ROZDZIAŁ I

MAGNETYZM

1. — Magnes jednorodny o natężeniu magnetycznem równem 300 jednostkom układu c. g. s. (układu bezwzględnego) posiada długość 1 *dcm* i przekrój poprzeczny równy 100 mm^2. Wiemy, że magnes ten waży 78 *gr*, że jest zawieszony w swym środku ciężkości i że wychylony z położenia równowagi wykonywa pod wpływem magnetyzmu ziemskiego 14 całkowitych wahnięć na minutę. Wyznaczyć natężenie pola magnetycznego ziemi w jednostkach c. g. s.

Zależność między okresem wahnięć T, momentem bezwładności magnesu Θ, momentem magnetycznym tegoż $\mathfrak{A}$ i natężeniem pola magnetycznego $\mathcal{H}$ wyraża wzór

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{A}\,\mathcal{H}}},$$

z którego wynika

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi^2\Theta}{\mathfrak{A}\,T^2}.$$

Jeżeli $\mathfrak{J}$ oznacza natężenie magnesu [1]), v jego objętość, m masę, b długość, a bok przekroju kwadratowego, to możemy napisać, że

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{J}\,v \quad \text{oraz} \quad \Theta = \frac{m}{12}(b^2 + a^2).$$

---

[1]) Natężenie magnesu $\mathfrak{J} = \dfrac{\mathfrak{M}}{S}$, gdzie $\mathfrak{M}$ jest masą magnetyczną bieguna, a S przekrojem poprzecznym. (*Przyp. tłum.*)

W naszem zadaniu $\mathfrak{A} = 300 \,.\, 10 = 3\,000$ c. g. s.,

$$T = \frac{60}{14} = 4{,}28 \; sek; \quad \Theta = \frac{78}{12}\,(10^2 + 1^2) = 650 \text{ c. g. s.},$$

znajdziemy więc

$$\mathcal{H} = \frac{4 \,.\, 3{,}14^2 \,.\, 650}{3\,000 \,.\, 4{,}28^2} = 0{,}465 \text{ gausa.}$$

2. — Igła magnesowa, której masa magnetyczna bieguna $\mathfrak{M} = 50$ jednostkom c. g. s. i której długość geometryczna wynosi 200 *mm*, jest umieszczona wzdłuż osi jednorodnego magnesu kształtu rury. Pomijając działanie magnetyzmu ziemskiego i tarcia, wyznaczyć w dżaulach pracę, jaką należy wykonać do przekręcenia igły tak, by biegun północny znalazł się na miejscu południowego i odwrotnie. Wiemy przytem, że długość magnesu $l = 0{,}6$ *m* i że promienie kół współśrodkowych, ograniczających jego przekrój poprzeczny, są $r_1 = 2$ *dcm* oraz $r_2 = 1{,}5$ *dcm*. Gdy magnes ten waha się w jednostajnem polu magnetycznem (wywierającym na jednostkę c. g. s. masy magnetycznej siłę 4,78 *mgr*) dokoła osi, przechodzącej przez jego środek ciężkości, prostopadłej do jego osi magnetycznej oraz kierunku pola, wówczas wykonywa 4,25 całkowitych oscylacyi na minutę. Moment bezwładności magnesu względem wyżej wspomnianej osi obrotu $\Theta = 11{,}7$ jednostkom układu kilogram (masa), metr.

Moment magnetyczny magnesu rurowego da się wyznaczyć z wzoru

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{A}\,\mathcal{H}}},$$

gdzie T jest czasem trwania całkowitego wahnięcia (okresem) w polu magnetycznem o natężeniu $\mathcal{H}$.

Wstawiając $T = \dfrac{60}{4{,}25} = 14{,}1$ *sek*,

$$\Theta = 11{,}7 \,.\, 10^3 \,.\, 10^4 = 117\,000\,000 \text{ c. g. s.},$$

$$\mathcal{H} = 4{,}78 \,.\, 10^{-3} \,.\, 981 = 4{,}69 \text{ gausa},$$

znajdziemy

$$\mathfrak{A} = \frac{4 \,.\, \overline{3{,}14}^2 \,.\, 117\,000\,000}{14{,}1^2 \,.\, 4{,}69} = 4\,950\,000 \text{ c. g. s.}$$

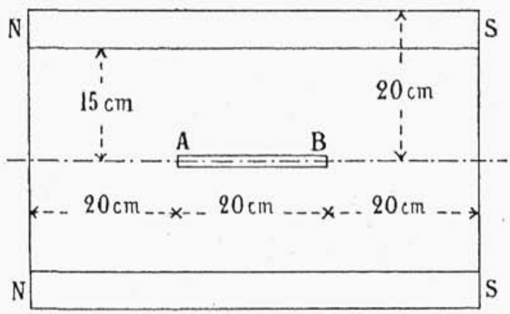
Z tego widać, że gęstość magnetyczna biegunów magnesu

$$\sigma = \frac{\mathfrak{A}}{l \cdot \pi (r_1^2 - r_2^2)} = \frac{4\,950\,000}{60 \cdot 3{,}14 \cdot (20^2 - 15^2)} = 150 \text{ c. g. s.}$$

Znajdźmy wartość potencyałów magnetycznych w punktach, gdzie się znajdują bieguny igły magnetycznej. W tym celu zauważamy, że potencyał magnetyczny, wywołany przez tarczę pierścieniową z równomiernie rozłożoną masą magnetyczną (o gęstości σ), ograniczoną kołami współśrodkowemi o promieniach r_1 i r_2, wyraża się dla punktu, leżącego na osi symetryi tarczy wzorem

$$\mathfrak{V} = 2\pi\sigma (\sqrt{r_1^2 + a^2} - \sqrt{r_2^2 + a^2}),$$

gdzie a oznacza odległość rozpatrywanego punktu od środka tarczy.



Rys. 1.

A i B (rys. 1) są punktami, zajmowanymi przez końcówki igły magnesowej. Potencyał w punkcie A wynosi

$$\mathfrak{V}_A = 2\pi (+150) (\sqrt{20^2 + 20^2} - \sqrt{15^2 + 20^2}) +$$
$$+ 2\pi (-150) (\sqrt{20^2 + 40^2} - \sqrt{15^2 + 40^2}) = +1225 \text{ c. g. s.}$$

Oczywiście w punkcie B potencyał

$$\mathfrak{V}_B = -1225 \text{ c. g. s.}$$

Przed odwróceniem igły, gdy biegun północny znajdował się w B, jej energia potencyalna w polu magnesowem była

$$(+m)\,\mathfrak{V}_B + (-m)\,\mathfrak{V}_A = (+50)(-1225) + (-50)(+1225) =$$
$$= -122\,500 \; erg$$

Po odwróceniu igły energia ta wynosiła:

$$(+m)\,\mathfrak{V}_A + (-m)\,\mathfrak{V}_B = +122500\ erg$$

Zmiana jej stanowi szukaną pracę, czyli

$2 \,.\, 122500 = 245000$ ergów lub $245000 \,.\, 10^{-7} = 0{,}0245$ dżaula.

3. — Wyznaczyć w watach średnią moc, potrzebną do obrócenia w ciągu $^1/_{100}$ minuty o 180^0 dokoła jednej ze średnic tarczy stalowej poprzecznie namagnesowanej do natężenia $\mathfrak{J} = 10$ c. g. s. Powierzchnia tarczy S wynosi 10 *dcm*^{2}, grubość jej $\varepsilon = 1$ *mm*. Tarcza ta jest umieszczoną w jednostajnem polu magnetycznem o natężeniu $\mathfrak{H} = 50$ c. g. s. w ten sposób, że linie sił tworzą z nią kąt 45^0, przebijając ją od strony południowej.

Tarcza obajmuje swoją powierzchnią jednakowy strumień $\mathfrak{N}$ przed i po obrocie o 180^0; a więc energia względna tarczy o mocy magnetycznej [1] $\mathfrak{F}$ i pola, w położeniu początkowem wynosi $-\mathfrak{F}(+\mathfrak{N}) = -\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ w położeniu końcowem $-\mathfrak{F}(-\mathfrak{N}) = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Ruch ten określa zmianę energii potencyalnej układu o wielkość

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{N}) - (-\mathfrak{F}\mathfrak{N}) = 2\,\mathfrak{F}\mathfrak{N},$$

która jest miarą potrzebnej do jego uskutecznienia pracy.

Wstawiając $\mathfrak{F} = \varepsilon\mathfrak{J} = 0{,}1 \,.\, 10 = 1$ c. g. s.

$$\mathfrak{N} = S\,\mathfrak{H}\cos 45^0 = 1000 \,.\, 50 \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}} = 35300 \text{ c. g. s.}$$

znajdujemy $2\,\mathfrak{F}\mathfrak{N} = 2 \,.\, 1 \,.\, 35300 = 70600$ ergów.

Czemu odpowiada średnia moc

$$\mathfrak{P} = \frac{70600}{0{,}6} = 117500\ erg/sek$$

czyli $117500 \,.\, 10^{-7} = 0{,}01175$ wata.

4. — Oś magnetyczna magnesu kulistego jednorodnego o natężeniu $\mathfrak{J} = 50$ c. g. s., a objętości $V = 1$ *dcm*^{3}, jest skierowaną wzdłuż pola magnetycznego jednostajnego o 20000 linii sił na 1 *m*^{2} płaszczyzny ekwipotencyalnej. Wyznaczyć w *kgm* pracę, odpowiadającą obrotowi magnesu o 180^0 około średnicy prosto-

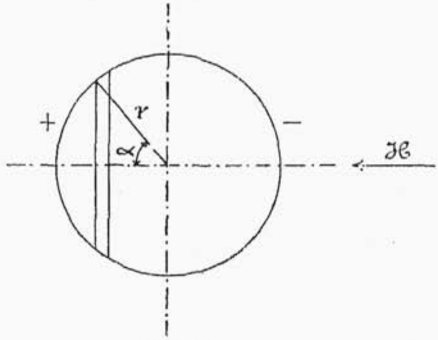
[1] Moc magnetyczna $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{M}}{S}\ l = \frac{\mathfrak{a}}{S}$. (*Przyp. tłum.*)

padłej do osi magnetycznej, zakładając, że pole nie zmienia magnetyzmu kuli.

Podzielmy magnes ten o promieniu r płaszczyznami równoległemi na cienkie krążki (rys. 2) o mocy

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{J} \, . \, r \, d\alpha \, \sin\alpha.$$

Obrócenie takiego krążka wymaga pracy równej przyrostowi jego energii potencyalnej, spowodowanemu zmianą położenia w polu magnetycznem.



Rys. 2.

Jeżeli linie sił pola są skierowane początkowo na południową stronę krążka, i przebijają go w ilości $\mathfrak{N}$, praca ta będzie

$$-\mathfrak{F}\,(-\mathfrak{N}) - (-\mathfrak{F}\,\mathfrak{N}) = 2\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{N} = 2 \, . \, \mathfrak{J} \, . \, r \sin\alpha \, d\alpha \, . \, \pi \, (r \sin\alpha)^2 \, \mathfrak{H},$$

gdzie $\mathfrak{H}$ jest natężeniem pola, w którem się krążek znajduje.

Całkowita praca szukana, odpowiadająca obrotowi wszystkich krążków utworzonych z magnesów wyrazi się

$$2\pi\mathfrak{J} r^3 \mathfrak{H} \int_0^\pi \sin^3\alpha \, d\alpha = 2\pi\mathfrak{J} r^3 \mathfrak{H} \int_0^\pi (1 - \cos^2\alpha) \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= 2\pi\mathfrak{J} r^3 \mathfrak{H} \left[-\cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{3} \right]_0^\pi = 2\pi\mathfrak{J} r^3 \mathfrak{H} \, . \, \frac{4}{3} = 2\, V \mathfrak{J} \mathfrak{H},$$

gdzie l oznacza długość magnesu.

Oznaczając przez $\mathfrak{A}$ moment magnetyczny magnesu, dostaniemy
$$2\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}\,l = 2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{H} = 2\,V\mathfrak{J}\,\mathfrak{H}.$$

Wstawiając $V = 1000 \; cm^3$; $\mathfrak{J} = 50$ c. g. s.

$$\mathfrak{H} = \frac{20\,000}{10\,000} = 2 \text{ linie na } 1 \; cm^2, \text{ czyli 2 gausy},$$

znajdziemy szukaną pracę

$$2 \, . \, 1000 \, . \, 50 \, . \, 2 = 200\,000 \; erg$$

lub

$$\frac{200\,000}{981 \, . \, 10^3 \, . \, 10^2} = 0{,}00204 \; kgm$$

---

5. — Jeżeli przeciąć magnes o kształcie pierścienia płaszczyzną przechodzącą przez oś jego, obydwie połowy przyciągać się będą z siłą 25 *kg*. Powierzchnie zetknięcia są kołami o średnicy 20 *mm*. Obliczyć potok magnetyczny w pierścieniu. (Średnica pierścienia jest dostatecznie dużą, aby uważać natężenie magnetyczne za stałe).

Siła nośna F daje się wyrazić wzorem

$$F = 2\pi \mathfrak{J}^2 . 2S.$$

Z drugiej strony indukcya magnetyczna

$$\mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{J}.$$

A więc
$$F = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} . 2S.$$

stąd zaś $\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{4\pi F}{S}}$ lub $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} S = \sqrt{4\pi F S}$

$$\mathfrak{N} = \sqrt{4\pi F S} = \sqrt{4\pi (25 . 10^3 . 981) \pi \frac{2^2}{4}} = 31\,100 \text{ c. g. s.}$$

6. — Mamy pierścień stalowy namagnesowany, którego średnica wewnętrzna $2r = 2$ *dcm*, szerokość mierzona wzdłuż promienia 30 *mm*. Pierścień ten jest przecięty płaszczyzną przechodzącą przez oś jego (rys. 3). Wiedząc, że aby je rozdzielić, przez obrót około krawędzi idącej wzdłuż promienia, potrzebny jest moment $C = 0{,}05$ *kgm*, wyznaczyć potok magnetyczny w pierścieniu, przyjmując, że natężenie namagnesowania tegoż zmienia się w stosunku odwrotnym do odległości od osi obrotu.

Niech będzie K/x natężeniem magnesu w odległości x od osi obrotu pierścienia, oraz b wysokością jego wzdłuż tej osi.

Szukany potok, oraz moment obrotu wyrażą całki

$$\mathfrak{N} = \int_r^{r+a} 4\pi \frac{K}{x} b\, dx = 4\pi K b \log_e \frac{r+a}{r},$$

oraz

$$C = 2\int_r^{r+a}\int_0^b 2\pi \frac{K^2}{x^2} dx\, dy \,.\, y = 2\pi K^2 b^2 \frac{a}{r(r+a)}.$$

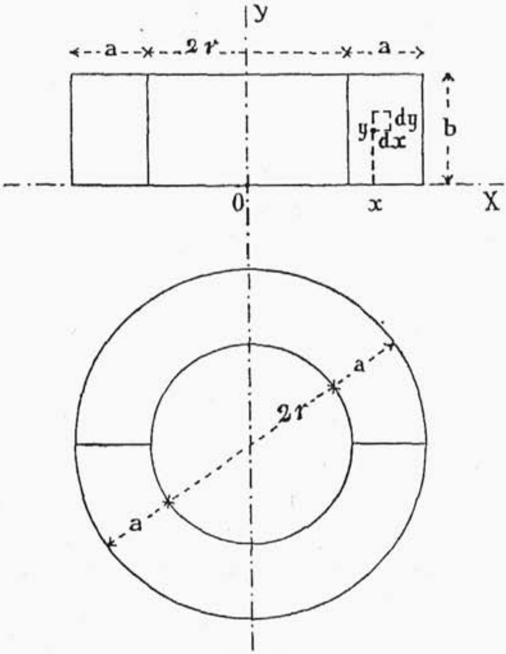
Eliminując Kb z tych równań, otrzymamy

$$\mathfrak{N} = 4\pi \sqrt{\frac{C r (r+a)}{2\pi a}} . \log^e \frac{r+a}{r}.$$

Podstawiając $C = 0{,}05 \,.\, 10^3 \,.\, 981 \,.\, 10^2 = 4\,900\,000$ *dyn-cm*,

$2r = 20$ *cm*, oraz $a = 3$ *cm*,

znajdziemy $\mathfrak{M} = 4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 5810 \,.\, 0{,}262 = 19\,100$ c. g. s



Rys. 3.

7. — Ile linii sił magnetycznych obejmuje północny biegun pręta cylindrycznego o znacznej długości, zrobionego z miękkiego żelaza, umieszczonego w jednostajnem polu magnetycznem równolegle do jego kierunku, jeżeli średnica pręta wynosi 2 *mm* i jeżeli wartości 5 c. g. s. natężenia danego pola magnetycznego odpowiada przenikliwość żelaza równa 2000?

Mamy potok magnetyczny, utworzony przez linie sił zewnątrz ciała namagnesowanego i przez linie indukcyi wewnątrz tegoż. Całkowity potok linii sił, wychodzących z bieguna północnego pręta namagnesowanego przez wpływ, liczbowo wyrazi się

$$\int_0^S \mathfrak{B} \cos \alpha \, ds,$$

gdzie *ds* jest elementem przekroju prostopadłego, który na skutek symetryi, oddziela teoretycznie pośrodku długości pręta, powierzchnię biegunową dodatnią od ujemnej, S jest polem tego przekroju pręta, $\mathfrak{B}$ wartością indukcyi magnetycznej w miejscu gdzie się znajduje rozważany element, α kąt jaki tworzy w tym punkcie kierunek indukcyi z osią pręta.

Na skutek znacznej długości pręta, siłę rozmagnesowującą można pominąć w częściach środkowych, gdzie siła magnesująca w tym założeniu sprowadza się do natężenia $\mathfrak{H}$ jednostajnego pola początkowego. W tych warunkach we wszystkich punktach przekroju poprzecznego, który dzieli pręt na dwie połowy, indukcya posiada jednakową wartość i jest prostopadłą do tego przekroju ($\alpha = 0$).

Niech będzie μ przenikliwością żelaza, odpowiadającą natężeniu pola $\mathfrak{H}$, wówczas

$$\int_0^S \mathfrak{B} \cos\alpha \, ds = \mathfrak{B} S = \mu \, \mathfrak{H} S.$$

Podstawiając wartości $S = \pi \dfrac{0{,}2^2}{4} = 0{,}0314 \; cm^2$,

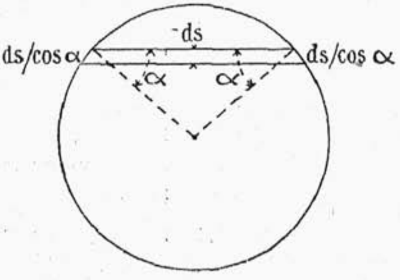
$$\mathfrak{H} = 5 \text{ gausów}, \quad \text{oraz} \quad \mu = 2000,$$

otrzymamy

$$\mu \, \mathfrak{H} S = 2000 \,.\, 5 \,.\, 0{,}0314 = 314 \text{ c. g. s.}$$

8. — Wyznaczyć siłę rozmagnesowującą magnesu kulistego jednorodnego, którego natężenie magnetyczne wynosi 5 jednostek c. g. s.

Magnes ten będziemy rozpatrywali jako składający się z cienkich nitek prostych i wzajemnie równoległych, o natężeniu magnetycznem stałem i równem $\mathfrak{J} = 5$ c. g. s.



Rys. 4.

Niechaj α (rys. 4) będzie kątem, utworzonym przez jedną z tych nitek, o przekroju poprzecznym ds, z promieniami, przechodzącymi przez jej końce.

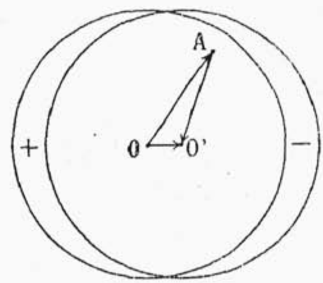
Ponieważ nitka taka przenosi masę magnetyczną $\mathfrak{J}\, ds$, na odpowiadającą jej powierzchnię $ds/\cos\alpha$ biegunów półkulistych magnesu, więc gęstość na powierzchni tegoż w rozważanym punkcie wyniesie

$$\sigma = \frac{\mathfrak{J}\, ds}{\left(\frac{ds}{\cos\alpha}\right)} = \mathfrak{J} \cos\alpha.$$

Gęstość więc powierzchniowa w miejscach przebicia się osi magnetycznej magnesu kulistego jest równą jego natężeniu magnetycznemu, i zmniejsza się, aby się stać zerem na obwodzie koła, utworzonego przez przecięcie się kuli tego magnesu z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek, prostopadłą do osi magnetycznej tegoż.

I właśnie działania tych półkulistych warstw magnetycznych, (o gęstości powierzchniowej zmieniającej się cosinusoidalnie czyli o znakach przeciwnych), na jednostkę dodatniej masy w jakimś punkcie wewnątrz magnesu, jest miarą siły rozmagnesowującej w tym punkcie.

Zauważywszy, że odcinki promieni, zawarte między powierzchniami dwu kul, których środki są w odległości nieskończenie małej OO', są równe $OO' \cos\alpha$ (gdzie α oznacza kąt między promieniem a linią, łączącą środki kul) możemy zastąpić magnes przez dwie powierzchnie kuliste, o promieniach równych promieniowi magnesu, i których środki są w nieskończenie małej odległości, a przestrzenie między któremi są wypełnione masą magnetyczną. Z jednej strony płaszczyzny, przecinającej we środku odcinek OO' i do niego prostopadłej masą dodatnią, z drugiej zaś ujemną o gęstości objętościowej δ takiej, aby



Rys. 5.

$$\delta : OO' = \mathfrak{J}.$$

Ponieważ z drugiej strony, szukana siła nie zmieni się przez dodanie do mas w ten sposób określonych, dwuch równych ilości masy magnetycznej, lecz o znakach przeciwnych, i zajmujących to samo miejsce (przenikających się), tak, że działanie ich się znosi, więc zagadnienie sprowadzamy w końcu do określenia natężenia pola magnetycznego, wewnątrz dwuch kul, których odległość środków OO' jest nieskończenie małą i które są całkowicie wypełnione masami magnetycznemi, jedna dodatnią, druga zaś ujemną o gęstości objętościowej jednorodnej $\delta = \mathfrak{J}/OO'$.

W dowolnym punkcie A tego układu (rys. 5), natężenie pola, pochodzącego od kuli dodatniej o środku w O, rozważane oddzielnie, będzie

$$\frac{\frac{4}{3}\pi \,.\, \overline{OA}^3 \,.\, \delta}{\overline{OA}^2} = \frac{4}{3}\pi \,.\, OA \,.\, \delta,$$

i może być wyrażone przy pomocy wektora OA. Natężenie zaś pola kuli ujemnej ze środkiem w O'

$$\frac{\frac{4}{3}\pi \,.\, \overline{O'A}^3 \,.\, \delta}{\overline{O'A}^2} = \frac{4}{3}\pi \,.\, O'A \,.\, \delta,$$

i może być wyrażone przy pomocy wektora AO'. Wektor, wyrażający pole wypadkowe, będzie więc OO'. Natężenie jego

$$\frac{4}{3}\pi \,.\, OO' \,.\, \delta = \frac{4}{3}\pi \mathfrak{J},$$

kierunek zaś jest równoległy do prostej łączącej środki kul.

Wnioskujemy z ostatniego wyrażenia, że we wszystkich punktach magnesu kulistego i jednorodnego, siła rozmagnesowująca jest jednakowa co do wielkości i kierunku. Wartość jej przewyższa $\frac{4\pi}{3}$ razy natężenie magnesu, kierunek zaś jest równoległy do osi magnetycznej.

Wstawiając $\mathfrak{J} = 5$ jednostek c. g. s. znajdziemy, że

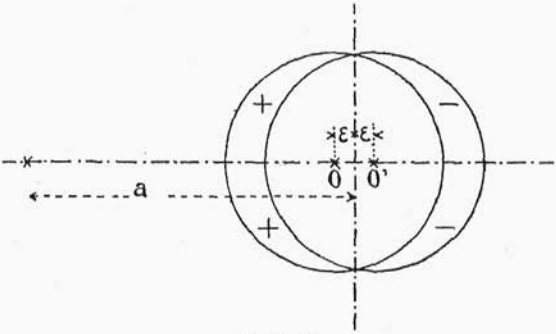
$$\frac{4}{3}\pi \mathfrak{J} = \frac{4}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 5 = 20{,}9 \text{ gausom.}$$

9. — Jak wielką, w centygramach na jednostkę c. g. s. bieguna, jest siła rozmagnesowująca $\mathfrak{H}$ magnesu kulistego jednorodnego przy średnicy tegoż $2r = 1$ *dcm*, gdy ten wywołuje potencyał magnetyczny $\mathfrak{V} = 20$ c. g. s. w punkcie leżącym na przedłużeniu jego osi i odległym o $a = 0{,}25$ *m* od środka.

Oznaczmy przez δ gęstość objętościową czynnika, przez 2ε (rys. 6) oddalenie nieskończenie małe między środkami obu kul, biegunowości przeciwnej, zastępujących magnes.

Mamy

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi r^3 \delta \left(\frac{1}{a-\varepsilon} - \frac{1}{a+\varepsilon} \right).$$



Rys. 6.

Jeżeli $\mathfrak{J}$ oznacza natężenie magnesu, wtedy

$$\mathfrak{H} = \frac{4}{3}\pi \mathfrak{J} = \frac{4}{3}\pi . 2\varepsilon\delta.$$

A więc

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3\mathfrak{H}}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a-\varepsilon} - \frac{1}{a+\varepsilon} \right) = \frac{r^3 \mathfrak{H}}{a^2-\varepsilon^2};$$

opuszczając wobec a^2 nieskończenie małą drugiego rzędu ε^2, z ostatniego równania otrzymamy

$$\mathfrak{H} = \frac{a^2 \mathfrak{M}}{r^3}.$$

Wstawiając $a = 25$ *cm*, $\mathfrak{M} = 20$ c. g. s., $r = 5$ *cm*, znajdziemy

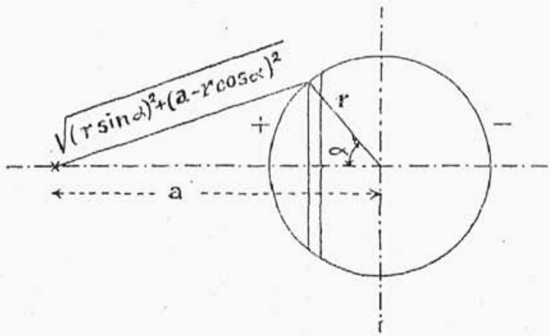
$$\mathfrak{H} = \frac{25^2 . 20}{5^3} = 100 \text{ gausom},$$

t. j. 100 *dyn* lub $100 . 10^2/981 = 10{,}2$ centygramom na jednostkę c. g. s. bieguna.

Zamiast poprzedniego rozważania, można wprowadzić pojęcie potencyału elementarnego, odpowiadającego pierścieniowi biegunowemu, prostopadłemu do osi magnetycznej (rys. 7)

$$d\mathfrak{M} = \frac{2\pi r \sin\alpha . r\, d\alpha . \mathfrak{J} \cos\alpha}{\sqrt{(r\sin\alpha)^2 + (a - r\cos\alpha)^2}} = \frac{2\pi r^2 \mathfrak{J} \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\, r\cos\alpha}}.$$

$$\mathfrak{V} = 2\pi r^2 \mathfrak{J} \int_0^\pi \frac{\sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha}}.$$



Rys. 7.

Aby scałkować, założmy

$$\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha} = x,$$

skąd

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + a^2 - x^2}{2ar},$$

$$\sin\alpha \, d\alpha = -d(\cos\alpha) = \frac{x\,dx}{ar}.$$

A więc

$$\int_0^\pi \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\alpha}} = \int_{(0)}^{(\pi)} \frac{r^2+a^2-x^2}{2a^2r^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a^2r^2}\left[(r^2+a^2)\,x - \frac{x^3}{3}\right]_{(0)}^{(\pi)} =$$

$$= \frac{1}{2a^2r^2}\left[(r^2+a^2)(r^2+a^2-2ar\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(r^2+a^2-2ar\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}\right|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{2a^2r^2}\left[(r^2+a^2)\Big\{(a+r)-(a-r)\Big\} - \frac{1}{3}\Big\{(a+r)^3-(a-r)^3\Big\}\right] =$$

$$= \frac{2r}{3a^2}.$$

Otrzymamy więc

$$\mathfrak{V} = 2\pi r^2 \mathfrak{J}\cdot\frac{2r}{3a^2} = \frac{4\pi r^3}{3a^2}\cdot\frac{3\mathfrak{M}}{4\pi} = \frac{r^3\mathfrak{M}}{a^2}.$$

10. — Niechaj będzie magnes kulisty jednorodny, którego moment magnetyczny $\mathfrak{A} = 10000$ c. g. s., a promień $r = 5$ *cm*. Jak dużą jest różnica potencyałów magnetycznych na obu końcach średnicy, równoległej do kierunku namagnesowania? (Pole ziemskie pomijamy).

Natężenie magnesu jednorodnego z określenia

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Pole magnetyczne wewnątrz kuli jest stałe co do wielkości, kierunku i znaku. Jego natężenie $\mathfrak{H} = \frac{4\pi\mathfrak{J}}{3}$, jego kierunek jest równoległy do kierunku namagnesowania, a znak przeciwny do ostatniego [1]). Jeżeli więc $\mathfrak{V}_1$ wyraża potencyał magnetyczny przy wierzchołku bieguna północnego magnesu, $\mathfrak{V}_2$ zaś południowego, $\mathfrak{V}$ potencyał magnetyczny w jakimkolwiek punkcie wewnątrz, położonym w odległości x od płaszczyzny obojętnej (przytem wartości x uważane są za dodatnie w sferze bieguna południowego).

$$\mathfrak{H} = -\frac{d\mathfrak{V}}{dx}.$$

$$\int_{\mathfrak{V}_1}^{\mathfrak{V}_2} -d\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{H}\int_{-r}^{+r} dx = 2\mathfrak{H}r =$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{3}\pi\mathfrak{J} \cdot r = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\mathfrak{A}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot r = 2\frac{\mathfrak{A}}{r^2}.$$

Przy $\mathfrak{A} = 10000$ jednostkom c. g. s., i $r = 5$ *cm*, znajdziemy

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 = 2\frac{10000}{5^2} = 800 \text{ jednostkom c. g. s.}$$

---

11. — Obliczyć odległość biegunów magnesu kulistego jednorodnego, którego moment magnetyczny $\mathfrak{A} = 700$ jednostkom c. g. s., i wewnątrz którego indukcya magnetyczna $\mathfrak{B}$ osiąga 167,5 gausów.

---

[1]) Patrz zadanie № 8.

Niech $\mathfrak{J}$ będzie natężeniem magnetycznem, r zaś promieniem magnesu kulistego.

Mamy że

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}}{\frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Z drugiej strony wiemy, że indukcya magnetyczna mierzy się siłą, działającą na jednostkowy biegun, w szczelinie nieskończenie wązkiej, prostopadłej do kierunku namagnesowania. Mamy więc wobec działania rozmagnesowującego biegunów

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} - \frac{4}{3}\pi\mathfrak{J} = \frac{8}{3}\pi\mathfrak{J}.$$

Czyli

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,\mathfrak{A}}{4\pi\mathfrak{J}}} = \sqrt[3]{\frac{3\,\mathfrak{A}}{4\pi}\cdot\frac{8\pi}{3\,\mathfrak{B}}} = \sqrt[3]{\frac{2\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}}.$$

Lecz jeżeli $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}\,.\,\pi r^2$ oznacza całkowitą masę magnetyczną biegunów półkulistych, długość magnesu określi się wzorem

$$l = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}\,.\,\pi r^2} = \frac{4}{3}r = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}}.$$

Wstawiając $\mathfrak{A} = 700$ jednostkom c. g. s. i $\mathfrak{B} = 167{,}5$ gausom,

$$l = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2\,.\,700}{167{,}5}} = 2{,}7\ cm.$$

12. — Jednorodny magnes kulisty o promieniu równym 0,5 *dcm* może się wahać około średnicy, prostopadłej do swej osi magnetycznej. Utrzymuje go w równowadze sprężyna, której spółczynnik skręcania wynosi 3 gramcentymetry na radyan, i która daje się nastawiać około osi obrotu. Wiemy, iż trzeba skręcić sprężynę o 270^0, aby ustawić oś magnetyczną magnesu pod kątem prostym do płaszczyzny południka magnetycznego w miejscu, gdzie składowa pozioma pola ziemskiego posiada wartość 0,2 gausa. Wyliczyć, jaką jest indukcya magnetyczna magnesu?

Na magnes działają dwa równoważące się momenty: moment, skręcający sprężyny i moment, pochodzący od magnetyzmu ziemskiego.

Niechaj k będzie współczynnikiem skręcenia sprężyny, zaś δ kątem skręcenia. Moment wywierany przez sprężynę, jest $k\delta$.

Moment pola ziemskiego

$$2\,\mathcal{H}\int r\,d\mathfrak{M}$$

gdzie $\mathcal{H}$ oznacza składową poziomą pola ziemskiego, $d\mathfrak{M}$ element masy magnetycznej bieguna, zaś r odległość tego elementu od płaszczyzny obojętnej, leżącej w płaszczyźnie południka magnetycznego. Całka ta sumuje całą powierzchnię bieguna półkulistego.

Jeżeli zauważymy, że dla wszystkich mas $d\mathfrak{M}$, leżących na kole powstałem z przecięcia się kuli z płaszczyzną równoległą do płaszczyzny obojętnej, powierzchniowa gęstość magnetyczna σ jest stałą, i r ma tę samą wielkość, widzimy (rys. 8), że poprzednia całka daje się napisać

$$2\,\mathcal{H}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\alpha\,.\,\sigma\,.\,2\pi r\,.\,r\,d\alpha\,\sin\alpha\,.$$

Ponieważ $\sigma = \mathfrak{J}\cos\alpha$, gdzie $\mathfrak{J}$ natężeniem namagnesowania kuli, otrzymamy dla wartości momentu ziemskiego wzór

$$4\pi\,\mathcal{H}\,\mathfrak{J}\,r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha = 4\pi\,\mathcal{H}\,\mathfrak{J}\,r^3\left[-\frac{\cos^3\alpha}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,\mathcal{H}\,\mathfrak{J}\,r^3.$$

Z równania zaś

$$k\delta = \frac{4}{3}\pi\,\mathcal{H}\;r^3,$$

otrzymamy

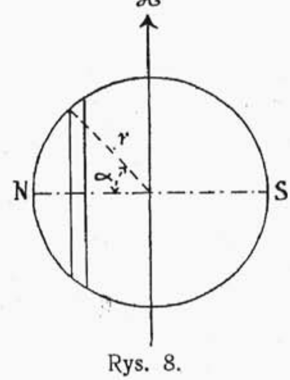
$$\mathfrak{J} = \frac{3}{4}\;\frac{k\delta}{\pi\,\mathcal{H}\,r^3}\,.$$

Wsta wiając wartości

$k = 3.981 = 2943$ *dyn cm*/radyan,

$\delta = \frac{3\pi}{2}$ radyana, $\mathcal{H} = 0{,}2$ gausa,

$r = 5$ *cm*,



Rys. 8.

znajdziemy

$$\mathfrak{J} = \frac{3 \,.\, 2943 \,.\, 3/2}{4 \,.\, 0{,}2 \,.\, 5^3} = 132{,}5 \text{ jednostkom c. g. s.}$$

Ponieważ indukcya magnetyczna $\mathfrak{B}$ magnesu wyraża się wzorem

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} - \frac{4}{3}\pi\mathfrak{J} = \frac{8}{3}\pi\mathfrak{J},$$

więc

$$\mathfrak{B} = \frac{8}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 132{,}5 = 1110 \text{ gausom.}$$

13. — Jakie jest natężenie jednostajnego pola magnetycznego, gdy wprowadzenie w nie kuli z miękkiego żelaza doprowadza ją do indukcyi magnetycznej równej 500 gausom, dla której przenikliwość żelaza wynosi 300?

Wprowadzona do pola magnetycznego o natężeniu $\mathfrak{H}$ kula otrzymuje natężenie namagnesowania $\mathfrak{J}$ pod wpływem złożonego działania tego pola i przeciwnej mu reakcyi biegunów półkulistych. Kula ta poddaje wszystkie swe punkty sile magnesującej

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{4}{3}\pi\mathfrak{J}.$$

Rozważając wszystkie siły działające w szczelinie nieskończenie wązkiej, prostopadłej do osi magnesu, na jednostkowy biegun, otrzymamy dla indukcyi magnetycznej wyrażenie

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}' + 4\pi\mathfrak{J} = \mathfrak{H} + \frac{8}{3}\pi\mathfrak{J}. \qquad (1)$$

Z drugiej strony, przenikliwość określa się wzorem

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}'} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H} - \frac{4}{3}\pi\mathfrak{J}}. \qquad (2)$$

Eliminując $\mathfrak{J}$ z wzorów (1) i (2), otrzymamy

$$\mathfrak{H} = \frac{\mu + 2}{3\mu}\mathfrak{B}.$$

Wstawiając $\mathfrak{B} = 500$ gausom, przy $\mu = 300$, otrzymamy, że

$$\mathfrak{H} = \frac{300 + 2}{3 \,.\, 300} 500 = 167{,}8 \text{ gausom.}$$

14 — Do jednostajnego pola magnetycznego o natężeniu takiem, iż na jednostkę c. g. s. masy magnetycznej wywiera siłę 0,01 *gr*, wprowadzamy kulę z miękkiego żelaza. Wiedząc, że indukcya magnetyczna wynosi $\mathfrak{B} = 28{,}8$ gausa, obliczyć przenikliwość μ żelaza, odpowiadającą tej indukcyi.

Niechaj $\mathfrak{H}$ będzie pierwotnym natężeniem pola magnetycznego, oraz $\mathfrak{J}$ natężeniem namagnesowania, osiągniętem przez kulę po jej wprowadzeniu do pola magnetycznego.

Możemy napisać, że

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{B}}{\frac{4}{3}\pi\mathfrak{J}},$$

lecz $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - \frac{4}{3}\pi\mathfrak{J} + 4\pi\mathfrak{J} = \mathfrak{H} + \frac{8}{3}\pi\mathfrak{J}$,

co nam daje $\frac{4}{3}\pi\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{2}$,

czyli

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H} - \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{2}} = \frac{2\,\mathfrak{B}}{3\,\mathfrak{H} - \mathfrak{B}}.$$

Wstawiając $\mathfrak{B} = 28{,}8$ gausa, i $\mathfrak{H} = 0{,}01 \,.\, 981 = 9{,}81$ gausa, otrzymamy

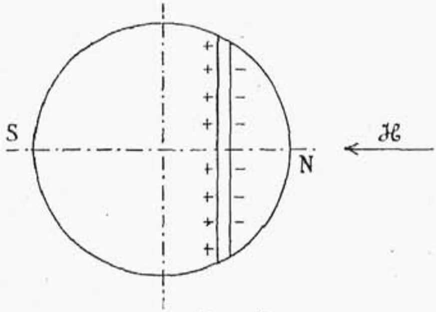
$$\mu = \frac{2 \,.\, 28{,}8}{3 \,.\, 9{,}81 - 28{,}8} = 91{,}4.$$

---

15. — Jaka jest indukcya magnetyczna $\mathfrak{B}$ w kuli bizmutowej, której przenikliwość $\mu = 0{,}9991$, umieszczonej w polu magnetycznem jednostajnem o natężeniu $\mathfrak{H} = 200$ gausom?

Mamy tu do czynienia z ciałem dyamagnetycznem, którego przenikliwość jest mniejszą od jedności, zachowanie zaś odwrotne np. niż żelaza. Pod wpływem pola cząstki biegunowe kuli ustawiają się według linii prostych, równoległych do kierunku pola, lecz zwróconych przeciwnie, w ten sposób, iż otrzymujemy dwa bieguny półkuliste, do których linie sił pola wchodzą przez biegun północny, wychodzą zaś na zewnątrz przez południowy (rys. 9).

Magnetyczne działanie biegunów na wnętrze kuli jest dla wszystkich punktów jednakowe co do wielkości kierunku i znaku. Jeżeli $\mathfrak{I}$ wyraża wartość natężenia magnetycznego kuli, siła rozmagnesowująca posiada wartość $\frac{4\pi\mathfrak{I}}{3}$, jej kierunek i znak zgadzają się z kierunkiem i znakiem pola pierwotnego $\mathfrak{H}$. Natężenie pola jednostajnego wypadkowego, którego działaniu podlega kula, będzie



Rys. 9.

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + \frac{4}{3}\pi\mathfrak{I}.$$

Indukcya magnetyczna w kuli, mierzona siłą działającą na jednostkę masy magnetycznej dodatniej, położonej wewnątrz szpary poprzecznej nieskończenie wązkiej, prostopadłej do osi magnesu, będzie

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}' - 4\pi\mathfrak{I} = \mathfrak{H} - \frac{8}{3}\pi\mathfrak{I}.$$

Lecz z określenia przenikliwości mamy

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}' = \mu\left(\mathfrak{H} + \frac{4}{3}\pi\mathfrak{I}\right).$$

Uwalniając się od $\mathfrak{I}$, z obydwuch tych równań otrzymamy

$$\mathfrak{B} = \frac{3\mu\,\mathfrak{H}}{\mu + 2}.$$

Indukcya ta posiada kierunek zgodny z kierunkiem pola, w które kula została wprowadzoną.

Wstawiając $\mu = 0{,}9991$ oraz $\mathfrak{H} = 200$ gausom, znajdziemy

$$\mathfrak{B} = \frac{3 \,.\, 0{,}9991 \,.\, 200}{0{,}9991 + 2} = 199{,}9 \text{ gausom}.$$