SKALA WZRASTANIA.

O WIELKICH RÓŻNEGO RZĘDU.

OKREŚLENIE. 1/ Jeśli mamy dwie zmienne u i v, które są tak związane ze sobą, że $u \to \infty$, gdy $v \to \infty$, to mówimy, iż zmienne nieskończenie wielkie u i v są tego samego rzędu, o ile $\lim\limits_{v \to \infty} \frac{u}{v}$ istnieje i równa się pewnej liczbie $A \neq 0$.

Uwaga. Zmienna u może być bezpośrednio funkcją zmiennej v, albo też obie są funkcjami tej samej zmiennej niezależnej, np. x.

2/ Przyjąwszy zmienną v jako zasadniczą, nazwiemy ją wielką pierwszego rzędu, v^2 - wielką drugiego rzędu, ... v^n - wielką n-tego rzędu. Stąd wynika, na zasadzie poprzedniego określenia, iż wielka u jest rzędu n, jeśli $\lim\limits_{v \to \infty} \frac{u}{v^n}$ istnieje i jest równa pewnej liczbie $A \neq 0$.

Z określenia wynika, iż zmienna u nie może być względem wielkiej v jednocześnie rzędu n i m $(n \neq m)$, czyli jeśli posiada jakiś rząd, to jest on określony jednoznacznie. /Dowód?/.

3/ Niech u i v dążą do nieskończoności, gdy zmienna niezależna x dąży do liczby a lub rośnie nieograniczenie. Powiemy, że u dąży do nieskończoności szybciej niż v, jeśli stosunek $\frac{u(x)}{v(x)}$

rośnie nieograniczenie. Jeśli $u(x)$ jest rzędu wyższego niż $v(x)$, to, oczywiście, $u(x)$ rośnie do nieskończoności szybciej, niż $v(x)$. /Dowód?/.

Ć w i c z e n i e. Wprowadzić - na mocy określenia - rzędy wzrastania ułamkowe.

Pojęcia poprzednio wyłożone ważne są szczególnie w zastosowaniu do funkcji, które stale rosną. Przyjmiemy, że tak jest.

Mamy przed sobą dwa zagadnienia pierwszorzędnej wagi, mianowicie: 1/ jeśli $u(x)$ i $v(x)$ dążą do nieskończoności jednocześnie, i jeśli $v(x)$ przyjmiemy za małą pierwszego np. rzędu, czy $u(x)$ zawsze posiada określony rzad, t.j. czy dwie nieskończenie wielkie są zawsze porównywalne na zasadzie poprzednio wyłożonych określeń?

2/ Czy szybkość wzrastania funkcji, dążących do nieskończoności, da się wyrazić liczbami?

Dwa te zagadnienia są ściśle ze sobą związane. Zanim odpowiemy na te pytania, zbadamy, w jaki sposób funkcja wykładnicza e^x i funkcja logarytmiczna lgx dążą do nieskończoności.

O WZRASTANIU FUNKCJI WYKŁADNICZEJ.

Niech zmienna x, którą przyjmiemy za wielką pierwszego rzędu, dąży do nieskończoności. Utworzymy ciąg funkcji

(I.) $x,\ x^2,\ x^3,\ \dots\dots\ x^n, \dots\dots$

z których każda następna jest rzędu o jeden większego od poprzedzającej.

Niech $u(x) \to \infty$. Wydawałoby się, iż w ciągu powyższym, w którym n jest dowolnie wielkie, można znaleźć funkcję x^n, taką, by x^n rosło szybciej od naszej funkcji dowolnej $u(x)$; wtedy, począwszy od pewnej wartości zmiennej x, ma miejsce nierówność $u(x) < x^n$. Otóż tak nie jest. Do najciekawszych własności funkcji wykładniczej e^x należy sposób, w jaki rośnie ona do nieskończoności. Mianowicie e^x dla $x \to \infty$, rośnie do nieskończoności szybciej, niż x^n, przy dowolnie wielkim n.

Mianowicie udowodnimy, iż

$$\frac{e^x}{x^n} \to \infty, \qquad \text{gdy} \quad x \to \infty.$$

Najprościej dowieść można, korzystając z rozwinięcia funkcji wykładniczej na szereg, zbieżny przy każdej wartości x.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots\dots$$

Ponieważ $x > 0$, wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie; e^x jest więc większe od każdego wyrazu sumy. Tak więc:

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

Stąd

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$ gdzie n jest liczbą dowolną, ale ustaloną. Gdy $x \to \infty$, to $\frac{x}{(n+1)!} \to \infty$, a więc i lewa strona poprzedniej nierówności rośnie nieograniczenie, czyli $\frac{e^x}{x^n} \to \infty$, gdy $x \to \infty$.

Udowodniliśmy więc, że e^x rośnie szybciej od jakiejkolwiek potęgi /całkowitej/ zmiennej x. Nie istnieje więc żadna liczba n, którąby wyrażała rząd wielkości funkcji e^x, gdy x jest wielką rzędu pierwszego, czyli że e^x nie można nigdzie umieścić w ciągu /I/.

Z powyższego wynika także, iż stosunek odwrotny dąży do zera, t.j. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, lub inaczej $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$.

Możemy to wyrazić, mówiąc, że funkcja e^{-x} /gdy $x \to \infty$/ dąży szybciej do zera, niż $\frac{1}{x^n}$ /przy dowolnym n/.

O WZRASTANIU FUNKCJI LOGARYTNICZNEJ $\log_e x$.

Utwórzmy teraz ciąg funkcji, które przy $x \to \infty$ dążą także do nieskończoności, ale coraz to wolniej. Ciągiem takim jest ciąg

/II/ $x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \ldots\ldots, \sqrt[n]{x}, \ldots\ldots$ czyli

$$x,\ x^{1/2},\ x^{1/3},\ \ldots\ldots x^{1/n},\ \ldots\ldots$$

U w a g a : Bierzemy wartości arytmetyczne pierwiastka. Zachodzi i tu także pytanie, czy istnieje taka funkcja, która rośnie do nieskończoności wolniej, niż jakikolwiek wyraz tego szeregu, t.j. wolniej niż $x^{1/n}$, przy dowolnie wielkiej, lecz ustalonej wartości n.

Otóż twierdzimy, iż funkcją taką jest $\log_e x$. Możemy bowiem udowodnić, iż dla jakiejkolwiek liczby $\alpha = \frac{1}{n}$ słusznym jest:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_e x}{x^\alpha} = 0.$$

W rzeczy samej, niech $\log_e x = y$, wtedy $x = e^y$

Wiemy, iż $\frac{y^n}{e^y} \to 0$, gdy $y \to \infty$; lecz

$$\frac{y^n}{e^y} = \frac{(\log_e x)^n}{x}$$

Tak więc $\frac{(\log_e x)^n}{x^n} \to 0$, gdy $x \to \infty$.

Stąd także:

$$\frac{\log_e x}{x^{\frac{1}{n}}} \to 0, \qquad \text{gdy } x \to \infty.$$

Otrzymany wynik można uogólnić, mianowicie jest

$$\lim \frac{\log_e x}{x^\alpha} \to 0, \qquad \text{gdy } x \to \infty$$

gdzie α dowolna liczba > 0.

Łatwo jest teraz zbadać, jaki jest przebieg zmienności funkcji $\log_e x$, gdy $x \to 0$. Przedewszystkiem $\log x$ jest wtedy ujemny, $\log x = -\log\frac{1}{x}$; $|\log x| = \log\frac{1}{x}$

Gdy $x \to 0$, to $\frac{1}{x} \to \infty$, a więc $|\log x|$ rośnie nieograniczenie, ale wolniej niż $\left(\frac{1}{x}\right)^n$, a $\log x$ dąży do $-\infty$.

Możemy wyrazić to jeszcze inaczej, mianowicie: $\lim\limits_{x \to \infty} x^\alpha \cdot \log_e x = 0$, gdzie α liczba > 0. Wynika to stąd, iż

$$x^\alpha \cdot \log x = -\frac{\log\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \frac{\log y}{y^\alpha}$$

a gdy $x \to 0$, to $y \to \infty$, a $\frac{\log y}{y^\alpha}$ do zera.

SKALA WZRASTANIA.

Na zasadzie poprzednio udowodnionych własności funkcji wykładniczej, możemy utworzyć następującą skalę funkcji coraz to prędzej rosnących do nieskończoności; jest to nieskończony ciąg ciągów:

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots\ldots\ x^n,\ \ldots$$
$$e^x,\ e^{x^2},\ e^{x^3},\ \ldots\ldots\ e^{x^n},\ \ldots$$
$$e^{e^x},\ e^{e^{x^2}},\ e^{e^{x^3}},\ \ldots\ldots\ e^{e^{x^n}},\ \ldots$$
$$e^{e^{e^x}},\ e^{e^{e^{x^2}}},\ e^{e^{e^{x^3}}},\ \ldots\ldots\ e^{e^{e^{x^n}}},\ \ldots$$
$$e^{e^{e^{e^x}}},\ e^{e^{e^{e^{x^2}}}},\ e^{e^{e^{e^{x^3}}}},\ \ldots\ldots\ e^{e^{e^{e^{x^n}}}},\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Między e^x i e^{x^2} możemy jeszcze wstawić nieskończony ciąg funkcji: e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}, ... e^{nx}, ...

Tak samo między e^{x^2} i e^{x^3} fukcje: e^{2x^2}, e^{3x^2}, e^{4x^2}, ...e^{nx^2} i t.d.

Postępując w ten sposób, moglibyśmy utworzyć taką funkcję $e_n(x)$, gdzie liczba potęgowań wynosiłaby dowolną liczbę n szczebli.

$$e_n(x) = e^{e^{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^{e^x}}}}}}}}$$

Funkcja taka rosłaby do nieskończoności bardzo szybko. Istnieją jednak funkcje, które rosną jeszcze szybciej od $e_n(x)$ /jakkolwiek wielką byłaby liczba n /. Lecz funkcjami temi zajmować się nie będziemy.

Możemy ciąg poprzedni przedłużyć w przeciwnym kierunku, t.j. utworzyć skalę, dla funkcji rosnących nieograniczenie, ale coraz to wolniej.

$$x,\ x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{1}{4}},\ \ldots\ldots\ x^{\frac{1}{n}},\ \ldots$$
$$\log x,\ (\log x)^{1/2},\ (\log x)^{1/3},\ \ldots\ldots\ (\log x)^{\frac{1}{n}},\ \ldots$$
$$\log\log x,\ (\log\log x)^{1/2},\ (\log\log x)^{1/3}\ \ldots\ (\log\log x)^{1/n}\ \ldots$$
$$\log\log\log x,\ (\log\log\log x)^{1/2},\ \ldots\ldots\ (\log\log\log x)^{1/n}\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jednakże i tu istnieją funkcje, które rosną do nieskończoności wolniej od wszelkiej dowolnie pomyślanej funkcji rozpatrywanej tablicy /skali/.

RZĄD WZRASTANIA, A LICZBA.

Z powyższych przykładów wynika już, że wzrastanie funkcji nie da się przedstawić i objąć liczbami. W rzeczy samej, jeśli x jest wielką $\to \infty$, rzędu pierwszego, to tylko wielkie wchodzące w skład pierwszego wiersza tablicy, odpowiadającej naszej skali, dadzą się wyrazić liczbami na zasadzie teorji rzędów, mianowicie x^n jest rzędu n, ale e^x, e^{x^2}......... i wszystkie następne usuwają się z pod tego ujęcia.

Jeśli chcemy wyrazić rząd wzrastania liczbą, to naturalnem jest żądanie, by funkcji rosnącej szybciej, odpowiadała liczba większa. Weźmiemy pod uwagę trzy funkcje $\to \infty$ i rosnące coraz szybciej: x, $x \log x$, $x^{1+\frac{1}{n}}$; jeśli x jest rzędu 1, to $x^{1+\frac{1}{n}}$ jest rzędu $1+\frac{1}{n}$, rząd zaś $x \log x$ oznaczmy przez α ; mielibyśmy wtedy nierówności $1 < \alpha < 1+\frac{1}{n}$, przy n dowolnie wielkim. Oczywiście, takiej liczby α, któraby spełniała zawsze powyższą nierówność - niema. Tak więc rzędu wzrastania funkcji $x \log x$ liczbą ująć nie możemy.

Niemożność ujęcia - wzrastania - liczbą jest istotna

Przyczyna tego faktu tkwi głębiej, mianowicie w tem, iż liczby spełniają pewnik Archimedesa, rzędy wzrastania zaś - nie spełniają tego pewnika.

PEWNIK ARCHIMEDESA.

Niech będą dwie liczby a i b, przytem $a<b$; połóżmy dalej: $s_2 = a+a$, $s_3 = a+a+a$, ...

$$s_n = a+a+a+\cdots\cdots+a \quad .$$

/ s_n suma n składników równych a /.

Pewnik Archimedesa polega na tem, iż istnieje taka suma s_n, która jest większa od liczby b, czyli $a+a+a+\cdots\cdots+a > b$.

Ć w i c z e n i e . Z poprzednio podanych przykładów możemy wywnioskować, że rzędy wzrastania nie spełniają pewnika Archimedesa.

REGUŁY PRAKTYCZNE.

Z poprzedniego wynikają następujące, ważne w zastosowaniu wnioski.

1/ Rząd wzrastania iloczynu dwuch funkcji, które $\to \infty$, równa się sumie rzędów czynników /dowód?/.

2/ Rząd wzrastania sumy pewnej /skończonej/ ilości wyrazów równa się rzędowi wzrastania tego składnika, który wzrasta najszybciej; wyraz ten nazywa się wyrazem głównym.

Uogólnić możemy pojęcie wyrazu głównego /albo wyrazów głównych/ sumy i w tym wypadku, gdy rzędy wzrastania składników nie są ze sobą porównywalne /np.

$e^x + x^2$, $\lg x + \sqrt{x}$, .../, nazywając wyrazem głównym ten wyraz /wyrazami głównemi te wyrazy/, który rośnie szybciej od wszystkich innych. Np. w sumie

$e^{x^2}\lg x + e^{x^2} + x(\lg x)^2 + \lg x$ wyrazem głównym jest $e^{x^2}\lg x$

3/ Jeśli chcemy określić granicę stosunku dwuch wyrażeń złożonych u i v, to bierzemy pod uwagę tylko stosunek ich wyrazów głównych, na tej zasadzie, iż

$$\lim_{v\to\infty}\frac{u}{v} = \frac{\text{wyraz główny } u}{\text{wyraz główny } v}$$

<u>Ć w i c z e n i a .</u> 1/ Uporządkować według skali wzrastania następujące funkcje:

e^{x^2}, $e^{x^2\log x}$, $e^{x\log x}$, x^x, xe^{x^2}, $(\log x)e^{x^2}$, $x^{\log x}$, $(\log x)^x$, $e^{(\log x)^2}$, $x^{x\log x}$, $e^{x\log\log x}$, $e^{x(\log x)^2}$, $(x\log x)^x$.

2/ Znaleźć : $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{x\log x}+e^{x\log x}}{e^{x(\log x)^2}+x\cdot e^x}$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{e^x}+e^{e^{10}}+e^x+x^5}{e^{e^{x^2}}+e^{10x^5}+x^{100}}$$