Jeżeli więc powyższe twierdzenie jest słuszne dla równań rzędu drugiego, to jest słuszne i dla równań rzędu trzeciego, a stąd i dla równań stopnia czwartego i t.d.

RÓWNANIA LINJOWE REDUKOWANE O SPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH.

Dane jest równanie linjowe:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

gdzie $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ są to liczby stałe. Uczynimy zadość temu równaniu, podstawiając $y = e^{kx}$ i dobierając odpowiednią wartość dla k. Wówczas

$$y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}, \cdots\cdots y^{(n)} = k^n \cdot e^{kx};$$

dane rownanie przyjmie postać:

$$e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} k + a_n) = 0.$$

Czynnik e^{kx} jest naogół różny od zera; musi więc być

$$f(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Równanie $f(k) = 0$ nazywa się **r ó w n a n i e m c h a r a k t e r y s t y c z n y m** danego równania linjowego. Jest to zwykłe równanie algebraiczne n-go stopnia. Napisać je można wprost, zastępując w danym równaniu y przez k, zaś rząd pochodnej przez równy jej wykładnik potęgi.

Z równania charakterystycznego znajdziemy dla k n wartości: $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$, którym odpowiada n całek szczególnych równania danego.

Załóżmy, że wszystkie wartości $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ są różne od siebie i zbadajmy, czy otrzymane całki szczególne

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y_3 = e^{k_n x}$$

tworzą układ zasadniczy. W tym celu utworzymy wrońskian:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots\ldots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \ldots\ldots & k_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ k_2^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots\ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot e^{k_3 x} \ldots\ldots\ldots\ldots e^{k_n x}$$

*) Lecz ostatni wiersz powinien być: k_1^{n-1} k_2^{n-1} ..... k_n^{n-1}

Wyznacznik powyższy jest równy iloczynowi

$$\Pi(k_i - k_j) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_3) \ldots\ldots (k_2 - k_3)(k_2 - k_4) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

/ Π jest symbolem iloczynu/. Każdy z tych czynników jest różny od zera, więc i $\Pi(k_i - k_j) \neq 0$ oraz $W \neq 0$. Otrzymane całki szczególne tworzą zatym układ zasadniczy. Całką ogólną danego równania będzie:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n e^{k_n x}$$

Jeżeli równanie charakterystyczne posiada jakiś pierwiastek zespolony $k_1 = a + bi$, to musi posiadać również pierwiastek $k_2 = a - bi$. Całkami szczególnemi są wówczas:

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}\cdot e^{bix} = e^{ax}\cdot(\cos bx + i\sin bx) = e\ \ \cos bx + ie\ \sin bx,$$

$y_1 = e^{ax}\cos bx + i e^{ax}\sin bx$ oraz $y_2 = e^{ax}\cos bx -$
$- i e^{ax}\sin bx.$

Aby w wyrażeniu dla całki ogólnej usunąć liczby urojone, zamiast całki szczególnej y_1 bierzemy kombinację linjową $\frac{y_1+y_2}{2} = e^{ax}\cos bx$ zaś zamiast y_2 bierzemy $\frac{y_1-y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$.

<u>P r z y k ł a d .</u> Mamy równanie:

$$y''' + y = 0.$$

Równaniem charakterystycznem jest tu $k^3 + 1 = 0$, skąd

$$k_1 = -1; \quad k_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; \quad k_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Całkami szczególnemi są

$$y_1 = e^{-x}; \quad y_2 = e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}; \quad y_3 = e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}.$$

Mamy

$$y_2 = e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

$$y_3 = e^{\frac{x}{2}} : e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

Zamiast y_2 weźmiemy kombinację:

$$\frac{y_2+y_3}{2} = e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

zaś zamiast y_3:

$$\frac{y_2-y_3}{2i} = e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Całkę ogólną danego równania będzie więc:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy pomiędzy pierwiastkami równania charakterystycznego mamy pierwiastki wielokrotne. Niech np. z pośród pierwiastków: k_1, k_2, ... k_n będzie $k_1 = k_2$.

Ponieważ $e^{k_1 x} = e^{k_2 x}$, więc dla danego równania różniczkowego mamy właściwie tylko $n-1$ całek szczególnych. Aby jednak mieć n całek szczególnych, założymy, że na razie $k_1 \neq k_2$ oraz że $k_2 \to k_1$. Chodzi teraz o utworzenie takiej kombinacji linjowej z całek $e^{k_1 x}$ i $e^{k_2 x}$, ażeby otrzymana kombinacja była dla $k_2 \to k_1$ nową całką szczególną danego równania. Tworzymy wyrażenie:

$$\frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1}.$$

Granicą jego dla $k_2 \to k_1$ jest

różniczkując względem K, x jako stałą uważając

$$\lim_{k_2 \to k_1} \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1} = \frac{de^{k_1 x}}{dk_1} = \underline{\underline{x e^{k_1 x}}}.$$

Pochodna ta jest nową całką szczególną danego równania. Mamy więc razem n całek szczególnych:

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = x e^{k_1 x};\ y_3 = e^{k_3 x};\ \ldots\ldots\ldots\ y_n = e^{k_n x}.$$

Całką ogólną w tym przypadku jest

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{k_1 x} + c_3 e^{k_3 x} + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{k_n x}.$$

Udowodnimy to teraz dla przypadku ogólnego. Niech k będzie pierwiastkiem p-krotnym. Mamy dowieść, że funkcje

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ \ldots\ldots\ldots\ x^{p-1}e^{kx}$$

są całkami szczególnemi danego równania.

Uczyńmy $y=z\cdot e^{kx}$. Wtedy $y'=(z'+zk)e^{kx}$;

$$y''=(z''+2z'k+zk^2)e^{kx};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=[z^{(n)}+nz^{(n-1)}k+\frac{n(n-1)}{2}z^{(n-2)}k^2+\ldots\ldots\ldots +nz'k^{n-1}+zk^n]e^{kx}.$$

Po podstawieniu tych funkcji do danego równania otrzymamy:

$$\{z^{(n)}+z^{(n-1)}(a_1+nk)+\ldots\ldots\ldots+z'[nk^{n-1}+(n-1)k^{n-2}a_1+ +(n-2)k^{n-3}a_2+\ldots\ldots\ldots+2k\cdot a_{n-2}+a_{n-1}]+z\cdot f(k)\}\cdot e^{kx}=0,$$

lub:

$$[z^{(n)}+\frac{f^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}z^{(n-1)}+\frac{f^{(n-2)}(k)}{(n-2)!}z^{(n-2)}+\ldots\ldots\ldots+ +\frac{f''(k)}{2}z''+\frac{f'(k)}{1}z'+z\cdot f(k)]e^{kx}=0.$$

Stąd

$$z^{(n)}+\frac{f^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}z^{(n-1)}+\ldots\ldots\ldots+\frac{f'(k)}{1}z'+z\cdot f(k)=0.$$

Ponieważ założyliśmy, że k jest p-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc

$$f(k)=0;\quad f'(k)=0;\quad \ldots\ldots\ldots\ f^{(p-1)}(k)=0.$$

Z wyżej napisanego równania pozostanie zatem

$$z^{(n)} + \frac{f^{(n-1)}(k)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \dots\dots + \frac{f^{(p)}(k)}{p!} z^{(p)} = 0.$$

Temu zaś równaniu uczynimy zadość, jeżeli jako z obierzemy taką funkcję, żeby $\frac{d^p z}{dx^p} = 0$, gdyż tym bardziej wtedy będą zerami pochodne rzędu wyższego niż p. Z tego wynika, że możemy z przedstawić w postaci /najogólniej/:

trójmianu np
pochodna trzecia
ax^2+bx+c dopiero = zero.

$$z = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots\dots + c_p x^{p-1};$$

wówczas

$$y = (c_1 + c_2 x + \dots\dots + c_p x^{p-1}) e^{kx}.$$

<u>P r z y k ł a d .</u> Mamy równanie:

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Podstawiając $y = e^{kx}$, otrzymamy równanie charakterystyczne:

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0,$$

skąd znajdziemy:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = -1.$$

Całkami szczególnemi danego równania są więc:

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = xe^x; \quad y_3 = e^{-x};$$

zaś całką ogólną jest

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}.$$

RÓWNANIE LINJOWE EULERA.

Równania Eulera są spokrewnione z równaniami o spółczynnikach stałych. Postacią ogólną tych równań jest:

$$y^{(n)}+\frac{a_1}{x}y^{(n-1)}+\frac{a_2}{x^2}y^{(n-2)}+\dots\dots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}y'+\frac{a_n}{x^n}y=0,$$

gdzie $a_1, a_2, \dots\dots a_n$ są to liczby stałe. Można oczywiście pomnożyć wszystkie wyrazy przez x^n :

$$/1/ \quad x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots\dots\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=0.$$

Równanie Eulera sprowadzić możemy do równania o spółczynnikach stałych, podstawiając $x=e^t$, czyli $t=\log x$, skąd $dt=\frac{dx}{x}$, $dx=x\,dt$. Mamy więc

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt},$$

a zatym

$$xy'=\frac{dy}{dt}.$$

Następnie

$$y''=\frac{dy'}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

Można dowieść zapomocą indukcji, że iloczyn x^p przez pochodną $y^{(p)}$ będzie równy pewnej funkcji linjowej zmiennych $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... $\frac{d^py}{dt^p}$.

Podstawiając te wartości do równania /1/, otrzymamy równanie o współczynnikach stałych:

$$/2/ \quad \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots\dots\dots + A_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = 0,$$

którego całką ogólną jest

$$y = e^{kt}.$$

A zatem dane równanie /1/ posiadać będzie całkę ogólną:

$$y = e^{k \log x} = (e^{\log x})^k = (x)^k.$$

Kolejne pochodne funkcji $y = x^k$ są równe:

$$y' = kx^{k-1}; \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}; \dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = k(k-1)\dots\dots\dots(k-n+1)x^{k-n}$$

Podstawmy te wartości do równania /1/:

$$x^n k(k-1)\dots\dots(k-n+1)x^{k-n} + a_1 x^{n-1} k(k-1)\dots\dots(k-n+2)x^{k-n+1} +$$

$$+ \dots\dots\dots + a_{n-1}\, x k x^{k-1} + a_n x^k = 0.$$

Ponieważ we wszystkich równaniach występuje x^k więc możemy je wynieść przed nawias:

$$x^k[k(k-1)\dots\dots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\dots\dots\dots(k-n+2) +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots + a_{n-1}k + a_n] = 0.$$

Pierwszy czynnik do zera przyrównywany być nie może. Przyrównywując do zera czynnik drugi otrzymamy równanie n-go stopnia zmiennej k :

$$/3/ \quad f(k) = 0.$$

Jest to równanie charakterystyczne dla równań typu

Eulera. Posiada ono n pierwiastków: $k_1, k_2, \ldots k_n$.

Jeżeli wszystkie pierwiastki są różne, wtedy funkcje $x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots x^{k_n}$ tworzą układ n całek szczególnych równania /1/. Całką ogólną jest wówczas:

$$y = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + \ldots + c_n x^{k_n}.$$

Jeżeli jakiś pierwiastek k jest p-krotny, to przy rozwiązywaniu równania o spółczynnikach stałych /2/ otrzymamy całki:

$$e^{kt}, \; te^{kt}, \; t^2 e^{kt}, \ldots t^{p-1} e^{kt},$$

zaś równanie /1/ będzie miało całki

$$x^k, \; \log x \cdot x^k, \; (\log x)^2 \cdot x^k, \ldots (\log x)^{p-1} \cdot x^k.$$

Jeżeli w równaniu charakterystycznym /3/ pierwiastek k_1 jest zespolony, czyli $k_1 = a + bi$, wówczas musi być także pierwiastek $k_2 = a - bi$. Mamy wtedy całki szczególne równania /1/:

$$x^{a+bi} = e^{(a+bi)\log x} = e^{a \log x} \cdot e^{bi \log x} =$$

$$= e^{a \log x}\left[\cos(b \log x) + i \sin(b \log x)\right]$$

czyli

$$x^{a+bi} = x^a \cos(b \log x) + i\, x^a \sin(b \log x)$$

oraz

$$x^{a-bi} = x^a \cos(b \log x) - i\, x^a \sin(b \log x).$$

Aby wyrugować i, przyjmujemy za całki szczególne następujące kombinacje linjowe powyższych całek:

$$y_1 = x^a \cos(b \log x);$$
$$y_2 = x^a \sin(b \log x).$$

Przykład: Dane jest równanie:

$$x^2 y'' - x y' + y = 0,$$

Piszemy równanie charakterystyczne:

$$k(k-1) - k + 1 = 0,$$

czyli

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Posiada ono pierwiastek dwukrotny równy jedności:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1.$$

A zatem całkami szczególnymi danego równania będą:

$$y_1 = x; \quad y_2 = x \log x;$$

a całką ogólną będzie

$$y = c_1 x + c_2 x \log x.$$

RÓWNANIE LINJOWE PEŁNE.

Dane jest równanie linjowe pełne:

$$/1/ \qquad F(y) = X(x),$$

gdzie $F(y)$ oznacza wyrażenie linjowe:

$$F(y) = y^{(n)} + X_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_{n-1}(x) \cdot y' + X_n(x) \cdot y$$

Niech Y będzie całką ogólną równania redukowanego:

$$/2/ \qquad F(y) = 0,$$

zaś Y_1 jakąkolwiek całkę szczególną równania pełnego /1/

czyli niech

$$F(Y) = 0, \quad F(Y_1) = X(x).$$

Suma tych równań, ponieważ równanie linjowe posiada własności rozdzielności, wynosi:

$$/3/ \quad F(Y) + F(Y_1) = F(Y + Y_1) = X(x).$$

Całka ogólna równania redukowanego przedstawia się jako:

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots\dots + c_n y_n.$$

Dodając do tego Y_1 mamy:

$$y = Y + Y_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots\dots + c_n y_n + Y_1.$$

Widzimy, że funkcja y posiada n stałych, oraz czyni zadość równaniu pełnemu /3/. A zatym $y = Y + Y_1$ jest całką ogólną danego równania /1/.

Otrzymamy więc całkę ogólną równania pełnego, dodając do jakiejkolwiek całki szczególnej tego równania całkę ogólną równania redukowanego.

Jeżeli w równaniu pełnym /1/ prawa strona ma postać:

$$X(x) = P(x) + Q(x) + R(x),$$

wtedy zamiast szukać całki ogólnej równania /1/ można znaleźć rozwiązania szczególne równań:

$$F(y_1) = P(x), \quad F(y_2) = Q(x), \quad F(y_3) = R(x)$$

i dodać je do siebie. Suma $y_1 + y_2 + y_3$ będzie całką ogólną równania pełnego, gdyż na zasadzie rozdzielności mamy:

$$F(y_1+y_2+y_3)=F(y_1)+F(y_2)+F(y_3)=X(x).$$

Istnieją dwie ogólne metody rozwiązywania równania pełnego przez sprowadzenie do kwadratur, gdy dane jest rozwiązanie równania redukowanego; pierwszą z nich podał Lagrange, drugą Cauchy.

W niektórych wypadkach wygodniej jest nie używać metod ogólnych a stosować sposoby szczególne. Tyczy się to głównie równań o spółczynnikach stałych i równań Eulera.

Niech będzie dane równanie o spółczynnikach stałych:

$$/1/ \qquad y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots\dots+a_{n-1} y'+a_n y=X(x),$$

gdzie $a_n \neq 0$. Przypuśćmy, że $X(x)=P_m(x)$ jest pewnym wielomianem stopnia m-go. Całką szczególną danego równania jest wielomian $y=Q_m(x)$ tego samego stopnia. Posiada on $m+1$ spółczynników nieoznaczonych, które można utożsamić ze spółczynnikami przy odpowiednich potęgach wielomianu $X(x)$.

Gdy $a_n=0$, $a_{n-1}=0 \dots\dots a_{n-p+1}=0$, to z danego równania pozostanie

$$/2/ \qquad y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\dots\dots+a_{n-p} y^{(p)}=X(x).$$

Oznaczając $y^{(p)}=z$, otrzymamy równanie typu wyżej rozpatrzonego:

$$z^{(n-p)} + a_1 z^{(n-p+1)} + \dots\dots\dots + a_{n-1} z = X(x),$$

którego rozwiązaniem jest

$$z = Q_m(x).$$

Całkując to p razy, znajdziemy:

$$y = R_{m+p}(x).$$

gdy $p = 0$ $y = R_m(x)$ gdy równanie nie posiada

Przypuśćmy teraz, że wyrażenie $X(x)$ jest kształtu $e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$ czyli że dane jest równanie

$$/1/ \qquad F(y) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x).$$

Sprowadzimy je do typu poprzedniego przez podstawienie $y = e^{\alpha x} \cdot z$. Oznaczając przez $f(\alpha)$ wielomian charakterystyczny równania wyjściowego (I), będziemy mieli:

n-tego pochodne lewej strony równania (I)

$$F(e^{\alpha x} \cdot z) = e^{\alpha x} \left\{ \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} z^{(n)} + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \dots\dots\dots + \frac{f'(\alpha)}{1} z' + f(\alpha) \cdot z \right\} = e^{\alpha x} \cdot P_m(x).$$

Po skróceniu przez $e^{\alpha x}$ otrzymamy równanie linjowe pełne o spółczynnikach stałych, które rozwiązać potrafimy.

Łatwo spostrzedz, że jeśli $f(\alpha) \neq 0$, czyli gdy α nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, to z jest wielomianem tego samego stopnia, co $P(x)$.

czyli stopnia m .

Gdy $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$, to z wielomianem stopnia $m+1$. Wogóle, gdy $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, ... $f^{(p)}(\alpha)\neq 0$, czyli gdy α jest p -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to z jest wielomianem stopnia $m+p$.

Ażeby więc rozwiązać równanie /1/, należy przedstawić y w postaci iloczynu $e^{\alpha x}$ przez wielomian stopnia znanego o spółczynnikach nieoznaczonych, a następnie utworzyć pochodne i podstawić do równania drugiego. Przez przyrównanie odpowiednich spółczynników wyznaczamy spółczynniki nieznane, a przez to znajdziemy całkę szczególną równania pełnego, a następnie szukane rozwiązanie ogólne.

To samo dotyczy równań pełnych typu Eulera:

$$F(y)=P_m[\log x]$$

z tą różnicą, że tam gdzie w podobnym równaniu o spółczynnikach stałych było x , tutaj jest $\log x$. Całką szczególną jest pewien wielomian względem $\log x$: $y_1=Q_m(\log x)$, którego stopień określić możemy podobnie, jak w równaniu o spółczynnikach stałych.