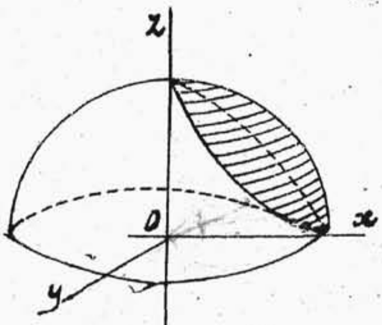
PRZYKŁAD. Znaleźć pole powierzchni, jaką wytnie na półkuli walec. Niech równaniem kuli będzie:



rys. 41.

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$ zaś równaniem walca $x^2+y^2=R\cdot x$.

Obliczymy przedewszystkiem pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}=p;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}=q.$$

Szukane pole wyrazi się przez

$$P=\iint_{D}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint_{D}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=R\iint_{D}\frac{dx\,dy}{z}.$$

Powyższą całkę rozwiązujemy, sprowadzając ją do spółrzędnych biegunowych:

$$P=R\iint_{D}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=$$

$$=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-R\sin\theta+R)\,d\theta=-2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta+2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=$$

$$=2R^2\Big|\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi R^2=-2R^2+\pi R^2.$$

Ostatecznie więc będziemy mieli: $P=(\pi-2)\cdot R^2.$

CAŁKI POTRÓJNE.

Niech będzie dana jakaś bryła D, wewnątrz której znajduje się punkt M o spółrzędnych x,y,z, oraz funkcja trzech zmiennych niezależnych $f(x,y,z)$. Można uważać $f(x,y,z)$ wprost za funkcję p. M i oznaczać przez $f(M)$. Rzutem danej bryły na płaszcz.XOY jest pole jakiejś figury, ograniczonej krzywą zamkniętą C. O ile punkt $P(x,y)$/rzut punktu $M(x,y,z)$ na płaszcz. XOY/ leży wewnątrz obszaru normalnego wewnątrz konturu C, t.zn. o ile dla $a \leq x \leq b$ mamy nierówność $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, gdzie funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są zależne od kształtu konturu C, to rzędna p.M przecina powierzchnię danej bryły w 2-ch punktach, których rzędnemi są: $z_1 = \psi_1(x,y)$; $z_2 = \psi_2(x,y)$.

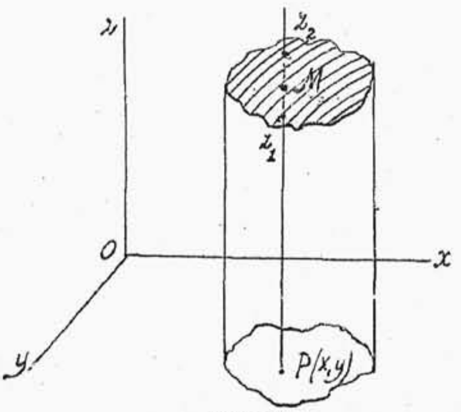
Ponieważ założyliśmy, że p.M znajduje się wewnątrz bryły, więc musi być $\psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$.

Tak więc mamy 3 nierówności /w t.zw. postaci normalnej/, które, zachodząc jednocześnie, wyrażają, iż punkt $M(x,y,z)$ znajduje się wewnątrz obszaru przestrzennego /bryły/ D:

$$a \leq x \leq b\ ; \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\ ; \quad \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)$$

UWAGA: Współrzędna z p.M może przecinać powierzchnię, ograniczającą dany obszar, więcej niż w dwuch punktach; wówczas jednak rozbijamy obszar dany na takie obszary częściowe, z któremi ta współrzędna miałaby tylko 2 punkty przecięcia.

Po określeniu obszaru przestrzennego przystąpimy do określenia całki potrójnej czyli trzykrotnej. Podzielmy więc obszar D dowolnemi powierzchniami na części - kostki przestrzenne. Oznaczmy ich objętości przez ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ... ω_n. Weźmy następnie pod uwagę dowolną kostkę i, o objętości ω_i; przypuśćmy, że wewnątrz niej



rys.42.

znajduje się punkt $m(x_i,y_i,z_i)$ i utwórzmy iloczyn z funkcji tego punktu przez objętość kostki: $f(m_i)\cdot\omega_i$. Jeżeli istnieje granica sumy tego rodzaju iloczynów, gdy liczba n kostek przestrzennych rośnie nieograniczenie, a wszystkie wymiary każdej kostki dążą do zera:

$$\lim_{n\to\infty}\sum f(m_i)\cdot\omega_i\,,$$

niezależnie od tego, w jaki sposób zostaje uskuteczniony podział na kostki, to tę granicę właśnie nazywamy całką trzykrotną i oznaczamy przez $\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\cdot d\tau$,

gdzie $d\tau = dx\,dy\,dz$.

Można udowodnić analogicznie jak dla całek dwukrotnych, że powyższa granica sumy, t.j. całka trzykrotna, istnieje, jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła.

Jest rzeczą oczywistą, że jeżeli $f(x,y,z)$ jest równe jedności, to całka trzykrotna daje nam obszar $\mathcal{D}$:

$\iiint_{\mathcal{D}} d\tau = \lim\sum_i \omega_i = \mathcal{D}$, albo inaczej: $\iiint_{\mathcal{D}} dx\,dy\,dz = \mathcal{D}$.

UWAGA: Tu zastosować możemy tę samą uwagę, co i przy całkach dwukrotnych. Niektóre kostki podziału mogłyby częściowo wychodzić poza obszar $\mathcal{D}$. Wtedy $\sum\omega_i$ nie równa się $\mathcal{D}$, lecz $\lim\sum\omega_i = \mathcal{D}$. Takie kostki, wychodzące częściowo poza obszar $\mathcal{D}$ mieć będziemy np. przy podziale obszaru $\mathcal{D}$ na sześciany, jeśli obszar $\mathcal{D}$ jest ograniczony powierzchniami krzywemi. Łatwo udowodnić, /zostawiam to czytelnikowi/, że na wartość granicy okoliczność ta nie wpłynie.

Udowodnimy teraz, że można obliczyć całkę trzykrotną za pomocą trzykrotnego całkowania względem trzech zmiennych (x, y, z). Postępujemy tu analogicznie, jak przy całkach podwójnych.

Objętość kostki sześciennej, na jakie rozbijamy obszar całkowania, wyraża się przez

$$\omega_i = (x_{l+1} - x_l)\cdot(y_{r+1} - y_r)\cdot(z_{k+1} - z_k).$$

W takim razie

$$\sum_{l,r,k} f(m_i)\omega_i = \sum_{l,r,k} f(m_{l,r,k})\cdot(x_{l+1} - x_l)(y_{r+1} - y_r)\cdot(z_{k+1} - y_r)]$$

gdzie $m_{l,r,k}$ oznacza p. o spółrzędnych (x_l, y_r, z_k) ; sumowanie rozciągamy na wszystkie trzy wskaźniki l , r i k .

Powyższą sumę można otrzymać, sumując najpierw elementy, które mają ten sam wskaźnik k :

$$\sum_{l,r,k} f(m_i)\omega_i = \sum_k (z_{k+1} - z_k)\cdot\left[\sum_{l,r} f(m_{l,r,k})\cdot(x_{l+1} - x_l)\cdot(y_{r+1} - y_r)\right]$$

Czynnik w nawiasie kwadratowym jest całką dwukrotną

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z_k)\, dx\, dy = \Phi(z_k)$$

a więc dana suma $\sum_{l,r,k} f(m_i)\,\omega_i = \sum_k \Phi(z_k)\cdot(z_{k+1} - z_k)$.

W granicy, gdy $l, r, k \to \infty$, otrzymamy:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int \Phi(z)\, dz.$$

Tak więc całka potrójna jest całką całki podwójnej $\Phi(z)$. Ponieważ jednak całka podwójna daje się obliczyć przez dwukrotne całkowanie, przeto będziemy mogli znaleźć całkę potrójną przez całkowanie trzykrotne:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz .$$

Porządek całkowania roli tutaj, oczywiście, nie odgrywa; jednak przy zmianie porządku należy przekształcić nierówności, wyrażające obszar $\mathcal{D}$. Geometrycznie można to interpretować w ten sposób, że najpierw dodajemy kostki w jednym szeregu, równoległym do osi z, następnie sumujemy szeregi wzdłuż osi y, wreszcie dodajemy warstwy wzdłuż osi x.

Całki trzykrotne mają dość duże zastosowanie w mechanice, fizyce, termodynamice i t.p.

Przypuśćmy np. że mamy obliczyć masę pewnej bryły $\mathcal{D}$, której gęstość w jakimś punkcie $M(x,y,z)$ jest funkcją $\rho(x,y,z)$ tego punktu. Wiadomo, że masa cząsteczki mierzy się iloczynem gęstości ρ przez objętość $dx\,dy\,dz$:

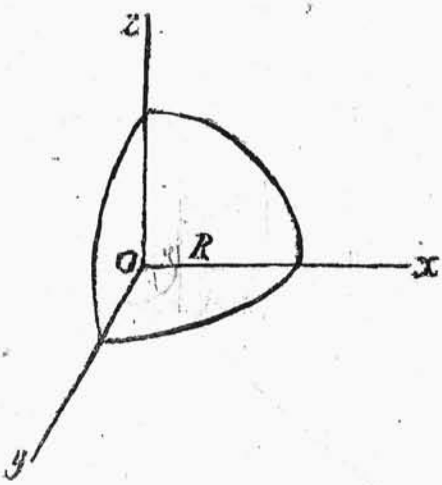
$$dm = \rho(x,y,z)\cdot dx\,dy\,dz;$$

a zatem masa całej bryły wyrazi się przez całkę potrójną:

$$M = \iiint_{\mathcal{D}} dm = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Przykład: Obliczyć całkę potrójną $\iiint_{\mathcal{D}} z\,dx\,dy\,dz$, jeżeli obszarem całkowania $\mathcal{D}$ jest ósma część kuli o promieniu R, zawarta pomiędzy trzema płaszczyznami współrzędnych. W interpretacji mechanicznej jest to równoznaczne z obliczeniem masy ósmej części kuli, której gęstość jest proporcjonalna do odległości od płaszczyzny xoy.

Przedewszystkim wyrazimy obszar $\mathcal{D}$ przy pomocy nierówności w postaci normalnej:



rys.43.

$$0 \leq x \leq R$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Całkować będziemy najpierw względem zmiennej z, następnie y, wreszcie x. Tak więc:

$$M = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^R \left[(R^2-x^2)\sqrt{R^2-x^2} - \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right] dx = \frac{1}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^{3/2} dx$$

Podstawiając

$$x = R\sin\varphi; \quad dx = R\cos\varphi\,d\varphi,$$

otrzymamy

$$M = \frac{1}{3}R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi.$$

Według wzoru redukcyjnego mamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

A więc

$$M = \frac{1}{3}R^4\cdot\frac{3}{16}\pi = \frac{R^4\pi}{16}.$$

TWIERDZENIE GREEN'a.

Twierdzenie Green'a może być uogólnione dla całek trzykrotnych. Zanim je dowiedziemy wprowadzimy pewne nowe pojęcie, będące niejako uogólnieniem pojęcia całki krzywolinjowej, mianowicie pojęcie całki powierzchniowej.

Niech obszar całkowania $\mathcal{D}$ będzie ograniczony powierzchnią S, którą można wyrazić zapomocą dwuch równań:

$$z_1 = \varphi_1(x,y) \ ; \quad z_2 = \varphi_2(x,y).$$

Łatwo widzieć, że element tej powierzchni wyrazi się przez

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Otóż całka

$$\iint \{R[x,y,\varphi_2(x,y)] - R[x,y,\varphi_1(x,y)]\}\,dx\,dy,$$

którą oznaczać będziemy przez

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\,d\sigma,$$

nosi nazwę całki powierzchniowej.

Po tym określeniu możemy wprost przystąpić do wyprowadzenia wzoru Green'a w zastosowaniu do całek trzykrotnych. Mamy

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx =$$
$$= \iint dy\,dz\,[P(x_2,y,z) - P(x_1,y,z)]\,dx.$$

Otrzymaliśmy zatym całkę powierzchniową. A ponieważ $dy\,dz = d\sigma\cos\alpha$, więc

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha\,d\sigma.$$

Analogicznie mamy:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta\,d\sigma$$

oraz

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\,d\sigma.$$

Dodając powyższe trzy równości stronami, otrzymamy wzór Green'a:

$$\iiint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_S \left\{ P(x,y,z) \cos\alpha + Q(x,y,z) \cos\beta + R(x,y,z) \cos\gamma \right\} d\sigma.$$

WZÓR NA ZAMIANĘ ZMIENNYCH.

I ten wzór łatwo może być uogólniony dla całek potrójnych. Niech więc będzie dana całka

$$\iiint_{\mathfrak{D}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz,$$

przyczem

$$(I) \qquad x = \varphi_1(u,v,w)\,; \quad y = \varphi_2(u,v,w)\,; \quad z = \varphi_3(u,v,w).$$

Prócz tego niech objętości kostki przestrzennej ω_i obszaru $\mathfrak{D}$ /w układzie x,y,z/ odpowiada objętość ω_i' kostki obszaru $\mathfrak{D}'$ /w układzie u,v,w/.

Jak zaraz udowodnimy

$$\lim \frac{\omega_i}{\omega_i'} = \Delta(u,v,w)$$

czyli

$$\frac{\omega_i}{\omega_i'} = \Delta + \Delta\cdot\varepsilon$$

/gdzie $\varepsilon \to 0$/; stąd

$$\omega_i = \Delta\cdot\omega_i' + \Delta\cdot\varepsilon\cdot\omega_i'.$$

A zatym $\lim \sum f_i \omega_i = \lim \sum f_i\cdot\Delta\cdot\omega_i' + \lim \sum f_i\cdot\Delta\cdot\varepsilon\cdot\omega_i'.$

Ponieważ ostatnia granica jest zerem, więc zastępując granice sum przez odpowiednie całki, otrzymamy żądany wzór:

$$\iiint_{\mathfrak{D}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathfrak{D}'} f\{\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w)\} \cdot$$
$$\cdot \Delta(u,v,w)\, du\, dv\, dw.$$

Pozostaje tu jeszcze do udowodnienia, że granicą stosunku $\frac{\omega_i}{\omega'_i}$ jest właśnie wyznacznik funkcyjny, czyli że

$$\lim \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \Delta(u,v,w).$$

Istotnie

$$\omega_i = \iint (z_2 - z_1)\,dx\,dy = \iint_S z\cos\gamma\,d\sigma = \iint_S z\,dx\,dy.$$

Z równań /I/ mamy:

$$dx = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi_1}{\partial w}dw;$$

$$dy = \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi_2}{\partial w}dw;$$

wobec czego ω_i da się przedstawić w postaci:

$$\omega_i = \iint_{S'}\{P\,dv\,dw + Q\,du\,dv + R\,du\,dw\},$$

lub na mocy wzoru Green'a:

$$\omega_i = \iiint_{\mathfrak{D}'}\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial w}\right)du\,dv\,dw.$$

Wyrażenie pod znakiem całki potrójnej jest, jak łatwo sprawdzić, wyznacznikiem funkcyjnym:

$$\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \Delta(u,v,w).$$

A więc /wzór na wartość średnią/

$$\omega_i = \iiint_{\mathfrak{D}'}\Delta(u,v,w)\,du\,dv\,dw = \Delta(u',v',w')\iiint_{\mathfrak{D}'}du\,dv\,dw.$$

(u',v',w') jest punktem wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}'$.

$$\omega_i = \Delta(u',v',w')\cdot\omega'_i$$

Stąd

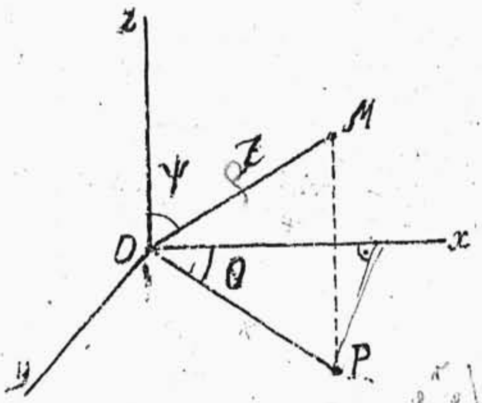
$$\frac{\omega_i}{\omega'_i} = \Delta(u',v',w');$$

zaś w granicy $\lim \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \Delta(u,v,w)$,

co należało udowodnić.

WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE /KULISTE/.

Położenie jakiegoś punktu M w przestrzeni można określić analogicznie jak to czynimy na płaszczyźnie, przez podanie promienia wodzącego ρ oraz dwuch kątów ψ i θ, jakie promień wodzący tworzy z osią z, i jego rzut z osią x, t.zn. przez podanie odległości OM danego punktu od początku układu /bieguna/ O oraz kątów $\psi = zOM$ i $\theta = POx$.



rys.44.

Łatwo się można przekonać, że przez te trzy wielkości ρ, ψ, θ położenie punktu M jest w zupełności wyznaczone. Zauważmy trójkąt prostokątny MOP:

$$OP = \rho \sin\psi; \quad MP = \rho\cos\psi.$$

Stąd znajdziemy trzy współrzędne prostokątne punktu M:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \sin\psi \cos\theta; \\ y &= \rho \sin\psi \sin\theta; \\ z &= \rho \cos\psi. \end{aligned}}$$

Odwrotnie, znając położenie punktu $M(x,y,z)$ we współrzędnych prostokątnych, możemy znaleźć wielkości, wyznaczające ten punkt we współrzędnych biegunowych:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;;$$

$$\psi = \mathrm{Arccos}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\;;$$

$$\theta = \mathrm{Arctg}\frac{y}{x}\,.$$

Dwie ostatnie funkcje są wielowartościowe, należałoby się więc zastanowić nad ich *wartościami* ; pozostawiamy to jednak czytelnikowi.

O ile chcemy wyrazić we współrzędnych biegunowych funkcję, stojącą pod znakiem całki potrójnej, wówczas należy pamiętać o zastąpieniu różniczki $dx\,dy\,dz$ przez jakobian $\Delta(\rho,\psi,\theta)\cdot d\rho\, d\psi\, d\theta$, gdzie

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \Delta(\rho,\psi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\theta, & \rho\cos\psi\cos\theta, & -\rho\sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta, & \rho\cos\psi\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\theta, & \rho\overset{\sin\psi}{\cancel{\cos\psi}}\cos\theta \\ \cos\psi, & -\rho\sin\psi, & 0 \end{vmatrix}$$

względem np. trzeciego wiersza

Rozwijając powyższy wyznacznik, znajdziemy, że

$$\Delta(\rho,\psi,\theta) = \rho^2\sin\psi.$$

A zatym $\qquad dx\,dy\,dz = \underline{\rho^2\sin\psi}\, d\rho\, d\psi\, d\theta.$

Zastosujemy współrzędne biegunowe do rozwiązanego już przykładu, mianowicie do znalezienia masy ósmej części kuli, jeżeli gęstość każdego jej punktu jest proporcjonalna do odległości od płaszczyzny xoy . Otóż

$$M = \iiint_{\mathcal{D}} z\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathcal{D}'} \rho\cos\psi\cdot\rho^2\sin\psi\, d\rho\, d\psi\, d\theta.$$

Obszar całkowania $\mathcal{D}'$ wyraża się przez nierówności:

$$0 \leq \rho \leq R$$
$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

czyli jest prostopadłościanem o wymiarach $R, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. A zatym

$$\mathcal{M} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R \rho^3 \sin\psi \cos\psi \, d\rho = \frac{R^4}{4} \left| \frac{1}{2} \sin^2\psi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ostatecznie

$$\mathcal{M} = \frac{R^4 \pi}{16} \cdot \quad ^{x)}$$

WSPÓŁRZĘDNE PÓŁBIEGUNOWE /WALCOWE/.

Układ współrzędnych półbiegunowych czyli walcowych powstaje z połączenia układu biegunowego na płaszczyźnie xoy ze współrzędną układu prostokątnego. Wprowadzamy na płaszczyźnie xoy układ biegunowy, który określa nam położenie na tej płaszczyźnie punktu $P(r, \theta)$ - rzutu prostokątnego punktu $\mathcal{M}$; pozatym podajemy współrzędną z punktu $\mathcal{M}$. W ten sposób położenie punktu $\mathcal{M}$ w przestrzeni staje się w zupełności wyznaczonym. Wzory na przejście od układu prostokątnego do półbiegunowego są następujące:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Łatwo sprawdzić, że tutaj $\Delta = r$, więc

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Jak wiadomo, trzy równania parametryczne z dwoma parametrami:

x) objętość ~~kuli~~ ósemki wynosi do $\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\psi \, d\rho \, d\psi \, d\theta = \frac{\pi r^3}{6}$. (tylko objętości całej kul $= \frac{4}{2}\pi R^3$) mniej więc objętości ósemki

$$x = f_1(u,v); \quad y = f_2(u,v); \quad z = f_3(u,v);$$

wyznaczają pewną powierzchnię. Zobaczmy, co wyznaczają równania, podające zależność pomiędzy współrzędnemi prostokątnemi a biegunowemi:

$$x = R \sin\psi \cos\theta;$$
$$y = R \sin\psi \sin\theta;$$
$$z = R \cos\psi.$$

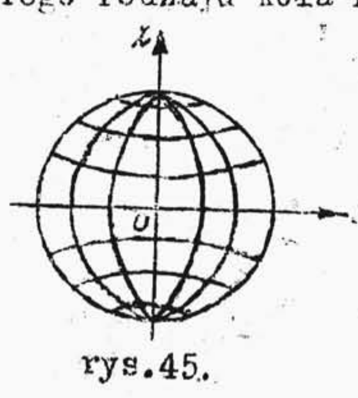
Z łatwością się przekonamy, iż jest to kula; albowiem podnosząc te równania do kwadratu i dodając stronami, otrzymamy równanie **kuli**:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Przypuśćmy na chwilę, że kąt θ posiada wartość stałą, natomiast ψ się zmienia od 0 do π; w takim razie promień wodzący R opisze półkole. Gdy teraz zacznie się zmieniać θ /od 0 do 2π /, wówczas półkole będzie się obracało dokoła osi z, zataczając powierzchnię kuli.

Jeżeli kąt θ będziemy ustalać w różnych położeniach pomiędzy 0 a 2π i w każdym z tych położeń będziemy zmieniać ψ, to otrzymamy szereg kół, przechodzących przez dwa punkty stałe, położone na osi z.

Tego rodzaju koła na kuli ziemskiej i niebieskiej zostały nazwane południkami.



rys.45.

Jeśli teraz postąpimy odwrotnie, t.zn. będziemy w różnych położeniach ustalali ψ zaś zmieniali θ, otrzymamy zbiór kół o różnych promieniach, które leżą wszystkie w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xoy. Takie koła na kulach ziemskiej i niebieskiej zwą się równoleżnikami.

Równoleżniki i południki przecinają się pod kątami prostemi /mówimy, że dwie krzywe się przecinają pod kątem prostym, jeżeli styczne do tych krzywych w ich punkcie przecięcia są do siebie prostopadłe/. Otrzymujemy więc na powierzchni kuli prostokąty krzywolinjowe, a w przypadku szczególnym kwadraty. Sumując ich pola, otrzymamy całkowitą powierzchnię kuli.

W podobny sposób postępujemy, gdy mamy dane współrzędne półbiegunowe. Tutaj

$$x = r\cos\theta;$$
$$y = r\sin\theta;$$
$$z = z.$$

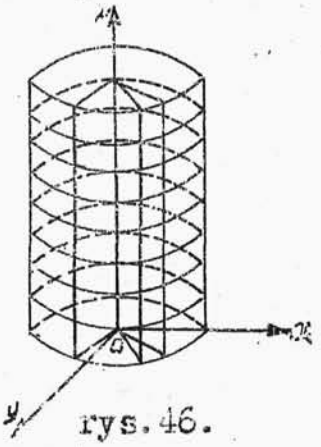
Podnosząc te równania do kwadratu i dodając je stronami do siebie, otrzymamy równanie powierzchni walcowej:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Jeżeli zmiennej z będziemy nadawali wartości stałe, zaś θ będzie się zmieniało w granicach od 0 do 2π, wówczas otrzymamy na powierzchni walcowej szereg kół, równoległych do płaszczyzny xoy.

Jeżeli zaś będziemy nadawali różne wartości kątowi θ, a z będzie się zmieniać, otrzymamy tworzące powierzchni walcowej.

Tym sposobem powstaną na powierzchni walcowej prostokąty krzywolinjowe; suma ich pól daje nam pole powierzchni walcowej.



rys. 46.

Gdy mamy dane równanie jakiejś krzywej

$$u = \varphi(v),$$

to możemy tę krzywą wykreślić na powierzchni kuli lub walca, korzystając z sieci, powstałej w sposób wyżej opisany, tak, jak to czynimy na kratkowanym papierze. /Słuszność tego wynika z odpowiedzialności, dającej się ustalić pomiędzy płaszczyzną a powierzchnią kuli lub walca/. Prostym równoległym do osi Ox na płaszczyźnie, odpowiadają na kuli równoleżniki, zaś na walcu koła, położone w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny podstawy walca; prostym równoległym do osi Oy na płaszczyźnie odpowiadają znowu południki na kuli i tworzące na powierzchni walca.

WSPÓŁRZĘDNE KRZYWOLINJOWE /OGÓLNE/ NA POWIERZCHNI.

Można wogóle ustalić odpowiedniość pomiędzy płaszczyzną a dowolną powierzchnią krzywą i to sposobami najrozmaitszemi; np. punktowi danej powierzchni może odpowiadać rzut jego na płaszczyznę daną; ogólnie zaś zapomocą 2-ch parametrów u i v, od których zależą x, y, z na powierzchni,