stąd $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$ czyli $p-q=0.$

Niech będzie $z=\varphi(x\cdot y)$. Wtedy $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\varphi'(xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\varphi'(xy)$ i $x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$ czyli wszystkie wyrażenia typu $z=\varphi(xy)$, jakąkolwiek byłaby funkcja φ czynią zadość temu samemu równaniu: $xp-yq=0.$

P r z y k ł a d y i z a d a n i a .

Wyrugować funkcję dowolną φ w następujących przykładach:

1/ $z=\varphi(x+y+xy)$

2/ $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

3/ $z+\frac{y}{x}=\varphi(x^2+y^2)$

4/ $z-ax-by=\varphi(x+y^2)$

Zcałkować następujące równania i znaleźć całkę ogólną, zawierającą stałą dowolną.

1/ $py+qx=1$

2/ $px+qy=\frac{xy}{z}$

3/ $p+q=mz$

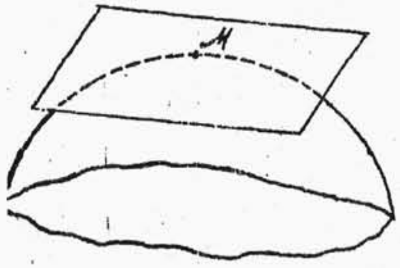
4/ $\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=\frac{1}{z}$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA. CHARAKTERYSTYKI.

Niech będzie dane równanie:

$$/1/\quad P(x,y,z)\cdot p+Q(x,y,z)\cdot q=R(x,y,z).$$

Jakakolwiek całka $z=\varphi(x,y)$ tego równania przedstawia pewną powierzchnię, którą nazywać będziemy powierzchnią całkową. Niech punkt M o spółrzędnych (x,y,z) będzie punktem tej powierzchni; płaszczyzna styczna w M będzie



rys. 74.

miała równanie:

$$/2/ \quad Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

gdzie p i q są te same co w równaniu /1/, jeśli $z=\varphi(x,y)$ jest powierzchnią całkową.

Zbiór pięciu spółrzędnych (x,y,z,p,q), wyrażających geometrycznie punkt i płaszczyznę, przechodzącą przez ten punkt, będziemy nazywać e l e m e n t e m p o - w i e r z c h n i o w y m . Zbiór wszystkich elementów powierzchniowych jest to zbiór, w którym pięć spółrzędnych (x,y,z,p,q) mogą mieć dowolnie wszystkie możliwe wartości. Częścią tego zbioru jest zbiór (Z), w którym (x,y,z,p,q) nie są już dowolne, ale związane równaniem /1/. Zbadajmy bliżej ten zbiór (Z). Powiadam, iż do każdego punktu M należy nieskończenie wiele elementów powierzchniowych zbioru (Z), lecz płaszczyzny tych elementów powierzchniowych przechodzą wszystkie przez prostą Δ_M, związaną z punktem M. W rzeczy samej x,y,z możemy dowolnie ustalić, t.j. z pomiędzy 5-ciu liczb x,y,z,p,q ustalimy 3 pierwsze i niech M będzie punktem o spółrzędnych (x,y,z). Wtedy $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ są też ustalone, ale p i q są związane zależnością

$$/3/ \quad P\cdot p+Q\cdot q=R,$$

w której P, Q, R dla rozważanego punktu M są liczbami stałemi. Równanie /2/ daje nam płaszczyznę, która wraz z punktem M tworzy element powierzchniowy. Otóż równanie /3/ wyraża właśnie, że płaszczyzna /2/ przechodzi przez prostą o równaniu

$$/4/ \quad \frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R},$$

którą to prostą oznaczymy przez Δ_M. W rzeczy samej, oznaczywszy wspólną wartość stosunków $\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R}$ przez ρ, mamy $X-x = P\cdot\rho,\ Y-y = Q\cdot\rho,\ Z-z = R\cdot\rho$, czy te wartości czynią zadość równaniu płaszczyzny /2/?

$$Z-z = R\cdot\rho; \qquad p(X-x) + q(Y-y) = \rho(P\cdot p + Q\cdot q).$$

Ponieważ według równania /3/ prawe strony tych równań są jednakowe, więc $Z-z = p(X-x)+q(Y-y)$, czyli równanie /2/ jest spełnione przez X, Y, Z prostej /4/. Tak więc płaszczyzna /2/ przechodzi przez prostą Δ_M.

Tak więc równanie różniczkowe linjowe o pochodnych cząstkowych /1/ wyznacza pewien zbiór (Z) elementów powierzchniowych w przestrzeni. Przez każdy punkt przestrzeni M przechodzi, odpowiadająca temu punktowi M, prosta Δ_M. Elementy powierzchniowe zbioru (Z) składają się: z dowolnego punktu M i z dowolnej płaszczyzny, przechodzącej przez prostą Δ_M i odpowiadającej temu punktowi M. Niech będzie jakaś powierzchnia Σ o równaniu $z = \varphi(x,y)$. Można ją uważać za zbiór (Z_1) elementów powierzchniowych, składających się z punktów M tej powierzchni Σ i dla każdego punktu M - z płaszczyzny stycznej w tym punkcie do tej powierzchni Σ o równaniu

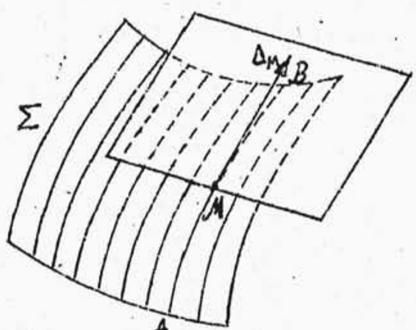
$$Z-z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y-y).$$

Jeżeli teraz powierzchnia Σ jest powierzchnią całkową, wtedy i tylko wtedy $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$ gdzie p i q mają te same wartości co poprzednio, mianowicie związane równaniem $P \cdot p + Q \cdot q = R$. A w takim razie każdy element powierzchniowy, należący do zbioru (Z_1) należy jednocześnie do zbioru (Z), a więc jest jego częścią. Możemy więc powiedzieć, że powierzchnia całkowa jest to powierzchnia taka, że w każdym dowolnym jej punkcie M płaszczyzna styczna do tej powierzchni całkowej jest elementem, należącym do (Z), czyli przechodzi przez prostą Δ_M o równaniu $\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R}$. Nasuwa się myśl rozpatrywania najpierw takich krzywych /naogół skośnych/, któreby były, w każdym swoim punkcie M styczne do prostej Δ_M tego punktu. Niech $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$ będą równaniami szukanych krzywych. Warunek styczności do Δ_M wyrazi się równaniem

$$/5/ \quad \frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

gdyż dx, dy, dz są proporcjonalne do spółczynników kierunkowych stycznej do krzywej. Krzywe takie, określone przez równanie /5/, noszą nazwę c h a r a k t e r y s t y c z n y c h lub c h a r a k t e r y s t y k.

Niech będzie teraz jakaś krzywa dowolna C, nie będąca jednak sama charakterystyką. Przez dowolny punkt przestrzeni przechodzi krzywa, wyznaczona przez równanie /5/, gdyż mamy w całce ogólnej równania /5/ dwie stałe dowolne. Z każdego punktu krzywej C przeprowadźmy charakterystykę. Otrzymamy wówczas pewną powierzchnię Σ, utworzoną przez charakterystyki. Twierdzę, że jest to powierzchnia całkowa. W tym celu trzeba okazać, że płaszczyzna styczna do Σ w dowolnym punkcie M przechodzi przez prostą Δ_M tego punktu. Niech M będzie więc dowolnym punktem powierzchni Σ; punkt M leży na charakterystyce AB. Płaszczyzna, styczna do Σ w punkcie M, przechodzi, jak wiadomo, przez



rys. 75.

styczną MC do charakterystyki AB; lecz styczna MC jest właśnie prostą Δ_M tego punktu. Tak więc płaszczyzna, styczna do Σ w punkcie M, przechodzi przez prostą Δ_M tego punktu, co trzeba było dowieść.

P r z y k ł a d 1. Dane jest równanie $p+q=mz$. Znaleźć powierzchnię całkową tego równania, przechodzącą przez koło $z=1$; $x^2+y^2=1$; to koło jest krzywą C poprzedniego ustępu.

Szukamy równania charakterystyk przy pomocy równań pomocniczych:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{mz},$$

gdyż tu $P=1$, $Q=1$, $R=mz$. Znajdujemy odrazu dwie całki pierwsze: $mx-\lg z=C_1$ i $my-\lg z=C_2$; te dwa równania łącznie wyrażają rodzinę krzywych skośnych, charakterystyk, rodzinę, zależną od dwuch parametrów dowolnych C_1 i C_2. Całką ogólną będzie $my-\lg z=\varphi(mx-\lg z)$, gdzie φ jest funkcją dowolną. Równanie $my-\lg z=\varphi(mx-\lg z)$ wyraża powierzchnię, utworzoną z charakterystyk, gdyż wszystkie punkty charakterystyki, wyznaczonej przez równania $mx-\lg z=C_1$ i $my-\lg z=\varphi(C_1)=C_2$ leżą na powierzchni Σ, ponieważ spółrzędne x,y,z, spełniające parę równań $mx-\lg z=C_1$ i $my-\lg z=\varphi(C_1)=C_2$, spełniają równanie $my-\lg z=\varphi(mx-\lg z)$ powierzchni Σ. Należy teraz tak wyznaczyć nieokreśloną i dowolną dotychczas funkcję φ, by powierzchnia Σ przechodziła przez krzywą C, t.j. koło $z=1$, $x^2+y^2=1$. Otóż dla $z=1$, t.j. w przekroju płaszczyzną, powierzchnia Σ daje krzywą $my=\varphi(mx)$; chcemy, by to było koło, czyli, aby: $my=\sqrt{m^2-m^2x^2}$; stąd jasne, że $\varphi(u)=\sqrt{m^2-u^2}$. Znamy więc już kształt funkcji φ; tak więc powierzchnią całkową równania $p+q=mz$, przechodzącą przez koło C, jest $my-\lg z=\sqrt{m^2-(mx-\lg z)^2}$ czyli $(my-\lg z)^2+(mx-\lg z)^2=m^2$, co trzeba było znaleźć.

Przykład 2. $x^2 p+y^2 q=z^2$. Znaleźć powierzchnię całkową, która przechodzi przez prostą $x=2y=3z$.

Równania charakt. $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}$; $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=C_1$; $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=C_2$

Powierzchnia całkowa najogólniejsza $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right)$.

Gdy $y=\frac{x}{2}$, $z=\frac{x}{3}$; lecz $\frac{x-y}{xy}=\frac{1}{x}$ i $\frac{3}{x}=\frac{1}{x}+\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, czyli $\frac{2}{x}=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$; dla każdego x. Kładąc $\frac{1}{x}=t$, mamy $\varphi(t)=2t$ i funkcja φ została znaleziona. Otrzymujemy rozwiązanie $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+2\frac{x-y}{xy}$ czyli $z(2x-y)=xy$.

Przykład 3. $2yz\cdot p-xz\cdot q+xy=0$. Znaleźć całkę, przechodzącą przez koło $z=0$, $x^2+y^2=y$. Równania różniczkowe charakterystyk: $\frac{dx}{2yz}=\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{-xy}$, stąd $x\,dx+2y\,dy=0$ i $x\,dx+2z\,dz=0$. Równania charakterystyk postaci skończonej są więc $x^2+2y^2=C_1$; $x^2+2z^2=C_2$. Powierzchnia całkowa $2z^2+x^2=\varphi(x^2+2y^2)$. Trzeba teraz wyznaczyć φ przez warunki początkowe, mianowicie, że powierzchnia przechodzi przez koło C : $z=0$, $x^2+y^2=y$.

Gdy $z=0$, $x^2+y^2=y$, to $x^2=y-y^2=\varphi(y^2+y)$.

Kładziemy $y^2+y=t$, $y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4t}}{2}$, $\varphi(t)=2y-t=-1-t\pm\sqrt{1+4t}$

A więc znaleźliśmy już φ. Powierzchnią szukaną jest

$2z^2+x^2=-1-(x^2+2y^2)\pm\sqrt{1+4x^2+8y^2}$ czyli $(x^2+y^2+z^2)^2=y^2-z^2$.

P r z y k ł a d 4. $(y+z)\cdot p+(x+z)\cdot q=y-x$. Znaleźć powierzchnię całkową, przechodzącą przez koło $y=0,\ x^2+y^2=1$.

Równania różniczkowe charakterystyk: $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=$

$$=\frac{dz}{y-x}=\frac{d(x-z)}{x+z}=\frac{x\,dx+z\,dz}{y(x+z)}$$

. Równania w postaci skończonej są: $y-x+z=C_1,\ x^2+z^2-y^2=C_2$.

Powierzchnia całkowa będzie kształtu: $x^2+z^2-y^2=\varphi(y-x+z)$; gdy $y=0$ i $x^2+z^2=1$, otrzymujemy $1=\varphi(z-x)=\varphi(\sqrt{1-x^2}-x)$; kładąc $\sqrt{1-x^2}-x=t$, mamy $\varphi(t)=1$ czyli funkcja tu jest stałą i rozwiązanie przyjmie postać: $x^2+z^2-y^2=1$.

P r z y k ł a d 5 : $px+qy=mz;\quad z=y^m\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

P r z y k ł a d 6 : $py-qx=0;\quad z=\varphi(x^2+y^2)$.

Jako ćwiczenie poleca się wybrać dla przykładu jakąś krzywą C i wyznaczyć funkcję nieoznaczoną φ w ten sposób, by powierzchnia całkowa przechodziła przez tę krzywą.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE 1-go RZĘDU /nielinjowe/.

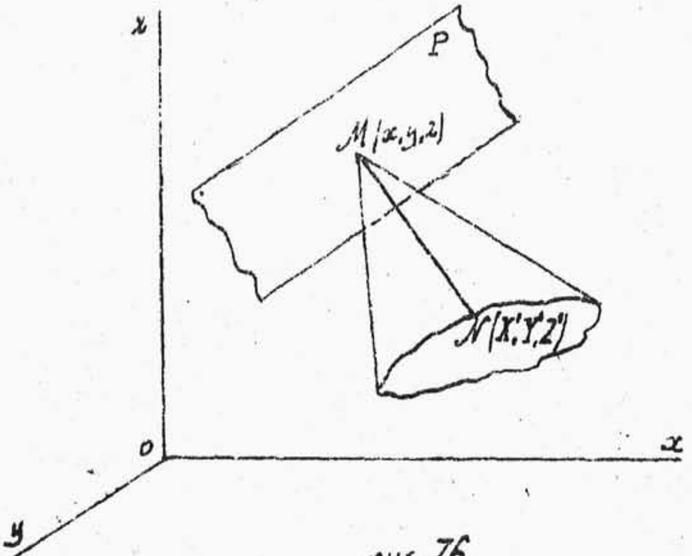
Równanie takie ma postać:

$$(1)\qquad F(x,y,z,p,q)=0,$$

gdzie $p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Wyraża ono w każdym punkcie M o spółrzędnych (x,y,z) związek między pochodnymi cząstkowymi p i q, które są też funkcjami punktu M, czyli x,y,z.

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA. METODA CAUCHY'ego.

Niech $z=f(x,y)$ będzie całką szukaną, czyniącą zadość równaniu różniczkowemu /1/. W interpretacji geometrycznej jest to powierzchnia całkowa Σ, którą można rozpatrywać jako zbiór (Z_1) elementów powierzchniowych, utworzonych z punktów M tej powierzchni i w każdym punkcie M z płaszczyzny stycznej do powierzchni Σ. O ile Σ jest powierzchnią nie dowolną, ale całkową, to elementy powierzchniowe (Z_1) tej powierzchni Σ muszą spełniać pewien warunek. Przy równaniach linjowych mieliśmy w przestrzeni nieskończony zbiór prostych Δ_M i płaszczyzny elementów powierzchniowych w punkcie M musiały przechodzić przez prostą Δ_M, odpowiadającą temu punktowi M. Tutaj prosta Δ_M zastąpiona jest przez pewien stożek S_M, tak iż każdemu punktowi M odpowiada swój stożek S_M z wierzchołkiem właśnie w punkcie M. W każdym punkcie M powierzchni całkowej Σ, płaszczyzna, styczna do Σ, powinna być jednocześnie styczna do stożka S_M, odpowiadającego temu punktowi M. Taka jest interpretacja geometryczna równania /1/. W rzeczy samej, jeśli $z=\varphi(x,y)$ jest pow. całkową Σ, to płaszczyzna styczna do Σ w punkcie M o spół. (x,y,z) spełnia równanie /2/ $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$, gdzie $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ mają wartości, spełniające równanie różniczkowe /1/. Gdy x,y,z, czyli punkt M, są ustalone, to równanie /1/ wyraża pewien związek między p i q, czyli między spółczynnikami kierunkowemi płaszczyzny stycznej /2/. Wskutek tego płaszczyzna styczna /2/ nie może być dowolną; istnieje dla niej warunek narzucony przez równanie /1/. Aby się o tem przekonać, przeprowadźmy normalną do płaszczyzny P w punkcie M /prosta MN /, której równaniem będzie:



rys. 76.

$$5/ \quad \frac{X'-x}{p} = \frac{Y'-y}{q} = \frac{Z'-z}{-1},$$

co wynika z dwuch następujących równości: 3-ej i 4-ej:

$$/3/ \quad \frac{\cos\alpha}{p} = \frac{\cos\beta}{q} = \frac{\cos\gamma}{-1}$$

i

$$/4/ \quad \frac{\cos\alpha}{X'-x} = \frac{\cos\beta}{Y'-y} = \frac{\cos\gamma}{Z'-z}$$

gdzie α, β, γ oznaczają kąty normalnej MN z osiami ox, oy, oz.

Równanie 5-te daje nam możność określenia wielkości p i q

$$p=-\frac{X'-x}{Z'-z}\,; \qquad q=-\frac{Y'-y}{Z'-z}\,.$$

Spółczynniki p i q nie są dowolne, lecz związane zależnością $F(x,y,z,p,q)=0$. Widać stąd, iż normalne MN, muszą leżeć na pewnej powierzchni, czyniącej zadość równaniu, które otrzymamy, rugując p i q z 3-ch ostatnich równań:

$$/6/ \qquad F\left(x,y,z,-\frac{X'-x}{Z'-z},-\frac{Y'-y}{Z'-z}\right)=0,$$

czyli na powierzchni stożkowej.

Otrzymany stożek S'_M zowie się s t o ż k i e m n o r m a l n y c h w punkcie M.

Stwierdzić tedy możemy wynik: Płaszczyzna styczna P posiada normalną, leżącą na powierzchni stożka S'_M. A jeżeli tak, to na zasadzie teorji obwiedni łatwo już otrzymać możemy, że i sama płaszczyzna rozpatrywana P jest styczna do pewnego innego stożka S_M.

Widzimy więc, że płaszczyzny, określone równaniem /2/ obwodzą stożek S_M o wierzchołku w punkcie M, zwany s t o ż k i e m s t y c z n o ś c i. Tworzącemi tego stożka będzie naturalnie szereg prostych przecięć dwu nieskończenie bliskich płaszczyzn P. Równanie odpowiednie otrzymamy, postępując wedle teorji obwiedni. Tak:

$$Z-z = p(X-x) + q(Y-y);$$

$$Z-z=(p+dp)(X-x)+(q+dq)(Y-y).$$

Z równań tych mieć będziemy:

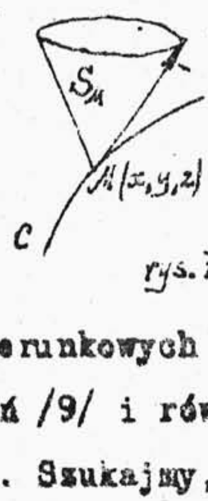
$$/7/ \quad (X-x)dp + (Y-y)dq = 0.$$

Jednocześnie zaś z równania /1/ znajdziemy:

$$/8/ \quad \frac{\partial F}{\partial p}\cdot dp + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot dq = 0.$$

Wobec tego wnioskujemy, że:

$$/9/ \quad \frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{Z-z}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}$$

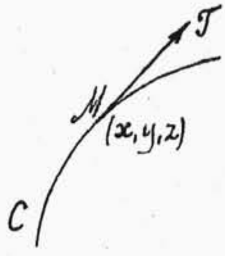


rys. 77.

Równanie to wskazuje, że pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial q}, p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}$ są proporcjonalne do spółczynników kierunkowych tworzących stożka S_M. Rugując p i q z równań /9/ i równania $F(x,y,z,p,q)=0$ otrzymamy równanie stożka. Szukajmy, jak przy równaniach linjowych, krzywych takich, które w każdym punkcie M są styczne do jednej z tworzących stożka S_M tego punktu.

Przypuśćmy, że chcemy otrzymać równanie parametryczne krzywej Γ; w takim razie x, y, z są funkcjami parametru u.

Przeprowadźmy styczną do krzywej w punkcie M, dajmy na to MT , spółczynniki kierunkowe której są dx, dy, dz . Styczna ta ma być jedną z tworzących stożka S_M ; wtedy z równania /9/, otrzymamy:



rys. 78.

$$/10/ \quad \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} .$$

Równania te nie wystarczają do wyznaczenia krzywej Γ. gdyż mamy tu pięć niewiadomych: x, y, z, p i q , a równań t.j. zależności między nimi tylko 3, mianowicie: 2 równania /10/ i równanie /1/, t.j. $F/x, y, z, p, q/=0$. Przyczyną tego jest okoliczność, iż w każdym punkcie M mamy nieskończenie wiele tworzących /mianowicie tworzące stożka S_M /. Cauchy uzupełnia układ /10/ przez dwie nowe równości, co, jak widzieliśmy, jest już wystarczające do wyznaczenia pięciu niewiadomych x, y, z, p i q . Otrzymamy te nowe równania w następujący sposób, przez warunek, by krzywa nasza Γ leżała na szukanej powierzchni całkowej $z = f(x,y)$.

Jeśli zaś tak, to zmienne x i y i funkcje z, p i q tych zmiennych x i y muszą spełniać równanie 1-szą:

$$F(x,y,z,p,q)=0.$$

Gdybyśmy tu zamiast z, p i q podstawili funkcje względem x i y, otrzymalibyśmy:

$$F(x,y,z,p,q)\equiv 0=\Phi(x,y)\equiv 0$$

W takim zaś razie i

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0; \qquad \text{albo:}$$

/11/ $$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}=0$$

i

/12/ $$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Oznaczając zaś dla skrócenia:

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}; \qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

otrzymamy

/13/ $$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}r+\frac{\partial F}{\partial q}s=0;$$

/14/ $$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}s+\frac{\partial F}{\partial q}t=0.$$

Lecz, z drugiej strony:

$$/15/ \qquad dp = r\,dx + s\,dy$$

i $\quad dq = s\,dx + t\,dy \qquad$ /gdyż $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ /

Oznaczmy wreszcie:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\cdot\frac{\partial F}{\partial p} + q\cdot\frac{\partial F}{\partial q}} = du$$

Wtedy otrzymamy:

$$dx = \frac{\partial F}{\partial p}\,du$$

$$dy = \frac{\partial F}{\partial q}\,du$$

Wobec czego /15/ daje nam:

$$dp = r\frac{\partial F}{\partial p}\,du + s\frac{\partial F}{\partial q}\,du$$

$$dq = s\frac{\partial F}{\partial p}\,du + t\frac{\partial F}{\partial q}\,du$$

Albo:

$$/16/ \qquad \begin{aligned} dp &= \left(r\frac{\partial F}{\partial p} + s\frac{\partial F}{\partial q}\right)du \\ dq &= \left(s\frac{\partial F}{\partial p} + t\frac{\partial F}{\partial q}\right)du \end{aligned}$$

Równanie zaś /13/ i /14/ przepisujemy w posta

$$
/17/\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p\right) \\
\frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t &= -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q\right)
\end{aligned}
$$

Z porównania więc równości 16 i 17 mamy:

$$
du = \frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot p} = \frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot q}
$$

czyli

$$
/18/\quad
\begin{aligned}
&\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \\
&= \frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot p} = \frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot q} = du
\end{aligned}
$$

Układ /18/ wystarcza do wyznaczenia x, y, z, p i q w zależności od parametru u. Gdy u się zmienia, punkt M o spółrzędnych (x,y,z) opisuje krzywą Γ; lecz p i q są także funkcjami parametru u, t.j. znane w każdym punkcie krzywej Γ. Mamy więc właściwie zbiór jednoparametrowy elementów x, y, z, p, q. Przytem można dowolnie wziąść wartości początkowe $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$; wartość początkowa q_0 nie jest dowolna, gdyż musi spełniać warunek $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$, będący wynikiem samego równania różniczkowego.

Teraz trzeba zbadać, w jaki sposób przy pomocy charakterystyk daje się utworzyć powierzchnia całkowa. Zanim jednak dokonamy tego w wypadku ogólnym, rozpatrzmy przykład następujący:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z,$$

albo

/A/ $$p^2 + q^2 = z.$$

Możemy więc napisać:

/B/ $$F(x, y, z, p, q) \equiv 0 = p^2 + q^2 - z$$

Tworzymy teraz równanie charakterystyk:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2+q^2)} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

/C/ $$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

Ponieważ równanie nasze nie zawiera x i y, przeto mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Zauważmy dalej, iż dla znalezienia charakterystyk układ /C/ winien być scałkowanym. Da się to łatwo uskutecznić, bowiem trzy ostatnie równości prowadzą do:

$$\frac{1}{2} \lg z = \lg p + \lg C_1 = \lg q + \lg C_2$$

skąd:

$$\sqrt{z} = C_1 p = C_2 q.$$

Albo:

$$z = C_1^2 p^2 = C_2^2 q^2$$

Lecz według równania A/: $p^2+q^2=z$, więc

$$p^2+q^2=C_1^2p^2=C_2^2q^2.$$

Przeto znajdziemy:

$$p^2=(C_2^2-1)\cdot q^2$$

$$q^2=(C_1^2-1)\cdot p^2$$

Czyli iloczyn

$$\text{D/} \qquad (C_2^2-1)(C_1^2-1)=1,$$

t.j. całki nasze są określone.

W celu otrzymania większej ilości całek weźmy dalszy układ:

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dp}{p}; \qquad \frac{dy}{2q}=\frac{dq}{q}.$$

Da nam on, oczywiście:

$$dx=2\,dp,$$

$$dy=2\,dq.$$

Stąd

$$x=2p+a$$

$$y=2q+b$$

Albo ostatecznie:

$$\text{/E/} \qquad \begin{cases} x=2p+a \\ y=2\frac{C_1}{C_2}p+b \\ z=C_1^2p^2 \end{cases}$$

to są równania charakterystyk Γ ; jako parametr zmienny przyjęliśmy tu p .

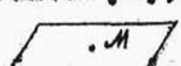
Przy stałych a, b, C_1 i C_2 , gdy p się zmienia, punkt (x,y,z) opisuje krzywą Γ .

Równania te, będące równaniem charakterystyk, posiadają 3 stałe niezależne /stałe C_1 i C_2 są związane zależnością /D/, mogą więc być uważane za jedną stałą/. Układ /E/ daje nam nieskończony zbiór charakterystyk, gdyż różnym wartościom a, b i C_1 odpowiadają różne krzywe.

Zbiór tych krzywych charakterystycznych możemy już ułożyć w ten sposób, aby tworzyły pewną powierzchnię całkową jak to zobaczymy poniżej.

WSTĘGI CHARAKTERYSTYCZNE. TWORZENIE POWIERZCHNI CAŁKOWYCH PRZY POMOCY WSTĘG CHARAKTERYSTYCZNYCH. Przenieśmy się znowu do wypadku ogólnego.

Otóż zadaniem naszem będzie odszukać powierzchnię całkową, mając równania charakterystyk w postaci /18/. Równania owe wyrażają zmienne x, y, z, p i q w funkcjach parametru u . Otrzymany zbiór pięciu liczb określać będzie punkt M i pewną płaszczyznę, przezeń przechodzącą, o spółczynnikach kierunkowych $p, q, -1$.



rys. 79.

Zbiór powyższego rodzaju pięciu liczb,