ROZDZIAŁ II

ELEKTROSTATYKA

16. — Jak wielką byłaby w tonach siła odpychania dwuch ładunków elektrycznych jednego znaku, z których każdy byłby równy 1 kulombowi, i znajdowałyby się we wzajemnej odległości jednego metra w przestrzeni, wypełnionej powietrzem?

Siła odpychająca F dwuch ładunków elektrycznych Q i Q' skoncentrowanych w punktach odległych o r, jest podaną przez prawo Coulomba

$$F = \frac{KQQ'}{r^2}.$$

Siła F wyraża się w dynach, gdy przyjmiemy zdolność elektryczną ośrodka dla powietrza równą (z założenia) jedności, $K = (3 \times 10^{10})^2$, i gdy wyrazimy ilości elektryczności w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych, a odległość w centymetrach.

Znajdziemy więc, przy $Q = Q' = 10^{-1}$ oraz $r = 100$,

$$F = \frac{3^2 \, . \, 10^{20} \, . \, 10^{-2}}{100^2} = 9 \, . \, 10^{14} \; dyn$$

t. j.

$$9 \, . \, 10^{14} \, . \, \frac{1}{981} = 9 \, . \, 18 \, . \, 10^{11} \text{ gramom,}$$

lub

918 000 tonom.

---

17. — Elektroskop posiada wewnątrz metalowej uziemionej zbroi dwa małe jednakowe wahadełka, każde utworzone z kulki rdzenia bzowego, zawieszonej na cienkiej, przewodzącej elektryczność, nitce. W ośrodku, wypełnionym gazem radyoaktywnym, wychylenie wahadełek zmniejsza się w ciągu 1 minuty o połowę, gdy ładunek elektryczny o potencyale 4500 wolt wychylał je w powietrzu o 60^0 w każdą stronę od pionowej, przechodzącej przez wspólny punkt zawieszenia. Obliczyć przybliżoną średnią wartość natężenia prądu wyładowującego, płynącego przez ośrodek radyoaktywny w ciągu rozpatrywanej minuty. Zakładamy, na skutek względnie wielkiej zbroi zewnętrznej elektroskopu, że pojemność jego jest niezależną od kąta wychylenia wahadełek i równą w bezwzględnych (c. g. s.) jednostkach elektrostatycznych jednemu centymetrowi.

Niechaj w jakimkolwiek momencie podczas opadania wahadełek, q oznacza ładunek a v potencyał jego. Te wielkości łączy wzór

$$q = Cv,$$

gdzie C oznacza pojemność elektroskopu rozważanego jako kondensator, ktorego zbrojami są układ ruchomy i uziemiona oprawa (potencyał $= 0$).

Średnie natężenie prądu, wywołującego wyładowanie z początkowej wartości ładunku Q_0 do końcowej Q_1 w ciągu czasu T jest równe

$$I = \frac{1}{T}(Q_0 - Q_1) = \frac{C}{T}(V_0 - V_1),$$

gdzie V_0 i V_1 oznaczają potencyały na początku i w końcu doświadczenia.

Aby wyznaczyć wartość V_1 z danych zadania, znajdźmy ogólną zależność między potencyałem v i wychyleniem kątowem α wahadełek względem pionowej.

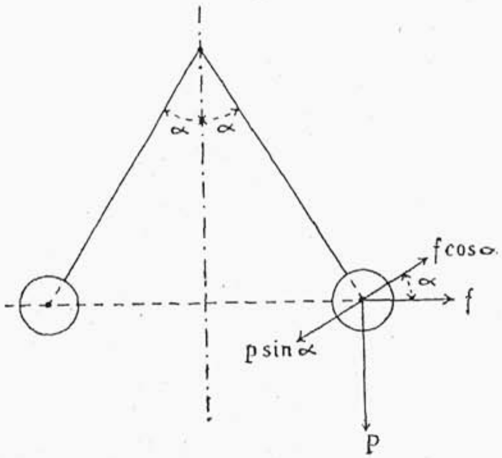
Przypuśćmy, że ładunek $q = Cv$ jest całkowicie umieszczony na kulkach z rdzenia bzowego. Przytem oprawa elektroskopu pozostaje bez działania elektrycznego na wnętrze tak, że wychylenie wahadełek jest rezultatem jedynie wzajemnego odpychania się kulek.

Przypiszmy ładunkom elektrycznym $q/2$ równomierne rozłożenie, t. j. stałą gęstość na powierzchniach kulek. Pozwoli nam to rozpatrywać działające na siebie ładunki, jako umieszczone całkowicie w punktach, stanowiących środki kulek.

Ponieważ środki te są odległe o l od punktu zawieszenia wahadełek, a ich wychylenie linijne wynosi $2l \sin \alpha$ (rys. 10), więc według prawa Coulomba siła odpychająca skierowana wzdłuż prostej je łączącej, wynosi

$$F = K \frac{(q/2)^2}{(2\, l \sin \alpha)^2} = K \frac{C^2\, v^2}{16\, l^2 \sin^2 \alpha}.$$

Każde z wahadełek jest pod wpływem momentu wychylającego $Fl \cos \alpha$, równoważonego przez moment, wytworzony przez siłę ciężkości, równy $Pl \sin \alpha$, gdzie P oznacza ciężar kulki, przytem ciężar nitek, jako mały, może być pominięty.



Rys. 10.

Z warunków równowagi mamy

$$K \frac{C^2\, v^2}{16\, l^2 \sin^2 \alpha}\, l \cos \alpha = Pl \sin \alpha,$$

równanie to da nam

$$v = \frac{4\,l}{C} \sqrt{\frac{P}{K}} \sin \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Widzimy więc, że potencyały kulek elektroskopu są proporcyonalne do funkcyi $\sin \alpha \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$. Oznaczając przez α_0 i α_1 wychylenia kątowe, odpowiadające potencyałom V_0 i V_1, otrzymamy

$$V_1 = \frac{\sin \alpha_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_1}}{\sin \alpha_0 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha_0}}\, V_0$$

a wyrażenie szukanego prądu średniego będzie

$$I=\frac{CV_0}{T}\left(1-\frac{\sin\alpha_1\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_1}}{\sin\alpha_0\sqrt{\operatorname{tg}\alpha_0}}\right).$$

Przy

$$C=1\,.\,\frac{10^9}{(3\times10^{10})^2}=\frac{1}{9\,.\,10^{11}}\ \text{farada},$$

$$V_0=4500\ \text{woltom};\ T=60\ \text{sek.};\ \alpha_0=60^0;\ \alpha_1=\frac{\alpha_0}{2}=30^0;$$

znajdziemy

$$I=\frac{4500}{9\,.\,10^{11}\,.\,60}\left(1-\frac{0{,}5\sqrt{0{,}578}}{0{,}866\sqrt{1{,}733}}\right)=0{,}0555\,.\,10^{-9}\ \text{amp.}$$

18. — O ile jednostek układu c. g. s. elektrostatycznego ładunek elektryczny Q podniósłby potencyał ziemi, uważanej jako kulę izolowaną, gdy w elektrolizie przenosi jeden gram jonu wodoru?

Między przyrostem ładunku elektrostatycznego Q i przyrostem potencyału V kuli o pojemności C istnieje związek $Q=CV$ lub $V=\frac{Q}{C}$.

Wiemy, że jeden gram jonu wodoru przenosi na katodę woltametru 96540 kulombów lub $96540\,.\,10^{-1}\,.\,3\times10^{10}$ jednostek c. g. s. elektrostatycznych ilości elektryczności.

Z drugiej strony w układzie jednostek c. g. s. elektrostatycznych, współczynnik K (w prawie Coulomba) jest równy jedności, a miarą pojemności przewodnika odosobnionego kulistego jest jego promień, wyrażony w centymetrach tak, iż dla kuli ziemskiej mamy w przybliżeniu

$$C=6{,}37\,.\,10^8.$$

Więc

$$V=\frac{96540\,.\,3\,.\,10^9}{6{,}37\,.\,10^8}=454000\ \text{jednostkom c. g. s. elektrostatycznym,}$$

czyli $454000\,.\,3\times10^{10}\,.\,10^{-8}=136\,.\,10^6$ woltom.

19. — Zbroje kondensatora kulistego o promieniach $r_1=50$ cm i $r_2=55$ cm, są doprowadzone do różnicy potencyałów równej 10 jednostkom w układzie c. g. s. elektrostatycznym. Wyznaczyć, w gramach na mikrokulomb, natężenie pola elektrycznego w punkcie znajdującym się na jednakowej odległości od obydwuch zbroi.

Naelektryzowana kula nie działając na punkty wewnętrzne, działa na punkty zewnętrzne tak, jakby ładunek jej był zebrany we środku (punkcie geometrycznym). Wyrażeniem natężenia pola szukanego jest wzór

$$H = K \frac{Q}{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2},$$

gdzie Q oznacza ładunek kondensatora.

Jeżeli przez C oznaczymy pojemność, a przez V różnicę potencyałów jego zbroi, to

$$Q = CV = \frac{r_1 r_2}{K(r_2 - r_1)} V,$$

a więc

$$H = K \frac{4}{(r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{r_1 r_2}{K(r_2 - r_1)} V = \frac{4 r_1 r_2 V}{(r_1 + r_2)^2 (r_2 - r_1)}.$$

Kładąc $r_1 = 50$ *cm*, i $r_2 = 55$ *cm*,

$V = 10 . 3 \times 10^{10} = 3 . 10^{11}$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym, otrzymamy

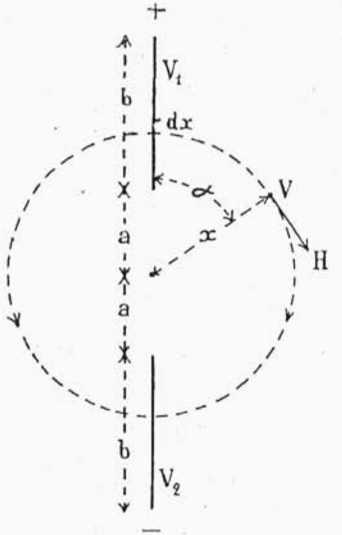
$$H = \frac{4 . 50 . 55 . 3 . 10^{11}}{105^2 . 5} = 6 . 10^{10} \text{ dyn}$$

na jednostkę ilości elektryczności w układzie c. g. s. elektromagnetycznym, czyli $\frac{6 . 10^{10}}{981 . 10 . 10^6} = 6{,}12$ gramów na mikrokulomb.

---

20. — Dwie kwadratowe cienkie blachy metalowe, o boku równym 3 decymetrom, są ustawione w jednej płaszczyźnie tak, iż sąsiednie ich krawędzie są do siebie równoległe i odległe o 100 *mm*. Współczynnik dyelektryczny ośrodka jest równy 2. Blachy te naładowano różnoimiennemi ilościami elektryczności równemi, każda 66 jednostkom c. g. s. elektrostatycznym. Wytwarzają one pole elektryczne, którego linie sił są kołami. Jaką jest różnica potencyałów tych blach, wyrażona w woltach?

Niechaj b (rys. 11) będzie długością boków rozpatrywanych blach metalowych, a odległością bliższych ich krawędzi od prostej symetryi równoległej do tych boków.



Rys. 11.

Na skutek symetryi, gęstość elektryczności na powierzchni blachy, w punktach jednakowo odległych od wyżej wymienionej prostej jest wielkością stałą; zaś linie sił pola magnetycznego wychodząc z obu stron blachy dodatniej idą w kierunku ujemnej, tworząc półkola leżące w płaszczyznach prostopadłych do blach, i mające swe środki na prostej symetryi.

Jeżeli $\pm\sigma$ oznacza gęstość rozłożenia elektryczności w odległości x od prostej symetryi, ładunek blachy dodatniej da się wyrazić całką

$$Q = \int_a^{a+b} \sigma b \, d x.$$

Aby znaleźć zależność między σ i x zauważmy, że w punkcie leżącym na linii sił o promieniu x, położonym w odległości kątowej α od blachy dodatniej, gdzie potencyał wynosi V, natężenie pola da się wyrazić

$$H = -\frac{d V}{x d \alpha},$$

tak, iż oznaczając przez $V_1 - V_2$ różnicę potencyałów blach,

$$-\int_{V_1}^{V_2} d V = H x \int_0^{\pi} d \alpha,$$

(oczywiście, że H jest wielkością stałą wzdłuż jednej linii sił), a zatem
$$V_1 - V_2 = \pi H x.$$

Stosując twierdzenie Gausa do rurki nieskończenie małej prostopadłej do blachy dodatniej i ograniczonej z obu jej stron powierzchniami ekwipotencyalnemi, sąsiadującemi z elementem ds blachy, można napisać

$$4\pi K \, . \, 2\sigma \, ds = 2 H \, ds$$

(gdyż z obydwuch stron blachy wychodzą linie sił).

Z ostatniego równania

$$H = 4\pi K \sigma.$$

mamy więc

$$V_1 - V_2 = 4\pi^2 K \sigma x$$

lub

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi^2 K x}.$$

Wyrażenie ładunku przyjmie więc postać

$$Q = \frac{2(V_1 - V_2) b}{4\pi^2 K} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{(V_1 - V_2) b}{2\pi^2 K} \log_e \frac{a+b}{a};$$

czyli

$$V_1 - V_2 = \frac{2\pi^2 K Q}{b \log_e \frac{a+b}{a}}.$$

Kładąc

$$K = \frac{1}{2} (3 \times 10^{10})^2,$$

$$Q = \frac{66}{3 \times 10^{10}} = 22 \, . \, 10^{-10} \text{ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym},$$

$$a = 5 \, cm, \qquad b = 30 \, cm,$$

znajdziemy wartość szukanej różnicy potencyałów

$$V_1 - V_2 = \frac{2 \, . \, 3{,}14^2 \, . \, \frac{1}{2} \, . \, 3^2 \, . \, 10^{20} \, . \, 22 \, . \, 10^{-10}}{30 \, (\log_e 35 - \log_e 5)} =$$

$$= 33{,}3 \, . \, 10^{10} \text{ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym},$$

lub

$$33{,}3 \, . \, 10^{10} \, . \, 10^{-8} = 3330 \text{ woltom}.$$

---

21. — Zbroje butelki lejdeńskiej, której szkło posiada 1 *mm* grubości, są naładowane tak, iż różnica ich potencyałów wynosi 1000 woltów. Wyznaczyć ciśnienie w centygramach na cm^2 jakiemu podlega dyelektryk.

Ciśnienie elektryczne wyraża się wzorem

$$p = 2\pi K \sigma^2.$$

Jeżeli Q, C, V i s wyrażają odpowiednio ładunek i pojemność elektrostatyczne butelki, różnicę potencyałów obydwuch zbroi oraz ich powierzchnię, przy odległości d, gęstość powierzchniowego rozłożenia ładunku wyrazi się wzorem

$$\sigma = \frac{Q}{s} = \frac{CV}{s} = \frac{s}{4\pi K d} \cdot \frac{V}{s} = \frac{V}{4\pi K d}.$$

Z obydwuch tych równań

$$p = 2\pi K \frac{V^2}{16\pi^2 K^2 d^2} = \frac{V^2}{8\pi K d^2}.$$

Kładąc w to wyrażenie

$V = 1000 \,.\, 10^8$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym,

$K = \frac{1}{6}(3 \times 10^{10})^2 = 1{,}5 \,.\, 10^{20}$ (nadając dyelektrykowi współczynnik równy 6); $d = 0{,}1\ cm$;

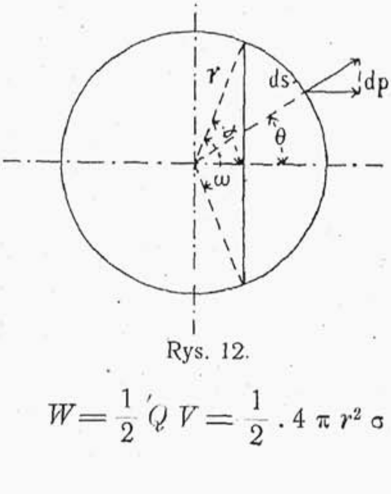
otrzymamy

$$p = \frac{\overline{1000}^2 \,.\, 10^{16}}{8 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{20} \,.\, \overline{0{,}1}^2} = 265\ dyn \text{ na } cm^2,$$

lub

$$265 \cdot \frac{1}{981} \,.\, 10^2 = 27\ cgr/cm^2.$$

22. — Kula metalowa, jednostajnie naelektryzowana, jest rozcięta w ten sposób, iż koło przecięcia widać z jej środka pod kątem $\omega = 0{,}268\,\pi$ (rys. 12). Kula ta posiada energię potencyalną W równoważną 50 mikrokaloryom. Wyliczyć jej promień r jeżeli obie części odpychają się z siłą $F = 30\ mgr$.



Rys. 12.

Niech σ będzie powierzchniową gęstością elektryczności kuli, Q całkowitą ilością elektryczności ładunku, V jego potencyałem,

$$W = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \,.\, 4\pi r^2 \sigma \,.\, K \frac{4\pi r^2 \sigma}{r} = 8\pi^2 K r^3 \sigma^2.$$

Wypadkowa F ciśnień elektrostatycznych, określająca wzajemne odpychanie odcinków kulistych, jest skierowaną wzdłuż średnicy prostopadłej do płaszczyzny podziału kuli.

Jeżeli θ jest kątem, jaki tworzy ta średnica ze skierowanem wzdłuż promienia ciśnieniem elektrostatycznem $2\pi K\sigma^2 ds$, wywieranem na elementarny ładunek σds, pokrywający element ds jednego z odcinków, otrzymamy

$$dF = 2\pi K\sigma^2 ds \cos\theta.$$

Lecz $ds \cos\theta$ jest rzutem elementu ds na płaszczyznę podziału kuli, której pole kołowe wynosi $\pi r^2 \sin^2\alpha$, gdzie α jest kątem określonym wzorem

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\alpha).$$

Z tych równań mamy

$$F = 2\pi K\sigma^2 \int ds \cos\theta = 2\pi^2 K r^2 \sigma^2 \sin^2\alpha.$$

Ze wzoru

$$W = 8\pi^2 K r^3 \frac{F}{2\pi^2 K r^2 \sin^2\alpha} = 4r\frac{F}{\sin^2\alpha}$$

znajdziemy

$$r = \frac{W}{4F}\sin^2\alpha.$$

Kładąc

$$W = 50 \,.\, 10^{-6} \,.\, 0{,}425 \,.\, 10^5 \,.\, 981 = 2085\ erg$$

$$F = 30 \,.\, 10^{-3} \,.\, 981 = 29{,}45\ dyn$$

$$\omega = 0{,}368\,\pi,$$

otrzymamy

$$\cos\alpha = 1 - \frac{0{,}268\,\pi}{2\pi} = 0{,}866,$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \overline{0{,}866}^2 = 0{,}25,$$

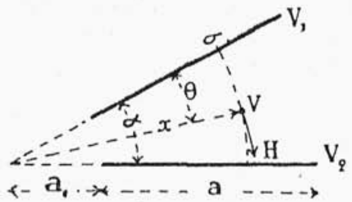
ostatecznie

$$r = \frac{2085 \,.\, 0{,}25}{4 \,.\, 29{,}45} = 4{,}43\ cm.$$

23.—Dwie kwadratowe zbroje kondensatora o bokach $a = 50$ cm, leżą w płaszczyznach, których kąt nachylenia $\alpha = 22{,}5^0$ w ten sposób, że prosta przecięcia się tych płaszczyzn jest równoległą do bliższych krawędzi zbroi i od nich odległą o 10 cm. Zbroje są doprowadzone do różnicy potencyałów $V_1 - V_2 = 5000$ wolt.

Jak wielkim będzie moment sił, liczony względem prostej przecięcia się naszych płaszczyzn, usiłujący zbliżyć do siebie zbroje, w założeniu, że kondensator pogrążony jest w nafcie, której współczynnik dyelektryczny jest równy 2, i że powierzchnie ekwipotencyalne zawarte między zbrojami są płaszczyznami, przechodzącemi przez prostą przecięcia się płaszczyzn, w których leżą zbroje?

Z własności powierzchni ekwipotencyalnych i z kształtu linii sił, które są łukami, o środkach leżących na krawędzi kąta dwuściennego (utworzonego przez przecięcie się płaszczyzn, w których leżą zbroje), leżącemi w płaszczyznach do niej prostopadłych, wynika, że w odległości x od krawędzi (rys. 13) natężenie pola elektrostatycznego jest stałe, i że gęstość σ rozmieszczenia powierzchniowego ładunku na zbrojach zależy tylko od wielkości x.



Rys. 13.

Na elementarną powierzchnię zbroi $a\,dx$ działa siła

$$2\pi K \sigma^2 a\,dx,$$

której moment względem krawędzi wyżej wspomnianego kąta dwuściennego wynosi

$$dc = 2\pi K \sigma^2 a\,x\,dx.$$

Oznaczmy przez H natężenie pola, zaś przez V potencyał w jakimkolwiek punkcie położonym między zbrojami, przez x jego odległość od krawędzi kąta dwuściennego, przez θ kąt, jaki tworzy ta odległość ze zbroją o potencyale wyższym V_1. Możemy napisać

$$H = -\frac{dV}{x\,d\theta}$$

oraz
$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2 = H x \int_0^{\alpha} d\theta = H x \alpha.$$

Jak nas uczy twierdzenie Gaussa, na powierzchni, zawierającej element zbroi, a od strony pola utworzonej przez rurkę sił o przekroju elementarnym, ograniczoną przez pole, które ta rurka wycina w nieskończenie blizkiej powierzchni ekwipotencyalnej,

$$H = 4\pi K \sigma,$$

z ostatnich dwuch wzorów

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi K x \alpha}.$$

Czyli

$$dc = 2\pi K \frac{(V_1 - V_2)^2}{16\pi^2 K^2 x^2 \alpha^2} \alpha x \, dx = \frac{(V_1 - V_2)^2 a}{8\pi K \alpha^2} \frac{dx}{x}.$$

Całkowity moment szukany

$$c = \frac{(V_1 - V_2)^2 a}{8\pi K \alpha^2} \int_{a_1}^{a_1+a} \frac{dx}{x} = \frac{(V_1 - V_2)^2 a}{8\pi K \alpha^2} \log_e \frac{a_1 + a}{a_1}.$$

Kładąc

$V_1 - V_2 = 5000 \,.\, 10^8$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym,

$$\alpha = \frac{22{,}5}{360} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{8} \text{ radyana},$$

$$a_1 = 10 \; cm, \qquad a = 50 \; cm,$$

dla nafty

$$K = \frac{(3 \times 10^{10})^2}{2},$$

ostatecznie

$$c = \frac{5000^2 \,.\, 10^{16} \,.\, 50}{8 \,.\, 3{,}14 \,.\, \frac{3^2 \,.\, 10^{20}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{64}} \log_e \frac{10 + 50}{10} = 12\,870 \; dyn\text{-}cm,$$

czyli

$$\frac{12870}{981} = 13{,}2 \; gr\text{-}cm.$$

24. — Mamy dwa stożki zrobione z blachy metalowej o wspólnym wierzchołku, których osie tworzy jedna prosta (rys. 14). Kąt między tą prostą i tworzącą jednego stożka wynosi $\alpha_1 = 44^0$, zaś drugiego $\alpha_2 = 78^0$; przestrzeń między stożkami wypełniono parafiną. Z całości wycinamy część, zawartą między powierzchniami kulistemi o promieniach $r_1 = 1{,}5$ *dcm* i $r_2 = 6{,}5$ *dcm*, ze środkami, leżącymi w wierzchołkach stożków. Jaką jest wielkość ładunku elektrycznego, w mikrokulombach, w kondensatorze w ten sposób utworzonym, jeżeli jego zbrojom nadamy różnicę potencyałów $V_1 - V_2 = 3$ jednostkom c. g. s. elektrostatycznym? Przyjmujemy, że współczynnik dyelektryczny parafiny ma wartość 2.