$$= 2c\iint_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy =$$

$$= 2c\int_{-a}^{+a}dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Obliczymy:

$$\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{1}{2}y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} + $$
$$+\frac{b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

biorąc tę całkę w odpowiednich granicach, otrzymamy

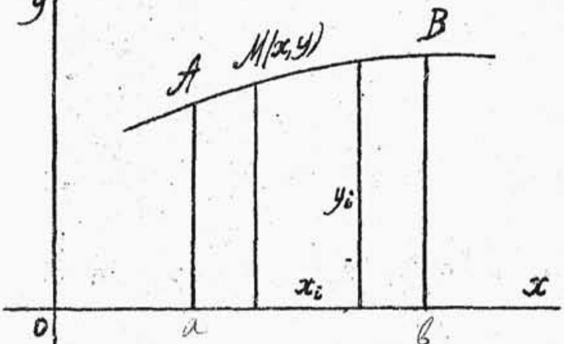
$$\frac{\pi b}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

tak, iż

$$v = \pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \tfrac{4}{3}\pi abc.$$

Gdy $a=b=c=r$, otrzymamy wzór, wyrażający objętość kuli: $v=\tfrac{4}{3}\pi r^3$.

CAŁKI KRZYWOLINJOWE. Przypuśćmy, że na płaszczyźnie xoy mamy daną jakąś krzywą c, którą dowolna równoległa do osi y przecina tylko w jednym punkcie. Niech na krzywej będzie ruchomy punkt M, którego odcięta x zmienia się od a do b. Można uważać, że punkt M jest funkcją jednej tylko zmiennej x gdyż zawsze



rys.23.

$$y=\psi(x).$$

Całkę jakiejś funkcji $f(x,y)$ w granicach od a do b :

$$\int_a^b f[x,\psi(x)]\,dx$$

będziemy oznaczali przez

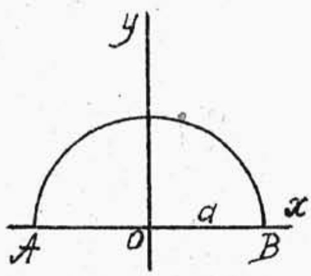
$$\int_c f(x,y)\,dx$$

i nazwiemy całkę krzywolinjową wzdłuż łuku c .

Niech np. będzie dane półkole c o promieniu a . Tutaj $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Całką krzywolinjową jakiejś funkcji $f(x,y)$ wzdłuż łuku c jest

$$\int_c f(x,y)\,dx=\int_{-a}^{+a} f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$$

/gdyż c jest to łuk od A do B /.



rys.24.

Określimy całkę krzywolinjową bezpośrednio:

$$\int_c f(x,y)\,dx=\lim\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Stąd widać, że całka krzywolinjowa nie jest pojęciem zasadniczem nowem, lecz daje się sprowadzić do całki prostolinjowej. Jest to właściwie tylko nowe, a w wielu razach wygodne znakowanie.

Krzywą c można wyrazić zapomocą równań parametrycznych:

$$x=\varphi(t)\,;\quad y=\psi(t)\,;$$

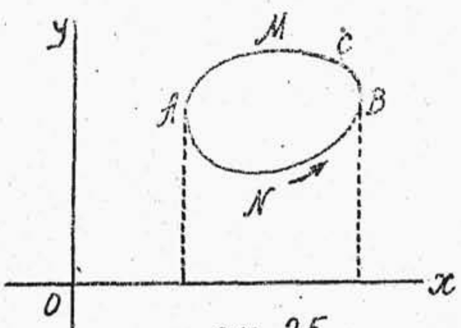
przyczem

$$t_0\leq t\leq t_1$$

Wówczas

$$\int_c f(x,y)\,dx=\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Pojęcie całki krzywolinjowej można rozszerzyć dla konturu zamkniętego. Całka krzywolinijna w tym wypadku będzie sumą pewnej ilości całek tego rodzaju co poprzednich. Np. /patrz rysunek/ całka krzywolinjowa $\int_{C_1}$ będzie sumą dwu całek krzywolinjowych wzdłuż łuków: 1/ ANB i 2/ wzdłuż łuku BMA. Przyjmiemy tu pewien kierunek za dodatni, mianowicie taki, jak na kole trygonometrycznym, t.j. przeciwny niż ruch wskazówki zegarowej. Kierunek całkowania zaznaczamy zwykle przy symbolu całki /wystarczy, oczywiście, zaznaczać wyłącznie jeden kierunek, mianowicie ujemny/:



rys. 25.

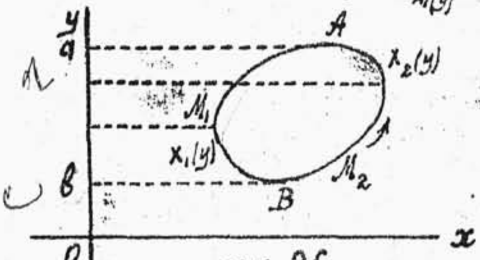
$$\int_{C_1} f(x,y)\,dx = -\int_{C_1} f(x,y)\,dx.$$

Przy oznaczaniu kierunku mogą nieraz powstać trudności, gdy kontur sam się ze sobą przecina. W takich razach jednak rozbijamy go na części, co do których już żadna wątpliwość powstać nie może.

<u>TWIERDZENIE GREEN'a</u> pozwala nam sprowadzić niektóre całki podwójne do pojedyńczych całek krzywolinjowych.

Niech będzie dana całka podwójna $\iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$. Przekształcimy ją w sposób następujący /gdzie D obszar ograniczony konturem C/:

$$\iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d dy \, Q(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} =$$



rys. 26.

$$= \int_c^d [Q(x_2,y) - Q(x_1,y)]\,dy = \int_c^d Q(x_2,y)\,dy - \int_c^d Q(x_1,y)\,dy = \int_{C_{BM_2A}} Q(x_2,y)\,dy - \int_{C_{BM_1A}} Q(x_1,y)\,dy.$$

Lecz całka $\int_{C_{BM_1A}} Q(x_1,y)\,dy$ jest równa $-\int_{C_{AM_1B}} Q(x_1,y)\,dy$. A zatem

$$\iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{C_{BM_2A}} Q(x_2,y)\,dy + \int_{C_{AM_1B}} Q(x_1,y)\,dy.$$

$\int_{C_{BM_2A}}$ oraz $\int_{C_{AM_1B}}$ dają w sumie całkę krzywolinjową wzdłuż całego konturu C;

$$\iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{C} Q(x,y)\,dy.$$

Tak więc sprowadziliśmy całkę podwójną do pojedyńczej całki krzywolinjowej.

Przypuśćmy teraz, że mamy całkę $\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. Przekształcając podobnie jak poprzednio, otrzymamy:

rys. 27.

$$\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b P(x,y_2)\,dx - \int_a^b P(x,y_1)\,dx.$$

Lecz znowu:

$$\int_a^b P(x,y_2)\,dx = \int_{C_{AM_2B}} P(x,y)\,dx = -\int_{C_{BM_2A}} P(x,y)\,dx$$

$$\int_a^b P(x,y_1)\,dx = \int_{C_{AM_1B}} P(x,y)\,dx$$

A zatem:

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{C_{BM_2A}} P(x,y)\,dx - \int_{C_{AM_1B}} P(x,y)\,dx\,,$$

czyli

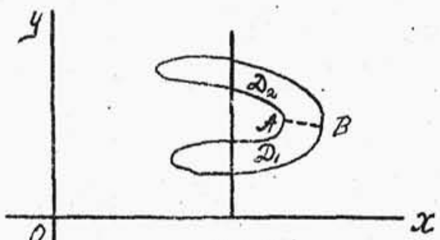
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{C_1} P(x,y)\cdot dx = \int_{C_1} P(x,y)\,dx.$$

Z połączenia obu wyprowadzonych wzorów wynika równość:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx\,dy = \int_{C_1} \{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\}\,,$$

która właśnie nosi nazwę wzoru Green'a.

Gdyby kontur, ograniczający kontur całkowania, przecinał się z równoległą do osi y więcej niż w dwuch punktach /np. rys.28/, to podzielilibyśmy obszar na części, spełniające ten warunek, i dla każdej z tych części zastosowalibyśmy wzór powyższy. Tak więc jedynem ograniczeniem tego wzoru jest ciągłość funkcji.



rys. 28.

Zrobimy w tym miejscu pewną uwagę, dotyczącą różniczek zupełnych. Niech będzie mianowicie dana funkcja dwuch zmiennych: $z = f(x,y)$. Jej różniczka zupełna ma kształt:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

gdzie

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Mamy następnie: $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}$; $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}$;

skąd
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Gdy więc wyrażenie $p(x,y)dx + q(x,y)dy$ oznacza różniczkę zupełną, to wówczas zachodzi równość
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Jeżeli wyrażenie $Pdx + Qdy$ jest różniczką zupełną, albo jeżeli $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, to całka $\int_c \{Pdx + Qdy\}$ wzdłuż jakiegokolwiek konturu zamkniętego, wewnątrz którego funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ oraz ich pierwsze pochodne cząstkowe są ciągłe, równa się zeru.

Ze wzoru Green'a mamy:
$$\int_c \{Pdx + Qdy\} = \iint_\omega \left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} dx\,dy.$$

Lecz $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ z założenia jest zerem, więc i $\iint_\omega \left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\} dx\,dy$ jest zerem, a zatym
$$\int_c \{Pdx + Qdy\} = 0.$$

Łatwo również można wykazać słuszność twierdzenia odwrotnego.

J e ż e l i   c a ł k a $\int_c \{Pdx + Qdy\}$ w z d ł u ż k o n t u r u   z a m k n i ę t e g o c j e s t r ó w n a   z e r u ,   t o   w y r a ż e n i e $Pdx + Qdy$ j e s t   r ó ż n i c z k ą   z u p e ł n ą .

Istotnie, ze wzoru Green'a wynika, że jeżeli $\int_c \{Pdx + Qdy\}$ jest zerem, to również $\iint_{\omega} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx\,dy = 0$. Stąd zaś musi być:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Gdyby bowiem $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = A \neq 0$, to mielibyśmy sprzeczność.

Koniecznem więc jest, ażeby $A = 0$, czyli:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y},$$

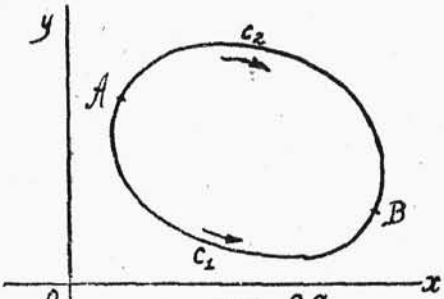
czyli wreszcie, aby $Pdx + Qdy$ było różniczką zupełną.

Twierdzenia powyższe mają duże zastosowanie w fizyce, termodynamice i t.p.

Niech będzie kontur zamknięty C i niech $Pdx + Qdy$ będzie różniczką zupełną. Wówczas

$$\int_c \{Pdx + Qdy\} = 0.$$

Całkę wzdłuż konturu c: $\int_c$ możemy rozbić na dwie



rys. 29.

całki: całkę wzdłuż konturu c_1: $\int_{c_1}$ oraz całkę wzdłuż konturu c_2: $\int_{c_2}$. W ostatniej wprowadzimy zmianę kierunku na ujemny. A zatym: $\int_{c_1} - \int_{c_2} = 0$, skąd

$$\int_{c_1}\{Pdx + Qdy\} = \int_{c_2}\{Pdx + Qdy\}.$$

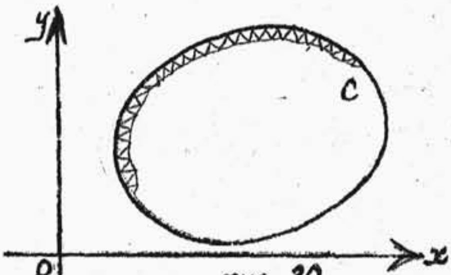
Widzimy więc, że gdy $Pdx + Qdy$ jest różniczką zupełną, to całka krzywolinjowa nie zależy od drogi całkowania /o ile między drogami niema p.osobliwego/; zależy więc wyłącznie od punktu początkowego A i końcowego B.

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA WYZNACZNIKA FUNKCYJNEGO.

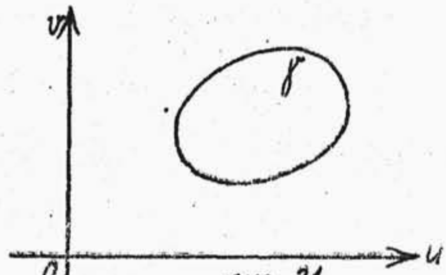
Niech będą dane dwie funkcje dwuch zmiennych:

$$/1/ \qquad \begin{cases} x = f(u,v); \\ y = \varphi(u,v). \end{cases}$$

Niech dalej ω oznacza pole, ograniczone krzywą zamkniętą c , na płaszczyźnie XOY, zaś ω' pole, ograniczone krzywą zamkniętą γ na płaszczyźnie UOV.



rys. 30.



rys. 31.

Wiadomo, że

$$\omega = \int_c x\,dy = \int_\gamma f(u,v)\cdot d\varphi(u,v),$$

lub inaczej

$$\omega = \int_\gamma \left\{ f(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot du + f(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv \right\},$$

co daje na zasadzie wzoru Green'a:

$$\omega = \iint_d \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + f\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\cdot\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} - f\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\cdot\partial u} \right\} du\cdot dv =$$

$$= \iint_d \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} \right\} du\cdot dv.$$

Pod znakiem ostatniej całki podwójnej mamy wyznacznik funkcyjny:

$$\Delta(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

a więc

$$\omega = \iint_\partial \Delta(u,v)\cdot du\cdot dv.$$

Stosując wzór na wartość średnią, napiszemy:

$$\omega = \Delta(u_0, v_0)\cdot\omega',$$

gdzie (u_0, v_0) punkt wewnątrz obszaru, ograniczonego krzywą γ', skąd wynika, iż

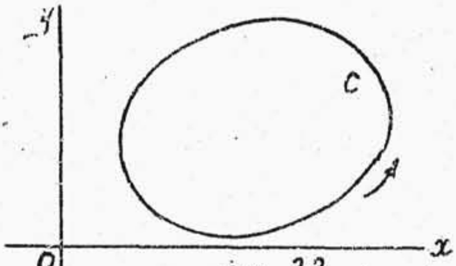
$$\frac{\omega}{\omega'} = \Delta(u_0, v_0)$$

Gdy przypuścimy teraz, że $\omega \to 0$ oraz $\omega' \to 0$, zaś $u_0 \to u$ i $v_0 \to v$, to w granicy

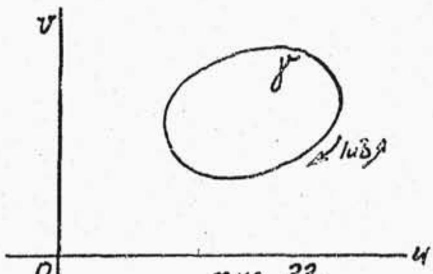
$$\lim_{\omega' \to 0} \frac{\omega}{\omega'} = \Delta(u,v).$$

Widzimy więc, że wyznacznik funkcyjny jest granicą stosunku pól, podobnie jak pochodna jest granicą stosunku odcinków.

Wyznacznik funkcyjny pozwala nam również określić zależność pomiędzy znakami pól ω i ω'. Jeżeli mianowicie $\Delta > 0$, to ω i ω' są tego samego znaku; gdy zaś $\Delta < 0$, to znaki tych pól są różne, czyli odpowiedniość jest wtedy prosta lub odwrotna. Prosta - gdy kontury odpowiadające są tego samego zwrotu;



rys. 32.



rys. 33.

odwrotna - gdy zwroty są przeciwne.

ZMIANA ZMIENNYCH.

Mamy dla całek zwyczajnych wzór następujący:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Uzasadnimy teraz analogiczny wzór dla całek podwójnych:

$$\iint_{\mathcal{D}} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}'} F[f(u,v),\varphi(u,v)]\cdot|\Delta(u,v)|\cdot du\cdot dv,$$

gdzie $\mathcal{D}'$ jest obszarem, odpowiadającym obszarowi $\mathcal{D}$, t.j. gdy punkt (u,v) jest w $\mathcal{D}'$, to odpowiedający mu na mocy wzorów $x=f(u,v);\ y=\varphi(u,v)$ punkt (x,y) znajduje się w $\mathfrak{D}$. Istotnie, z określenia całki podwójnej mamy:

$$\iint_{\mathfrak{D}} F(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum F(x_i,y_i)\cdot \omega_i ,$$

gdzie (x_i,y_i)-punkt narazie nieoznaczony wewnątrz obszaru ω_i. Niech $x=f(u,v)$; $y=\varphi(u,v)$.

W takim razie $\frac{\omega_i}{\omega'_i} = |\Delta(u_i,v_i)|$, skąd

$$\omega_i = |\Delta(u_i,v_i)|\cdot \omega'_i ,$$

zaś $x_i=f(u_i,v_i)$, $y_i=\varphi(u_i,v_i)$;

przeto,

$$\iint_{\mathfrak{D}} F(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum F[f(u_i,v_i),\ \varphi(u_i,v_i)]\cdot|\Delta(u_i,v_i)|\cdot\omega'_i ,$$

czyli

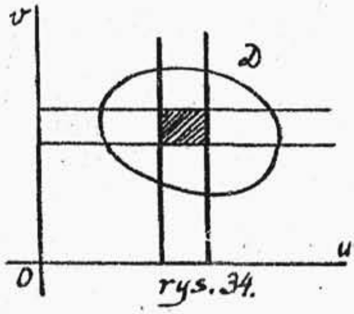
$$\iint_{\mathfrak{D}} F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathfrak{D}'} F[f(u,v),\ \varphi(u,v)]\cdot|\Delta(u,v)|\cdot du\cdot dv ,$$

c.b.d.d.

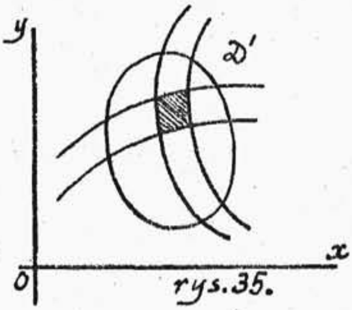
Powyższą całkę umiemy już rozwiązać przy pomocy dwuch kolejnych całkowań:

$$\int du \int F[f(u,v),\varphi(u,v)]\cdot|\Delta(u,v)|\cdot dv.$$

Rozchodzi się teraz o to, co staje się z obszarami $\mathfrak{D}$ i $\mathfrak{D}'$ podczas ustalania jednej ze zmiennych u i v. Łatwo zauważyć, że gdy u ma wartość stałą, zaś v się zmienia /na rysunku prosta, równoległa do osi OV/, wówczas x i y są funkcjami jednej tylko zmiennej, wyrażają więc pewną krzywą /jako równania parametryczne/, odpowiadającą prostej na poprzednim rysunku. Podobnie, prostej równoległej do osi Ou / v - stałe/ odpowiada jakaś inna krzywa.



rys.34.

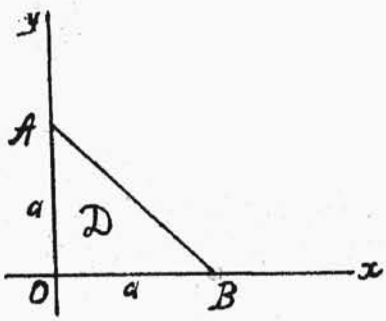


rys.35.

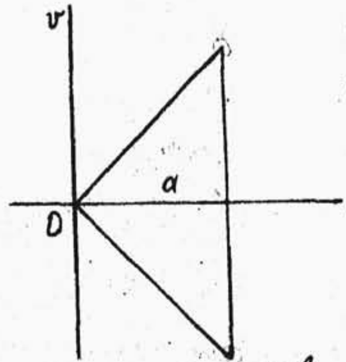
Nadając dla u i v różne wartości, t.zn. prowadząc na pierwszym rysunku proste równoległe do osi Ou i Ov, otrzymamy na drugim rysunku dwa układy krzywych, które podzielą obszar D' na szereg poletek, ograniczonych równoległobokami krzywolinjowemi i odpowiadających prostokącikom, na jakie podzielony został obszar D.

PRZYKŁAD. Dana jest całka $\iint xy\,dx\,dy$, ograniczona na pole trójkąta równoramiennego AOB, zbudowanego na osiach spółrzędnych:

$$0 \leq x \leq a$$
$$0 \leq y \leq a-x.$$



rys.36a



rys.36b.

Wprowadzamy następnie nowe zmienne u i v:

$$x = \frac{u+v}{2}; \quad y = \frac{u-v}{2};$$

czyli że

$$u = x+y; \quad v = x-y.$$

Łatwo można znaleźć nowy obszar całkowania przy nowych zmiennych. Obszar ten wyrazi się przez nierówności: $0 \leq u \leq a; \quad -u < v < u$. Obliczmy następnie wartość wyznacznika funkcyjnego:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

A więc $|\Delta| = \frac{1}{2}$. Wobec tego:

$$\iint xy\,dx\,dy = \iint \frac{u^2-v^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot du \cdot dv = \frac{1}{8}\int_0^a du \int_{-u}^{+u} (u^2-v^2)\,dv.$$

Ponieważ

$$\int_{-u}^{+u} (u^2-v^2)\,dv = \int_{-u}^{+u} u^2 dv - \int_{-u}^{+u} v^2 dv = \left| u^2 v - \frac{v^3}{3} \right|_{-u}^{+u} =$$

$$= u^3 - \frac{u^3}{3} + u^3 - \frac{u^3}{3} = \frac{4u^3}{3},$$

więc

$$\iint xy\,dx\,dy = \frac{1}{8}\int_0^a \frac{4u^3}{3}\,du = \frac{1}{6}\int_0^a u^3 du = \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{u^4}{4} \right|_0^a = \frac{a^4}{24}.$$

Od współrzędnych Kartezjuszowskich można przejść bez wielkich trudności do spółrzędnych biegunowych. Podstawimy mianowicie

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta;$$

wskutek czego całka podwójna przyjmie kształt

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r \cdot dr \cdot d\theta,$$

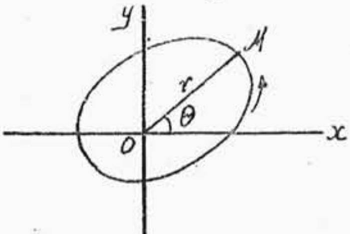
gdyż wyznacznik funkcyjny

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r}, & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta, & -r\sin\theta \\ \sin\theta, & r\sin\theta \end{vmatrix} = r.$$

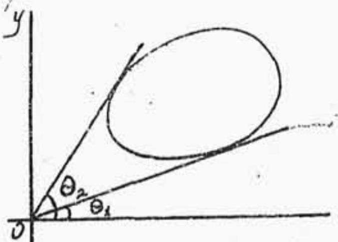
Nową całkę podwójną obliczymy, całkując najpierw dla r stałego, a następnie dla θ stałego.

$$\iint_{\mathcal{D}'} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_a^b d\theta \int_0^{f(\theta)} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr,$$

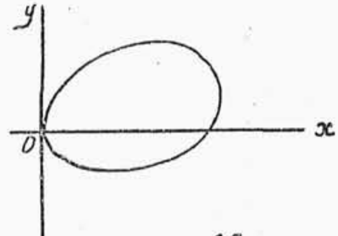
gdzie $r = f(\theta)$ jest to równanie krzywej C, ograniczają-



rys. 37.



rys. 38.



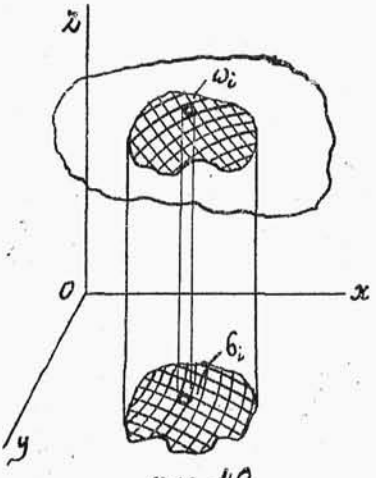
rys. 39.

cej obszar całkowania $\mathcal{D}'$ we współrzędnych biegunowych. Granice całkowania a i b zależą od położenia konturu względem początku układu: gdy początek leży wewnątrz konturu, $a = 0$, $b = 2\pi$, gdy początek układu leży zewnątrz $a = \theta_1$, $b = \theta_2$, a gdy początek układu leży na konturze $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = +\frac{\pi}{2}$.

OBLICZANIE PÓL.

Niech będzie dana jakaś powierzchnia $z = f(x,y)$. Obliczymy pole części tej powierzchni, zawartej wewnątrz walca, którego tworząca jest równoległa do osi z.

Przedewszystkiem określimy, co będziemy nazywali szukanym polem powierzchni krzywej. W tym celu podzielmy daną powierzchnię na poletka, zaś dany walec na małe walce. Obierzmy w każdym poletku jakiś punkt, przez który poprowadzimy płaszczyznę styczną do powierzchni, a właściwie tylko część tej płaszczyzny, jaka się mieści wewnątrz odpowiadającego małego walca. Granicę sumy tych małych czę-



rys. 40.

ści płaszczyzn, gdy wymiary poletek dążą do zera, będziemy nazywali polem danej powierzchni.

Oznaczmy pochodne cząstkowe funkcji $z = f(x,y)$ odpowiednio przez

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni w danym punkcie (x_i, y_i, z_i) będzie posiadało postać:

$$(X - x_i)\cdot p_i + (Y - y_i)\cdot q_i - (Z - z_i) = 0.$$

Wiadomo z geometrji analitycznej, że liczby p_i, q_i, -1 są proporcjonalne do dostaw kątów kierunkowych normalnej do powierzchni w tym samym punkcie (x_i, y_i, z_i). A ponieważ pomiędzy dostawami zachodzi związek: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, więc łatwo znajdziemy, że

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

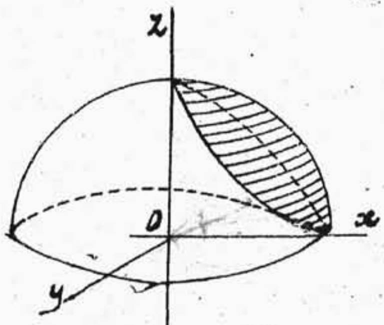
Oznaczmy pole jednego z poletek wyciętych walcem na płaszczyźnie stycznej do danej powierzchni przez ω_i, zaś pole rzutu tego poletka przez σ_i. W takim razie, jak wiadomo,

$\sigma_i = \omega_i \cdot \cos\gamma$, skąd $\omega_i = \frac{\sigma_i}{\cos\gamma} = \sigma_i \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}$.

Całkowite szukane pole P wyrazi się przez

$$P = \lim \sum_i \omega_i = \lim \sum_i \sigma_i \sqrt{1+p^2+q^2} = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dx\, dy.$$

PRZYKŁAD. Znaleźć pole powierzchni, jaką wytnie na półkuli walec. Niech równaniem kuli będzie:



rys.41.

$x^2+y^2+z^2=R^2$, zaś równaniem walca $x^2+y^2=R\cdot x$.

Obliczymy przedewszystkiem pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{z}=p;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}=q.$$

Szukane pole wyrazi się przez

$$P=\iint_{\mathfrak{D}}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\iint_{\mathfrak{D}}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=R\iint_{\mathfrak{D}}\frac{dx\,dy}{z}.$$

Powyższą całkę rozwiązujemy, sprowadzając ją do spółrzędnych biegunowych:

$$P=R\iint_{\mathfrak{D}}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=$$

$$=R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-R\sin\theta+R)\,d\theta=-2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta+2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=$$

$$=2R^2\Big|\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi R^2=-2R^2+\pi R^2.$$

Ostatecznie więc będziemy mieli: $P=(\pi-2)\cdot R^2$.

CAŁKI POTRÓJNE.

Niech będzie dana jakaś bryła $\mathfrak{D}$, wewnątrz której znajduje się punkt M o spółrzędnych x,y,z, oraz funkcja trzech zmiennych niezależnych $f(x,y,z)$. Można uważać $f(x,y,z)$ wprost za funkcję p. M i oznaczać przez $f(M)$. Rzutem da-