie zwarcia.

Obracamy je teraz

około punktu O we właściwym kierunku, o kąt φ_2 przesunięcia \hat{J}_2 względem \hat{V}_2 do położenia OF'_1 i OF'_2 . Te wektory OF'_1 i OF'_2 stanowią wektory prądu i napięcia w stanie zwarcia. Budujemy sumę wektorów OF i OF_2 równą OV_x oraz sumę wektorów OF' i OF_1 równą OJ_x . Oczywiście:

$$O\hat{V}_x = O\hat{F} + O\hat{F}_2 = \hat{V}_{x0} + \hat{V}_{xz} = \hat{V}_x ;$$

$$O\hat{J}_x = O\hat{F}' + O\hat{F}_1 = \hat{J}_{x0} \mathcal{L} + \hat{J}_{xz} \mathcal{L} = \hat{J}_x \mathcal{L} .$$

Znaleźliśmy zatem wykreślnie napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii.

Zauważymy jeszcze, że dla różnych odległości x punkty B i B' w wykresie /rys.19/ leżą na spiralnej logarytmicznej.

§ 9. Wypadek ogólny. Zbadajmy teraz linję w wypadku ogólnym, kiedy oporność, upływność, indukcyjność i pojemność nie są powiązane żadnymi zależnościami. Wtedy, jak wiadomo, oporność charakterystyczna linji jest symbolem, czyli liczbą zespoloną. - Znajdźmy jej moduł Z i argument α .

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = Z(\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C} = Z^2(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha).$$

W celu uczynienia mianownika rzeczywistym, mnożymy licznik i mianownik lewej strony przez liczbę $(A - j\omega C)$, sprzężoną z mianownikiem.

$$\frac{(R + j\omega L)(A - j\omega C)}{A^2 + \omega^2 C^2} = Z^2(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha);$$

$$\frac{AR + \omega^2 LC + j\omega(AL - RC)}{A^2 + \omega^2 C^2} = Z^2(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha).$$

Stąd otrzymujemy:

$$Z^2 \cos 2\alpha = \frac{AR + \omega^2 LC}{A^2 + \omega^2 C^2};$$

$$Z^2 \sin 2\alpha = \omega \frac{AL - RC}{A^2 + \omega^2 C^2}.$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierw-

sze. Wtedy:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \omega \cdot \frac{AL - RC}{AR + \omega^2 LC};$$

następnie podnosimy oba równania do kwadratu i dodajemy stronami:

$$\begin{aligned} Z^4 &= \frac{(AR + \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (AL - RC)^2}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2} = \\ &= \frac{A^2 R^2 + 2\omega^2 AR LC + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 A^2 L^2 - 2\omega^2 AR LC + \omega^2 R^2 C^2}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2} = \\ &= \frac{A^2 R^2 + \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 A^2 L^2 + \omega^2 R^2 C^2}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2} = \\ &= \frac{R^2 (A^2 + \omega^2 C^2) + \omega^2 L^2 (A^2 + \omega^2 C^2)}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2} = \\ &= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2) (A^2 + \omega^2 C^2)}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{A^2 + \omega^2 C^2}, \end{aligned}$$

skąd

$$Z = \sqrt[4]{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{A^2 + \omega^2 C^2}}; \quad /57/$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \omega \frac{AL - RC}{AR + \omega^2 LC}. \quad /58/$$

Argument α charakterystyki ma znak taki sam, jak licznik we wzorze /58/, ponieważ mianownik jest zawsze dodatni; wobec tego:

$$\alpha > 0 \quad \text{przy} \quad AL > RC;$$

$\alpha < 0$ przy $AL < RC$.

W szczególnym wypadku, kiedy $AL = RC$, lub gdy $R = 0$ i $A = 0$ argument jest zerem i wtedy oporność charakterystyczna może być pisana nie jako symbol, co już stwierdziliśmy w poprzednich wypadkach szczególnych.

Napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii wyznaczają się z ogólnych wzorów /26/ i /27/:

$$\hat{V}_x = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + (\hat{V}_2 - \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots /59/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \frac{1}{2} \left\{ (\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - (\hat{V}_2 - \hat{J}_2 \hat{Z}) e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots /60/$$

Rozpatrzmy, podobnie jak w § 8, linje w stanie jałowym. Stosując te same oznaczenia co tam, znajdziemy ($\hat{J}_2 = 0$):

$$\hat{V}_{x0} = \frac{1}{2} \hat{V}_2 \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots \dots \dots /61/$$

$$\hat{J}_{x0} \hat{Z} = \frac{1}{2} \hat{V}_2 \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots \dots \dots /62/$$

Tak samo dla stanu zwarcia ($\hat{V}_2 = 0$):

$$\hat{V}_{xz} = \frac{1}{2} \hat{I}_2 \hat{Z} \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots \dots \dots /63/$$

$$\hat{I}_{xz} \hat{Z} = \frac{1}{2} \hat{I}_2 \hat{Z} \left\{ e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \right\} \dots \dots \dots /64/$$

Bezpośrednio z porównania wzorów /59/, /61/ i /63/ oraz /60/, /62/ i /64/ wynika, że i w tym wypadku słuszne są wzory:

$$\begin{cases} \hat{V}_x = \hat{V}_{x0} + \hat{V}_{xz}, \\ \hat{I}_x = \hat{I}_{x0} + \hat{I}_{xz}. \end{cases}$$

Prąd \hat{I}_2 końca linii jest odchyłony od takiegoż napięcia \hat{V}_2 o kąt φ_2 , zaś oporność charakterystyczna \hat{Z} jest przesunięta o kąt α , znaleziony ze wzoru 58, iloczyn $\hat{I}_2 \hat{Z}$ będzie więc stanowił wektor przesunięty względem \hat{V}_2 o kąt $(\varphi_2 + \alpha)$.

Z tych rozważań wynika, że sposób wykreślnego znajdowania napięcia i prądu w dowolnym miejscu linii jest zupełnie taki sam, co i w wypadku podanym w § 8. Należy tylko uwzględnić, że kąt między kierunkami napięcia końca linii i iloczynem prądu końca linii przez jej oporność charakterystyczną jest

nie φ_2 , lecz $(\varphi_2 + \alpha)$, więc na rys. 20 wektory OF'' i OF''' powinny być przesunięte o kąt $(\varphi_2 + \alpha)$.

§ 10. Obliczenie stałych linii na podstawie pomiarów, dokonanych w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Wszystkie stałe linii: oporność, upływność, indukcyjność i pojemność mogą być obliczone, jeżeli wiadome są oporności pozorne linii, odpowiadające stanowi jałowemu i stanowi zwarcia. Te wielkości mogą być podane przez fabrykę /np. dla kabli/, lub też określone za pomocą pomiarów; w tym celu wystarczy zmierzyć na początku linii moc, napięcie i natężenie prądu, najpierw w wypadku, gdy linja jest w stanie jałowym, to znaczy w końcu otwarta, następnie, gdy linja jest w końcu zwarta; na podstawie tych pomiarów znajdujemy odpowiednie oporności pozorne oraz współczynniki mocy, a więc kąty przesunięcia fazy prądu względem napięcia dla obu stanów. Oznaczając przez L_0 i L_z wartości oporności pozornych linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia, zaś przez φ_0 i φ_z kąty przesunięcia fazy odpowiednich prądów względem napięć, będziemy mieli:

$$\hat{Z}_0 = Z_0 (\cos \varphi_0 - j \sin \varphi_0) = Z_0 e^{-j\varphi_0} \dots /65/$$

$$\hat{Z}_z = Z_z (\cos \varphi_z - j \sin \varphi_z) = Z_z e^{-j\varphi_z} \dots /66/$$

Znak — w tych wzorach jest wzięty z tego powodu, że oporność pozorną, rozpatrywaną jako wielkość symboliczna, ma kąt równy co do wartości kąta przesunięcia fazy prądu względem napięcia, lecz o znaku przeciwnym; wynika to stąd, że oporność pozorną otrzymuje się przez podzielenie napięcia przez prąd, jeżeli więc przy dowolnym kierunku zasadniczym, wektor napięcia \hat{V} ma kąt ψ , zaś wektor prądu \hat{J} przesunięty jest względem \hat{V} o kąt φ , wówczas:

$$\hat{V} = V e^{j\psi},$$

$$\hat{J} = J e^{j(\psi + \varphi)},$$

zaś oporność pozorną

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{J}} = \frac{V}{J} e^{-j\varphi} = Z e^{-j\varphi};$$

z tego wynika, że przy $\varphi > 0$, to znaczy gdy prąd wyprzedza napięcie, \hat{Z} będzie miało kąt ujemny i naodwrot, gdy $\varphi < 0$, czyli gdy prąd opóźnia się względem napięcia, kąt dla \hat{Z} będzie dodatni. —

Wobec tego, oznaczając przez φ_0 i φ_z kąty przesunięcia fazy prądu względem napięcia, musimy wziąć dla \hat{L}_0 i \hat{L}_z kąty $-\varphi_0$ i $-\varphi_z$.

Na podstawie wzorów /27/ i /28/ mamy dla początku linii, czyli dla odległości $x=l$, mierzonej od końca, następujące wartości napięcia V_1 i prądu J_1 , gdy w końcu wartości te wynoszą V_2 i J_2 :

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2 \cos \text{hip } kl + \hat{J}_2 \hat{L} \sin \text{hip } kl \quad \dots \quad /67/$$

$$\hat{J}_1 \hat{L} = \hat{V}_2 \sin \text{hip } kl + \hat{J}_2 \hat{L} \cos \text{hip } kl \quad \dots \quad /68/$$

Oznaczając dla stanu jałowego, gdy w końcu linii napięcie ma wartość V_2 , zaś natężenie prądu równe jest zeru, napięcie i prąd na początku przez V_{10} i J_{10} , następnie dla stanu zwarcia, gdy napięcie w końcu równe jest zeru, zaś natężenie prądu ma wartość J_2 , napięcie i prąd na początku przez V_{1z} i J_{1z} , otrzymamy ze wzorów /67/ i /68/, zakładając kolejno $J_2 = 0$ oraz $V_2 = 0$:

$$\hat{V}_{10} = \hat{V}_2 \cos \text{hip } kl \quad \dots \quad /69/$$

$$\hat{J}_{10} \hat{Z} = \hat{V}_2 \sin \text{hip kl} \quad \dots \quad /70/$$

$$\hat{V}_{12} = \hat{J}_2 \hat{Z} \sin \text{hip kl} \quad \dots \quad /71/$$

$$\hat{J}_{12} \hat{Z} = \hat{J}_2 \hat{Z} \cos \text{hip kl} \quad \dots \quad /72/$$

Dzieląc stronami /69/ przez /70/ oraz /71/
przez /72/ otrzymamy:

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{J}_{10} \hat{Z}} = \cotg \text{hip kl} ,$$

$$\frac{\hat{V}_{12}}{\hat{J}_{12} \hat{Z}} = \tg \text{hip kl} ;$$

ale

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{J}_{10}} = \hat{Z}_0 , \quad \frac{\hat{V}_{12}}{\hat{J}_{12}} = \hat{Z}_2 ,$$

wobec czego

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Z}_0 = \hat{Z} \cotg \text{hip kl} , \quad \dots \quad /73/ \\ \hat{Z}_2 = \hat{Z} \tg \text{hip kl} , \quad \dots \quad /74/ \end{array} \right.$$

skąd przez pomnożenie i dzielenie otrzymujemy:

$$\hat{Z}^2 = \hat{Z}_0 \hat{Z}_2 ,$$

$$(\tg \text{hip kl})^2 = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_0} ;$$

wreszcie

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_2} \quad \dots \quad /75/$$

$$\tg \text{hip kl} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_0}} \quad \dots \quad /76/$$

Ponieważ

$$\operatorname{tg} \operatorname{hip} kl = \frac{e^{kl} - e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}} = \frac{e^{2kl} - 1}{e^{2kl} + 1},$$

więc

$$e^{2kl} = \frac{1 + \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl} = \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_2}{Z_0}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_2}{Z_0}}} = \frac{\sqrt{Z_0} + \sqrt{Z_2}}{\sqrt{Z_0} - \sqrt{Z_2}} \dots \dots \dots /77/$$

Przyjmując pod uwagę wartości \hat{Z}_0 i \hat{Z}_x ze wzorów /65/ i /66/, będziemy mieli:

$$e^{2kl} = \frac{\sqrt{Z_0} e^{-j\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{Z_2} e^{-j\frac{\varphi_2}{2}}}{\sqrt{Z_0} e^{-j\frac{\varphi_0}{2}} - \sqrt{Z_2} e^{-j\frac{\varphi_2}{2}}};$$

mnożąc licznik i mianownik przez

$$\sqrt{Z_0} e^{j\frac{\varphi_0}{2}} - \sqrt{Z_2} e^{j\frac{\varphi_2}{2}}, \quad \text{otrzymamy};$$

$$e^{2kl} = \frac{Z_0 - Z_2 - \sqrt{Z_0 Z_2} \left[e^{j\frac{(\varphi_2 - \varphi_0)}{2}} - e^{-j\frac{(\varphi_2 - \varphi_0)}{2}} \right]}{Z_0 + Z_2 - \sqrt{Z_0 Z_2} \left[e^{j\frac{(\varphi_2 - \varphi_0)}{2}} + e^{-j\frac{(\varphi_2 - \varphi_0)}{2}} \right]}$$

Zważywszy, że $k = a + jb$ i zamieniając funkcje wykładnicze funkcjami trygonometrycznymi według wzorów Eulera, napiszemy:

$$e^{2al} (\cos 2bl + j \sin 2bl) = \frac{Z_0 - Z_2 - j 2 \sqrt{Z_0 Z_2} \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2} \right)}{Z_0 + Z_2 - 2 \sqrt{Z_0 Z_2} \cos \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2} \right)},$$

skąd

$$e^{+al} = \frac{(Z_0 - Z_x)^2 + 4Z_0 Z_x \sin^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right)}{\left[Z_0 + Z_x - 2\sqrt{Z_0 Z_x} \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right)\right]^2} = M;$$

$$\operatorname{tg} 2bl = - \frac{2\sqrt{Z_0 Z_x} \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right)}{Z_0 - Z_x} = N;$$

przez odpowiednie działania otrzymujemy:

$$a = \frac{1}{4l} \operatorname{lg}_n M; \quad b = \frac{1}{2l} \operatorname{arctg} N;$$

w ten sposób obliczamy współczynnik tłumienia a oraz współczynnik długości fali b .

Następnie dla znalezienia oporności falowej Z wstawiamy do wzoru /75/ wartości \hat{Z}_0 i \hat{Z}_x z /65/ i /66/, wtedy:

$$\hat{Z} = \sqrt{Z_0 Z_x} e^{-j\frac{(\varphi_0 + \varphi_2)}{2}} = \sqrt{Z_0 Z_x} \left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right] /78/$$

Ale na podstawie /14/ i /21/

$$\sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = a + jb,$$

$$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \hat{Z};$$

więc

$$R + j\omega L = (a + jb)\hat{Z},$$

$$A + j\omega C = \frac{a + jb}{\hat{Z}};$$

biorąc wartość \hat{Z} ze wzoru /78/ otrzymamy:

$$R + j\omega L = (a + jb) \sqrt{Z_0 Z_2} \left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right],$$

$$A + j\omega C = (a + jb) \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_2}} \left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right];$$

przyrównując w tych wzorach części rzeczywiste i części urojone, znajdujemy:

$$R = \sqrt{Z_0 Z_2} \left[a \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right],$$

$$L = \frac{\sqrt{Z_0 Z_2}}{\omega} \left[b \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) - a \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right],$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_2}} \left[a \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) - b \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right],$$

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{Z_0 Z_2}} \left[b \cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) + a \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2}\right) \right].$$

W ten sposób możemy obliczyć stałe linii, mając wartości Z_0, Z_2, φ_0 i φ_2 .

§ 11. Wzory dla napięć i prądów, oparte na własnościach linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Spółczynnik linjowy.

Rozpatrując wzory /69/ i /72/ spostrzegamy, że

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{V}_2} = \frac{\hat{J}_{12}}{\hat{J}_2} = \coship kl ;$$

ponieważ $k = a + jb$ jest naogół liczbą zespoloną, więc i $\coship kl$ musimy uważać również jako liczbę zespoloną; oznaczmy:

$$\underline{\coship kl = S ;}$$

wprowadzając do naszych wzorów ten współczynnik, musimy go traktować jako symbol; nazywamy go spółczynnikiem linjowym.

Możemy więc powyższe wzory przepisać w postaci:

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{V}_2} = \frac{\hat{J}_{12}}{\hat{J}_2} = \hat{S} \quad \dots \dots \dots /79/$$

Niech γ będzie kątem przesunięcia fazy \hat{V}_{10} względem \hat{V}_2 lub, co jedno i to samo, - \hat{J}_{12} względem \hat{J}_2 ; kąt ten będzie więc kątem współczynnika linjowego w ujęciu symbolicznem; wówczas

$$\underline{\hat{S} = S e^{j\gamma} = S(\cos\gamma + j \sin\gamma) .}$$

Moduł S i argument γ możemy określić przez współczynniki a i b oraz długość linii l w sposób następujący. Z założenia wynika, że:

$$\hat{S} = \cos \text{hip } kl = \frac{e^{kl} + e^{-kl}}{2} = \frac{e^{(a+jb)l} + e^{-(a+jb)l}}{2},$$

albo

$$S(\cos \gamma + j \sin \gamma) = \frac{e^{al} + e^{-al}}{2} \cos bl + j \frac{e^{al} - e^{-al}}{2} \sin bl,$$

skąd

$$S = \sqrt{\left(\frac{e^{al} + e^{-al}}{2}\right)^2 \cos^2 bl + \left(\frac{e^{al} - e^{-al}}{2}\right)^2 \sin^2 bl} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{e^{2al} + e^{-2al} + 2 \cos 2bl};$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{(e^{al} - e^{-al}) \sin bl}{(e^{al} + e^{-al}) \cos bl} = \text{tg hip } al \cdot \text{tg } bl = \frac{e^{2al} - 1}{e^{2al} + 1} \text{tg } bl.$$

Chcąc określić \hat{S} przez oporności pozorne linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia, napiszemy:

$$\hat{S} = \cos \text{hip } kl = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{tg hip } kl)^2}};$$

biorąc wartość $\text{tg hip } kl$ ze wzoru /76/ będziemy mieli:

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_0}}} = \sqrt{\frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_0 - \hat{L}_1}}, \quad \dots \dots /80/$$

stad

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_0 - \hat{L}_1} = \frac{L_0 e^{-j\varphi_0}}{L_0 e^{-j\varphi_0} - L_1 e^{-j\varphi_1}} = \frac{L_0}{L_0 - L_1 e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)}};$$

mnożąc licznik i mianownik przez $L_0 - L_1 e^{j(\varphi_1 - \varphi_0)}$,
otrzymamy:

$$\hat{S}^2 = \frac{L_0 [L_0 - L_1 e^{j(\varphi_1 - \varphi_0)}]}{L_0^2 + L_1^2 - L_0 L_1 [e^{j(\varphi_1 - \varphi_0)} + e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)}]};$$

zamieniając funkcje wykładnicze funkcjami trygonometrycznymi i biorąc pod uwagę, że

$$\hat{S}^2 = S^2 (\cos \gamma + j \sin \gamma)^2 = S^2 (\cos 2\gamma + j \sin 2\gamma),$$

będziemy mieli:

$$S^2 (\cos 2\gamma + j \sin 2\gamma) = \frac{L_0 [L_0 - L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0) - j L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_0)]}{L_0^2 + L_1^2 - 2 L_0 L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)},$$

skąd

$$S^4 = \frac{L_0^2 \{ [L_0 - L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)]^2 + L_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_0) \}}{[L_0^2 + L_1^2 - 2 L_0 L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)]^2} =$$

$$= \frac{L_0^2}{L_0^2 + L_1^2 - 2 L_0 L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)};$$

$$S = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0^2 + I_z^2 - 2I_0I_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}} \quad \dots /81/$$

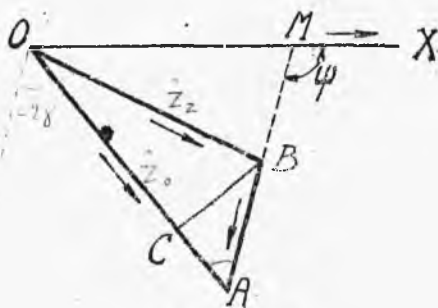
$$\operatorname{tg} 2\gamma = - \frac{I_z \sin(\varphi_z - \varphi_0)}{I_0 - I_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)} \quad \dots /82/$$

Ten sam rezultat można otrzymać geometrycznie.

Wychodząc ze wzoru:

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{I}_0}{\hat{I}_0 - \hat{I}_z};$$

przeprowadzamy dowolny kierunek OX /rys. 21/,
odkładamy z punktu O pod kątami $(-\varphi_0)$ oraz $(-\varphi_z)$



$$OA = I_0, \quad OB = I_z;$$

wówczas

$$BA = \hat{I}_0 - \hat{I}_z,$$

$$\sphericalangle MOA = -\varphi_0,$$

$$\sphericalangle MOB = -\varphi_z;$$

rys. 21.

oznaczając przez $-\psi$ kąt BMX , który tworzy BA z OX , będziemy mieli:

$$\hat{I}_0 = OA \cdot e^{-j\varphi_0},$$

$$\hat{I}_0 - \hat{I}_z = BA \cdot e^{-j\psi},$$

wobec czego

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{I}_0}{\hat{I}_0 - \hat{I}_z} = \frac{OA}{BA} e^{-j(\varphi_0 + \psi)},$$

skąd

$$S^2 = \frac{OA}{BA};$$

$$2\gamma = -(\varphi_0 + \psi).$$

z ΔOAB

$$BA = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cos \angle AOB},$$

ale

$$OA = I_0, OB = I_z, \angle AOB = \angle MOA - \angle MOB$$

$$= -\varphi_0 - (-\varphi_z) = \varphi_z - \varphi_0,$$

więc

$$S = \sqrt{\frac{OA}{BA}} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0^2 + I_z^2 - 2 I_0 I_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}}.$$

Następnie

$$\angle BMX = \angle MOA + \angle OAB,$$

$$\text{czyli } -\psi = -\varphi_0 + \angle OAB.$$

$$\angle OAB = \varphi_0 + \psi = -2\gamma;$$

ponieważ

$$\tan \angle OAB = \frac{BC}{AC} = \frac{OB \sin \angle AOB}{OA - OB \cos \angle AOB},$$

więc ostatecznie:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = - \frac{Z_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_0)}{Z_0 - Z_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_0)}$$

Wprowadzenie współczynnika linjowego \hat{S} pozwala na uproszczenie wzorów, uzależniających napięcia i prądy na początku linii, od napięć i prądów w jej końcu; rzeczywiście ze wzoru /79/ mamy:

$$\hat{V}_{10} = \hat{V}_2 \hat{S}; \quad \hat{J}_{12} = \hat{J}_2 \hat{S};$$

następnie

$$\frac{\hat{V}_{12}}{\hat{J}_{12}} = \hat{Z}_2, \text{ czyli } \hat{V}_{12} = \hat{J}_{12} \hat{Z}_2 = \hat{J}_2 \hat{Z}_2 \hat{S};$$

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{J}_{10}} = \hat{Z}_0, \text{ czyli } \hat{J}_{10} = \frac{\hat{V}_{10}}{\hat{Z}_0} = \frac{\hat{V}_2 \hat{S}}{\hat{Z}_0}$$

Ponieważ

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_{10} + \hat{V}_{12},$$

$$\hat{J}_1 = \hat{J}_{10} + \hat{J}_{12},$$

więc po podstawieniu odpowiednich wartości, otrzymamy:

$$\hat{V}_1 = \hat{S}(\hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}_2) \quad \dots \dots /83/$$

$$\hat{J}_1 = \hat{S}\left(\hat{J}_2 + \frac{\hat{V}_2}{\hat{Z}_0}\right) \quad \dots \dots /84/$$

albo

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{S}} = \hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}_2 \quad \dots \dots /85/$$

$$\frac{\hat{J}_1}{\hat{S}} = \hat{J}_2 + \frac{\hat{V}_2}{\hat{L}_0} \dots \dots \dots /86/$$

Jeżeli zamiast oporności pozornej w stanie zwarcia Z_0 wprowadzić do wyżej rozpatrzonych wzorów przewodność pozorną w stanie zwarcia Y_0 , wówczas zamiast Z_0 należy pisać $\frac{1}{Y_0}$, zamiast $\varphi_0 \dots - \varphi_0$, to znaczy, że dla Y_0 trzeba brać kąt z tym samym znakiem, jaki odpowiada przesunięciu w fazie prądu względem napięcia.

Przy rozwiązywaniu powyższych równań metodą symboliczną, gdy chodzi o znalezienie wartości napięcia V_1 , prądu J_1 oraz współczynnika mocy $\cos \varphi_1$, gdzie φ_1 stanowi kąt przesunięcia fazy prądu J_1 względem napięcia V_1 , musimy oprócz danych V_2, J_2 i φ_2 mieć wartości Z_0, Z_2 oraz kąty φ_0 i φ_2 ; z tych danych obliczamy S według wzoru /81/; określenie kąta γ jest w tym wypadku zbędne, gdyż kąt φ_1 pomiędzy \hat{J}_1 i \hat{V}_1 jest taki sam, co i pomiędzy

$\frac{\hat{J}_1}{\hat{S}}$ i $\frac{\hat{V}_1}{\hat{S}}$, wystarczy więc obliczenie kątów pomiędzy $\frac{\hat{J}_1}{\hat{S}}$ i \hat{V}_2 , oraz pomiędzy $\frac{\hat{V}_1}{\hat{S}}$ i \hat{V}_2 , wtedy różnica tych kątów da nam wartość φ_1 .

W poprzednich wzorach oporności Z_0 i Z_2 odpowiadały całej długości linii l . Czasami zachodzi potrzeba przeliczenia tych wielkości, podanych dla

określonej długości l , na inną długość l' takiej samej linii. Oznaczmy poszukiwane oporności pozorne, odpowiadające długości l' przez Z_0' i Z_z' ; na podstawie wzorów /73/ i /74/ będziemy mieli:

$$Z_0' = \hat{Z} \operatorname{cotg} \operatorname{hip} kl', \quad \dots \dots \dots /87/$$

$$Z_z' = \hat{Z} \operatorname{tg} \operatorname{hip} kl', \quad \dots \dots \dots /88/$$

gdzie według wzoru /75/

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z}$$

jest wielkością niezależną od długości linii, lecz tylko od stałych R, L, A, C oraz ω . Dla określenia funkcji hiperbolicznych we wzorach /87/ i /88/ mamy:

$$\operatorname{tg} \operatorname{hip} kl' = \frac{e^{2kl'} - 1}{e^{2kl'} + 1}; \quad \dots \dots \dots /89/$$

$$\operatorname{cotg} \operatorname{hip} kl' = \frac{e^{2kl'} + 1}{e^{2kl'} - 1}; \quad \dots \dots \dots /90/$$

z drugiej strony ze wzoru /77/

$$e^{2kl} = \frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}},$$

oznaczając w skróceniu

$$\frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}} = q,$$

mamy:

$$e^{2kl} = q \quad ,$$

$$e^{2k} = q \frac{1}{l} \quad ,$$

$$e^{2kl'} = q \left(\frac{l'}{l} \right) \quad .$$

Podstawiając tę wartość do /89/, /90/, a następnie do /87/ i /88/, otrzymamy:

$$\hat{Z}'_0 = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_2} \frac{q \frac{l'}{l} + 1}{q \frac{l'}{l} - 1} \quad \dots \dots \dots /91/$$

$$\hat{Z}'_2 = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_2} \frac{q \frac{l'}{l} - 1}{q \frac{l'}{l} + 1} \quad \dots \dots \dots /92/$$

Rozwiązując te wzory metodą symboliczną znajdziemy moduły \hat{Z}'_0 i \hat{Z}'_2 oraz odpowiednie kąty.

ROZDZIAŁ III.

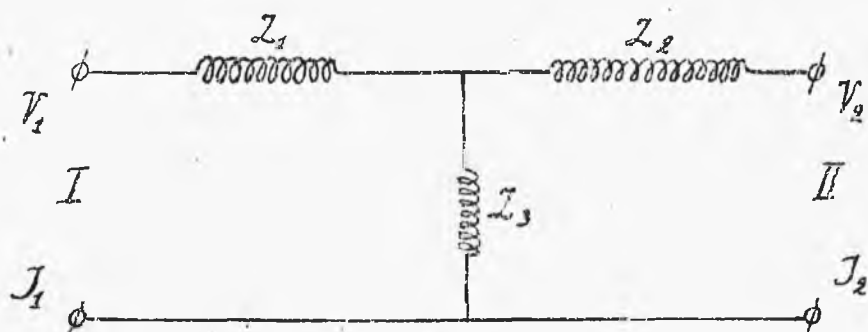
RÓWNANIA I WYKRESY OBWODÓW PRĄDU ZMIENNEGO.

OPARTE NA BADANIACH W STANIE JAŁOWYM I W STANIE ZWARCIA.

§ 1 Równania zasadnicze. W większości wypadków w elektrotechnice mamy do czynienia z obwodami, które można sprowadzić do układów równoważnych, dających się ująć w proste schematy. Gdy chodzi o przenoszenie energii elektrycznej od źródła prądu do odbiornika bezpośrednio albo za pomocą transfer-

natorów lub gdy rozpatrujemy maszyny, względnie przyrządy elektryczne, w których zachodzą sprzężenia magnetyczne, możemy, bardzo często w celu badania zależności napięć i prądów w takich obwodach, zastosować układ równoważny, zawierający trzy oporności pozorne, z których jedna jest połączona w szereg z dwoma innymi, połączeniami równoległe. Wobec szerokiego zastosowania takiego równoważnego układu nazywają go często obwodem ogólnym prądu zmiennego.

Schemat takiego obwodu podany jest na rys.22.



rys.22.

Pomiędzy zaciskami pierwotnymi I i wtórnymi II znajdują się trzy oporności pozorne \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 i \mathcal{L}_3 , przytem oporność \mathcal{L}_1 jest połączona w szereg z opornościami \mathcal{L}_2 i \mathcal{L}_3 , które ze sobą są połączone równoległe.

W celu wyprowadzenia zasadniczych wzorów dla na-

pięć i prądów zastosujemy metodę, znaną już z poprzedniego rozdziału, a polegającą na badaniach obwodu w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Oznaczmy dla stanu obciążenia wartości skuteczne napięcia i prądu na zaciskach pierwotnych przez V_1 i J_1 , zaś na zaciskach wtórnych przez V_2 i J_2 ; wielkości te są oczywiście wektorami; kąt przesunięcia fazy pomiędzy J_1 i V_1 niech będzie φ_1 , zaś pomiędzy J_2 i V_2 niech będzie φ_2 .

Zaciski pierwotne będziemy nazywali początkiem obwodu, zaś zaciski wtórne jego końcem.

Oznaczmy dalej dla stanu jałowego, gdy w końcu obwodu napięcie ma wartość V_2 , zaś prąd nie jest tu pobierany, czyli $J_2 = 0$, napięcie i prąd, potrzebne w tym celu na początku przez V_{10} i J_{10} , kąt pomiędzy nimi przez φ_0 , oraz dla stanu zwarcia /zaciski wtórne są połączone bez oporności/, gdy w końcu $V_2 = 0$, zaś prąd ma wartość J_2 , napięcie i prąd niezbędne na początku przez V_{1z} i J_{1z} , kąt pomiędzy nimi przez φ_z .

Rozpatrując powyższy obwód w stanie jałowym, spostrzegamy, że w tym wypadku prąd J_{10} przepływa przez oporności pozorne \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_3 , połączone ze sobą w szereg, czyli przez oporność $\hat{\mathcal{L}}_1 + \hat{\mathcal{L}}_3$; oznacza-

jąc sumę tych symbolów, która stanowi oporność pozorną stanu jałowego, przez \hat{Z}_0 , będziemy mieli:

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_3, \quad /1/$$

$$\hat{J}_{10} = \frac{\hat{V}_{10}}{\hat{Z}_0}. \quad /2/$$

Kąt \hat{Z}_0 będzie $-\varphi_0$, jeżeli φ_0 oznacza kąt przesunięcia fazy \hat{J}_{10} względem \hat{V}_{10} .

Z drugiej strony oporność Z_3 znajduje się pod napięciem V_2 , gdyż prąd przez Z_2 nie przepływa, więc

$$\hat{J}_{10} = \frac{\hat{V}_2}{\hat{Z}_3}; \quad /3/$$

przez porównanie /2/ i /3/ otrzymujemy:

$$\hat{V}_{10} = \hat{V}_2 \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_3} = \hat{V}_2 \hat{S}_0, \quad /4/$$

gdzie

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_3} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3}. \quad /5/$$

Spółczynnik \hat{S}_0 , rozpatrywany jako symbol, będzie miał kąt równy kątowi pomiędzy \hat{V}_{10} i \hat{V}_2 ; oznaczmy ten kąt przez γ_0 .

Zakładając wartość \hat{V}_{10} ze wzoru /4/ do /2/ otrzymamy:

$$\hat{J}_{10} = \hat{V}_2 \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0} \dots \dots \dots /6/$$

W stanie zwarcia prąd przepływający przez oporność Z_2 równy jest J_2 . Przez oporność Z_3 , równoległą do Z_2 , płynie prąd, wartość którego będzie $\hat{J}_2 \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3}$.

Geometryczna suma tych dwóch prądów daje nam prąd J_{12} , wychodzący z początku obwodu; mamy więc

$$\hat{J}_{12} = \hat{J}_2 + \hat{J}_2 \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} = \hat{J}_2 \left(1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} \right) \dots \dots \dots /7/$$

Oznaczając wyraz, znajdujący się w nawiasach, przez \hat{S}_2 , gdzie \hat{S}_2 stanowi symbol, którego kąt określony będzie kątem γ_2 pomiędzy \hat{J}_{12} i \hat{J}_2 , otrzymamy:

$$\hat{S}_2 = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_3} \dots \dots \dots /8/$$

$$\hat{J}_{12} = \hat{J}_2 \hat{S}_2 \dots \dots \dots /9/$$

Napięcie \hat{V}_{12} na początku oczywiście równa się geometrycznej sumie napięć na oporności Z_1 oraz na jednej z oporności Z_2 lub Z_3 , możemy więc napisać:

$$\hat{V}_{12} = \hat{J}_{12} \hat{Z}_1 + \hat{J}_2 \hat{Z}_2 \dots \dots \dots /10/$$

zaś biorąc pod uwagę /9/

$$\hat{V}_{12} = \hat{J}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{J}_2 \hat{Z}_2 = \hat{J}_2 (\hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) \dots /11/$$

Stosunek wektora napięcia do wektora prądu w stanie zwarcia oznaczamy przez \hat{Z}_z , będzie to symbol, stanowiący oporność pozorną obwodu w stanie zwarcia, którego kąt równy jest $-\varphi_z$, jeżeli przez φ_z oznaczymy kąt przesunięcia fazy \hat{J}_{1z} względem \hat{V}_{1z} .

Mamy więc

$$\hat{V}_{1z} = \hat{J}_{1z} \hat{Z}_z \dots /12/$$

albo przyjmując pod uwagę /9/

$$\hat{V}_{1z} = \hat{J}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z \dots /13/$$

Przez porównanie /11/ i /13/ otrzymujemy:

$$\hat{S}_z \hat{Z}_z = \hat{S}_z \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 \dots /14/$$

Przechodząc do stanu obciążenia rozumiemy w sposób następujący: dla otrzymania w końcu napięcia V_2 /bez prądu/ potrzebne są na początku napięcie V_{10} i prąd J_{10} ; zaś dla otrzymania w końcu prądu J_2 /bez napięcia/ musimy mieć na początku napięcie V_{1z} i prąd J_{1z} . Stosując zasadę niezależności działań napięć oraz prądów, dochodzimy do wyniku, że w stanie obciążenia, gdy na końcu obwodu mamy napięcie

V_2 i prąd J_2 , na początku musimy mieć napięcie i prąd, stanowiące sumy napięć i prądów, odpowiadających rozpatrzonym dwóm stanom: jałowemu i zwarcia. Możemy więc napisać:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_{10} + \hat{V}_{12}, \quad \dots \dots /15/$$

$$\hat{J}_1 = \hat{J}_{10} + \hat{J}_{12}, \quad \dots \dots /16/$$

zaś na zasadzie wzorów /4/ i /13/ oraz /6/ i /9/:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2 \hat{S}_0 + \hat{J}_2 \hat{S}_2 \hat{L}_2, \quad \dots \dots /17/$$

$$\hat{J}_1 = \hat{V}_2 \frac{\hat{S}_0}{\hat{L}_0} + \hat{J}_2 \hat{S}_2. \quad \dots \dots /18/$$

Pomiędzy czterema symbolami $\hat{L}_0, \hat{L}_2, \hat{S}_0$ i \hat{S}_2 , wchodzącymi w powyższych równaniach, istnieje zależność, którą możemy określić w sposób następujący: na zasadzie wzoru /5/ mamy:

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_3},$$

$$\hat{S}_0 = 1 + \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_3};$$

zestawiając razem wzory /8/ i /14/, to znaczy:

$$\hat{S}_2 = 1 + \frac{\hat{L}_2}{\hat{L}_3},$$

$$\hat{S}_2 \hat{L}_2 = \hat{S}_2 \hat{L}_1 + \hat{L}_2$$

otrzymujemy cztery równania, z których rugując \hat{L}_1 , \hat{L}_2 i \hat{L}_3 , otrzymamy pożądaną zależność pomiędzy omawianymi symbolami.

Z pierwszego z tych równań mamy:

$$\hat{L}_3 = \frac{\hat{L}_0}{\hat{S}_0},$$

z drugiego

$$\hat{L}_1 = (\hat{S}_0 - 1) \hat{L}_3 = (\hat{S}_0 - 1) \frac{\hat{L}_0}{\hat{S}_0},$$

z trzeciego

$$\hat{L}_2 = (\hat{S}_z - 1) \hat{L}_3 = (\hat{S}_z - 1) \frac{\hat{L}_0}{\hat{S}_0}.$$

Zakładając te wartości do czwartego równania, otrzymamy:

$$\hat{S}_z \hat{L}_z = \hat{S}_z (\hat{S}_0 - 1) \frac{\hat{L}_0}{\hat{S}_0} + (\hat{S}_z - 1) \frac{\hat{L}_0}{\hat{S}_0},$$
$$\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{L}_z = \hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{L}_0 - \hat{S}_z \hat{L}_0 + \hat{S}_z \hat{L}_0 - \hat{L}_0,$$

albo

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z (\hat{L}_0 - \hat{L}_z) = \hat{L}_0,$$

skąd

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_0 - \hat{L}_z} \quad \dots /19/$$

Wprowadzając zamiast oporności pozornej stanu jałowego \hat{L}_0 wielkość odwrotną, czyli przewodność

pozorną stanu jałowego i oznaczając tę wielkość przez \hat{Y}_0 , możemy przepisać równania /17/, /18/ i /19/ w sposób następujący:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2 \hat{S}_0 + \hat{J}_2 \hat{S}_z \hat{L}_z \quad \dots \quad /20/$$

$$\hat{J}_1 = \hat{V}_2 \hat{S}_0 \hat{Y}_0 + \hat{J}_2 \hat{S}_z \quad \dots \quad /21/$$

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{1}{1 - \hat{Y}_0 \hat{L}_z} \quad \dots \quad /22/$$

Układ trzech równań /17/, /18/, /19/ lub /20/, /21/ i /22/ stanowi równania zasadnicze t.zw. ogólnego obwodu prądu zmiennego, dające zależności pomiędzy napięciami i prądami na początku i w końcu obwodu.

Mamy w tych równaniach cztery zależne od siebie stałe $L_0 (Y_0), L_z, S_0, S_z$, które możemy nazwać stałymi ogólnego obwodu.

§ 2. Obwód symetryczny. Nazywamy symetrycznym taki obwód prądu zmiennego, dla którego w rozpartym schemacie $\hat{L}_1 = \hat{L}_2$. Wtedy przez porównanie wzorów /5/ i /8/ otrzymujemy:

$$\hat{S}_0 = \hat{S}_z$$

Oznaczając ten symbol wprost przez \hat{S} bez znac-

ka, zaś jego kąt przez γ , będziemy mieli ze wzorów /4/ i /9/

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{V}_2} = \frac{\hat{J}_{12}}{\hat{J}_2} = \hat{S}.$$

Taki wynik mieliśmy w poprzednim rozdziale /wzór 79/ dla linii elektrycznej z równomiernie rozłożonymi stałami, taka więc linja stanowi obwód symetryczny. Również transformatory i motory indukcyjne można uważać jako obwody symetryczne.

Dla znalezienia modułu S i kąta γ , oczywiście można skorzystać ze wzoru /81/ i /82/.

Równania zasadnicze /17/, /18/, /19/, lub /20/, /21/, /22/ w tym wypadku przepiszą się w sposób następujący:

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{S}} = \hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}_2, \quad \dots /23/$$

$$\frac{\hat{J}_1}{\hat{S}} = \frac{\hat{V}_2}{\hat{Z}_0} + \hat{J}_2, \quad \dots /24/$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_2}}, \quad \dots /25/$$

lub

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{S}} = \hat{V}_2 + \hat{J}_2 \hat{Z}_2, \quad \dots /26/$$

$$\frac{\hat{J}_1}{\hat{S}} = \hat{V}_2 \hat{Y}_0 + \hat{J}_2, \quad \dots /27/$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{1 - \hat{y}_0 \hat{Z}_z}} \quad \dots /28/$$

W obwodzie symetrycznym mamy tylko trzy zależne od siebie stałe $\hat{Z}_0(\hat{y}_0)$, \hat{Z}_z i S .

§ 3. Określenie stałych zapomocą pomiarów. Stałe, wchodzące do równań zasadniczych t.zw. ogólnego obwodu prądu zmiennego można określić na podstawie doświadczeń, przeprowadzonych w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Przy dowolnem napięciu \hat{V} mierzymy na początku obwodu prąd i moc prądu, gdy w końcu kolejno mamy stan jałowy i stan zwarcia; oznaczmy zmierzone wartości prądów przez \hat{J}_0 i \hat{J}_z i obliczone współczynniki mocy przez $\cos \varphi_0$ i $\cos \varphi_z$.

Oczywiście

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{V}}{\hat{J}_0} \text{ lub } \hat{y}_0 = \frac{\hat{J}_0}{\hat{V}} \text{ oraz } \hat{Z}_z = \frac{\hat{V}}{\hat{J}_z},$$

zaś znalezione kąty φ_0 i φ_z oznaczają kąty przesunięcia fazy odpowiednich prądów względem napięcia.

Zakładając we wzory /19/ lub /22/ powyższe wartości, otrzymamy:

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{J}_z}{\hat{J}_z - \hat{J}_0} \quad \dots /29/$$

Dla znalezienia wartości tego iloczynu znajdziemy najpierw wartość różnicy wektorów $\hat{J}_2 - \hat{J}_0$. Wychodząc z kierunku napięcia V /rys.23/, przeprowadzamy pod kątami φ_0 i φ_2 $OA = J_0$ i $OB = J_2$; odcinek AB stanowi różnicę wektorów $\hat{J}_2 - \hat{J}_0$. Z trójkąta OAB mamy:

$$\hat{J}_2 - \hat{J}_0 = AB = \sqrt{J_0^2 + J_2^2 - 2J_0J_2 \cos(\varphi_0 - \varphi_2)} ;$$

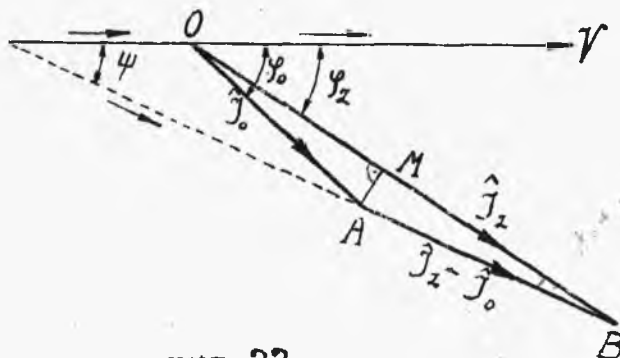
wobec tego

$$S_0 S_2 = \frac{J_2}{\sqrt{J_0^2 + J_2^2 - 2J_0J_2 \cos(\varphi_0 - \varphi_2)}} \dots \dots /30/$$

Opuszczając prostopadłą z A na bok OB , będziemy mieli:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle OBA) = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{OB - OM} = \frac{J_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_2)}{J_2 - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_2)}$$

Oznaczmy kąt , który tworzy wektor $\hat{J}_2 - \hat{J}_0 = AB$ z zasadniczym kierunkiem OV przez ψ , wtedy



rys.23.

$$\varphi_2 = \psi + \sphericalangle OBA, \text{ czyli}$$

$$\sphericalangle OBA = \varphi_2 - \psi ;$$

ale ze wzoru /29/

widzimy, że kąt iloczynu symboli \hat{S}_0, \hat{S}_2 powinien się równać

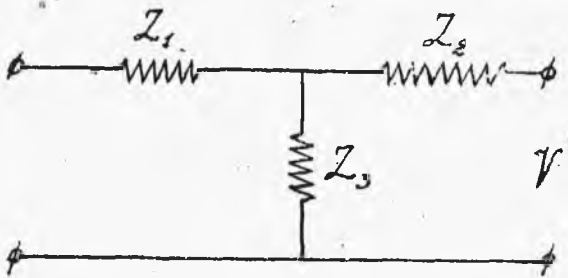
sumie kątów tych symboli, czyli $\gamma_0 + \gamma_2$, z drugiej zaś strony powinien się równać różnicy kątów wektorów \hat{I}_2 oraz $\hat{I}_2 - \hat{I}_0$, czyli $\varphi_2 - \psi$; z tego wynika, że

$$\sphericalangle OBA = \gamma_0 + \gamma_2,$$

więc

$$\operatorname{tg}(\gamma_0 + \gamma_2) = \frac{I_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_2)}{I_2 - I_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_2)} \quad \dots \quad /31/$$

Następnie doświadczenie przeprowadzamy w ten sposób, że w końcu obwodu dajemy dowolne napięcie V' , początek zaś raz pozostawiamy otwarty /stan jałowy na początku/, drugi raz zamykamy bez oporności /stan zwarcia na początku/ i mierzymy prąd i moc dla każdego wypadku. Otrzymamy wartości



rys.24.

$$I_0', \cos \varphi_0', I_2', \cos \varphi_2',$$

skąd znajdujemy:

$$\hat{I}_0' = \frac{V'}{\hat{Z}_0'}, \quad \hat{I}_2' = \frac{V'}{\hat{Z}_2'}$$

oraz kąty φ_0' i φ_2' przesunięcia fazy prądów względem napięcia.

W tym wypadku /rys.24/:

$$\hat{I}_0' = \hat{I}_2' + \hat{I}_3' = \hat{I}_3' \left(1 + \frac{\hat{Z}_2'}{\hat{Z}_3'} \right),$$

$$\hat{L}'_z = \hat{L}_z + \frac{\hat{L}_1 \hat{L}_3}{\hat{L}_1 + \hat{L}_3} = \hat{L}_z + \frac{\hat{L}_1}{1 + \frac{\hat{L}_3}{\hat{L}_1}}$$

Na zasadzie wzorów /8/ i /5/ będziemy mieli:

$$\hat{L}'_0 = \hat{L}_3 \hat{S}_z ; \hat{L}'_z = \hat{L}_z + \frac{\hat{L}_1}{\hat{S}_0} ; \hat{L}_0 = \hat{S}_0 \hat{L}_3 ,$$

zaś ze wzoru /14/:

$$\hat{L}_z = \hat{L}_1 + \frac{\hat{L}_2}{\hat{S}_z} ;$$

stąd

$$\frac{\hat{L}'_0}{\hat{L}_0} = \frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} ,$$

$$\frac{\hat{L}_z}{\hat{L}'_z} = \frac{\hat{L}_1 + \frac{\hat{L}_2}{\hat{S}_z}}{\hat{L}_z + \frac{\hat{L}_1}{\hat{S}_0}} = \frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} \left[\frac{\hat{L}_1 \hat{S}_z + \hat{L}_2}{\hat{L}_z \hat{S}_0 + \hat{L}_1} \right] .$$

Wyraz stojący w nawiasach równy jest 1. Rzeczywiście ze wzorów /5/ i /8/

$$\hat{S}_0 = 1 + \frac{\hat{L}_1}{\hat{L}_3} ; \hat{S}_z = 1 + \frac{\hat{L}_2}{\hat{L}_3} ;$$

$$\frac{\hat{L}_1 \hat{S}_z + \hat{L}_2}{\hat{L}_z \hat{S}_0 + \hat{L}_1} = \frac{\hat{L}_1 + \frac{\hat{L}_1 \hat{L}_2}{\hat{L}_3} + \hat{L}_2}{\hat{L}_z + \frac{\hat{L}_1 \hat{L}_2}{\hat{L}_3} + \hat{L}_1} = 1 .$$

Wobec tego otrzymujemy:

$$\frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} = \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}'_0} = \frac{\hat{L}_z}{\hat{L}'_z} . \quad \dots \dots /32/$$

Wartość stosunku poszukiwanych wielkości otrzy-
muje się jako stosunek wartości oporności pozor-
nych Z_0 i Z_0' lub Z_z i Z_z' :

$$\frac{S_0}{S_z} = \frac{Z_0}{Z_0'} = \frac{Z_z}{Z_z'} , \quad \dots \dots /33/$$

kąt dla ilorazu \hat{S}_0 i \hat{S}_z będzie z jednej strony
różnicą kątów γ_0 i γ_z , z drugiej strony na zasa-
dzie wzorów /32/ , będzie to różnica kątów \hat{Z}_0 i \hat{Z}_0'
lub \hat{Z}_z i \hat{Z}_z' , a więc :

$$\gamma_0 - \gamma_z = (-\varphi_0) - (-\varphi_0') = (-\varphi_z) - (-\varphi_z') ,$$

czyli

$$\gamma_0 - \gamma_z = \varphi_0' - \varphi_0 = \varphi_z' - \varphi_z . \quad \dots \dots /34/$$

Równania /30/ i /33/ dają nam możliwość znalezie-
nia wartości symboli \hat{S}_0 i \hat{S}_z , zaś równania /31/
i /34/ służą dla określenia kątów γ_0 i γ_z tychże
symboli.

Oczywiście dla znalezienia niewiadomych byłoby
dostateczne jedno z równań /33/ oraz jedno z równań
/34/ , to znaczy, że można się ograniczyć przy pomia-
rach w końcu obwodu, do stanu jałowego lub stanu zwar-
cia na początku; zwykle jednakże uskuteczniamy wszyst-
kie wskazane pomiary, dodatkowe zaś równanie służy dla
sprawdzenia wyników.

W wypadku obwodu symetrycznego będziemy mieli:

$$\hat{S}_0 = \hat{S}_z = \hat{S}; \quad \gamma_0 = \gamma_z = \gamma.$$

Oczywiście wystarczą pomiary, dokonane na początku obwodu; równania /29/, /30/ i /31/ dadzą nam:

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{J}_z}{\hat{J}_z - \hat{J}_0}, \quad \dots \dots \dots /35/$$

$$S^2 = \frac{J_z}{\sqrt{J_0^2 + J_z^2 - 2J_0 J_z \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}}, \quad \dots \dots \dots /36/$$

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{J_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_z)}{J_z - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_z)}, \quad \dots \dots \dots /37/$$

skąd znajdujemy S i γ .

§ 4. Maksymalna moc prądu oddawana w obwodzie.

Rozpatrzmy zagadnienie następujące: na początku obwodu napięcie V_1 ma wartość stałą, w końcu obwodu współczynnik mocy $\cos \varphi_2$ również pozostaje bez zmiany. W jakich warunkach moc oddawana w końcu będzie miała wartość największą? Oznaczając tę moc przez P_2 , będziemy mieli:

$$P_2 = V_2 J_2 \cos \varphi_2.$$

Wartość P_2 oczywiście będzie największą wtedy, gdy iloczyn $V_2 J_2$ będzie największy.

Ze wzorów /4/ i /13/ mamy:

$$\hat{V}_2 = \frac{\hat{V}_{10}}{\hat{S}_0}; \quad \hat{J}_2 = \frac{\hat{V}_{12}}{\hat{S}_2 \hat{L}_2},$$

zatem

$$\hat{V}_2 \hat{J}_2 = \frac{\hat{V}_{10} \hat{V}_{12}}{\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2};$$

ponieważ $\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2$ jest wielkością stałą dla danego obwodu, więc maximum $\hat{V}_2 \hat{J}_2$ będzie odpowiadało maximum iloczynu

$$\hat{V}_{10} \hat{V}_{12},$$

czyli maximum iloczynu wartości tych wektorów

$$V_{10} \cdot V_{12}.$$

Z drugiej strony:

$$\hat{V}_{10} + \hat{V}_{12} = \hat{V}_1,$$

a ponieważ z założenia \hat{V}_1 ma wartość stałą, więc suma geometryczna wektorów \hat{V}_{10} i \hat{V}_{12} jest wielkością stałą. Oznaczmy kąt przesunięcia fazy \hat{V}_{10} względem \hat{V}_{12} przez α , t.j.

$$\angle(\hat{V}_{10}, \hat{V}_{12}) = \alpha;$$

łatwo jest określić wartość tego kąta na podstawie wzorów /4/ i /13/,

$$\hat{V}_{10} = \hat{V}_2 \hat{S}_0, \quad \hat{V}_{12} = \hat{J}_2 \hat{S}_2 \hat{L}_2.$$

W tym celu oznaczmy jeszcze

$$\sphericalangle(\hat{V}_{10}, \hat{V}_1) = \psi_0, \quad \sphericalangle(\hat{V}_{12}, \hat{V}_1) = \psi_z, \quad \sphericalangle(\hat{V}_2, \hat{V}_1) = \psi_z;$$

zważywszy, że

$$\sphericalangle(\hat{J}_2, \hat{V}_2) = \varphi_2, \quad \sphericalangle \hat{S}_0 = \gamma_0, \quad \sphericalangle \hat{S}_2 = \gamma_z, \quad \sphericalangle \hat{L}_2 = -\varphi_z,$$

będziemy mieli:

$$\psi_0 = \psi_z + \gamma_0,$$

$$\psi_z = \psi_z + \varphi_2 + \gamma_z - \varphi_z,$$

$$\alpha = \psi_0 - \psi_z = \psi_z + \gamma_0 - \psi_z - \varphi_2 - \gamma_z + \varphi_z$$

i ostatecznie

$$\alpha = \varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z, \quad \dots \dots \dots /38/$$

zaś dla obwodu symetrycznego, gdy $\gamma_0 = \gamma_z$,

$$\alpha = \varphi_z - \varphi_2. \quad \dots \dots \dots /39/$$

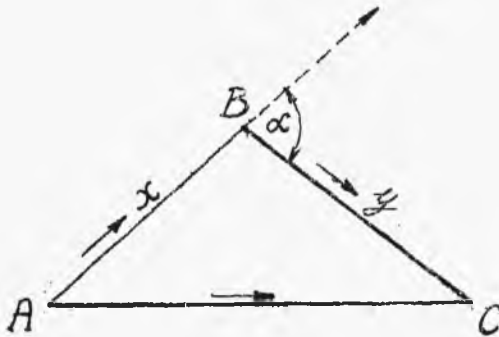
Ponieważ wartości kątów, określających kąt α , są stałe dla danego obwodu, przeto i kąt α pomiędzy wektorami \hat{V}_{10} i \hat{V}_{12} jest wielkością stałą.

Mamy więc do rozwiązania następujące zadanie: dwa wektory /rys.25/:

$$AB = \hat{V}_{10} = x$$

$$BC = \hat{V}_{12} = y$$

mają stałą sumę geometryczną $AC = \hat{V}_1 = c$ i tworzą stały kąt α ; trzeba znaleźć



rys. 25.

$$\max V_{10} V_{12} = \max xy.$$

Oznaczając:

$$U = xy,$$

będziemy szukali

$\max U$ z $\triangle ABC$

czyli
$$AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha = c^2,$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha = c^2 \quad \dots \quad /40/$$

Rozpatrując y jako funkcję x , określoną ostatnim równaniem i różniczkując, otrzymamy:

$$2x + 2yy' + 2x \cos \alpha y' + 2y \cos \alpha = 0,$$

skąd

$$y' = -\frac{y \cos \alpha + x}{y + x \cos \alpha}.$$

Różniczkując U , będziemy mieli:

$$U' = xy' + y$$

i podstawiając znaną wartość y' , otrzymamy:

$$U' = \frac{-xy \cos \alpha - x^2}{y + x \cos \alpha} + y = \frac{y^2 - x^2}{y + x \cos \alpha};$$

przyrównując $U' = 0$, znajdujemy:

$$y = x,$$

czyli po podstawieniu do /40/

$$x = y = \frac{c}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}} = \frac{c}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

ponieważ przy takiej wartości x i y $U'' < 0$, przeto warunek $y = x$ daje nam $\max U$, a więc

$$\max \hat{V}_{10} \hat{V}_{12}, \text{ czyli } \max P_2$$

nastąpi wtedy, gdy

$$V_{10} = V_{12} = \frac{V_1}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

albo na podstawie wzorów /4/ i /13/, gdy

$$V_2 = \frac{V_{10}}{S_0} = \frac{V_1}{2S_0\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$J_2 = \frac{V_{12}}{S_2L_2} = \frac{V_1}{2S_2L_2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

więc

$$\max P_2 = \max V_2 J_2 \cos\varphi_2 =$$

$$= \frac{V_1^2 \cos\varphi_2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2} S_0 S_2 L_2}.$$

Ponieważ

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha = 1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z),$$

możemy napisać:

$$\max P_2 = \frac{V_1^2 \cos \varphi_2}{2 S_0 S_z I_n [1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z)]}.$$

Rozpatrując teraz największą wartość $\max P_2$ w zależności od φ_2 , możemy znaleźć największą z największych wartości mocy, którą możemy osiągnąć na odbiorniku, dobierając odpowiednio V_2 , I_2 oraz φ_2 . W tym celu bierzemy pochodną ostatniego wzoru względem φ_2 i przyrównujemy ją do zera; po odpowiednich skróceniach otrzymamy:

$$-[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z)] \sin \varphi_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z) \cos \varphi_2 = 0,$$

lub

$$(1 + \cos \alpha) \sin \varphi_2 + \sin \alpha \cos \varphi_2 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = - \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$\varphi_2 = - \frac{\alpha}{2} = - \frac{(\varphi_2 - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z)}{2},$$

skąd

$$\varphi_2 = - (\varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z);$$

dla obwodu symetrycznego będziemy mieli:

$$\varphi_2 = -\varphi_2$$

i w tym wypadku największa możliwa moc będzie:

$$\begin{aligned} \text{Max } P_2 &= \frac{V_1^2 \cos \varphi_2}{2 S_0 S_z Z_z (1 + \cos 2\varphi_2)} = \\ &= \frac{V_1^2 \cos \varphi_2}{4 S_0 S_z Z_z \cos^2 \varphi_2} = \frac{V_1^2}{4 S_0 S_z Z_z \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

§ 5. Wykres pracy obwodu prądu zmiennego.

Wykresem pracy obwodu prądu zmiennego nazywamy wykres, za pomocą którego możemy określać napięcia i prądy, powstające na początku i w końcu obwodu jak również moc pobieraną i nadawaną, przy zachowaniu pewnych warunków. Podstawą do takich wykresów są pomiary, przeprowadzone w stanie jałowym i w stanie zwarcia:

Wychodzimy znowu z założenia, że napięcie V_1 na początku obwodu pozostaje bez zmiany i że współczynnik mocy na odbiorniku $\cos \varphi_2$ ma wartość stałą. Mamy trzy zasadnicze równania /17/, /18/ i /19/:

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_{10} + \hat{V}_{1z} = \hat{V}_2 \hat{S}_0 + \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z \dots \dots /41/$$

$$\hat{J}_1 = \hat{J}_{10} + \hat{J}_{1z} = \hat{V}_2 \frac{\hat{S}_0}{\hat{L}_0} + \hat{J}_2 \hat{S}_z; \quad \dots \quad /42/$$

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_0 - \hat{L}_z}. \quad \dots \quad /43/$$

Z pierwszego równania określamy:

$$\hat{V}_2 \hat{S}_0 = \hat{V}_1 - \hat{J}_2 \hat{S}_z \hat{L}_z.$$

Podstawiając do drugiego znajdziemy:

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{V}_1 - \hat{J}_2 \hat{S}_z \hat{L}_z}{\hat{L}_0} + \hat{J}_2 \hat{S}_z = \frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_0} + \hat{J}_2 \hat{S}_z \left(1 - \frac{\hat{L}_z}{\hat{L}_0}\right),$$

zaś na mocy trzeciego równania:

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_0} + \frac{\hat{J}_2}{\hat{S}_0}.$$

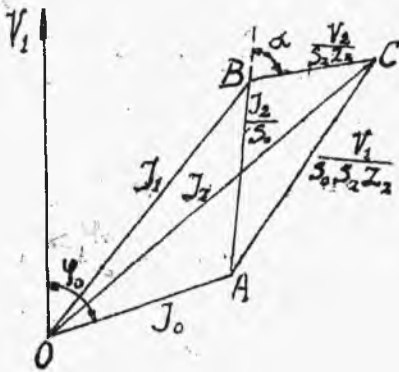
Oznaczmy przez J_0 prąd na początku obwodu przy napięciu V_1 , gdy w końcu mamy stan jałowy, wtedy:

$$\hat{J}_0 = \frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_0},$$

przytem kąt pomiędzy \hat{J}_0 i \hat{V}_1 niech będzie φ_0 ; możemy więc napisać:

$$\hat{J}_r = \hat{J}_0 + \frac{\hat{J}_2}{\hat{S}_0}.$$

Przyjmując dowolny kierunek up. pionowy jako kierunek napięcia V_r , odłożmy pod kątem φ_0 $OA = \hat{J}_0$ /rys.26/. Gdybyśmy wiedzieli, jaka jest



rys.26.

że AB stanowi wektor $\frac{\hat{J}_2}{\hat{S}_0}$, wtedy OB da nam wektor \hat{J}_1 .

Dzieląc obie strony równania /41/ przez $\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2$, otrzymamy:

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2} = \frac{\hat{V}_{10}}{\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2} + \frac{\hat{V}_{12}}{\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2} = \frac{\hat{V}_2}{\hat{S}_2 \hat{L}_2} + \frac{\hat{J}_2}{\hat{S}_0} \quad /44/$$

Kąt pomiędzy wektorami \hat{V}_{10} i \hat{V}_{12} , oznaczony poprzednio przez α , został określony na podstawie wzorów /38/, względnie /39/.

Jeżeli dwa te wektory \hat{V}_{10} i \hat{V}_{12} podzielimy przez jeden i ten sam iloczyn symboli $\hat{S}_0 \hat{S}_2 \hat{L}_2$, to oczywiście otrzymane w ten sposób nowe wektory będą tworzyły ze sobą ten sam kąt α , czyli

$$\angle \left(\frac{\hat{V}_2}{\hat{S}_2 \hat{L}_2}, \frac{\hat{J}_2}{\hat{S}_0} \right) = \alpha.$$

wartość wektora $\frac{\hat{J}_2}{\hat{S}_0}$ i jaki jest jego kierunek, wtedy dodając geometrycznie ten wektor do wektora \hat{J}_0 otrzymalibyśmy wektor \hat{J}_1 . Przypuśćmy,

Dla uniknięcia nieporozumień zwróćmy uwagę na to, że pierwszy z tych wektorów będzie przesunięty naprzód o kąt α względem drugiego, gdy $\alpha > 0$, zaś przesunięty wstecz, gdy $\alpha < 0$.

Przechodząc do naszego wykresu, przeprowadzamy od punktu B pod kątem α np. wstecz ($\alpha < 0$) od AB odcinek:

$$BC = \frac{\hat{V}_2}{\hat{S}_z \hat{L}_z},$$

wtedy na zasadzie /44/, geometryczna suma AB i BC będzie:

$$AC = \frac{\hat{V}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{L}_z}.$$

Wyraz ten stanowi wielkość stałą, więc jeżeli do tego stałego wektora dodamy również stały wektor $OA = \hat{J}_0 = \frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_0}$, wtedy otrzymamy również jako

wektor stały geometryczną sumę:

$$OC = \frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_0} + \frac{\hat{V}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{L}_z} = \frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_z} \left(\frac{\hat{L}_z}{\hat{L}_0} + \frac{1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z} \right) = \hat{J}_z$$

Wyraz stojący w nawiasach na zasadzie wzoru /43/ równy jest 1, zaś $\frac{\hat{V}_1}{\hat{L}_z} = \hat{J}_z$, stanowi prąd, płynący na początku obwodu, gdy koniec obwodu jest zwarty.

Oznaczmy:

$$\angle(\hat{J}_z, \hat{V}_1) = \varphi_z.$$

W ten sposób $OC = \hat{J}_z$; więc, jeżeli będziemy mieli wartości $J_0, J_z, \varphi_0, \varphi_z$, wtedy punkty A i C będą na wykresie końcami wiadomych wektorów \hat{J}_0 i \hat{J}_z , łącząc te punkty otrzymamy odcinek AC .

Wektory:

$$AB = \frac{\hat{J}_z}{\hat{S}_0} \text{ i } BC = \frac{\hat{V}_z}{\hat{S}_z \hat{L}_z}$$

mają zatem stałą i wiadomą sumę geometryczną AC oraz tworzą ze sobą stały i wiadomy kąt α .

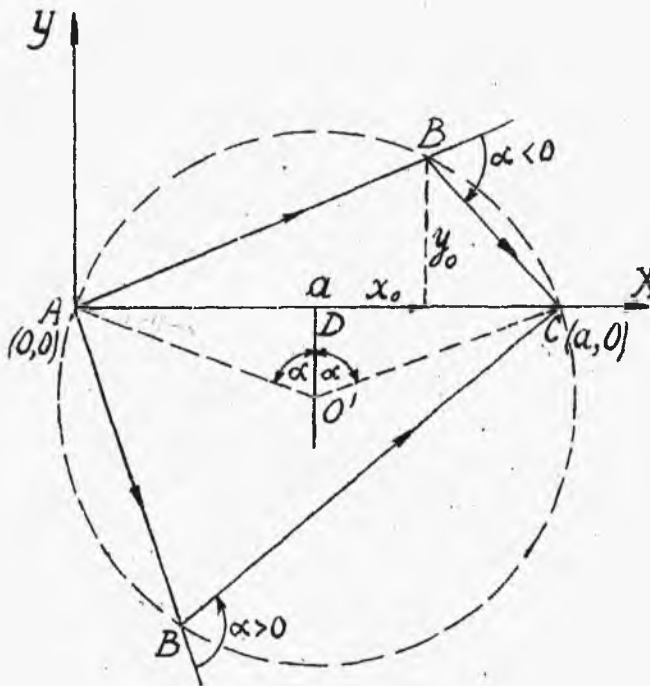
Jeżeli na danym odcinku $AC = a$ zbudujemy trójkąt tak, aby dwa pozostałe boki tworzyły kąt zewnętrzny α /rys. 27/, wtedy geometryczne miejsce wierzchołków B takich trójkątów będzie koło, środek którego O' ma współrzędne:

$$x_c = \frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad \dots \dots \dots /45/$$

zaś promień

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

czyli że dany odcinek AC stanowi cięciwę, opierającą się na kąt środkowy 2α , zaś środek znajduje się na prostopadłej, przeprowadzonej przez śro-



dek tego odcinka.

Aby to dowieść, wybieramy osie współrzędnych, biorąc w A początek, oś X w kierunku AC , zaś oś Y w kierunku prostopadłym. Oznaczmy współrzędne

rys.27.

zmiennego punktu B przez x_0 i y_0 ; współrzędne punktu A będą $0, 0$, zaś punktu C - będą $a, 0$. Stosując wzór na równanie prostej, przechodzącej przez dwa punkty, otrzymamy równanie BC :

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x-a}{x_0-a}, \text{ czyli } y = \frac{y_0}{x_0-a} x - \frac{ay_0}{x_0-a},$$

równanie AB :

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}, \text{ czyli } y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

Kąt pomiędzy prostą BC i prostą AB oznaczyliśmy przez α ; z równań prostych wynika, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y_0}{x_0 - a} - \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0^2}{x_0(x_0 - a)}} = \frac{ay_0}{x_0^2 - ax_0 + y_0^2},$$

skąd

$$x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} y_0 = 0,$$

albo

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha}.$$

Jest to równanie koła, środek którego ma współrzędne $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}$, zaś promień równy jest $\frac{a}{2 \sin \alpha}$.

Na rys. 27 O' stanowi środek takiego koła.

Z trójkąta $AO'D$ lub $DO'C$, mamy:

$$\operatorname{tg} \angle AO'D = \frac{AD}{O'D} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha,$$

skąd

$$\angle AO'D = \alpha.$$

Z rysunku widzimy, że dla znalezienia środka koła O' musimy ze środka odcinka AC przeprowadzić prostopadłą, następnie z punktu A pod kątem $90^\circ - \alpha$ do AC przeprowadzić prostą aż do przecięcia z prostopadłą w poszukiwanym punkcie O' .

Kąt α określiliśmy jako kąt przesunięcia fazy

\hat{V}_{10} względem \hat{V}_{12} ; następnie stwierdziliśmy, że ten sam kąt stanowi kąt przesunięcia fazy $\frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_2}$ względem $\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0}$. Na rys.27 jest to kąt, jaki tworzy BC względem AB . Łatwo jest zauważyć, że dla punktów B , mających rzędne dodatnie, kąt $\alpha < 0$, czyli wektor BC jest opóźniony względem wektora AB ; gdy zaś rzędne punktów B będą ujemne, wtedy $\alpha > 0$. Z tego wynika, że przy $\alpha > 0$ zadaniu będzie odpowiadać część koła, leżąca pod odcinkiem AC /osią X /, zaś przy $\alpha < 0$, część koła, leżąca nad odcinkiem AC .

Rozpatrując wartość kąta α ze wzoru:

$$\alpha = \varphi_z - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_z,$$

lub dla obwodu symetrycznego

$$\alpha = \varphi_z - \varphi_2,$$

możemy stwierdzić, że jego wartość bezwzględna nie przekracza 180° . Rzeczywiście, kąty γ_0 i γ_z naogół mają małe wartości i różnica tych kątów bliska jest zeru, zaś dla obwodu symetrycznego równa się zeru; następnie każdy z kątów φ_z i φ_2 może być dodatni lub ujemny, lecz nie przekracza wartości kąta prostego. Możemy więc napisać:

$$-180^\circ \ll \alpha \ll +180^\circ$$

Pozostawiając do szczególnego omówienia wypadki, gdy $\alpha = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi$, rozpatrzmy w jaki sposób zmienia się położenie środka interesującego nas koła przy zmianie wartości kąta α . Na podstawie wzorów/45/ znak rzędnej środka koła jest taki sam, co i znak $\text{tg } \alpha$; przytem będziemy mogli sprawdzić, że we wszystkich wypadkach dla znalezienia tego środka wystarczy z punktu A przeprowadzić prostą pod kątem $90^\circ - \alpha$ do AC z uwzględnieniem znaku tego kąta. Możemy ustalić cztery następujące wypadki:

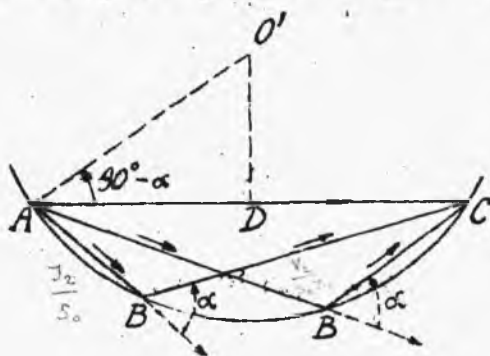
I./rys.28/:

$$\alpha > 0, \text{ lecz } < 90^\circ,$$

$$\text{tg } \alpha > 0$$

$$90^\circ - \alpha > 0, \text{ lecz } < 90^\circ.$$

AO' tworzy z AC kąt dodatni i ostry; geometryczne miejsce punktów B znajduje się pod odcinkiem



rys.28.

AC .

II. /rys.29/

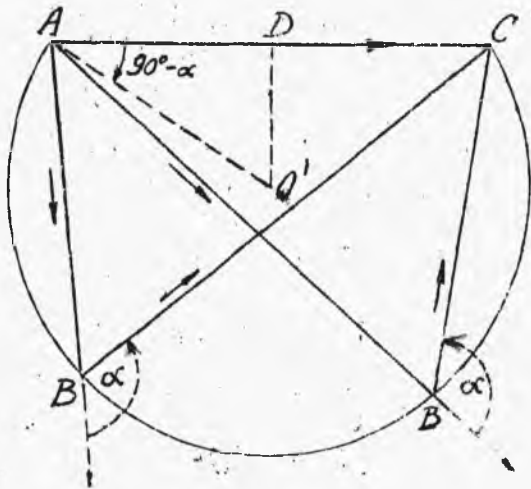
$$\alpha > 90^\circ, \text{ lecz } < 180^\circ$$

$$\text{tg } \alpha < 0$$

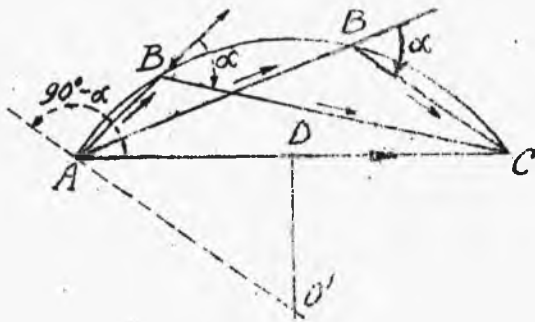
$$90^\circ - \alpha > -90^\circ, \text{ lecz } < 0.$$

AO' tworzy z AC kąt

ujemny i ostry; geo-



rys. 29.



rys: 30.

metryczne miejsce punktów B znajduje się pod odcinkiem AC .

III. /rys. 30/.

$$\alpha < 0, \text{ lecz } > -90^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha < 0$$

$$90^\circ - \alpha > 90^\circ,$$

lecz $< 180^\circ$.

AO' tworzy z AC

kąt dodatni i rozwarty; geometryczne miejsce punktów B znajduje się nad odcinkiem AC .

IV. /rys. 31/.

$$\alpha < -90^\circ,$$

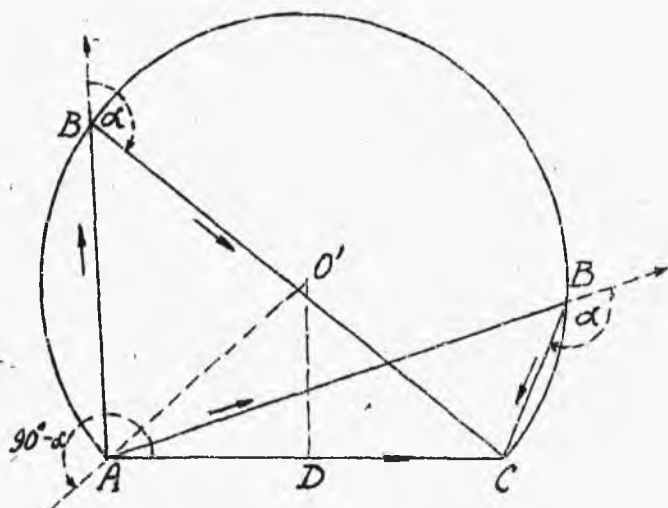
lecz $> -180^\circ$,

$$\operatorname{tg} \alpha > 0$$

$90^\circ - \alpha > 180^\circ$, lecz $< 270^\circ$.

AO' tworzy z AC kąt dodatni, zawarty pomiędzy 180° i 270° ; geometryczne miejsce punktów B znajduje się nad odcinkiem AC .

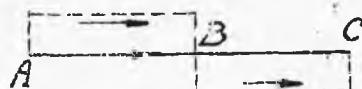
W wypadkach szczególnych, gdy $\alpha = 0, +180^\circ, -180^\circ$, geometrycznym miejscem punktów B będzie



rys. 31.

linia AC , przy-
tem

dla $\alpha = 0$ punkty B
leżą pomiędzy A
i C /rys. 32/:



rys. 32.

dla $\alpha = \pm 180^\circ$
punkty B leżą
po stronie A
/rys. 33/:



rys. 33.

dla $\alpha = -180^\circ$ punkty B leżą po stronie C /rys. 34/;

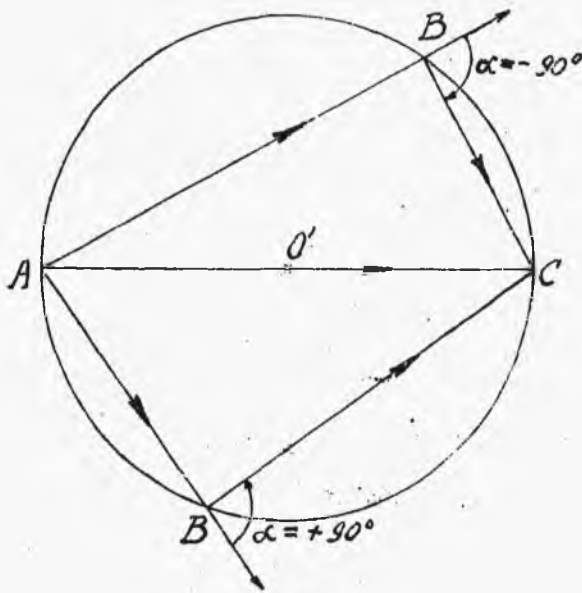


rys. 34.

gdy $\alpha = \pm 90^\circ$
otrzymujemy środek
koła we środku od-
cinka AC , przytem

dla $\alpha = +90^\circ$ geometrycznym miejscem punktów B bę-
dzie dolne półkole, zaś

dla $\alpha = -90^\circ$ - górne półkole /rys. 35/:



rys. 35.

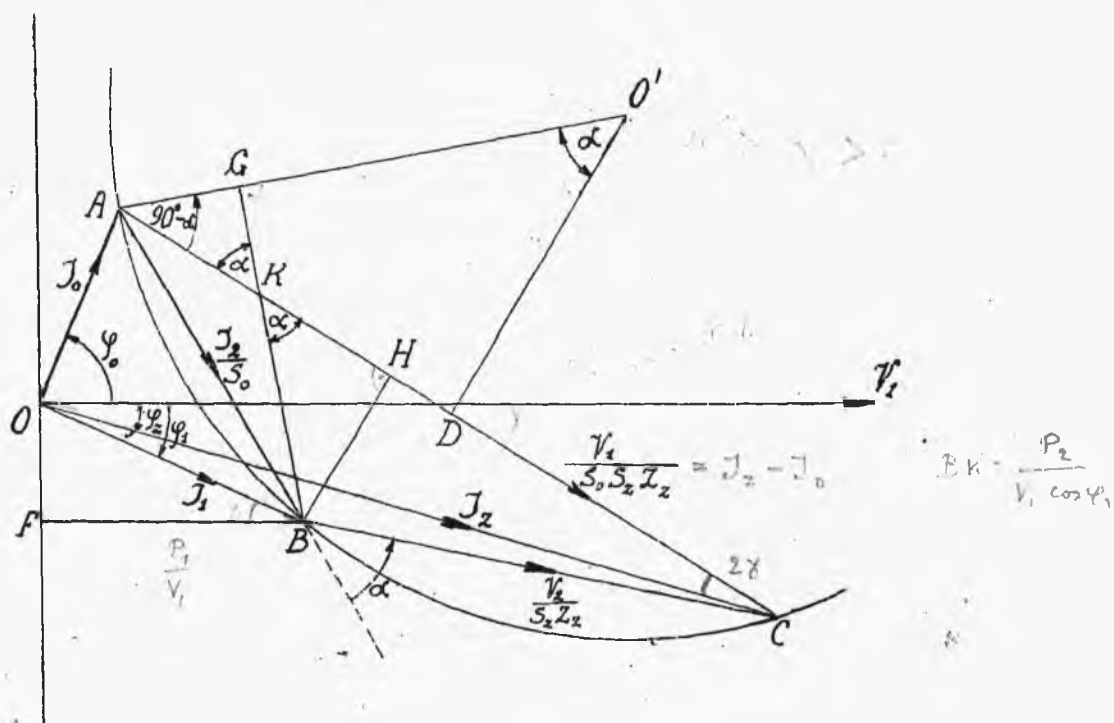
Powracając do rys. 26 i opierając się na powyższych rozumowaniach, możemy wykonać wykres pracy obwodu prądu zmiennego w sposób następujący:

Wybieramy początek wektorów O /rys. 36/ i dowolny kierunek OV_1 , ja-

ko kierunek stałego napięcia V_1 . Z początku O pod wiadomymi kątami φ_o i φ_z odkładamy w ustalonej skali prądów wiadome wartości $I_o = OA$ oraz

$I_z = OC$. Łączymy A i C linią prostą i ze środka D odcinka AC przeprowadzamy prostopadłą. Z punktu A pod kątem $90^\circ - \alpha$ do AC prowadzimy prostą AO' do przecięcia owej prostopadłej w punkcie O' , który będzie środkiem koła o promieniu $O'A$. W zależności od znaku kąta α wykreślamy część koła: przy $\alpha > 0$ pod odcinkiem AC /jak na rysunku/, przy $\alpha < 0$ nad odcinkiem AC .

Otrzymany w ten sposób łuk koła stanowi poszu-



rys. 36.

kiwany wykres pracy. Na podstawie tego wykresu możemy znaleźć wartości J_1 i V_2 dla rozmaitych wartości J_2 . W tym celu dla danej wartości J_2 obliczamy $\frac{J_2}{S_0}$ lub dla obwodu symetrycznego $\frac{J_2}{S}$; w przyjętej skali z punktu A odcinkiem równym $\frac{J_2}{S_0}$ przecinamy nasz wykres, znajdując w ten sposób punkt B ; wtedy OB daje nam bezpośrednio wektor \hat{J}_1 , zaś BC wektor $\frac{\hat{V}_2}{\hat{S}_2 \hat{Z}_2}$ lub $\frac{\hat{V}_2}{\hat{S} \hat{Z}_2}$, skąd obliczamy \hat{V}_2 .

Potrzebne do wykresu pracy wartości $I_0, \varphi_0, I_z, \varphi_z$ powinny być wiadome lub znalezione przez pomiary prądów i mocy prądów, gdy koniec obwodu jest w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Dla obwodu symetrycznego te dane wystarczą do obliczenia \hat{S} oraz α ze wzorów /36/, /37/ i /39/. Gdy badamy obwód niesymetryczny musimy jeszcze mieć dane, dotyczące analogicznych pomiarów, przeprowadzonych w końcu obwodu, gdy początek obwodu znajduje się kolejno w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Na podstawie tych danych obliczymy potrzebne wielkości ze wzorów /30/, /31/, /33/, /34/ i /38/.

W wypadku obwodu symetrycznego współczynnik S i jego kąt γ możemy znaleźć z wykresu pracy, bowiem wychodząc ze wzoru /35/:

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{I}_z}{\hat{I}_z - \hat{I}_0}$$

i mając na wykresie $\hat{I}_z - \hat{I}_0 = AC$ /rys.36/ otrzymamy S^2 , dzieląc I_z przez wartość AC , wreszcie znajdziemy S . Różnica kątów wektorów \hat{I}_z oraz $\hat{I}_z - \hat{I}_0$ równa się kątowi 2γ wektora \hat{S}^2 ; czyli

$$2\gamma = \varphi_z - \angle CDV_1, \text{ skąd } \gamma = \frac{\varphi_z - \angle CDV_1}{2}.$$

$\sphericalangle CDV_1$ trzeba odmierzyć np. kątomierzem i wziąć oczywiście z właściwym znakiem.

Zapomocą wykresu pracy możemy również znajdować moc P_1 na początku obwodu, oraz moc P_2 w końcu dla określonej wartości prądu J_2 .

Wektor $OB = \hat{J}_1$ tworzy z kierunkiem wektora napięcia \hat{V}_1 kąt φ_1 . Jeżeli kierunek OV_1 przyjmiemy za oś odciętych, zaś oś rzędnych przeprowadzimy prostopadle do tego kierunku, wtedy otrzymamy dla odciętej punktu B :

$$BF = OB \cdot \sin \sphericalangle BOF = J_1 \cos \varphi_1.$$

Ponieważ moc prądu na początku obwodu ma wartość:

$$P_1 = V_1 J_1 \cos \varphi_1,$$

zaś V_1 ma wartość stałą, przeto odcinek

$$BF = \frac{P_1}{V_1}$$

jest proporcjonalny do tej mocy i w odpowiedniej skali daje nam wartość P_1 . W trójkącie ABC

$$AB = \frac{J_2}{S_0}, \quad BC = \frac{V_2}{S_2 Z_2}.$$

Pole tego trójkąta ma wartość:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{J_2 V_2}{S_0 S_2 Z_2} \sin \alpha;$$

ponieważ moc w końcu obwodu ma wartość

$$P_2 = V_2 J_2 \cos \varphi_2,$$

więc

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{S_0 S_2 Z_2 \cos \varphi_2} P_2.$$

Z drugiej strony możemy pole trójkąta ABC określić jako połowę iloczynu podstawy AC przez wysokość BH .

Podstawa

$$AC = \frac{V_1}{S_0 S_2 Z_2},$$

zatem

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_1}{S_0 S_2 Z_2} \cdot BH;$$

przez porównanie obydwóch wzorów dla Δ znajdziemy:

$$BH = \frac{P_2 \sin \alpha}{V_1 \cos \varphi_2},$$

$$\frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{V_1 \cos \varphi_2};$$

wartość $\frac{BH}{\sin \alpha}$ znajdziemy, przeprowadzając prostopadłą BG z punktu B na promień $O'A$; ta prostopadła przecnie odcinek AC w punkcie K ; ponieważ

$$\sphericalangle AKG = \alpha = \sphericalangle BKH,$$

przeto

$$BK = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{P_2}{V_1 \cdot \cos \varphi_2};$$

iloczyn $V_1 \cdot \cos \varphi_2$ ma wartość stałą, więc odcinek BK w odpowiedniej skali daje nam wartość mocy zużywanej w końcu obwodu przy prądzie I_2 .-

E R R A T A .

str.	wiersz	napisano	powinno być
43	rys.12 i 13	$\frac{\pi}{2}$	π
52	11 z góry	$+ \dots + \sqrt{2}$	$+ \dots + \sqrt{n}$



S P I S R Z E C Z Y .

ROZDZIAŁ I.	str.
<u>Prądy odkształcone.</u>	
§ 1. Szereg Fouriera	3
§ 2. Przypadki szczególne	7
§ 3. Przykłady	11
§ 4. Analiza krzywych	18
§ 5. Sumowanie prądów	33
§ 6. Wpływ samoindukcji i pojemności na kształt krzywej prądu	36
§ 7. Spółczynnik kształtu i spółczynnik amplitudy	41
§ 8. Wartość skuteczna prądu odkształconego	45
§ 9. Obwód prądu odkształconego	49
§ 10. Moc prądu odkształconego. Równoważny prąd sinusoidalny	51
§ 11. Wpływ kształtu krzywej prądu przy pomiarach indukcyjności i pojemności	54
§ 12. Trójfazowe prądy odkształcone	57
 ROZDZIAŁ II.	
<u>Przewody długie.</u>	
§ 1. Stałe obwodu	61
§ 2. Równanie zasadnicze	63

	st:
§ 3. Rozwiązanie metodą symboliczną	67
§ 4. Stałe całkowania	72
§ 5. Fala napięcia i prądu	75
§ 6. Linja bez strat	80
§ 7. Linja bez strat w stanie jałowym i w stanie zwarcia	91
§ 8. Linja, w której stałe tworzą proporcje	95
§ 9. Wypadek ogólny	105
§ 10. Obliczenie stałych linji na podstawie pomiarów dokonanych w stanie jałowym i w stanie zwarcia	109
§ 11. Wzory dla napięć i prądów, oparte na własnościach linji w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Spółczynnik linjowy	115

ROZDZIAŁ III.

Równania i wykresy obwodów prądu zmiennego, oparte na badaniach w stanie jałowym i w sta- nie zwarcia.

§ 1. Równanie zasadnicze.	124
§ 2. Obwód symetryczny	132
§ 3. Określenie stałych zapomocą pomiarów . .	134
§ 4. Maksymalna moc prądu oddawana w obwodzie	139
§ 5. Wykres pracy obwodu prądu zmiennego. .	145
Spis rzeczy	168