RÓWNANIA EULERA.

Równaniami Eulera nazywają się równania typu:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\cdot(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Wielomiany P, Q, R , można sprowadzić do postaci następującej:

$$P(x,y) = x^n\cdot f_1\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$Q(x,y) = x^n\cdot f_2\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$R(x,y) = x^p\cdot f_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

Oznaczmy następnie $\frac{y}{x} = u$, skąd $y = x\cdot u$, $dy = x\,du + u\,dx$. Wówczas:

$$x^n f_1(u)\,dx + x^n\cdot f_2(u)(x\,du + u\,dx) + x^{p+2} f_3(u)\,du = 0.$$

Stąd

$$x^n\left\{f_1(u) + u\cdot f_2(u)\right\}dx + x^{n+1} f_2(u)\,du + x^{p+2} f_3(u)\,du = 0;$$

następnie

$$x^n\left\{f_1(u) + u\cdot f_2(u)\right\}\frac{dx}{du} + x^{n+1} f_2(u) + x^{p+2} f_3(u) = 0$$

wreszcie

$$\frac{dx}{du} + \frac{f_2(u)}{f_1(u) + u f_2(u)}\,x + \frac{f_3(u)}{f_1(u) + u\cdot f_2(u)}\,x^{p+2-n} = 0$$

W ten sposób równania Eulera sprowadzają się do równań Bernoullli'ego.

RÓWNANIA RICCATI'ego.

Ich postacią ogólną jest:

$$/1/ \qquad y' + X_1(x)\cdot y^2 + X_2(x)\cdot y + X_3(x) = 0.$$

Równania tego typu nie dają się ogólnie rozwiązać zapomocą kwadratur w liczbie skończonej. Można jednak łatwo znaleźć całkę ogólną, jeżeli znamy chociaż jedną całkę szczególną.

Istotnie, niech $z(x)$ będzie tą znaną całką szczególną. Podstawmy w równaniu /1/ $y = Y(x) + z(x)$, otrzymamy:

$$/2/ \quad Y' + z' + X_1 Y^2 + 2X_1 Yz + X_1 z^2 + X_2 Y + X_2 z + X_3 = 0,$$

lub grupując w odpowiedni sposób wyrazy:

$$[z' + X_1 z^2 + X_2 z + X_3] + Y' + X_1 Y^2 + 2X_1 Yz + X_2 Y = 0.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest z założenia tożsamościowo równe zeru, a zatym:

$$/3/ \quad Y' + X_1 Y^2 + 2(X_1 z + X_2)\cdot Y = 0$$

Jest to równanie Bernoulli'ego. Zakładając w nim $Y = \frac{1}{u}$, otrzymamy dla u równanie linjowe, którego całką ogólną będzie:

$$u = \varphi_1(x)\cdot C + \varphi_2(x).$$

Stąd wynika, że całka ogólna równania /1/ jest kształtu:

$$y = Y(x) + z(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)\cdot C + \varphi_2(x)} + \varphi_3(x) = $$

$$= \frac{\varphi_1(x)\cdot\varphi_3(x)\cdot C + \varphi_2(x)\cdot\varphi_3(x) + 1}{\varphi_1(x)\cdot C + \varphi_2(x)}$$

albo gdy oznaczymy $\varphi_1(x)\cdot\varphi_3(x) = \psi_1(x)$; $\varphi_2(x)\cdot\varphi_3(x) + 1 = \psi_2(x)$

$$/4/ \quad y = \frac{\psi_1(x)\cdot C + \psi_2(x)}{\varphi_1(x)\cdot C + \varphi_2(x)}.$$

Można udowodnić odwrotnie: gdy całką danego równania jest wyrażenie linjowe /4/, to równanie jest typu Riccati'ego /1/. W rzeczy samej

$$y\cdot\varphi_1(x)\cdot C + y\cdot\varphi_2(x) = \psi_1(x)\cdot C + \psi_2(x);$$

stąd

$$C = \frac{y\cdot\varphi_2(x) - \psi_2(x)}{\psi_1(x) - y\cdot\varphi_1(x)}.$$

Różniczkując, znajdziemy:

$$\{y\cdot\varphi_2(x) - \psi_2(x)\}'\cdot\{\psi_1(x) - y\cdot\varphi_1(x)\} -$$
$$-\{y\cdot\varphi_2(x) - \psi_2(x)\}\cdot\{\psi_1(x) - y\cdot\varphi_1(x)\}' = 0.$$

Po przekształceniu otrzymamy równanie o postaci /1/.

Z kształtu całki ogólnej równania Riccati'ego /4/ można wysnuć pewien wniosek. Nadajmy mianowicie stałej dowolnej C cztery wartości: C_1, C_2, C_3 i C_4. Otrzymamy cztery całki szczególne:

$$y_1 = \frac{\psi_1(x)\cdot C_1 + \psi_2(x)}{\varphi_1(x)\cdot C_1 + \varphi_2(x)}; \qquad y_2 = \frac{\psi_1(x)\cdot C_2 + \psi_2(x)}{\varphi_1(x)\cdot C_2 + \varphi_2(x)};$$

$$y_3 = \frac{\psi_1(x)\cdot C_3 + \psi_2(x)}{\varphi_1(x)\cdot C_3 + \varphi_3(x)}; \qquad y_4 = \frac{\psi_1(x)\cdot C_4 + \psi_2(x)}{\varphi_1(x)\cdot C_4 + \varphi_2(x)};$$

Stosunek podwójnego podziału /stosunek anharmoniczny, dwustosunek/ tych czterech całek szczególnych:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} : \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2}$$

jest wielkością stałą, niezależną od zmiennej x.

Łatwo to sprawdzić przez zwykłe podstawienie.

Znając zatem trzy całki szczególne równania Riccati'ego można znaleźć całkę ogólną bez kwadratury, rozwiązując mianowicie względem y równanie:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y - y_1}{y - y_2} = C.$$

RÓWNANIA STOPNIA n-go.

Jeżeli /1/ $f(x,y,y')=0$ jest równaniem stopnia n względem pochodnej y', wówczas rozkładamy lewą stronę na czynniki:

$$f(x,y,y') \equiv a(x,y)\cdot[y'-\varphi_1(x,y)][y'-\varphi_2(x,y)]\cdots\cdots[y'-\varphi_n(x,y)]=0.$$

Rozwiązanie zatym danego równania stopnia n-go sprowadza się do rozwiązania n równań stopnia pierwszego:

$$y'=\varphi_1(x,y);$$
$$y'=\varphi_2(x,y);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y'=\varphi_n(x,y);$$

których całkami ogólnemi będą:

$$f_1(x,y,C)=0;\quad f_2(x,y,C)=0;\ \cdots\cdots\cdots\ f_n(x,y,C)=0.$$

Całką ogólną równania /1/ będzie więc iloczyn

$$F(x,y,C)=f_1(x,y,C)\cdot f_2(x,y,C)\cdots\cdots f_n(x,y,C).$$

W praktyce często podobny rozkład wielomianu na czynniki jest niewykonalny. Wówczas trudność tę omijamy, rozwiązując dane równanie /1/ względem y:

$$/2/\quad y=F(x,y'),$$

i wprowadzając następnie zmienną pomocniczą $p=y'$:

$$/3/\quad \frac{dy}{dx}=p=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad p=\frac{\partial F(x,p)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,p)}{\partial y'}\cdot\frac{dp}{dx}$$

skąd

$$/4/\quad \frac{dp}{dx}=\frac{p-\dfrac{\partial F(x,p)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,p)}{\partial y'}}=\psi(x,p).$$

Otrzymujemy tym sposobem równanie różniczkowe I rzędu, które jest stopnia pierwszego względem pochodnej /4/ $\frac{dp}{dx} = \psi(x,p)$. Jeżeli potrafimy je rozwiązać, to będziemy mogli rozwiązać równanie /2/. Inaczej mówiąc, jeśli

/5/ $y' = p = \varphi(x, C)$

jest całką równania /4/, to

/6/ $y = F[x, \varphi(x, C)]$

jest całką równania /2/.

Nieraz wygodniej bywa otrzymać całkę równania /4/ w postaci:

/5'/ $x = \Phi(p, C)$.

Otrzymaną wartość podstawiamy w równanie /2/:

$$y = F[\Phi(p,C), p]$$

Po przekształceniu ostatniego równania otrzymamy układ:

$$x = \Phi(p, C),$$
$$y = \mathcal{F}(p, C),$$

który będzie właśnie układem równań parametrycznych rodziny krzywych /2/, przy jej wykreślaniu nieraz wygodniejszy od równania /6/.

Zupełnie analogiczną drogą postępujemy wówczas, jeżeli równanie /1/ $f(x, y, y') = 0$ można rozwiązać nie względem y, jak wyżej, a względem x :

/2/ $x = F(y, y')$.

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $p = y'$ i różniczkujemy równanie /2/ względem x :

$$1 = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

lub inaczej:

$$/3/ \qquad 1 = \frac{\partial F(y,p)}{\partial y} \cdot p + \frac{\partial F(y,p)}{\partial y'} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \cdot p$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy:

$$/4/ \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \psi(y,p).$$

Otrzymaliśmy równanie stopnia pierwszego względem pochodnej /4/. Jeżeli określimy z niego

$$/5/ \qquad y' = p = \varphi(y,C),$$

to całką równania /2/ będzie:

$$/6/ \qquad x = F[y, \varphi(y,C)],$$

jeżeli zaś z równania /4/ wyznaczymy

$$/5'/ \qquad y = \Phi(p,C),$$

to otrzymamy znów ten sam układ równań parametrycznych, co w przypadku poprzednim:

$$x = F[\Phi(p,C), p],$$
$$y = \Phi(p,C)$$

Metoda powyższa była zastosowana przez matematyków Lagrange'a i przedtem jeszcze przez Clairaut'a do dwuch szczególnych typów równań n-go stopnia, które teraz rozważymy.

RÓWNANIA LAGRANGE'a.

Postacią ogólną równań tego typu jest:

$$/1/ \qquad y = x \cdot f_1(y') + f_2(y').$$

Podstawiając $y' = p$, a następnie różniczkując równanie /1/ względem x, otrzymamy:

$$p = f_1(p) + x \cdot f_1'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + f_2'(p) \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Stąd mamy:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f_1(p)}{x \cdot f_1'(p) + f_2'(p)},$$

a zatym:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x \cdot f_1'(p)}{p - f_1(p)} + \frac{f_2'(p)}{p - f_1(p)};$$

jest to równanie linjowe; posiada ono całkę

$$x = e^{\int \frac{f_1'(p)}{p - f_1(p)} dp} \cdot \left\{ C + \int \frac{f_2'(p)}{p - f_1(p)} \cdot e^{\int \frac{f_1'(p)}{p - f_1(p)} dp} dp \right\},$$

którą oznaczymy przez:

$$x = \Phi(p).$$

Na zasadzie równania /1/:

$$y = \Phi(p) \cdot f_1(p) + f_2(p).$$

Dwa ostatnio napisane równania są właśnie równaniami parametrycznemi rodzin krzywych, odpowiadających danemu równaniu różniczkowemu /1/.

RÓWNANIA CLAIRAUT'a.

Równania Clairaut'a są szczególnym przypadkiem równań Lagrange'a. Mają one postać:

$$/1/ \qquad y = x \cdot y' + f(y').$$

Podstawiając, jak wyżej, $y' = p$ i różniczkując, znajdujemy:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

a stąd:

$$[x + f'(p)] \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

A zatym albo

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

skąd $p = C$, czyli otrzymujemy rodzinę prostych, albo też

$$x + f'(p) = 0,$$

skąd znowu

$$x = -f'(p),$$

zaś

$$y = -f'(p) \cdot p + f(p).$$

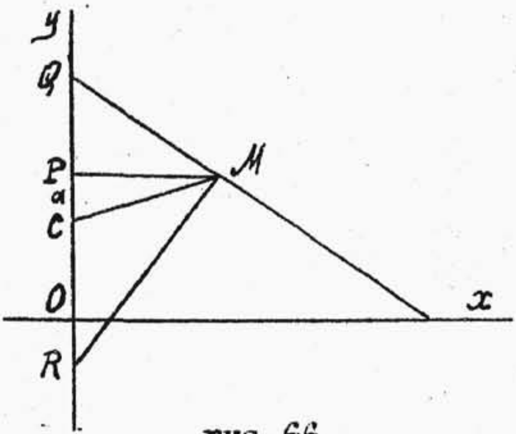
Otrzymaliśmy zatym znowu równania parametryczne rodziny krzywych /1/.

<u>P r z y k ł a d .</u> Znaleźć równanie takiej krzywej, żeby w prostokątnym trójkącie RMQ, utworzonym przez styczną MQ, normalną MR i odcinek QR osi y, rzut środkowej MC na oś y był wielkością stałą, równą a.

Z równania stycznej

$$Y - y = y'(X - x)$$

$X = 0$



rys. 66.

mamy $OQ = y - y'(x)$, zaś z równania normalnej

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

otrzymujemy $OR = y + \frac{x}{y'}$

A zatym

$$OC = \frac{OQ + OR}{2} =$$

$$= \frac{y - y'(x) + y + \frac{x}{y'}}{2} = y + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{y'} - y'\right).$$

Ponieważ mamy $OP = y$, więc

$$CP = OP - OC = y - y - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{y'} - y'\right) = \frac{x}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = a.$$

Doszliśmy więc do równania różniczkowego:

$$xy' - \frac{x}{y'} = 2a,$$

lub inaczej

$$/1/ \quad xy'^2 - 2ay' - x = 0.$$

Podstawmy $y' = p$. Wtedy:

$$/2/ \quad x = \frac{2ap}{p^2 - 1},$$

a stąd

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2a(p^2-1) - 2ap \cdot 2p}{(p^2-1)^2} = \frac{2ap^2 - 2a - 4ap^2}{(p^2-1)^2} = \frac{-2a(p^2+1)}{(p^2-1)^2}$$

Ponieważ

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = -p \cdot \frac{2a(p^2+1)}{(p^2-1)^2},$$

przeto

$$y = -2a\int \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2} \cdot p \cdot dp$$

Aby rozwiązać powyższą całkę, oznaczymy $p^2-1=u$. Stąd $2p\cdot dp=du$ oraz $p^2+1=u+2$. Będziemy więc mieli:

$$y=-a\int\frac{u+2}{u^2}\,du=-a\int\frac{du}{u}-2a\int\frac{du}{u^2},$$

zatym

$$y=-a\log u+\frac{2a}{u}+C.$$

Stąd

$$/3/\quad y=-a\log(p^2-1)+\frac{2a}{p^2-1}+C.$$

Równania /2/ i /3/ są równaniami parametrycznemi szukanej rodziny krzywych.

Prócz powyższej wartości dla y, mającej sens tylko dla $p>1$, mamy jeszcze wartość:

$$y=a\log(1-p^2)+\frac{2a}{p^2-1}+C,$$

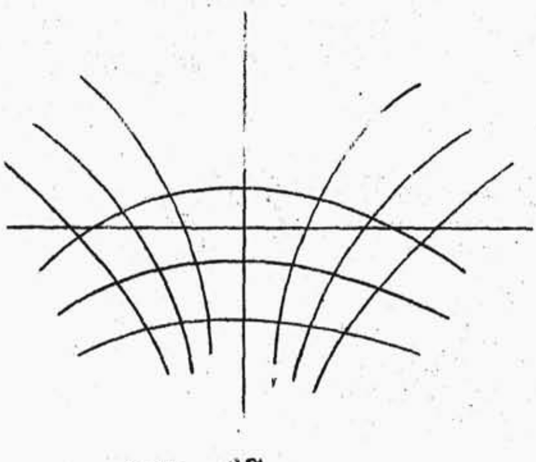
gdyż funkcje $\log(p^2-1)$ oraz $\log(1-p^2)$ mają jednakowe pochodne.

Każda krzywa danej rodziny składa się zatym z dwuch gałęzi. Dla pierwszej gałęzi musi być $|p|>1$.

Gdy

p	$1 \nearrow +\infty$
x	$+\infty \searrow 0$
y	$+\infty \searrow -\infty$

to



rys. 67.

Dla drugiej gałęzi musi być $|p|<1$.

Gdy

p	$-1 \nearrow 0 \nearrow +1$
x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
y	$-\infty \nearrow C-2a \searrow -\infty$

to

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZUPEŁNE.

Równanie

$$/1/ \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

nazywa się zupełnym wówczas, gdy przedstawia różniczkę zupełną pewnej funkcji

$$/2/ \quad f(x,y) = C.$$

Różniczką zupełną funkcji /2/ jest, jak wiadomo,

$$/3/ \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy = 0,$$

a zatym równanie /1/ będzie zupełnym wtedy, kiedy

$$/4/ \quad P(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

jego całką będzie: $f(x,y) = C$.

Udowodnimy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby równanie /1/ było zupełne, jest:

$$/5/ \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Istotnie, jeśli równanie /1/ jest zupełne, to muszą być słuszne równości /4/. Tworząc pochodne cząstkowe $P(x,y)$ względem y oraz $Q(x,y)$ względem x, będziemy mieli:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}; \quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x}.$$

Ponieważ zaś

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x},$$

przeto warunkiem koniecznym jest:

$$/5/ \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Należy udowodnić teraz, że jest to również warunek dostateczny na to, żeby równanie /1/ było zupełne, czyli aby istniała pewna funkcja $f(x,y)$ taka, że $P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Załóżmy, że ten warunek jest spełniony. Jeżeli $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, to

$$/6/ \qquad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + Y(y),$$

gdzie stała całkowania $Y(y)$ może być pewną, nieznaną funkcją y-ka. Biorąc pochodną równania /6/ względem y, mamy:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx + \frac{dY(y)}{dy},$$

czyli

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{dY(y)}{dy},$$

na zasadzie warunku /5/. Stąd

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \frac{dY(y)}{dy},$$

a zatym

$$\frac{dY(y)}{dy} = Q(x_0,y).$$

Całką tego jest:

$$Y(y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy.$$

Podstawiając tę wartość do równania /6/, otrzymujemy:

$$/7/ \qquad f(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy=C.$$

Z powyższego równania wynikają równości:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=P\ ;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=Q;$$

dowodzące słuszności twierdzenia.

Równanie /7/ jest jednocześnie całką ogólną równania /1/. Mamy tylko pozornie trzy stałe dowolne x_0, y_0, C; w istocie stanowią one razem jedną stałą dowolną; stała całkowania, istotnie, jest tylko jedna.

<u>P r z y k ł a d .</u> Dane jest równanie różniczkowe:

$$(x^2+y^2)\,dx+(2xy+y^2-1)\,dy=0.$$

Jest ono zupełne, gdyż $\frac{\partial P}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2y$. Mamy tutaj:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x^2+y^2;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+y^2-1.$$

Całkując pierwszą z napisanych tu pochodnych cząstkowych, otrzymamy:

$$f(x,y)=\int_0^x (x^2+y^2)\,dx+Y(y)=\frac{x^3}{3}+xy^2+Y(y)$$

stąd

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy+\frac{dY(y)}{dx}=2xy+y^2-1.$$

A zatym

$$\frac{dY(y)}{dx}=y^2-1\ ,\quad Y(y)=\frac{y^3}{3}-y,$$

więc ostatecznie:

$$f(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy^2+\frac{y^3}{3}-y = C.$$

Przypuśćmy teraz, że dane równanie różniczkowe

$$/1/ \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

jest niezupełne, to znaczy, że

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nieraz można znaleźć taki czynnik $M(x,y)$, aby równanie /1/ pomnożone przez ten czynnik dało nam równanie zupełne:

$$/2/ \quad M(x,y)\cdot P(x,y)\,dx + M(x,y)\cdot Q(x,y)\,dy = 0$$

Wówczas

$$\frac{\partial(M\cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(M\cdot Q)}{\partial x},$$

czyli

$$P\cdot\frac{\partial M}{\partial y}+M\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = Q\cdot\frac{\partial M}{\partial x}+M\cdot\frac{\partial Q}{\partial x},$$

albo też

$$/3/ \quad M\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\cdot\frac{\partial M}{\partial x} - P\cdot\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Z tego równania właśnie może być funkcja $M(x,y)$ wyznaczona. Nosi ona nazwę c z y n n i k a c a ł k u j ą c e g o .

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RZĘDÓW WYŻSZYCH.

Najprostsze równanie różniczkowe rzędu n -go ma kształt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$