Otrzymana funkcja jest szukaną całką danego równania różniczkowego.

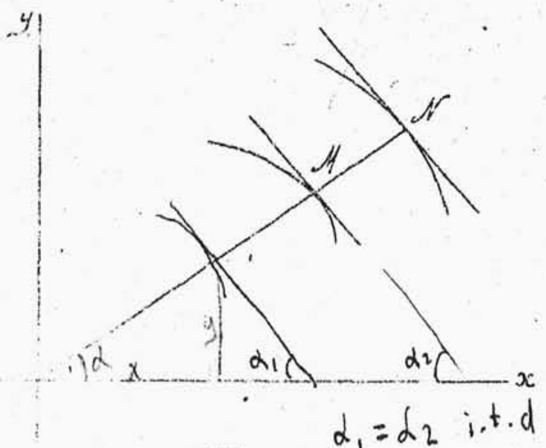
RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE.

Jednorodnem nazywa się równanie, w którem y i x wchodzą tylko za pośrednictwem stosunku $\frac{y}{x}$, czyli równanie kształtu

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Na to np., aby równanie $P(x,y)\,dx = Q(x,y)\,dy$ czyli $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, gdzie $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są wielomianami, było jednorodne, funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ muszą być odpowiednio równe: $P(x,y) = x^n \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $Q(x,y) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

W interpretacji gieometrycznej warunek jednorodności równania różniczkowego wyraża się w ten sposób, że styczne do krzywych /przedstawiających rozwiązanie danego równania/ w punktach, leżących na tym samym promieniu wodzącym, są do siebie równoległe. Wynika to stąd, że stosunek $\frac{y}{x} = tg\alpha$ jest dla wszystkich punktów na jednym promieniu wodzącym stały, a spółczynnik kierunkowy jest funkcją tego tylko stosunku $y' = f(tg\alpha)$. Tego rodzaju krzywe nazywają



rys. 62.

się j e d n o k ł a d n e m i . Z jednej krzywej można otrzymać inną przez podstawienie $X=kx$, $Y=ky$, gdzie X, Y są współrzędnemi jednej krzywej, zaś x, y drugiej / k - liczba stała/.

Rozwiązujemy równanie jednorodne, podstawiając $\frac{y}{x}=u$, czyli $y=ux$, skąd $y'=\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$.

A zatym

$$x\frac{du}{dx}+u=f(u);$$

$$x\,du=[f(u)-u]\,dx.$$

Więc

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{f(u)-u}.$$

Zmienne są tutaj już oddzielone. Całkując, mamy

$$\int\frac{dx}{x}+\log C=\int\frac{du}{f(u)-u},$$

gdzie $\log C$ jest stałą całkowania. Gdy oznaczymy $\int\frac{du}{f(u)-u}$ przez $\varphi(u)$, znajdziemy

$$\log x+\log C=\varphi(u),$$

skąd

$$Cx=e^{\varphi(u)},$$

czyli

$$Cx=e^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Jest to właśnie całka ogólna równania jednorodnego.

TRAJEKTORJE.

Trajektorjami nazywają się krzywe, przecinające daną rodzinę krzywych

$$/1/ \quad F(x,y,C)=0$$

pod kątem stałym θ. Gdy w szczególności kąt θ jest prosty, mamy trajektorje prostokątne, czyli ortogonalne.

Ażeby otrzymać równanie trajektorji prostokątnych, znajdujemy równanie różniczkowe rodziny /1/:

$$y'=f(x,y).$$

Oczywiście styczna do krzywych danej rodziny jest normalną do rodziny trajektorji prostokątnych i nawzajem. Gdy więc zastąpimy w równaniu $y'=f(x,y)$ y' przez $-\frac{1}{y'}$, to otrzymamy równanie różniczkowe trajektorji:

$$\boxed{y'=-\frac{1}{f(x,y)}}$$

Jeżeli będziemy mieli równanie danej rodziny w postaci:

$$\varphi(x,y,y')=0,$$

to trajektorje ortogonalne będą czyniły zadość równaniu:

$$\varphi(x,y,-\tfrac{1}{y'})=0.$$

Przykład. Znaleźć trajektorje prostokątne rodziny kół, których środki leżą na osi x i które są styczne do osi y, t.zn. rodziny:

$$/1/ \quad x^2+y^2-2cx=0.$$

Przedewszystkiem znajdujemy równanie różniczkowe tej rodziny: dzielimy równanie /1/ przez x:

$$x+\frac{y^2}{x}-2c=0;$$

różniczkujemy względem x :

$$1 + \frac{2y \cdot y' \cdot x - y^2}{x^2} = 0,$$

skąd

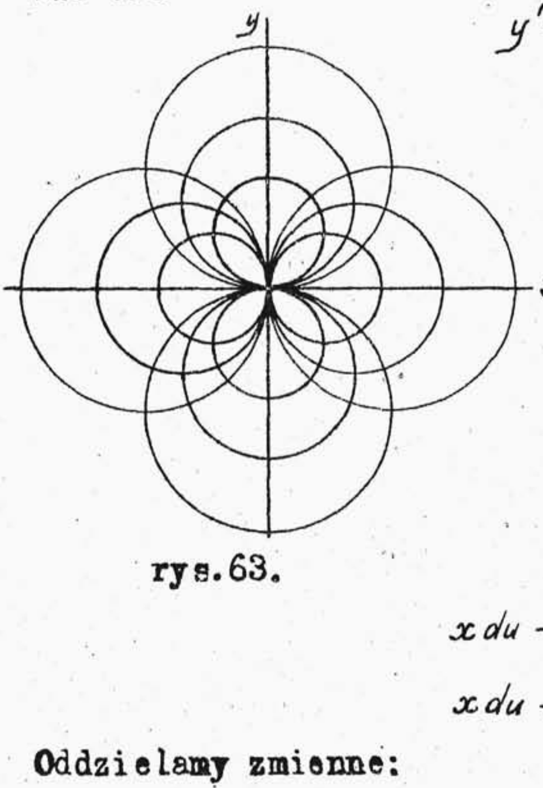
$$/2/ \qquad x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

Zastępując w tym równaniu y' przez $-\frac{1}{y'}$, otrzymamy równanie trajektorji prostokątnych:

$$/3/ \qquad y'(x^2 - y^2) = 2xy,$$

lub też

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$



rys.63.

Jest to równanie jednorodne, albowiem:

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Podstawmy $\frac{y}{x} = u$, skąd

$y = x \cdot u; \quad y' = x \cdot u' + u.$

A więc:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Stąd

$$x\,du - \frac{u^3 + u}{1 - u^2}\,dx = 0;$$

$$x\,du + \frac{u(u^2+1)}{u^2 - 1}\,dx = 0.$$

Oddzielamy zmienne:

$$\frac{u^2 - 1}{u(u^2+1)}\,du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Całkujemy:

$$\int \frac{u^2 - 1}{u(u^2+1)}\,du + \int \frac{dx}{x} = \log C.$$

Całkę $\int \frac{u^2 - 1}{u(u^2+1)}\,du$ znajdujemy przy pomocy rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{u^2-1}{u(u^2+1)} = \frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u}$$

Zatym

$$\int\frac{2u}{u^2+1}du - \int\frac{du}{u} + \int\frac{dx}{x} = \log C,$$

skąd

$$\log(u^2+1) - \log u + \log x = \log C,$$

czyli

$$\frac{(u^2+1)x}{u} = C.$$

Podstawiając znowu $u = \frac{y}{x}$ otrzymamy.

$$\frac{\frac{y^2}{x^2}+1}{\frac{y}{x}}\cdot x = C,$$

lub po przekształceniu:

$$\frac{x^2+y^2}{y} = C.$$

Zastępując C przez $2c$, napiszemy:

$$/4/ \qquad x^2+y^2-2cy=0.$$

Jest to równanie kół, stycznych do osi x i mających środki na osi y. Obróciwszy więc daną rodzinę /1/ o $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy dla niej trajektorje prostokątne.

Znalezienie równania trajektorji, przecinających daną rodzinę $F(x,y,C)=0$ nie pod kątem prostym, a pod dowolnym kątem θ, nie przedstawia również trudności. Jeżeli bowiem oznaczamy spółczynnik kątowy stycznej do krzywej danej rodziny w jakimś punkcie przez m_1, zaś spółczynnik kątowy stycznej do trajektorji w tym samym punkcie przez

m_1 , to wówczas:

$$tg\,\theta = \frac{m - m_1}{1 + m \cdot m_1},$$

skąd

$$tg\,\theta + m_1 = m(1 - m_1\, tg\,\theta),$$

więc

$$m = \frac{m_1 + tg\,\theta}{1 - m_1\, tg\,\theta}.$$

A zatym otrzymamy trajektorje, przecinające krzywe danej rodziny pod kątem θ , jeżeli zamiast równania różniczkowego tej rodziny $f(x,y,y')=0$ napiszemy:

$$f\left(x,y, \frac{y' + tg\,\theta}{1 - y'\,tg\,\theta}\right) = 0$$

i to równanie zcałkujemy.

RÓWNANIA LINJOWE.

Ogólną postacią zwyczajnego równania różniczkowego linjowego pierwszego rzędu jest

$$y' + X(x)\cdot y + X_1(x) = 0,$$

gdzie $X(x)$, $X_1(x)$ są funkcjami x . Gdy w przypadku szczególnym $X_1(x) \equiv 0$, mamy równanie linjowe z r e - d u k o w a n e :

$$y' + X(x)y = 0,$$

które łatwo się daje rozwiązać. Mianowicie

$$\frac{y'}{y} + X(x) = 0,$$

skąd

$$\int \frac{y'}{y}\,dx + \int X(x)\,dx = 0;$$

więc

$$\log y + \int X(x)dx = \log C;$$

i ostatecznie

$$y = C \cdot e^{-\int X(x)dx}.$$

W przypadku ogólnym, gdy mamy równanie różniczkowe pełne:

$$y' + X(x) \cdot y + X_1(x) = 0,$$

podstawiamy $y = z \cdot e^{-\int X(x)dx} = z \cdot u$ /gdzie $u = e^{-\int X(x)dx}$ jest całką równania zredukowanego: $u' + X(x) \cdot u = 0$ / oraz $y' = z \cdot u' + u \cdot z'$. Otrzymujemy:

$$z \cdot u' + u \cdot z' + X(x) \cdot z \cdot u + X_1(x) = 0;$$

stąd

$$u \cdot z' + X_1(x) + z[u' + X(x) \cdot u] = 0.$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest zerem, przeto:

$$u \cdot z' + X_1(x) = 0,$$

czyli

$$e^{-\int X(x)dx} \cdot \frac{dz}{dx} + X_1(x) = 0,$$

a stąd

$$dz + X_1(x) e^{+\int X(x)dx} dx = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie, w którym zmienne są oddzielone. Całkując je, znajdziemy:

$$z = -\int X_1(x) \cdot e^{\int X(x)dx} dx + C.$$

A zatem całką danego równania linjowego jest:

$$y = e^{-\int X(x)dx} \cdot \left[C - \int X_1(x) \cdot e^{\int X(x)dx} dx\right],$$

gdzie C - stała dowolna; występuje ona także w postaci linjowej, t.zn. w pierwszej potędze. Rozwiązanie równania jest więc kształtu: $y = \varphi(x)\cdot C + f(x)$.

Udowodnimy teraz, że jeżeli stała dowolna C występuje w równaniu rodziny krzywych w pierwszej potędze, to równanie różniczkowe tej rodziny jest linjowe.

Niech więc będzie dane równanie rodziny krzywych:

$$y = \varphi(x)\cdot C + f(x)$$

Stąd

$$C = \frac{y - f(x)}{\varphi(x)}.$$

Różniczkując obie strony tej równości, otrzymamy:

$$\frac{[y' - f'(x)]\cdot\varphi(x) - [y - f(x)]\cdot\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = 0.$$

A zatym

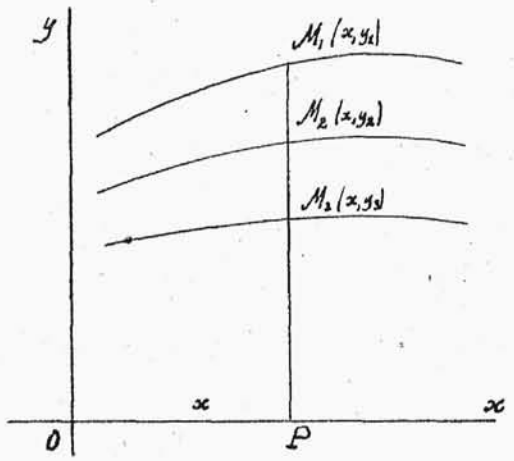
$$y'\cdot\varphi(x) - y\cdot\varphi'(x) - f'(x)\cdot\varphi(x) + f(x)\cdot\varphi'(x) = 0,$$

czyli

$$y' - y\cdot\underbrace{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}_{X(x)} + \underbrace{\left[\frac{f(x)\cdot\varphi'(x)}{\varphi(x)} - f'(x)\right]}_{X_1(x)} = 0.$$

Jest to równanie linjowe typu $y' + X(x)\cdot y + X_1(x) = 0.$

Z kształtu całki ogólnej równania linjowego: $y = \varphi(x)\cdot C + f(x)$ wynika pewien ważny wniosek. Weźmy mianowicie pod uwagę trzy całki szczególne, odpowiadające wartościom C_1 , C_2 , C_3 parametru C :



rys.64.

$$y_1 = \varphi(x)\cdot C_1 + f(x),$$
$$y_2 = \varphi(x)\cdot C_2 + f(x),$$
$$y_3 = \varphi(x)\cdot C_3 + f(x).$$

Przez odejmowanie znajdziemy, że

$$y_1 - y_2 = \varphi(x)\cdot(C_1 - C_2),$$
$$y_1 - y_3 = \varphi(x)\cdot(C_1 - C_3).$$

Stąd

$$\frac{M_1M_2}{M_1M_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 - C_3} = const.$$

Zatym mając dwie szczególne krzywe całkowe, możemy otrzymać wykreślnie inne, gdyż stosunek podziału /pojedyńczego/ punktów przecięcia się trzech krzywych całkowych równania linjowego z prostemi równoległemi do osi y-ów jest stały, niezależne od odciętej x .

Analitycznie wyrazimy to w sposób następujący: znając dwie całki szczególne równania linjowego, możemy otrzymać całkę ogólną bez całkowania. Istotnie, wystarczy rozwiązać równanie:

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} = C,$$

gdzie C jest stałą dowolną. Otrzymamy:

$$y - y_2 = Cy - Cy_3 \ ;$$
$$y(1 - C) = y_2 - Cy_3 \ ;$$

czyli całką ogólną jest

$$y = \frac{y_2 - Cy_3}{1 - C}.$$

Jeżeli nie znamy żadnej całki szczególnej równania linjowego, to, aby otrzymać całkę ogólną, musimy wykonać dwie kwadratury, t.j. dwa procesy całkowania, jak to wynika zresztą z kształtu całki ogólnej.

Przypuśćmy jednak, że znamy jedną całkę szczególną. Okażemy, że w tym przypadku będziemy mogli otrzymać całkę ogólną przy pomocy jednej tylko kwadratury. Otóż niech y_1 będzie daną całką szczególną równania

$$y' + X(x)\cdot y + X_1(x) = 0.$$

Podstawmy w to równanie $y = y_1 + z$.

$$y_1' + z' + X(x)\cdot y_1 + X(x)\cdot z + X_1(x) = 0.$$

Grupując odpowiednio wyrazy mamy:

$$\left[y_1' + X(x)\cdot y_1 + X_1(x)\right] + z' + X(x)\cdot z = 0.$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest zerém, gdyż y_1 jest całką danego równania. Zatym:

$$z' + X(x)\cdot z = 0,$$

czyli

$$\frac{dz}{dx} + X(x)\cdot z = 0,$$

lub też

$$\frac{dz}{z} + X(x)\cdot dx = 0.$$

Stąd

$$\log z + \int X(x)dx = \log C,$$

a następnie

$$z = Ce^{-\int X(x)dx}$$

Całką ogólną danego równania będzie więc

$$y = y_1 + C \cdot e^{-\int X(x)dx}.$$

Mamy tutaj istotnie jedną tylko kwadraturę.

Do równania linjowego można sprowadzić równanie ogólniejsze:

$$f'(y) \cdot y' + X(x) \cdot f(y) + X_1(x) = 0,$$

różniące się tym od niego, że zamiast zmiennej y występuje funkcja $f(y)$. Podstawiając $f(y) = z$, $f'(y) \cdot y' = z'$, otrzymamy równanie linjowe:

$$z' + X(x) \cdot z + X_1(x) = 0,$$

którego całką jest:

$$z = e^{-\int X(x)dx}\left[C - \int X_1(x) \cdot e^{\int X(x)dx} dx\right] = f(y).$$

RÓWNANIA BERNOULLI'ego.

Są to równania typu

$$y' + X(x) \cdot y + X_1(x) \cdot y^n = 0.$$

Można je łatwo sprowadzić do równań typu wyżej rozpatrzonego. Gdy bowiem podzielimy wszystkie wyrazy przez y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{X(x)}{y^{n-1}} + X_1(x) = 0,$$

a następnie podstawimy $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, $z' = \frac{(1-n) \cdot y'}{y^n}$, to otrzymamy równanie:

$$\frac{z'}{1-n} + X(x) \cdot z + X_1(x) = 0,$$

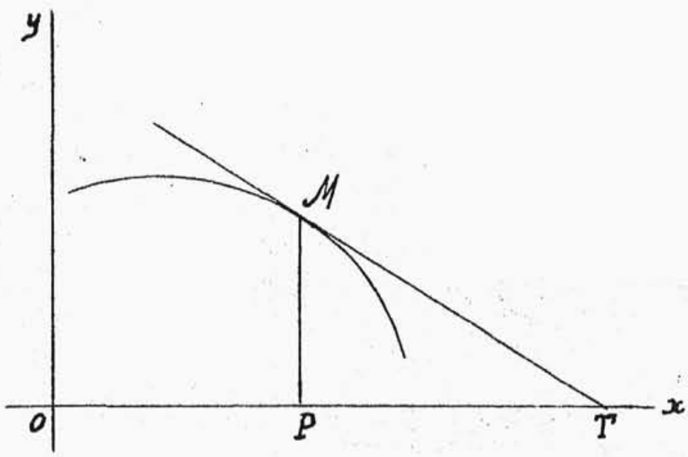
albo też

$$z' + (1-n)\cdot X(x)\cdot z + (1-n)\cdot X_1(x) = 0,$$

którego całką jest

$$e^{(n-1)\int X(x)dx}\left[C + (n-1)\int X_1(x) e^{(1-n)\int X(x)dx}\, dx\right] = y^{1-n}.$$

Przykład 1. Znaleźć krzywe, dla których odcinek podstycznej jest funkcją /daną/ odciętej.



rys.65.

Jak widzimy /z Δ MPT/ odcinek podstycznej $PT = \frac{y}{y'}$. Jest on funkcją $\varphi(x)$ odciętej x; stąd

$$\frac{y}{y'} = \varphi(x),$$

albo też

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\varphi(x)},$$

jest równaniem różniczkowym szukanej rodziny krzywych. Oddzielając w nim zmienne

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\varphi(x)}$$

i całkując

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{\varphi(x)} + \log C,$$

otrzymujemy

$$\log y = \int\frac{dx}{\varphi(x)} + \log C,$$

lub

$$y = C\cdot e^{\int\frac{dx}{\varphi(x)}}.$$

Przypuśćmy, że w przypadku szczególnym $\varphi(x) \equiv x$.

Wówczas

$$y = C \cdot e^{\int \frac{dx}{x}} = C \cdot e^{\log x},$$

czyli

$$y = Cx.$$

Otrzymaliśmy więc równanie prostej.

Gdy $\varphi(x) \equiv 2x$, mamy

$$y = C e^{\int \frac{dx}{2x}} = C \cdot e^{\frac{1}{2}\log x} = C\sqrt{x},$$

skąd

$$y^2 = C_1 x.$$

Otrzymaliśmy zatym parabolę.

Gdy $\varphi(x) \equiv n \cdot x$, otrzymujemy

$$y = C \cdot e^{\int \frac{dx}{n \cdot x}} = C\sqrt[n]{x},$$

skąd

$$y^n = C_1 x.$$

Krzywe, wyrażone przez to równanie, nazywają się wogóle parabolami.

<u>P r z y k ł a d 2.</u> Dana jest rodzina krzywych

$$/1/ \qquad x^m \cdot y^n = C.$$

Znaleźć trajektorje prostokątne.

Różniczkując równanie /1/, otrzymamy

$$m \cdot x^{m-1} \cdot y^n + n \cdot y^{n-1} \cdot y' \cdot x^m = 0,$$

skąd

$$y' = -\frac{m x^{m-1} \cdot y^n}{n \cdot y^{n-1} \cdot x^m},$$

a po skróceniu

$$/2/ \qquad y' = -\frac{my}{nx}$$

Jest to równanie różniczkowe danej rodziny. Zastępując y' przez $-\frac{1}{y'}$, otrzymamy równanie różniczkowe trajektorji:

$$/3/ \qquad y' = \frac{nx}{my}$$

lub

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nx}{my}.$$

Oddzielmy w nim zmienne:

$$my\,dy = nx\,dx$$

i je zcałkujemy:

$$\int my\,dy = \int nx\,dx + C.$$

Otrzymamy

$$\frac{my^2}{2} = \frac{nx^2}{2} + C,$$

skąd

$$my^2 = nx^2 + C_1,$$

albo

$$/4/ \qquad my^2 - nx^2 = C_1$$

Gdy $m = n = 1$ rodziny /1/ oraz /4/ wyrażają hyperbole równoboczne.

<u>Ć w i c z e n i e .</u> Znaleźć trajektorje prostokątne rodziny kół, przechodzących przez dwa dane punkty.
