Weźmy pod uwagę punkt M obwiedni, o spółrzędnych (ξ, η). Leży on na jakiejś krzywej γ rodziny /2/ i dlatego można oznaczyć jego spółrzędne przez (x, y), przyczem

$$\xi = x, \quad \eta = y.$$

Lecz punkt M jest punktem styczności obwiedni z krzywą γ, więc

$$\eta' = y'$$

A zatym pomiędzy ξ, η, η' zachodzi taki sam związek, jak pomiędzy x, y, y':

$$f(\xi, \eta, \eta') = 0,$$

czyli obwiednia spełnia dane równanie różniczkowe /1/, chociaż nie należy do rodziny /2/ t.zn. nie jest objęta przez całkę ogólną. Nosi ona nazwę całki osobliwej.

+ UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.

Do układu dwu równań jednoczesnych rzędu 1-go dojść możemy przy różniczkowaniu i rugowaniu stałych dowolnych C_1 i C_2 z 2 równań:

$$/1/ \qquad \begin{aligned} f_1(x, y, z, C_1, C_2) &= 0\,; \\ f_2(x, y, z, C_1, C_2) &= 0\,; \end{aligned}$$

stanowią one układ który może być rozwiązany względem y i z, tak, iż $y = \varphi_1(x, C_1, C_2)$; $z = \varphi_2(x, C_1, C_2)$. W rzeczy samej, różniczkując względem x, mamy:

$$/2/ \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0. \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Rugując z czterech równań /1/ i /2/ parametry C_1 i C_2 otrzymamy układ dwu równań różniczkowych jednoczesnych:

$$F_1\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right) = 0;$$

$$F_2\left(x,y,z,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right) = 0;$$

który można sprowadzić do postaci

$$/3/ \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

gdzie X, Y, Z są trzema funkcjami zmiennych x, y, z.

Dla równań układu /3/, funkcje /1/ nazywamy c a ł k a - m i o g ó l n e m i ; zawierają one dwie stałe dowolne. Zjawia się teraz pytanie, czy każdy układ równań różniczkowych jednoczesnych rzędu pierwszego /to jest *kształtu* /3//, posiada takie całki ogólne. Można udowodnić, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Dowód ten podany jest w dodatku do mat.II. Nadając stałym C_1 i C_2 wartości liczbowe szczególne, otrzymujemy t.zw. c a ł k i s z c z e g ó l n e . Całka szczególna $f_1(x,y,z,C_1^0,C_2^0)=0$; $f_2(x,y,z,C_1^0,C_2^0)=0$ układu /3/ przedstawia krzywą w przestrzeni.

C a ł k i p i e r w s z e . Niech będzie układ /3/ $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$, dla którego całką ogólną będzie układ /1/ $f_1(x,y,z,C_1,C_2)=0$; $f_2(x,y,z,C_1,C_2)=0$. Układ ten zastąpić można równoważnym układem, rozwiązanym względem C_1 i C_2 w postaci:

$\psi_1(x,y,z) = C_1$ i $\psi_2(x,y,z) = C_2$.

Funkcje $\psi_1(x,y,z)$ i $\psi_2(x,y,z)$ mają więc tę własność, że jeśli na miejsce y i z podstawić ich wartości w zależności od x, jakie wynikają z układu /3/, to funkcje te otrzymują wartości stałe; oprócz tego funkcje te muszą być od siebie niezależne, t.j. Jakobian $\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y,z)} \neq 0$.

Każdą parę równań $\psi_1(x,y,z) = C_1$ i $\psi_2(x,y,z) = C_2$, gdzie funkcje ψ_1 i ψ_2 posiadają dwie wyżej wymienione własności, nazywać będziemy c a ł k a m i p i e r w s z e m i układu równań /3/. Można udowodnić /patrz dodatek/, że przynajmniej jeden układ 2-ch całek pierwszych zawsze istnieje. A jeśli istnieje jeden taki układ 2-ch całek pierwszych, to, jak zobaczymy, istnieje ich nieskończenie wiele.

Teraz zajmiemy się niektóremi własnościami całek pierwszych.

I/ Każda funkcja $\psi(x,y,z)$, która jest całką pierwszą, t.j. na zasadzie związku między x, y i z, wynikającego z równań różniczkowych /3/ ma wartość stałą /i nie zależy od x / - musi czynić zadość pewnemu równaniu różniczkowemu o pochodnych cząstkowych:

$$/5/ \quad X\frac{\partial \psi}{\partial x} + Y\frac{\partial \psi}{\partial y} + Z\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

W rzeczy samej, w funkcji $\psi(x,y,z)$ uczyńmy y i z funkcjami zmiennej x, wtedy $\psi(x,y,z)$ stanie się funkcją $\Phi(x)$ samej zmiennej x i pochodna

$$\frac{d\,\Phi(x)}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx};$$

niech teraz y i z będą takiemi funkcjami zmiennej x, które wynikają z równań /3/ $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$, wtedy $\Phi(x)\equiv 0$ i $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$ i $\frac{dz}{dx}=\frac{Z}{X}$, wskutek czego $\frac{d\,\Phi(x)}{dx}\equiv 0$ i

$$X\frac{\partial\psi}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{d\,\Phi(x)}{dx}=0.$$

II/ Tak więc między układem danym /3/ a równaniem o pochodnym cząstkowych /5/ istnieje blizki związek. Niech $\psi_1(x,y,z)$ i $\psi_2(x,y,z)$ oznaczają jakiekolwiek dwie od siebie niezależne całki równania /5/. Jeśli te 2 funkcje przyrównamy do stałych dowolnych C_1 i C_2, to otrzymamy odwrotnie układ całek układu równań różniczkowych o pochodnych zwyczajnych /3/. W rzeczy samej, jeśli $\psi_1(x,y,z)=C_1$ i $\psi_2(x,y,z)=C_2$, to

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}dz=0,$$

i

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}dz=0.$$

Z drugiej strony, ponieważ funkcje $\psi_1(x,y,z)$ i $\psi_2(x,y,z)$ są całkami równania /5/, to

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}X+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}Y+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}Z=0;\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial x}X+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}Y+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}Z=0.$$

Z pierwszej grupy dwuch równań otrzymujemy jeszcze

$$/6/\quad \frac{dx}{\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y,z)}}=\frac{dy}{\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,z)}}=\frac{dz}{\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)}},$$

gdzie $\frac{\mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)}{\mathcal{D}(y,z)}$ i t.d. oznaczają Jakobiany, które nie równają się zeru na mocy założenia, iż funkcje ψ_1 i ψ_2 są od siebie niezależne.

Tak samo druga grupa dwuch równań daje

$$/7/ \qquad \frac{X}{\frac{\mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)}{\mathcal{D}(y,z)}} = \frac{Y}{\frac{\mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)}{\mathcal{D}(x,z)}} = \frac{Z}{\frac{\mathcal{D}(\psi_1, \psi_2)}{\mathcal{D}(x,y)}}.$$

Tak więc przez porównanie /6/ i /7/ mamy $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$ czyli że $\psi_1(x,y,z) = C_1$ i $\psi_2(x,y,z) = C_2$ dają nam istotnie całki spełniające układ /5/.

III/. Mając dwie całki od siebie niezależne równania o pochodnych cząstkowych /5/, możemy utworzyć ich dowolną liczbę na mocy następującego twierdzenia: jeśli $\psi_1(x,y,z)$ i $\psi_2(x,y,z)$ są dwoma całkami równania /5/, tò i $F(\psi_1, \psi_2) = \Phi(x,y,z)$ będzie także całką tegoż równania /5/, gdzie F oznacza dowolną funkcję zmiennych ψ_1 i ψ_2, które same dopiero zależą od x, y, z. W rzeczy samej, sprawdźmy, że $\Phi(x,y,z)$ czyni zadość równ./5/:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z}$$

Pomnóżmy obie strony tych równań odpowiednio przez funkcje

X, Y i Z i dodajmy stronami; otrzymamy:

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial\psi_1}\left(X\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial\psi_2}\left(X\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)=0,$$

ponieważ

$$X\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi_1}{\partial z}=0;\quad X\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0.$$

Tak więc $\Phi(x,y)=F[\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)]$ niezależnie od kształtu funkcji F jest całką równania /5/, a więc, na mocy uwagi /II/,

$F_1[\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)]=C_1$ i $F_2[\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)]=C_2$

stanowi układ całek pierwszych dla układu równań /3/ $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$, o ile funkcje F_1 i F_2 są od siebie niezależne, czyli odpowiadaj. Jakobian $\neq 0$.

Twierdzenie to można dopełnić odwrotnym, które polega na tem, że każda całka równania /5/ jest kształtu

$$F(\psi_1,\psi_2)=\Phi(x,y,z).$$

Niech $\varphi(x,y,z)$ będzie jakąś całką równania /5/. Wtedy

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+Z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;$$

$$X\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi_1}{\partial z}=0;$$

$$X\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+Y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+Z\frac{\partial\psi_2}{\partial z}=0;$$

gdyż funkcje ψ_1 i ψ_2 spełniają na mocy założenia to samo równanie; więc z tych 3-ch równań linjowych względem X, Y, Z wynika, iż albo $X=Y=Z=0$, albo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Ponieważ pierwsza ewentualność jest wykluczona, pozostaje druga. Lecz na mocy podstawowych własności Jakobiana wiemy, iż to oznacza, że $\varphi = F(\psi_1, \psi_2)$, co trzeba było udowodnić.

Na zasadzie związku między równaniem /5/ a układem równań /3/, możemy powiedzieć, że dwie całki pierwsze

$\psi_1(x,y,z) = C_1$ i $\psi_2(x,y,z) = C_2$ układu /3/ pozwalają utworzyć wszystkie inne, mianowicie każdy układ całek pierwszych dla układu /3/ musi być postaci:

$$F_1[\psi_1(x,y,z),\ \psi_2(x,y,z)] = C_1' = F_1(C_1, C_2);$$

$$F_2[\psi_1(x,y,z),\ \psi_2(x,y,z)] = C_2' = F_2(C_1, C_2).$$

Wszystkie te wyniki dają się bezpośrednio uogólnić dla układu równań

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots\ldots\ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

gdzie $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$ są danemi funkcjami zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$.

Jeśli mamy dany układ:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

i szukamy całek pierwszych, to w praktyce często stosujemy metodę następującą: szukamy trzech funkcji $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, takich, by $X(x,y,z)\cdot u(x,y,z)+$ $+Y(x,y,z)\cdot v(x,y,z)+Z(x,y,z)\cdot w(x,y,z)=0$; a $u\,dx+v\,dy+w\,dz=d\varphi$ czyli było różniczką zupełną, tak iż $u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; $v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; $w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. O ile uda się nam tak dobrać te trzy funkcje u, v, w, to znamy funkcje $\varphi(x,y,z)$ i otrzymamy całkę pierwszą układu

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=dt$$

z łatwością w następujący sposób; z równań układu wynika

$$dx=X\,dt;\quad dy=Y\,dt;\quad dz=Z\,dt;$$

a więc

$$d\varphi=u\,dx+v\,dy+w\,dz=(Xu+Yv+Zw)\,dt=0,$$

ponieważ $Xu+Yv+Zw=0$; lecz $d\varphi=0$ pociąga za sobą $\varphi(x,y,z)=C_1$, czyli mamy całkę pierwszą. Jeśli teraz powtórzymy to samo postępowanie drugi raz i jeśli uda nam się znaleźć inne funkcje u_1, v_1, w_1 i ψ, czyniące zadość tym samym warunkom, co i poprzednie funkcje u, v, w, φ, to otrzymamy drugą całkę pierwszą $\psi(x,y,z)=C_2$ i zadanie nasze, będzie, jak wiemy, rozwiązane. Mianowicie w interpretacji geometrycznej rozwiązaniem układu naszego będzie zbiór krzywych skośnych w przestrzeni, wyrażonych przez równania $\varphi(x,y,z)=C_1$ i $\psi(x,y,z)=C_2$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE RZĘDU I-go /linjowe/.

1/ Równanie lijnowe jednorodne: jest to równanie typu:

$$/1/ \quad P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

/o ile mamy dwie zmienne niezależne x i y /, czyli

$$Pp + Qq = 0,$$

gdzie oznaczamy $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$; P i Q są funkcjami danemi x, y i z .

Należy znaleźć taką funkcję z zmiennych x i y , by pochodne cząstkowe p i q tej funkcji czyniły tożsamościowo zadość równaniu /1/. Otóż, na zasadzie poprzedniego, wiemy, że rozwiązanie równania /1/ stoi w bliskim związku z rozwiązaniem układu pomocniczego

$$/2/ \qquad \frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

Mianowicie niech $\varphi(x,y) = C$ będzie całką równania /2/, wtedy $z = \varphi(x,y)$ będzie całką równania /1/; ogólnie

$$/3/ \qquad z = \psi[\varphi(x,y)]$$

będzie całką równania /1/, gdzie ψ jest funkcją zupełnie dowolną, a $\varphi(x,y)$ jest funkcją w zupełności określoną przez układ /2/. Odwrotnie, każde rozwiązanie równania /1/ jest kształtu /3/. Tak więc przy całkowaniu równań typu /1/ ogólne rozwiązanie zawiera funkcję dowolną /tu jest nią funkcja

---

oznaczona przez φ /.

2/ Równanie linjowe niejednorodne czyli zupełne. Jest to równanie

$$/4/ \quad P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z),$$

czyli $Pp + Qq = R$, gdzie z jest funkcją szukaną, a P, Q, R są dane.

Zadanie tego typu można sprowadzić do zadania typu poprzedniego czyli jednorodnego. Będziemy mogli sprowadzić znalezienie funkcji szukanej $z(x,y)$ do znalezienia funkcji $\varphi(x,y,z)=0$, gdyż jeśli w wyrażeniu $\varphi(x,y,z)=0$ znamy funkcję φ, to otrzymanie funkcji z sprowadza się do rozwiązania równania $\varphi(x,y,z)=0$, gdzie z jest więc funkcją /uwikłaną/ zmiennych x, y. Otóż z zależności $\varphi(x,y,z)=0$ znajdujemy przez różniczkowanie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

czyli

$$p = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}.$$

Podstawiając do /4/ znajdziemy:

$$/5/ \quad P(x,y,z)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = R(x,y,z)\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Jest to równanie linjowe jednorodne z trzema zmiennemi niezależnemi x, y, z , do którego to równania możemy zastosować teorję ogólną, wyłożoną w ustępie poprzednim. Tak więc tworzymy układ pomocniczy:

$$/6/ \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

i szukamy całek pierwszych dla /6/. Wiemy, że ich powinno być dwie linjowo od siebie niezależne $\varphi_1(x,y,z) = C_1$ i $\varphi_2(x,y,z) = C_2$. A najogólniejszem rozwiązaniem równania /5/ będzie funkcja $\varphi = F[\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)]$, gdzie F jest funkcją dowolną. Stąd wynika, że całka ogólna równania /4/ będzie

$$/7/ \qquad F[\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)] = 0,$$

gdzie z jest funkcją /uwikłaną/ zmiennych x i y . Nie możemy tu twierdzić, że oprócz tych całek, zawartych we wzorze /6/, zawierającym funkcję dowolną, nie ma jeszcze innych całek, jakoż mogą być jeszcze całki osobliwe.

P r z y k ł a d . 1. Niech będzie równanie: $ap + bq = 1$, gdzie a, b, są stałemi; równaniem pomocniczem będzie $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$, zaś całkami pierwszemi tego ostatniego układu są

$$x - az = C_1, \qquad y - bz = C_2$$

Zatem całka ogólna jest $F(x-az, y-bz) = 0$. Jest to równanie walca, którego tworząca ma kierunek o kątach α, β, γ z osiami, przyczem $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{1}$.

P r z y k ł a d 2. Niech będzie równanie:

$(bz-cy)p + (cx-az)q = ay - bx$, gdzie a, b, c są stałe; równania układu pomocniczego są:

$$\frac{dx}{bz-cy} = \frac{dy}{cx-az} = \frac{dz}{ay-bx}.$$

Tu można wziąść $u=a,\ v=b,\ w=c$, gdyż jak zauważymy, $a\,dx+b\,dy+c\,dz$ jest różniczką zupełną, a jednocześnie $a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)\equiv 0$; tak więc całką pierwszą jest tu $ax+by+cz=C_1$. Z drugiej strony można wziąść $u=x,\ v=y,\ w=z$, gdyż $x\,dx+y\,dy+z\,dz$ jest całką zupełną, a $x(bz-cy)+y(cx-az)+z(ay-bx)\equiv 0$. Mamy więc drugą całkę pierwszą układu pomocniczego, mianowicie $x^2+y^2+z^2=C_2$.

Tak więc nasze równanie o pochodnych cząstkowych posiada całkę ogólną w postaci $x^2+y^2+z^2=F(ax+by+cz)$, gdzie F funkcja dowolna. Jest to równanie powierzchni obrotowej, której oś obrotu tworzy z osiami x, y, z kąty α, β, γ, takie, że $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$.

<u>U w a g a .</u> Całkując równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych dochodzimy do całki, zawierającej funkcję dowolną. Odwrotnie, przez rugowanie funkcji dowolnej możemy otrzymać równanie różniczkowe, któremu czynią zadość wszystkie wyrażenia tego typu. Niech będzie np. $z=\varphi(x+y)$, gdzie φ jest funkcją dowolną. Jakąkolwiek będzie funkcja φ, z jako funkcja x i y czyni zadość jednemu i temu samemu równaniu różniczkowemu.

Mianowicie

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(x+y),$$

stąd $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$ czyli $p - q = 0.$

Niech będzie $z = \varphi(x \cdot y)$. Wtedy $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \varphi'(xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \varphi'(xy)$ i $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ czyli wszystkie wyrażenia typu $z = \varphi(xy)$, jakąkolwiek byłaby funkcja φ czynią zadość temu samemu równaniu: $xp - yq = 0.$

P r z y k ł a d y i z a d a n i a .

Wyrugować funkcję dowolną φ w następujących przykładach:

1/ $z = \varphi(x + y + xy)$

2/ $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

3/ $z + \frac{y}{x} = \varphi(x^2 + y^2)$

4/ $z - ax - by = \varphi(x + y^2)$

Zcałkować następujące równania i znaleźć całkę ogólną, zawierającą stałą dowolną.

1/ $py + qx = 1$

2/ $px + qy = \frac{xy}{z}$

3/ $p + q = mz$

4/ $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = \frac{1}{z}$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA. CHARAKTERYSTYKI.

Niech będzie dane równanie:

$$/1/ \quad P(x,y,z) \cdot p + Q(x,y,z) \cdot q = R(x,y,z).$$

Jakakolwiek całka $z = \varphi(x,y)$ tego równania przedstawia pewną powierzchnię, którą nazywać będziemy powierzchnią