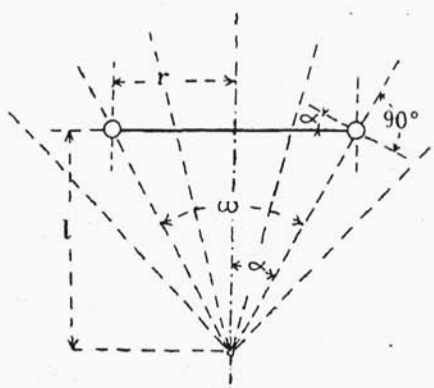
ROZDZIAŁ VI

PRĄD ZMIENNY

77. — Okrągły zwój umieszczono poziomo, tak iż jego środek leży na przedłużeniu osi pionowej eletromagnesu prostego, przez którego zwoje przepływa prąd zmienny o $f = 100$ okresom na sekundę. W przestrzeni objętej przez uzwojenie, potok magnetyczny elektromagnesu ma kierunek taki, jak gdyby linie sił promieniowały równomiernie z punktu leżącego na osi i odległego o $l = 6\ cm$ od środka zwoju (rys. 54), i zmienia się sinusoidalnie względem czasu, osiągając amplitudę $\mathfrak{N}_0 = 5000$ makswelów na jednostkę kąta bryłowego. Zwój posiada promień $r = 4\ cm$, opór $R = 16$ mikroomom i współczynnik samoindukcyi stały $\mathfrak{L} = 0{,}085$ mikrohenry. Jak dużą jest średnia siła odpychająca zwój od elektromagnesu wyrażona w gramach?



Rys. 54.

Oznaczmy przez ω kąt bryłowy, pod którym widać zwój z punktu, leżącego na osi elektromagnesu, w odległości l od jego środka.

Potok magnetyczny wytwarzany przez elektromagnes wyrazi się wzorem

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0\, \omega \sin 2\pi f t.$$

Jego zmiany wywołają w zwoju siłę elektromotoryczną

$$e = -\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -2\pi f \mathfrak{M}_0 \omega \cos 2\pi f t,$$

która wywoła prąd o natężeniu

$$i = \frac{e - \mathfrak{L}\frac{di}{dt}}{R},$$

dający się przedstawić w postaci

$$i = -\frac{2\pi f \mathfrak{M}_0 \omega \cos\varphi \cos(2\pi f t - \varphi)}{R},$$

gdzie

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\pi f \mathfrak{L}}{R}.$$

Na element długości dx zwoju, w punkcie gdzie pole magnetyczne elektromagnesu posiada wartość $\mathfrak{H}$, działa siła

$$i\,\mathfrak{H}\,dx \sin(\mathfrak{H}, dx)$$

prostopadła do płaszczyzny w której leży ten element i do przecinającej linii sił.

Jeżeli oznaczymy przez α kąt między osią zwojnicy i promieniem wodzącym kąta bryłowego ω, składowa pionowa tej siły będzie

$$dF = i\,\mathfrak{H}\,dx \sin(\mathfrak{H}, dx) \sin\alpha.$$

Dla wszystkich elementów zwoju, $\sin(\mathfrak{H}, dx) = 1$ oraz

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{M}}{\omega\left(\frac{l}{\cos\alpha}\right)^2}.$$

Wypadkowa tych elementarnych działań, na skutek symetryi będzie również pionową, o wartości chwilowej

$$F = i\,\mathfrak{H} \sin\alpha \int_0^{2\pi r} dx = 2\pi r\, i\,\mathfrak{H} \sin\alpha =$$

$$= 2\pi r \cdot \left[-\frac{2\pi f \mathfrak{M}_0 \omega \cos\varphi \cos(2\pi f t - \varphi)}{R}\right] \cdot \frac{\mathfrak{M}_0 \omega \sin 2\pi f t}{\omega\left(\frac{l}{\cos\alpha}\right)^2} \cdot \sin\alpha =$$

$$= -8\pi^3 f \mathfrak{M}_0^{\,2} \frac{(\sqrt{r^2 + l^2} - l)\, r^2}{(r^2 + l^2)^2} \frac{\cos\varphi}{R} \cos(2\pi f t - \varphi) \sin 2\pi f t,$$

gdyż

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}\,;\ \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

oraz

$$\omega = 2\pi\left(1 - \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}\right).$$

Zakładając

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{oraz} \quad M = 8\pi^3 f\, \mathfrak{N}_0^{\,2}\, \frac{(\sqrt{r^2+l^2}-l)\,r^2}{(r^2+l^2)^2}\, \frac{\cos\varphi}{R},$$

znajdziemy jako średnią wartość szukanej siły

$$F_{śr} = \frac{1}{T}\int_0^T F\,dt = -\frac{M}{T}\int_0^T \cos(2\pi f t - \varphi)\sin 2\pi f t\,dt =$$

$$= -M\frac{\sin\varphi}{2} = -4\pi^3 f\,\mathfrak{N}_0^{\,2}\,\frac{(\sqrt{r^2+l^2}-l)r^2}{(r^2+l^2)^2}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{R(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}.$$

Podstawiając $f = 100$ okresom na sekundę,
$\mathfrak{N}_0 = 5000$ makswelów na steradyan,
$r = 4\ cm$, $l = 6\ cm$, $\mathfrak{L} = 0{,}085 \,.\, 10^{-6} \,.\, 10^9 = 85\ cm$,
$R = 16 \,.\, 10^{-6} \,.\, 10^9 = 16000$ jednostek c. g. s. elektromagnetycznych, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 100 \,.\, 85}{16\,000} = 3{,}34.$$

i odrzucając znak ujemny, oznaczający odpychanie,

$$F_{śr} = 4 \,.\, 3{,}14^3 \,.\, 100 \,.\, 5000^2\, \frac{(\sqrt{4^2+6^2}-6)\,4^2}{(4^2+6^2)^2} \,.\, \frac{3{,}34}{16\,000\,(1+3{,}34^2)} =$$
$$= 38\,100\ dyn$$

lub

$$38100 \,.\, \frac{1}{981} = 38{,}8\ gr.$$

---

78. — Prąd sinusoidalnie zmienny o $f = 3000$ okresów na minutę, o natężeniu czynnem $I = 10$ amp. przechodzi przez zwojnicę z drutu miedzianego o przekroju $s = 10\ mm^2$, posiadającą $n = 1000$ zwojów kwadratowych każdy o boku $a = 10\ cm$, nawiniętą na pierścieniu niemagnetycznym, którego oś kołowa posiada średnicę $D = 1\ m$. Wyznaczyć: 1) opór R, współczynnik samoindukcyi $\mathfrak{L}$, stałą czasu τ, opór indukcyjny x oraz opór pozorny z zwojnicy; 2) wielkości czynne V, $\mathcal{E}$ oraz E (różnicy potencyałów na końcówkach zwojnicy, siły elektromotorycznej samoindukcyi wywołanej przez zwojnicę, oraz siły elektromotorycznej efektywnej); 3) kąt φ zsunięcie faz natężenia prądu i różnicy potencyałów na końcówkach zwojnicy, i odpowiadający temu zsunięciu czas θ; 4) średnią moc P pobieraną przez zwojnicę; 5) ilość elektryczności Q przechodzącą przez zwojnicę w ciągu czasu t równym jednej godzinie, nie uwzględniając znaku ujemnego, wyobrażającego przenoszenie elektryczności w przeciwnym kierunku.

Przyjmując jako opór właściwy miedzi $\rho = 1{,}8 \,.\, 10^{-6}$ omom na 1 cm długości i przy 1 cm^2 przekroju, otrzymamy

$$R = \rho \frac{n \,.\, 4a}{s} = 1{,}8 \,.\, 10^{-6} \frac{1000 \,.\, 4 \,.\, 10}{0{,}1} = 0{,}72 \text{ oma},$$

$$\mathfrak{L} = 4\pi \frac{n}{\pi d} n a^2 = 4 \,.\, \frac{1000}{100} \,.\, 1000 \,.\, 10^2 = 4000000\, cm \text{ lub } 0{,}004 \text{ henry}$$

$$\tau = \frac{\mathfrak{L}}{R} = \frac{0{,}004}{0{,}72} = 0{,}00556 \text{ sekundy},$$

$$x = 2\pi f \mathfrak{L} = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, \frac{3000}{60} \,.\, 0{,}004 = 1{,}26 \text{ oma},$$

$$z = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{0{,}72^2 + 1{,}26^2} = 1{,}45 \text{ oma},$$

$$V = z I = 1{,}45 \,.\, 10 = 14{,}5 \text{ woltom},$$

$$\mathcal{E} = x I = 1{,}26 \,.\, 10 = 12{,}6 \text{ woltom},$$

$$E = R I = 0{,}72 \,.\, 10 = 7{,}2 \text{ woltom},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{R} = \frac{1{,}26}{1{,}72} = 1{,}75, \quad \text{z czego} \quad \varphi \cong 60^0,$$

$$\theta = \frac{\varphi^0}{360^0} \,.\, \frac{1}{f} = \frac{60}{360} \,.\, \frac{60}{3000} = 0{,}003 \text{ sekundy},$$

$$P = V I \cos \varphi = 14{,}5 \,.\, 10 \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 + 1{,}75^2}} = 72 \text{ watom},$$

$$Q = \frac{2}{\pi} \,.\, I \sqrt{2} \,.\, t = \frac{2}{3{,}14} \,.\, 10 \,.\, \sqrt{2} \,.\, 3600 = 32\,400 \text{ kulombom}.$$

---

79. — Generator elektryczny, wzbudzający na swych końcówkach różnicę potencyałów zmienną według prawa $v = V_c + U_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, gdzie $V_c = 550$ woltom, zaś $U_0 = 5{,}5$ woltom, ładuje baterye akumulatorów, której siła przeciwelektromotoryczna $E = 536$ woltom, oraz opór, wliczając połączenia, $R = 0{,}155$ oma. Jaki błąd popełniamy przyjmując średnią pożyteczną moc bateryi równą iloczynowi ze wskazań woltomierza termicznego, przyłączonego na końcówkach, i takiegoż amperomierza włączonego w obwód?

Chwilowe natężenie prądu

$$i = \frac{V_c + U_0 \sin\frac{2\pi t}{T} - E}{R},$$

a średnia moc pożyteczna pobierana od maszyny

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v\, i\, dt =$$

$$= \frac{1}{TR}\int_0^T \left(V_c + U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)\left(V_c - E + U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{TR}\int_0^T \left\{ V_c (V_c - E) + \frac{U_0^2}{2} + U_0 (2V_c - E) \sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{U_0^2}{2}\cos\frac{4\pi t}{T} \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{R}\left\{ V_c (V_c - E) + \frac{1}{2} U_0^2 \right\}.$$

Woltomierz termiczny wskazuje czynną różnicę potencyałów, której kwadrat

$$V^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(V_c + U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(V_c^2 + \frac{U_0^2}{2} + 2V_c U_0 \sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{U_0^2}{2}\cos\frac{4\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= V_c^2 + \frac{1}{2} U_0^2.$$

Amperomierz termiczny wskazuje czynne natężenie prądu, którego kwadrat

$$I^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T i^2\,dt = \frac{1}{TR^2}\int\limits_0^T \left(V_c - E + U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{R^2}\left\{(V_c - E)^2 + \frac{1}{2}\,U_0^{\,2}\right\}.$$

Mnożąc przez siebie wartości czynne napięcia i natężenie prądu, otrzymamy

$$VI = \frac{1}{R}\sqrt{\left(V_c^2 + \frac{1}{2}\,U_0^2\right)\left\{(V_c - E)^2 + \frac{1}{2}\,U_0^2\right\}} =$$

$$= \frac{1}{R}\sqrt{\left\{V_c(V_c - E) + \frac{1}{2}\,U_0^2\right\}^2 + \frac{1}{2}\,U_0^2 E^2} =$$

$$= \sqrt{P^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{U_0 E}{R}\right)^2}.$$

Gdy $V_c = 550$ woltom, $U_0 = 5{,}5$ woltom,
$E = 536$ woltom, $R = 0{,}155$ oma.

znajdziemy

$$P = \frac{1}{0{,}155}\left\{550\,(550 - 536) + \frac{1}{2}\,5{,}5^2\right\} = 49800 \text{ watom}$$

oraz

$$VI = \sqrt{49\,800^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5{,}5\,.\,536}{0{,}155}\right)^2} = 51\,700 \text{ watom,}$$

błąd więc wynosi

$$\frac{VI - P}{P} = \frac{51\,700 - 49\,800}{49\,800} = 3{,}82\%.$$

---

80. — Jaką jest wartość czynna prądu elektrycznego okresowo zmiennego, powstałego ze złożenia prądu stałego $I_c = 5$ amp. i dwuch prądów sinusoidalnie zmiennych, o natężeniach czynnych $I_1 = 10$ amp. oraz $I_2 = 3$ amp., przytem ilość okresów na sekundę drugiego jest wielokrotnością ilości okresów na sekundę prądu pierwszego?

Wyrażenie chwilowego natężenia prądu złożonego

$$i = I_c + I_1 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi t}{T} + I_2 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi n}{T} (t - \theta),$$

gdzie n jest liczbą całkowitą nie równą jedności, θ czas jaki upływa między momentami gdy wartości chwilowe obydwuch prądów sinusoidalnie zmiennych, o okresach T oraz $\frac{T}{n}$, przechodzą przez zero.

Kwadrat szukanej wartości czynnej I wyrazi się z określenia

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

otrzymamy więc

$$I^2 = \frac{I_c^2}{T}\int_0^T dt + 2\frac{I_1^2}{T}\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt + 2\frac{I_2^2}{T}\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi n}{T}(t-\theta)\, dt +$$

$$+ 2\sqrt{2}\frac{I_c I_1}{T}\int_0^T \sin \frac{2\pi t}{T} dt + 2\sqrt{2}\frac{I_c I_2}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi n}{T}(t-\theta)\, dt +$$

$$+ 4\frac{I_1 I_2}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi t}{T} \sin\frac{2\pi n}{T}(t-\theta)\, dt =$$

$$= I_c^2 + I_1^2 + I_2^2,$$

gdyż trzy ostatnie całki równe są zeru.

Otrzymamy więc

$$I = \sqrt{I_c^2 + I_1^2 + I_2^2}.$$

Podstawiając $I_c = 5$ amp, $I_1 = 10$ amp., $I_2 = 3$ amp., znajdziemy

$$I = \sqrt{5^2 + 10^2 + 3^2} = 11{,}57 \text{ amp.}$$

---

81. — Mamy zasilać przy pomocy alternatora, o czynnem napięciu na końcówkach $V = 180$ woltom, silnik indukcyjny, zbudowany do pracy przy czynnej różnicy potencyałów $U = 100$ woltom na końcówkach, i dla prądu o natężeniu czynnem $I = 10$ amperom przy współczynniku mocy $A = 0{,}7$. Wyznaczyć siłę elektromotoryczną czynną $\mathfrak{E}$, którą ma wywołać włączony w obwód dławnik (zwojnica o dużym współczynniku samoindukcyi), wiedząc, że opór jego $R = 0,5$ oma, i pomijając straty wywołane prądami Foucault'a i histerezą rdzenia. Natężenie prądu i napięcie są wielkościami sinusoidalnie zmiennemi.

Wartości chwilowe[1] v, u, ε, i napięć i natężenia prądu łączy prawo Ohm'a

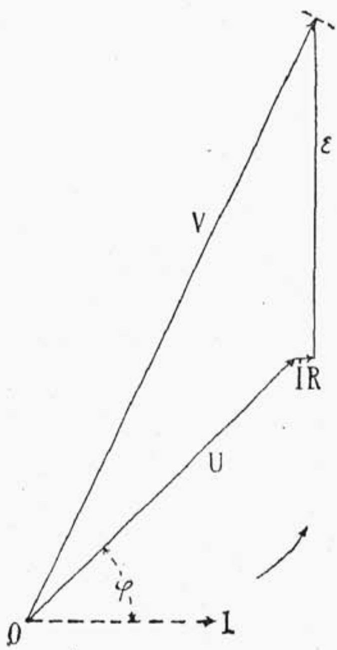
$$i = \frac{v - u + \varepsilon}{R},$$

skąd znajdziemy

$$v = u + iR - \varepsilon.$$

Prąd spóźnia się względem różnicy potencyałów, przytem kątowa różnica faz wynosi $\varphi = \arc \cos A$, zaś siła elektromotoryczna samoidukcyi ε spóźnia się o $\frac{\pi}{2}$ w stosunku do natężenia prądu.

Na zasadzie tego, jeżeli wykreślimy z punktu O (rys. 55), wektor długości proporcyonalnej do $U = 100$ woltom, z jego wierzchołka drugi o długości proporcyonalnej do $IR = 10 . 0,5 = 5$ woltom, odchylony od poprzedniego o kąt $\varphi = 45,5^0$ ($\cos \varphi = 0,7$), długość, jaką łuk o promieniu proporcyonalnym do $V = 180$ woltom, zakreślony ze środka O odetnie na prostopadłej do wektora IR, wykreślonej z jego początku w kierunku dodatnim, określi w przyjętej podziałce wartość czynną $\mathcal{E}$.



Rys. 55.

W ten sposób znajdziemy $\mathcal{E} = 92$ woltom.

[1]) Wykresy i obliczenia obejmujące prąd zmienny, są robione w założeniu, że obrót wektorów wielkości sinusoidalnie zmiennych odbywa się w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki zegara.

82. — Aby otrzymać czynną różnicę potencyałów $U = 500$ woltom na końcówkach kondensatora o pojemności $C = 10$ mikrofaradom, przyłączonego do alternatora przy pomocy przewodników o oporze $R = 10$ omom, i współczynniku samoindukcyi $\mathfrak{L} = 0{,}254$ henry, jaką winna być czynna różnica potencyałów V na końcówkach generatora, w założeniu, iż wielkości są sinusoidalnie zmienne o ilości okresów na sekundę $f = 100$?

Rozwiązanie analityczne.

Czynne natężenie prądu przechodzącego przez przewodnik wyniesie

$$I = 2\pi f C U = 2 . 3{,}14 . 100 . 10 . 10^{-6} . 500 = 3{,}14 \text{ amp.},$$

z wzoru

$$V = I\sqrt{R^2 + \left(2\pi f \mathfrak{L} - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}$$

otrzymamy

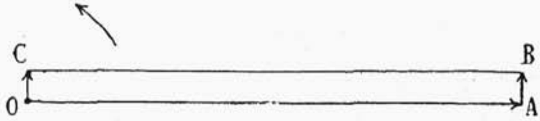
$$V = 3{,}14\sqrt{10^2 + \left(2 . 3{,}14 . 100 . 0{,}254 - \frac{1}{2 . 3{,}14 . 100 . 10 . 10^{-6}}\right)^2}$$
$$= 31{,}4 \text{ woltom.}$$

Rozwiązanie graficzne.

Wartość chwilowa v szukanej różnicy potencyałów łączy się z wartościami u oraz i danej różnicy potencyałów i natężenia prądu, wzorem

$$v = u + iR - \left(-\mathfrak{L}\frac{di}{dt}\right),$$

przytem prąd wyprzedza napięcie u o kąt $\frac{\pi}{2}$, a siła elektromotoryczna samoindukcyi $-\mathfrak{L}\frac{di}{dt}$ spóźnia się o $\frac{\pi}{2}$ względem prądu. Wektorem napięcia v jest wypadkowa OC (rys. 56), wektorów: OA dłu-



Rys. 56.

gości proporcyonalnej do $U = 500$ woltom, AB prostopadłego do OA w kierunku kątów dodatnich długości proporcyonalnej do

$IR = 2\pi f C U R = 2 . 3{,}14 . 100 . 10 . 10^{-6} . 500 . 10 = 31{,}4$ woltom, oraz BC prostopadłego do AB w kierunku kątów dodatnich, długości proporcyonalnej do $2\pi f \mathfrak{L} I = 2 . 3{,}14 . 100 . 0{,}254 . 3{,}14 = 500$ woltom.

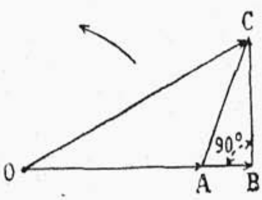
Ponieważ BC jest równe i równoległe do OA, OC jest równe i równoległe do AB, więc $V = 31{,}4$ woltom, i faza różnicy potencyałów na końcówkach alternatora jest zgodną z fazą prądu.

83. — Przetwornicę jednofazową przyłączono przez dławnik o współczynniku samoindukcyi $\mathfrak{L} = 0{,}01$ henry, i oporze $R = 0{,}1$ oma, do alternatora o czynnej różnicy potencyałów na końcówkach $V = 100$ woltom przy $f = 50$ okresom na sekundę. Jakie są natężenie czynne prądu I oraz czynna różnica potencyałów U na końcówkach przetwornicy, gdy średnia moc pobierana przez przetwornicę wynosi $P = 1000$ watów, w wypadkach, gdy dzięki odpowiedniej regulacyi wzbudzenia, faza prądu 1) jest w zgodzie z fazą napięcia, 2) spóźnia się o kąt $\varphi = 20^0$, 3) wyprzedza napięcie o ten sam kąt? Przyjmujemy, że różnice potencyałów oraz natężenie prądu są wielkościami sinusoidalnie zmiennemi.

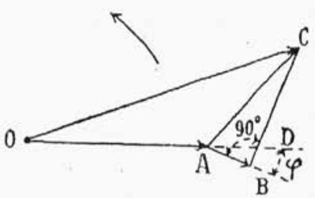
Gdy wartości chwilowe różnicy potencyałów na końcówkach alternatora, przetwornicy oraz natężenia prądu nazwiemy odpowiednio v, u, i, otrzymamy zależność

$$v = u + ir - \left(- \mathfrak{L} \frac{di}{dt}\right),$$

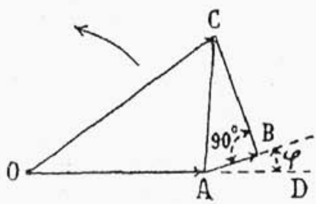
której odpowiadają, w trzech wypadkach przesunięcia faz i względem u, wykresy wektorów rys. 57, 58 i 59, w których długości



Rys. 57.



Rys. 58.



Rys. 59.

OA, AB, CB, AC, OC wyobrażają napięcia czynne U, IR, $2\pi f \mathfrak{L} I$, $I\sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 \mathfrak{L}^2}$, V.

W tych wykresach

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,OA\,.\,AC \cos OAC,$$

przytem

$$\cos OAC = -\cos BAC$$

lub

$$\cos OAC = -\cos (BAC - \varphi)$$

lub wreszcie

$$\cos OAC = -\cos (BAC + \varphi)$$

zależnie od tego, czy i jest w fazie z u, czy też spóźnia się lub wyprzedza u.

Uważając zsunięcie faz φ za dodatnie, gdy i wyprzedza u, oraz za ujemne, gdy i spóźnia się względem u, można napisać w sposób ogólny

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,OA\,.\,AC \cos (BAC + \varphi) =$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,OA\,.\,AC\,(\cos BAC \cos \varphi - \sin BAC \sin \varphi)$$

lub, zakładając $x = 2\pi f \mathfrak{L}$ oraz $z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 \mathfrak{L}^2}$, i zauważając że $\cos BAC = \frac{R}{z}$, a $\sin BAC = \frac{x}{z}$

$$V^2 = U^2 + I^2 z^2 + 2\,UI\,(R \cos \varphi - x \sin \varphi).$$

Zastępując w tym równaniu U przez jego wartość otrzymaną z wyrażenia na średnią moc elektryczną dostarczaną przetwornicy

$$P = UI \cos \varphi,$$

otrzymamy

$$V^2 = \frac{P^2}{I^2 \cos^2 \varphi} + I^2 z^2 + 2\,P\,(R - x \operatorname{tg} \varphi)$$

lub

$$I^4 z^2 - I^2 \{V^2 - 2\,P\,(R - x \operatorname{tg} \varphi)\} + P^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 0 \qquad (1)$$

a z tego

$$I = \frac{1}{z\sqrt{2}} \sqrt{V^2 - 2PR + 2Px \operatorname{tg} \varphi \pm \sqrt{(V^2 - 2PR + 2Px \operatorname{tg} \varphi)^2 - 4P^2 z^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}$$

Podstawiając

$P = 1000$ watom, $V = 100$ woltom, $R = 0{,}1$ oma, $\mathfrak{L} = 0{,}01$ henry,

$$f = 50 \text{ okresom na sekundę},$$

$$x = 2\,.\,3{,}14\,.\,50\,.\,0{,}01 = 3{,}14 \text{ oma},$$

$$z = \sqrt{\overline{0{,}1}^2 + 4\,.\,\overline{3{,}14}^2\,.\,50^2\,.\,\overline{0{,}01}^2} = 3{,}142 \text{ oma},$$

$$V^2 - 2PR + 2Px \operatorname{tg}\varphi = \overline{100}^2 - 2.1000.0{,}1 + 2.1000.3{,}14.\operatorname{tg}\varphi =$$
$$= (0{,}98 + 0{,}628 \operatorname{tg}\varphi)\, 10^4$$
$$4P^2z^2 = 4.\overline{1000}^2.\overline{3{,}142}^2 = 0{,}395 . 10^8.$$
$$\frac{1}{z\sqrt{2}} = \frac{1}{3{,}142 . 1{,}414} = 0{,}226$$

i opuszczając rozwiązanie ze znakiem plus przed pierwiastkiem, jako nie posiadające praktycznego znaczenia, otrzymamy

$$I = 22{,}6\sqrt{0{,}98 + 0{,}628 \operatorname{tg}\varphi - \sqrt{(0{,}98 + 0{,}628 \operatorname{tg}\varphi)^2 - 0{,}395(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}} \text{ amp}$$

Z drugiej strony

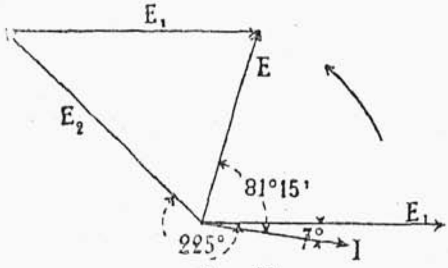
$$U = \frac{1000}{I \cos\varphi} \text{ woltom.}$$

Podstawiając w dwuch ostatnich równaniach wartości φ, umieszczone w pierwszej kolumnie poniższej tabliczki, otrzymamy wartości podane w dwuch następnych kolumnach.

φ^0	I amp.	U wolt.
0	10,8	92,7
— 20	14,4	74,0
+ 20	10,15	105,0

84. — Dwa jednakowe jednofazowe alternatory obracają się z jednakową prędkością. Połączono je równolegle w czasie luźnego biegu w chwili w której, na skutek niedoskonałej regulacyi, napięcia ich wynosiły 100 woltów i 110 woltów, i gdy maszyna mocniej wzbudzona spóźniała się w fazie w stosunku słabiej o $^1/_8$ okresu. Wiedząc, że opór całkowity tworników obydwuch maszyn i kabli je łączących wynosi 2 omy, i że w naszym wypadku opór indukcyjny całości wynosi 13 omów, wyznaczyć czynne natężenie prądu płynącego w twornikach, i średnią moc elektryczną oddawaną lub pobieraną przez każdą z maszyn. Napięcia są wielkościami sinusoidalnie zmiennemi.

Sumie algebraicznej wartości chwilowych sił elektromotorycznych obydwuch alternatorów odpowiada (rys. 60) wypadkowa: wektora o długości proporcyonalnej do $E_1 = 100$ woltom, i wektora o długości proporcyonalnej do $E_2 = 110$ woltom, spóźniającego się względem poprzedniego o kąt równy $\frac{360}{8} + 180 = 225^0$.



Rys. 60.

To napięcie wypadkowe, którego wartość czynna E, otrzymana z wykresu wynosi 81 woltów, wywołuje w obwodzie utworzonym przez obydwa tworniki o wspólnym oporze omicznym $R = 2$ omom i oporze indukcyjnym $x = 13$ omom, prąd o natężeniu czynnem

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{81}{\sqrt{2^2 + 13^2}} = 6{,}15 \text{ amperom},$$

opóźniającem się względem wypadkowego napięcia o kąt φ, czyniący zadość równaniu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{R} = \frac{13}{2} = 6{,}5,$$

to znaczy $\varphi = 81^0\ 15'$.

Nanosząc na wykresie kierunek wektora prądu, znajdziemy, że ten spóźnia się o kąt $\varphi_1 = 7^0$ względem siły elektromotorycznej E_1 i wyprzedza siłę elektromotoryczną E_2 o kąt $\varphi_2 = 225^0 - 7^0 = 218^0$.

Średnia moc elektryczna, odpowiadająca alternatorowi pierwszemu

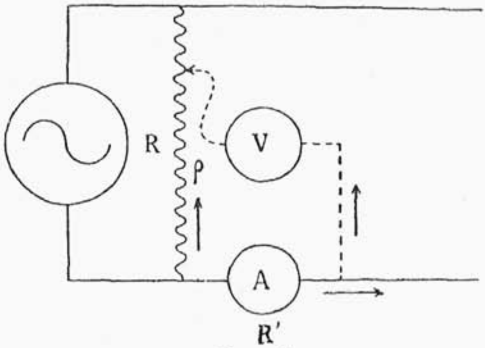
$$P_1 = E_1 I \cos \varphi_1 = 100 \,.\, 6{,}15 \,.\, \cos 7^0 = 610 \text{ watom}$$

drugiemu

$$P_2 = E_2 I \cos \varphi_2 = 110 \,.\, 6{,}15 \,.\, \cos 218^0 = -534 \text{ watom}.$$

A więc, twornik pierwszej maszyny oddaje moc 610 watów, podczas gdy twornik drugiej zużywa 534 waty. Różnica między temi liczbami wyraża moc zamienioną w ciepło.

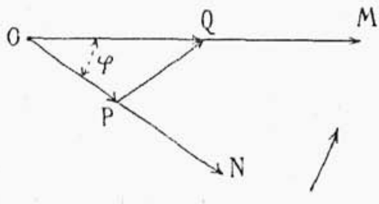
85.—Aby wyznaczyć zsunięcie faz pomiędzy różnicą potencyałów i natężeniem prądu alternatora jednofazowego, przyłączamy do końcówek maszyny duży bezindukcyjny opor R (rys. 61), oraz włączamy do obwodu zewnętrznego amperomierz A o oporze $R' = 0{,}1$ oma. Na części opornika, obejmując amperomierz, przyłączamy woltomierz, którego wskazanie sprowadzamy do minimum, przesuwając odpowiednio punkt styku woltomierza z opornikiem. Gdy to osiągnęliśmy, napięcie czynne, wskazane przez woltomierz, wynosi $V=5$ woltom, amperomierz wskazuje natężenie czynne $I=100$ amp. Jaką jest wartość φ szukanej różnicy faz? Mamy do czynienia z wielkościami sinusoidalnie zmiennemi.



Rys. 61.

Niech wektory OM i ON (rys. 62), zawierające między sobą kąt φ, oznaczają różnicę potencyałów na końcówkach maszyny, i prąd przez nią wytwarzany, mierzony amperomierzem (pomijając małe natężenie prądu w oporniku).

Jeżeli długość OP, odłożona na ON, wyobraża napięcie czynne IR' na końcówkach amperomierza, a długość OQ, odłożona na OM, napięcie czynne na końcach części opornika R (objętej przez woltomierz), wektor PQ wyznacza wartość czynną i fazę różnicy potencyałów wskazanej przez woltomierz.



Rys. 62.

Wykres wskazuje nam, że gdy przesuwamy ruchomy kontakt woltomierza wzdłuż opornika, poczynając od strony amperomierza, koniec Q wektora PQ przesuwa się wzdłuż OM od O w stronę M. Długość tego wektora przechodzi przez minimum, w chwili gdy staje się prostopadłym do OM. Wówczas

$$PQ = OP \sin MON.$$

Najmniejsza różnica potencyałów V wskazana przez woltomierz czyni zadość równaniu

$$\sin \varphi = \frac{V}{IR'}.$$

Podstawiając $V = 5$ woltom, $I = 100$ amp., $R = 0{,}1$ oma, znajdziemy

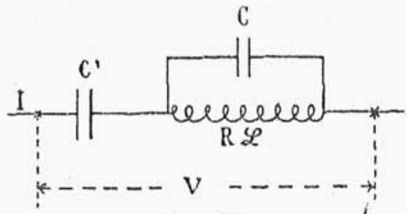
$$\sin \varphi = \frac{5}{100 \, . \, 0{,}1} = 0{,}5$$

skąd

$$\varphi = 30^0.$$

---

86. — Kondensator o pojemności $C = 10$ mikrofaradom jest włączony równolegle z przewodnikiem o oporze $R = 10$ omom i współczynniku samoindukcyi $\mathfrak{L} = 0{,}1$ henry; w szereg zaś połączono pojemność $C' = 20$ mikrofaradom (rys. 63). Wiedząc, że sinusoidalnie zmienna różnica potencyałów, przy $f = 100$ okresom na sekundę, i napięciu czynnem $V = 200$ woltom, działa na końcówki całego układu, wyznaczyć czynne natężenie prądu, oraz jego fazę względem różnicy potencyałów.



Rys. 63.

Oznaczmy przez U (w woltach) czynne napięcie na końcówkach przewodnika indukcyjnego.

Prąd w nim o natężeniu czynnem

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 \mathfrak{L}^2}} = \frac{U}{\sqrt{10^2 + 4 \, . \, 3{,}14^2 \, . \, 100^2 \, . \, 0{,}1^2}} =$$
$$= 0{,}01575 \, U \text{ amperom,}$$

opóźnienie względem napięcia o kąt φ_1, czyniący zadość równaniu

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\pi f \mathfrak{L}}{R} = \frac{2 \, . \, 3{,}14 \, . \, 100 \, . \, 0{,}1}{10} = 6{,}28,$$

t. j. około 81^0.

W odgałęzieniu kondensatora C, płynie prąd o natężeniu czynnem

$$I_2 = 2\pi f C U = 2 \, . \, 3{,}14 \, . \, 100 \, . \, 10 \, . \, 10^{-6} . U = 0{,}00628 \, U \text{ amp.}$$

i wyprzedza napięcie o 90^0.

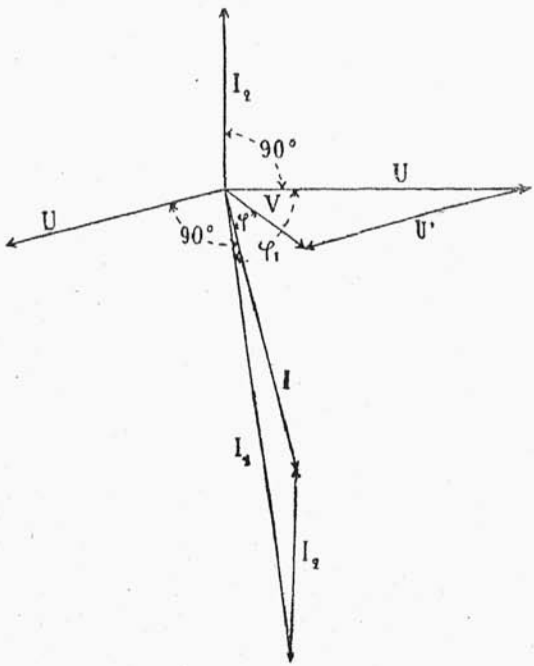
Wyobrażając przy pomocy odcinków proporcyonalnych do $0{,}01575 \, U$ oraz $0{,}00628 \, U$ i dodając wektory obydwuch prądów bocznych (rys. 64), otrzymamy dla natężenia czynnego całkowitego prądu wartość

$$I = 0{,}0096\, U \text{ amperom.}$$

Wartość czynna napięcia na zbrojach kondensatora wyniesie

$$U' = \frac{I}{2\pi f C'} = \frac{0{,}0096\, U}{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 100 \,.\, 20 \,.\, 10^{-6}} = 0{,}765\, U \text{ woltom,}$$

napięcie to spóźnia się względem natężenia prądu głównego o 90°.



Rys. 64.

Wypadkowa wektorów proporcyonalnych do U oraz $0{,}765 U$, wyobrażając napięcie obydwuch kondensatorów, stanowi całkowitą różnicę potencyałów, której wartość czynną $V = 200$ woltom znamy.

Stosunek długości pierwszej składowej i wypadkowej określi nam U. Znajdziemy więc

$$U = 603 \text{ woltom}$$

skąd

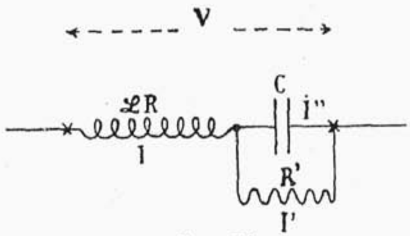
$$I = 0{,}0096 \,.\, 603 = 5{,}78 \text{ amperom}$$

oraz
$$I_1 = 0{,}01575 \,.\, 603 = 9{,}5 \text{ amperom}$$
$$I_2 = 0{,}00628 \,.\, 603 = 3{,}78 \text{ amperom}$$
$$U' = 0{,}765 \,.\, 603 = 461 \text{ woltom.}$$

Co do różnicy faz pomiędzy prądem głównym i całkowitą różnicą potencyałów, wykres wskazuje, że napięcie wyprzedza natężenie o kąt
$$\varphi = 39^0.$$

---

87. — Sinusoidalnie zmienna różnica potencyałów $V = 1300$ woltom o $f = 50$ okresom na sekundę, działa na końcówki obwodu złożonego z kondensatora o pojemności $C = 10$ mikrofaradom połączonego w szereg z przewodnikiem o oporze $R = 40$ omom i współczynniku samoindukcyi $\mathfrak{L} = 0{,}5$ henry (rys. 65). Wyznaczyć czynne natężenie prądu w przewodniku o oporze $R' = 200$ omom (bezindukcyjnym), przyłączonym równolegle do zbroi kondensatora?



Rys. 65.

(Oznaczenia czynnych natężeń prądu w poszczególnych częściach obwodu znajdziemy na załączonym schemacie.)

Wektor prądu, płynącego w przewodniku indukcyjnym, jest wypadkową wektora prądu szukanego, i pobieranego przez kondensator. Ponieważ ostatni prąd wyprzedza o $\frac{\pi}{2}$ różnicę potencyałów na zbrojach kondensatora, która jest jednocześnie w fazie z prądem płynącym w przewodniku bezindukcyjnym, oraz
$$I'' = 2\pi f C \,.\, R' I',$$
znajdziemy z wykresu wektorowego (rys. 66)
$$I = \sqrt{I'^2 + I''^2} = I' \sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 C^2 R'^2}$$
oraz
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I''}{I'} = 2\pi f C R'.$$

Podstawiając wartości liczbowe podane w warunkach zadania, otrzymamy

$$I = I' \sqrt{1 + 4 \,.\, 3{,}14^2 \,.\, 50^2 \,.\, (10 \,.\, 10^{-6})^2 \,.\, 200^2} = 1{,}18\, I'$$

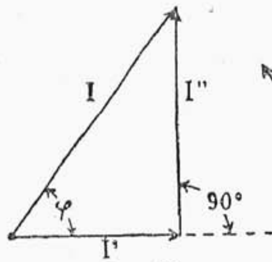
oraz

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 50 \,.\, 10 \,.\, 10^{-6} \,.\, 200 = 0{,}628$$

czyli

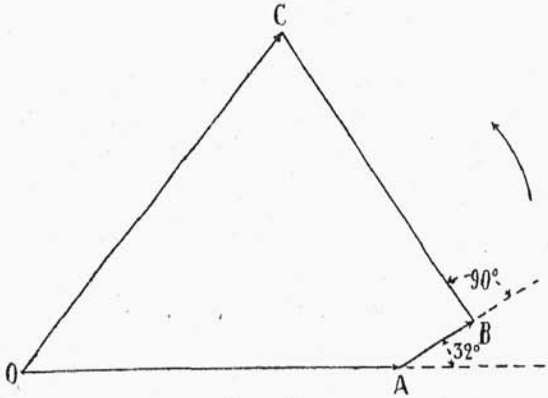
$$\varphi = 32^0.$$

Z drugiej strony, wektor całkowitej różnicy potencyałów jest wypadkową wektorów różnicy potencyałów zbroi kondensatora, spadku napięcia spowodowanego oporem przewodnika indukcyjnego (będącym w fazie z prądem) oraz siły elektromotorycznej samoindukcyi tego przewodnika, wziętej



Rys. 66.

ze znakiem przeciwnym, czyli wyprzedzającej w fazie o $\frac{\pi}{2}$ prąd całkowity I. Jeżeli na wykresie (rys. 67), długości OA, AB i BC są odpowiednio proporcyonalne do



Rys. 67.

$$R' I' = 200\, I'$$
$$R I = 40 \,.\, 1{,}18\, I' = 47{,}2\, I'$$
$$2\pi f \mathfrak{L} I = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 50 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1{,}18\, I' = 185\, I'$$

to długość OC powinna być proporcyonalną do $V = 1300$ woltom.

Ponieważ z wykresu $OA : OC = 0{,}866$

więc

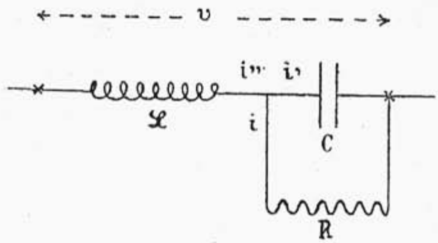
$$\frac{200\,I'}{1300} = 0{,}866,$$

skąd

$$I' = \frac{0{,}866 \, . \, 1300}{200} = 5{,}63 \text{ amperom.}$$

---

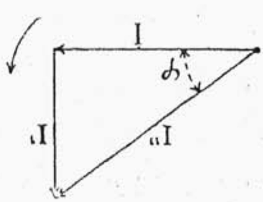
88. — Jaką ilość okresów na sekundę powinna posiadać sinusoidalnie zmienna różnica potencyałów o stałej wartości czynnej, przyłączona do końcówek układu, w skład którego wchodzi samoindukcya $\mathfrak{L} = 1$ henry i w szereg z nią pojemność $C = 2{,}5$ mikrofarada (rys. 68), aby czynne natężenie prądu przechodzącego przewodnikiem bezindukcyjnym, włączonym równolegle z kondensatorem, było niezależne od wielkości oporu R tego przewodnika, i jaką powinna być różnica potencyałów, aby otrzymać w ten sposób prąd o natężeniu czynnem równem jednemu amperowi?



Rys. 68.

Oznaczmy, jak to wskazuje schemat układu, przez i, i', i'' oraz v wartości chwilowe prądów i różnicy potencyałów w poszczególnych częściach układu, zaś przez I, I', I'' i V odpowiadające im wartości czynne.

Ponieważ prąd i jest w fazie z napięciem iR na końcówkach kondensatora, a prąd i' wyprzedza to napięcie o $\frac{\pi}{2}$, przeto prąd $i'' = i + i'$ da się wyrazić przy pomocy wektora (rys. 69), stanowiącego przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne są proporcyonalne do I oraz $I' = 2\pi f C \, . \, IR$, tak iż



Rys. 69.

$$I'' = \sqrt{I^2 + I'^2} = I\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 C^2 R^2}$$