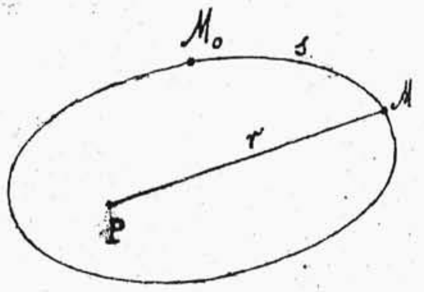
Potencjał.

Wyobraźmy sobie, że mamy dany na płaszczyźnie xoy jakiś punkt $P(x,y)$ i jakąś krzywą c, po której może się poruszać punkt M. Oznaczmy odległość punktu M od punktu P przez r, zaś długość łuku krzywej c, zawartego między punktem M i stałym punktem M_0 tej krzywej przez s. Funkcję

$$V(x,y) = \int_c f(M)\cdot \log r\cdot ds,$$

gdzie $f(M)$ jest jakąkolwiek funkcją punktu M, nazywamy **potencjałem logarytmicznym punktu** P. Oczywiście punkt M oraz r zależą od s; pod znakiem całki występują więc tylko funkcje zmiennej s.



rys. 87.

Łatwo sprawdzić, że funkcja $V(x,y)$ spełnia równania Laplace'a. Zastosujmy mianowicie różniczkowanie pod znakiem całki:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_c f(s)\,\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\,ds;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \int_c f(s)\,\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}\,ds.$$

Dodajmy do siebie obie równości:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \int_c f(s)\left[\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}\right] ds.$$

Lecz, jak już udowodniliśmy, funkcja $\log r$ jest harmoniczna, zatym wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe zero. A więc

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

czyli funkcja $V(x,y)$ spełnia równanie Laplace'a.

Krzywa c jest dowolna; możemy przeto tworzyć bardzo ogólne funkcje harmoniczne.

Zastosowanie wzoru Greena do funkcji harmonicznych.

Mając dane dwie funkcje φ i ψ utwórzmy wyrażenia:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \qquad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2};$$

gdzie φ i ψ są funkcjami zmiennych niezależnych x i y. Weźmy pod uwagę wyrażenie

$$\varphi\cdot\Delta\psi - \psi\cdot\Delta\varphi = \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Oznaczmy różnice w nawiasach przez P i Q i utwórzmy całkę podwójną:

$$\iint_{(D)} (\varphi\cdot\Delta\psi - \psi\cdot\Delta\varphi)\,dx\,dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Na zasadzie wzoru Greena jest ona równa całce krzywolinjowej.

387.

$$\int_c P dy - Q dx = \int_c \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dy - \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx =$$

$$= \int_c \varphi\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} dx\right) - \psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx\right).$$

Wprowadźmy jako parametr łuk s. Całka powyższa będzie równa:

$$\int_c \left[\varphi\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds}\right) - \psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds}\right)\right] ds.$$

Nazwijmy granicę stosunku różnicy wartości funkcji $f(x,y)$ w dwuch punktach, leżących na prostej, która tworzy z osiami spółrzędnych x i y kąty α i β, do odległości n -tych punktów, gdy ta odległość dąży do zera, p o c h o d n ą f u n k c j i w z g l ę d e m t e g o k i e r u n k u ; oznaczmy ją przez $\frac{\partial f}{\partial n}$. W naszym zagadnieniu tym kierunkiem będzie kierunek normalnych zewnętrznych. Będziemy więc mówić o pochodnych względem normalnej do krzywej c:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s};$$

gdyż kierunki ds i dn są do siebie prostopadłe, wskutek czego:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}; \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}.$$

Dana całka będzie więc równa całce $\int\limits_c \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds$.
Ostatecznie mamy wzór:

$$/\mathrm{I}/ \quad \iint\limits_{(D)} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)\,dx\,dy + \int\limits_c \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) ds = 0.$$

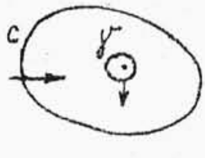
Gdy φ i ψ są funkcjami harmonicznemi, wówczas $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \psi = 0$, więc obie strony tego wzoru są zerami.

Niech będzie funkcja $u = \log r$ /rys. 87 /. Zauważymy odrazu, że wzór powyższy nie może być tutaj zastosowany do obszaru $\mathcal{D}$ z powodu nieciągłości funkcji w punkcie $P(a, b)$. Niedogodność tę omijamy, otaczając ten punkt małą krzywą γ, następnie wykluczając część płaszczyzny, zawartą wewnątrz tej krzywej z pod naszego rozważania i stosując całkę do obszaru $\mathcal{D}$. Kontur c zastąpimy więc przez dwa kontury: c i γ. W takim razie:

$$/\mathrm{II}/ \quad \int\limits_c \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) ds + \int\limits_\gamma \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) ds = 0$$

gdyż całka podwójna znika, jako równa zeru.

<u>U w a g a :</u> W powyższej równości mamy przed drugą całką znak plus, przyczem wtedy kierunkiem dodatnim na normalnej jest kierunek skierowany wewnątrz obszaru $\mathcal{D}$, czyli zewnątrz koła γ; można przed drugą całką postawić znak minus, ale wtedy kierunek dodatni normalnej musimy zmienić



rys. 88.

na przeciwny, t.j. skierować ku środkowi koła γ. Zastosujemy wzór /II/ do następnego przypadku.

We wzorze /II/ u i v oznaczają dwie funkcje harmoniczne wewnątrz obszaru $\mathcal{D}$. Jako funkcję v wybieramy funkcję $v = \lg r$, gdzie r oznacza odległość punktu P o spółrzędnych (a, b) od dowolnego punktu o spółrzędnych (x, y) na konturze c. Kontur c musi znajdować się całkowicie wewnątrz obszaru, gdzie funkcja $u(x,y)$ jest harmoniczna. Punkt P o spółrzędnych (a, b) znajduje się wewnątrz krzywej c. Wzór /I/ przyjmie postać:

$$/III/ \quad \int_\gamma \left(u\frac{d\lg r}{dn} - \lg r\frac{du}{dn}\right)ds = \int_c \left(u\frac{d\lg r}{dn} - \lg r\frac{du}{dn}\right)ds$$

gdzie normalną dodatnią w pierwszej całce bierzemy wewnątrz koła γ. Koło γ o promieniu ρ otacza tu punkt P o spółrzędnych (a, b), gdyż ten punkt jest punktem nieciągłości dla funkcji $\lg r = \lg\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, a więc musi być zapomocą koła γ wykluczony z obszaru $\mathcal{D}$, gdyż całka $\iint_{\mathcal{D}}(u\Delta v - v\Delta u)\,dx\,dy$ we wzorze /I/, z którego otrzymujemy wzór /II/ równa się zeru wtedy, gdy u i v są harmoniczne wewnątrz obszaru, na który jest rozciągnięta całka podwójna.

Lecz

$$\int_{\gamma}\left(u\frac{d\lg r}{dn}-\lg r\frac{du}{dn}\right)ds=\int_{\gamma}u\frac{d\lg r}{dn}ds-\lg r\int_{\gamma}\frac{du}{dn}ds=\int_{\gamma}u\frac{d\lg r}{dn}ds;$$

gdyż $\lg r$ na kole γ ma wartość stałą $\lg \rho$, a więc może być wyprowadzona z pod znaku całki, zaś $\int\frac{du}{dn}ds=0$ dla każdej funkcji harmonicznej, gdyż $\int_{\gamma}\frac{du}{dn}ds=$ $=\iint_{\mathcal{D}_{\gamma}}\Delta u\,dx\,dy=0$, gdzie $\mathcal{D}$ jest obszarem wewnętrznym koła γ.

Lecz

$$\int_{\gamma}u\frac{d\lg r}{dn}ds=-\int_0^{2\pi}u(x,y)\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\rho\,d\theta,$$

przechodząc do spółrzędnych biegunowych ρ i θ, gdzie $ds=\rho\,d\theta$, a $\frac{d\lg r}{dn}=-\frac{1}{\rho}$ na kole γ.

Tak więc

$$\int_{\gamma}u\frac{d\lg r}{dn}ds=-\int_0^{2\pi}u(a+\rho\cos\theta,\ b+r\sin\theta)d\theta$$

Tak więc /III/ daje

$$\int_0^{2\pi}u(a+\rho\cos\theta,\ b+r\sin\theta)d\theta=\int_c\left(\lg r\frac{du}{dn}-u\frac{d\lg r}{dn}\right)ds$$

Ponieważ strona druga tej równości nie zależy od promienia ρ więc i pierwsza strona także nie zależy od ρ. Aby więc obliczyć tę wartość można wziąść pod uwagę, iż

$$\int_0^{2\pi}u(a+\rho\cos\theta,\ b+r\sin\theta)d\theta=\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}u(a+\rho\cos\theta,\ b+r\sin\theta)d\theta=$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}[u(a,b)+\varepsilon]d\theta = \lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi} u(a,b)\,d\theta + \lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\varepsilon d\theta =$$

$$= u(a,b)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\cdot u(a,b),$$

gdyż $\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, d\theta = 0$ / ε dąży jednostajnie do zera, gdy ρ dąży do zera/.

Tak więc wzór /III/ przyjmie postać:

$$\text{/IV/}\qquad u(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_c\left(\log r\frac{du}{dn} - u\frac{d\log r}{dn}\right)ds$$

Wzór ten daje nam wartość funkcji harmonicznej w punkcie wewnętrznym $P(a,b)$, gdy znamy wartość tej funkcji i jej pochodnej normalnej na krzywej c.

<u>W z ó r G a u s s a .</u> Aby otrzymać wzór Gauss'a ze wzoru /IV/ wystarczy przyjąć, iż c jest kołem o promieniu R i środku w P. Wtedy $\log r$ ma wartość stałą $\log R$ na konturze c; tak samo $\frac{\partial \log r}{\partial n} = -\frac{1}{R}$ na tym konturze. A zatym

$$u(a,b) = -\frac{1}{2\pi}\int_c\frac{u(M)\,ds}{R} + \frac{\log R}{2\pi}\int_c\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

Ponieważ jednak $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, więc

$$u(a,b) = -\frac{1}{2\pi R}\int_c u(M)\,ds,$$

czyli wartość całki w środku koła jest równa średniej wartości całki na konturze.

Z powyższego wzoru wynika pewien ważny wniosek, mianowicie: funkcja harmoniczna nie może posiadać ani maximum ani minimum. Przypuśćmy bowiem, że w punkcie P wartość funkcji $u(P)$ jest większa lub mniejsza od wartości funkcji $u(M)$ w punkcie M wewnątrz pewnego otoczenia punktu P. Gdybyśmy zatoczyli z punktu P jako ze środka okrąg koła, leżący całkowicie wewnątrz wspomnianego otoczenia punktu P, to na zasadzie twierdzenia Gauss'a wartość całki w punkcie P, czyli

$u(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_c u(M)\,ds$. Czyli jednocześnie mielibyśmy

$u(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_c u(M)\,ds$ oraz $u(P)$ większe lub mniejsze

od $\frac{1}{2\pi R}\int_c u(M)\,ds$, t.j. nierówność, którą mamy z założenia, gdyż z nierówności $u(M) \gtrless u(P)$ wnika, że

$$\int_c u(M)\,ds \gtrless \int_c u(P)\,ds = u(P)\int_c ds = 2\pi R\cdot u(P).$$

Z tego wniosku wynika wniosek następny: warunki brzegowe wyznaczają tylko jedno rozwiązanie. Jeśliby były dwa rozwiązania: u i v, to moglibyśmy utworzyć ich różnicę: $u - v = w$. Funkcja w, jako różnica dwuch funkcji harmonicznych, byłaby też funkcją harmoniczną. Na konturze c mielibyśmy $w = 0$. W takim razie wewnątrz konturu, o ile w nie jest stale równe zeru, musiałoby być maximum albo minimum, co jest niemożliwe.

K o n i e c .