METODA LAGRANGE'a.

Dane jest równanie linjowe pełne:

$$/1/ \quad F(y) = y^{(n)} + X_1 \cdot y^{(n-1)} + X_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots\dots + X_{n-1} y' + X_n y = X.$$

Założmy, że całką ogólną równania redukowanego

$$/2/ \quad F(y) = 0$$

jest

$$/3/ \quad Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots\dots + c_n y_n.$$

Oczywiście, że wówczas całki szczególne równania /2/ tworzą układ zasadniczy, więc wrońskian $W(y_1, y_2, \dots y_n) \neq 0$.

Zastąpmy w równaniu /3/ stałe $c_1, c_2, \dots\dots c_n$ przez zmienne $z_1, z_2, \dots\dots z_n$:

$$/4/ \quad y = z_1 y_1 + z_2 y_2 + \dots\dots + z_n y_n.$$

Zmienne te dobierzemy tak, aby funkcja /4/ przedstawiała całkę szczególną równania /1/. W tym celu utwórzmy pochodną

$$y' = z_1' y_1 + z_2' y_2 + \dots\dots + z_n' y_n + z_1 y_1' + z_2 y_2' + \dots\dots + z_n y_n'$$

i postawmy warunek, aby

$$z_1' y_1 + z_2' y_2 + \dots\dots + z_n' y_n = 0,$$

t.zn. aby

$$y' = z_1 y_1' + z_2 y_2' + \dots\dots + z_n y_n'.$$

Utwórzmy następnie pochodne $y'', y''', \dots\dots y^{(n-1)}$ i poddajmy je warunkom

$$\left.\begin{array}{l} z_1' y_1' + z_2' y_2' + \cdots\cdots + z_n' y_n' = 0 \\ z_1' y_1'' + z_2' y_2'' + \cdots\cdots + z_n' y_n'' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1' y_1^{(n-2)} + z_2' y_2^{(n-2)} + \cdots\cdots + z_n' y^{(n-2)} = 0 \end{array}\right\} *$$

Otrzymamy wówczas

$$\begin{array}{l} y'' = z_1 y_1'' + z_2 y_2'' + \cdots\cdots + z_n y_n'' \\ y''' = z_1 y_1''' + z_2 y_2''' + \cdots\cdots + z_n y_n''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = z_1 y_1^{(n-1)} + z_2 y_2^{(n-1)} + \cdots\cdots + z_n y_n^{(n-1)} \end{array}$$

Mamy $(n-1)$ warunków, którym czynić musi zadość n zmiennych: $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$. Postawimy więc jeszcze jeden warunek, mianowicie taki, któryby oznaczał, że funkcja /4/ jest całką równania /1/.

Napiszmy n-tą pochodną funkcji y :

$$y^{(n)} = z_1 y_1^{(n)} + z_2 y_2^{(n)} + \cdots\cdots + z_n y^{(n)} + z_1' y_1^{(n-1)} + z_2' y_2^{(n-1)} + \cdots\cdots + z_n' y_n^{(n-1)}$$

Podstawiając do równania /1/ wartości dla y oraz jego pochodnych, znajdziemy:

$$F(z_1 y_1 + z_2 y_2 + \cdots\cdots + z_n y_n) = z_1 F(y_1) + z_2 F(y_2) + \cdots\cdots +$$

$$+ z_n F(y_n) + z_1' y_1^{(n-1)} + z_2' y_2^{(n-1)} + \cdots\cdots + z_n' y_n^{(n-1)} = X$$

Ponieważ

$$F(y_1) = 0, \quad F(y_2) = 0, \cdots\cdots F(y_n) = 0,$$

gdyż $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ są to całki szczególne równania redukowanego /2/, więc

$$z_1' y_1^{(n-1)} + z_2' y_2^{(n-1)} + \dots\dots\dots + z_n' y_n^{(n-1)} = X$$ *

Mamy zatem układ n równań linjowych, z których wyznaczymy $z_1' = \varphi_1(x)$; $z_2' = \varphi_2(x)$; .... $z_n' = \varphi_n(x)$; ponieważ wyznacznik jest Wrońskianem i nierówna się 0; stąd przez jedną kwadraturę otrzymamy:

$$z_1 = \int \varphi_1(x)\,dx; \quad z_2 = \int \varphi_2(x)\,dx; \;\dots\dots\; z_n = \int \varphi_n(x)\,dx.$$

Gdy podstawimy te wartości do równania /4/, wówczas y będzie całką szczególną równania /1/. Jeżeli dodamy do niej całkę ogólną /3/ równania redukowanego /2/, to będziemy mieli całkę ogólną równanie pełnego /1/.

METODA CAUCHY'ego.

Mamy znowu dane równanie linjowe pełne:

$$/1/ \quad F(y) = y^{(n)} + X_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_{n-1} \cdot y' + X_n \cdot y = X.$$

Całką równania redukowanego $F(y) = 0$ jest

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots\dots\dots + c_n y_n.$$

Metoda Cauchy'ego polega na tym, że stałe c_1, c_2, ... c_n dobierzmy tak, aby dla $x = x_0$ było

$$y = 0,\; y' = 0,\; y'' = 0,\; \dots\dots\dots\; y^{(n-2)} = 0,\; y^{(n-1)} = X.$$

Powstałą w ten sposób funkcję oznaczamy przez $y = f(x, x_0)$. Gdy $x = x_0$, wówczas

$$f(x_0, x_0) = 0$$
$$f'(x_0, x_0) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n-2)}(x_0, x_0) = 0$$
$$f^{(n-1)}(x_0, x_0) = X.$$

Twierdzimy, że całka

$$/2/ \qquad y = \int_{x_0}^{x} f(x, x_0)\, dx_0$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania /1/.

W rzeczy samej, kolejne pochodne funkcji są równe:

$$y' = f(x, x) + \int_{x_0}^{x} f'_x(x, x_0)\, dx_0 = \int_{x_0}^{x} f'_x(x, x_0)\, dx_0$$
$$y'' = f'(x, x) + \int_{x_0}^{x} f''_{x^2}(x, x_0)\, dx_0 = \int_{x_0}^{x} f''_{x^2}(x, x_0)\, dx_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = f^{(n-1)}(x, x) + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x, x_0)\, dx_0$$

Podstawiając do równania /1/ wyżej napisane wartości funkcji y i jej pochodnych, otrzymamy:

$$F(y) = f^{(n-1)}(x, x) + \int_{x_0}^{x} \{ f^{(n)}(x, x_0) + X_1 f^{(n-1)}(x, x_0) + \dots$$
$$\dots + X_{n-1} \cdot f'(x, x_0) + X_n \cdot f(x, x_0) \}\, dx_0 = X.$$

Suma znajdująca się pod znakiem całki jest z założenia zerem, więc

$$F(y) = f^{(n-1)}(x, x) = X,$$

co oznacza, że funkcja /2/ spełnia równanie /1/.

RULETY.

Zastosujemy teorję równań różniczkowych linjowych do rozwiązywania pewnego rodzaju zagadnień z mechaniki, ściślej mówiąc z cynematyki.

Niech będzie dana krzywa C, wyrażona w układzie spółrzędnych prostokątnych xoy przez równanie

$$/1/ \quad y = f(x).$$

Po krzywej C toczy się bez poślizgu krzywa C_1, z którą jest związany sztywno punkt M.

Drogę W, jaką zakreśla punkt M przy toczeniu się krzywej C_1 po krzywej C nazywamy r u l e t ą tego punktu.

Krzywą C_1 wyrażamy w układzie spółrzędnych biegunowych, związanych z samą krzywą: za początek układu przyjmiemy punkt M, za oś prostą MA, łączącą punkt M z dowolnym punktem A na krzywej. Równaniem jej będzie

$$/2/ \quad r = \varphi(\theta).$$

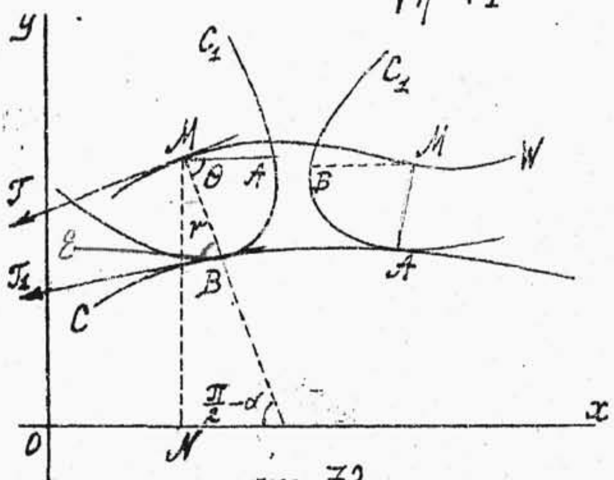
Oznaczmy spółrzędne punktu M w układzie xoy przez (ξ, η). Zagadnienie nasze polegać będzie na znalezieniu zależności pomiędzy ξ i η, czyli na znalezieniu równania rulety W:

$$/3/ \quad \eta = F(\xi).$$

Spółczynnikiem kierunkowym stycznej MT do rulety jest $tg\alpha = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta'$.

Stąd mamy

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\eta'^2+1}}; \quad \sin\alpha = \frac{\eta'}{\sqrt{\eta'^2+1}}.$$



rys. 72.

Weźmy pod uwagę chwilowy punkt styczności B krzywych C i C_1. Ma on w układzie prostokątnym xoy spółrzędne (x, y), a w układzie biegunowym, związanym niezmiennie z krzywą C_1, spółrzędne (r, θ), /gdzie $BM = r$, a $\sphericalangle AMB = \theta$/. Zauważymy, że

$$\xi - x = -r\sin\alpha; \quad \eta - y = r\cos\alpha;$$

a zatym

$$4/ \quad x - \xi = r\cdot\frac{\eta'}{\sqrt{\eta'^2+1}}; \qquad \eta - y = r\cdot\frac{1}{\sqrt{\eta'^2+1}};$$

ponieważ MB jest normalną, czyli prostopadłą do MT.

W rzeczy samej:

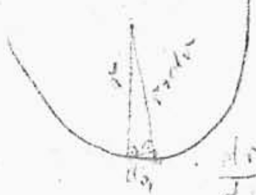
$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2,$$

skąd

czyli
$$(x-\xi)(dx-d\xi)+(y-\eta)(dy-d\eta)=r\,dr,$$

$$/5/\qquad \frac{x-\xi}{r}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\cdot\frac{dy}{ds}-\left\{\frac{x-\xi}{r}\cdot\frac{d\xi}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\cdot\frac{d\eta}{ds}\right\}=\frac{dr}{ds},$$

gdzie ds oznacza element łuku krzywej C. Lecz $\frac{x-\xi}{r}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\cdot\frac{dy}{ds}=\cos\beta$, gdzie β oznacza kąt stycznej BT_1 z promieniem MB. Z drugiej strony, oznaczywszy przez ds_1 różniczkę łuku krzywej C_1, mamy $\cos\beta=\frac{dr}{ds_1}=\frac{dr}{ds}$, ponieważ $ds_1=ds$, co wyraża toczenie się bez ślizgania. Tak więc równanie /5/ zamienia się na



$$\frac{x-\xi}{r}\cdot\frac{d\xi}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\cdot\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\frac{dr}{ds_1}=\cos\beta$$

lub też
$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}=-1,$$

co, jak wiadomo, wyraża prostopadłość dwuch kierunków o spółczynnikach kątowych $\frac{y-\eta}{x-\xi}$ i $\frac{d\eta}{d\xi}$, czyli prostej MB i stycznej MT, co trzeba było dowieść.

Wyraźmy teraz, że krzywa C_1 jest styczna do krzywej C.
$$\sphericalangle MBT_1=\sphericalangle MBE+\sphericalangle EBT_1=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}-(\alpha-\varphi),$$
więc

$$/7/\qquad tg\sphericalangle MBT_1=cotg(\alpha-\varphi)=\frac{1+tg\alpha\cdot tg\varphi}{tg\alpha-tg\varphi}.$$

Lecz $tg\varphi=\frac{dy}{dx}=y'$, ponieważ BT_1 jest styczną do krzywej C. Z drugiej zaś strony kąt MBT_1 jest kątem między promieniem wodzącym r a styczną BT_1 do krzywej C_1, co przy spółrzędnych biegunowych daje wzór: $tg\sphericalangle MBT_1=\frac{r}{r'}$, przyczym $r'=\frac{dr}{d\theta}$; podstawiając te wartości w równanie /7/, otrzymamy:

$$/8/\quad \frac{r}{r'}=\frac{1+\eta' y'}{\eta'-y'}.$$

Wzory /1/, /2/, /3/, /4/ i /8/ streszczają całą teorję rulety. Mamy tu trzy typy zadań.

1/ Dana krzywa stała C i ruchoma C_1 , znaleźć ruletę W . Znamy więc funkcje: $y=f(x)$; $y'=f'(x)$; $r=\varphi(\theta)$; $r'=\varphi'(\theta)$. Z równań /4/ i /8/ otrzymamy przez wyrugowanie r i θ zależność między $\frac{d\eta}{d\xi}$, η i ξ , czyli równanie różniczkowe rulety W . Pozostaje tylko to równanie scałkować.

2/ Dana krzywa stała C i ruleta W ; znaleźć krzywą ruchomą C_1 . Znamy więc funkcje $y=f(x)$; $y'=f'(x)$; $\eta=F(\xi)$; $\eta'=F'(\xi)$; podstawiając te wartości w równania /4/ i /8/, po wyrugowaniu x i ξ , otrzymamy związek między $\frac{dr}{d\theta}$, r, θ, czyli równanie różniczkowe krzywej C_1 .

3/ Dana jest krzywa tocząca się C_1 i ruleta W. Znaleźć krzywą stałą C . Znamy w tym zadaniu funkcje:

$$r=\varphi(\theta);\quad r'=\varphi'(\theta);\quad \eta=F(\xi);\quad \eta'=F'(\xi);$$

podstawiamy te wartości w równania /4/ i /8/ i, rugując θ i ξ , otrzymamy związek między $\frac{dy}{dx}$, y, x , a więc równanie różniczkowe krzywej stałej C .

Ze związków /4/ i /8/ wynikają jako wnioski zależności następujące:

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{r_0}^{r}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\,dr$$

oraz

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=r^2,$$

z których pierwsza wyraża równość łuków krzywych C i C_1 stałej i toczącej się, a druga wyraża, że r jest równe odległości punktów M i B. Te zależności można dołączyć do poprzednich, jako mogące w niektórych razach przynieść pożytek w rachunkach.

P r z y k ł a d 1. Znaleźć ruletę zakreśloną przez ognisko paraboli C_1, toczącej się po prostej C.

Równaniem prostej C niech będzie $y=0$.

Równaniem paraboli C_1: $r=\frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$. Równanie /4/ daje nam: $\eta=\frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}}\cdot\frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$, a /8/ daje $tg\frac{\theta}{2}=\eta'$, skąd

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}}\;;\quad \text{czyli}\quad \eta=\frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}}\cdot a(1+\eta'^2)=a\sqrt{1+\eta'^2}.$$

Tak więc $\eta=a\sqrt{1+\eta'^2}$ jest równaniem różniczkowym szukanej rulety. Całkując, otrzymamy:

$$\sqrt{\left(\frac{\eta}{a}\right)^2-1}=\frac{d\eta}{d\xi}\;;\quad \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-a^2}}=\frac{d\xi}{a}\;;\quad \int\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-a^2}}=\int\frac{d\xi}{a}\;;$$

$$lg\left(\frac{\eta}{a}+\frac{\sqrt{\eta^2-a^2}}{a}\right)=\frac{\xi-\xi_0}{a}$$

skąd

$$\frac{\eta}{a}+\frac{\sqrt{\eta^2-a^2}}{a}=e^{\frac{\xi-\xi_0}{a}}$$

$$\frac{\eta}{a}-\frac{\sqrt{\eta^2-a^2}}{a}=e^{-\frac{\xi-\xi_0}{a}}$$

dodając stronami otrzymamy:

$$2\frac{\eta}{a} = e^{\frac{\xi-\xi_0}{a}} + e^{-\frac{\xi-\xi_0}{a}};$$

więc

$$\eta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\xi-\xi_0}{a}} + e^{-\frac{\xi-\xi_0}{a}}\right) = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{\xi-\xi_0}{a}.$$

Tak więc szukaną ruletą jest linja łańcuchowa. Stałą określamy z położenia początkowego paraboli, co daje nam punkt początkowy rulety.

P r z y k ł a d 2. Znaleźć krzywą C_1, którą trzeba toczyć po elipsie, by punkt z nią nierozerwalnie związany zakreślił linję prostą.

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}; \quad F(\xi) = 0 = \eta;$$

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}; \quad F'(\xi) = 0 = \eta'.$$

Równanie /8/ daje

$$\frac{r}{r'} = -\frac{1}{f'(x)}; \qquad \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{bx}.$$

Równanie /4/ daje $-y=r$ czyli $r + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=0$, skąd

$$bx = a\sqrt{b^2-r^2}.$$

Rugując z równań: $\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{bx}$ i $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}$ zmienną x, otrzymamy $d\theta = -\frac{a}{b}\cdot\frac{dr}{\sqrt{b^2-r^2}}$, skąd $r = b\cos\left[\frac{b}{a}(\theta-\theta_0)\right]$.

P r z y k ł a d 3. Znaleźć krzywą C_1, która, tocząc się po paraboli, zakreśla jednym ze swoich punktów oś paraboli.

$$f(x)=\sqrt{2ax}\,; \qquad \eta=F(\xi)=0;$$

$$f'(x)=\sqrt{\frac{a}{2x}}\,; \qquad \eta'=F'(\xi)=0.$$

Równanie /8/ daje $\frac{r}{r'}=-\sqrt{\frac{2x}{a}}$, równanie zaś /4/ daje $r=-\sqrt{2ax}$; rugując x otrzymamy równanie $r'=\pm a$; skąd $r=\pm a(\theta-\theta_0)$, czyli szukaną krzywą C jest spiralna. Jeśli przyjmiemy $\theta_0=\mp\frac{\pi}{2}$, wówczas biegun spiralnej toczącej się po paraboli opisze oś paraboli.

<u>P r z y k ł a d 4.</u> Znaleźć krzywą C, po której trzeba toczyć kardioidę, by jej biegun zakreślił prostą.

Równanie kardioidy, jeśli początek spółrzędnych znajduje się w biegunie, przyjmie postać $r=a(1+\cos\theta)$; tak więc:

$$r=\varphi(\theta)=a(1+\cos\theta); \qquad \eta=0;$$

$$r'=\varphi'(\theta)=-a\sin\theta; \qquad \eta'=0; \qquad \theta=\arccos\frac{r-a}{a}.$$

Równanie /8/ daje: $\frac{r}{r'}=-\frac{1}{y'}$; równanie zaś /4/ daje: $-y=r$, czyli $\frac{1}{y'}=-\frac{r\,d\theta}{dr}=\sqrt{\frac{r}{2a-r}}$; ponieważ $r=y$, to rugując r otrzymamy równanie różniczkowe krzywej stałej C:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}\,;$$

jest to równanie różniczkowe cykloidy, utworzonej przez toczenie się koła o promieniu a po osi odciętych.

Tak więc szukaną krzywą C jest w tym przypadku cykloida.

ROZWIĄZANIA OSOBLIWE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.

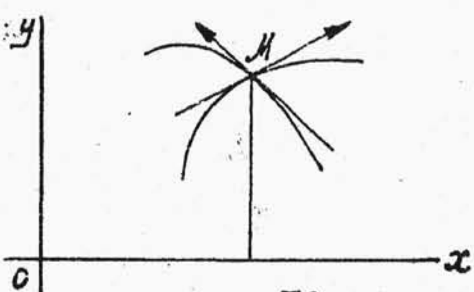
Niech będzie dane równanie różniczkowe I-go rzędu

$$/1/ \quad f(x,y,y')=0;$$

całka tego równania przedstawia rodzinę krzywych

$$/2/ \quad \varphi(x,y,C)=0.$$

Przypuśćmy, że równanie /1/ jest stopnia drugiego względem pochodnej y'. W takim razie dla każdego punktu płaszczyzny xoy mamy dwie wartości y' czyli dwie styczne; znaczy to, że przez każdy punkt płaszczyzny przechodzą dwie krzywe rodziny /2/. Analogicznie sprawa się przedstawia jeżeli równanie /1/ jest względem pochodnej y' stopnia wyższego niż drugi: liczba krzywych, przechodzących przez dowolny punkt płaszczyzny xoy jest *najwyżej* równa stopniowi równania /może się to nieraz stosować tylko do pewnego obszaru na płaszczyźnie/.



rys. 73.

Jeżeli krzywe rodziny /2/ się przecinają, t.zn. jeśli równanie /1/ jest stopnia wyższego niż pierwszy, wówczas mogą one posiadać obwiednię. Znajdziemy równanie tej obwiedni

$$/3/ \quad \eta = F(\xi),$$

rugując C z równań:

$$\varphi(x,y,C)=0;$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,C)}{\partial C}=0.$$

Weźmy pod uwagę punkt M obwiedni, o spółrzędnych (ξ,η). Leży on na jakiejś krzywej γ rodziny /2/ i dlatego można oznaczyć jego spółrzędne przez (x,y), przyczem

$$\xi=x, \quad \eta=y.$$

Lecz punkt M jest punktem styczności obwiedni z krzywą γ, więc

$$\eta'=y'$$

A zatym pomiędzy ξ,η,η' zachodzi taki sam związek, jak pomiędzy x,y,y':

$$f(\xi,\eta,\eta')=0,$$

czyli obwiednia spełnia dane równanie różniczkowe /1/, chociaż nie należy do rodziny /2/ t.zn. nie jest objęta przez całkę ogólną. Nosi ona nazwę całki osobliwej.

+ UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.

Do układu dwu równań jednoczesnych rzędu 1-go dojść możemy przy różniczkowaniu i rugowaniu stałych dowolnych C_1 i C_2 z 2 równań:

$$/1/ \quad \begin{aligned} &f_1(x,y,z,C_1,C_2)=0\,; \\ &f_2(x,y,z,C_1,C_2)=0\,; \end{aligned}$$

stanowią one układ który może być rozwiązany względem y i z, tak, iż $y=\varphi_1(x,C_1,C_2)$; $z=\varphi_2(x,C_1,C_2)$. W rzeczy samej, różniczkując względem x, mamy: