

C  
1061  
Biblioteka Główna  
Technika Warszawska

KOMISJA WYDAWNICZA  
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Prof. Dr. Inż. LEON STANIEWICZ

# TEORJA PRĄDÓW ZMIENNYCH

Uzupełnienie do cz. I:

Sztuczne linje elektryczne, Linje  
łańcuchowe, Filtry elektryczne



Nr Wyd. 216.

WARSZAWA — 1929

C  
1061  
Biblioteka Główna  
Technika Warszawska

KOMISJA WYDAWNICZA  
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Prof. Dr. Inż. LEON STANIEWICZ

# TEORIA PRĄDÓW ZMIENNYCH

Uzupełnienie do cz. I:

Sztuczne linje elektryczne, Linje  
łańcuchowe, Filtry elektryczne



Nr Wyd. 216.

WARSZAWA — 1929

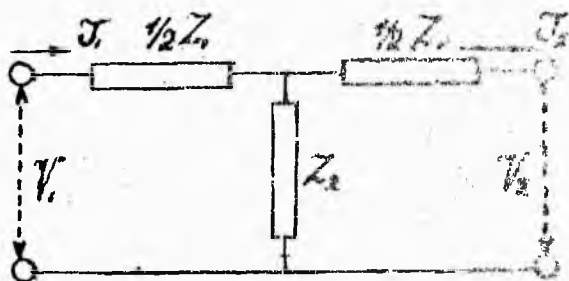


# SZTUCZNE LINJE ELEKTRYCZNE.

## § 1. Układy, zastępujące długą linię.

Wzory dla napięć i prądów w długich liniach jednorodnych /z równomiernie rozłożonymi stałami/, jak to już stwierdziliśmy, są identyczne ze wzorami, które otrzymaliśmy dla obrotu symetrycznego /T.P.Z. I. <sup>x/</sup> str.121 wzory /83/ i /84/, oraz str.133 wzory /23/ i /24//; z tego wynika, że gdy chodzi nam wyłącznie o ustalenie zależności napięć i prądów w dwóch dowolnych punktach linii np. na początku i na końcu, możemy zastąpić taką linię lub jej odcinek przez odpowiedni układ, zawierający trzy oporności pozorne, z których dwie są sobie równe.

Rozpatrzmy taki zastępczy układ /rys.1/.



rys.1.

Oporności pozorne  $Z_1$  i  $Z_2$  muszą być tak dobrane, aby zarówno w stanie jałowym jak i w stanie zwarcia zależność pomiędzy

x/ Prof. dr. inż. L. Staniewicz. Teoria Prądów Zmiennych cz.I. Wyd. 2-gie, Warszawa, 1927.

napięciami i prądami na początku i na końcu była taka sama, jak w rzeczywistej linji. Ze schematu wynika, że

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_1 - \hat{V}_2 &= \frac{1}{2} \hat{L}_1 (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \\ \hat{J}_1 - \hat{J}_2 &= \frac{1}{2} \hat{L}_2 (\hat{V}_1 - \frac{1}{2} \hat{L}_1 \hat{J}_1) \end{aligned} \right\} /1/$$

Dla stanu jałowego, gdy napięcie w końcu ma wartość  $\hat{V}_2$ , zaś na początku napięcie i prąd wynoszą  $\hat{V}_{10}$  i  $\hat{J}_{10}$ , otrzymamy, zakładając  $\hat{J}_2 = 0$

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{10} - \hat{V}_2 &= \frac{1}{2} \hat{J}_{10} \hat{L}_1 \\ \hat{J}_{10} &= \frac{1}{2} \hat{L}_2 (\hat{V}_{10} - \frac{1}{2} \hat{L}_1 \hat{J}_{10}) \end{aligned} \right\} /2/$$

Rugując z tych dwóch równań  $\hat{J}_{10}$ , będziemy mieli:

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{V}_2} = 1 + \frac{\hat{L}_1}{2 \hat{L}_2} \quad /3/$$

zaś z drugiego z równań /2/ znajdziemy

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{J}_{10}} = \frac{1}{2} \hat{L}_1 + \hat{L}_2 \quad /4/$$

Dla stanu zwarcia, gdy prąd w końcu wynosi  $\hat{J}_2$ , zaś na początku napięcie i prąd mają wartości  $\hat{V}_{1z}$  i  $\hat{J}_{1z}$ , otrzymamy, zakładając we wzorach /1/  $\hat{V}_2 = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_{1z} &= \frac{1}{2} \hat{L}_1 (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_2) \\ \hat{J}_{1z} - \hat{J}_2 &= \frac{1}{2} \hat{L}_2 (\hat{V}_{1z} - \frac{1}{2} \hat{L}_1 \hat{J}_{1z}) \end{aligned} \right\}$$

skąd po wyrugowaniu  $\hat{V}_{12}$ ,

$$\frac{\hat{J}_{12}}{\hat{J}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \quad /5/$$

Dla linii jednorodnej stosunki napięć i prądów w stanie jałowym i w stanie zwarcia, objęte wzorami /3/ i /5/, stanowią t.zw. współczynnik linjowy  $\hat{S}$  /T.P.Z. I. str.116/, oznaczający w skróceniu *cos.hip.kl*, który może być obliczony na podstawie oporności pozornych linii  $\hat{Z}_0$  i  $\hat{Z}_x$  w stanie jałowym i w stanie zwarcia /str.120 i 121/; te ostatnie wielkości łatwo znów możemy znaleźć, gdy są wiadome stałe linje.

Co się tyczy wzoru /4/, to stanowi on oporność pozorną linii w stanie jałowym; możemy więc napisać

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = \hat{S} \quad /6/$$

oraz

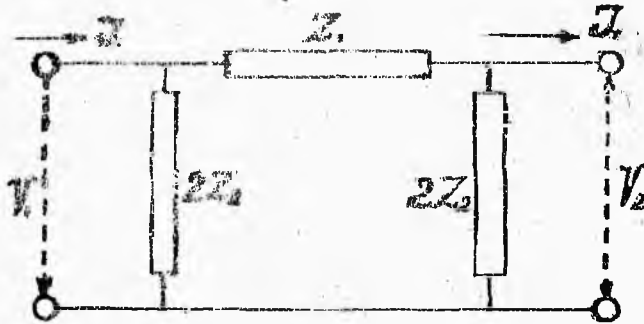
$$\frac{\hat{Z}_1}{2} + \hat{Z}_2 = \hat{Z}_0$$

skąd

$$\frac{1}{2} \hat{Z}_1 = \frac{(\hat{S}-1)\hat{Z}_0}{\hat{S}}$$
$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}}$$

według tych wzorów obliczamy  $\hat{Z}_1$  oraz  $\hat{Z}_2$  dla układu, zastępującego rozpatrywaną długą linję.

Możemy otrzymać układ zastępczy jeszcze w inny sposób, mianowicie łącząc trzy oporności pozorne tak, że dwie równe sobie włączone są równolegle na początku i w końcu między zaciskami źródła i odbiornika / rys. 2/.



rys. 2.

W tym przypadku:

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_1 - \hat{V}_2 &= \hat{Z}_1 \left( \hat{J}_1 - \frac{1}{2\hat{Z}_2} \hat{V}_1 \right) \\ \hat{J}_1 - \hat{J}_2 &= \frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{V}_1 + \hat{V}_2) \end{aligned} \right\} \quad /7/$$

Rozumując jak poprzednio, znajdziemy dla stanu jałowego

$$\hat{V}_{10} - \hat{V}_2 = \hat{Z}_1 \left( \hat{J}_{10} - \frac{1}{2\hat{Z}_2} \hat{V}_{10} \right),$$

$$\hat{J}_{10} = \frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{V}_{10} + \hat{V}_2),$$

skąd po wyrugowaniu  $\hat{J}_{10}$  znajdujemy

$$\frac{\hat{V}_{10}}{\hat{V}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2};$$

dla stanu zwarcia będziemy mieli

$$\hat{V}_{12} = \hat{Z}_1 \left( \hat{I}_{12} - \frac{1}{2\hat{Z}_2} \hat{V}_{12} \right),$$

$$\hat{I}_{12} - \hat{I}_2 = \frac{1}{2\hat{Z}_2} \hat{V}_{12},$$

skąd po wyrugowaniu  $\hat{V}_{12}$

$$\frac{\hat{I}_{12}}{\hat{I}_2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2},$$

następnie

$$\frac{\hat{V}_{12}}{\hat{I}_{12}} = \frac{\hat{Z}_1}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}}$$

Jak i poprzednio zakładamy

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = \hat{S},$$

zaś

$$\frac{\hat{Z}_1}{1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}} = \hat{Z}_2,$$



gdzie  $\hat{Z}_2$  oznacza oporność pozorną rozpatrywanego układu w stanie zwarcia.

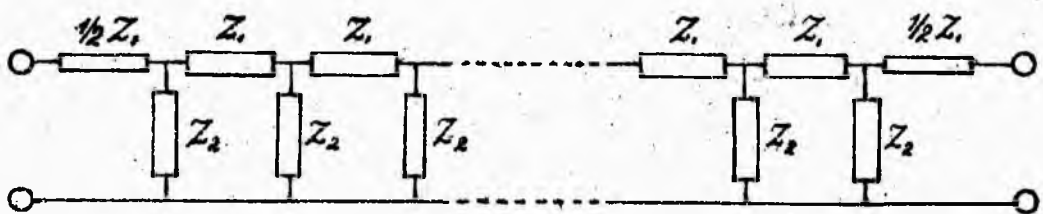
Z ostatnich równań znajdujemy wzory:

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 \hat{S}$$
$$2\hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_2 \hat{S}}{\hat{S} - 1}$$

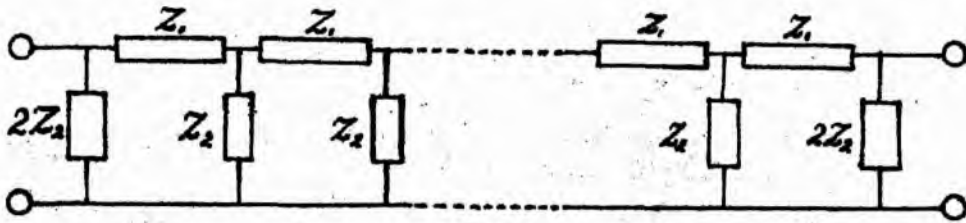
z których możemy obliczyć oporności pozorne, wchodzące do układu zastępczego.

### § 2. Linje łańcuchowe.

Łącząc w szereg dowolną ilość rozpatrywanych poprzednio układów, zawierających po trzy oporności pozorne, otrzymamy bardziej złożony układ, który nazywamy linią łańcuchową. Taką linię możemy rozpatrywać jako złożoną z jednakowych ogniw, przy czem każde ogniwo zawiera 3 oporności pozorne, zestawione albo według schematu I /rys.1/, albo według schematu II /rys.2/. W pierwszym przypadku otrzymamy linię łańcuchową typu  $T$  /rys.3/ w drugim - linię typu  $\Pi$  /rys.4/.



rys. 3.

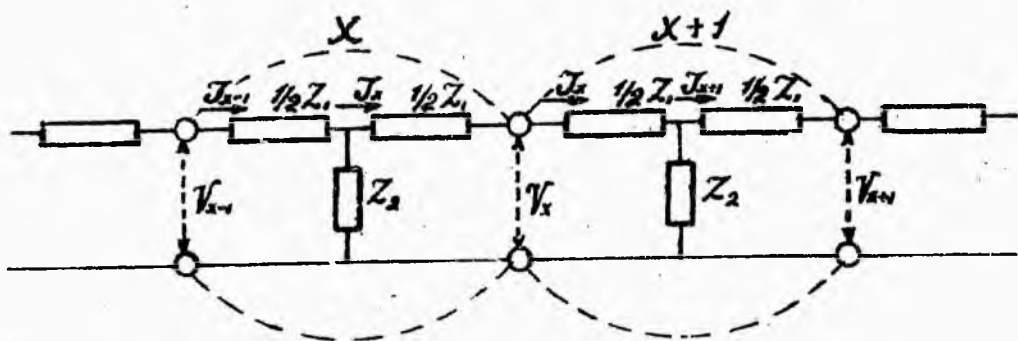


rys.4.

Oba typy linii łańcuchowej w układzie swym różnią się tylko na początku i na końcu, mianowicie w typie  $T$  mamy na początku i na końcu szeregowo włączoną oporność pozorną  $\frac{1}{2}Z_1$ , zaś w drugim typie  $\Pi$  mamy na początku i na końcu równolegle włączoną oporność pozorną  $2Z_2$ .

Będziemy oznaczali przez  $n$  liczbę ogni w łańcuchu, zaś przez  $V$  i  $J$ , z odpowiednimi indeksami napięcia i prądu w końcu każdego ogniwa; w ten sposób  $V_0$  i  $J_0$  oznaczać będą na pięcie i prąd na początku łańcucha, czyli u źródła, zaś  $V_n$  i  $J_n$  te same wielkości w końcu przy odbiorniku,  $V_x$  i  $J_x$  oznaczać będą rozpatrywane wielkości w końcu ogniwa, liczonego w kierunku od źródła do odbiornika liczbą  $x$ .

W celu wyprowadzenia wzorów, dających wartości napięć i prądów w dowolnem ogniwie, rozpatrzmy dowolne dwa sąsiednie ogniwa, określone liczbami  $x$  i  $x+1$ , najpierw dla linii typu  $T$  /rys.5/.



rys. 5.

Będziemy mieli

$$\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x = \frac{1}{2} \hat{Z}_1 (\hat{J}_{x-1} + \hat{J}_x) \quad /9/$$

$$\hat{V}_x - \hat{V}_{x+1} = \frac{1}{2} \hat{Z}_1 (\hat{J}_x + \hat{J}_{x+1}) \quad /10/$$

$$\hat{J}_{x-1} - \hat{J}_x = \frac{1}{\hat{Z}_2} \left( \hat{V}_{x+1} - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{J}_{x-1} \right) \quad /11/$$

$$\hat{J}_x - \hat{J}_{x+1} = \frac{1}{\hat{Z}_2} \left( \hat{V}_x - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{J}_x \right) \quad /12/$$

Z tych 4-ch równań możemy wyrugować albo prądy i otrzymać zależność pomiędzy napięciami, albo też napięcia i otrzymać zależność pomiędzy prądami; wyrugujmy prądy np. w ten sposób: z równań /9/ i /11/ mamy

$$\hat{J}_{x-1} + \hat{J}_x = \frac{2}{\hat{Z}_1} (\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x) \quad /13/$$

$$\hat{J}_{x-1} - \hat{J}_x = \frac{1}{\hat{Z}_2} \left( \hat{V}_{x+1} - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{J}_{x-1} \right) \quad /14/$$

po dodaniu otrzymujemy

$$2\hat{J}_{x-1} = \left(\frac{2}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}\right) \hat{V}_{x-1} - \frac{2}{\hat{Z}_1} \hat{V}_x - \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \hat{J}_{x-1},$$

albo

$$\hat{J}_{x-1} \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}\right) = \frac{\hat{Z}_1 + 2\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2} \hat{V}_{x-1} - \frac{2}{\hat{Z}_1} \hat{V}_x$$

Oznaczając, jak i poprzednio /6/

$$1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = \hat{S} \quad , \quad /15/$$

przepiszemy ostatnie równanie w postaci

$$\hat{J}_{x-1} (\hat{S} + 1) = \frac{2\hat{S}}{\hat{Z}_1} \hat{V}_{x-1} - \frac{2}{\hat{Z}_1} \hat{V}_x$$

skąd

$$\hat{J}_{x-1} = \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{S} \hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x) ; \quad /16/$$

podstawiając tę wartość  $\hat{J}_{x-1}$  do równania /13/ ,

będziemy mieli

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{2}{\hat{Z}_1} (\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x) - \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{S} \hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x) = \\ &= \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} [(\hat{S} + 1) \hat{V}_{x-1} - (\hat{S} + 1) \hat{V}_x - \hat{S} \hat{V}_{x-1} + \hat{V}_x] \end{aligned}$$

ostatecznie po skróceniu

$$\hat{J}_x = \frac{2}{\hat{Z}_1 (\hat{S} + 1)} (\hat{V}_{x-1} - \hat{S} \hat{V}_x) ; \quad /17/$$

z równania /12/ mamy

$$\hat{J}_{x+1} = \hat{J}_x - \frac{1}{\hat{Z}_2} \left( \hat{V}_x - \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{J}_x \right) = \hat{J}_x \left( 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \right) - \frac{\hat{V}_x}{\hat{Z}_2}$$

zaś po uwzględnieniu /17/ oraz /15/

$$\hat{J}_{x+1} = \frac{2\hat{S}}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} (\hat{V}_{x-1} - \hat{S}\hat{V}_x) - \frac{\hat{V}_x}{\hat{Z}_2} = \frac{2\hat{S}}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} \hat{V}_{x-1} - \left( \frac{2\hat{S}^2}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \hat{V}_x \quad /18/ ;$$

znajdzone ze wzorów /17/ i /18/ wartości  $\hat{J}_x$  i  $\hat{J}_{x+1}$  podstawiamy do równania /10/, wtedy

$$\begin{aligned} \hat{V}_x - \hat{V}_{x+1} &= \frac{1}{2} \hat{Z}_1 \left[ \frac{2}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} (\hat{V}_{x-1} - \hat{S}\hat{V}_x) + \frac{2\hat{S}}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} \hat{V}_{x-1} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2\hat{S}^2}{\hat{Z}_1(\hat{S}+1)} + \frac{1}{\hat{Z}_2} \right) \hat{V}_x \right] = \\ &= \frac{1}{\hat{S}+1} (\hat{V}_{x-1} - \hat{S}\hat{V}_x) + \frac{\hat{S}}{\hat{S}+1} \hat{V}_{x-1} - \frac{\hat{S}^2}{\hat{S}+1} \hat{V}_x - \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \hat{V}_x ; \end{aligned}$$

zamieniając na podstawie /15/  $\frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}$  przez  $\hat{S}-1$  i łącząc podobne wyrazy, otrzymujemy

$$\hat{V}_{x+1} - \left[ \frac{1}{\hat{S}+1} (\hat{S}^2 + \hat{S}) + \hat{S} - 1 + 1 \right] \hat{V}_x + \left( \frac{\hat{S}+1}{\hat{S}+1} \right) \hat{V}_{x-1} = 0$$

albo

$$\hat{V}_{x+1} - 2\hat{S}\hat{V}_x + \hat{V}_{x-1} = 0 \quad /19/$$

Rozwiązanie tego równania z powodu analogji z długą linią szukamy w postaci

$$\hat{V}_x = Ae^{kx} + Be^{-kx} \quad /20/$$

gdzie  $A, B$  i  $k$  od  $x$  nie zależą, wtedy

$$\hat{V}_{x+1} = Ae^k e^{kx} + Be^{-k} e^{-kx}, \quad /21/$$

$$\hat{V}_{x-1} = Ae^{-k} e^{kx} + Be^k e^{-kx}; \quad /22/$$

podstawiając te wartości do /19/, otrzymamy

$$Ae^k e^{kx} + Be^{-k} e^{-kx} - 2\hat{S}(Ae^{kx} + Be^{-kx}) + Ae^{-k} e^{kx} + Be^k e^{-kx} = 0$$

albo

$$(Ae^{kx} + Be^{-kx})(e^k + e^{-k} - 2\hat{S}) = 0$$

z tego wzoru wynika, że wartość  $\hat{V}_x$  ze wzoru /20/ będzie rozwiązaniem równania /19/, gdy spełniony będzie warunek

$$e^k + e^{-k} - 2\hat{S} = 0$$

czyli

$$\frac{e^k + e^{-k}}{2} = \hat{S} \quad /23/$$

lub /15/

$$\cosh ipk = \hat{S} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \quad /24/$$

Z tego wzoru widzimy, że ponieważ  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są naogół liczbami zespolonemi, przeto i  $k$  jest

Oznaczmy  $\kappa = a + j b$ , gdzie  $a$  i  $b$  liczby rzeczywiste, wtedy

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} \kappa &= \frac{e^{a+jb} + e^{-(a+jb)}}{2} = \frac{e^a (\cos b + j \sin b) +}{2} \\ &\frac{e^{-a} (\cos b - j \sin b)}{2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cos b + j \frac{e^a - e^{-a}}{2} \sin b = \\ &= \operatorname{cosh} a \cos b + j \operatorname{sinh} a \sin b \quad /25/ \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że analogicznie do długiej linii jednorodnej współczynnik  $a$  jest współczynnikiem tłumienia, zaś współczynnik  $b$  wpływa na przesunięcie fazy i może być nazwany współczynnikiem przesunięcia fazy. Jednostką tłumienia, używaną przez wielu autorów jest "Napier" /wymawia się "neper"/. - Wymiar współczynnika  $a$  jest taki sam, jak i współczynnika  $b$  i stanowi odwrotność długości /T.P.Z. I. str.71/.

Założmy

$$1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = p + j q \quad /26/$$

gdzie  $p$  i  $q$  liczby rzeczywiste, wtedy na podstawie wzorów /24/ , /25/ i /26/ będziemy mieli

$$p = \operatorname{cosh} a \cos b \quad /27/$$

$$q = \operatorname{sinh} a \sin b \quad ; \quad /28/$$

podnosząc do kwadratu każdy z tych wzorów, otrzymamy:

$$p^2 = \cosh^2 \alpha \cos^2 b = (1 + \sinh^2 \alpha)(1 - \sin^2 b)$$
$$q^2 = \sinh^2 \alpha \sin^2 b$$

rozwiązując ostatnie dwa równania względem  $\sinh^2 \alpha$  i  $\sin^2 b$  znajdujemy

$$\sinh^2 \alpha = -\frac{1}{2}(1 - p^2 - q^2) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(1 - p^2 - q^2)^2} \quad /29/$$

$$\sin^2 b = \frac{1}{2}(1 - p^2 - q^2) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(1 - p^2 - q^2)^2} \quad /30/$$

Przy rozwiązywaniu równań kwadratowych ~~pod~~ pierwiastkiem wzięliśmy tylko znak  $+$  z tego względu, że niewiadome  $\sinh^2 \alpha$  oraz  $\sin^2 b$  jako kwadraty liczb rzeczywistych muszą być liczbami dodatnimi.

Dla znalezienia wzoru na prąd podstawiamy do /17/ wartości  $\tilde{V}_1$  i  $\tilde{V}_x$  ze wzorów /22/ i /20/, wtedy

$$\hat{J}_x = \frac{2}{z_1(\hat{s}+1)} [Ae^{-k} e^{kx} + Be^k e^{-kx} -$$
$$- A\tilde{s}e^{kx} - B\tilde{s}e^{-kx}] =$$
$$= \frac{2}{z_1(\hat{s}+1)} [Ae^{kx}(e^{-k} - \hat{s}) + Be^{-kx}(e^k - \hat{s})]$$



ale na podstawie /23/

$$e^{-k} - \hat{s} = \frac{e^{-k} - e^k}{2} = - \frac{e^k - e^{-k}}{2}$$

$$e^k - \hat{s} = \frac{e^k - e^{-k}}{2},$$

wobec tego

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{2(e^k - e^{-k})}{\hat{z}_1(e^k + e^{-k} + 2)} (Be^{-kx} - Ae^{kx}) = \\ &= \frac{2(e^{k/2} - e^{-k/2})(e^{k/2} + e^{-k/2})}{\hat{z}_1(e^{k/2} + e^{-k/2})^2} (Be^{-kx} - Ae^{kx}) = \\ &= \frac{2}{\hat{z}_1} \operatorname{tgh} \operatorname{hip} \frac{k}{2} (Be^{-kx} - Ae^{kx}) \quad /31/ \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\hat{z} = \frac{\hat{z}_1}{2 \operatorname{tgh} \operatorname{hip} \frac{k}{2}} \quad /32/$$

na podstawie wzoru

$$\operatorname{cosh} \operatorname{hip} k = 2 \operatorname{sinh}^2 \frac{k}{2} + 1$$

z uwzględnieniem /24/, będziemy mieli

$$\operatorname{sinh} \frac{k}{2} = \sqrt{\frac{\hat{z}_1}{4\hat{z}_2}}$$

$$2 \operatorname{tgh} \operatorname{hip} \frac{k}{2} = 2 \frac{\operatorname{sinh} \frac{k}{2}}{\operatorname{cosh} \frac{k}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2}}}{\operatorname{cosh} \frac{k}{2}}$$

wobec czego wzór /32/ możemy napisać również

w postaci

- 17 -

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2} \operatorname{cosh} ip \frac{k}{2} \quad /33/$$

Zestawiając wzory /20/ i /31/, otrzymamy w naj-  
ogólniejszej postaci wyrażenia dla napięcia i prądu  
w dowolnym ogniwie

$$\hat{V}_x = A e^{kx} + B e^{-kx} \quad , \quad /34/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = -A e^{kx} + B e^{-kx} \quad ; \quad /35/$$

wielkość  $\hat{Z}$ , odgrywająca rolę oporności, określona  
wzorem /32/, lub /33/, przez analogję do długiej li-  
nii jednorodnej, nazwiemy opornością falową linii  
łańcuchowej.

Wchodzące do wzorów /34/ i /35/ wielkości  $A$  i  $B$   
możemy określić na podstawie wiadomych wartości na-  
pięcia i prądu w określonym miejscu; najczęściej  
wchodzą tu w grę te wielkości na początku i na koń-  
cu linii łańcuchowej. Ponieważ dla początku  $x=0$   
przeto ze wzorów /34/ i /35/ dla napięcia i prądu  
na początku otrzymamy:

$$\hat{V}_0 = A + B$$

$$\hat{J}_0 \hat{Z} = -A + B \quad ,$$

skąd

$$A = \frac{\hat{V}_0 - \hat{J}_0 \hat{Z}}{2}$$

$$B = \frac{\hat{V}_0 + \hat{J}_0 \hat{Z}}{2}$$

Wobec tego z tychże wzorów /34/ i /35/ otrzymamy

$$\hat{V}_x = \frac{\hat{V}_0 - \hat{J}_0 \hat{Z}}{2} e^{kx} + \frac{\hat{V}_0 + \hat{J}_0 \hat{Z}}{2} e^{-kx} \quad /36/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = - \frac{\hat{V}_0 - \hat{J}_0 \hat{Z}}{2} e^{kx} + \frac{\hat{V}_0 + \hat{J}_0 \hat{Z}}{2} e^{-kx} \quad /37/$$

lub

$$\hat{V}_x = \hat{V}_0 \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \hat{J}_0 \hat{Z} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} \quad /38/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \hat{J}_0 \hat{Z} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \hat{V}_0 \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} \quad /39/$$

albo wreszcie w funkcjach hiperbolicznych

$$\hat{V}_x = \hat{V}_0 \operatorname{cosh} kx - \hat{J}_0 \hat{Z} \operatorname{sinh} kx \quad /40/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \hat{J}_0 \hat{Z} \operatorname{cosh} kx - \hat{V}_0 \operatorname{sinh} kx \quad /41/$$

Jak widać z tych wzorów napięcie i prąd w dowolnym ogniwie jest wynikiem nakładania się dwóch fal, idących naprzeciw siebie, z których jedna jest falą postępującą od początku do końca linii, druga falą odbitą od końca /rozumowania

te same, co były przeprowadzone dla długiej linii jednorodnej/. Gdy linja łańcuchowa ma bardzo dużo ogniw /teoretycznie nieskończenie dużo/, wówczas fali odbitej niema, gdyż napięcie i prąd w końcu w tym przypadku muszą się równać zeru; wzory /34/ i /35/ wskazują, że powinno być wtedy

$$\hat{V}_x = B e^{-kx}$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = B e^{-kx}$$

skąd

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}_x}{\hat{J}_x}$$

a także

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}_0}{\hat{J}_0}$$

/42/

ponieważ ostatni wyraz stanowi oporność pozorną łańcucha, więc w rozpatrywanym przypadku oporność pozorną łańcucha równa się oporności falowej.

Uwzględniając wzór /42/ otrzymamy ze wzorów /36/ i /37/

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_x &= \hat{V}_0 e^{-kx} \\ \hat{J}_x &= \hat{J}_0 e^{-kx} \end{aligned} \right\}$$

/43/

i dla końca łańcucha, gdy  $x = n$

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_n &= \hat{V}_0 e^{-kn} \\ \hat{J}_n &= \hat{J}_0 e^{-kn} \end{aligned} \right\}$$

/44/

W wyżej wyprowadzonych wzorach ogólnych /36/ do /41/ nie wprowadzaliśmy oporności odbiornika, włączonego w końcu ostatniego ogniwa. Rozpatrzmy teraz, jak się zmieniają te wzory, gdy przyjmiemy pod uwagę warunki, istniejące w końcu łańcucha.

Jeżeli linja łańcuchowa jest w końcu bez obciążenia, to znaczy jest w stanie jałowym, wtedy  $\hat{J}_n = 0$ , ze wzoru /41/, zakładając  $x = n$ , otrzymamy:

$$\hat{J}_0 \hat{Z} \operatorname{cosh} ipkn = \hat{V}_0 \operatorname{sinh} ipkn$$

lub

$$\hat{J}_0 \hat{Z} = \hat{V}_0 \operatorname{tg} ipkn ; \quad /45/$$

po podstawieniu tej wartości  $\hat{J}_0 \hat{Z}$  do wzoru /40/ dla  $x = n$ , będziemy mieli

$$\hat{V}_n = \hat{V}_0 (\operatorname{cosh} ipkn - \operatorname{sinh} ipkn \operatorname{tg} ipkn),$$

lub po uproszczeniu

$$\hat{V}_n = \frac{\hat{V}_0}{\operatorname{cosh} ipkn} \quad /46/$$

Z ostatniego wzoru można, w rozpatrywanym przypadku, znaleźć napięcie w końcu łańcucha, gdy wiadome jest ono na początku lub odwrotnie. Prąd w dowolnym ogniwie da się obliczyć wówczas ze wzoru, który otrzymamy podstawiając /45/ do /41/, wtedy

$$\begin{aligned}\hat{I}_x &= \hat{I}_0 \left( \cosh ipkx - \frac{\sinh ipkx}{\tanh ipkn} \right) \\ &= \hat{I}_0 \frac{\sinh ipk(n-x)}{\sinh ipkn} \quad /47/\end{aligned}$$

W przypadku, gdy linja łańcuchowa jest w stanie zwarcia, to znaczy końce ostatniego ogniwa są zwarte, wtedy  $\hat{V}_n = 0$ ; ze wzoru /40/ otrzymujemy dla  $x = n$

$$\hat{V}_0 \cosh ipkn = \hat{I}_0 \hat{Z} \sinh ipkn,$$

lub

$$\hat{V}_0 = \hat{I}_0 \hat{Z} \tanh ipkn \quad /48/$$

podstawiając tę wartość  $\hat{V}_0$  do /41/ i zakładając  $x = n$ , otrzymamy

$$\hat{I}_n = \hat{I}_0 (\cosh ipkn - \sinh ipkn \tanh ipkn),$$

lub po uproszczeniu

$$\hat{I}_n = \frac{\hat{I}_0}{\cosh ipkn} \quad /49/$$

wzór ten daje zależność pomiędzy prądami na początku i w końcu łańcucha, gdy ostatnie ogniwo jest zwarte. Podstawiając wartość  $\hat{V}_0$  ze wzoru /48/ do wzoru /40/, otrzymamy wzór dla napięcia w dowolnym ogniwie

$$\hat{V}_x = \hat{V}_0 \left( \cosh ip kx - \frac{\sinh ip kx}{\operatorname{tgh} ip kn} \right) = \hat{V}_0 \frac{\sinh ip k(n-x)}{\sinh ip kn}$$

..... /50/

Ze wzorów /45/ i /48/ możemy otrzymać oporności pozorne linii łańcuchowej, gdy ostatnie jej ogniwo jest w stanie jałowym lub w stanie zwarcia; oznaczając te oporności pozorne odpowiednio przez  $Z_0$  i  $Z_z$ , otrzymamy znane z teorii długich linii jednorodnych wzory:

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z} \operatorname{cotgh} ip kn$$

$$\hat{Z}_z = \hat{Z} \operatorname{tgh} ip kn$$

Wzory /36/ do /41/ uzależniają napięcia i prądy w dowolnem ogniwie od napięcia i prądu na początku łańcucha; oczywiście można uzależnić rozpatrywane wielkości od napięcia i prądu w końcu: wtedy, zakładając we wzorach /34/ i /35/  $x = l$ , otrzymamy

$$A e^{kn} + B e^{-kn} = \hat{V}_n$$

$$-A e^{kn} + B e^{-kn} = \hat{I}_n \hat{Z}$$

skąd

$$A = \frac{\hat{V}_n - \hat{I}_n \hat{Z} e^{-kn}}{2}, \quad B = \frac{\hat{V}_n + \hat{I}_n \hat{Z} e^{kn}}{2},$$

wobec czego wzory dla napięcia i prądu po odpowiednich uproszczeniach przyjmą postać:

$$\hat{V}_x = \frac{\hat{V}_n + \hat{J}_n \hat{Z}}{2} e^{k(n-x)} + \frac{\hat{V}_n - \hat{J}_n \hat{Z}}{2} e^{-k(n-x)} =$$

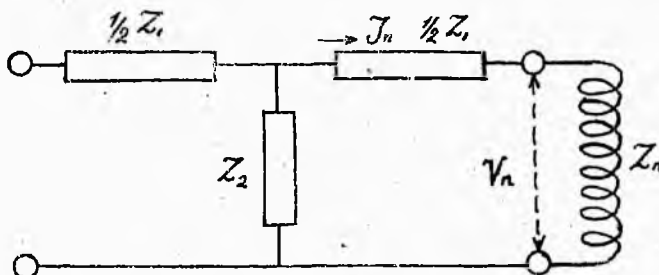
$$= \hat{V}_n \operatorname{cosh} k(n-x) + \hat{J}_n \hat{Z} \operatorname{sinh} k(n-x) \quad /51/$$

$$\hat{J}_x \hat{Z} = \frac{\hat{V}_n + \hat{J}_n \hat{Z}}{2} e^{k(n-x)} - \frac{\hat{V}_n - \hat{J}_n \hat{Z}}{2} e^{-k(n-x)} =$$

$$= \hat{V}_n \operatorname{sinh} k(n-x) + \hat{J}_n \hat{Z} \operatorname{cosh} k(n-x) \quad /52/ ;$$

z tych wzorów moglibyśmy otrzymać również wzory w przypadkach, gdy ostatnie ogniwo jest w stanie jałowym lub w stanie zwarcia, zakładając kolejno  $\hat{J}_n = 0$  i  $\hat{V}_n = 0$ .

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy w końcu ostatniego ogniwa włączony jest odbiornik, którego oporność pozorną wynosi  $Z_n$  /rys.6/. Wtedy będziemy mieli dodatkowy warunek  $\hat{V}_n = \hat{J}_n \hat{Z}_n$



rys. 6.

Uwzględniając ten warunek we wzorach /51/ i /52/, otrzymamy



$$\hat{V}_x = \hat{V}_n \left[ \cosh ip k(n-x) + \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_n} \sinh ip k(n-x) \right] ,$$

$$\hat{I}_x = \hat{I}_n \left[ \cosh ip k(n-x) + \frac{\hat{Z}^n}{\hat{Z}} \sinh ip k(n-x) \right] ;$$

dla  $x=0$  , t.j. na początku łańcucha

$$\hat{V}_0 = \hat{V}_n \left( \cosh ip kn + \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_n} \sinh ip kn \right) \quad /53/$$

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_n \left( \cosh ip kn + \frac{\hat{Z}^n}{\hat{Z}} \sinh ip kn \right) \quad /54/$$

Wzory te dają możność w najogólniejszym przypadku obliczyć stosunek napięć względnie prądów na początku i na końcu linii łańcuchowej o wiadomej liczbie ogniw i wiadomych opornościach  $Z_1$  i  $Z_2$  oraz  $Z_n$ .

# przypadku szczególnym, gdy oporność odbiornika  $Z_n$  równa jest oporności falowej łańcucha  $Z$  , czyli

$$\hat{Z}_n = \hat{Z} ,$$

z równań /53/ i /54/ otrzymamy

$$\hat{V}_0 = \hat{V}_n (\cosh ip kn + \sinh ip kn) = \hat{V}_n e^{kn} ,$$

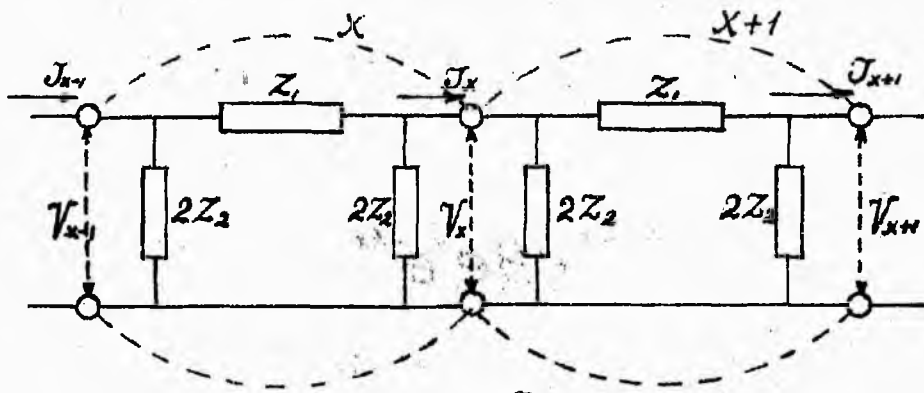
$$\hat{I}_0 = \hat{I}_n (\cosh ip kn + \sinh ip kn) = \hat{I}_n e^{kn} ,$$

albo

$$\hat{V}_n = \hat{V}_0 e^{-kn} ; \quad \hat{J}_n = \hat{J}_0 e^{-kn} ;$$

wzory te są identyczne ze wzorami /44/ dla linii łańcuchowej o nieskończenie dużej ilości ogniów; a więc, gdy odbiornik posiada oporność równą oporności falowej łańcucha, linia o skończonej liczbie ogniów zachowuje się tak jak linia o nieskończenie dużej ilości ogniów. - X

Rozpatrzmy teraz linię łańcuchową typu  $\Pi$  i dwa jej dowolne sąsiednie ogniwa, określone liczbami  $X$  i  $X+1$  /rys.7/



rys. 7.

Będziemy mieli:

$$\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x = \hat{Z}_1 \left( \hat{J}_{x-1} - \frac{\hat{V}_{x-1}}{2\hat{Z}_2} \right) \quad /55/$$

$$\hat{V}_x - \hat{V}_{x+1} = \hat{Z}_1 \left( \hat{J}_x - \frac{\hat{V}_x}{2\hat{Z}_2} \right) \quad /56/$$

$$\hat{J}_{x-1} - \hat{J}_x = \frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{V}_{x-1} + \hat{V}_x) \quad /57/$$

Z pierwszych dwóch równań znajdujemy

$$\hat{J}_{x-1} - \hat{J}_x = \frac{\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{V}_{x-1}}{2\hat{Z}_2} - \frac{\hat{V}_x - \hat{V}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{V}_x}{2\hat{Z}_2}$$

Porównyując ten rezultat z równaniem /57/, otrzymamy:

$$\frac{1}{2\hat{Z}_2} (\hat{V}_{x-1} + \hat{V}_x) = \frac{\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{V}_{x-1}}{2\hat{Z}_2} - \frac{\hat{V}_x}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{V}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{V}_x}{2\hat{Z}_2}$$

i po uproszczeniu

$$\hat{V}_{x-1} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right) \hat{V}_x + \hat{V}_{x+1} = 0 \quad /58/$$

Jak i w linii typu  $T$  szukamy rozwiązania tego równania w postaci

$$\hat{V}_x = A e^{kx} + B e^{-kx} \quad /59/$$

wtedy

$$\hat{V}_{x-1} = A e^{-k} e^{kx} + B e^k e^{-kx} \quad /60/$$

$$\hat{V}_{x+1} = A e^k e^{kx} + B e^{-k} e^{-kx} \quad /61/$$

i po podstawieniu do równania /58/, otrzymamy

$$A e^{-k} e^{kx} + B e^k e^{-kx} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right) (A e^{kx} + B e^{-kx}) + A e^k e^{kx} + B e^{-k} e^{-kx} = 0$$

albo

$$Ae^{kx} \left[ e^k + e^{-k} - \left( 2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \right] + Be^{-kx} \left[ e^k + e^{-k} - \left( 2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \right] = 0$$

$$(Ae^{kx} + Be^{-kx}) \left[ e^k + e^{-k} - \left( 2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} \right) \right] = 0 ,$$

skąd widać, że rozwiązanie równania /58/ w postaci /59/ jest możliwe, przy czym powinno być

$$e^k + e^{-k} = 2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} ,$$

$$\frac{e^k + e^{-k}}{2} = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} ,$$

czyli

$$\cosh k = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = \hat{S} \quad /62/$$

tak samo jak dla linii typu  $T$  /24/, gdzie wskazano, w jaki sposób znaleźć  $k = \alpha + jb$ . Dla wyprowadzenia wzoru na prąd weźmiemy równanie /56/, z którego

$$\hat{I}_x \hat{Z}_1 = \hat{V}_x \left( 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} \right) - \hat{V}_{x+1} = \hat{S} \hat{V}_x - \hat{V}_{x+1} ,$$

podstawiając do tego równania wartości  $\hat{V}_x$  i  $\hat{V}_{x+1}$  z /59/ i /61/, będziemy mieli

$$\hat{I}_x \hat{Z}_1 = A \hat{S} e^{kx} + B \hat{S} e^{-kx} - A e^k e^{kx} - B e^{-k} e^{-kx} =$$

$$= A e^{kx} (\hat{S} - e^k) + B e^{-kx} (\hat{S} - e^{-k}) ;$$

ale

$$\hat{S} = \cosh pk = \frac{e^k + e^{-k}}{2} ,$$

więc

$$\hat{S} - e^k = -\frac{e^k - e^{-k}}{2} ; \quad \hat{S} - e^{-k} = \frac{e^k - e^{-k}}{2} ,$$

wobec czego

$$\hat{J}_x \hat{Z}_1 = \frac{e^k - e^{-k}}{2} (B e^{-kx} - A e^{kx}) ,$$

albo

$$\hat{J}_x \frac{\hat{Z}_1}{\sinh pk} = B e^{-kx} - A e^{kx} \quad /63/ ;$$

oporność falowa w tym przypadku będzie

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\sinh pk} \quad /64/ ,$$

a ponieważ

$$\operatorname{tgh} p \frac{k}{2} = \frac{\cosh pk - 1}{\sinh pk} = \frac{\hat{Z}_1}{2 \hat{Z}_2 \sinh pk} ,$$

przeto oporność falową można napisać jeszcze w postaci

$$\hat{Z} = 2 \hat{Z}_2 \operatorname{tgh} p \frac{k}{2} \quad /65/$$

Jeżeli na podstawie wzoru /62/

$$\sinh k = \sqrt{\cosh^2 k - 1} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{4Z_2^2}}$$

to ze wzoru /64/ otrzymamy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{4Z_2^2}}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}} \quad /66/$$

W ten sposób, zestawiając wzory /59/ i /63/ przy uwzględnieniu /64/, będziemy mieli

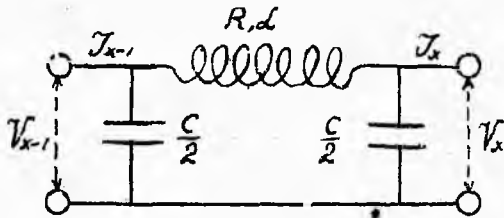
$$\begin{aligned} \hat{V}_x &= A e^{kx} + B e^{-kx} , \\ \hat{J}_x \hat{Z} &= B e^{-kx} - A e^{kx} , \end{aligned}$$

czyli wzory takie same, jak dla linii typu  $T$  /34/ i /35/.

Ponieważ warunki na początku i na końcu linii są w tym przypadku takie same, co i w poprzednim, to znaczy, że napięcie i prąd wynoszą dla  $x=0$ ,  $V_0$  i  $J_0$ , zaś dla  $x=l$  odpowiednio  $V_l$  i  $J_l$ , przeto dla napięć i prądów w dowolnym ogniwie otrzymujemy zupełnie te same wzory, jakie wyprowadziliśmy dla linii typu  $T$ ; różnica polega tylko na tem, że oporność falowa  $Z$ , ma dla linii typu  $\Pi$  inną wartość, określoną wzorami /64/, /65/ lub /66/.

§ 3. Filtry elektryczne.

Zbadajmy własności linii łańcuchowej przy zmiennej częstotliwości. Rozpatrzmy np. linię typu  $\Pi$ , którego ogniwo dowolne przedstawione jest na rys.8.



rys.8.

czyli  $\hat{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$

W rozpatrywanym przykładzie:

$$\hat{Z}_1 = R + j\omega L;$$

$$2\hat{Z}_2 = \frac{2}{j\omega C};$$

wobec tego na podstawie /66/

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{1 + \frac{1}{4} (R + j\omega L) j\omega C}}$$

co po odpowiednich działaniach daje

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{\omega L (1 - \frac{1}{4} \omega^2 L C) - \frac{1}{4} R^2 \omega C - jR}{\omega C [(1 - \frac{1}{4} \omega^2 L C)^2 + \frac{1}{16} R^2 \omega^2 C^2]}} \quad /67/$$

Następnie na podstawie /26/ otrzymamy

$$P + jQ = 1 + \frac{1}{2} (R + j\omega L) j\omega C = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L C + j\frac{1}{2} R \omega C,$$

skąd

- 31 -

$$p = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \quad /68/ ,$$

$$q = \frac{1}{2} R \omega C \quad /69/ ,$$

Dla określonej częstotliwości, względnie pulsacji  $\omega$ , gdy są wiadome  $R$ ,  $L$  i  $C$ , obliczamy więc ze wzorów /68/ i /69/  $p$  i  $q$ ; następnie ze wzorów /29/ i /30/ znajdziemy  $a$  i  $b$ , a więc i współczynnik falowy  $k$ .

Mając oporność falową  $\hat{Z}$ , możemy na podstawie wyżej wyprowadzonych wzorów w każdym poszczególnym przypadku /stan jałowy, stan zwarcia i stan wiadomego obciążenia/ znaleźć napięcie oraz natężenie prądu w dowolnem ogniwie.

Aby zbadać zachowanie się rozpatrzonej linii łańcuchowej przy rozmaitych częstotliwościach, dogodniej będzie wprowadzić t.zw. częstotliwość wzgl. pulsację drgań swobodnych ogniwa. Gdy mamy obwód zamknięty, zawierający  $L$  i  $C$  /przy  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  /, przyczem zachodzi wyładowanie kondensatora, wówczas w takim obwodzie, który nazywamy obwodem oscylacyjnym, powstaje prąd drgający czyli oscylacyjny; mówimy, że w obwodzie powstają drgania swobodne o stałej amplitudzie, przyczem pulsacja tych drgań wynosi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Jeżeli w naszym przykładzie rozpatrzemy jedno ogniwo jako obwód zamknięty i spostrzeżemy, że oba kondensatory, posiadające każdy pojemność równą  $\frac{C}{2}$ , są połączone szeregowo, więc pojemność obwodu, stanowiącego ogniwo, wynosi  $\frac{C}{4}$ ; na podstawie wzoru /70/ znajdziemy, że pulsacja drgań swobodnych ogniwa wynosi

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad /71/$$

Oznaczmy

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta \quad /72/$$

wtedy

$$\omega = \omega_0 \eta = \frac{2}{\sqrt{LC}} \eta \quad /73/$$

podstawiając tę wartość  $\omega$  do wzorów /68/ i /69/ i oznaczając dla skrótowania

$$R\sqrt{L} = \rho \quad /74/$$

znajdziemy

$$p = 1 - 2\eta^2 \quad /75/$$

$$q = \rho \eta \quad /76/$$

Dla wiadomego ogniwa  $R$ ,  $L$  i  $C$  są dane, przyczem dla niezbyt wielkich częstotliwości wielkości te możemy uważać jako stałe; wtedy  $p$  i  $q$  będą funkcjami tylko  $\eta$ ; podstawiając te warto-

ści  $p$  i  $q$  do wzorów /29/ i /30/, otrzymamy współczynniki  $a$  i  $b$  jako funkcje  $\eta$ .

Szczególnie ciekawe jest rozpatrzenie zmiany współczynnika tłumienia  $\alpha$  przy zmianie częstotliwości, względnie  $\eta$ . Ponieważ zależność  $\alpha$  od  $\eta$  stanowi funkcję bardzo skomplikowaną, przeto uprościmy nasze rozważanie w ten sposób, że wyraz  $R\sqrt{L}$ , który oznaczyliśmy przez  $S$ , przyjmiemy jako bardzo mały, co zresztą w praktyce jest przeważnie zgodne z rzeczywistością; wtedy dla niezbyt dużych wartości  $\eta$  możemy na podstawie wzoru /76/ założyć, że  $q$ , będąc zawsze wielkością dodatnią, jest bliskie zeru; wówczas wzory /27/ i /28/ dadzą nam

$$\operatorname{cosh} p a \cdot \cos b = p \quad /77/$$

$$\operatorname{sinh} p a \cdot \sin b = 0 \quad /78/$$

Ponieważ  $p = 1 - 2\eta^2$ , gdzie  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ , przeto łatwo zauważyć, że największa wartość dla  $p$  wynosi 1, gdy  $\eta = 0$ , czyli  $\omega = 0$ ; następnie dla  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $p = 0$ ; dla  $\eta = 1$ ,  $p = -1$ , zaś dla wszelkich wartości  $\eta > 1$ ,  $p < -1$ . Zauważmy oprócz tego, że  $\operatorname{cosh} p a$  ma najmniejszą wartość równą 1 dla  $a = 0$ , pozatem zawsze jest większy od 1, natomiast  $\operatorname{sinh} p a$  ma najmniejszą wartość 0 dla  $a = 0$ , pozatem zawsze jest większy od 0;

gdy  $\eta \leq 1$ , czyli  $\omega \leq \omega_0$

wtedy

$$-1 \leq p \leq 1$$

$$-1 \leq \cosh p a \cos b \leq 1 \quad /79/$$

Wzór /78/ wskazuje, że albo  $a=0$ , albo  $b=0$  lub  $\pi$ , lecz warunkowi /79/ wartość  $a=0$  zawsze czyni zadość, przy wszelkich możliwych wartościach  $\cos b$  /dla  $b=0$  lub  $\pi$ , również  $a=0$  /, przeto w rozpatrywanym przypadku  $a=0$ , zaś  $b$  zmienia się od 0 do  $180^\circ$ ; gdy  $\eta > 1$ , czyli  $\omega > \omega_0$ ;

wtedy  $p < -1$ ; niech będzie  $p = -k = -(2\eta^2 - 1)$ ,  
czyli  $k = 2\eta^2 - 1 > 1$ .

Wzory /77/ i /78/ dają wówczas

$$\cosh p a \cos b = -k$$

$$\sinh p a \sin b = 0$$

$a$  nie może się równać 0, bo wtedy z pierwszego równania wypadłoby, że  $\cos b = -k$  ma wartość bezwzględną większą od 1; wobec tego  $b=0$  lub  $\pi$ ; z pierwszego równania wynika, że ponieważ  $\cosh p a > 1$ , więc  $\cos b$  powinno być ujemne, czyli  $b=\pi$ ; wtedy  $\cos b = -1$ , zaś

$$\cosh p a = k = 2\eta^2 - 1,$$

skąd widać, że  $a$  rośnie i to szybko ze wzrostem  $\eta$ .

Z tych rozważań wynika, że w rozpatrzonej linii łańcuchowej współczynnik tłumienia  $a=0$ .

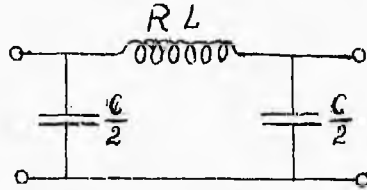
/w rzeczywistości bardzo mały/ dla wszystkich częstotliwości nie przekraczających częstotliwości drgań swobodnych ogniwa i że tłumienie szybko rośnie dla częstotliwości większych; natomiast współczynnik przesunięcia fazy  $b$  wzrasta od zera do  $180^\circ$ , gdy częstotliwość zmienia się od zera do częstotliwości drgań swobodnych i następnie przy dalszym wzroście częstotliwości ten współczynnik  $b$  pozostaje bez zmiany i stale jest równy  $180^\circ$ .

Na rys. 9 podany jest przebieg tych współczynników w zależności od  $\eta$ .

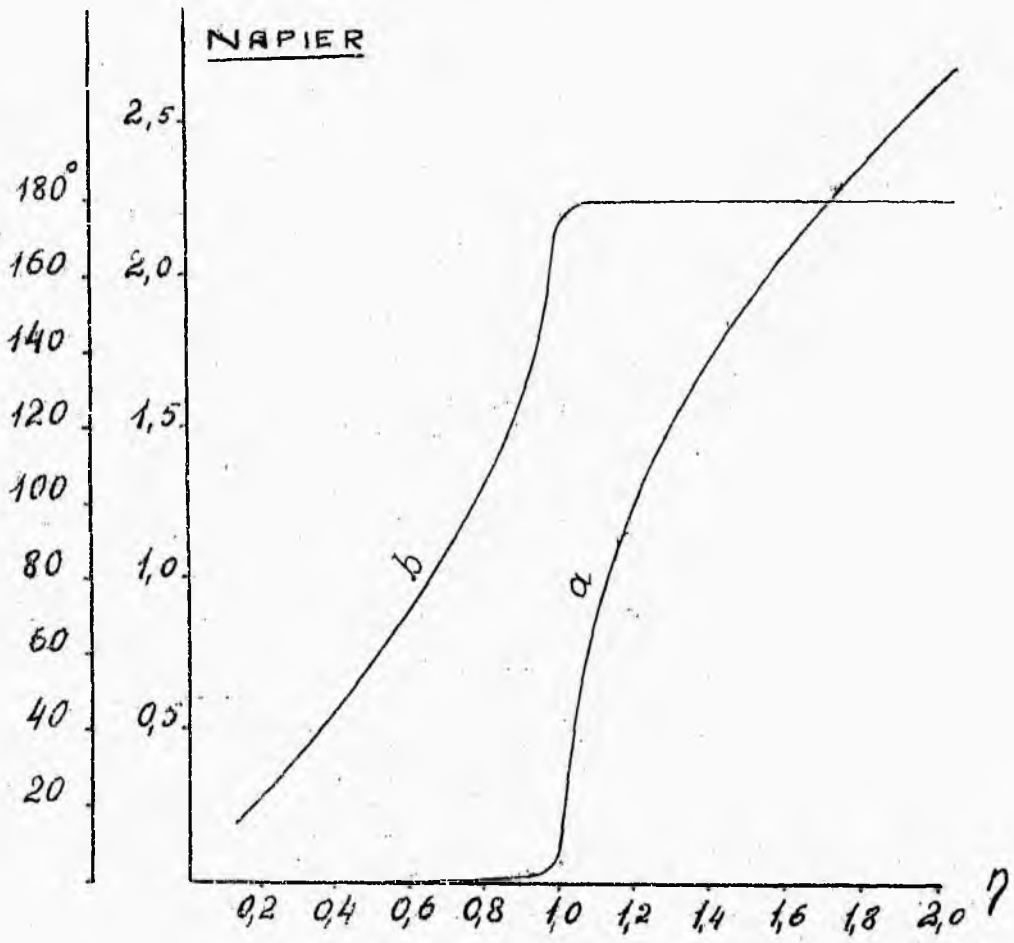
Za pomocą rozpatzonego układu cewek i kondensatorów możemy więc odseparować prądy, których częstotliwość przekracza częstotliwość drgań własnych ogniwa. Urządzenie tego rodzaju przyjęto obecnie nazywać filtrem elektrycznym. Filtr elektryczny, w którym, jak w naszym przypadku, cewki są połączone szeregowo, zaś kondensatory równolegle, nazywamy filtrem dławikowym, taki więc filtr przepuszcza prawie bez tłumienia prądy o częstotliwości mniejszej od częstotliwości drgań swobodnych, zatrzymując, czyli znacznie tłumiąc prądy o większej częstotliwości.

Filtry elektryczne mają szerokie zastosowanie w elektrotechnice, gdy zachodzi potrzeba tłumienia wyższych harmonicznych, a więc w radjotechnice,

### FILTR DŁAWIKOWY



$$R = 10 \Omega$$
$$L = 0,179 \text{ H.}$$
$$C = 0,1 \mu\text{F.}$$



rys. 9.

w telefonji, w miernictwie, dla otrzymania możliwie sinusoidalnego prądu zmiennego i t.d.

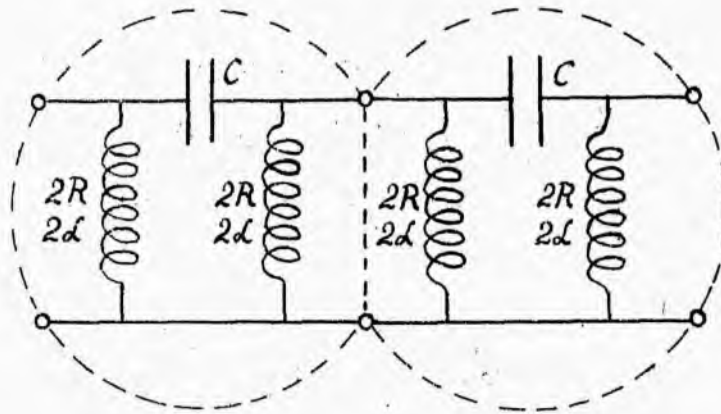
Obszar częstotliwości, które filtr elektryczny przepuszcza, nazywamy widmem filtra. W rozpatrzonym przykładzie widmo obejmuje częstotliwości od 0 do częstotliwości drgań swobodnych ogniwa; oczywiście widmo będzie tem większe, im większa będzie ta częstotliwość drgań swobodnych, zaś tę ostatnią częstotliwość możemy dowolnie ustalić, dobierając we wzorze /71/ odpowiednio  $L$  i  $C$ .

Jako innego rodzaju typ filtra elektrycznego rozpatrzmy linię łańcuchową również typu  $\Pi$ , lecz ułożoną w ten sposób, że kondensatory są połączone ze sobą szeregowo, natomiast cewki są włączone równolegle. Każde ogniwo złożone jest z kondensatora o pojemności  $C$  oraz dwóch cewek, których oporność i indukcyjność oznaczymy odpowiednio przez  $2R$  i  $2L$ , a to z tego względu, że przy łączeniu dwóch ogniw otrzymamy wspólną oporność  $R$  i indukcyjność  $L$  /rys.10/.

W tym przypadku

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}$$
$$\hat{Z}_2 = R + j\omega L$$

Podstawiając te wartości do wzoru /26/ otrzymamy:



rys. 10.

$$p + jq = 1 + \frac{1}{2} \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = 1 + \frac{1}{2j\omega C(R + j\omega L)} =$$

$$= 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} - j \frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

skąd

$$p = 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} \quad /80/$$

$$q = - \frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)} \quad /81/$$

Oporność falową znajdujemy ze wzoru /66/

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{1 + \frac{1}{4} \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}}}$$

i obliczymy podstawiając odpowiednie wartości  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  i wykonywając potrzebne działania nad liczbami zespolonymi.

Rozpatrując pojedyncze ogniwo i nie uwzględ-

niając oporności rzeczywistej, ustalimy pulsację własną ogniwa, gdy zważymy, że indukcyjność ogniwa, jako zamkniętego obwodu, wynosi  $4L$ , zaś pojemność  $C$ ; na podstawie wzoru /70/ ta pulsacja wyniesie

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad /82/$$

Jeżeli jak i poprzednio oznaczymy

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad \omega = \eta\omega_0 = \frac{\eta}{2\sqrt{LC}}$$

$$S = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

wtedy wzory /80/ i /81/ przepisujemy w sposób następujący:

$$p = 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} = 1 - \frac{1}{2(R^2 \frac{C}{L} + \omega^2 LC)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2(S^2 + \frac{\eta^2}{4})}$$

$$q = - \frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)} = - \frac{R}{\frac{\eta}{\sqrt{LC}} C(R^2 + \omega^2 L^2)} =$$
$$= - \frac{R}{\eta \sqrt{\frac{C}{L}} (R^2 + \omega^2 L^2)} = - \frac{R\sqrt{\frac{L}{C}}}{\eta(R^2 \frac{C}{L} + \omega^2 LC)} = - \frac{S}{\eta(S^2 + \frac{\eta^2}{4})}$$



czyli ostatecznie

$$p = 1 - \frac{2}{4s^2 + \eta^2} \quad /83/$$

$$q = - \frac{4s}{4s^2\eta + \eta^3} \quad /84/$$

Dla zbadania własności rozpatrywanego filtru, jak i w poprzednim przykładzie, założymy, że  $s = R\sqrt{\frac{\epsilon}{\alpha}}$  jest bardzo małe, wtedy, jak to wynika ze wzorów /83/ i /84/ będziemy mieli przybliżone wzory:

$$p = 1 - \frac{2}{\eta^2} \quad /85/$$

$$q = 0 \quad /86/$$

przyczem należy zwrócić uwagę, że  $q$  będąc bliskim zera ma jednakże wartość ujemną. Przy takich wartościach  $p$  i  $q$  wzory /27/ i /28/ przepiszą się w sposób następujący:

$$\cosh ip \alpha \cos b = p = 1 - \frac{2}{\eta^2} \quad /87/$$

$$\sinh ip \alpha \sin b = 0 \quad /88/$$

Zbadajmy wartości  $a$  i  $b$  dla rozmaitych wartości  $\eta$ .

gdy  $\eta < 1$  czyli  $\omega < \omega_0$ ,

$p < -1$  czyli  $p = -k$ , gdzie  $k > 1$ ,

wtedy

$$\cosh p a \cos b = -k$$

$$\sinh p a \sin b = 0,$$

skąd wynika, że  $a$  nie może się równać zeru; więc  $\sin b = 0$ ; ale  $\cos b$  powinno być ujemne, więc  $\cos b = -1$ , ponieważ jednakże jak wyżej zaznaczyliśmy  $q$  dąży do 0, pozostając liczbą ujemną i ponieważ w rozpatrywanym przypadku  $\sinh p a > 0$ , przeto  $\sin b$  powinno dążyć do zera, pozostając ujemnym.

Z tych względów wypada, że  $b = -180^\circ$ , natomiast

$$\cosh p a = k = \frac{2}{\eta^2} - 1,$$

czyli że współczynnik  $a$ , będąc dużym przy małych wartościach  $\eta$  /małych częstotliwościach/, stopniowo maleje i staje się równym 0

( $\cosh p a = 1$ ), gdy  $\eta = 1$ , to znaczy dla częstotliwości równej częstotliwości drgań swobodnych ogniwa.

Gdy  $\eta > 1$ , czyli  $\omega > \omega_0$ , wtedy, jak widać ze wzoru /85/,  $p$  zmienia się w granicach  $-1$  ( $\eta = 1$ ) i  $+1$  ( $\eta = \infty$ ), czyli

$$-1 \leq p \leq +1;$$

równania /87/ i /88/ wskazują, że  $\sin b$  nie może się równać zeru, gdyż wtedy  $\cos b = \pm 1$ , a ponieważ  $\cosh p a$  conajmniej może się równać 1,

więc nie uczynilibyśmy zadość warunkowi dla  $p$  ;  
pozostaje więc jedyna możliwość

$$\sinh p a = 0, \quad a = 0 ;$$

wtedy  $\cosh p a = 1$  i z równania /87/

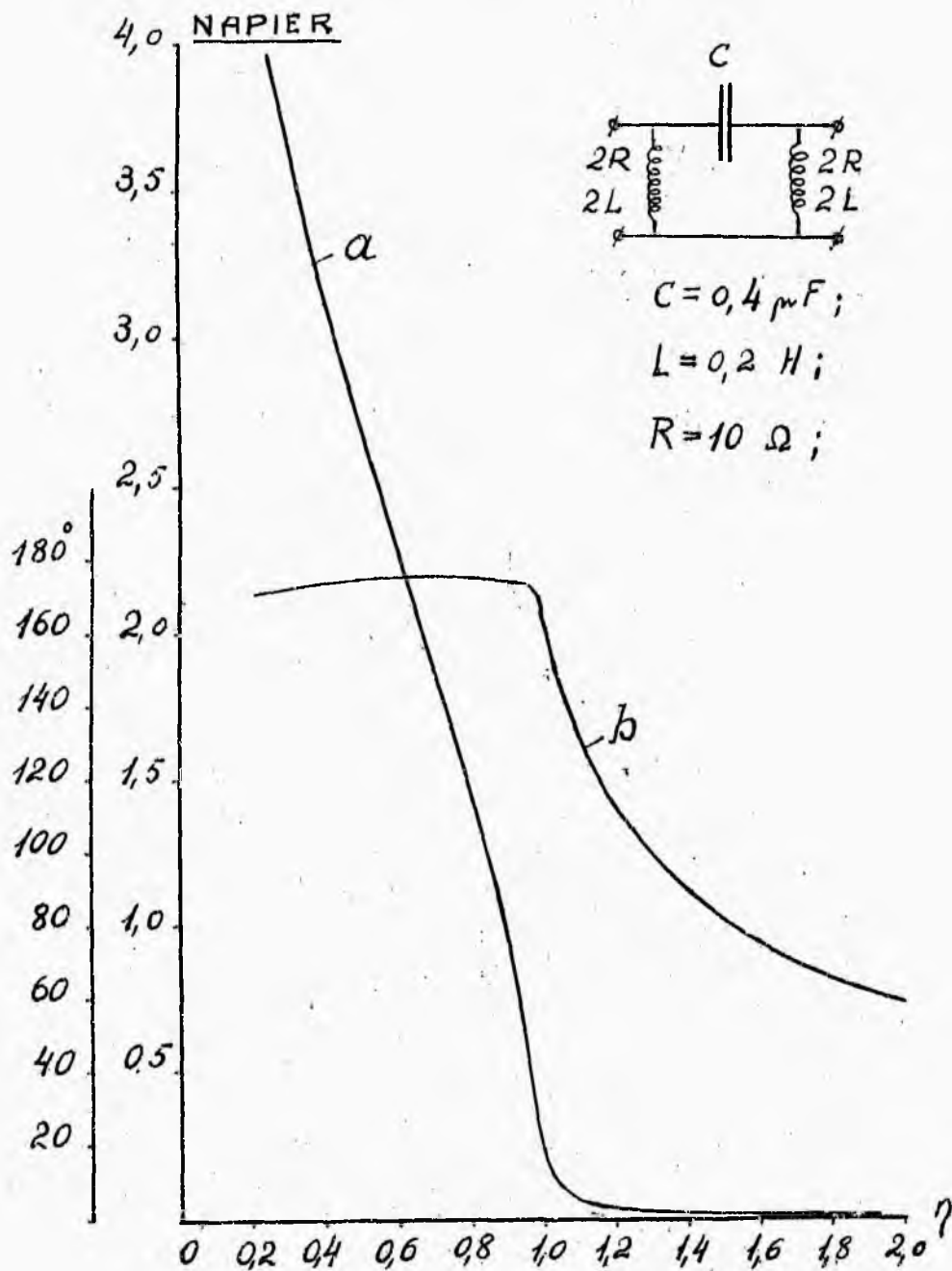
$$\cos b = p = 1 - \frac{2}{\eta^2},$$

czyli /po uwzględnieniu, że  $b$  powinno być ujemne/ wnioskujemy, że  $b$  zmienia się w granicach od  $-180^\circ$  do  $0^\circ$ .

Z tych rozważań wynika, że rozpatrywany filtr, który nazwiemy **f i l t r e m k o n d e n s a t o r o w y m**, tłumi prądy o częstotliwości mniejszej od częstotliwości drgań swobodnych ogniwa, natomiast przepuszcza prawie bez tłumienia prądy o częstotliwości wyższej. Na rys.11 wskazany jest przebieg współczynników  $\alpha$  i  $b$  w zależności od  $\eta$  w filtrze kondensatorowym.

Przez odpowiednie połączenie ogniw obu rozpatrzonych filtrów dławikowego i kondensatorowego można osiągnąć filtry, które będą prawie bez tłumienia przepuszczały prądy o częstotliwościach, zawartych w określonych granicach, lub będą tłumily prądy określonej częstotliwości, przepuszczając swobodnie inne prądy. Osiągnąć można takie rezultaty za pomocą bardzo wielu rozmaitych kombinacji łączenia cewek i kondensatorów, ograniczymy się do rozpatrzenia kilku najbardziej charakterystycz-

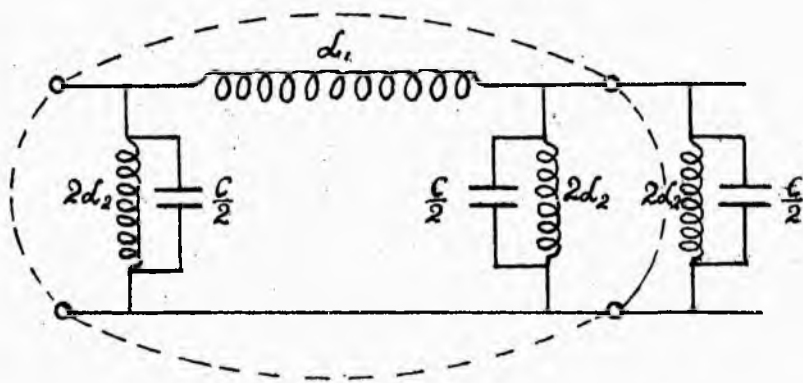
### FILTR KONDENSATOROWY



rys. 11.

nych przykładów. W celu badania własności filtrów poprzednio rozpatrzonych, zakładaliśmy, że oporność rzeczywista równa jest zeru; to samo uczynimy przy rozpatrywaniu następujących typów filtrów, od razu upraszczając wzory w założeniu, że:  $R=0$ .

Rozpatrzmy najpierw filtr, którego ogniwo przedstawione jest na rys.12. Jest to łańcuch typu  $\Pi$ , przyozem



rys.12.

$$\hat{Z}_1 = j\omega L_1$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})} = \frac{L_2}{Cj(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})};$$

na podstawie wzorów /26/, /27/ i /28/ mamy:

$$p+jq = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = 1 - \frac{\omega L_1 C (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{2L_2} =$$

$$= 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2L_2}$$

$$p = \cosh \alpha \cos b = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2L_2}$$

$$q = \sinh \alpha \sin b = 0$$

Tłumienia nie będzie, gdy  $\alpha = 0$ , a więc gdy  $\cosh \alpha = 1$ ,

wtedy 
$$\cos b = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2L_2} ;$$

wyraz ten może się zmieniać tylko w granicach  $+1$  i  $-1$ ; staje się on równym  $+1$ , gdy

$$\frac{\omega^2 L_1 C}{2} = \frac{L_1}{2L_2} ;$$

czyli dla

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL_2}} ;$$

staje się on równym  $-1$ , gdy

$$- \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2L_2} = -2 ;$$

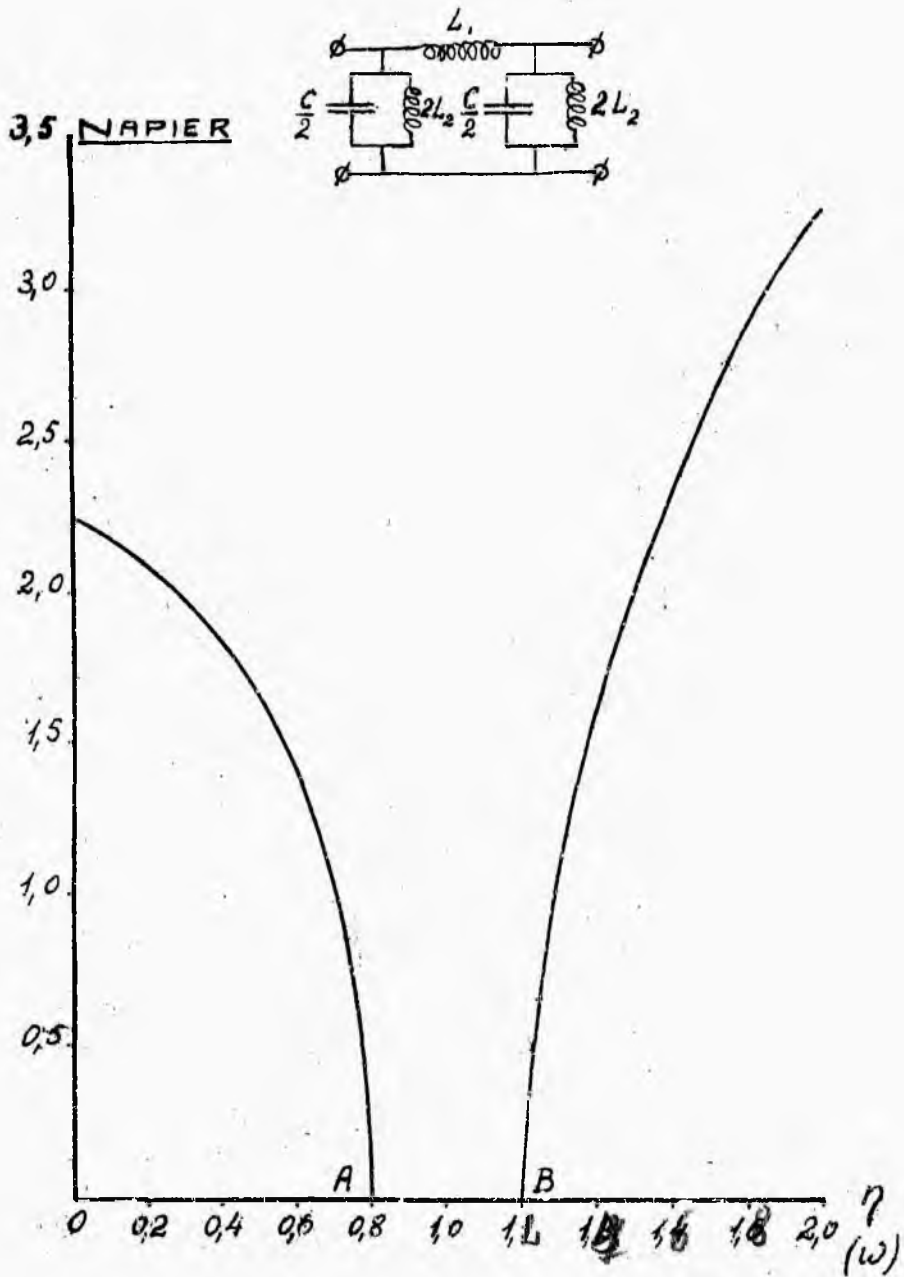
$$\omega^2 = \frac{4L_2 + L_1}{L_1 L_2 C} = \frac{1 + 4 \frac{L_2}{L_1}}{CL_2} ;$$

czyli

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{CL_2}} ;$$

wynika więc, że  $\alpha = 0$ , gdy pulsacja prądu zawarta jest w granicach

### FILTR WIDMOWY



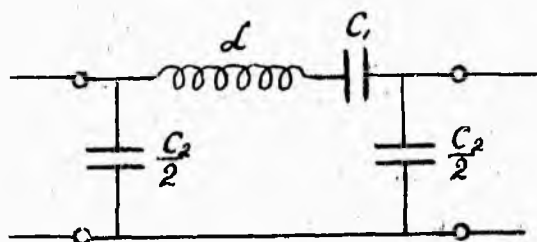
rys. 13.

$$\frac{1}{\sqrt{C L_2}} \leq \omega \leq \frac{\sqrt{1+4\frac{L_2^2}{C_1}}}{\sqrt{C L_2}} ;$$

przez odpowiedni dobór ilorazu  $\frac{L_2}{C_1}$  możemy więc zwęzić lub rozszerzyć granice częstotliwości prądów swobodnie przechodzących przez filtr.

Wykres, charakteryzujący zmianę współczynnika tłumienia dla takiego filtru pokazany jest na rys.13. Obszar częstotliwości  $AB$ , dla których tłumienia nie ma, nazywamy widmem filtru, a filtr tego typu - filtrem widmowym.

Również filtr widmowy otrzymamy, biorąc ogniwa, jak na rys.14; w tym przypadku



$$\hat{Z}_1 = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2} ;$$

rys.14.

wtedy

$$\begin{aligned} p &= 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = 1 - \frac{\omega C_2}{2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right) = \\ &= 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2C_1} , \end{aligned}$$

$$q = 0 ,$$



$$\text{więc } \cosh a \cosh b = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2C_1}$$
$$\sinh a \sinh b = 0.$$

Tłumienia nie będzie, gdy  $\cosh a = 1$  ( $a=0$ ),  
wtedy

$$\cosh b = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2C_1};$$

wyraz ten staje się równy  $+1$ , gdy

$$\frac{\omega^2 L C_2}{2} = \frac{C_2}{2C_1}, \text{ czyli } \omega = \frac{1}{\sqrt{L C_1}}$$

staje się równy  $-1$ , gdy

$$\frac{\omega^2 L C_2}{2} = \frac{C_2}{2C_1} + 2,$$

czyli

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{L C_1}}$$

Nie będzie więc tłumienia dla częstotliwości,  
zawartych w granicach

$$\frac{1}{\sqrt{L C_1}} \leq \omega \leq \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{L C_1}};$$

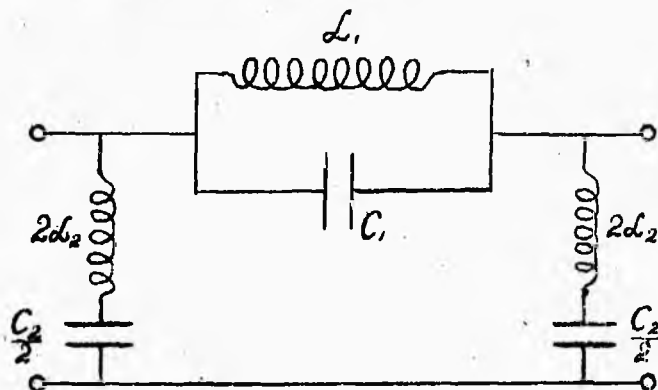
granice te tworzą widmo filtru. -

Rozpatrzmy teraz filtr, którego ogniwo złożone  
jest, jak na rys.15.

Tutaj

$$\tilde{Z}_1 = \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})} = \frac{L_1}{C_1 j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})}$$

$$\hat{Z}_2 = j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})$$



rys. 15.

Wtedy

$$p = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2} = 1 - \frac{L_1}{2C_1(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})}$$

$$q = 0 ;$$

wobec tego

$$\cosh \alpha \cos b = 1 - \frac{L_1}{2C_1(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})}$$

$$\sinh \alpha \sin b = 0 .$$

Tłumienia nie będzie, gdy  $\cosh \alpha = 1$  ( $\alpha = 0$ ),  
czyli

$$\begin{aligned} \cos b &= 1 - \frac{d_1}{2C_1 \left( \omega d_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left( \omega d_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} = \\ &= 1 - \frac{d_1 C_2 \omega^2}{2(\omega^2 d_1 C_1 - 1)(\omega^2 d_2 C_2 - 1)} \end{aligned}$$

Ze względu na możliwe wartości  $\cos b$  ostatni ułamek może się zmieniać tylko w granicach od 0 do 2; lub po odrzuceniu 2 w mianowniku, w granicach od 0 do 4.

Powinno więc być

$$0 \leq \frac{d_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 d_1 C_1 - 1)(\omega^2 d_2 C_2 - 1)} \leq 4 \quad ; \quad /89/$$

licznik rozpatrywanego wyrazu jest dodatni, więc i mianownik powinien być dodatni, to znaczy, że oba czynniki stojące w mianowniku powinny mieć znaki jednakowe.

Dla znalezienia takich wartości  $\omega$ , któreby czyniły zadość powyższej nierówności, rozpatrzmy najpierw warunek

$$\frac{d_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 d_1 C_1 - 1)(\omega^2 d_2 C_2 - 1)} \leq 4$$

skąd przy uwzględnieniu, że mianownik jest dodatni, otrzymujemy

$$4(\omega^2 d_1 C_1 - 1)(\omega^2 d_2 C_2 - 1) - d_1 C_2 \omega^2 \geq 0$$

albo

$$w^4 - \left( \frac{1}{d_1 C_1} + \frac{1}{d_2 C_2} + \frac{1}{4d_2 C_1} \right) w^2 + \frac{1}{d_1 d_2 C_1 C_2} \geq 0 \quad /90/$$

Przyrównywując lewą część tej nierówności do zera i rozwiązując równanie bikwadratowe, znajdujemy cztery pierwiastki:

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{d_1 C_1} + \frac{1}{d_2 C_2} + \frac{1}{4d_2 C_1} \right)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{d_1 C_1} + \frac{1}{d_2 C_2} + \frac{1}{4d_2 C_1} \right)^2 - \frac{1}{d_1 d_2 C_1 C_2}}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{d_1 C_1} + \frac{1}{d_2 C_2} + \frac{1}{4d_2 C_1} \right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{d_1 C_1} + \frac{1}{d_2 C_2} + \frac{1}{4d_2 C_1} \right)^2 - \frac{1}{d_1 d_2 C_1 C_2}}$$

$$w_3 = -w_1,$$

$$w_4 = -w_2,$$

z tych pierwiastków pierwsze dwa są dodatnie; przy czym  $w_2 > w_1$ , zaś ostatnie dwa są ujemne i wobec tego nie odpowiadają warunkom zadania.

Uwzględniając znalezione pierwiastki możemy nierówność /90/ przepisać w postaci

$$(w - w_1)(w - w_2)(w + w_1)(w + w_2) \geq 0,$$

skąd wynika, że

$$(w - w_1)(w - w_2) \geq 0,$$

czyli  $w \geq w_1$   $w \leq w_1$

, lub

i  $w \geq w_2$  i  $w \leq w_2$ ,

a ponieważ  $\omega_2 > \omega_1$  ,  
więc powinno być

$$\omega \gg \omega_2$$

lub  $\omega \ll \omega_1$

Biorąc teraz pod uwagę drugi warunek

$$\frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \gg 0 ,$$

widzimy, że warunek ten będzie spełniony przy  
wszelkich wartościach  $\omega$  ..

Zestawiając oba warunki, wnioskujemy, że  $\alpha = 0$  ,  
to znaczy nie będzie tłumienia dla takich często-  
tliwości, gdy pulsacja zmienia się

od 0 do  $\omega_1$

i od  $\omega_2$  do  $\infty$  ,

natomiast zachodzi tłumienie dla pulsacji, zawar-  
tych w granicach

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 ,$$

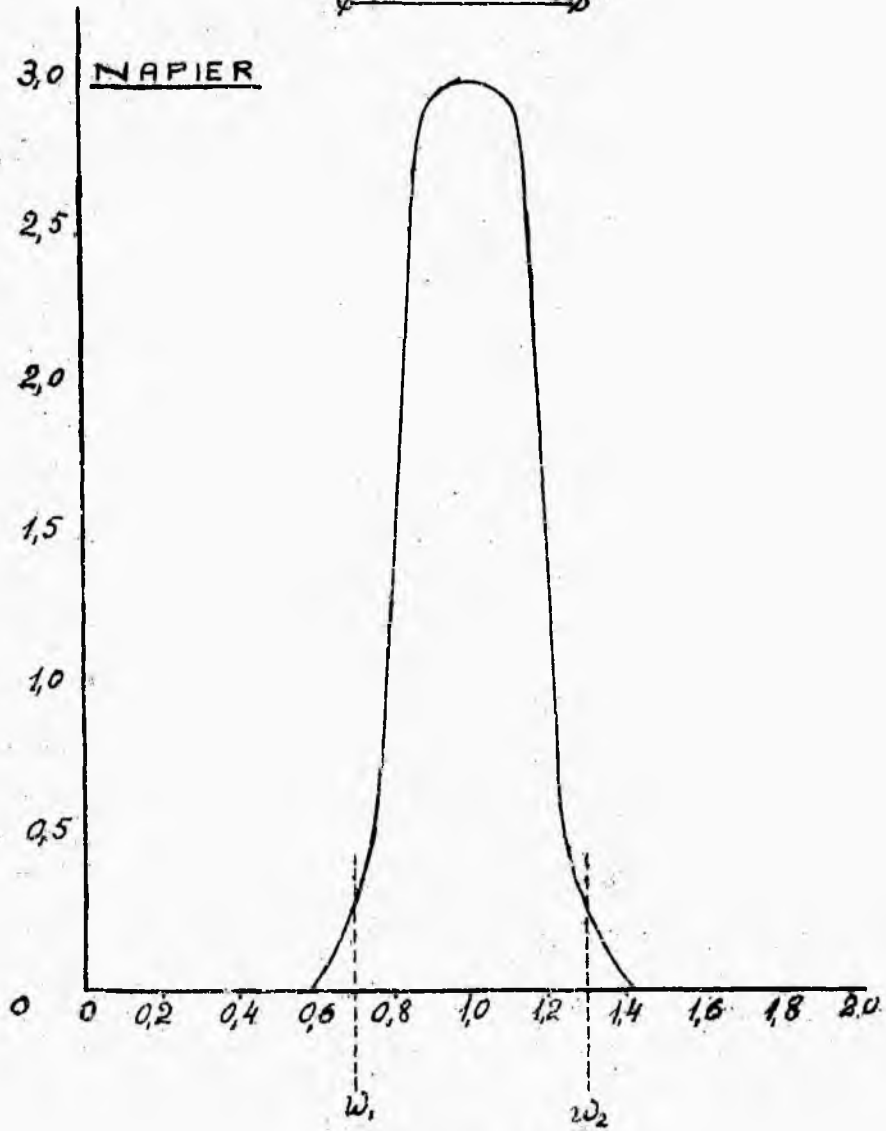
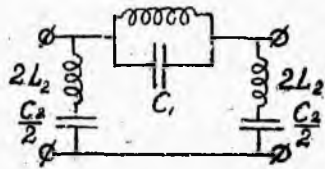
przytem łatwo zauważyć ze wzoru na  $\cosh ip \alpha \cos b$  ,  
że  $\cosh ip \alpha$  , a przez to i współczynnik tłumienia  
 $\alpha$  staje się równym nieskończoności, gdy

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 0 \text{ czyli } \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} ,$$

oraz

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0 \text{ " } \omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} ,$$

# FILTR WIDMOWY [POCHŁANIACZ FAL]



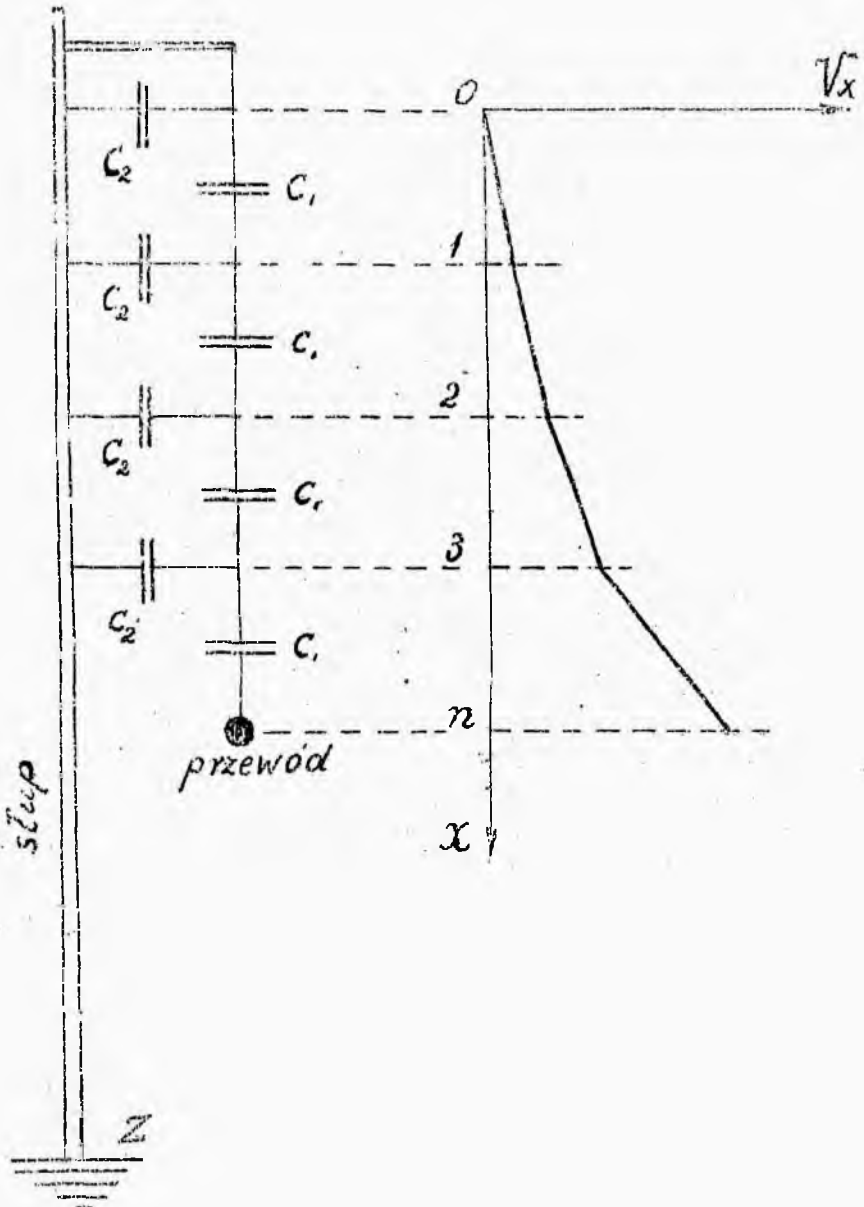
rys. 16.

a więc w rozpatrywanych granicach współczynnik tłumienia wzrasta od 0 do  $\infty$  i następnie maleje od  $\infty$  do 0 ; gdy przez odpowiedni dobór indukcyjności cewek i pojemności kondensatorów zbliżymy do siebie wartości pulsacji  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , wtedy tłumieniu będą podlegały prądy o określonej częstotliwości, czyli określonej długości fali; dlatego też tego rodzaju filtr może być nazwany **p o c h ł a n i a c z e m f a l i** i ma za zadanie odseparowanie wpływu prądu wiadomej częstotliwości. - Wykres dla tego rodzaju filtru podany jest na rys.16.

#### § 4. Łańcuch izolatorów wiszących.

---

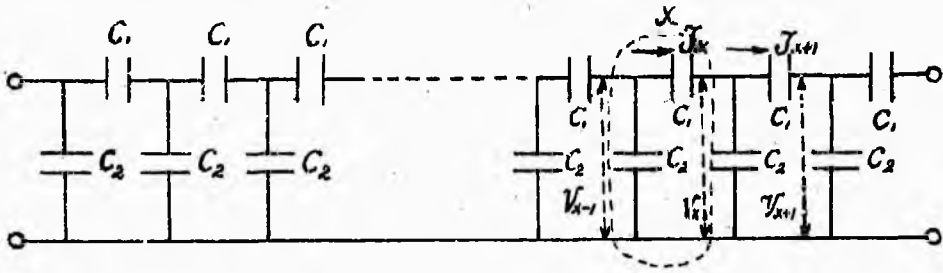
Jako przykład zastosowania teorii linii łańcuchowej w sieciach prądów wysokiego napięcia, rozpatrzmy rozkład napięć w łańcuchu izolatorów wiszących. Takie izolatory stanowią układ, zawierający pewną liczbę  $N$  umieszczonych jeden nad drugim izolatorów; pierwszy z tych izolatorów jest przytwierdzony do słupa, do ostatniego izolatora przymocowany jest przewód o wysokim napięciu. W takim układzie mamy do czynienia tylko z pojemnościami, które rozpatrujemy albo pomiędzy każdym izolatorem i ziemią, albo pomiędzy poszczególnymi izolatorami. Oznaczając pierwszą pojemność przez  $C_2$ , drugą przez  $C_1$ , otrzymana-



rys. 17.



my następujący schemat /rys.17 albo rys.18/.



rys.18.

Oznaczając

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$$

będziemy mieli

$$\hat{J}_x - \hat{J}_{x+1} = \frac{\hat{V}_x}{\hat{Z}_2}$$

$$\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x = \hat{J}_x \hat{Z}_1$$

$$\hat{V}_x - \hat{V}_{x+1} = \hat{J}_{x+1} \hat{Z}_1$$

Określając z drugiego i trzeciego równania  $\hat{J}_x$  i  $\hat{J}_{x+1}$  i podstawiając te wartości do pierwszego, otrzymamy

$$\frac{\hat{V}_{x-1} - \hat{V}_x}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{V}_x - \hat{V}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{V}_x}{\hat{Z}_2} = 0,$$

lub

$$\hat{V}_{x-1} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right) \hat{V}_x + \hat{V}_{x+1} = 0;$$

równanie to jest identyczne z równaniem /58/, więc będziemy mieli rozwiązanie /59/

$$\hat{V}_x = A e^{kx} + B e^{-kx} ,$$

gdzie

$$\operatorname{cosh} k = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}$$

Podstawiając wartości  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$ , będziemy mieli

$$\operatorname{cosh} k = 1 + \frac{C_2}{2C_1} ,$$

skąd znajdziemy  $k$ .

Na początku łańcucha ( $x=0$ ), gdzie izolator jest przytwierdzony do słupa, możemy uważać, że miejsce to jest uziemione, a więc napięcie względem ziemi wynosi 0; w końcu łańcucha mamy przewód pod napięciem  $V$  /względem ziemi/.

Wobec tego zakładając we wzorze /91/ kolejno  $x=0$  i  $x=n$ , otrzymamy

$$A + B = 0$$

$$A e^{kn} + B e^{-kn} = V ,$$

skąd

$$B = -A$$

$$A(e^{kn} - e^{-kn}) = V ,$$

czyli

$$A = \frac{V}{2 \operatorname{sinh} kn} ,$$

$$B = - \frac{V}{2 \operatorname{sinh} kn} .$$

Podstawiając te wartości do /91/, znajdujemy

$$V_x = \frac{V}{\sinh \rho k r} \frac{(e^{kx} - e^{-kx})}{2} = \frac{V \sinh \rho k x}{\sinh \rho k r}$$

Z tego wzoru możemy znaleźć napięcie na dowolnym izolatorze, numer którego, liczony od miejsca przytwierdzenia do słupa wynosi  $x$ . Wykres rozkładu napięcia uwidoczniiony jest na rys.17.

-----

*Stromová soustava*

**SPIS RZECZY.**

---

**Sztuczne linje elektryczne.**

	str.
§ 1. Układy, zastępujące długą linję .....	3
§ 2. Linje łańcuchowe .....	8
§ 3. Filtry elektryczne .....	30
§ 4. Łańcuch izolatorów wiszących .....	54

