To są równania charakterystyk Γ ; jako parametr zmienny przyjęliśmy tu p .

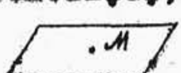
Przy stałych a, b, C_1 i C_2 , gdy p się zmienia, punkt (x, y, z) opisuje krzywą Γ .

Równania te, będące równaniem charakterystyk, posiadają 3 stałe niezależne /stałe C_1 i C_2 są związane zależnością /D/, mogą więc być uważane za jedną stałą/. Układ /E/ daje nam nieskończony zbiór charakterystyk, gdyż różnym wartościom a, b i C_1 odpowiadają różne krzywe.

Zbiór tych krzywych charakterystycznych możemy już ułożyć w ten sposób, aby tworzyły pewną powierzchnię całkową jak to zobaczymy poniżej.

<u>WSTĘGI CHARAKTERYSTYCZNE. TWORZENIE POWIERZCHNI CAŁKOWYCH PRZY POMOCY WSTĘG CHARAKTERYSTYCZNYCH.</u> Przenieśmy się znowu do wypadku ogólnego.

Otóż zadaniem naszem będzie odszukać powierzchnię całkową, mając równania charakterystyk w postaci /18/. Równania owe wyrażają zmienne x, y, z, p i q w funkcjach parametru u . Otrzymany zbiór pięciu liczb określać będzie punkt M i pewną płaszczyznę, przezeń przechodzącą, o spółczynnikach kierunkowych $p, q, -1$.


rys. 79.

Zbiór powyższego rodzaju pięciu liczb,

wyrażających punkt i płaszczyznę, przezeń przechodzącą, nazywamy elementem powierzchniowym. Zbiór elementów powierzchniowych, zależnych od jednego parametru /tutaj u /, nazywać będziemy WSTĘGĄ CHARAKTERYSTYCZNĄ, a to ze względu na to, iż, gdy u się zmienia w sposób ciągły, otrzymujemy szereg elementów powierzchniowych, układających się wzdłuż krzywej Γ w postaci wstęgi.

Niech wartością początkową parametru będzie $u=0$. Wtedy wartości odpowiadające dla x, y, z, p, q niech będą:

$$x=x_0; \quad y=y_0; \quad z=z_0; \quad p=p_0; \quad q=q_0.$$

Po rozwiązaniu układu /18/ elementy powierzchniowe będą mogły być wyrażone przez układ:

$$\text{I.} \qquad \begin{cases} x=f_1(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ y=f_2(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ z=f_3(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ p=f_4(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \\ q=f_5(u, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \end{cases}$$

Dla wartości $u=0$ przyjmą one wartości początkowe:

$$x=f_1(0, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=x_0$$
$$y=f_2(0, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=y_0$$
$$z=f_3(0, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=z_0$$
$$p=f_4(0, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=p_0$$
$$q=f_5(0, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=q_0$$

Przez każdy punkt M przechodzi nieskończenie wiele wstęg charakterystycznych, gdyż p. M określa tylko x_0, y_0, z_0 tymczasem p_0 pozostaje dowolne. Gdy x_0, y_0, z_0 pozostają bez zmiany, a p_0 i z nim związane związkiem $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ q_0 przybierają różne wartości, za każdym razem otrzymujemy inną wstęgę charakterystyczną, wychodzącą z punktu M.

Zadanie nasze polega na tem, by przy pomocy wstęg charakterystycznych utworzyć powierzchnię całkową, przechodzącą przez krzywą C.

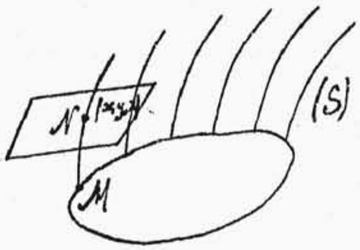
Mając więc jakąś krzywą C, przez każdy jej punkt będziemy mogli poprowadzić wstęgę charakterystyczną. Ale którą z pomiędzy nieskończonej ilości przechodzących przez każdy punkt? By to rozstrzygnąć postąpimy jak następuje:

Należy uczynić x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 – funkcjami jakiegoś parametru v tak, by $x_0 = \varphi_1(v)$, $y_0 = \varphi_2(v)$, $z_0 = \varphi_3(v)$ były równaniem krzywej C. Te funkcje zmiennej v powinny spełniać następujące warunki:

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial v} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial v}$$

Po podstawieniu w układ I otrzymalibyśmy $x, y, z,$ p, q w funkcji (u, v), co określa powierzchnię. Parametry te muszą być tak dobrane, aby równanie 1-sze było spełnione, a prócz tego, by funkcje p i q czyniły zadość równaniu:



rys. 80.

$$/19/ \quad dz = p\,dx + q\,dy$$

Kierunek $-dx, dy, dz$ powinien być prostopadły do kierunku $-p, q, -1$.

Warunek /19/ można przekształcić na dwa. W rzeczy samej:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

A jeśli $dv = 0$, to warunek 19-ty może być wyrażony jako:

$$/20/ \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u};$$

gdy zaś $du = 0$, to:

$$/21/ \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}$$

/Pamiętać tu wszędzie należy, że x, y, z, p i q są funkcjami, określonemi układem I, zmiennych u i v /.

Z równania /18/ wynika:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial p}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial q}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}$$

Przeto:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\,\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}$$

t.j. warunek 20-ty jest spełniony. By równanie /1/ było spełnione, wystarcza teraz tak dobrać funkcje x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, aby:

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0.$$

Ten warunek również łatwo jest sprawdzić.

Pomnóżmy odpowiednie ułamki /liczniki i mianowniki/ równania /18/ przez:

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z},\ -\frac{\partial F}{\partial p},\ -\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Wówczas otrzymamy:

$$du = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial p}dp + \frac{\partial F}{\partial q}dq}{0}$$

Stąd i licznik równy zeru być musi, t.j.

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial x}dz + \frac{\partial F}{\partial p}dp + \frac{\partial F}{\partial q}dq = 0.$$

Albo:

$$\partial F = 0 \qquad \text{czyli} \qquad F = const.$$

Słusznym więc będzie także równanie:

$$F(x, y, z, p, q) = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Jeśli dobierzemy początkowe wartości: x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 tak, aby

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

to oczywiście i

$$F(x, y, z, p, q,) = 0 \qquad \text{c.b.d.d.}$$

Wreszcie przekonać się możemy, że i warunek 21-szy będzie spełniony, jeśli tak dobierzemy x_0, y_0, z_0, by

$$\frac{\partial z_0}{\partial v} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial v}$$

Niech będzie:

$$\Phi(u,v) \equiv \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Po odpowiednich różniczkowaniach równania 20-go i odjęciu od 21-go, otrzymamy warunek:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Phi$$

lub:

$$\Phi(u,v) = \Phi(0,v) \cdot e^{-\int_0^u \frac{\partial F}{\partial z} dz}$$

O ile tylko wartość początkowa $\Phi(0,v) = 0$, to i nasza funkcja $\Phi(u,v) = 0$.

$$\Phi(0,v) = \frac{\partial z_0}{\partial v} - p_0\frac{\partial x_0}{\partial v} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial v} = 0$$

a więc i warunek, wyrażony równaniem 21-szym, jest spełniony. Tak więc zadanie nasze będzie rozwiązane, o ile wyznaczymy x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 jako funkcje parametru v tak, by były spełnione warunki następujące:

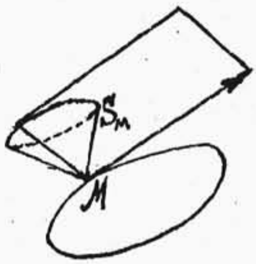
1° $x = x_0(v)$; $y = y_0(v)$; $z = z_0(v)$ są równaniami parametrycznemi krzywej C;

2° $F[x_0(v), y_0(v), z_0(v), p_0(v), q_0(v)] = 0$;

3° $$\frac{\partial z_0(v)}{\partial v} = p_0(v)\frac{\partial x_0(v)}{\partial v} + q_0(v)\frac{\partial y_0(v)}{\partial v}$$

Interpretacja geometryczna.

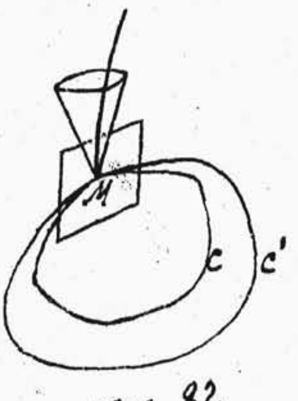
Płaszczyznę styczną w punkcie M wybieramy w ten sposób, by przechodziła przez styczną w punkcie M do krzywej C i była jednocześnie styczną do stożka S_M, odpowiadającego punktowi M.



rys. 81.

Wyobraźmy sobie, iż mieć będziemy jakiś element wspólny dla dwuch powierzchni całkowych.

Wtedy, według twierdzenia Cauchy'ego, powierzchnie takie muszą być styczne wzdłuż całej charakterystyki.



rys. 82.

Zresztą, po uprzedniem udowodnieniu, iż element określa ściśle jedną charakterystykę, twierdzenie to jest już zupełnie zrozumiałe /dwie charakterystyki o wspólnym elemencie muszą być identyczne/.

METODA LAGRANGE'a.

Przypuśćmy, że mamy nieznaną funkcją dwuch zmiennych niezależnych $z = f(x,y)$. Przedstawia ona w interpretacji gieometrycznej jakąś powierzchnię. Wyobraźmy sobie, że znamy związek pomiędzy funkcją, zmiennemi niezależnemi i pochodnemi cząstkowemi tej funkcji:

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

albo też, gdy oznaczymy $\frac{\partial z}{\partial x}$ przez p, zaś $\frac{\partial z}{\partial y}$ przez q

$$/1/ \qquad F(x,y,z,p,q)=0.$$

Jest to właśnie równanie różniczkowe cząstkowe I-go rzędu. Funkcja $z=f(x,y)$, czyniąca zadość temu równaniu może zawierać w sobie jakąś dowolną funkcję φ zmiennych niezależnych x, y ; nazywa się ona wówczas c a ł k ą o g ó l n ą danego równania.

Obok całek ogólnych spotykamy jeszcze t.zw. c a ł k i z u p e ł n e , zawierające skończoną liczbę stałych dowolnych, mianowicie tyle, ile jest zmiennych niezależnych w równaniu.

Lagrange udowodnił, że jeżeli istnieje całka ogólna równania /1/, to musi również istnieć całka zupełna tego równania i możemy tę całkę znaleźć; odwrotnie, mając całkę zupełną, można otrzymać całkę ogólną.

Niech /2/ $V(x,y,z,a,b)=0$, gdzie a i b są to stałe dowolne, będzie całką zupełną równania /1/. Zróżniczkujmy tę całkę względem x, uważając y za wielkość stałą, a następnie względem y, uważając x za wielkość stałą:

$$/3/ \qquad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}p=0;$$

$$/3'/ \qquad \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}q=0.$$

Wartości z, p i q wyznaczone z równań /2/, /3/ i /3'/ powinny czynić zadość równaniu /1/.

Przypuśćmy teraz, że a i b są funkcjami zmiennych x i y. W takim razie, różniczkując równanie /2/, mamy:

$$/4/ \qquad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}p+\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}=0;$$

$$/5/ \qquad \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}q+\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

Pomimo, iż a i b nie są stałemi, lecz funkcjami zmiennych x i y, $V(x,y,z,a,b)=0$ będzie w dalszym ciągu całką naszego równania, jeśli te funkcje $a(x,y)$ i

$b(x,y)$ spełniać będą równania:

$$/6/ \quad \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}=0;$$

$$/6'/ \quad \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

W rzeczy samej, dla znalezienia p i q musimy różniczkować $V(x,y,z,p,q)$, czyli nowe wartości p i q będą dane przez równania /4/ i /5/, lecz na mocy /6/ i /6'/ te równania /4/ i /5/ zamieniają się na równania /3/ i /3'/, t.j. na te same, któreśmy mieli przy a i b stałych. Ponieważ równanie różniczkowe dane wynika z rugowania a i b z równań /2/, /3/, /3'/, a te równania nie zmieniły kształtu, więc $V[x,y,z,a(x,y),b(x,y)]$ będzie również całką tego samego czyli danego równania różniczkowego.

Układ /6/ i /6'/ będzie spełniony, gdy przyjmiemy, że

$$/7/ \quad \frac{\partial V}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial b}=0.$$

Gdy z równań /7/ i /2/ wyrugujemy a i b, otrzymamy całkę kształtu $\varphi(x,y,z)=0$, nie zawierającą stałych dowolnych i zwaną c a ł k ą o s o b l i w ą. Jest ona gieometrycznie obwiednią rodziny całek zupełnych, rodziny zależnej od 2-ch parametrów.

Układowi równań /6/ i /6'/ można uczynić również zadość, zakładając:

$$\frac{\partial a}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial a}{\partial y}=0;$$

/8/

$$\frac{\partial b}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

Stąd $a=const.$, $b=const.$, czyli dochodzimy do danej całki zupełnej /2/.

Możemy wreszcie uważać równania /6/ i /6'/ za układ względem $\frac{\partial V}{\partial a}$ i $\frac{\partial V}{\partial b}$, który nie będzie miał rozwiązań identycznie równych zeru tylko wówczas, gdy

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Lecz wyznacznik ten jest jakobianem funkcji a i b zmiennych niezależnych x i y; wskazuje on, że pomiędzy funkcjami a i b zachodzi jakaś zależność: $b=\varphi(a)$. Układ /6/ przyjmie wobec tego kształt:

$$/9/ \qquad \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a)\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

$$/9'/ \qquad \frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial b}\cdot\varphi'(a)\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=0,$$

gdzie $\varphi'(a)=\frac{\partial b}{\partial a}$.

Ponieważ założyliśmy, że $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, więc możemy równanie /9/ przez $\frac{\partial a}{\partial x}$ zaś /9'/ przez $\frac{\partial a}{\partial y}$ skrócić. Otrzymamy:

$$/10/ \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0.$$

Rugując teraz z równań

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0$$

$$V[x, y, z, a, \varphi'(a)] = 0$$

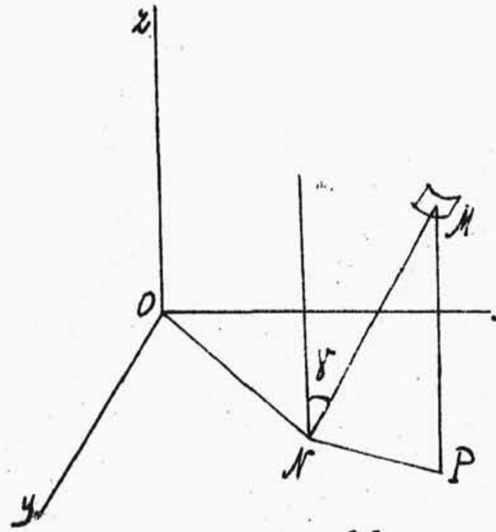
parametr a, otrzymamy całkę ogólną, zależną od dowolnej funkcji φ. Geometrycznie otrzymamy całkę, która jest obwiednią rodziny powierzchni $V(x, y, z, a, b)$, gdy $b = \varphi(a)$, czyli rodziny, zależnej od jednego parametru.

<u>P r z y k ł a d .</u> Znaleźć równanie różniczkowe powierzchni, posiadającej tę własność, że długość odcinka MN normalnej w dowolnym punkcie $M(x, y, z)$ powierzchni, zawartego pomiędzy powierzchnią a płaszczyzną spółrzędnych xoy, jest równa odległości punktu N, w którym normalna przebija płaszczyznę xoy, od początku układu O, czyli $MN = ON$.

Poprowadźmy w punkcie M płaszczyznę styczną do powierzchni. Równaniem tej płaszczyzny będzie:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

gdzie p i q są to pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$.



rys. 83.

Prosta MN jest to tej płaszczyzny prostopadła, wyrazi się więc przez równanie:

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}.$$

Dla płaszczyzny spółrzędnych xoy jest $Z=0$, więc $\frac{Z-z}{-1} = z$ a zatem w punkcie N

$$X = x + pz,$$

$$Y = y + qz.$$

Odległość punktu N od początku układu:

$$ON = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{(x+pz)^2+(y+qz)^2}.$$

Z łatwością znajdziemy również długość odcinka MN. Mianowicie $MN = \frac{MP}{\cos\gamma}$. Lecz z równania prostej wynika, że $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, zaś $MP = z$, więc

$$MN = z\cdot\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Możemy zatem napisać już szukane równanie:

$$z^2(1+p^2+q^2) = (x+pz)^2+(y+qz)^2,$$

a po rozwinięciu

$$2pxz + 2qyz - z^2 + x^2 + y^2 = 0.$$

Tu $P = 2xz$, $Q = 2yz$, $R = z^2 - x^2 - y^2$.

Równanie pomocnicze jest $\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$.

Dla znalezienia całek pierwszych, zauważmy, iż można tu wziąść raz $u=\frac{1}{x}$, $v=-\frac{1}{y}$, $w=0$, gdyż $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d\varphi$ jest różniczką zupełną, a $u \cdot 2xz + v \cdot 2yz = 0$ co daje $\varphi = \log x - \log y = const.$, czyli $\frac{y}{x} = C_1$. Tak samo można z danego układu otrzymać $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z\,dz}{z^2-x^2-y^2} =$

$$= \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{2x \cdot x + 2y \cdot y + z^2 - x^2 - y^2} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Całkując, mamy $\lg x + C_1 = \lg y + C_2 = \lg(x^2+y^2+z^2)$.
Możemy wziąść jako drugą całkę pierwszą naszego układu albo $\frac{x^2+y^2+z^2}{x} = C_1$ albo $\frac{x^2+y^2+z^2}{y} = C_2$. Tak więc całką ogólną będzie $\frac{x^2+y^2+z^2}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ czyli

$z^2 = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 - x^2$, gdzie φ jest funkcją dowolną. Jeżeli znamy krzywą C, przez którą przechodzić ma dana powierzchnia, to będziemy mogli wyznaczyć tę funkcję φ która przez równanie różniczkowe nie jest wyznaczona, ale może być wyznaczona przez warunki dodatkowe i tak zwane początkowe.

Do tegoż rozwiązania można dojść drogą Lagrange'a. Zauważmy, że kula, której środek leży w płaszczyźnie xoy i która przechodzi przez początek spółrzędnych, jest powierzchnią całkową naszego równania różniczkowego, gdyż normalna

MN równa się w tym przypadku promieniowi kuli, a odległość ON równa się także promieniowi. Równanie tej kuli: $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=a^2+b^2$ zawiera dwie stałe dowolne a i b, jest to więc całka zupełna Lagrange'a. Według poprzedniego możemy więc otrzymać z tego równania zupełnego równanie ogólne. Równanie zupełne można napisać w postaci:

$$/1/ \quad x^2+y^2+z^2=2ax+2by.$$

Kładziemy $b=\psi(a)$ i różniczkujemy. Otrzymamy:

$$/2/ \quad 2x+2y\psi'(a)=0,$$

skąd $\psi'(a)=-\frac{x}{y}$ a $a=\chi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Z równań /1/ i /2/ mamy wyrugować a; więc

$$x^2+y^2+z^2=2x\chi\left(\frac{y}{x}\right)\mp 2x\frac{\psi(a)}{\psi'(a)}=$$

$$=x\left[2\chi\left(\frac{y}{x}\right)-2\frac{\psi(a)}{\psi'(a)}\right]=x\left\{2\chi\left(\frac{y}{x}\right)-2\frac{\psi\left[\chi\left(\frac{y}{x}\right)\right]}{\psi'\left[\chi\left(\frac{y}{x}\right)\right]}\right\}=x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

kładąc $\varphi(u)=2\chi(u)-\frac{\psi[\chi(u)]}{\psi'[\chi(u)]}$.

Tak $x^2+y^2+z^2=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, gdzie φ funkcja dowolna. Jest to to samo rozwiązanie, cośmy znaleźli poprzednio.

<u>P r z y k ł a d .</u> Niech będzie równanie $p\cdot q=z$, gdzie z jest funkcją zmiennych x, y, zaś $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Układ pomocniczy: $\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\frac{dz}{2z}=\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$.

Stąd, kładąc $e^u=t$, mamy równania charakterystyk:

$$q = q_0 e^u = q_0 t$$
$$p = p_0 e^u = p_0 t$$
$$z = z_0 e^{2u} = z_0 t$$
$$y = y_0 + p_0 (t-1)$$
$$x = x_0 + q_0 (t-1)$$

Ponieważ $p_0 q_0 = z_0$, więc $\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{(t-1)^2} = p_0 q_0 = z_0$, $(y-y_0)(x-x_0) = z_0 (t-1)^2$.

Lecz $t = \sqrt{\frac{z}{z_0}}$. A więc np. $(y-y_0)(x-x_0) = z_0\left(\sqrt{\frac{z}{z_0}}-1\right)^2$ jest całką naszego równania. Utworzona ona jest przez zbiór wszystkich charakterystyk, wychodzących z punktu o spółrzędnych (x_0, y_0, z_0) .

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE II-go RZĘDU.

Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu stanowią trudną, dotychczas zresztą mało zbadaną, dziedzinę matematyki.

Co do tych równań mogą być postawione dwa zagadnienia: Cauchy'ego i Dirichleta; oba mogą dotyczyć jednego i tego samego równania.

Niech będzie dane równanie:

$$/1/ \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

gdzie x i y są zmiennemi niezależnemi, z ich nieznaną funkcją, zaś $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.