$$-\int_0^x \frac{2a}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \left(\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right)' = \frac{-1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{-x}{a^2}$$

Stąd

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}$$

Postępując w ten sam sposób dalej moglibyśmy obliczyć całkę

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} \quad \text{i t.d. aż do dowolnej} \quad \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,.$$

/Dzięki więc różniczkowaniu pod znakiem całki możemy z jednej całki danej utworzyć nieskończenie wiele całek tego samego typu/.

WYZNACZNIK FUNKCYJNY.

Niech będą dane funkcje u i v zmiennych x i y :

$$u = f(x,y),$$
$$v = \varphi(x,y).$$

Utwórzmy wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik ten nazywa się zwykle w y z n a c z n i k i e m f u n k c y j n y m albo j a k o b i a n e m danych funkcji od imienia matematyka niemieckiego J a c o b i ' e g o M który się nim zajmował.

TWIERDZENIE. J e ż e l i f u n k c j e u i v

są związane ze sobą pewną zależnością, to wyznacznik funkcyjny jest tożsamościowo równy zeru.

W rzeczy samej, niech np. funkcje u i v będą związane zależnością $\Omega(u,v)=0$. Zróżniczkujemy tę równość względem zmiennych x i y :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=\frac{\partial\Omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y}=\frac{\partial\Omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\Omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Gdy oznaczymy dla skrócenia:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=B;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=C;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=D;$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}=\xi\ ;\quad \frac{\partial\Omega}{\partial v}=\eta;$$

otrzymamy układ równań:

$$A\xi+B\eta=0$$
$$C\xi+D\eta=0$$

który, jak wiadomo, jest oznaczony tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A, & B\\ C, & D\end{vmatrix}\neq 0$$

/albowiem w przeciwnym razie spółczynniki A i B są proporcjonalne do spółczynników C i D /; pierwiastkami tego układu są

$$\xi=0,\quad \eta=0,$$ muszą się równać zeru bo kolumna wolnych wyrazów $=0$.

czyli

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial v}=0.$$

Gdyby więc wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix}$$

był różny od zera, to funkcja $\Omega(u,v)$ byłaby wielkością stałą /jej pochodne są zerami/, niezależną od u i v, co jest sprzeczne z założeniem. Wyznacznik ten, identyczny z poprzednio określonym wyznacznikiem funkcyjnym Δ, musi więc być równy zeru.

<u>TWIERDZENIE ODWROTNE.</u> J e ż e l i w y z n a c z n i k f u n k c y j n y Δ j e s t t o ż s a m o ś c i o w o r ó w n y z e r u , t o f u n k c j e u i v s ą o d s i e b i e z a l e ż n e .

Istotnie, niech będzie

$$u = f(x,y)$$
$$v = \varphi(x,y)$$

Z drugiej równości można wyrugować przez podstawienie zmienną y ; otrzymamy

$$v = \chi(u,x),$$

co da nam po zróżniczkowaniu względem x :

$$dv = \frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot dx.$$

Utwórzmy wyznacznik funkcyjny i pomnóżmy jego pierwszy wiersz przez dx :

$$\Delta\cdot dx = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx, & \frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Dodajmy do wyrazów pierwszego wiersza odpowiednie wyrazy drugiego, pomnożone przez dy ; nie zmieni to, jak wiadomo, wartości wyznacznika. W pierwszym szeregu otrzymamy $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy$, czyli du i dv.
Więc

$$\Delta dx=\begin{vmatrix} du\ , & dv \\ \frac{\partial u}{\partial y}\ , & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=du\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-dv\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Określamy stąd różniczkę dv w zależności od u i x :

$$/1/\qquad dv=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\cdot du-\frac{\Delta}{\frac{\partial u}{\partial y}}\cdot dx.$$

Lecz z drugiej strony z $v=\chi(u,x)$ otrzymamy:

$/2/$ $dv=\frac{\partial \chi}{\partial u}du+\frac{\partial \chi}{\partial x}dx$. Lecz wiemy /patrz Matematyka I/, że różniczka dv funkcji 2-ch zmiennych u i x wyraża się w zależności od du i dx w sposób jedyny, jednoznaczny. Zestawiając /1/ i /2/ mamy:

$$-\frac{\Delta}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Ponieważ zaś z założenia $\Delta=0$, więc musi być

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}=0;$$

stąd wniosek, że funkcja χ nie zależy od zmiennej x , a ponieważ nie jest wielkością stałą, więc musi zależeć od funkcji u , co dowodzi słuszności twierdzenia.

A zatym równość $\Delta=0$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcje u i v zmiennych x i y

były od siebie zależne.

Oba udowodnione twierdzenia dają się łatwo uogólnić dla dowolnej liczby n funkcji n zmiennych niezależnych:

$$u = f(x, y, \ldots\ldots z),$$
$$v = \varphi(x, y, \ldots\ldots z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w = \psi(x, y, \ldots\ldots z)$$

I w tym przypadku równość:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x}, & \ldots\ldots & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \ldots\ldots & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & \ldots\ldots & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

jest koniecznym i dostatecznym warunkiem, ażeby pomiędzy danemi funkcjami zachodziła pewna zależność:

$$\Omega(u, v, \ldots\ldots w) = 0,$$

niezależna od zmiennych $x, y, \ldots\ldots z$. Dowód, identyczny w zasadzie do poprzednio podanego, zostawiamy czytelnikowi.

Pomiędzy wyznacznikiem funkcyjnym funkcji wielu zmiennych a pochodną funkcji jednej zmiennej zachodzi pewnego rodzaju analogja. Wykażemy ją tutaj dla wyznacznika funkcyjnego dwuch funkcji dwuch zmiennych niezależnych:

$$u = f(x, y),$$
$$v = \varphi(x, y).$$

Dla lepszego uwidocznienia tej analogji będziemy oznaczali wyznacznik funkcyjny przez:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Otóż mamy dla funkcji jednej zmiennej wzór:

$$\left[a\cdot f(x)\right]'=a\cdot f'(x);$$

podobnie, jeżeli A i B będą to wielkości stałe, wówczas:

$$/1/\qquad \frac{\partial(A\cdot u,B,v)}{\partial(x,y)}=A\cdot B\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

Następnie znany jest wzór, wyznaczający pochodną iloczynu dwuch funkcji jednej zmiennej:

$$\frac{d(f\cdot\varphi)}{dx}=f\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\varphi\cdot\frac{df}{dx}$$

Analogicznie, jeśli $u=p\cdot q$, $v=r\cdot s$, gdzie u, v, p, q, r, s są funkcjami zmiennych x i y, mamy:

$$(2)\qquad \frac{\partial(p\cdot q, r\cdot s)}{\partial(x,y)}=p\cdot r\,\frac{\partial(q,s)}{\partial(x,y)}+p\cdot s\,\frac{\partial(q,r)}{\partial(x,y)}+q\cdot r\cdot\frac{\partial(p\cdot s)}{\partial(x,y)}+q\cdot s\cdot\frac{\partial(p\cdot r)}{\partial(x,y)}$$

Przechodząc do funkcji złożonych, mamy wzory następujące: dla funkcji jednej zmiennej $u=f(z)$, gdzie $z=\varphi(x)$:

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};$$

dla funkcji dwuch zmiennych:

$$u = \mathcal{F}(p,q), \quad v = \Phi(p,q),$$

gdzie $p = \pi(x,y)$, $q = \rho(x,y)$:

$$/3/ \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)} \cdot \frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}$$

Gdy mamy daną jakąś funkcję $u = f(x)$, to, jak wiemy, odwracając zależność pomiędzy zmiennemi, otrzymamy nową funkcję $x = \varphi(u)$. Pomiędzy pochodnemi obu funkcji zachodzi wówczas zależność:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}.$$

Jeżeli mamy funkcje dwuch zmiennych:

$$u = f(x,y), \quad v = \varphi(x,y),$$

to, odwracając x/ tutaj zależność funkcjonalną, otrzymamy:

$$x = \psi(u,v), \quad y = \chi(u,v)$$

Mamy przytem wzór:

$$/4/ \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

Wynika to ze wzoru /3/. Podstawiając bowiem x i y

---

x/ Przypuszczamy, że odwrócić można zależność. Łatwo jest udowodnić, że przy spełnieniu pewnych założeń natury ogólnej, tyczących się naszych funkcji, odwrócone te funkcje istnieją. Nierówność zeru wyznacznika $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ma tu wielkie znaczenie.

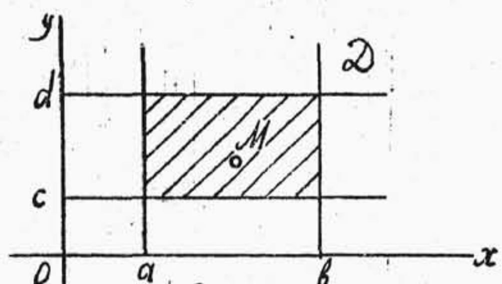
zamiast p i q oraz u i v zamiast x i y, otrzymemy:

$$1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Twierdzenia te dowodzą się za pomocą zwyczajnego sprawdzenia i wykonania odpowiednich mnożeń i dodawań, co zostawiamy czytelnikom.

CAŁKI WIELOKROTNE.

Niech będzie dany na płaszczyźnie xoy pewien obszar $\mathcal{D}$, np. prostokąt. Punkt $M(x,y)$ znajduje się wewnątrz tego obszaru, gdy jego spółrzędne czynią zadość pewnym nierównościom, jak w danym przypadku:



rys.6.

$$a\leq x\leq b,$$
$$c\leq y\leq d,$$

gdzie

$$x=a,\quad y=c,$$
$$x=b,\quad y=d,$$

są to równania boków tego prostokąta. O ile zamiast nierówności zachodzi jedna z wyżej napisanych równości, wówczas punkt M znajduje się na konturze prostokąta.

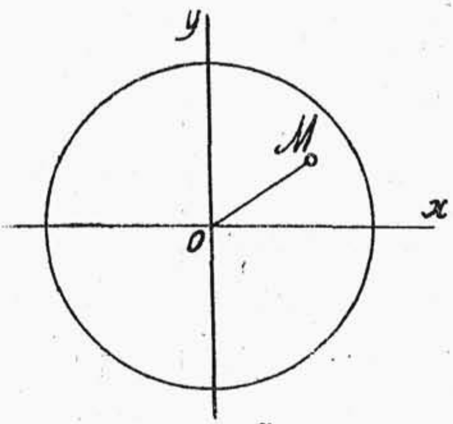
Jeżeli danym obszarem jest koło o równaniu:

$$x^2+y^2=r^2,$$

wówczas nierówność

$$x^2+y^2<OM^2$$

wyraża, że punkt $M(x,y)$ znajdmje się wewnątrz koła,



rys.7.

zaś nierówność

$$x^2+y^2>OM^2$$

- nazewnątrz. W przypadku, gdy

$$x^2+y^2=OM^2,$$

punkt M leży, oczywiście, na okręgu.

Gdy mamy jakąś krzywą

$$f(x,y)=0,$$

która, biegnąc po płaszczyźnie, dzieli ją na pewną ilość części, wówczas jedna z nierówności:

$$f(x,y)>0,$$
$$f(x,y)<0$$

wyraża punkty wewnętrzne obszaru, zaś druga punkty zewnętrzne. Która nierówność wyraża punkty wewnętrzne, a która zewnętrzne z góry przesądzić nie można. Łatwo jednak możemy się o tem przekonać przez podstawienie. Przypuśćmy, że funkcja $f(x,y)$ 2-ch zmiennych jest ciągła i niech w jakimś punkcie $M_1(x_1,y_1)$ $f(x_1,y_1)>0$, a w innym p. $M_2(x_2,y_2)$ niech $f(x_2,y_2)<0$. Połączmy punkty M_1 i M_2 jakąkolwiek linją ciągłą (L). Na każdej takiej linji (L) musi być p. (x,y) taki, że $f(x,y)=0$ /wynik z ciągłości $f(x,y)$/, t.j. musi być punkt, należący do krzywej $f(x,y)=0$. Można więc ogół p. płaszczyzny podzielić na trzy klasy: 1/ punkty, dla których $f(x,y)>0$; 2/ punkty, dla których $f(x,y)<0$ i wreszcie 3/ punkty, dla których $f(x,y)=0$, stanowiące linję, której równanie jest

$f(x,y)=0$. Linja ta dzieli punkty należące do kl.I od punktów należacych do kl.II.

Jeżeli krzywa jest całkowicie położona w odległości skończonej, jest zamknięta i nie przecina samej siebie, to punkty jednej z dwuch klas nazywamy wewnętrznemi, punkty drugiej klasy zaś - zewnętrznemi. Zewnętrzna klasa jest to ta, która zawiera punkty dowolnie odległe od początku spółrzędnych.

Niech np. będzie dana elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Weźmy pod uwagę nierówności

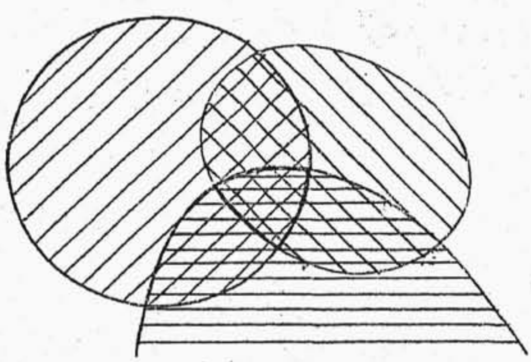
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1<0$$

oraz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1>0$$

Podstawiając $x=0, y=0,$ przekonamy się, że pierwsza z nich wyraża punkty wewnętrzne, zaś druga punkty zewnętrzne obszaru.

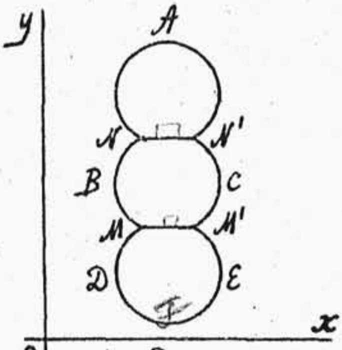
Można rozważać również obszary, ograniczone wielu różnemi krzywemi. Punkty leżące wewnątrz takich obszarów muszą spełniać wówczas jednocześnie kilka nierówności, których liczba w żadnym razie nie może być mniejsza od liczby krzywych, ogra-



rys.8.

niczających obszar. Jeżeli wewnątrz danego obszaru znajdują się punkty, których odległość od początku układu jest nieskończoną; obszar nazywa się niewłaściwym; w przeciwnym razie mamy obszar właściwy. Często spotykać się będziemy z wyrażeniem "obszar normalny"; jest to mianowicie taki obszar, którego kontur przecina się z dowolną prostą, równoległą do osi y, najwyżej w dwuch punktach.

Łatwo się przekonać, że zazwyczaj obszar właściwy można podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych zapomocą linji poprzecznych. Np. na rysunku wystarcza

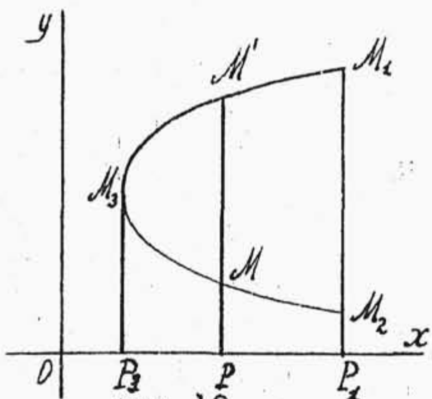


rys.9.

przeprowadzić odcinki MM', NN' by obszar dany został podzielony na trzy obszary normalne: 1/ $NAN'N$; 2/ $NN'CM'MBN$ 3/ $MM'EFDM$.

Bliższe uzasadnienia zostawiamy czytelnikowi.

Nierówności wyznaczające obszar normalny, możemy zawsze sprowadzić do postaci kanonicznej, składającej się z 2-ch nierówności: 1/ $\psi_1(x)\leq y\leq\psi_2(x)$ i 2/ $a\leq x\leq b$. W rzeczy samej, niech $M_1M_2M_3$ będzie obszarem normalnym (D). Punkt tego obszaru /wewnętrzny/ posiada odciętą x, zawartą między OP_3 i OP_1, czyli jeśli $OP_3=a$, $OP_2=b$, mamy zawsze w (D) $a\leq x\leq b$. Niech teraz x ma wartość OP, czyniącą zadość poprzedniej nierówności. Punkt P padnie między P_3



rys.10.

i P_1. Wystawmy w p. P rzędną, która przetnie granicę obszaru (D) tylko w 2-ch punktach, ponieważ obszar ten jest normalny /założenie/. Niech M' i M będą temi dwoma punktami. Oznaczmy PM' przez y_2, a PM przez y_1; mamy $y_1 \leq y \leq y_2$. Lecz y_2 i y_1 zależą od x, czyli są funkcjami x; niech $y_2 = \psi_2(x)$, $y_1 = \psi_1(x)$. Dla punktu obszaru (D) mamy więc jeszcze nierówność:

$\psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)$. Odwrotnie, łatwo udowodnić, że jeśli jakiś punkt $M(x,y)$ czyni zadość nierównościom 1/ i 2/, to znajduje się w obszarze (D).

CAŁKI DWUKROTNE.

Niech będzie dany przestrzenny układ spółrzędnych xyz oraz funkcja ciągła

$$/1/ \qquad z = f(x,y)$$

gdzie x i y są zmiennemi niezależnemi. Wyobraźmy sobie następnie w płaszczyźnie xoy pewną krzywą zamkniętą C. Gdy punkt $N(x,y)$ będzie się poruszał po tej krzywej, wówczas punkt $M(x,y,z)$ opisze krzywą przestrzenną, zaś spółrzędna punktu M, równoległa do osi OZ opisze powierzchnię walcową. Najbliższym naszym zadaniem będzie obliczenie objętości bryły, ograniczonej płaszcz. xoy, powierzchnią walcową oraz daną powierzchnią /1/.