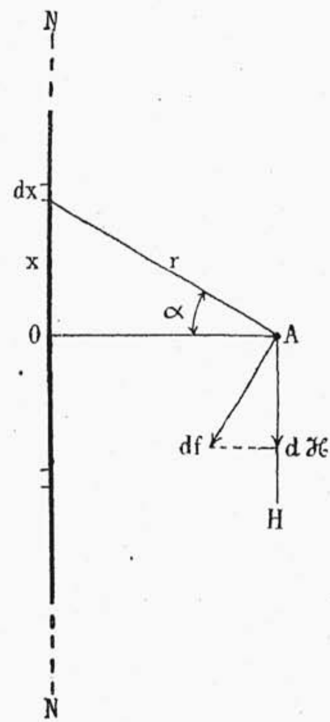
ROZDZIAŁ IV

ELEKTROMAGNETYZM

48. — Jakie są kierunek i natężenie pola magnetycznego, wywołanego przez prąd elektryczny, płynący prostolinijnie płaszczyzną nieograniczoną, przy natężeniu 3 amperów na metr szerokości?

Prosta *NN* (rys. 32) wyobraża przecięcie się płaszczyzny, którą płynie prąd elektryczny z płaszczyzną prostopadłą do kierunku tego prądu, skierowanego za płaszczyznę rysunku. Punkt *A* leży na płaszczyźnie przecinającej.



Rys. 32.

W odległości x od spodka prostopadłej *AO*, spuszczonej na prostą *NN*, weźmy element prądu płynącego prostolinijnie, o nieskończenie wielkiej długości i natężeniu idx, gdzie i oznacza natężenie, odpowiadające jednostce szerokości płaszczyzny z prądem. (Znaczenia r oraz α widać z rysunku). Prąd idx działa w punkcie *A* na jednostkowy biegun magnetyczny, według prawa Biot i Savarta, z siłą

$$dF = \frac{2idx}{r},$$

tworzącą kąt α z prostą AH równoległą do NN.

Ponieważ elementarny prąd, położony w tej samej odległości z drugiej strony punktu O, jako równy wywiera działanie, którego składowa prostopadła do AH jest równą co do wielkości, lecz ze znakiem przeciwnym, do działania prądu rozważanego, wnosimy, że szukane pole magnetyczne jest równoległe do NN. Aby go otrzymać, należy zsumować składowe wzdłuż AH, sił takich, jak dF.

Gdy oznaczymy przez $\mathcal{H}$ natężenie pola

$$d\mathcal{H} = dF.\cos\alpha = \frac{2idx}{r}\cos\alpha = 2id\alpha,$$

gdyż $$dx\cos\alpha = rd\alpha.$$

W następstwie

$$\mathcal{H} = 2i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = 2\pi i$$

wielkość ta nie zależy od położenia punktu A.

Widzimy więc, że pole magnetyczne wywołane przez płaszczyznę prądu jest jednostajne, równoległe do tej płaszczyzny i prostopadłe do kierunku prądu; posiada kierunki przeciwne z obydwuch stron płaszczyzny.

Podstawiając $i = 3.10^{-1}/10^2$ jednostkom c. g. s. eletromagnetycznym natężenia prądu na 1 cm długości.

$$\mathcal{H} = 2.3{,}14.3.10^{-3} = 0{,}0188 \text{ gausa.}$$

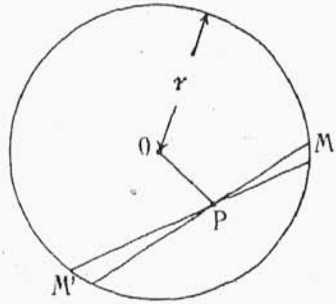
49. — Jakie jest natężenie pola magnetycznego w odległości 3 dcm od osi rury cylindrycznej nieograniczonej długości, której cienkie ścianki przewodzą wzdłuż rury prąd elektryczny, równomiernie rozłożony, o natężeniu 300 amperów?

Mamy dwa wypadki: odległość wskazana dotyczy punktu położonego wewnątrz, lub zewnątrz rury.

Rozważmy wpierw wypadek, w którym OP jest mniejsze niż promień r, koła utworzonego przez przekrój prosty rury (rys. 33).

Oznaczmy przez I natężenie prądu, przechodzącego równomiernie całym przekrojem; dl i dl' elementy obwodu w M i M', zawarte między dwoma prostemi przecinającemi się w punkcie P pod kątem nieskończenie małym. Prądy prostoliniowe, o natężeniach

$$I \frac{dl}{2\pi r} \quad \text{oraz} \quad I \frac{dl'}{2\pi r},$$



Rys. 33.

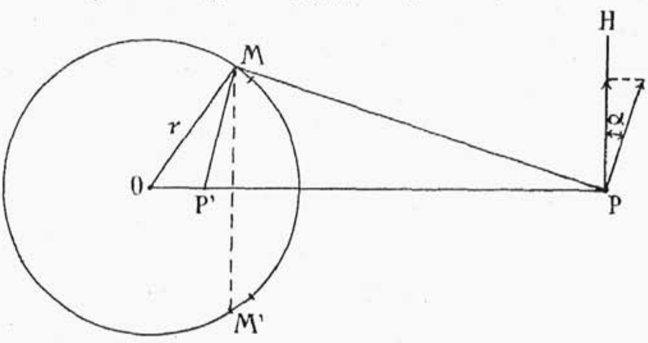
odpowiadające tym elementom, działają w P na jednostkowy biegun magnetyczny z siłami

$$2I \frac{dl}{2\pi r} \cdot \frac{1}{MP} = \frac{I\,dl}{\pi r . MP} \quad \text{oraz} \quad \frac{I\,dl'}{\pi r . M'P}.$$

Siły te są jednakowej wielkości, gdyż jak widać z rysunku, $\frac{dl}{MP} = \frac{dl'}{M'P}$ (elementy dl i dl' jednakowo nachylone do cięciwy MM', są długości proporcyonalnej do odległości od P, prostopadłe do MM' w płaszczyźnie rysunku, i kierunków przeciwnych). Obydwie te siły równoważą się.

Cały obwód może być podzielony na pary elementów takich jak dl i dl', z czego wynika, że pole magnetyczne wewnątrz rury, przewodzącej prąd, jest równe zeru.

Rozważmy teraz wypadek, gdy OP jest większe od r (rys. 34).



Rys. 34.

Siła $\frac{I\,dl}{\pi r . MP}$, wywołana przez prąd nieograniczonej długości, odpowiadający elementowi dl obwodu, jest prostopadłą do prostej MP, która łączy go z jednostkowym biegunem magnetycznym i stąd tworzy z kierunkiem PH, prostopadłym do OP, kąt α równy kątowi MPO. Ponieważ elementowi symetrycznemu do poprzedniego względem osi OP, odpowiada jednakowa wielkość, tworząca z PH ten sam kąt, lecz z przeciwległej strony, działanie wypadkowe całkowitego prądu będzie skierowane wzdłuż PH, a jego natężenie wyrazi się całką

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi r} \frac{dl}{MP} \cos \alpha.$$

Aby ułatwić całkowanie, weźmy punkt P' w ten sposób, aby $OP \, . \, OP' = r^2$. Z trójkątów MOP i $P'OM$ (podobnych, gdyż mają kąt wspólny zawarty między bokami proporcyonalnymi) otrzymamy zależność

$$\frac{MP}{P'M} = \frac{OP}{r},$$

która pozwoli napisać wyrażenie na $\mathcal{H}$ w postaci

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\pi \, . \, OP} \int_0^{2\pi r} \frac{dl}{P'M} \cos \alpha.$$

Lecz kąt $P'MO$ jest równy kątowi MPO. Zaś $\frac{dl \cos \alpha}{P'M}$ jest kątem $d\theta$, pod którym element dl widać z punktu P'. Możemy więc napisać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\pi \, . \, OP} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2I}{OP}.$$

Skąd wniosek, że we wszystkich punktach zewnętrznych natężenie pola magnetycznego jest takie, jak gdyby prąd zamiast rurą płynął wzdłuż jej osi.

Dla prądu $I = 300 \, . \, 10^{-1}$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym i dla odległości $OP = 30$ *cm*, otrzymamy

$$\mathcal{H} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathcal{H} = \frac{2.300.10^{-1}}{30} = 2 \text{ gausom,}$$

zależnie od tego, czy punkt P leży wewnątrz lub zewnątrz rury.

50. — Jakie jest natężenie prądu I (w amperach) płynącego bardzo długim przewodnikiem pionowym, jeżeli w celu otrzymania 45° odchylenia na małej busoli, zbliżanej do przewodnika a umieszczonej w płaszczyźnie południka magnetycznego, zawierającego w sobie ten przewodnik, należy ją zatrzymać w odległości 1 metra od prądu?

Igła busoli znajduje się w równowadze, pod wpływem pola magnetycznego wywołanego przez prąd i składowej poziomej $\mathcal{H}$ pola ziemskiego, tworząc kąt 45° z południkiem.

Oznaczmy przez L odległość prądu od środka igły, przez l i m długość i masę biegunową tejże (rys. 35).

Z powodu małych wymiarów igły, można przyjąć jej moment odchylający jako równy

$$\frac{2I}{L} ml \cos 45^0.$$

Moment spowodowany przez magnetyzm ziemski, wynosi

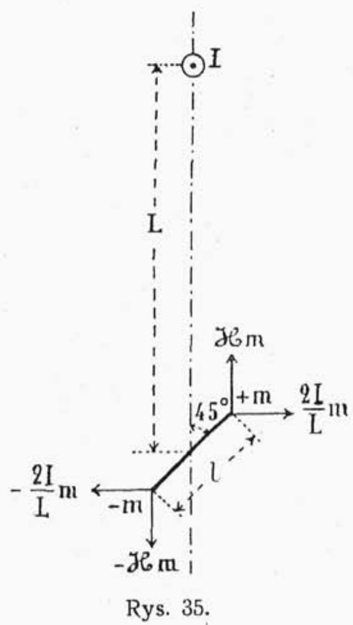
$$\mathcal{H} ml \sin 45^0.$$

Mamy więc równanie

$$\frac{2I}{L} ml \cos 45^0 = \mathcal{H} ml \sin 45^0,$$

z którego

$$I = \frac{\mathcal{H} L}{2} \operatorname{tg} 45^0.$$



Rys. 35.

$\mathcal{H}$ jest w przybliżeniu równe 0,2 jednostkom c. g. s., znajdziemy więc

$$I = \frac{0{,}2\,L}{2} = 0{,}1\,L \text{ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym,}$$

czyli L amperom.

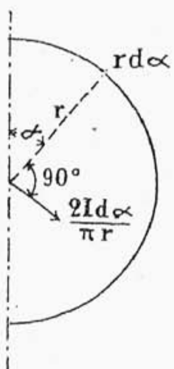
Natężenie więc prądu w amperach, wyrazi się tą samą liczbą co odległość busoli od prądu, mierzona w centymetrach.

W naszem zadaniu $I = 100$ amp.

51. — Igłę namagnesowaną, zawieszoną w swoim środku ciężkości, umieszczono na osi pionowej przewodnika nieograniczenie długiego, utworzonego z cienkiej blachy zgiętej w kształcie połowy walca o promieniu 2 *dcm*, którego brzegi leżą w płaszczyźnie południka magnetycznego, i którego wypukłość jest zwróconą na zachód. Gdy puścić z dołu do góry prąd o natężeniu 31,4 amp., igła przybiera położenie pionowe. Wyznaczyć składową poziomą pola ziemskiego w miejscu, w którem było zrobione powyższe doświadczenie.

Znajdźmy kierunek i natężenie pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd, na osi przewodnika przedstawionego w przekroju na rys. 36.

Oznaczmy przez I natężenie prądu, przez r promień walca.



Rys. 36.

Rozpatrzmy w blasze, stanowiącej ów przewodnik element, idący wzdłuż tworzącej, określonej kątem α, o szerokości $r\,d\alpha$, przez który przepływa część całkowitego prądu równa $I.r.d\alpha/\pi r$, czyli $I d\alpha/\pi$.

Element ten sam wywołuje na osi cylindra pole o natężeniu

$$\frac{2 I d\alpha}{\pi r}$$

prostopadłe do płaszczyzny, zawierającej rozpatrywany element i oś.

Ponieważ element symetryczny do poprzedniego w stosunku do płaszczyzny symetryi, przechodzącej przez oś przewodnika, daje pole tej samej wielkości i nachylone względem płaszczyzny brzegów cylindra pod tym samym kątem, lecz w przeciwną stronę, wnioskujemy, że pole wypadkowe wszystkich elementów tworzących nasz przewodnik jest prostopadłe do osi i leży w płaszczyźnie brzegów półcylindra, a jego natężenie wyznaczy całka

$$\int_0^\pi \frac{2Id\alpha}{\pi r} \sin\alpha = \frac{2I}{\pi r}\Big[-\cos\alpha\Big]_0^\pi = \frac{4I}{\pi r}.$$

Ponieważ przewodnik jest umieszczony pionowo w ten sposób, że brzegi jego leżą w płaszczyźnie południka magnetycznego, z wypukłą stroną skierowaną na zachód, więc linie sił, wywołane przez prąd idący z dołu do góry, są we wszystkich punktach osi poziome i skierowane na południe. Jeżeli więc igła magnesowa, wolna w ruchach około swego środka ciężkości, leżącego na wyżej wspominanej osi, przybiera położenie pionowe, dowodzi że moment sił składowej pionowej jest równy zeru, a składowa pozioma $\mathcal{H}$ pola ziemskiego powinna być równą natężeniu pola wywołanego przez prąd

$$\mathcal{H} = \frac{4I}{\pi r}.$$

Kładąc: $I = 31{,}4 \,.\, 10^{-1}$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym, $r = 20$ *cm*, otrzymamy

$$\mathcal{H} = \frac{4 \,.\, 31{,}4 \,.\, 10^{-1}}{3{,}14 \,.\, 20} = 0{,}2 \text{ gausa}.$$

52. — Przez zwojnicę z rdzeniem żelaznym o ilości zwojów $n' = 300$, o powierzchni $s' = 150$ mm^2 przepływa prąd o natężeniu $I' = 0{,}1$ amp. Umieszczono ją we wnętrzu innej bardzo długiej zwojnicy cylindrycznej w ten sposób, że osie obydwuch tworzą ze sobą kąt równy 45^0. Zwojnica długa posiada na metr bieżący $n_1 = 400$ zwojom, przez które przebiega prąd o natężeniu $I = 10$ amp. Wyznaczyć w bezwzględnych jednostkach moment pary działającej na zwojnicę wewnętrzną, pomijając nieznaczny wpływ pola ziemskiego.

Zwojnica z żelaznym środkiem może być rozpatrywaną jak magnes jednorodny o masach biegunowych równych

$$I' \frac{n'}{l'} s'.$$

Jest on umieszczony w polu magnetycznem prawie jednostajnem o natężeniu $4\pi n_1 I$.

Na każdy z biegunów działa więc siła

$$4\pi n_1 I \frac{I' n' s'}{l'}.$$

Obydwie siły równe, równoległe, lecz co do kierunku przeciwne, tworzą parę sił o długości ramienia $l' \sin 45^0$, moment więc

$$4\pi n_1 I \frac{I' n' s'}{l'} l' \sin 45^0 = 4\pi n_1 n' I I' s' \sin 45^0.$$

Wstawiając

$$n_1 = \frac{400}{10^2} = 4 \text{ zwojom na } cm \text{ bieżący},$$

$$n' = 300 \text{ zwojom},$$

$I = 10 \,.\, 10^{-1} = 1$ jednostce c. g. s. elektromagnetycznej,

$I' = 0{,}1 \,.\, 10^{-1} = 0{,}01$ jednostki c. g. s. elektromagnetycznej,

$s' = 1{,}5\ cm^2$,

znajdziemy

$$4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 4 \,.\, 300 \,.\, 1 \,.\, 0{,}01 \,.\, 1{,}5 \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}} = 160\ dyn.\ cm.$$

---

53. — Jaki jest kierunek i wielkość (w gramach) działania elektrodynamicznego, występującego między prądem obwodu kolistego, który wzbudza w swoim środku potencyał magnetyczny, równy 314 jednostkom c. g. s. i prądem prostoliniowym nieograniczonej długości o natężeniu 1000 amp., przechodzącym przez środek prądu kolistego w tej samej co i on płaszczyźnie?

Ponieważ potencyał magnetyczny prądu kołowego jest równy we środku 314 jednostkom c. g. s., skąd obwód jest widoczny pod stałym kątem 2π, natężenie i tego prądu wynosi $314/2\pi = 50$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym.

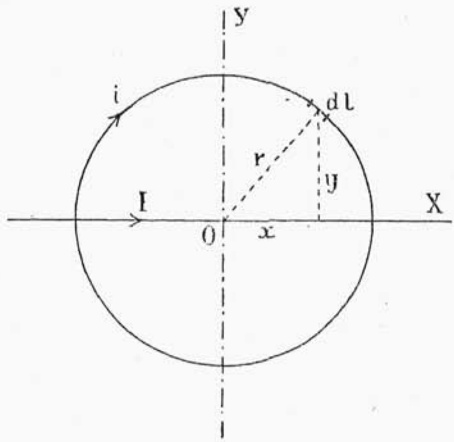
Niech $I = 1000 \,.\, 10^{-1} = 100$ jednostkom c. g. s. elektromagnetycznym będzie natężeniem prądu prostoliniowego, wywołującego pole magnetyczne, którego natężenie w odległości y jest $2I/y$ i którego linie sił są kołami, leżącemi w płaszczyznach prostopadłych do prądu, i mającemi na nim swe środki.

Według prawa Laplace'a, na element dl (obwodu kołowego), mający za współrzędne x i y (rys. 37), będący w polu magnetycznem prądu prostoliniowego, działa siła

$$dF = i\frac{2I}{y}\,dl\sin 90^0 = 2iI\frac{dl}{y},$$

której kierunek przechodzi przez środek zwoju 0.

Siły elementarne dF, działające na tę połowę obwodu kolistego, w którym prąd i płynie w stronę prądu I, działają w kierunku środka, działające zaś w drugiej połowie mają kierunek przeciwny. Jeżeli rozważymy siły dF, odpowiadające dwum elementom dl tej samej połowy obwodu, jednakowo odległe od prądu prostoliniowego, to zobaczymy, że składowe równoległe do niego znoszą się. Działanie wypadkowe prądu prostoliniowego na kolisty, sprowadza się więc do siły prostopadłej do pierwszego, a leżącej w płaszczyźnie drugiego, skierowanej na dół, o ile prądy mają kierunki wskazane na rysunku. Siła ta jest równą sumie wszystkich składowych $dFy/\sqrt{x^2+y^2}$, prostopadłych do prądu prostoliniowego. Oznaczając przez r promień prądu kolistego (dla wszystkich punktów którego $x^2+y^2=r^2$), otrzymamy jako wyrażenie szukanej siły



Rys. 37.

$$\int_0^{2\pi r} 2iI\frac{dl}{y}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2iI}{r}\int_0^{2\pi r} dl = 4\pi\, iI.$$

Wstawiając dane naszego zadania

$$4\pi iI = 4\,.\,3{,}14\,.\,50\,.\,100 = 62800\ dyn,$$

czyli

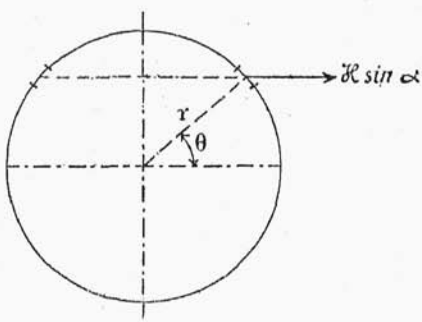
$$\frac{62800}{981} = 64\ gr.$$

54. — Zwojnica galwanometru w kształcie koła, posiadająca $n = 100$ zwojom, i średnią powierzchnią $S = 10\ cm^2$, może się obracać około swej średnicy pionowej w jednostajnem polu magnetycznem o natężeniu $\mathcal{H} = 5$ gausom. Jaki jest moment pary sił działania elektromagnetycznego na zwojnicę, wyrażony w miligram. centymetrach, jeżeli natężenie prądu, przechodzącego przez zwojnicę wynosi 0,01 amp., i gdy prostopadła do jej płaszczyzny tworzy z kierunkiem pola kąt równy 45^0?

Aby ułatwić rozwiązanie zadania, rozłóżmy pole $\mathcal{H}$ na trzy składowe prostopadłe, i określmy wpływ każdej z nich oddzielnie.

Jedna ze składowych niech będzie prostopadłą do płaszczyzny zwojnicy. Siła elektromagnetyczna, działająca na element prądu w polu magnetycznem, jest prostopadłą do płaszczyzny, określonej tym elementem i linią sił którą przecina, i jest skierowaną w lewą stronę od obserwatora płynącego z prądem (prawo Ampera). Składowa ta poddaje zwojnicę działaniu sił wzdłuż promieni, są więc w równowadze.

Druga ze składowych niech leży w płaszczyźnie zwojnicy prostopadle do osi obrotu. Ponieważ jej natężenie wynosi $\mathcal{H} \sin \alpha$, i według prawa Laplace'a, działa na element zwoju $r d\theta$ (rys. 38)



Rys. 38.

położony w jednakowej odległości $r \cos \theta$ z jednej i drugiej strony osi, siłami jednakowej wielkości

$$dF = i\mathcal{H} \sin \alpha \, . \, r\, d\theta \, . \cos \theta,$$

prostopadłemi do zwojnicy, o kierunkach przeciwnych. Siły te tworzą moment elementarny

$$dc = dF \, . \, 2r \cos \theta = 2 i \mathcal{H} r^2 \sin \alpha \cos^2 \theta \, d\theta$$

dąży on do obrócenia zwojnicy dokoła jej średnicy pionowej. Całkowity moment

$$C = 2ni\mathcal{H}r^2 \sin\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 2ni\mathcal{H}r^2 \sin\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \pi ni\mathcal{H}r^2 \sin\alpha = \mathcal{H}Sni \sin\alpha.$$

Trzecia składowa, która powinna być skierowaną wzdłuż osi obrotu zwojnicy, jest równą zeru. Wpływ więc kierujący pola wypadkowego sprowadza się do momentu

$$C = \mathcal{H}Sni \sin\alpha$$

Kładąc

$$\mathcal{H} = 5 \text{ gausom}; \quad S = 10\ cm^2; \quad n = 100;$$

$$i = 0{,}01 \,.\, 10^{-1} = 0{,}001 \text{ jednostki c. g. s. elektromagnetycznej};$$

$$\sin\alpha = \sin 45^0 = 0{,}707,$$

otrzymamy

$$C = 5 \,.\, 10 \,.\, 100 \,.\, 0{,}001 \,.\, 0{,}707 = 3{,}53\ dyn.\ cm,$$

lub

$$\frac{3{,}53 \,.\, 10^3}{981} = 3{,}6\ mgr.\ cm.$$

---

55. — W jednostajnem polu magnetycznem, o natężeniu $\mathcal{H} = 100$ gausom, obraca się około osi prostopadłej do linii sił zwój w kształcie koła, ograniczający powierzchnię $S = 200\ cm^2$. Przebiega go prąd zmienny, którego natężenie zmienia się w zależności od położenia zwoju jak rzędne sinusoidy, między wartościami największemi $I_0 = 10$ amp., lecz o kierunkach przeciwnych. Prąd przechodzi przez zero, każdorazowo, gdy płaszczyzna zwoju minęła o kąt $\varphi = 30^0$ położenie prostopadłe do linii sił, w którym przenikają one zwój ze strony północnej prądu. Jakie