więc ostatecznie:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{y^3}{3} - y = C.$$

Przypuśćmy teraz, że dane równanie różniczkowe

$$/1/ \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

jest niezupełne, to znaczy, że

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nieraz można znaleźć taki czynnik $M(x,y)$, aby równanie /1/ pomnożone przez ten czynnik dało nam równanie zupełne:

$$/2/ \quad M(x,y)\cdot P(x,y)\,dx + M(x,y)\cdot Q(x,y)\,dy = 0$$

Wówczas

$$\frac{\partial(M\cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(M\cdot Q)}{\partial x},$$

czyli

$$P\cdot\frac{\partial M}{\partial y} + M\cdot\frac{\partial P}{\partial y} = Q\cdot\frac{\partial M}{\partial x} + M\cdot\frac{\partial Q}{\partial x},$$

albo też

$$/3/ \quad M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\cdot\frac{\partial M}{\partial x} - P\cdot\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Z tego równania właśnie może być funkcja $M(x,y)$ wyznaczona. Nosi ona nazwę c z y n n i k a   c a ł k u j ą c e g o .

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RZĘDÓW WYŻSZYCH.

Najprostsze równanie różniczkowe rzędu n-go ma kształt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Można je rozwiązać przez wielokrotne całkowanie, obniżając stopniowo o jedność rząd równania. Mianowicie:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = f_1(x),$$

następnie

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_1}^{x} f_1(\xi_1)\,d\xi_1 = \int_{x_1}^{x} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} f(\xi)\,d\xi = f_2(x),$$

dalej

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{x_2}^{x} d\xi_2 \int_{x_1}^{\xi_2} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} f(\xi)\,d\xi.$$

Całkując w ten sposób w dalszym ciągu, otrzymamy:

$$y = \int_{x_{n-1}}^{x} d\xi_{n-1} \int_{x_{n-2}}^{\xi_{n-1}} d\xi_{n-2} \int_{x_{n-3}}^{\xi_{n-2}} d\xi_{n-3} \cdots\cdots\cdots \int_{x_1}^{\xi_2} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} f(\xi)\,d\xi.$$

Niech znowu będzie dane równanie:

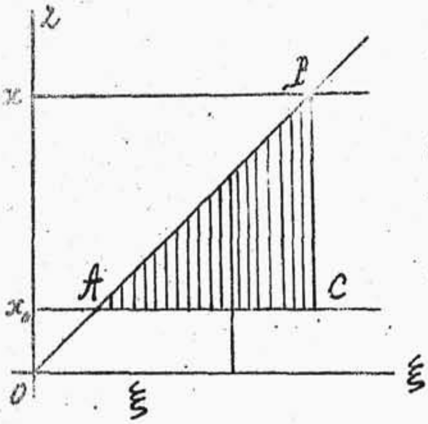
$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Całka ogólna tego równania zawiera n stałych dowolnych, możemy zatym postawić dodatkowy warunek, żeby dla $x=x_0$ funkcja oraz $n-1$ pochodnych przyjmowało odpowiednio z góry zadane wartości $y_0, y_0', y_0'', \cdots\cdots\cdots y_0^{n-1}$.

Załóżmy, że $n=2$. Mamy wtedy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x).$$

Dwie stałe całkowania wyznaczają się z warunku, że dla $x=x_0$ jest $y=y_0, y'=y_0'$. Zatym całką będzie:



rys. 68.

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} d\xi \int_{x_0}^{\xi} f(z)\,dz,$$

zaś po przekształceniu całki podwójnej, której polem całkowania jest ΔABC przez zmienienie porządku całkowania:

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\,dz.$$

Tę samą metodę możemy zastosować dla równań rzędu 3-go i t.d. Jako całkę ogólną danego równania n-go rzędu otrzymamy:

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + y_0''\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdots + y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1} f(z)\,dz$$

Funkcja ta musi spełniać dane równanie. Sprawdzimy to, znajdując jej kolejne pochodne.

$$y' = y_0' + y_0''(x-x_0) + \cdots\cdots + y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{(n-2)} f(z)\,dz$$

$$y'' = y_0'' + y_0'''(x-x_0) + \cdots\cdots + y_0^{(n-1)}\frac{(x-x_0)^{n-3}}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-3)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-3} f(z)\,dz$$

Przy pomocy indukcji znajdziemy

$$y^{(n-2)} = y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-z) f(z)\,dz$$

$$y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} + \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$$

wreszcie, ostatnie różniczkowanie daje

$$y^{(n)} = f(x)$$

czyli y jest istotnie całką danego równania.

Rozpatrzmy teraz równanie, gdzie pochodna jest funkcją zmiennej y. Weźmy równanie rzędu 2-go:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Oznaczmy $\frac{dy}{dx} = p$, skąd $p^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Utwórzmy różniczkę:

$$dp^2 = 2p\,dp = 2\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = 2\frac{d^2y}{dx^2}\,dy = 2f(y)\,dy.$$

Gdy nazwiemy $p^2 = z$, to

$$\frac{dz}{dy} = 2f(y)$$

a stąd

$$z = \int 2f(y)\,dy + C = 2\int f(y)\,dy + C.$$

Wobec tego

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}$$

zaś

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}}$$

wreszcie

$$x = C_1 + \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}}$$

W podobny sposób rozwiązuje się równania kształtu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = f(y),$$

gdzie a jest pewną liczbą stałą. Oznaczmy znowu $\frac{dy}{dx} = p$;

wówczas

$$dp^2 = 2p\,dp = 2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = 2\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dy.$$

Pomnóżmy obie strony danego równania przez $2dy$:

$$2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\,dy + 2a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dy = 2f(y)\,dy$$

czyli

$$dp^2 + 2a\,p^2 dy = 2f(y)\,dy.$$

Gdy podstawimy teraz $p^2 = z$, otrzymamy równanie linjo-

$$\frac{dz}{dy} + 2az - 2f(y) = 0.$$

Całką tego równania linjowego jest

$$z = e^{-2ay}\left\{C + 2\int f(y)\,e^{2ay}\,dy\right\}$$

A zatym

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{z} = \sqrt{e^{-2ay}\left\{C + 2\int f(y)\,e^{2ay}\,dy\right\}}$$

Stąd

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{e^{-2ay}\left\{C + 2\int f(y)\,e^{2ay}\,dy\right\}}}$$

więc

$$x = C_1 + \int\frac{dy}{\sqrt{e^{-2ay}\left\{C + 2\int f(y)\,e^{2ay}\,dy\right\}}}$$

Nieraz spotykamy się z równaniem, które podaje związek między pochodnemi dwuch kolejnych rzędów: n i $n-1$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Oznaczmy $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z$ i podstawmy tę wartość do danego równania:

$$\frac{dz}{dx} = f(z)$$

Stąd

$$dx = \frac{dz}{f(z)}$$

więc

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + C.$$

Gdy powyższe całkowanie da się uskutecznić, wówczas otrzymamy $x = \varphi(z, C)$, a stąd przez odwrócenie zależności $z = \psi(x, C)$. Będziemy więc mieli:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi(x, C)$$

Jest to równanie typu znanego /str. 160/ 161, całką jego jest

$$y = P(x) + \frac{1}{(n-2)!}\int (x-z)^{n-2}\psi(z, C)\,dz,$$

gdzie

$$P(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \cdots\cdots\cdots + y_0^{n-2}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

Jeżeli zastosowane powyżej odwrócenie zależności uskutecznić się nie daje, używamy innego sposobu, polegającego na stopniowym obniżaniu rzędu pochodnej. Mianowicie:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}dx = \int \frac{z\,dz}{f(z)} = \varphi(z),$$

czyli

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Otrzymaliśmy zatym równanie tego samego typu, co dane, ale rzędu niższego o jedność. Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy do samej funkcji y.

Przypuśćmy teraz, że mamy równanie, wyrażające zależność pomiędzy pochodną rzędu n i rzędu $n-2$:

$$\frac{d^{n}y}{dx^{n}}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

Podstawiając $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=z$, otrzymamy:

$$\frac{d^{2}z}{dx^{2}}=f(z).$$

Stąd

$$x=C_1+\int\frac{dz}{\sqrt{C+2\int f(z)dz}},$$

czyli

$$z=\varphi(x).$$

Sprowadziliśmy więc dane równanie do typu znanego:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\varphi(x).$$

Podobnie rozwiązuje się równanie:

$$f(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots\dots\dots y^{(n)})=0.$$

Wystarczy tu oznaczyć

$$y^{(k)}=\frac{d^{k}y}{dx^{k}}=z$$

aby obniżyć o k jedności rząd równania i sprowadzić je do postaci

$$f(x, z, z', z'', \ldots\ldots\ldots z^{(n-k)}) = 0.$$

Przy całkowaniu tego równania będziemy mieli $n-k$ stałych, związanych zależnością

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots C_{n-k}).$$

Całka ogólna ostatnio napisanego równania będzie zawierała znowu k stałych dowolnych, czyli razem otrzymamy n stałych, co też być powinno, gdyż dane równanie jest rzędu n -go.

RÓWNANIA BEZ ZMIENNEJ x.

Rozpatrzymy teraz równania, w których nie występuje zmienna niezależna x. Niech będzie dane równanie rzędu drugiego:

$f(y'', y', y) = 0$

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

$y' = t$

Oznaczmy $\frac{dy}{dx} = p$; wówczas

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Dane równanie sprowadzi się do równania rzędu pierwszego:

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

które da nam po scałkowaniu równanie 1-go rzędu:

$$p = \varphi(y, C),$$

czyli

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C),$$

skąd

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y, C)}.$$

Całkując to, otrzymamy szukaną całkę ogólną.

Niekiedy trudno jest otrzymać równanie $p = \varphi(y, C)$. Wówczas staramy się całkę równania $f(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$ przedstawić w postaci:

$$y = \psi(p, C),$$

skąd

$$dy = \psi'(p, C)dp,$$

a następnie

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\psi'(p, C)}{p}dp.$$

Otrzymujemy więc układ równań parametrycznych:

$$x = \int \frac{\psi'(p, C)}{p}dp + C_1$$

$$y = \psi(p, C)$$

Ta sama metoda daje się zastosować do równań dowolnego rzędu.

RÓWNANIA JEDNORODNE WZGLĘDEM y

Jeżeli dane równanie

$$/1/ \qquad f(x, y, y', \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

jest jednorodne względem funkcji y i jej pochodnych, czas równanie /1/ można zastąpić równaniem

$$/1'/ \qquad f(x, Cy, Cy', \ldots\ldots Cy^{(n)}) = 0.$$

Wprowadźmy nową funkcję u zamiast y, gdzie $\frac{y'}{y} = u$.

Wówczas

$$\frac{y'}{y}dx = udx,$$

zaś po scałkowaniu

$$\log y = \int u dx + \log C,$$

lub też

$$y = C e^{\int u dx}.$$

Kolejne pochodne wynoszą

$$y' = u \cdot y$$

$$y'' = u' \cdot y + u \cdot y' = u'y + u^2 y = y(u' + u^2)$$

....

Wogóle mamy

$$\frac{y^n}{y} = \varphi(u, u', u'', \ldots\ldots\ldots u^{(n-1)})$$

Z równania /1'/, gdzie $C = \frac{1}{y}$, wynika:

$$f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots\ldots\ldots \frac{y^n}{y}\right) = 0.$$

Gdy tu podstawimy wyżej napisane wartości, otrzymamy:

$$f[x, u, u', u'', \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi(u, u', u'', \ldots\ldots u^{(n-1)})] = 0,$$

co da po uporządkowaniu wyrazów równanie $(n-1)$ -go rzędu:

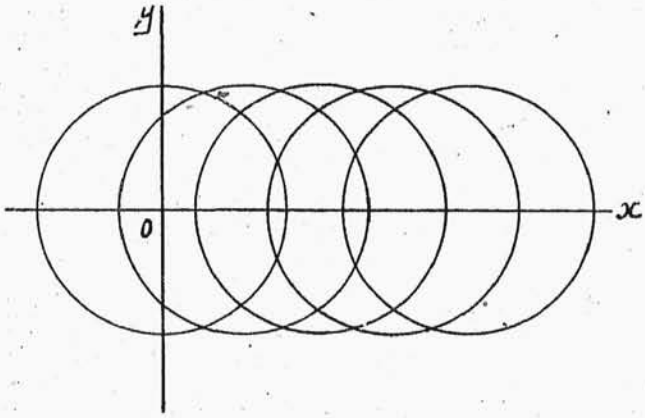
$$f_1(x, u, u', \ldots\ldots\ldots\ldots u^{(n-1)}) = 0.$$

Przez kolejne całkowanie otrzymamy całkę ogólną dla u, zawierającą $n-1$ stałych. Całka ogólna y będzie więc posiadała wraz ze stałą C n stałych, co właśnie być powinno.

Przykład 1. Dana jest rodzina kół o promieniach równych r, których środki leżą na osi x. Znaleźć równanie rodziny krzywych ortogonalnych.

Równaniem koła, czyniącego zadość założeniu, jest

/1/ $$(x-c)^2 + y^2 = r^2,$$



rys. 69.

gdzie c oznacza długość środka koła od początku układu. Zróżniczkujmy to równanie względem x :

$$2(x-c)\,dx + 2y\,dy = 0.$$

Dzieląc wszystkie wyrazy przez 2 i uwzględniając, że $x-c=\sqrt{r^2-y^2}$, będziemy mogli napisać równanie różniczkowe naszej rodziny kół:

$$\sqrt{r^2-y^2}\,dx + y\,dy = 0.$$

Równanie różniczkowe rodziny trajektorji będzie:

$$\sqrt{r^2-y^2}\,dy - y\,dx = 0.$$

Całkujemy przez zmianę zmiennych. Połóżmy $y = r \cdot \sin\alpha$, gdzie α jest nową zmienną. Wtedy $\sqrt{r^2-y^2} = r \cdot \cos\alpha$; $dy = r\cos\alpha\,d\alpha$ i równanie będzie

$$r^2\cos^2\alpha\,d\alpha - r\sin\alpha\,dx = 0,$$

skąd

$$dx = r\,\frac{\cos^2\alpha\,d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}\,d\alpha - r\sin\alpha\,d\alpha$$

$$\int dx = r\int\frac{d\alpha}{\sin\alpha} - r\int\sin\alpha\,d\alpha$$

czyli

$$x - x_0 = r\log\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - r\cos\alpha;$$

dołączając $y = r\sin\alpha$ mamy równanie parametryczne rodziny krzywych. Są to traktrysy, które można otrzymać z jednej z nich przez przesunięcie w kierunku osi x.

<u>U w a g a .</u> Równanie różniczkowe trajektorji, czyli $\sqrt{r^2-y^2}\,dy - y\,dx = 0$ można przeestawić w postaci $r=\sqrt{y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2}$, co dowodzi, że w każdym punkcie styczna /odcinek stycznej do osi x / jest stała = r; własność charakterystyczna traktrysy.

<u>P r z y k ł a d 2.</u> Dane jest równanie:

$$y'' = k^2 \cdot y.$$

Gdy podstawimy:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p,$$

otrzymamy:

$$p\frac{dp}{dy} = k^2 y,$$

lub

$$p\,dp = k^2 y\,dy.$$

Całkując obie strony tego równania znajdziemy:

$$p^2 = k^2 y^2 + C.$$

A zatym

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2 y^2 + C};$$

stąd

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 + C}},$$

zaś

$$x = \int \frac{dy}{k\sqrt{y^2 + \frac{C}{k^2}}} + C_1 = \frac{1}{k}\log\left[y + \sqrt{y^2 + \frac{C}{k^2}}\right] + C_1$$

Z tej równości mamy:

$$\log\left(y+\sqrt{y^2+\frac{c}{k^2}}\right)=k(x-c_1)$$

więc

$$y+\sqrt{y^2+\frac{c}{k^2}}=e^{k(x-c_1)}.$$

Zauważymy, że

$$y-\sqrt{y^2+\frac{c}{k^2}}=-e^{-k(x-c_1)}.$$

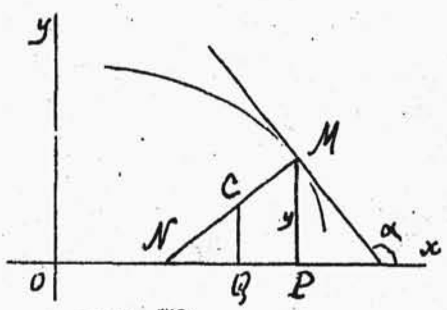
Dodając te równania stronami i dzieląc strony otrzymanego równania przez 2, znajdziemy:

$$y=\frac{1}{2}\left[e^{k(x-c_1)}-e^{-k(x-c_1)}\right].$$

P r z y k ł a d 3. Znaleźć krzywe, dla których rzut promienia krzywizny na oś x jest wielkością stałą.

Długość promienia krzywizny jest równa:

$$MC=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$



rys. 70.

Następnie mamy

$$\operatorname{tg}\alpha=y',$$

skąd

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+1/y'^2}}=\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}}.$$

Biorąc teraz pod uwagę rzut promienia krzywizny MC na oś x będziemy mieli szukane równanie różniczkowe:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}}=\frac{1}{k},$$

gdzie $\frac{1}{k}$ jest daną wielkością stałą. Równanie to możemy przekształcić, sprowadzając je do postaci:

$$y'' = k(1+y'^2)\cdot y'$$

Podstawmy $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}=k(1+p^2)p.$$

Stąd

$$\int\frac{dp}{(1+p^2)p}=\int k\,dx + C,$$

czyli

$$kx+C=\int\frac{p\,dp}{p^2(1+p^2)}.$$

Oznaczając $p^2=z$, mamy

$$kx+C=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z(1+z)}.$$

Całkę powyższą rozwiązujemy przy pomocy rozkładu na ułamki proste. Znajdziemy, że

$$kx+C=\frac{1}{2}\log z-\frac{1}{2}\log(1+z),$$

czyli

$$\sqrt{\frac{z}{1+z}}=Ce^{kx},$$

lub

$$\frac{z}{1+z}=\frac{p^2}{1+p^2}=Ce^{2kx}.$$

Stąd

$$p^2=Ce^{2kx}+p^2Ce^{2kx}$$

$$p^2=\frac{Ce^{2kx}}{1-Ce^{2kx}},$$

więc

$$p=\frac{Ce^{kx}}{\sqrt{1-Ce^{2kx}}}=\frac{dy}{dx}$$

A zatym

$$\int dy=C\int\frac{e^{kx}}{\sqrt{1-Ce^{2kx}}}dx+C_1.$$

Oznaczmy znowu $\sqrt{C}\cdot e^{kx}=z$; $\sqrt{C}\cdot ke^{kx}dx=dz$. Wówczas

$$y=\frac{C}{k\sqrt{C}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+C_1,$$

skąd

$$y=\frac{\sqrt{C}}{k}\arcsin z+C_1,$$

wreszcie

$$y=\frac{\sqrt{C}}{k}\arcsin\sqrt{C}\cdot e^{kx}+C_1.$$

To jest właśnie równanie danej rodziny krzywych.

Przykład 4. Znaleźć równanie rodziny krzywych, dla których promień krzywizny jest daną funkcją odciętej.

Jeżeli $\varphi(x)$ będzie oznaczało daną funkcję, to będziemy mogli odrazu napisać równanie różniczkowe szukanej rodziny.

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\varphi(x)$$

Podstawmy, jak w przykładzie poprzednim, $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$

$$(1+y'^2)^{3/2}=\frac{dp}{dx}\cdot\varphi(x)$$

Równanie to scałkujemy, oddzieliwszy w nim przedtym zmienne:

$$\int\frac{dx}{\varphi(x)}=\int\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}+C.$$

Aby wykonać całkowanie, oznaczymy $p=tg\,z$, $dp=\frac{dz}{\cos^2 z}$
Wówczas całka $\int\frac{dx}{\varphi(x)}$, którą dla skrócenia nazwiemy $\psi(x)$, będzie równa:

$$\psi(x)=\int\frac{dz}{\cos^2 z\,(1+tg^2 z)^{3/2}}=\int\frac{dz}{\cos^2 z\left(\frac{1}{\cos^2 z}\right)^{3/2}}=\int\cos z\,dz=$$
$$=\sin z+C.$$

Lecz $\sin x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, więc

$$\frac{p^2}{1+p^2} = [\psi(x) - C]^2$$

skąd

$$p^2 = (1+p^2)[\psi(x) - C]^2 = [\psi(x) - C]^2 + [\psi(x) - C]^2 \cdot p^2,$$

albo

$$p^2 = \frac{[\psi(x) - C]^2}{1 - [\psi(x) - C]^2}.$$

A zatym

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x) - C}{\sqrt{1 - [\psi(x) - C]^2}},$$

więc

$$y = \int \frac{\psi(x) - C}{\sqrt{1 - [\psi(x) - C]^2}} dx + C_1,$$

gdzie $\psi(x) = \int \frac{dx}{\varphi(x)}$.

Przypuśćmy, że promień krzywizny jest odwrotnie proporcjonalny do odciętej, to znaczy, że $\varphi(x) = \frac{k}{x}$. Wówczas

$$\psi(x) = \frac{1}{k}\int x\,dx = \frac{x^2}{2k}.$$

Równaniem rodziny krzywych będzie więc

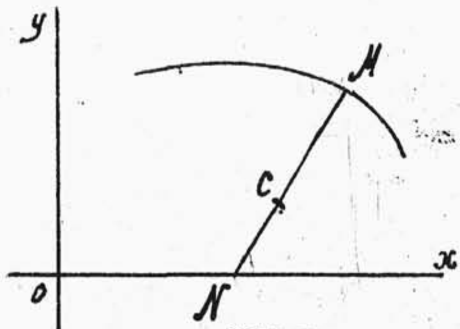
$$y = \frac{1}{2k}\int \frac{x^2 - 2kC}{\sqrt{1 - [\frac{x^2}{2k} - C]}} dx + C_1$$

<u>P r z y k ł a d 5.</u> Znaleźć równanie rodziny krzywych, dla których promień krzywizny jest proporcjonalny do odcinka normalnej, zawartego pomiędzy krzywą a osią x.

/Krzywe, które spełniają ten warunek, noszą nazwę krzywych Ribaucourt'a; najważniejsze krzywe, jak parabola, hyperbola, łańcuchowa i t.d. należą do tej rodziny/.

Jeżeli promieniem krzywizny będzie MC /rys.71/, odcinkiem normalnej pomiędzy krzywą a osią x — MN, to

$$MC = k . MN.$$



rys.71

Mamy następnie $tg\alpha = y'$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$, więc

$$MN = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

A zatym równaniem różniczkowym szukanej rodziny będzie:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = k\cdot y(1+y'^2)^{1/2}$$

lub po uproszczeniu:

$$1+y'^2 - k\cdot y\cdot y'' = 0.$$

Oznaczmy znowu $y'=p$, $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$:

$$1+p^2 - k\cdot y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy} = 0,$$

stąd

$$\int\frac{dy}{k\cdot y} = \int\frac{p\,dp}{1+p^2}$$

czyli

$$\frac{1}{k}\log y = \frac{1}{2}\log(1+p^2) + \log C$$

albo też

$$y^{1/k} = C \cdot \sqrt{1+p^2}.$$

Rozwiązując to równanie względem p, otrzymamy:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C}\sqrt{y^{2/k} - C^2},$$

skąd

$$dx = \frac{C\,dy}{\sqrt{y^{2/k} - C^2}},$$

zaś

$$x = C\int \frac{dy}{\sqrt{y^{2/k} - C^2}} + C_1.$$

Przypuśćmy, że spółczynnik proporcjonalności $k = 1$. Wówczas

$$x = C\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} + C_1 = C \log\left(y + \sqrt{y^2 - C^2}\right) + C_1$$

albo

$$\frac{x - C_1}{C} = \log\left(y + \sqrt{y^2 - C^2}\right).$$

Stąd mamy

$$y + \sqrt{y^2 - C^2} = e^{\frac{x - C_1}{C}}$$

oraz

$$y - \sqrt{y^2 - C^2} = e^{-\frac{x - C_1}{C}}$$

Dodając te równania do siebie i dzieląc powstałe równanie przez 2, otrzymamy równanie łańcuchowej:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{C}} + e^{-\frac{x - C_1}{C}}\right).$$

Przypuśćmy, że $k = -2$. W tym przypadku

$$x = C\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y} - C^2}} + C_1.$$

Rozwiązując tę całkę, dojdziemy do równań cykloidy.

Niech $k=-1$. W takim razie

$$x = c\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-c^2y^2}} + C_1 = -\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2y^2} + C_1 .$$

Otrzymujemy więc równanie koła, którego środek leży na osi x :

$$(x-C_1)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

Czyniąc $k=2$, otrzymalibyśmy równanie paraboli.

RÓWNANIA LINJOWE.

Równanie różniczkowe dowolnego rzędu nazywa się linjowym, jeżeli funkcja y i jej pochodne występują tylko w pierwszej potędze. Postacią ogólną równania linjowego n-go rzędu jest:

$$y^{(n)} + X_1(x)\cdot y^{(n-1)} + X_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \dots\dots + X_{n-1}(x)\cdot y' + X_n(x)\cdot y = X(x).$$

Jeżeli prawa strona tego równania jest tożsamościowo równa zeru: $X(x)\equiv 0$, wówczas równanie nazywamy n i e p e ł n y m albo z r e d u k o w a n y m ; w przeciwnym razie mamy równanie p e ł n e .

Badanie równań linjowych rozpoczniemy od poznania w ł a s n o ś c i r ó w n a n i a z r e d u k o w a n e g o .