CAŁKI WIELOKROTNE NIEWŁAŚCIWE.

Analogicznie do całek niewłaściwych jednokrotnych określamy całki niewłaściwe wielokrotne, w szczególności dwukrotne. I tutaj mamy dwa typy całek niewłaściwych: gdy obszar całkowania staje się nieskończonym, mamy c a ł k ę n i e w ł a ś c i w ą I-go r o d z a j u ; gdy funkcja podcałkowa przybiera wartość nieskończoną, mamy c a ł k ę n i e w ł a ś c i w ą II-go r o d z a j u .

Należy w tym miejscu określić, co będziemy nazywali nieskończonym obszarem całkowania. Otóż jeżeli dany obszar całkowania nie daje się zamknąć wewnątrz okręgu koła o promieniu dowolnie wielkim, to mówimy, że obszar ten jest nieskończony lub niewłaściwy. Oznaczmy przez C_n ciąg krzywych zamkniętych, otaczających punkt początkowy, taki /ciąg/, że dla $n>n_0$ wszystkie krzywe C_n znajdują się wewnątrz koła o dowolnie wielkim promieniu i krzywa C_n jest wewnątrz krzywej C_{n+1} ; np. C_n mogą to być koła, których promienie rosną nieograniczenie wraz ze wskaźnikiem n . Będziemy mieli następujące o k r e ś l e n i e z a s a d n i c z e c a ł k i n i e w ł a ś c i w e j I-go r o d z a j u :

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{C_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Całka jest rozciągnięta na obszar punktów wewnętrznych krzywej C_n . Przytym granica powinna istnieć i mieć tę samą wartość niezależnie od tego, jakiemi są krzywe ciągu c_n, byle tylko spełniony był warunek, o którym wspomnieliśmy poprzednio. Jeśli jest $f(x,y) > 0$ dla każdego punktu płaszczyzny, to istnienie granicy dla jakiegokolwiek ciągu krzywych c_n pociąga za sobą istnienie tejże granicy dla każdego innego ciągu krzywych c_n. Wystarczy więc wtedy sprawdzić istnienie granicy i obliczyć ją np. dla kół współśrodkowych o promieniach, rosnących do nieskończoności.

<u>Przykład.</u> Przypuśćmy, że mamy obliczyć całkę

$$J = \iint_E e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

gdzie obszar E oznacza całą płaszczyznę. Zataczamy więc koło c_n o promieniu n i obliczamy całkę:

$$J_n = \iint_{c_n} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy.$$

W tym celu wprowadzamy współrzędne biegunowe:

$$J_n = \iint_{c_n} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n e^{-r^2} r\, dr = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n^2}\right).$$

A zatym

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \pi.$$

Niech teraz krzywa c_n będzie kwadratem o boku $2n$.

$$J_n = \iint_{c_n} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx\, dy = \int_{-n}^{+n} e^{-x^2} dx \int_{-n}^{+n} e^{-y^2} dy.$$

Obie całki otrzymanego iloczynu są sobie równe. Jeżeli więc oznaczymy każdą z nich przez $\dot{I}_n$, to wówczas

$$J_n = \dot{I}_n^2; \quad \dot{I}_n = \sqrt{J_n};$$

zaś w granicy

$$\lim_{n\to\infty} \dot{I}_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty} J_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} J_n} = \sqrt{J} = \sqrt{\pi}.$$

Ponieważ oznaczyliśmy przez $\dot{I}_n$ całkę $\int_{-n}^{+n} e^{-x^2}dx$, więc

$$\dot{I}_n = \int_{-n}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{+n} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{n} e^{-x^2}dx.$$

Stąd otrzymamy, gdy $n \to \infty$:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Całka powyższa ma duże zastosowanie w teorji prawdopodobieństwa.

Przejdziemy teraz do **o k r e ś l e n i a c a ł k i n i e w ł a ś c i w e j II-go r o d z a j u**. Jak już wyżej powiedzieliśmy, całka $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dx\,dy$ jest niewłaściwą II-go rodzaju, jeżeli w skończonym obszarze $\mathcal{D}$ funkcja podcałkowa $f(x,y)$ przyjmuje wartości nieskończone. Aby ją obliczyć, postępujemy w sposób następujący. Punkty obszaru $\mathcal{D}$, dla których funkcja $f(x,y)$ staje się nieskończoną, otaczamy krzywemi C_n takimi, że C_{n+1} znajduje się wewnątrz C_n , a C_n wewnątrz koła o promieniu $\frac{1}{n}$ i powstałe obszary wykluczamy. Rozpatrujemy więc zamiast pierwotnego obszaru $\mathcal{D}$ nowy obszar $\mathcal{D}'_n$, różniący się tym od niego, że punkty nieciągłości zostały usunięte, jakgdyby wykrojone.

Jeżeli przypuścimy teraz, że promienie $\frac{1}{n}$ dążą do zera, to w granicy, o ile ona istnieje i jest niezależna od kształtu krzywych C_n otrzymamy naszą całkę niewłaściwą II-go rodzaju:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathcal{D}'_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Jeśli granica nie istnieje albo zależy od kształtu krzywych C_n, to mówimy, że całka jest rozbieżna. Jeśli w otoczeniu punktów nieciągłości funkcja zachowuje znak stały, to wystarcza przyjąć pod uwagę jeden tylko ciąg krzywych C_n; np. krzywą C_n wtedy może być właśnie koło o promieniu $\frac{1}{n}$.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

Równaniem różniczkowym nazywa się związek, zachodzący pomiędzy funkcją, jej pochodnemi i zmiennemi niezależnemi.

Jeżeli do równania wchodzi tylko jedna zmienna niezależna, mamy t.zw. równanie różniczkowe zwyczajne; jeżeli zmiennych niezależnych jest więcej, a do nich są odniesione pochodne cząstkowe, mamy t.zw. równanie różniczkowe cząstkowe.

Rzędem równania różniczkowego nazywa się najwyższy z rzędów pochodnych, które w danym równaniu występują.

Stopień równania różniczkowego określa się jak stopień równania algebraicznego, t.j. jako najwyższy ze stopni /wymiarów/ wyrazów tego równania. Równanie stopnia pierwszego nazywamy zwykle równaniem linjowym.

Na mocy powyższych określeń równanie w postaci ogólnej:

$$F(x, y, y', y'', \dots\dots\dots\dots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

jest równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu.

Rozwiązać równanie różniczkowe znaczy to znaleźć taką funkcję, zwaną całką równania różn i c z k o w e g o , która po podstawieniu do danego równania zamieniłaby je na tożsamość. Stąd rozwiązanie równania różniczkowego nosi również nazwę c a ł k o w a n i a .

Najprostsze równanie różniczkowe zawiera tylko zmienną niezależną x i pierwszą pochodną funkcji tej zmiennej y'; ma więc kształt: $y'=f(x)$. Rozwiązuje się ono przez zwykłe całkowanie: $y=\int f(x)dx+C$. Dlatego właśnie rozwiązanie każdego równania różniczkowego zostało przez uogólnienie nazwane całkowaniem, a funkcja czyniąca zadość temu równaniu całką /podobnie jak przez uogólnienie liczbę, spełniającą równanie algiebraiczne, nazwano pierwiastkiem równania/.

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE I-go RZĘDU.

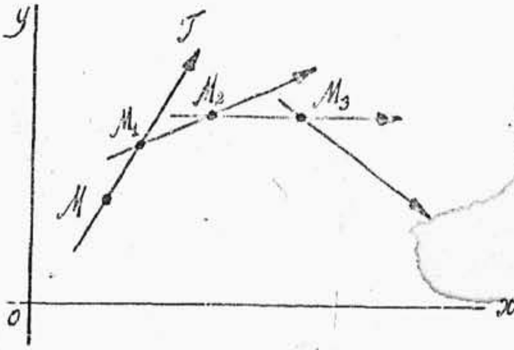
Zastanówmy się nad interpretacją gieometryczną tego rodzaju równania różniczkowego.

Niech będzie dane równanie różniczkowe

$$/1/ \qquad F(x,y,y')=0.$$

Czyni mu zadość jakaś nieznana dotychczas funkcja, której odpowiada pewna krzywa. Dane równanie /1/ podaje zależność pomiędzy odciętą, rzędną oraz współczynnikiem kierunkowym stycznej w każdym punkcie tej krzywej. Rozwiązując równanie /1/ względem pochodnej y' otrzymamy $y'=\varphi(x,y)$, przez co styczna będzie w zupełności w każdym punkcie (x,y) określona. Jeżeli równanie dane jest linjowe, jak wyżej, styczna jest określona jednoznacznie.

Niech jakiemuś punktowi M odpowiada styczna MT. Obierzmy na tej stycznej punkt M_1 i poprowadźmy w nim odpowiednią styczną. Z obranego na tej stycznej punktu M_2 poprowadźmy znowu styczną, na której obierzemy punkt M_3 i t.d. Otrzymamy w ten sposób linję łamaną $MM_1M_2M_3$.......... Gdy odcinki MM_1, M_1M_2, M_2M_3,....... będą maleć, otrzymywać będziemy coraz to nowe linje łamane. W granicy, gdy te odcinki będą nieskończenie małe, otrzymamy pewną krzywą, która będzie odpowiadała rozwiązaniu równania /1/.



rys.59.

Punkt M został obrany przez nas najzupełniej dowolnie. Przez jakiś punkt P przejdzie inna krzywa, wogóle przez każdy punkt na płaszczyźnie przechodzi pewna krzywa.

Ponieważ każda krzywa odpowiada rozwiązaniu równania różniczkowego /1/ /stąd nosi nazwę krzywej całkowej/, więc to równanie będzie posiadało nieskończenie wiele rozwiązań. To samo zresztą mieliśmy przy całkach zwykłych.

Jeżeli mamy dane równanie różniczkowe: $y'=f(x)$, to styczne wszystkich punktów, leżących na tej samej rzędnej, są do siebie równoległe, gdyż mają ten sam współczynnik kierunkowy /odcięta x jest dla tych punktów stała/.

Rozwiązaniem tego równania będą krzywe, wyrażone przez równanie $y=\int f(x)dx + C$, gdzie C jest stałą dowolną, którą można zawsze dobrać tak, ażeby krzywa przeszła przez dany punkt $M(x_0,y_0)$. Wszystkie krzywe możemy otrzymać, przesuwając jedną z nich równolegle względem osi y. A zatym rozwiązaniem równania $y'=f(x)$ jest rodzina krzywych równoległych.

Jeśli mamy jakieś równanie, zawierające parametr zmienny C

$$/1/ \qquad f(x,y,C)=0,$$

to wyraża ono, jak nam wiadomo, rodzinę krzywych. Różniczkując to równanie względem zmiennej niezależnej x, otrzymamy nowe równanie:

$$/2/ \qquad \varphi(x,y,y',C)=0.$$

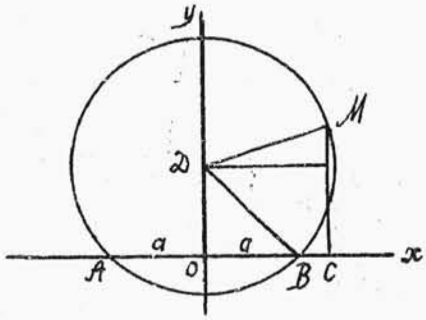
Z równania /1/ i /2/ można wyrugować parametr C. Otrzymane równanie

$$/3/ \qquad F(x,y,y')=0$$

jest równaniem różniczkowym danej rodziny krzywych; wyraża ono zależność pomiędzy odciętą x, rzędną y oraz współczynnikiem kierunkowym y' w dowolnym punkcie.

<u>P r z y k ł a d 1.</u> Znaleźć równanie różniczkowe rodziny kół, przechodzących przez dwa punkty stałe na osi x, których środki leżą na osi y.

Niech danemi punktami stałemi będą punkty A i B, mające odcięte $-a$ i $+a$. Parametrem zmiennym C jest tutaj rzędna środka koła OD. Równaniem dowolnego koła tej rodziny jest:



rys.60.

$$x^2+(y-c)^2=c^2+a^2,$$

lub po przekształceniu:

$$x^2+y^2-2cy-a^2=0;$$

$$\frac{x^2-a^2}{y}+y-2c=0.$$

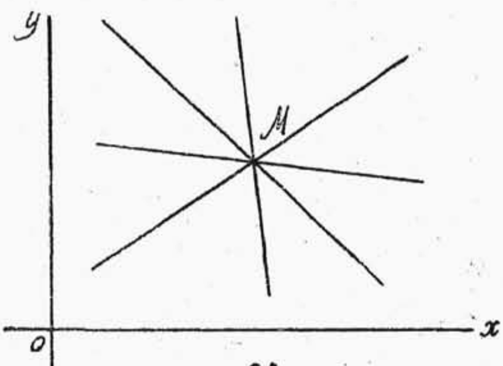
Różniczkując je w ostatniej postaci względem x, otrzymamy wprost szukane równanie różniczkowe:

$$\frac{2xy-(x^2-a^2)\cdot y'}{y^2}+y'=0,$$

albo też

$$2xy-(x^2-a^2)\cdot y'+y'\cdot y^2=0.$$

<u>P r z y k ł a d 2 .</u> Dany jest zbiór prostych, przechodzących przez punkt $M(a,b)$. Znaleźć równanie różniczkowe tej rodziny.



rys.61.

Równaniem każdej prostej, przechodzącej przez punkt M jest

$$y-b=C(x-a).$$

Różniczkując je, znajdziemy:

$$y'=C;$$

co wyraża, że współczynnik kierunkowy stycznej jest dla każdej prostej stały. Stąd równaniem różniczkowym rodziny jest:

$$y-b=y'\cdot(x-a).$$

<u>P r z y k ł a d 3 .</u> Znaleźć równanie różniczkowe wszystkich prostych na płaszczyźnie.

Równaniem dowolnej prostej jest: $y=ax+b$. Równaniem rodziny będzie więc

$$/1/ \qquad y=c_1x+c_2\,,$$

gdzie c_1 i c_2 są to dwa parametry zmienne. Dla pozbycia się ich należy równanie /1/ dwa razy zróżniczkować względem x :

$$/2/ \qquad y'=c_1\,;$$

$$/3/ \qquad y''=0\,.$$

Równanie /3/ jest szukanym równaniem różniczkowym. Wyraża ono, że krzywizna, t.j. odwrotność promienia krzywizny, jest w każdym punkcie zerem.

Łatwo udowodnić odwrotnie: jeżeli jakaś funkcja czyni zadość równaniu /3/, to wyraża prostą /1/, czyli jest funkcją linjową. Istotnie, $(y')'=0$, więc $y'=c_1$, a zatym $y=c_1x+c_2$.

<u>P r z y k ł a d 4 .</u> Znaleźć równanie różniczkowe wszystkich kół na płaszczyźnie.

Najogólniejszym równaniem koła na płaszczyźnie jest

$$x^2+y^2+ax+by+c=0\,;$$

równaniem rodziny wszystkich kół będzie:

$$/1/ \qquad x^2+y^2+c_1x+c_2y+c_3=0.$$

Posiada ono trzy parametry, trzeba je różniczkować trzy razy; otrzymamy więc równanie różniczkowe rzędu trzeciego. Różniczkujemy:

$$/2/ \qquad 2x+2y\cdot y'+c_1+c_2y'=0\,;$$

$$/3/ \qquad 2+2y\cdot y''+2y'^2+c_2y''=0\,;$$

czyli

$$/3/ \qquad \frac{1+y'^2}{y''} + y + \frac{c_2}{2} = 0.$$

Następnie

$$/4/ \qquad \frac{2y' \cdot y''^2 - (1+y'^2) \cdot y'''}{y''^2} + y' = 0,$$

skąd

$$/4/ \qquad 3y'y''^2 = (1+y'^2) \cdot y'''.$$

Jest to szukane równanie różniczkowe rodziny wszystkich kół na płaszczyźnie.

Gdy mamy dane jakieś równanie różniczkowe, to odrazu nasuwa się pytanie, czy istnieje całka tego równania, a o ile istnieje, to czy tylko jedna, czy też więcej. Na pierwsze pytanie należy dać odpowiedź twierdzącą. Co się tyczy liczby całek, to jest ich nieskończenie wiele. Można jednak postawić pewne warunki dodatkowe, które określałyby całkę jednoznacznie. Pod względem gieometrycznym warunkami takimi mogą być punkty, przez które powinna odpowiednia krzywa całkowa przechodzić; pod względem analitycznym będą to równości, przedstawiające wartość całki dla pewnych wartości szczególnych. Jeżeli np. wszystkie całki danego równania różniczkowego będą wyrażone przez wzór: $y = \varphi(x, C)$, to warunkiem, określającym całkę jednoznacznie będzie: $y_0 = \varphi(x_0, C)$. Jeżeli wzór, wyrażający całkę, zawiera n parametrów, co będzie miało miejsce, jeżeli dane równanie różniczkowe jest rzędu n, to należy mieć n warunków, aby całka była jednoznacznie określona. Dowód tego, zarówno jak dowód twierdzenia o istnieniu całki równania różniczkowego, podany po raz pierwszy przez Cauchy'ego, przytoczymy w innym miejscu, a na razie przejdziemy do całkowania równań różniczkowych poszczególnych typów; będzie to oczywiście dowodziło istnienia całek dla tych typów równań.

Całka równania różniczkowego n-tego rzędu zawiera, jak mówiliśmy, n parametrów; nazywa się ona **całką ogólną** danego równania. Nadając parametrom poszczególne wartości liczbowe, będziemy otrzymywali t.zw. **całki szczególne**.

Np. całką ogólną równania różniczkowego: $y''=0$ jest $y=C_1x + C_2$ /proste na płaszczyźnie/; jedną z całek szczególnych jest $y=2x+3$.

Wyrażenie całki równania różniczkowego przez funkcje znane nie zawsze jest możliwe i nie może być mowy o metodzie ogólnej rozwiązania równań w tym znaczeniu. Możemy rozwiązywać, t.j. całkować równania tylko w przypadkach szczególnych.

Jak wiemy dla równania $y'=f(x)$ całką jest $y=\int f(x)dx+C$. Dla równania $y'=f(y)$ mamy $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)}$, więc $x=\int\frac{dy}{f(y)}+C$.

Gdy mamy dane równanie w postaci:

$$P(x)dx=Q(y)dy,$$

mówimy, że zmienne są w nim **oddzielone**. Całką tego równania jest

$$\int P(x)\,dx = \int Q(y)\,dy + C.$$

Do tegoż typu sprowadzają się równania o postaci:

$$/1/ \qquad X(x)\cdot Y(y)\,dx + X_1(x)\cdot Y_1(y)\,dy = 0,$$

gdzie $X_1(x)$ oraz $X(x)$ są funkcjami zmiennej x, zaś $Y(y)$ oraz $Y_1(y)$ funkcji y. Dzielimy wszystkie wyrazy przez iloczyn $Y(y)\cdot X_1(x)$:

$$/2/ \qquad \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = 0.$$

Stąd całką danego równania jest:

$$/1/ \qquad \int\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C.$$

Należy zauważyć, że przy dzieleniu przez iloczyn $Y(y)\cdot X_1(x)$ stracić można pewne rozwiązania szczególne. Niech np. pierwiastkiem równania $X_1(x) = 0$ będzie $x = a$. Mamy wówczas $dx = 0$, $X_1(a) = 0$; więc a jest rozwiązaniem równania /1/. Nie jest to jednak rozwiązanie równania /2/. Rozwiązawszy więc sposobem powyższym równanie różniczkowe /1/, trzeba do jego rozwiązań dołączyć pierwiastki równań $X_1(x)=0$ oraz $Y(y) = 0$.

<u>U w a g a .</u> Jak wiemy, całka $y = \int_a^b f(x)\,dx$ przedstawia w interpretacji gieometrycznej pole, zawarte pomiędzy osią x, krzywą, będącą wykresem funkcji $f(x)$, i dwiema rzędnemi, odpowiadającemi odciętym a

b. Obliczanie takiego pola nazywa się kwadraturą. Dlatego mówimy wogóle, że rozwiązujemy równanie różniczkowe przez k w a d r a t u r ę, o ile do rozwiązania używamy całki $\int$. Tej kwadratury możemy użyć do znalezienia nieznanej funkcji y zawsze, gdy potrafimy najpierw zmienne oddzielić.

<u>P r z y k ł a d .</u> Dane jest równanie

$$xy = y'(x-a)(y-b)$$

Używając znakowania różniczkowego, napiszemy:

$$xy\,dx = (x-a)(y-b)\,dy$$

Oddzielamy zmienne, dzieląc dwie strony równania przez $y(x-a)$:

$$\frac{x}{x-a}dx = \frac{y-b}{y}dy.$$

Stąd

$$\int\frac{x\,dx}{x-a} = \int\frac{y-b}{y}dy + C.$$

Ponieważ zaś

$$\frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a},$$

więc

$$\int dx + a\int\frac{dx}{x-a} = \int dy - b\int\frac{dy}{y} + C,$$

stąd

$$x + a\log(x-a) = y - b\log y + \log c.$$

A zatym

$$y = x + \log(x-a)^a + \log y^b + \log c,$$

czyli

$$e^y = c\,e^x(x-a)^a y^b.$$

Otrzymana funkcja jest szukaną całką danego równania różniczkowego.

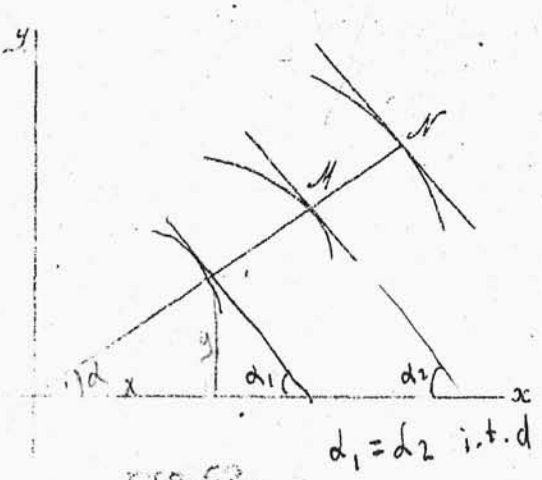
RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE.

Jednorodnem nazywa się równanie, w którem y i x wchodzą tylko za pośrednictwem stosunku $\frac{y}{x}$, czyli równanie kształtu

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Na to np., aby równanie $P(x,y)\,dx = Q(x,y)\,dy$ czyli $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, gdzie $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są wielomianami, było jednorodne, funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ muszą być odpowiednio równe: $P(x,y) = x^n \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $Q(x,y) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

W interpretacji gieometrycznej warunek jednorodności równania różniczkowego wyraża się w ten sposób, że styczne do krzywych /przedstawiających rozwiązanie danego równania/ w punktach, leżących na tym samym promieniu wodzącym, są do siebie równoległe. Wynika to stąd, że stosunek $\frac{y}{x} = tg\alpha$ jest dla wszystkich punktów na jednym promieniu wodzącym stały, a spółczynnik kierunkowy jest funkcją tego tylko stosunku $y' = f(tg\alpha)$. Tego rodzaju krzywe nazywają



rys. 62.