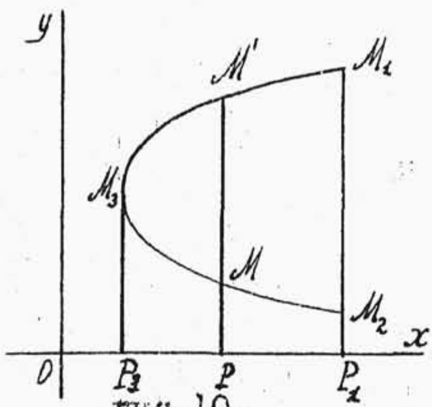


rys. 10.

i P_1. Wystawmy w p. P rzędną, która przetnie granicę obszaru $(\mathcal{D})$ tylko w 2-ch punktach, ponieważ obszar ten jest normalny /założenie/. Niech M' i M będą temi dwoma punktami. Oznaczmy PM' przez y_2, a PM przez y_1; mamy $y_1 \leq y \leq y_2$. Lecz y_2 i y_1 zależą od x, czyli są funkcjami x; niech $y_2 = \varphi_2(x)$, $y_1 = \varphi_1(x)$. Dla punktu obszaru $(\mathcal{D})$ mamy więc jeszcze nierówność:

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$. Odwrotnie, łatwo udowodnić, że jeśli jakiś punkt $M(x,y)$ czyni zadość nierównościom 1/ i 2/, to znajduje się w obszarze $(\mathcal{D})$.

CAŁKI DWUKROTNE.

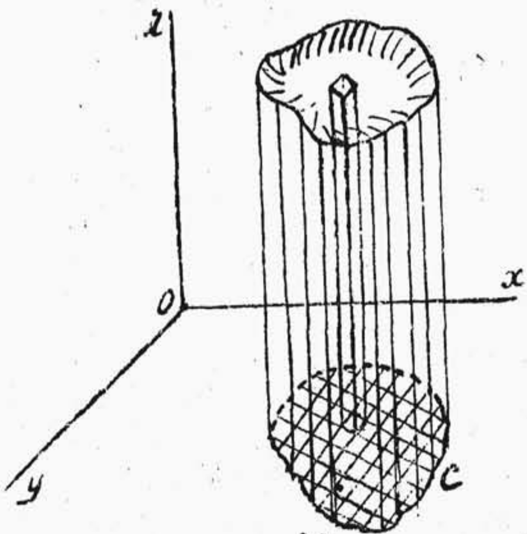
Niech będzie dany przestrzenny układ spółrzędnych xyz oraz funkcja ciągła

$$/1/ \qquad z = f(x,y)$$

gdzie x i y są zmiennemi niezależnemi. Wyobraźmy sobie następnie w płaszczyźnie xoy pewną krzywą zamkniętą C. Gdy punkt $N(x,y)$ będzie się poruszał po tej krzywej, wówczas punkt $M(x,y,z)$ opisze krzywą przestrzenną, zaś spółrzędna punktu M, równoległa do osi OZ opisze powierzchnię walcową. Najbliższym naszym zadaniem będzie obliczenie objętości bryły, ograniczonej płaszcz. xoy, powierzchnią walcową oraz daną powierzchnią /1/.

Przedewszystkim, jak to zwykle w podobnych wypadkach czynimy, musimy ściśle określić, co będziemy nazywali objętością tego rodzaju bryły.

W tym celu podzielmy w dowolny sposób pole, ograniczone krzywą C, na małe cząsteczki, powiedzmy poletka, i



rys.11.

zbudujmy dla każdego z poletek odpowiadający mu graniastosłup lub walec /niekoniecznie kołowy/, prowadząc przez punkty konturu poletka tworzące równoległe do osi OZ, i przez najwyższy punkt tej części powierzchni, która odpowiada danemu poletku, płaszczyznę równoległą do XOY. Będą to graniastosłupy lub walce opisane. Będziemy mieli graniastosłup lub walec, zależnie od tego, czy kontur poletka, będącego podstawą, jest ograniczony linjami prostemi, czy też krzywemi.

Utwórzmy następnie zbiór graniastosłupów lub walców wpisanych, biorąc za ich wysokości najmniejszą rzędną w obszarze i na konturze odpowiedniego poletka.

Oznaczmy pola naszych poletek przez

$$\omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \ldots\ldots \omega_n ,$$

największe rzędne w obszarach tych poletek /wraz z ich konturami/ przez

$$M_1 , M_2 , M_3 , \ldots\ldots M_n ,$$

zaś najmniejsze rzędne w obszarach poletek przez

$$m_1\,,\ m_2\,,\ m_3\,,\ \ldots\ldots\ m_n\,.$$

W takim razie suma objętości graniastosłupów opisanych wyrazi się przez

$$S_n = \omega_1\cdot M_1 + \omega_2\cdot M_2 + \ldots\ldots + \omega_n\cdot M_n\,,$$

zaś suma objętości graniastosłupów wpisanych przez

$$s_n = \omega_1\cdot m_1 + \omega_2\cdot m_2 + \ldots\ldots + \omega_n\cdot m_n\,.$$

Wyobraźmy sobie teraz, że liczba poletek, na które podzieliliśmy nasz obszar, się powiększa, przez rozdrobnienie, przyczem wszystkie wymiary każdego z poletek dążą do zera. Z łatwością można zauważyć, że suma objętości graniastosłupów opisanych S_n będzie malała, dążąc do pewnej granicy J, zaś suma objętości graniastosłupów wpisanych s_n będzie rosła, dążąc znowu do pewnej granicy, którą oznaczymy przez i.

Udowodnimy, że S_n i s_n posiadają granicę wspólną, czyli że $J = i$. Weźmy w tym celu pod uwagę różnicę

$$S_n - s_n = \omega_1\left(M_1 - m_1\right) + \omega_2\left(M_2 - m_2\right) + \ldots\ldots + \omega_n\left(M_n - m_n\right).$$

Może ona stać się dowolnie małą, gdyż z ciągłości funkcji $f(x,y)$ wynika, iż różnica pomiędzy największą i najmniejszą wartością rzędnej w jakimkolwiek poletku, zwana oscylacją, może być mniejszą od dowolnie małej liczby:

$$M - m < \frac{\varepsilon}{\Omega}$$

gdzie Ω jest to pole, zawarte wewnątrz konturu C i równe co do wielkości $\omega_1+\omega_2+\dots\dots+\omega_n$; a zatym

$$S_n-s_n<\omega_1\cdot\frac{\varepsilon}{\Omega}+\omega_2\cdot\frac{\varepsilon}{\Omega}+\dots\dots+\omega_3\cdot\frac{\varepsilon}{\Omega}$$

$$S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{\Omega}(\omega_1+\omega_2+\dots\dots+\omega_n),$$

czyli

$$S_n-s_n<\varepsilon.$$

Stąd wynika, iż objętości graniastosłupów opisanych i wpisanych dążą do wspólnej granicy $J=i$.

Granica ta nie zależy od sposobu podziału danego obszaru na poletka. Gdybyśmy bowiem podzielili obszar na poletka w sposób inny, niezależny od pierwszego, to następnie moglibyśmy uskutecznić podział, którego powstanie dałoby się wytłomaczyć jako połączenie obu podziałów za pomocą znanego rozumowania /jak przy całkach pojedyńczych, patrz Mat.I/. Otrzymalibyśmy więc wówczas znów tę samą granicę.

Zauważmy, że zamiast sum $\sum\omega_i M_i$ oraz $\sum\omega_i m_i$ można brać sumę $\sum\omega_i\cdot f(x_i,y_i)$, zawartą pomiędzy niemi, gdyż $m_i\leqslant f(x_i,y_i)\leqslant M_i$.

Jeśli wspólna granica wszystkich powyższych sum, niezależna od sposobu podziału danego obszaru na poletka:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \omega\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot f(x_i,y_i)$$

istnieje, to jest właśnie szukaną objętością bryły.

Oznacza się ona przez

$$\iint_D f(x,y)\,d\omega$$

i zwie się całką podwójną. Jej nazwa powstaje stąd, że obliczenie takiej całki sprowadza się do dwuch kolejnych całkowań; dowód tego jest następujący.*)

Niech obszarem całkowania będzie prostokąt D , którego boki są równoległe do osi x i y . Jak już wiemy, każdy punkt, leżący wewnątrz tego obszaru i na jego konturze, musi spełniać nierówności:

$$a \leq x \leq b$$

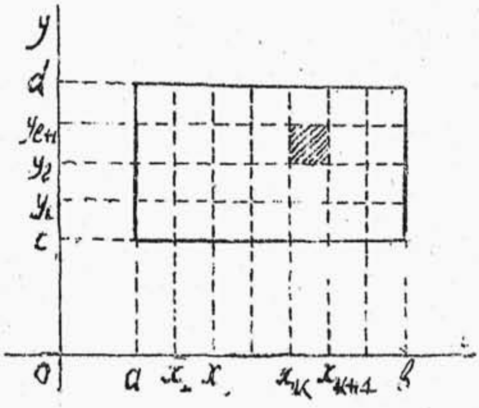
$$c \leq y \leq d$$

Podzielmy prostokąt D na części /prostokąty/, prowadząc równoległe do osi y o odciętych x_1 , x_2 , x_3 ,......... x_n, oraz równoległe do osi x o rzędnych y_1, y_2, y_3, ... y_n . Wówczas symbolowi $d\omega$ nadaje

---

*) U w a g a . W rozumowaniu poprzedniem przyjmowaliśmy, że poletka ω_1,.......ω_n podziału stanowią razem wziąwszy cały obszar (D) , ograniczony krzywą c i nic więcej. Gdyby poletka ω_i były kwadracikami np., to taki podział byłby niemożliwy. Wtedy mielibyśmy kwadraciki częściowo wystające poza kontur c . Jednak wynik byłby taki sam, jedynie w rozumowaniu poprzednio przytoczonem należałoby wprowadzić pewne drobne zmiany, nie zmieniając zasadniczo idei dowodu. Przeprowadzenie dowodu w tym przypadku pozostawiamy czytelnikowi.

my postać $dx \cdot dy$, więc zamiast $\iint_{\omega} f(x,y)\,d\omega$ będziemy mogli napisać



rys. 12.

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

Z określenia całki podwójnej mamy:

$$\iint_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy = $$
$$= \lim \sum \omega_i \cdot f(x,y)$$

łatwo jednak zauważyć, że pole dowolnego prostokącika /pierwszy czynnik/:

$$\omega_i = (x_{k+1} - x_k)(y_{l+1} - y_l).$$

Drugi czynnik f_i jest funkcją w dowolnym punkcie (ξ_{kl}, η_{kl}) , leżącym wewnątrz danego poletka. Aby znaleźć sumę objętości graniastosłupów $\sum \omega_i f_i$, obliczymy najpierw sumę objętości graniastosłupów, których podstawy /t.j. poletka/ leżą wzdłuż jednego pasma, np. równoległego do osi y , następnie drugiego i t.d. Gdy następnie dodamy do siebie otrzymane sumy częściowe, znajdziemy szukaną sumę $\sum \omega_i f_i$.

Otóż mamy dla jednego pasma między x_{k+1} i x_k sumę częściową:

$$u_k = \sum_l f(\xi_{kl}, \eta_{kl}) \cdot (x_{k+1} - x_k) \cdot (y_{l+1} - y_l);$$

ponieważ jednak $(x_{k+1} - x_k)$ jest dla naszego pasma poletek wielkością stałą /dla pasma równoległego do osi y /, więc

$$u_k=(x_{k+1}-x_k)\cdot\sum_l f(\xi_{kl},\eta_{kl})(y_{l+1}-y_l).$$

Punkt (ξ_{kl},η_{kl}) jest dowolny; obierzemy $\xi_{kl}=\xi_k$ t.j. nadajmy mu tę samą wartość we wszystkich poletkach pasma, zaś η_{kl} w ten sposób, żeby

$$\sum_l f(\xi_k,\eta)(y_{l+1}-y_l)=\int_c^d f(\xi_k,y)\,dy.$$

Że jest to możliwe przekonać się możemy rozkładając tę całkę:

$$\int_c^d f(\xi_k,y)\,dy=\int_c^{y_1}+\int_{y_1}^{y_2}+\cdots\cdots+\int_l^{l+1}+\cdots\cdots+\int_{y_{n-1}}^d$$

a następnie stosując do każdej z otrzymanych całek wzór na wartość średnią:

$$\int_c^d f(\xi_k,y)\,dy=(y_1-c)\cdot f(\xi_k,\eta_{k1})+(y_2-y_1)\cdot f(\xi_k,\eta_{k2})+$$
$$+\cdots\cdots+(y_{l+1}-y_l)\cdot f(\xi_k,\eta_{kl})+\cdots\cdots+(y_n-y_1)\cdot f(\xi_k,\eta_{kn})$$

Obrawszy punkt (ξ_{kl},η_{kl}) w ten sposób, mamy:

$$u_k=(x_{k+1}-x_k)\cdot\int_c^d f(\xi_k,y)\,dy.$$

Gdy następnie oznaczymy

$$\int_c^d f(\xi_k,y)\,dy=F(\xi_k),$$

to wówczas

$$u_k=(x_{k+1}-x_k)\cdot F(\xi_k)$$

przyczem

$$x_k<\xi_k\leq x_{k+1}.$$

A zatym

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum_k F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Widzimy więc, że dana całka podwójna jest całką zwyczajną funkcji $F(x)$, która z kolei jest znów całką zwyczajną. Ostatecznie więc mamy wzór

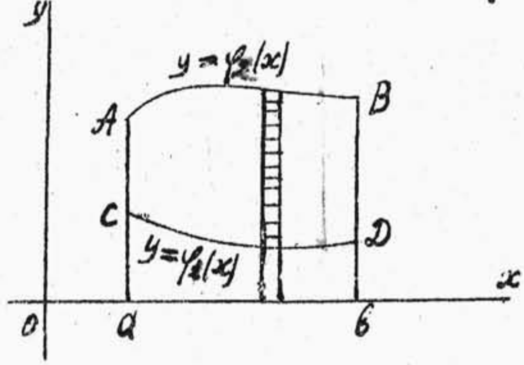
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Zmieniając w powyższym dowodzie miejscami role osi x i y, otrzymalibyśmy analogiczny wzór:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Przypuśćmy teraz, że obszar całkowania nie jest prostokątem, lecz obszarem normalnym, t.j. jest ograniczony dwiema krzywemi:

$$y = \varphi_1(x)$$
$$y = \varphi_2(x)$$



rys. 13.

oraz dwiema rzędnemi. Postępujemy tutaj podobnie jak poprzednio: całkujemy najpierw wzdłuż jednego pasma, a następnie znajdujemy granicę sumy takich całek częściowych. Mamy więc

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum f_i\,\omega_i = \lim \sum (x_{k+1}-x_k)\cdot\int_{\varphi_1(x_k)}^{\varphi_2(x_k)} f(x,y)\,dy$$

A zatem

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Przykład I. Dana jest całka podwójna

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy.$$

Obszarem całkowania $\mathcal{D}$ jest pole trójkąta prostokątnego, zbudowanego na osiach x i y, którego obie przyprostokątne są równe a.

Równaniem przeciwprostokątnej jest tutaj

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1,$$

czyli

$$x + y = a.$$

Obszar $\mathcal{D}$ wyrazi się więc przez nierówności:

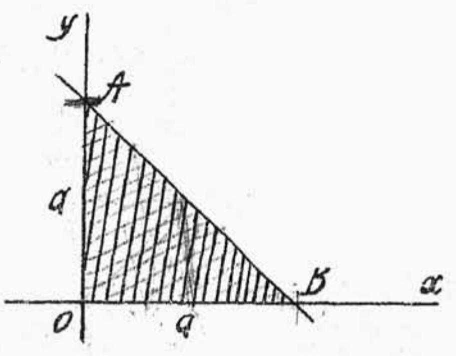
$$x + y \leq a;$$

$$x \geq 0;\ y \geq 0;$$

które przedstawimy w t.zw. postaci normalnej:

$$0 \leq y \leq a - x$$

$$0 \leq x \leq a$$



rys. 14.

Przechodząc do danej całki, mamy:

$$\iint_{\mathcal{D}} x\cdot y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} x\cdot y\,dy =$$

$$= \int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} y\,dy = \int_0^a x\,dx \cdot \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{a-x} = \frac{1}{2}\int_0^a x(a-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3)\,dx = \frac{a^2}{2}\int_0^a x\,dx - a\int_0^a x^2\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^a x^3\,dx = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2} - a\cdot\frac{a^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{24}.$$

W ten sposób dana całka podwójna została obliczona. Jak wiemy, wyraża ona objętość jakiejś bryły; zachodzi więc pytanie, jakiej? Łatwo jest dać na nie odpowiedź. Jest to mianowicie powierzchnia graniastosłupa trójkątnego, którego dolna podstawa spoczywa na płaszczyźnie XOY i zlewa się z trójkątem OAB, i który jest ograniczony od góry powierzchnią $z = x\cdot y$.

P r z y k ł a d 2. Dana jest całka podwójna

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1+x+y}\,dx\,dy.$$

Przytem danym jest obszar całkowania $\mathcal{D}$, wyrażony przez nierówności:

$$y+1 \geqslant x^2 - x$$

$$x+y \leqslant 1$$

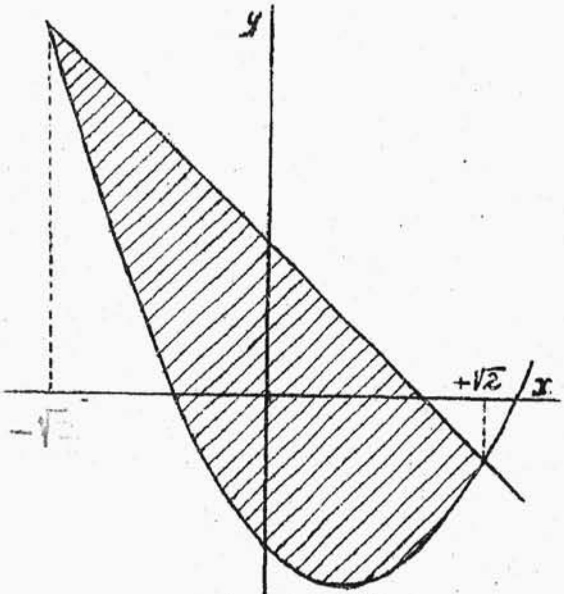
Łatwo jest zdać sobie sprawę, jak się przedstawia ten obszar pod względem gieometrycznym. Mianowicie z nierówności pierwszej wynika, iż jest on ograniczony parabolą:

$$y = x^2 - x - 1,$$

nierówność druga zaś wskazuje, że obszar ten ogranicza prosta o równaniu

$$x+y=1.$$

A więc obszarem całkowania będzie pole, zawarte pomiędzy prostą i parabolą. Nierówności, wyrażające powyższy obszar, sprowadzone do postaci normalnej, będą miały kształt:



rys. 15.

$$x^2-x+1 \leqslant y \leqslant 1-x$$
$$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

/Nierówność drugą otrzymujemy, znajdując punkty przecięcia paraboli z prostą, t.j. rozwiązując układ dwu równań z dwiema niewiadomemi/.

A więc daną całkę będziemy mogli wyrazić w sposób następujący:

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1+x+y}\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2-x-1}^{1-x} \sqrt{1+x+y}\,dy$$

Rozwiążemy najpierw całkę drugą względem y:

$$\int_{x^2-x-1}^{1-x} \sqrt{1+x+y}\,dy = \int_{x^2-x-1}^{1-x} (1+x+y)^{1/2} dy = \frac{2}{3}\Big|(1+x+y)^{3/2}\Big|_{x^2-x-1}^{1-x} =$$

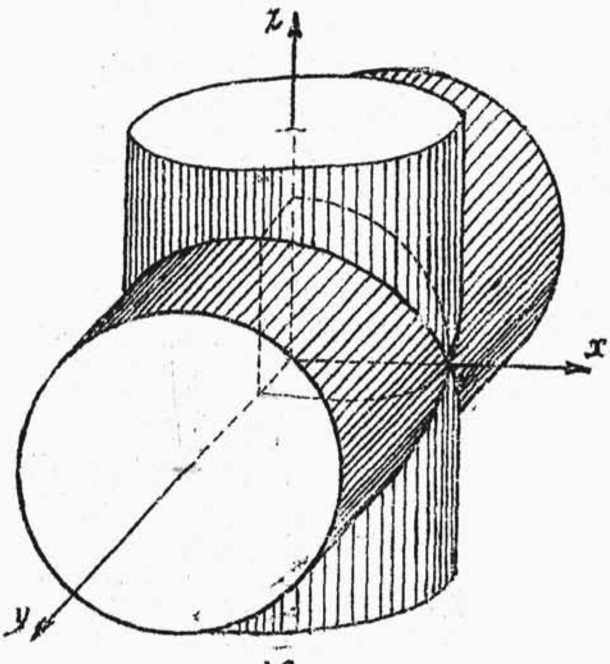
$$= \frac{2}{3}(1+x+1-x)^{3/2} - \frac{2}{3}(1+x+x^2-x-1)^{3/2} = \frac{2}{3}(2^{3/2}-x^3)$$

A zatem

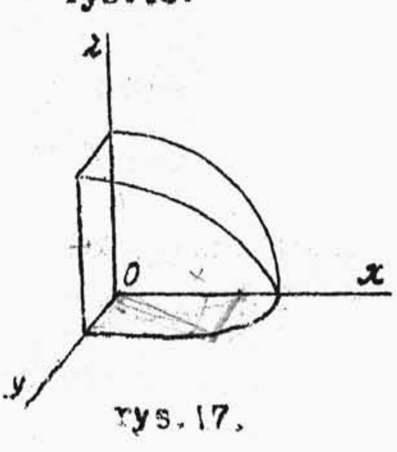
$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1+x+y}\, dx\, dy = \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx - \frac{2}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3 dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\left|\frac{x^4}{4}\right|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}.$$

Przykład 3. Obliczyć objętość wspólnej części dwuch prostych walców kołowych o równych promieniach, jeżeli osią jednego z nich jest oś z, zaś osią drugiego oś y



rys.16.



rys.17.

Otrzymana bryła jest symetryczna względem 3 płaszczyzn współrzędnych, wystarczy więc obliczyć objętość v części bryły, która jest ograniczona z trzech stron płaszczyznami spółrzędnemi. Wówczas objętość całej bryły

$$V = 8v.$$

Obszar całkowania $\mathcal{D}$ na płaszczyźnie xoy ograniczony jest przez osie x i y oraz przez ćwiartkę koła, o równaniu:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Będą go wyrażały nierówności:

$$x^2+y^2\leqslant r^2;$$

$$x\geqslant 0;$$

$$y\geqslant 0;$$

albo też /w postaci normalnej/:

$$0\leqslant y\leqslant \sqrt{r^2-x^2}$$

$$0\leqslant x\leqslant r$$

Funkcję z określimy z równania: $z^2+x^2=r^2$ /równanie walca, którego osią jest oś y /; mianowicie

$$z=\sqrt{r^2-x^2}.$$

A więc objętość szukanej części bryły wyrazi się przez

$$v=\iint_{\mathcal{D}}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\,dy=\int_0^r dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2}\,dy=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=$$

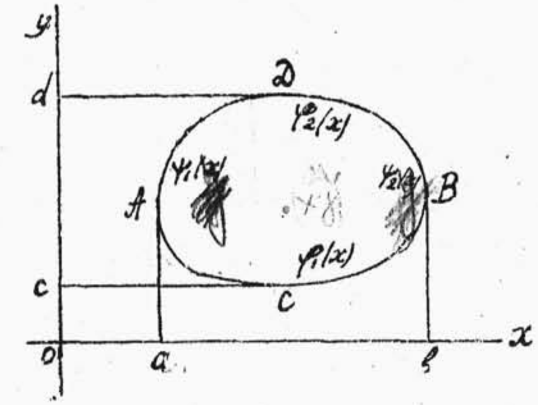
$$=\int_0^r(r^2-x^2)^{1/2}dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=\int_0^r(r^2-x^2)\,dx=r^2\int_0^r dx-\int_0^r x^2dx=$$

$$=r^3-\frac{r^3}{3}=\frac{2}{3}r^3.$$

Całkowitą objętością bryły będzie:

$$V=\frac{16}{3}r^3.$$

WZÓR NA ZMIANĘ PORZĄDKU CAŁKOWANIA. Niech będzie dana całka podwójna $\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\,dx\,dy$, przyczem obszar całkowania $\mathcal{D}$ niech będzie krzywą zamkniętą, taką, że nietylko równoległa do osi y , lecz i równoległa do osi x przecina ją tylko w 2-ch punktach. W takim razie należenie p. $M(x,y)$ do obszaru $\mathcal{D}$ można będzie wyrazić nierównościami znanego typu dwoma sposobami, mianowicie:



rys. 18.

1/ $a \leq x \leq b$; $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

gdzie $y=\varphi_2(x)$ i $y=\varphi_1(x)$ są równaniami łuków ADB i ACB

2/ $c \leq y \leq d$; $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$,

gdzie $x=\psi_2(y)$ i $x=\psi_1(y)$ są równaniami łuków DBC i DAC.

Otóż

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

A więc

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Przykłady.

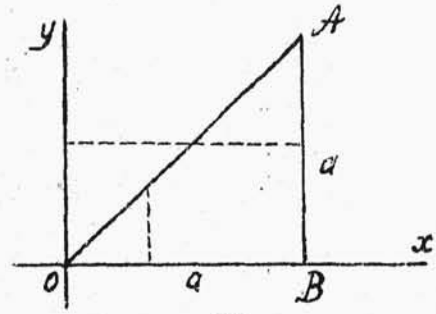
Niech np. obszarem całkowania będzie elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wówczas

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x,y)\,dy = \int_{-b}^{+b} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y)\,dx.$$

Szczególny przypadek powyższego wzoru stanowi t.zw. wzór Lejeune-Dirichlet'a. Niech obszarem całkowania będzie pole równoramiennego trójkąta prostokątnego, jak na rysunku. W takim razie



rys.19.

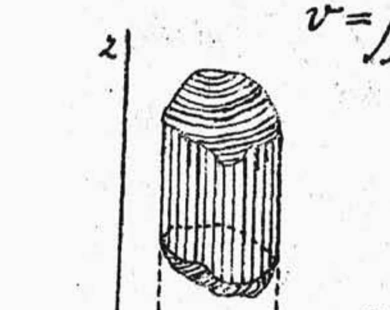
$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_0^y f(x,y)\,dx.$$

Powrócimy znowu do obliczania objętości brył. Niech będzie dana bryła, ograniczona powierzchnią walcową oraz powierzchniami:

$$z_1 = f_1(x,y)$$
$$z_2 = f_2(x,y)$$

Objętość tego rodzaju bryły wyrazi się wzorem zupełnie zrozumiałym:

$$v = \iint_{\mathcal{D}} \{f_1(x,y) - f_2(x,y)\}\,dx\,dy$$



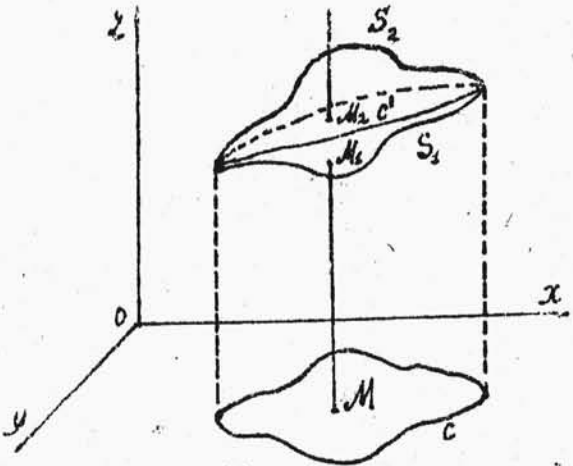
rys.20.

gdzie $\mathcal{D}$ jest rzutem bryły na płaszczyznę xoy.

Przypuśćmy teraz, że mamy jakąś obrotową powierzchnię zamkniętą /np. elipsoidę, kulę/ o równaniu

$$f(x,y,z) = 0.$$

Weźmy w obszarze $\mathcal{D}$, t.j. rzucie tej powierzchni na płaszczyznę xoy, dowolny punkt M i wystawmy w nim prostopadłą do tej płaszczyzny, t.j. równoległą do osi z



rys.21.

Przetnie ona daną powierzchnię przynajmniej w dwuch punktach M_1 i M_2. Gdyby się okazało, że punktów przecięcia jest więcej, rozłożylibyśmy bryłę na części, dla których punktów przecięcia się byłoby tylko 2. Rzędne punktów M_1 i M_2 oznaczymy przez

$$z_1 = f_1(x,y)$$
$$z_2 = f_2(x,y)$$

Gdybyśmy punkt M obrali na konturze c obszaru całkowania, wówczas prosta, poprowadzona z tego punktu równolegle do osi z byłaby styczną do powierzchni, czyli $z_1 = z_2$. Wszystkie punkty na powierzchni, dla których zachodzi powyższa równość, leżą na pewnej krzywej przestrzennej c', której rzutem jest właśnie krzywa c. Krzywa c' dzieli powierzchnię danej bryły na dwie części: S_1 i S_2. Objętością bryły, ograniczonej powierzchnią walcową o kierownicy c, płaszczyzną xoy oraz powierzchnią S_2, będzie

$$v_2 = \iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy.$$

Gdy powierzchnię S_2 zastąpimy przez S_1, otrzymamy bryłę o objętości

$$v_1 = \iint_{\mathfrak{D}} f_1(x,y)\,dx\,dy.$$

Różnica pomiędzy objętościami v_2 i v_1 wyrazi nam objętość bryły, ograniczonej daną powierzchnią $f(x,y,z)=0$:

$$v = \iint_{\mathfrak{D}} f_2(x,y)\,dx\,dy - \iint_{\mathfrak{D}} f_1(x,y)\,dx\,dy.$$

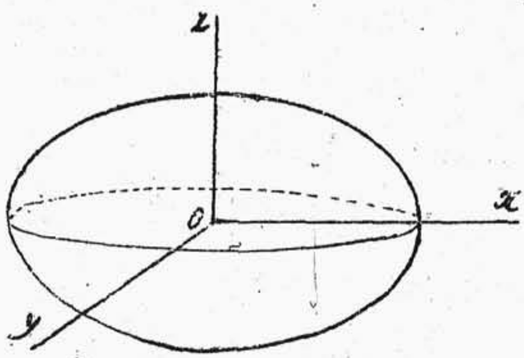
U w a g a. Tę samą objętość będziemy mogli wyrazić także przy pomocy całki trzykrotnej, jako $v = \iiint dx\,dy\,dz$. /Patrz str. /.

P r z y k ł a d. Obliczyć objętość elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rzutem bryły na płaszczyznę xoy jest tutaj elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



rys.22.

Równoległa do osi z, przechodząca przez dowolny punkt M, wewnątrz tej elipsy położony, przecina bryłę w punktach o rzędnych:

$$z_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$z_2 = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Stosując wyżej wyłożoną metodę, znajdziemy, że objętość elipsoidy

$$v = c\iint_{\mathfrak{D}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy + c\iint_{\mathfrak{D}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2c\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2c\int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Obliczymy:

$$\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{1}{2}y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} +$$
$$+\frac{b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

biorąc tę całkę w odpowiednich granicach, otrzymamy

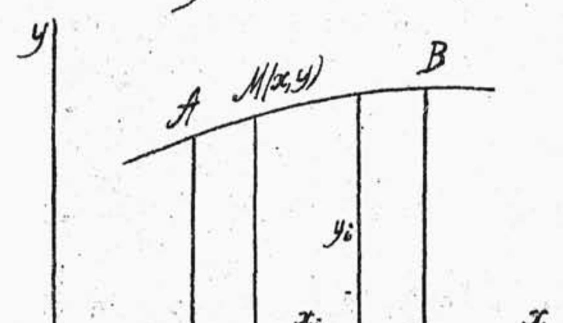
$$\frac{\pi b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

tak, iż

$$v = \pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Gdy $a=b=c=r$, otrzymamy wzór, wyrażający objętość kuli: $v=\frac{4}{3}\pi r^3$.

CAŁKI KRZYWOLINJOWE. Przypuśćmy, że na płaszczyźnie xoy mamy daną jakąś krzywą c, którą dowolna równoległa do osi y przecina tylko w jednym punkcie. Niech na krzywej będzie ruchomy punkt M, którego odcięta x zmienia się od a do b. Można uważać, że punkt M jest funkcją jednej tylko zmiennej x gdyż zawsze



rys.23.

$$y=\psi(x).$$