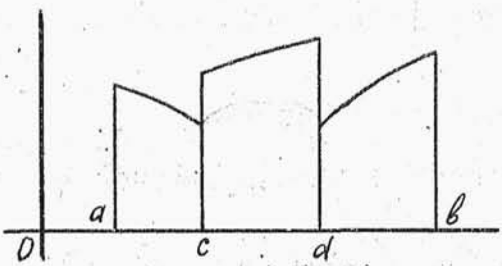
CAŁKI NIEWŁAŚCIWE.

PODZIAŁ NA 2 RODZAJE.

Określiliśmy w poprzednich rozdziałach całkę $\int_a^b f(x)\,dx$, przyczem udowodniliśmy istnienia odpowiedniej granicy, wyrażonej symbolem całki $\int_a^b f(x)\,dx$ przy spełnieniu następujących warunków: 1/ liczby a i b wyznaczające "drogę całkowania" są określonemi liczbami skończonemi, 2/ funkcja pod znakiem całki $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a,b), t.j. dla $a \leq x \leq b$. Pojęcie całki rozszerzyliśmy następnie, udowadniając, iż odpowiednia granica istnieje i w tym wypadku, gdy funkcja $f(x)$ przestaje być ciągłą, mianowicie, gdy między a i b istnieje skończona liczba punktów nieciągłości, np. c i d / $a < c < d < b$ /, przyczem w punktach c i d istnieją granice lewostronna i prawostronna, lecz te dwie granice nie równają się sobie, t.j. istnieje $f(c+0)$ i $f(c-0)$, lecz $f(c+0) \neq f(c-0)$. W każdym razie we wszystkich rozpatrywanych dotychczas przypadkach funkcja $f(x)$ była ograniczona w przedziale (a,b). Teraz postaramy się rozszerzyć jeszcze bardziej pojęcie całki, tak, aby objąć i te przypadki, gdy bądź droga całkowania



Rys. 1.

przestaje być skończoną, bądź funkcja pod znakiem całki w przedziale całkowania zrywa ciągłość w ten sposób, iż przestaje być ograniczoną. W pierwszym przypadku rozszerzenie pojęcia całki da nam całkę niewłaściwą /czyli nieskończoną/ pierwszego rodzaju, a w drugim przypadku będziemy mieli całkę niewłaściwą drugiego rodzaju.

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE PIERWSZEGO RODZAJU.

Przypuśćmy, iż funkcja $f(x)$ jest ciągłą dla wszystkich wartości x, spełniających warunek $x > a$. Niech k oznacza dowolną liczbę $> a$; wówczas całka $\int_a^k f(x)\,dx$ ma wartość zupełnie określoną dla każdego $k > a$, gdyż $f(x)$ jest w przedziale (a, k) funkcją ciągłą, a przedział (a, k) jest przedziałem skończonym. Wartość całki $\int_a^k f(x)\,dx$ jest, oczywiście, funkcją zmiennej k

dajmy na to $F(k)$. Gdy k rośnie nieograniczenie, wtedy może istnieć granica $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^k f(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} F(k)$.

Granicę tę, o ile istnieje, oznaczymy symbolem:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

T a k   w i ę c   m a m y   o k r e ś l e n i e :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)dx$$

Napisana równość jest zasadniczą. Zawiera ona o k r e ś l e n i e c a ł k i n i e s k o ń c z o n e j 1-go r o d z a j u . Drogą całkowania nazwiemy przedział niewłaściwy / a, ∞ /, czyli powiemy krótko, iż droga całkowania jest w całkach niewłaściwych 1-go rodzaju - nieskończoną.

Pojęcie całki niewłaściwej jest bardziej złożone, aniżeli pojęcie całki właściwej. Mamy tu granicę granicy, czyli granicę podwójną; w rzeczy samej, całka nasza $\int_a^\infty f(x)dx$ jest granicą całek właściwych $\int_a^k f(x)dx$ z których każda jest ze swojej strony granicą pewnej sumy /sumy pól prostokątów wpisanych lub opisanych - w interpretacji geometrycznej/.

Jeżeli całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)dx$ ma sens, t.j. gdy istnieje granica $\lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)dx$, to taką całkę 1-go rodzaju nazywamy z b i e ż n ą . W przeciwnym zaś razie - r o z b i e ż n ą . Nazwy te są analogiczne do używanych w teorji szeregów. Analogję tę łatwo uzasadnić tem, że całkę niewłaściwą można rozpatrywać jako sumę pewnego szeregu. Niech będzie ciąg liczb rosnących nieograniczenie:

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots\dots$$

i niech $a_n \to \infty$ wraz z n $\left(a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\right)$. Powiadam, że całka $\int_a^\infty f(x)dx$ w razie zbieżności jest sumą szeregu:

$$/1/ \quad \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx + \dots\dots$$

W rzeczy samej, kładąc $a_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n = \int_a^{a_n} f(x)dx$$

s_n jest sumą częściową szeregu /1/. Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżną, to

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{a_n\to\infty} \int_a^{a_n} f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx,$$

czyli $\lim_{n\to\infty} s_n$ istnieje, a więc szereg /1/ jest zbieżny i suma tego szeregu równa się całce $\int_a^\infty f(x)dx$.

Jeśli znamy funkcję pierwotną dla $f(x)$, to łatwo jest rozstrzygnąć, czy całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, czy też nie. W rzeczy samej, niech $F'(x) = f(x)$; w takim razie $\int_a^k f(x)dx =$ $= F(k) - F(a)$. Jeśli istnieje granica strony prawej, to istnieje też i granica strony lewej i odwrotnie.

Stąd wniosek, iż całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, o ile $\lim_{k\to\infty} F(k)$ istnieje i mamy wtedy, oznaczywszy tę granicę przez $F(\infty)$:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a).$$

Odwrotnie, jeśli całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to $\lim_{k\to\infty} F(k)$ istnieje.

Niech będzie dana całka $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Zbieżność tej całki możemy łatwo okazać, ponieważ znamy funkcję pierwotną dla $\frac{1}{1+x^2}$, jest nią, mianowicie, funkcja $Arctg x$.

Tak więc

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{k\to\infty} \Big| Arctg x \Big|_0^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} Arctg k = \pi/2,$$

czyli całka jest zbieżna i równa $\pi/2$.

Zbadajmy jeszcze pod względem zbieżności całkę $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s}$, gdzie $a>0$. Powyższa całka jest granicą całki $\int_a^{k} \frac{dx}{x^s}$, gdy k rośnie nieograniczenie. Funkcją pierwotną jest tu $F(x) = \frac{x^{-s+1}}{1-s}$ /gdy $s \neq 1$ /. Tak więc:

$$\int_a^k x^{-s} dx = \left| \frac{x^{-s+1}}{1-s} \right|_a^k = \frac{k^{-s+1} - a^{-s+1}}{1-s}$$

W wyrażeniu otrzymanym zmienną jest k . Gdy $s > 1$, to wykładnik w k^{-s+1} jest ujemny i wyraz ten dla $k \to \infty$, dąży do zera. Wówczas całka nasza jest zbieżna. Możemy napisać:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^{+s}} = \lim_{k \to \infty} \int_a^k \frac{dx}{x^{+s}} = \frac{1}{(s-1) \cdot a^{s-1}}$$

Gdy $s < 1$, wtedy dla $k \to \infty$, wyraz k^{-s+1} dąży do nieskończoności. A zatem całka nasza jest wtedy rozbieżna. Przy $s = 1$ funkcją pierwotną jest $lg x$; $\int_a^k \frac{dx}{x} = lg k - lg a$; całka jest również wówczas rozbieżna, gdyż $lg k$ dąży do ∞ wraz z k

Interpretacja geometryczna otrzymanego wyniku nie przedstawia trudności. Pod znakiem naszej całki mamy funkcję

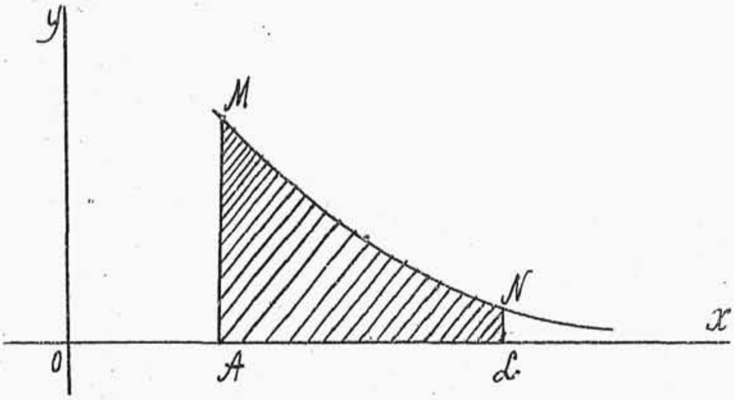
$$y = \frac{1}{x^s}$$

czyli

$$y = x^{-s}$$

. Przy $s > 0$ funkcji tej odpowiada pewna krzywa MN, która zbliża się asymptotycznie do osi x .

Całka $\int_a^l \frac{dx}{x^s} = R(l)$ przedstawia nam pewne po-

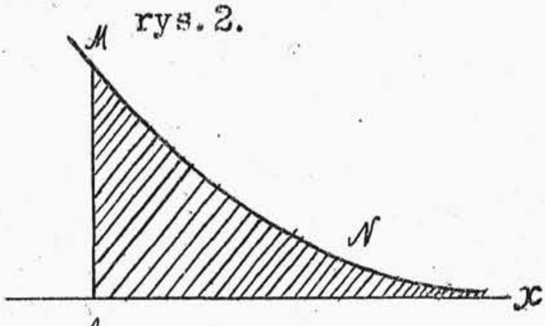


rys.2.

le AMNL. Okazaliśmy powyżej, że przy $s>1$ istnieje granica

$$\lim_{l\to\infty}\int_a^l \frac{dx}{x^s} = \int_a^\infty \frac{dx}{x^s}.$$

Całka $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$ wyraża pole, zawarte między rzędną AM, osią x, oraz krzywą MN.



rys.3.

Jest to słuszne tylko dla $s>1$. Przy $0<s<1$ krzywa będzie miała kształt podobny. Jednak granica wtedy nie istnieje. Pole zawarte między rzędną, osią x i krzywą jest w tym wypadku nieskończenie wielkie.

Z teorji szeregów wiemy, że jeśli odrzucić kilka pierwszych wyrazów szeregu zbieżnego, to szereg pozostanie zbieżnym, przyczym granica nowego szeregu jest równa granicy dawnego szeregu mniej odrzucone wyrazy.

Podobnież z łatwością udowodnimy, iż, jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, to i całka $\int_b^\infty f(x)\,dx$, gdzie $b>a$ jest również zbieżną,

przyczym
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx.$$

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu zbieżnego pomnożyć przez tę samą liczbę, to otrzymamy nowy szereg, również zbieżny.

Tak samo z łatwością udowodnimy analogiczne twierdzenie z teorji całek, mianowicie, jeśli całka

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^{\infty} K f(x)\,dx$, gdzie K jest liczbą stałą, jest również zbieżna, przyczym
$$\int_a^{\infty} K\cdot f(x)\,dx = K\cdot\int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

Wiemy, że szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeśli wszystkie sumy częściowe, odpowiadające temu szeregowi, są ograniczone od góry, t.j. pozostają mniejsze od pewnej liczby stałej.

Rzecz się ma podobnie i dla całek niewłaściwych. Szeregom o wyrazach dodatnich odpowiada całka, w której funkcja pod znakiem całki jest stale dodatnia. Opierając się na określeniu całki niewłaściwej 1-go rodzaju, z łatwością udowodnimy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ gdzie $f(x) > 0$, gdy $x > a$, jest istnienie liczby M, takiej, iż dla każdego $k > a$, spełniona jest nierówność

$$\int_a^k f(x)dx < M.$$

Twierdzeniu o porównywaniu dwuch szeregów odpowiada twierdzenie o porównywaniu dwuch całek. Przypuśćmy, iż przy $x>a$, obie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są dodatnie, i niech prócz tego zachodzi zawsze nierówność $f(x) \leq K\cdot\varphi(x)$, gdzie K - liczba stała. Wówczas, jeśli całka $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ jest zbieżna, to i całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest także zbieżną.

W rzeczy samej $\int_a^k f(x)dx \leq K\int_a^k \varphi(x)dx < M$ dla każdego $k>a$; czyli całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna na zasadzie twierdzenia poprzedniego.

Zestawiając twierdzenie o porównywaniu dwuch całek z tym, co powiedziane było o zbieżności całki $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$, otrzymamy następujące KRYTERJUM PRAKTYCZNE ZBIEZNOŚCI: jeśli, począwszy od pewnej wartości x, mamy $|f(x)| < \frac{M}{x^s}$, gdzie M jest liczbą stałą, a $s>1$, to całka $\int_a^\infty |f(x)|dx$ jest zbieżna. Ze zbieżności zaś całki $\int_a^\infty |f(x)|dx$ łatwo wywnioskować, że i całka

$\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna.

Kryterjum to możemy np. zastosować wtedy, gdy iloczyn $x^s \cdot |f(x)|$ dąży do pewnej granicy A, dla $s>1$, gdy $x \to \infty$. W rzeczy samej, niech $M>A$; wtedy, począwszy od pewnej wartości x, np. dla $x > x_0$, mamy zawsze $x^s \cdot |f(x)| < M$ i $|f(x)| < \frac{M}{x^s}$; a więc $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna.

Porównanie z tą całką zasadniczą da nam również KRYTERJUM ROZBIEŻNOŚCI. Jeśli, począwszy od pewnego miejsca, t.j. np. dla $x > x_0 > 0$, mamy zawsze nierówność $|f(x)| > \frac{m}{x^s}$, gdzie $s \leq 1$, a $m > 0$, przyczem $f(x)$ zachowuje stale ten sam znak, to całka

$\int_a^\infty f(x)dx$ jest rozbieżna.

Kryterjum to możemy np. stosować wtedy, gdy iloczyn $x^s \cdot f(x)$ dąży do pewnej granicy $A \neq 0$, gdy $x \to \infty$, przy wykładniku $s \leq 1$. W rzeczy samej, niech m oznacza liczbę, spełniającą nierówności $0 < m < |A|$; począwszy od pewnego miejsca mamy $|f(x)| > \frac{m}{x^s}$, przyczem $f(x)$ zachowuje znak stały.

Kryterja poprzednie zawodzą, o ile $s \leq 1$ i funkcja $f(x)$, począwszy od pewnego miejsca, np., dla każdego $x > x_0$, nie zachowuje tego samego znaku. To ma miejsce, jeśli pod znakiem całki mamy, np. funkcję $\frac{\sin x}{x}$, t.j. jeśli $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Zbadajmy całkę $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to wielomiany, przyczem $P(x)$ jest stopnia n-tego, a $Q(x)$ — stopnia m-tego. Jeśli wielomian $Q(x)$ posiada pierwiastki, tak iż dla tych wartości zmiennej x $Q(x) = 0$, to zakładamy, że a jest większe od największego pierwiastka. Całka nasza jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy $m \geqslant n+2$, t.j. stopień mianownika jest przynajmniej o dwie jedności większy od stopnia licznika.

W rzeczy samej, niech $\alpha = m-n$. Wtedy

$\frac{x^{\alpha} \cdot P(x)}{Q(x)} \to A \neq 0$, gdy $x \to \infty$. Liczba A jest to stosunek spółczynnika przy najwyższej potędze x^a w $P(x)$, do takiegoż spółczynnika w $Q(x)$; tutaj $s = \alpha$; jeśli więc $\alpha \geqslant 2$, to całka $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ jest zbieżna, jeśli $\alpha < 2$ — rozbieżna.

Rozpatrzymy teraz całkę typu $\int_a^\infty \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}\,dx$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to wielomiany odpowiednio stopnia n i m. Niech $\alpha = \frac{m}{2} - n$. Iloczyn

$x^{\alpha} \cdot \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} = \sqrt{\frac{P^2(x) \cdot x^m}{Q(x) \cdot x^{2n}}}$ dąży do granicy $A \neq 0$, gdy $x \to \infty$; tak więc tu $s = \alpha$; warunek $s > 1$, daje nam $\frac{m}{2} - n > 1$, czyli $n < \frac{m}{2} - 1$. Dla zbieżności naszej całki warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, by stopień wielomianu $P(x)$ w liczniku był więcej niż o jeden mniejszy od połowy stopnia wielomianu $Q(x)$ pod pierwiastkiem w mianowniku.

P r z y k ł a d . Przypuśćmy, że dana jest całka:

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$, t.j. niech funkcja $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$

Całka ta jest zbieżna, gdyż dla każdego x,

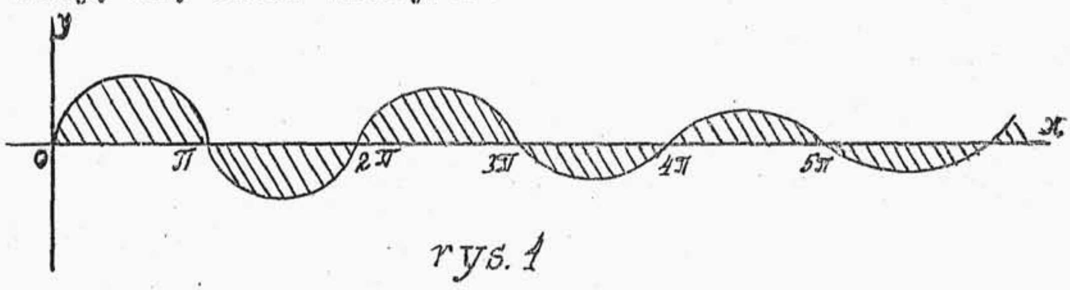
$x^2 \cdot |f(x)| = \frac{x^2}{1+x^2} |\cos x| < 1$; tu $s=2$, $M=1$.

Zauważmy, że tu $x^2 \cdot |f(x)|$ do żadnej granicy nie dąży, gdy x rośnie nieograniczenie /z powodu czynnika $\cos x$ /.

Jeśli podane przez nas kryterjum zawodzi, staramy się rozstrzygnąć, czy całka jest zbieżna, czy nie, badając bezpośrednio całkę $\int_a^l f(x) dx$, gdy l rośnie nieograniczenie. Analogja z szeregami bywa tu nieraz pomocną. Jak wiemy nasze kryterjum zawodzi wtedy, jeśli $f(x)$ nie posiada stałego znaku, gdy $x \to \infty$ a całka $\int_a^\infty |f(x)| dx$ jest rozbieżna. Tak więc, dzięki zmianom znaku może się zdarzyć, iż całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna, a całka $\int_a^\infty |f(x)| dx$

rozbieżna. Nasuwa się tu analogja z szeregami, które nie są bezwzględnie zbieżne.

Niech będzie np. całka $\int_a^{\infty} \varphi(x) \sin x \, dx$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją dodatnią, malejącą i dążącą do zera, gdy $x \to \infty$. Krzywa $y = \varphi(x) \sin x$ podobna jest do sinusoidy i w tych że samych punktach co i sinusoida przebija oś x-ów, tylko wzniesienia fal stają się coraz mniejsze.



rys. 1

Połóżmy

$$a_n = \left| \int_{\pi \cdot n}^{\pi(n+1)} \varphi(x) \sin x \, dx \right|$$

a_n jest polem jednej fali między krzywą, osią x-ów i punktami o odciętych $n \cdot \pi$ i $(n+1) \cdot \pi$. Wprowadźmy zmianę zmiennych : $x = y + n\pi$.

Wtedy.

$$1/ \qquad a_n = \int_0^{\pi} \varphi(y + n\pi) \sin y \, dy$$

Gdy n rośnie, $\varphi(y + n\pi)$ maleje, tak iż

$$\varphi(y + n\pi) > \varphi[y + (n+1) \cdot \pi]$$

$$\int_0^{\pi}\varphi(y+n\pi)\sin y\,dy > \int_0^{\pi}\varphi[y+(n+1)\pi]\sin y\,dy \quad \text{t. j.} \quad a_n > a_{n+1}$$

Z drugiej strony $a_n < \pi\cdot\varphi(n\cdot\pi)$, jak wynika z wzoru na wartość średnią dla całki /1/; tak więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Szereg

$$2/ \qquad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots\dots + (-1)^n a_n + \dots\dots$$

jest zbieżny, jak wynika z teorji szeregów o znakach przemiennych.

Niech l oznacza dowolną liczbę i niech n oznacza liczbę całkowitą, spełniającą warunki

$$n\pi < l \leq (n+1)\pi$$

Wtedy

$$\int_0^l \varphi(x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \dots\dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{n\pi}^{l} = S_n \pm \theta\cdot a_n,$$

gdzie S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów szeregu /2/, a $0<\theta<1$. Gdy l rośnie nieograniczenie, n rośnie też nieograniczenie i mamy

$$\int_0^{\infty}\varphi(x)\sin x\,dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^l \varphi(x)\sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \theta\lim_{n\to\infty} a_n = S$$

gdzie $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, jest to suma szeregu zbieżnego /2/.

Jako przypadek szczególny niech będzie $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ i t.d.

Tak więc całki

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\,, \dots \quad \text{są zbieżne.}$$

Tak samo łatwo dowieść, że całki

$\int_0^\infty \sin x^2 dx$, $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ są zbieżne. W rzeczy samej:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^l \sin x^2\,dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^{l^2} \sin y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

gdzie uskutecznilišmy podstawienie $x^2 = y$, $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE DRUGIEGO RODZAJU.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ staje się nieskończoną dla $x = a$, lecz w przedziale $(a+\varepsilon, b)$ gdzie $a < b$ i $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małe, funkcja $f(x)$ jest ciągłą. Wtedy, jak wiemy, całka

$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ istnieje i ma wartość określoną.

Wartość tej całki zależy, oczywiście, od ε. Jeśli całka $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ dąży do granicy, gdy $\varepsilon \to 0$, to granicę tę będziemy oznaczali: $\int_a^b f(x)\,dx$, tak iż określeniem tego symbolu jest równość