$$q = q_0 e^u = q_0 t$$
$$p = p_0 e^u = p_0 t$$
$$z = z_0 e^{2u} = z_0 t$$
$$y = y_0 + p_0(t-1)$$
$$x = x_0 + q_0(t-1)$$

Ponieważ $p_0 q_0 = z_0$, więc $\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{(t-1)^2} = p_0 q_0 = z_0$, $(y-y_0)(x-x_0) = z_0(t-1)^2$.

Lecz $t = \sqrt{\frac{z}{z_0}}$. A więc np. $(y-y_0)(x-x_0) = z_0\left(\sqrt{\frac{z}{z_0}}-1\right)^2$ jest całką naszego równania. Utworzona ona jest przez zbiór wszystkich charakterystyk, wychodzących z punktu o spółrzędnych (x_0, y_0, z_0).

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE II-go RZĘDU.

Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu stanowią trudną, dotychczas zresztą mało zbadaną, dziedzinę matematyki.

Co do tych równań mogą być postawione dwa zagadnienia: Cauchy'ego i Dirichleta; oba mogą dotyczyć jednego i tego samego równania.

Niech będzie dane równanie:

$$/1/ \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

gdzie x i y są zmiennemi niezależnemi, z ich nieznaną funkcją, zaś $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

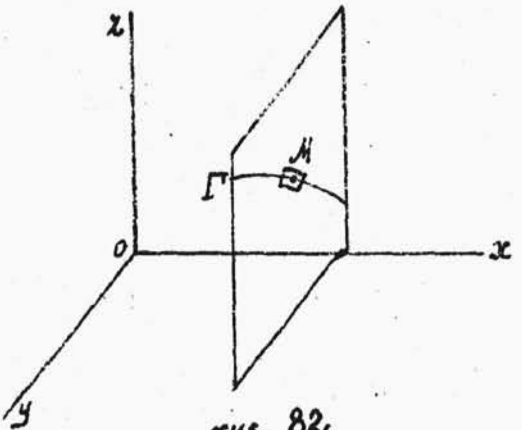
Zagadnienie Cauchy'ego polega na znalezieniu całki tego równania, spełniającej następujące warunki: dla $x=x_0$ funkcja $z(x,y)$, t.zn. szukana całka ma być identyczna z funkcją $\varphi(y)$, czyli $z(x_0,y)=\varphi(y)$; następnie pochodna $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, która jest oczywiście sama jakąś funkcją χ zmiennych niezależnych x i y, ma dla tejże wartości $x=x_0$ przyjąć wartość $\chi(x_0,y)=\psi(y)$. Powiemy krótko, że dla funkcji z dane jest $z_0=\varphi(y)$ oraz $p_0=\psi(y)$.

Na zasadzie powyższych danych możemy wyliczyć q_0, t.j. wartość pochodnej $\frac{\partial z}{\partial y}$ dla $x=x_0$. Mianowicie $q_0=\varphi'(y)$.

Mamy więc dla $x=x_0$ wartości funkcji z i jej pierwszych pochodnych cząstkowych.

W interpretacji gieometrycznej dana jest w płaszczyźnie równoległej do yoz krzywa Γ i w każdym jej punkcie M płaszczyzna styczna. Dowolny punkt powierzchni, w którym mamy daną płaszczyznę styczną do tej powierzchni będziemy nazywali e l e m e n t e m p o w i e r z c h n i o w y m. Warunki Cauchy'ego przedstawiają więc zbiór elementów powierzchniowych wzdłuż krzywej Γ, położonej w płaszczyźnie równoległej do yoz.

Z elementów powierzchniowych $\mathcal{E}(x,y,z,p,q)$ możemy tworzyć zbiory jednowymiarowe, t.j. takie, że x,y,z,p,q



rys. 82.

będą funkcjami jednego parametru u, oraz zbiory dwuwymiarowe, dla których x, y, z, p, q będą funkcjami dwuch parametrów u i v. Będziemy rozpatrywali tylko takie zbiory jednowymiarowe, które spełniają warunek

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

i zbiory dwuwymiarowe, dla których jest jednocześnie

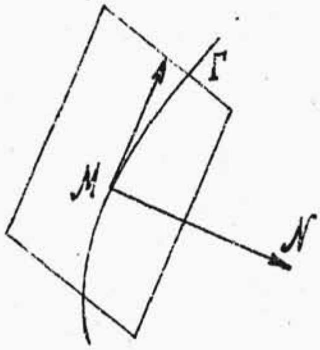
$$\frac{dz}{du} = p\,\frac{dx}{du} + q\,\frac{dy}{du}$$

$$\frac{dz}{dv} = p\,\frac{dx}{dv} + q\,\frac{dy}{dv}$$

Innemi słowy wiążemy elementy powierzchniowe ze sobą w ten sposób, że punkt elementu sąsiedniego leży na płaszczyźnie elementu poprzedniego.

Zobaczmy, co przedstawia gieometrycznie zbiór pierwszego wymiaru. Mamy pięć zmiennych x, y, z, p, q zależnych od parametru u. Zmienne x, y, z dają w przestrzeni pewną krzywą, zaś p i q w każdym punkcie tej krzywej płaszczyznę. Warunek $p\,dx + q\,dy = dz$ jest warunkiem prostopadłości prostych, z których jedna ma spółczynniki kierunkowe $p, q, -1$, druga dx, dy, dz.

Ostatnia z tych prostych jest, jak wiadomo, styczną do krzywej, a zatem płaszczyzna, należąca do elementu M, przechodzi przez styczną w tym punkcie.



rys. 83

W przypadku szczególnym, gdy zmienne x, y, z są wielkościami stałemi, a tylko p i q zależą od parametru u, mamy zamiast krzywej jeden punkt i w nim wszystkie płaszczyzny, styczne do pewnej powierzchni stożkowej.

Jeżeli przejdziemy do zbioru drugiego wymiaru, to tutaj te same pięć zmiennych będzie zależało od dwuch parametrów: u i v. Będziemy więc mieli nieskończoną ilość punktów, mianowicie powierzchnię, utworzoną przez punkty (x, y, z); funkcje p i q określają w każdym punkcie M tej powierzchni - płaszczyznę. Warunek $p\,dx + q\,dy = dz$ wyraża, że ta płaszczyzna jest styczna do powierzchni.

W przypadku szczególnym, gdy zmienne x, y, z zależą tylko od parametru u, zaś p i q od u i v, mamy zamiast powierzchni krzywą, a w każdym punkcie tej krzywej wszystkie możliwe płaszczyzny, przechodzące przez styczną. Gdy x, y i z nie zależą ani od u ani od v, zaś p i q są funkcjami obu tych parametrów, mamy jeden punkt i wszystkie płaszczyzny przez niego przechodzące.

Warunki Cauchy'ego w pierwotnej postaci przedstawiają zbiór pierwszego wymiaru Z_1 /krzywą płaską/. Zagadnienie polega na znalezieniu zbioru drugiego wymiaru Z_2 /powierzchni/, zawierającego w sobie dany zbiór Z_1 i spełniającego dane równanie różniczkowe.

Warunek, by zbiór Z_1 przedstawiał krzywą płaską nie jest u Cauchy'ego istotny, ma tylko na celu pewne uproszczenia rachunkowe przy dowodach. Można z łatwością warunki Cauchy'ego uogólnić. Uogólnione zagadnienie Cauchy'ego jest więc następujące: Dany jest zbiór pierwszego wymiaru Z_1 /krzywa jakakolwiek/; znaleźć zbiór drugiego wymiaru Z_2 /powierzchnię/, zawierający w sobie zbiór Z_1 i spełniający dane równanie różniczkowe.

Dowód polega na tem, że to ogólniejsze zagadnienie zapomocą prostych podstawień da się sprowadzić do poprzedniego.

Niech dany zbiór Z_1 przedstawia krzywą jakąkolwiek. Można zawsze wyrazić ją przez układ równań:

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x).$$

W każdym punkcie tej krzywej mamy dane wartości pochodnych p i q, związane zależnością $dz = p\,dx + q\,dy$.

Zagadnienie będziemy mogli sprowadzić do dawnego, podstawiając

$$x = u, \qquad y = f(u) + v, \qquad z = \varphi(u) + W(u,v).$$

Przez to podstawienie znalezienie funkcji z zmiennych x i y /całki danego równania/ sprowadza się do znalezienia funkcji $W(u,v)$ zmiennych u i v ; przekonamy się, że znalezienie tej funkcji stanowi zagadnienie Cauchy'ego w postaci pierwotnej, t.j. uproszczonej.

Istotnie, nowe warunki początkowe wyrażą się jak następuje: dla $v=0$ mamy dane $W(u,0)=0$ oraz, jak zobaczymy, $\frac{\partial W}{\partial v}$ i $\frac{\partial W}{\partial u}$.

Nowe równanie otrzymamy, wyrażając w równaniu

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

zmienne x,y,z,p,q,r,s,t przez zmienne u,v i funkcje tych zmiennych.

Z rachunku różniczkowego mamy:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}$$

Lecz

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = f'(u); \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \varphi'(u) + \frac{\partial W}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v};$$

więc

$$\varphi'(u) + \frac{\partial W}{\partial u} = p + q\cdot f'(u),$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} = q.$$

A zatym pochodne pierwszego rzędu wyrażą się przy pomocy nowych zmiennych w sposób następujący:

$$p = \varphi'(u) + \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial W}{\partial v}\cdot f'(u)$$

$$q = \frac{\partial W}{\partial v}$$

Równania powyższe dają nam jednocześnie wartości pochodnych $\frac{\partial W}{\partial u}$ i $\frac{\partial W}{\partial v}$ dla wszystkich wartości v, więc i dla $v = 0$ /warunki początkowe/.

Wyrazimy teraz pochodne rzędu drugiego r, s, t przy pomocy zmiennych u i v. Otóż:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = r\,\frac{\partial x}{\partial u} + s\,\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = s\,\frac{\partial x}{\partial u} + t\,\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = r\,\frac{\partial x}{\partial v} + s\,\frac{\partial y}{\partial v}; \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = s\,\frac{\partial x}{\partial v} + t\,\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Uwzględniając wyżej napisane wartości pochodnych cząstkowych zmiennych x i y względem u i v mamy:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = r + s\cdot f'(u); \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = s + t\cdot f'(u);$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = s; \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = t.$$

W ten sposób znaleźliśmy już wszystkie wartości, które należy podstawić do danego równania różniczkowego przy upraszczaniu warunków początkowych.

Niech będzie dane znowu równanie:

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

i niech dla krzywej Γ, wyrażonej przez równania $y=f(x)$; $z=\varphi(x)$ będą dane pochodne cząstkowe p i q, związane zależnością $dz = p\,dx + q\,dy$. Twierdzimy, że istnieje taka funkcja $z(x,y)$ zmiennych x i y, która zamienia dane równanie na tożsamość, czyli wprost spełnia dane równanie.

Istotnie, weźmy na krzywej Γ punkt, dla którego $x=x_0$. Na mocy wzoru Taylora możemy funkcję dwuch zmiennych przedstawić w sposób następujący:

$$z(x,y) = z(x_0,y_0) + (x-x_0)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 + 2(x-x_0)(y-y_0)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)_0 + (y-y_0)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0\right]+\ldots\ldots$$

Szereg powyższy jest zbieżny /dowód zbieżności jest nietrudny, lecz długi; znaleźć go można we wszystkich obszerniejszych podręcznikach/. A zatym funkcja $z(x,y)$ istnieje i spełnia dane równanie.

Chodzi teraz o to, w jaki sposób obliczyć kolejne pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0). Oznaczmy w tym celu dowolną pochodną cząstkową przez p z dwoma wskaźnikami; pierwszy z nich będzie wskazywał, ile razy dana funkcja została zróżniczkowana względem x, zaś drugi względem y ; tak więc

$$p_{mn} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \cdot \partial y^n}.$$

Poprzednio udowodniliśmy, że pochodne $p_{20} = r$, $p_{11} = s$, i $p_{02} = t$ można wyznaczyć z równań:

$$p' = r + s \cdot f'(x)$$
$$q' = s + t \cdot f'(x)$$

oraz z danego równania różniczkowego. Przejdziemy więc do obliczenia pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu: p_{30}, p_{21}, p_{12}, p_{03}. Musimy tu mieć cztery równania. Pierwsze z nich otrzymamy, różniczkując dane równanie różniczkowe względem x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot r + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot s + \frac{\partial F}{\partial r} \cdot p_{30} + \frac{\partial F}{\partial s} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot p_{12} = 0;$$

następne, różniczkując je względem y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t + \frac{\partial F}{\partial r} p_{21} + \frac{\partial F}{\partial s} p_{12} + \frac{\partial F}{\partial t} p_{03} = 0.$$

Jeszcze dwa równania otrzymujemy, różniczkując pozostałe dwa równania względem x :

$$\frac{dr}{dx} = p_{30} + p_{21} \cdot f'(x)$$
$$\frac{ds}{dx} = p_{21} + p_{12} \cdot f'(x)$$

Z czterech napisanych równań możemy wyznaczyć p_{30}, p_{21}, p_{12}, p_{03}, jeżeli wyznacznik, utworzony z odpowiednich spółczynników, równy po rozwinięciu

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial r}\left[f'(x)\right]^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\cdot f'(x) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

nie jest tożsamościowo równy zeru.

W ten sam sposób możemy postępować dalej. Różniczkując powyższy układ czterech równań, otrzymamy nowy układ pięciu równań, z których będziemy mogli wyznaczyć pięć pochodnych rzędu czwartego: $p_{40}, p_{31}, p_{22}, p_{13}, p_{04}$. Okazuje się, że wyznacznik, warunkujący rozwiązalność tego układu jest równy kwadratowi wyznacznika Δ, czyli równa się Δ^2. Przechodząc do pochodnych rzędu piątego, otrzymamy wyznacznik, równy sześcianowi Δ, czyli Δ^3. Przy pomocy indukcji matematycznej można udowodnić, że kolejno otrzymywane wyznaczniki będą kolejnemi potęgami wyznacznika Δ. Jeżeli zatym $\Delta \neq 0$, to będziemy mogli znaleźć wszystkie pochodne cząstkowe funkcji $z(x,y)$, a zatem i samą funkcję, jako sumę szeregu Taylora.

W przypadku, gdy $\Delta = 0$, otrzymujemy równanie kształtu:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0,$$

albo inaczej:

$$A\,dy^2 - 2B\,dy\,dx + C\,dx^2 = 0,$$

w którym z, p, q, r, s, t wyrażone są odpowiedniemi funkcjami zmiennych niezależnych x i y. Jest ono równaniem różniczkowem, zwyczajnem, pierwszego rzędu i drugiego stopnia.

Równanie to daje nam na powierzchni całkowej krzywe, zwane **charakterystykami**. Ponieważ jest to równanie kwadratowe, posiadające dwa rozwiązania:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

więc przez każdy punkt powierzchni całkowej przechodzą dwie krzywe charakterystyczne.

Niech będzie dane równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:

$$/1/ \qquad A \cdot r + 2B \cdot s + C \cdot t + F(x, y, z, p, q) = 0,$$

gdzie A, B i C, są funkcjami, jak przypuszczamy, tylko zmiennych x i y.

Oczywiste, że $A = \frac{\partial F}{\partial r}$, $B = \frac{\partial F}{\partial s}$, $C = \frac{\partial F}{\partial t}$.

Równanie

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

daje nam dwie rodziny charakterystyk: jedną wyrażoną przez równanie

$$A\,dy = (B + \sqrt{B^2 - AC})\,dx,$$

a drugą wyrażoną przez równanie:

$$A\,dy = (B - \sqrt{B^2 - AC})\,dx.$$

Każde z tych dwuch równań możemy scałkować. Całką pierwszego nich będzie $\xi(x,y)=c_1$, zaś całką drugiego $\eta(x,y)=c_2$. Przypuśćmy, że $B^2-AC\neq 0$. W takim razie mamy:

$$d\xi=\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy$$

$$d\eta=\frac{\partial\eta}{\partial x}dx+\frac{\partial\eta}{\partial y}dy$$

Przy pomocy tych wzorów przekształcimy dane równanie /1/ przyjmując ξ i η za nowe zmienne. Otóż

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

Analogicznie wyrazimy $r,\ s,\ t$ przy pomocy zmiennych ξ i η . Wówczas równanie /1/ przyjmie kształt:

$$/2/\quad A_1\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2B_1\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\cdot\partial\eta}+C_1\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+F\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0$$

przyczem, jak łatwo sprawdzić,

$$A_1=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

$$B_1 = A\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\,\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

Przy takim podstawieniu mamy zawsze $A_1 = 0$ oraz $C_1 = 0$. Istotnie, jeżeli, jak założyliśmy, $B^2 - AC \neq 0$, to $\xi(x,y) \neq \eta(x,y)$.

Z równania $\xi(x,y) = c_1$ mamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}};$$

lecz $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$, stąd

$$A\cdot\frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2} + 2B\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}} + C = 0,$$

czyli

$$\frac{A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2} = 0.$$

Ale

$$A_1 = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$

więc $A_1 = 0$; tak samo z $\eta(x,y) = c_2$, wynika $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}$

i $C_1 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$, stąd $C_1 = 0$.

Równanie /2/ sprowadza się więc do równania:

$$/3/ \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\cdot\partial\eta} = f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right)$$

W przypadku, gdy $B^2-AC<0$, równanie /3/ przekształcamy, wprowadzając nowe zmienne: $X=\xi+\eta$; $Y=\frac{\xi-\eta}{i}$. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial\xi} = \frac{\partial z}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial\xi} + \frac{\partial z}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial\xi} = \frac{\partial z}{\partial X} - i\,\frac{\partial z}{\partial Y},$$

co po zróżniczkowaniu względem η daje:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\cdot\partial\eta} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial\eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial X\cdot\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial\eta} - i\,\frac{\partial^2 z}{\partial X\cdot\partial Y}\cdot\frac{\partial X}{\partial\eta} - i\,\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\cdot\frac{\partial Y}{\partial\eta};$$

lecz

$$\frac{\partial X}{\partial\eta}=1; \quad \frac{\partial Y}{\partial\eta}=i;$$

więc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\cdot\partial\eta} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}.$$

Przy tej zmianie zmiennych równanie przyjmuje postać

$$/4/ \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = f\left(X, Y, z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right).$$

Równanie typu /3/, t.j. gdy $B^2-AC>0$, nosi nazwę h y p e r b o l i c z n e g o ; równanie /4/ zaś t.j. gdy $B^2-AC<0$ – e l i p t y c z n e g o .

Przypuśćmy teraz, że $B^2-AC=0$. W tym przypadku równanie

$$A\,dy^2 - 2B\,dy\,dx + C\,dx^2 = 0$$

jest zupełnym kwadratem. Istotnie

$$(A\,dy - B\,dx)^2 = A^2dy^2 - 2AB\,dy\,dx + B^2dx^2 =$$
$$= A(A\,dy^2 - 2B\,dy\,dx + C\,dx^2).$$

A zatym

$$(A\,dy - B\,dx)^2 = 0.$$

Z równości $B^2 - AC = 0$ wynika: $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$; mamy więc również:

$$(B\,dy - C\,dx)^2 = 0.$$

Przyjmijmy za nowe zmienne ξ, η - funkcje zmiennych x i y:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}}.$$

Mamy tutaj:

$$AA_1 = \left(A\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

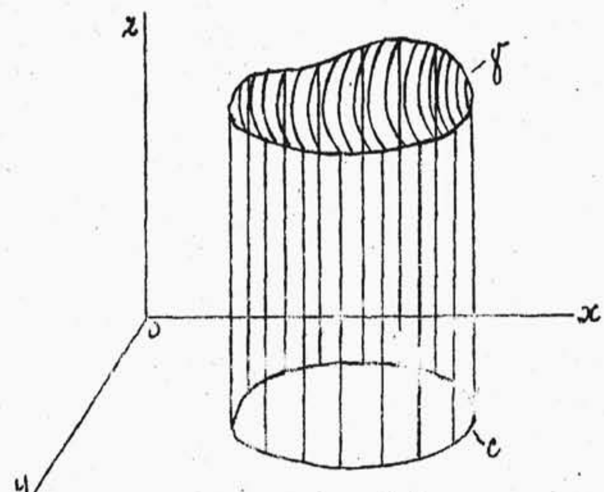
$$AB_1 = \left(A\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = 0.$$

A więc $A_1 = 0$ oraz $B_1 = 0$. Pozostaje nam zatym równanie kształtu:

$$/5/ \quad \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right),$$

zwane p a r a b o l i c z n e m.

Przystąpimy teraz do badania każdego z tych trzech typów równań oddzielnie. Zaznaczymy, że rzeczą bardzo ważną jest rozróżnienie tych typów. Innemi słowy, gdy mamy dane równanie różniczkowe i obszar zmiennych, musimy je do odpowiedniej kategorji zaliczyć. Zauważymy, że obszar zmiennych x, y można będzie podzielić na obszary częściowe, takie, iż w pierwszym równanie będzie jednego typu, a w drugim - drugiego. Następnie powinniśmy mieć dokładnie sformułowane warunki początkowe, bądź w znanej już postaci Cauchy'ego, bądź w postaci **Dirichleta**. Warunki początkowe Dirichleta wyrażają się w sposób następujący. W płaszczyźnie xoy mamy daną krzywą zamkniętą c. Dla każdego punktu tej krzywej jest określona wartość funkcji z, t.zn. szukana powierzchnia całkowa przechodzi przez daną krzywą przestrzenną γ, której rzutem jest krzywa c. Mamy dany tutaj jakgdyby brzeg szukanej powierzchni i z tego powodu warunki Dirichleta noszą nazwę **warunków brzegowych**.



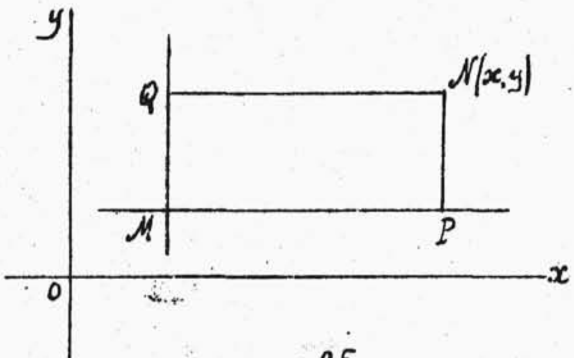
rys. 84.

Warunki Dirichleta wydają się prostszemi od warunków Cauchy'ego. Można jednak udowodnić, iż przy pewnych założeniach natury ogólnej dla danego równania różniczkowego warunki brzegowe wyznaczają tylko jedno rozwiązanie.

Niech będzie dane równanie typu hyperbolicznego w przypadku szczególnym:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y).$$

Zanim je scałkujemy, przyjmując warunki Cauchy'ego, rozwiążemy zadanie pomocnicze. Przypuśćmy mianowicie, że dane są wartości szukanej funkcji wzdłuż dwuch charakterystyk,



rys. 85.

przecianjących się w punkcie M i równoległych do osi Ox i Oy: na charakterystyce $x=x_0$ funkcja $z(x,y)$ staje się równą $\psi(y)$, a na charakterystyce $y=y_0$ funkcja z staje się równą $\varphi(x)$. /Oczywiście, że $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$, gdyż jest to wartość funkcji w punkcie M /.

W tym celu weźmiemy całkę podwójną obu stron tego równania, rozciągniętą na pole prostokąta $NQMP$ /rys. 85 /; a że całkowanie podwójne sprowadza się do dwuch kolejnych całek pojedyńczych, więc całkujemy najpierw względem x, następnie względem y. Otrzymujemy:

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \iint \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\xi\,d\eta = \int d\eta \int \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)d\xi =$$

$$= \int_{y_0}^{y} d\eta \left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)_{x_0}^{x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial z(x,\eta)}{\partial\eta}\,d\eta - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial z(x_0,\eta)}{\partial\eta}\,d\eta =$$

$$= z(x,y) - z(x,y_0) - z(x_0,y) + z(x_0,y_0).$$

Lecz $z(x,y_0) = \varphi(x)$; $z(x_0,y) = \psi(y)$; $z(x_0,y_0) = \varphi(x_0) = \psi(y_0)$.

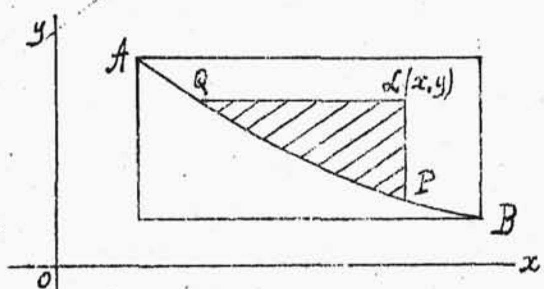
A zatym funkcję

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{(\mathcal{D})} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \varphi(x_0),$$

spełniającą nasze równanie i warunki początkowe można uważać za znaną.

Teraz przystąpimy do zagadnienia Cauchy'ego. Przypuśćmy, że mamy w płaszczyźnie xoy pewną krzywą, a dla każdego punktu tej krzywej wartość funkcji z i jej pierwszych pochodnych, t.zn. że dla dowolnego punktu P krzywej AB mamy dane $z_p(x,y)$. $\frac{\partial z_P}{\partial x} = \pi(x)$ oraz $\frac{\partial z_P}{\partial y} = \chi(y)$. Łatwo widzieć, że te trzy funkcje nie są dowolne; spełniają one równanie:

$$z_P = \int_{AB} \pi(\xi)\,d\xi + \int_{AB} \chi(\eta)\,d\eta + z_A$$



rys. 36.

Ażeby rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego, bierzemy całkę podwójną obu stron danego równania, rozciągniętą na pole trójkąta krzywolinjowego $Q\mathcal{L}P$, który to obszar nazwiemy $\mathcal{D}$.

$$\iint_{(\Omega)} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_{(\Omega)} \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{\mathcal{L}Q} \frac{\partial z}{\partial\eta}\, d\eta + \int_{QP} \frac{\partial z}{\partial\eta}\, d\eta + \int_{P\mathcal{L}} \frac{\partial z}{\partial\eta}\, d\eta =$$

$$= \int_{QP} \chi(\eta)\, d\eta + z_{\alpha} - z_P .$$

Ten wzór, rozwiązany względem $z_{\alpha} = z(x,y)$, daje nam rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego.

Gdybyśmy chcieli rozwiązać równanie ogólne typu hyperbolicznego:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y,z,p,q),$$

to nie moglibyśmy tego w tak prosty sposób uskutecznić. Korzystamy w tym przypadku z metody kolejnych przybliżeń. Bierzemy mianowicie zamiast szukanej funkcji z jakąkolwiek funkcję dwuch zmiennych z_1, która czyniłaby zadość danym warunkom początkowym, nie spełniając równania /gdybyśmy bowiem znaleźli funkcję, która czyniłaby zadość warunkom początkowym i równaniu, wówczas zadanie byłoby rozwiązane/, to znaczy

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y,z_0,p_0,q_0).$$

Oznaczmy wartości pierwszych pochodnych tej nowej funkcji $z_1(x,y)$ przez $p_1(x,y)$ i $q_1(x,y)$ i całkując powyższe równanie utwórzmy funkcję dwuch zmiennych $z_2(x,y)$, spełniającą równanie:

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y,z_1,p_1,q_1) = f_1(x,y)$$

Oznaczmy znowu pochodne funkcji $z_2(x,y)$ przez $p_2(x,y)$ i $q_2(x,y)$ i znajdźmy analogicznie jak poprzednio funkcję $z_3(x,y)$, czyniącą zadość równaniu:

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y,z_2,p_2,q_2) = f_2(x,y).$$

Postępując dalej w ten sposób, otrzymamy ciąg funkcji:

$$z_1(x,y), \quad z_2(x,y), \quad z_3(x,y), \quad \dots\dots\dots$$

Można udowodnić, że istnieje granica tego ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(x,y)$. Jest ona funkcją ciągłą i czyni zadość warunkom początkowym. Następnie można udowodnić, iż ta granica $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(x,y) = z(x,y)$ spełnia dane równanie różniczkowe. W rzeczy samej dwa kolejne przybliżenia są związane zależnościami

$$z_{n+1}(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint\limits_{(D)} f\left(\xi,\eta,z_n,\frac{\partial z_n}{\partial \xi},\frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + C.$$

Przechodząc do granicy dla $n\to\infty$, mamy:

$$\lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \varphi(x) + \psi(y) + \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{(D)} f_n\, d\xi\, d\eta + C.$$

Ponieważ ciąg funkcji f_n jest jednostajnie zbieżny, więc można symbol granicy i symbol całki przestawić:

$$\lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \varphi(x) + \psi(y) + \iint\limits_{(D)} \lim_{n\to\infty} f_n\, d\xi\, d\eta + C.$$

Oznaczmy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}$ przez $z(x,y)$. W takim razie:

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{(D)} f\left(\xi, \eta, \lim z_n, \lim \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \lim \frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + C =$$

$$= \varphi(x) + \psi(y) + \iint_{(D)} f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta + C,$$

skąd bezpośrednio sprawdzamy, że $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y,z,p,q)$, co trzeba było udowodnić.

Pole całkowania jest prostokątem; gdy więc $x=0$ lub $y=0$, całka staje się równa zeru. A zatym gdy $y=0$, wówczas $z(x,y) = \varphi(x) + C$, gdy zaś $x=0$, wówczas $z(x,y)=\psi(y)+C$

Funkcja $z(x,y)$ czyni więc zadość warunkom początkowym. Spełnia ona też dane równanie. Istotnie, utwórzmy jej pochodną:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x) + \int f d\eta.$$

Różniczkując tę pochodną względem y, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = f(x,y,z,p,q).$$

A zatym funkcja $z(x,y)$, otrzymana jako granica ciągu przybliżeń, jest właśnie całką danego równania.

Przejdźmy teraz do równań typu eliptycznego:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x,y,z,p,q)$$

Występują one w wielu dziedzinach fizyki matematycznej; często spotykamy tam analogiczne równania funkcji trzech zmiennych niezależnych:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Oznaczmy lewą stronę równania przez Δz w pierwszym, Δu w drugim przypadku. Równania te nieraz przybierają postać $\Delta z = f(x,y)$, względnie $\Delta u = f(x,y,z)$, lub jeszcze prostszą: $\Delta z = 0$, względnie $\Delta u = 0$. Równania w ostatniej postaci nazywają się r ó w n a n i a m i L a p l a c e ' a ; funkcja, spełniająca równanie Laplace'a, nosi nazwę f u n k c j i h a r m o n i c z n e j dwuch, względnie trzech zmiennych wewnątrz danego obszaru $\mathcal{D}$, jeśli oprócz tego jest funkcją ciągłą zmiennych niezależnych, jako też i jej pochodne cząstkowe dwuch pierwszych rzędów.

Jeżeli $\varphi(z)$ jest funkcją harmoniczną zmiennej zespolonej

$$\varphi(z) = \varphi(x+iy) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y)\cdot i$$

to funkcje φ_1 i φ_2 spełniają również równanie Laplace'a i są ciągłe, czyli są też harmonicznemi.

Istotnie, zróżniczkujmy powyższą równość względem x, następnie względem y:

$$\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + i\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

Ze związku $z = x + iy$ znajdziemy, że $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, zaś $\frac{\partial z}{\partial y} = i$, więc

$$\varphi'(z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\varphi'(z)\cdot i = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

Pomnóżmy pierwsze z tych równań przez i:

$$\varphi'(z)\cdot i = i\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + i\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}.$$

W takim razie, jak wynika z określenia równości liczb zespolonych, musi być:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}.$$

Różniczkując pierwszą z tych równości względem y, drugą względem x, następnie odejmując je stronami, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x\cdot\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x\cdot\partial y} = 0$$

Lecz lewa strona powyższej równości jest właśnie lewą stroną równania Laplace'a, więc

$$\Delta\varphi_1 = 0$$

czyli funkcja φ_1 spełnia równanie Laplace'a. Analogicznie dowiedziemy, że funkcja φ_2 spełnia to równanie.

Weźmy np. funkcję zmiennej zespolonej z^2. Podstawmy $z = x + iy$:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Stąd wynika, że $\varphi_1 = x^2 - y^2$ oraz $\varphi_2 = xy$ są to funkcje harmoniczne.

Inny przykład funkcji harmonicznej:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Stąd mamy dwie funkcje harmoniczne:

$$\varphi_1 = \frac{x}{x^2+y^2}; \qquad \varphi_2 = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Z obszaru ciągłości tych funkcji należy wykluczyć punkt o spółrzędnych $x=0$, $y=0$, tak iż funkcje $\frac{x}{x^2+y^2}$ i $\frac{y}{x^2+y^2}$ są funkcjami harmonicznemi w całej płaszczyźnie zewnątrz dowolnie małego koła, otaczającego punkt początkowy.

Bardzo ważnym jest dla nas przykład funkcji harmonicznych, które otrzymamy, kładąc

$$\lg z = \lg(x+iy).$$

Otóż $x+iy = r \cdot e^{i\theta}$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, więc

$$\lg z = \lg r + i\theta = \lg\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Stąd mamy funkcje harmoniczne:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\lg(x^2+y^2); \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Nie są one harmoniczne tylko w otoczeniu punktu początkowego /0,0/ gdyż jest to punkt nieciągłości funkcji logarytmicznej i $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.