Tak więc całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx\,,\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx,\dots \quad \text{są zbieżne.}$$

Tak samo łatwo dowieść, że całki

$\int_0^\infty \sin x^2 dx$, $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ są zbieżne. W rzeczy samej:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^l \sin x^2\, dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^{l^2} \sin y\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

gdzie uskutecznilišmy podstawienie $x^2 = y$, $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE DRUGIEGO RODZAJU.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ staje się nieskończoną dla $x = a$, lecz w przedziale $(a+\varepsilon, b)$ gdzie $a < b$ i $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małe, funkcja $f(x)$ jest ciągłą. Wtedy, jak wiemy, całka

$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ istnieje i ma wartość określoną.

Wartość tej całki zależy, oczywiście, od ε. Jeśli całka $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ dąży do granicy, gdy $\varepsilon \to 0$, to granicę tę będziemy oznaczali: $\int_a^b f(x)dx$, tak iż określeniem tego symbolu jest równość

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Jest to, oczywiście, nowe rozszerzenie pojęcia całki. Taką całkę nazywamy **całką niewłaściwą 2-go rodzaju**. Gdy wspomniana poprzednio granica istnieje, mówimy, że całka jest zbieżna. Mamy tu, w istocie, granicę granicy, jak i przy całkach niewłaściwych 1-go rodzaju.

Jeśli znamy funkcję pierwotną dla $f(x)$, to łatwo rozstrzygnąć, czy $\int_a^b f(x)dx$ jest całką zbieżną, czy nie. W rzeczy samej, niech

$$F'(x) = f(x)$$

Wtedy

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = F(b) - F(a+\varepsilon).$$

Całka jest zbieżna, o ile istnieje granica $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(a+\varepsilon)$. Mamy wtedy

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{\varepsilon \to 0} F(a+\varepsilon)$$

Najprostszą całką niewłaściwą 2-go rodzaju, nadającą się do porównania z innemi całkami, jest całka

$$\int_a^b \frac{M\,dx}{(x-a)^m}$$

, gdzie M - liczba stała, a $m > 0$.

Mamy tu

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{M\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{M}{m-1}\left[\frac{1}{(b-a)^{m-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\right].$$

Gdy $m>1$, wyraz $\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}$ rośnie nieograniczenie, gdy $\varepsilon \to 0$; całka jest wtedy rozbieżna. Gdy $m<1$, to $\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} = \varepsilon^{1-m}$ i wyraz ten dąży do 0 wraz z ε. Tak więc dla $m<1$ całka jest zbieżna, mianowicie

$$\int_{a}^{b} \frac{M\,dx}{(x-a)^m} = \frac{M(b-a)^{1-m}}{1-m}.$$

Jeśli $m=1$, to

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{M\,dx}{x-a} = M \lg \frac{b-a}{\varepsilon}$$

; całka jest rozbieżna, gdyż $\lg \frac{b-a}{\varepsilon}$ rośnie nieograniczenie, gdy $\varepsilon \to 0$.

Tak więc całka $\int_{a}^{b} \frac{M\,dx}{(x-a)^m}$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $m<1$.

Można stąd otrzymać kryterjum zbieżności całki $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, przez porównanie funkcji $f(x)$, nieskończonej dla $x=a$, z funkcją $\frac{M}{(x-a)^m}$.

Jeśli istnieje taka liczba M, iż $(x-a)^m f(x) < M$ dla wszys t k i c h w a r t o ś c i x w o t o c z e n i u p r a w o s t r o n n e m p u k t u a i j e ś l i $m<1$, t o c a ł k a $\int_a^b f(x)dx$ j e s t z b i e ż n a . Można, np. zastosować to twierdzenie w przypadku, gdy $(x-a)^m \cdot f(x)$ dąży do pewnej granicy $A \neq 0$, gdy $x \to a$ przyczem $m<1$.

Jeśli $(x-a)^m \cdot |f(x)| > M$ i $m \geq 1$, to $\int_a^b |f(x)|dx$ jest rozbieżna, a więc i całka $\int_a^b f(x)\,dx$, o ile $f(x)$ w dostatecznie małym /prawostronnem/ otoczeniu punktu a zachowuje znak stały.

Wątpliwym jest jedynie przypadek, gdy , a funkcja $f(x)$ nie posiada znaku stałego w jakimkolwiek dowolnie małym otoczeniu punktu a. /Mowa o otoczeniu prawostronnem/.

PRZYKŁADY. 1/ Rozpatrzmy całkę z funkcji wymiernej $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$; liczba a jest pierwiastkiem mianownik, t.j. $Q(a)=0$, przytem $Q(c) \neq 0$, gdy $a<c\leq b$. Wiemy, iż wielomian $Q(x)$ rozkłada się wtedy w sposób następujący: $Q(x) \equiv (x-a)^m \cdot Q_1(x)$ gdzie $Q_1(a) \neq 0$. Jeśli $P(x)$ i $Q(x)$ nie mają

czynników wspólnych, $(x-a)^m \cdot f(x)$ dąży do granicy $\neq 0$, gdy $x \to a$. Ponieważ $m \geq 1$, całka $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ jest w tym przypadku rozbieżna.

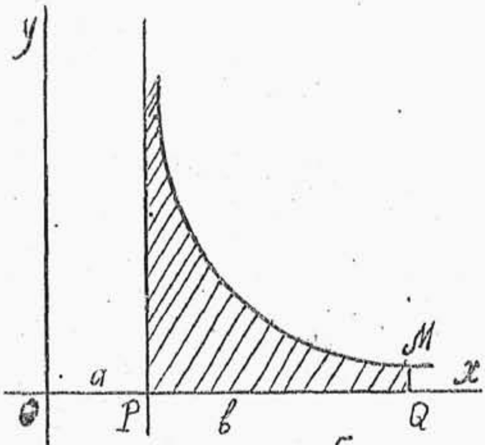
2/ Niech teraz daną będzie całka $\int_a^b \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} dx$ gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są, jak poprzednio, wielomianami. Jeśli pierwiastek a jest dla $Q(x)=0$ wielokrotności m, to $(x-a)^{m/2} \cdot f(x)$ dąży do granicy różnej od zera; stąd, jeśli $m=1$, całka jest zbieżna, bo $\frac{m}{2}<1$; jeśli $m=2,3,\dots$, $\frac{m}{2} \geq 1$ i całka jest rozbieżna.

Tak np. całka $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ jest zbieżna, a $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ rozbieżna.

3/ Zbadajmy całkę $\int_0^1 lg_e x\,dx$; całka ta jest zbieżna. Można przekonać się o tem albo przy pomocy funkcji pierwotnej, która jest tu $x\,lg\,x - x$, albo przy pomocy kryterjum, zważywszy, iż dla dostatecznie małego $x>0$, $|lg\,x| < Mx^{\frac{1}{2}}$; gdzie M – stała.

CAŁKA JAKO POLE W INTERPRETACJI GEOMETRYCZNEJ.

Jeśli wykreślimy krzywą, której równanie jest $y=\frac{M}{(x-a)^m}$, to z łatwością się przekonamy, że prosta $x=a$ jest asymptotą tej krzywej /dla $m>0$/.



rys.5.

Pole figury, ograniczone odcinkiem PQ osi x-ów, rzędną MQ, dla której $x=b$, łukiem krzywej i asymptotą ma wartość skończoną lub nie, zależnie od tego, czy $m<1$, czy też $m\geq 1$.

P r z e r w a   c i ą g ł o ś c i   d l a   g r a n i c y   g ó r n e j   d r o g i   c a ł k o w a n i a .

Jeśli $f(x)$ staje się nieskończoną dla $x=b$, to określimy $\int_a^b f(x)dx$, podobnie jak poprzednio, kładąc

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Całka istnieje lub nie, zależnie od tego, czy granica po stronie drugiej znaku równości istnieje lub nie.

Jeśli przerwa ciągłości ma miejsce i dla $x=a$ i dla $x=b$, to

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_c^{b-\varepsilon'} f(x)dx$$

gdzie c jest dowolną liczbą między a i b, t.j.

taką, że $a<b<c$, a ε i ε' dążą do zera niezależnie jedna od drugiej.

Przypuśćmy wreszcie, że $f(x)$ staje się nieskończoną dla jakiejś wartości $x=c$ na drodze całkowania, t.j. takiej, że $a<c<b$. W tym przypadku całkę $\int_a^b f(x)dx$ określimy jako sumę granic dwuch całek, t.j. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_a^{c-\varepsilon'} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Całka $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna, jeśli obie granice powyższe istnieją, gdy ε i ε' dążą do zera niezależnie od siebie. Określenie całki $\int_a^b f(x)dx$ daje się z łatwością uogólnić w przypadku, gdy między a i b mamy jakąkolwiek ilość, np. n punktów nieciągłości typu rozważanego. Mianowicie $\int_a^b f(x)dx$ = sumie granic odpowiedniej ilości całek typu

$$\int_{a_1}^{c_1-\varepsilon'} f(x)\,dx \quad \text{i} \quad \int_{c_1+\varepsilon}^{b_1} f(x)dx \quad \text{gdy } \varepsilon \text{ i } \varepsilon' \to 0.$$

<u>U w a g a</u>. Łatwo jest uzasadnić, że wzór zasadniczy $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, wyrażający związek między całką $f(x)$, a funkcją pierwotną, gdzie $F'(x) = f(x)$, jest słuszny i dla całki niewła-

ściwej, t.j. gdy np. $f(x)$ staje się nieskończoną dla $x=c$ na drodze całkowania, o ile funkcja pierwotna jest w całym przedziale całkowania ciągłą.
W rzeczy samej:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon'\to 0} F(c-\varepsilon') - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(c+\varepsilon).$$

Jeśli $F(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie c,

to $\lim\limits_{\varepsilon'\to 0} F(c-\varepsilon') = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(c+\varepsilon) = F(c)$ i ostatecznie

mamy: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$

Przykład.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{2/3}} = \left|3x^{1/3}\right|_{-1}^{+1} = 6.$$

Zwrócić tu trzeba uwagę na to, że funkcja $x^{2/3}$ ma być > 0, gdy x zmienia się od -1 do +1.

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE ZŁOŻONE.

Możemy teraz połączyć razem obie okoliczności, które cechowały całki niewłaściwe 1-go i 2-go rodzaju.

Niech i droga całkowania będzie nieskończoną i funkcja $f(x)$ pod znakiem całki niech także staje się nieskończoną dla $x=c$, gdzie $c > a$. Możemy określić symbol:

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ w sposób następujący:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx + \lim_{k \to \infty} \int_b^{k} f(x)dx$$

gdzie $b > c$.

Całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ma sens, czyli jest zbieżną, gdy wszystkie trzy powyższe granice istnieją. Wtedy mamy $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx$, gdzie pierwsza całka $\int_a^{b}$ jest niewłaściwą 2-go rodzaju, a druga całka $\int_b^{\infty}$ niewłaściwą pierwszego rodzaju.

FUNKCJA GAMMA $\Gamma(a)$.

Funkcją gammą nazywamy funkcję, określoną zapomocą następującej całki:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

Wartość tej całki rozpatrujemy jako funkcję liczby a w wykładniku $a-1$, która tu gra rolę zmiennej niezależnej.

Okażemy, że całka powyższa jest zbieżna dla $a > 0$.

W tym celu zauważymy, że obie całki $\int_{\varepsilon}^{1} x^{a-1} e^{-x} dx$

i $\int_1^k x^{a-1} e^{-x} dx$ dążą do określonych granic, pierwsza, gdy $\varepsilon \to 0$, druga gdy $k \to \infty$. Co do istnienia granicy całki drugiej $\int_1^k x^{a-1} e^{-x} dx$, to wystarczy zauważyć, że tu iloczyn $x^2 \cdot f(x) =$

$$= x^2 \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x} = x^{a+1} \cdot e^{-x}$$ dąży do zera,

gdy $x \to +\infty$, czyli $x^{a-1} \cdot e^{-x} < \frac{1}{x^2}$ dla x dostatecznie wielkiego i to niezależnie od wartości liczby a. Tak więc $\int_1^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ jest całką zbieżną pierwszego rodzaju. Przejdźmy teraz do całki:

$\int_\varepsilon^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$; tu $x^{1-a} \cdot f(x) = x^{1-a} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$

dąży do 1, gdy $x \to 0$. Stosując kryterjum, widzimy, że całka będzie zbieżna, o ile $1-a < 1$, t.j. o ile $a > 0$. Wtedy $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$ jest całką zbieżną niewłaściwą 2-go rodzaju. Mamy więc:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} dx;$$

funkcja $\Gamma(a)$ jest sumą dwuch całek, z których jedna jest pierwszego, a druga 2-go rodzaju.