CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI W ZASTOSOWANIU DO CAŁEK NIESKOŃCZONYCH.

Dla całek nieskończonych 1-go i 2-go rodzaju możemy stosować wzory na całkowanie przez części, jednakże należy tu zważać, czy otrzymane wyrażenia są zbieżne, czyli mające sens.

Dla całek skończonych mieliśmy następujący wzór na całkowanie przez części:

$$\int_a^k f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = f(k)\cdot\varphi(k) - f(a)\cdot\varphi(a) - \int_a^k f'(x)\cdot\varphi(x)\,dx.$$

Jeżeli przejdziemy do całek nieskończonych 1-go rodzaju, to k staje się zmienną. Mamy tu trzy wyrazy zawierające ją. Wyraz czwarty $f(a)\cdot\varphi(a)$ jest stały.

Stąd wynika, że jeśli mają sens /czyli są zbieżne/ całki

$$\int_a^\infty f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx \quad \text{oraz} \quad \int_a^\infty f'(x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

wówczas musi istnieć także $\lim f(k)\cdot\varphi(k)$ dla $k\to\infty$. Wtedy mamy

$$\int_a^\infty f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} f(k)\cdot\varphi(k) - f(a)\cdot\varphi(a) - \int_a^\infty f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Zastosujemy teraz całkowanie przez części dla całek nieskończonych 2-go rodzaju.

Niech będzie dana całka $\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx$, przyczym $b > a$, oraz dla $x = a$ funkcja podcałkowa staje się nieskończenie wielką.

Jeżeli zamiast przedziału $/a, b/$ weźmiemy przedział $/ a+\varepsilon , b /$, /gdzie $\varepsilon > 0$ /, wtedy funkcja podcałkowa nie zrywa swej ciągłości. Mamy wówczas zwykłą całkę. Możemy więc napisać:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = f(b)\cdot\varphi(b) - f(a+\varepsilon)\cdot\varphi(a+\varepsilon) - \int_{a}^{b} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Mamy tu także 3 wyrazy, zawierające zmienną ε . Jeżeli zatym są zbieżne czyli posiadają granicę całki

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\cdot\varphi'(x)\cdot dx \quad \text{oraz} \quad \int_{a+\varepsilon}^{b} f'(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx$$

wtedy i wyraz $f(a+\varepsilon)\cdot\varphi(a+\varepsilon)$. musi posiadać pewną granicę. Całkowanie przez części jest wtedy możliwe i wówczas mamy:

$$\int_{a}^{b} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = f(b)\cdot\varphi(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} f(a+\varepsilon)\cdot\varphi(a+\varepsilon) - \int_{a}^{b} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

CAŁKOWANIE CAŁEK NIESKOŃCZONYCH PRZEZ PODSTAWIENIE.

Dla całek skończonych całkowanie przez podstawienie wyrażało się wzorem:

(1) $\int_{a}^{k} f(x)\,dx = \int_{b}^{\lambda} f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt$, gdzie zamiast

x podstawiliśmy nową zmienną t $[x = \varphi(t)]$, przyczym zależność między dawnemi i nowemi granicami całkowania wyraża się wzorami:

$$a=\varphi(b)\ ;\quad k=\varphi(\lambda)$$

Mamy całkę nieskończoną 1-go rodzaju $\int_a^{\infty} f(x)dx$

Przypuszczamy, iż funkcja $\varphi(t)$ jest tego rodzaju, że gdy k dąży do nieskończoności zachodzi jeden z trzech następujących przypadków:

1/ $\lambda \to +\infty$, 2/ $\lambda \to -\infty$, 3/ $\lambda \to c$ /liczba stała/.

W przypadku pierwszym, przechodząc we wzorze /1/ do granicy, mamy:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_b^{\infty} f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt.$$

W przypadku drugim otrzymamy:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{b} f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt.$$

Wreszcie przypadek trzeci daje nam:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_b^{c} f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt.$$

Okazuje się jednak najczęściej, że w przypadku tym otrzymujemy pod całką $\int_b^c$ funkcję, stającą się nieskończenie wielką dla $t=c$, czyli otrzymujemy całkę nieskończoną 2-go rodzaju.

Uważając, że dla $k\to\infty$ mamy $\lambda \to c-\varepsilon$ /gdzie $\varepsilon>0$ /, całkę otrzymaną rozpatrywać możemy jako granicę:

$$\int_b^c f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_b^{c-\varepsilon} f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)\,dt$$

RÓWNANIE FUNKCYJNE, KTÓREMU CZYNI ZADOŚĆ FUNKCJA $\Gamma(a)$.

Udowodnimy teraz, że funkcja gamma $\Gamma(a)$, którą określiliśmy w jednym z poprzednich rozdziałów, spełnia następujące równanie funkcyjne:

$$/1/ \qquad \Gamma(a) = (a-1)\cdot\Gamma(a-1)$$

W tym celu, założywszy, że $a>1$, we wzorze

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx,$$

który określa funkcję gamma, uskutecznijmy całkowanie przez części. Otrzymamy:

$$\Gamma(a) = -\int_0^\infty x^{a-1}d(e^{-x}) = -\left|x^{a-1}e^{-x}\right|_0^{+\infty} + (a-1)\int_0^\infty x^{a-2}e^{-x}dx$$

Lecz wyrażenie $x^{a-1}e^{-x}$ przy $x=0$ staje się zero; również $\lim\limits_{x\to\infty} x^{a-1}e^{-x}=0$, tak więc otrzymujemy wzór /1/, co było do okazania.

Jeżeli zmienna a ma wartość całkowitą n, $(n>0)$, to funkcja gamma równa się iloczynowi $(n-1)$ kolejnych liczb, lub inaczej $(n-1)!$:

Najpierw zauważymy, że dla $a=1$ funkcja gamma równa się 1, t.j. $\Gamma(1)=1$. W rzeczy samej:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=-\left|e^{-x}\right|_0^{\infty}=-\lim_{x\to\infty} e^{-x}+1=1$$

Dalej, według /1/, $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$; $\Gamma(3)=$ $=2\cdot\Gamma(2)=2$; $\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2=6$; ....

$$\Gamma(n)=(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\cdot\Gamma(n-2)=$$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\Gamma(n-3)=\ldots\ldots=(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2=(n-1)!$$

RÓŻNICZKOWANIE POD ZNAKIEM CAŁKI.

Funkcja pod znakiem całki oprócz zmiennej całkowania, może zawierać jeszcze inne zmienne, tak zwane parametry. Całka jest wtedy funkcją tych parametrów. Niech będzie dana funkcja $f(x,t)$ dwuch zmiennych x i t , ciągła w przedziale (a,b) zmiennej x i (t_0,t_1) zmiennej t . Całka określona

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$$

jest funkcją zmiennej t w przedziale (t_0, t_1) . Granice a i b są liczbami stałemi. Udowodnimy, iż ma miejsce wzór:

$$/2/\qquad F'(t)=\int_a^b f'_t(x,t)\,dt$$

gdzie $F'(t)$ i $f'_t(x,t)=\dfrac{\partial f}{\partial t}$ oznaczają pochodne funkcji $F(t)$ i $f(x,t)$ według zmiennej t .

Jest to wzór na różniczkowanie pod znakiem całki.

Dowód wzoru /2/ otrzymamy, opierając się na określeniu pochodnej, jako granicy stosunku przyrostów funkcji i zmiennej.

Nadajemy parametrowi t przyrost Δt :

$$\mathcal{F}(t+\Delta t) = \int_a^b f(x, t+\Delta t)\, dx$$

Tak więc:

$$\mathcal{F}(t+\Delta t) - \mathcal{F}(t) = \int_a^b \{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)\}\, dx$$

Dzieląc obie strony przez Δt , otrzymamy:

$$\frac{\mathcal{F}(t+\Delta t) - \mathcal{F}(t)}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\, dx$$

Do różnicy $f(x, t+\Delta t) - f(x,t)$ możemy zastosować wzór na wartość średnią. Otrzymamy wtedy:

$f(x, t+\Delta t) - f(x,t) = \Delta t \cdot f'_t(t+\theta\Delta t)$ gdzie $0 < \theta < 1$.

Wtedy:

$$\frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t} = f'_t(x, t+\theta\Delta t) = f'_t(x,t) + \varepsilon$$

/ ε jest funkcją x , t i Δt /.

Mamy zatem

$$\frac{\mathcal{F}(t+\Delta t) - \mathcal{F}(t)}{\Delta t} = \int_a^b f'_t(x,t)\, dx + \int_a^b \varepsilon\, dx$$

Przechodząc do granicy, mamy:

$$\mathcal{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{F}(t+\Delta t) - \mathcal{F}(t)}{\Delta t} = \int_a^b f'_t(x,t)\, dx + \lim_{\Delta t \to 0} \int_a^b \varepsilon\, dx$$

Stosując wzór na wartość średnią dla całki, otrzymamy $\int_a^b \varepsilon\,dx = h(b-a)$, gdzie h jest mniejsze od kresu górnego, a większe od kresu dolnego wartości $\varepsilon = f'_t(x, t+\theta\Delta t) - f'_t(x,t)$. O ile $f'(x,t)$ jest funkcją ciągłą zmiennych x i t w obszarze zmienności, określonym nierównościami $a < x < b$, $t_0 < t < t_1$, $t_0 < t+\Delta t < t_1$, to $\varepsilon \to 0$, gdy $\Delta t \to 0$, przytem /ciągłość jednostajna/ jakąkolwiek małą wartość ma liczba $\eta > 0$, istnieje liczba $k > 0$ taka, iż nierówność $|\Delta t| < k$ pociąga za sobą nierówność $|\varepsilon| < \eta$, niezależnie od tego, jaką wartość mają x i t w obszarze zmienności. Wobec tego i $|h| < \eta$, czyli $\int_a^b \varepsilon\,dx$ dąży do zera, gdy $\Delta t \to 0$.

Tak więc otrzymamy:

$$F'(t) = \int_a^b f'_t(x,t)\,dx$$

czyli wzór /2/. Wzór ten wyraża fakt, iż przestawienie symbolów pochodnej względem t i całki względem x - jest, przy spełnieniu naszych założeń, słuszne.

Przypuśćmy teraz, że i granice a i b są funkcjami parametru t, co oznaczymy, pisząc $a(t)$, $b(t)$.

Tak więc:

$$/3/ \quad \mathcal{F}(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

Dajmy parametrowi t przyrost Δt ; wtedy:

$$/4/ \quad \mathcal{F}(t+\Delta t) = \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t)\,dx =$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t+\Delta t)\,dx + \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t)\,dx - \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t)\,dx$$

Otrzymamy przyrost $\Delta\mathcal{F}$, odejmując /3/ od /4/. Podzielmy jednocześnie przyrost ten przez Δt ; otrzymamy:

$$\frac{\mathcal{F}(t+\Delta t)-\mathcal{F}(t)}{\Delta t} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}\int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t)\,dx - \frac{1}{\Delta t}\int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t)\,dx$$

Stosując do 2-ch ostatnich wyrazów wzór na wartość średnią, otrzymamy:

$$\frac{\mathcal{F}(t+\Delta t)-\mathcal{F}(t)}{\Delta t} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}\,dx +$$

$$+ \frac{b(t+\Delta t)-b(t)}{\Delta t}\cdot f(b+\theta\Delta b, t+\Delta t) - \frac{a(t+\Delta t)-a(t)}{\Delta t}\cdot f(a+\theta\Delta a, t+\Delta t)$$

gdzie $\Delta b = b(t+\Delta t)-b(t)$, $\Delta a = a(t+\Delta t)-a(t)$, $0<\theta<1$

Przechodzimy do granicy dla $\Delta t \to 0$. Otrzymamy:

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\, dx +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta b}{\Delta t} f(b+\Theta\Delta b, t+\Delta t) - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} f(a+\Theta\Delta a, t+\Delta t)$$

Zakładając, że funkcja $f(x,t)$ spełnia warunki, które upoważniają do różniczkowania pod znakiem całki, otrzymamy:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\, dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f'_t(x,t)\, dx$$

gdyż granice całkowania są tu stałe. Funkcje $b(t)$ i $a(t)$ niech będą również funkcjami, posiadającemi pochodne względem t ; wtedy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta b}{\Delta t} = \frac{db}{dt} = b'(t) \; ; \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{da}{dt} = a'(t),$$

pochodne funkcji $b(t)$ i $a(t)$ względem t

Ostatecznie otrzymamy:

$$/5/ \quad F'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f'(x,t)\, dx + b'(t) \cdot f(b,t) - a'(t) \cdot f(a,t)$$

Jest to wzór, który mieliśmy otrzymać.

RÓŻNICZKOWANIE POD ZNAKIEM CAŁKI NIEWŁAŚCIWEJ.

Przy dowodzie wzorów /2/ i /5/ zakładaliśmy, że funkcja pod znakiem całki jest ciągłą w granicach całkowania i że droga całkowania jest skończona. Jeśli warunki te nie są spełnione, to wzory /2/ i /5/ mogą nie być prawdziwe, t.j. liczba po jednej stronie znaku = może nie równać się liczbie po stronie drugiej, albo też jedna z tych stron lub obie mogą być pozbawione sensu z powodu rozbieżności odnośnych całek.

Przypuśćmy np., że dana jest całka zbieżna 1-go rodzaju:

$$/6/ \qquad F(t) = \int_a^{\infty} f(x,t)\,dt$$

W takim razie $F(t) = \lim\limits_{k\to 0} \int_a^k f(x,t)\,dx$;

do całki $\int_a^k f(x,t)\,dx$ zastosujemy rozumowanie poprzednie; mamy

$$F(t+\Delta t) = \lim_{k\to\infty} \int_a^k f(x, t+\Delta t)\,dx$$

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{k\to\infty} \int_a^k \frac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\,dx$$

$$\int_a^k \frac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\,dx = \int_a^k f'_t(x,t)\,dx + \int_a^k \varepsilon(x,t,\Delta t)\,dx$$

$$\int_a^k \varepsilon\,dx = \int_a^k \left\{ f'_t(x, t+\theta\Delta t) - f'_t(x,t) \right\} dx =$$

$$= \theta\Delta t \int_a^k f''_{t^2}(x, t+\theta'\Delta t)\,dx$$

gdzie f''_{t^2} oznacza $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, t.j. pochodną cząstkową dwukrotnie względem t.

Przechodząc do granicy, gdy $k \to \infty$, mamy:

$$/7/ \quad \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_a^k f'_t(x,t)\,dx + \lim_{k\to\infty} \theta\Delta t \int_a^k f''_{t^2}(x, t+\theta'\Delta t)\,dx$$

Przypuśćmy, że $\int_a^\infty |f''_{t^2}(x,t)|\,dx$ jest całką zbieżną dla wszystkich wartości t w obszarze (t_0, t_1) dla t; wzór /7/ daje

$$/8/ \quad \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} = \int_a^\infty f'_t(x,t)\,dx + \theta\cdot\Delta t\cdot H,$$

gdzie $\int_a^\infty f'_t(x,t)\,dx$ jest zbieżna i gdzie $|H|$ jest ograniczone od góry, t.j. istnieje liczba M stała taka, iż $|H|<M$. We wzorze /8/ przejdźmy do granicy dla $\Delta t \to 0$.

Otrzymamy $F'(t) = \int_a^\infty f'_t(x,t)\,dt$, gdyż $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta t\cdot H = 0$, t.j. wzór /2/.

Kryterjum dodatkowem jest w tym wypadku zbieżność całki $\int_a^\infty |f''_{t^2}(x,t)|\,dx$.

P r z y k ł a d y .

1/ Dana jest całka $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}$. Stosując kryterjum $\frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}x^s < k$, widzimy, że dla $s=3/2$ mamy $\frac{x}{1+x} < 1$. A zatem całka ta jest zbieżna. Aby znaleźć wartość tej całki nieskończonej, rozwiążmy najpierw całkę nieokreśloną $\int \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}$. Uczynić to możemy, podstawiając $\sqrt{x}=z$, $x=z^2$, $dx=2zdz$

Wtedy
$$\int \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}} = \int \frac{2zdz}{(1+z^2)\cdot z} = 2\int \frac{dz}{1+z^2} =$$
$$= 2\,\mathrm{Arctg}\, z = 2\,\mathrm{Arctg}\sqrt{x}.$$

Stąd
$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\left[2\,\mathrm{Arctg}\sqrt{b} - \right.$$
$$\left. - 2\,\mathrm{Arctg}\sqrt{1}\right] = \lim_{b\to\infty} 2\,\mathrm{Arctg}\sqrt{b} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

2/ Podobnież znaleźć możemy, że całka
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}. \qquad \left(\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \int \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}\right)$$

Całka powyższa jest zbieżna, ponieważ stosunek wyrazów głównych licznika i mianownika wynosi
$$\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad (s = 3/2 > 1)$$

3/ Mamy całkę $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$, $(a>0)$.

Weźmy iloczyn $x^2(e^{-ax}\cos bx) = \frac{x^2}{(e^x)^a} = \left(\frac{x^{2/a}}{e^x}\right)^a$. Na zasadzie skali wzrastania funkcji granicą tego iloczynu dla $x\to\infty$ jest zero: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2e^{-ax}\cos bx)=0$

Całka dana jest zbieżna, ponieważ jej funkcja podcałkowa dąży szybciej do zera, niż $\frac{1}{x^2}$.

Funkcją pierwotną dla $e^{-ax}\cos bx$ jest

$$\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

Stąd

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\lim_{l\to\infty}\left|\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right|_0^l=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{-a\cos bl+b\sin bl}{a^2+b^2}e^{-ax}-\frac{-a}{a^2+b^2}$$

Ponieważ

$$\lim_{l\to\infty}\frac{-a\cos bl+b\sin bl}{a^2+b^2}e^{-ax}=0,$$

więc

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

4/ Podobnież przy $a>0$ $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$.

Gdyby $a\leq 0$, wtedy obie całki powyższe byłyby rozbieżne.

5/ Rozpatrzymy całkę: $\int_b^\infty\frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$

Gdy $x=b$, wtedy funkcja podcałkowa zrywa swą ciągłość. A zatym całka dana jest całką nieskończoną I-go i II-go rodzaju.

Dla $x\to\infty$ funkcja podcałkowa $\frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}$ dąży do zera.

W porównaniu z całką zasadniczą $\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ mamy tu $s=\frac{3}{2}$ . .

Dla $x \to b$ $\frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}$ dąży do nieskończoności.

Porównywując to z funkcją podcałkową zasadniczej całki nieskończonej II-go rodzaju $\left(\frac{1}{(x-b)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x-b)^m}\right)$ widzimy, że $m<1$. To oznacza, że całka dana jest zbieżna.

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \left|\frac{2}{\sqrt{a+b}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-b}{a+b}}\right|_b^\infty =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{a+b}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-b}{a+b}}\right] - \lim_{x\to b}\left[\frac{2}{\sqrt{a+b}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-b}{a+b}}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}.$$

W zadaniu tym musimy założyć, że $a+b>0$.

6/ Przykład różniczkowania pod znakiem całki.

Dana jest $\int_0^x \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Podstawiając $x=az$, $dx=adz$, mamy:

$$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int_0^x \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

Jeżeli mamy $\int_0^x f(x,a)\,dx = F(a)$, to na zasadzie różniczkowania pod znakiem całki będzie

$$\int_0^x f_a'(x,a)\,dx = F'(a)$$

Jest to słuszne wtedy, gdy ciągłą jest $f_a'(x,a)$.

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku

$\frac{d}{da}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{-2a}{(x^2+a^2)^2}$ jest ciągłą, więc wzór powyższy zastosować możemy. Będzie więc:

$$-\int_0^x \frac{2a}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{-1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{-x}{a^2}$$

Stąd

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}$$

Postępując w ten sam sposób dalej moglibyśmy obliczyć całkę

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$ i t.d. aż do dowolnej $$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

/Dzięki więc różniczkowaniu pod znakiem całki możemy z jednej całki danej utworzyć nieskończenie wiele całek tego samego typu/.

WYZNACZNIK FUNKCYJNY.

Niech będą dane funkcje u i v zmiennych x i y:

$$u = f(x,y),$$
$$v = \varphi(x,y).$$

Utwórzmy wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Wyznacznik ten nazywa się zwykle **wyznacznikiem funkcyjnym** albo **jakobianem** danych funkcji od imienia matematyka niemieckiego **Jacobi'ego**, który się nim zajmował.

TWIERDZENIE. Jeżeli funkcje u i v