Rozwiązując tę całkę, dojdziemy do równań cykloidy.

Niech $k=-1$. W takim razie

$$x = c\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-c^2y^2}} + C_1 = -\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2y^2} + C_1 .$$

Otrzymujemy więc równanie koła, którego środek leży na osi $x$ :

$$(x-C_1)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

Czyniąc $k=2$, otrzymalibyśmy równanie paraboli.

## RÓWNANIA LINJOWE.

Równanie różniczkowe dowolnego rzędu nazywa się linjowym, jeżeli funkcja $y$ i jej pochodne występują tylko w pierwszej potędze. Postacią ogólną równania linjowego $n$-go rzędu jest:

$$y^{(n)} + X_1(x)\cdot y^{(n-1)} + X_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \dots\dots\dots\dots +$$

$$+ X_{n-1}(x)\cdot y' + X_n(x)\cdot y = X(x).$$

Jeżeli prawa strona tego równania jest tożsamościowo równa zeru: $X(x)\equiv 0$ , wówczas równanie nazywamy n i e p e ł n y m albo z r e d u k o w a n y m ; w przeciwnym razie mamy równanie p e ł n e .

Badanie równań linjowych rozpoczniemy od poznania w ł a s n o ś c i r ó w n a n i a z r e d u k o w a n e g o .

1/ Jeżeli jakaś funkcja $y_1(x)$ jest całką równania zredukowanego, to funkcja $cy_1(x)$ / $c$ - wielkość stała/ jest też całką tego równania.

Gdy bowiem podstawimy $cy_1(x)$ do równania, będziemy mogli $c$ ze wszystkich wyrazów wynieść przed nawias. Czynnik pozostały w nawiasie będzie równy zeru na mocy założenia.

2/ Jeżeli funkcje $y_1(x)$ oraz $y_2(x)$ są całkami równania zredukowanego, to i funkcja $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, gdzie $c_1$ i $c_2$ są to dowolne wielkości stałe, jest też całką tego równania.

Oznaczmy lewą stronę równania zredukowanego przez $F(y)$. Jeżeli podstawimy do równania na miejsce $y$ funkcję $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, to będziemy mogli lewą stronę równania przedstawić w postaci $c_1 F(y_1) + c_2 F(y_2)$. Lecz $F(y_1) = 0$ oraz $F(y_2) = 0$ z założenia, więc i

$$F[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 F(y_1) + c_2 F(y_2) = 0.$$

A zatym $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ jest istotnie całką danego równania.

Możemy powiedzieć ogólnie, że jeżeli

$$y_1(x),\ y_2(x), \cdots\cdots\cdots y_k(x)$$

są całkami równania zredukowanego, to kombinacja linjowa:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots\cdots\cdots + c_k y_k(x)$$

jest również całką równania.

3/ Zbadajmy, jakie powinny być spełnione warunki, aby kombinacja

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots\cdots + c_n y_n(x)$$

gdzie $y_1(x)$, $y_2(x), \cdots\cdots y_n(x)$ są to całki szczególne równania zredukowanego, zaś $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ stałe dowolne, była całką ogólną danego równania zredukowanego.

Niech dla $x = x_0$ będzie $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0$, $\cdots\cdots\cdots\cdots$ $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$.

Aby wyznaczyć $n$ stałych: $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ należy rozwiązać układ $n$ równań z $n$ niewiadomymi:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots\cdots + c_n y_n(x_0) \\
y'_0 &= c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) + \cdots\cdots + c_n y'_n(x_0) \\
y''_0 &= c_1 y''_1(x_0) + c_2 y''_2(x_0) + \cdots\cdots + c_n y''_n(x_0) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_0^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots\cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0)
\end{aligned}\right\} n \text{ równań}$$

To zaś jest możliwe, jak wiadomo, tylko wtedy, gdy następujący wyznacznik, zwany w y z n a c z n i - k i e m W r o ń s k i e g o lub w r o ń - s k i a n e m , jest różny od zera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), & \cdots\cdots & y_n(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x), & \cdots\cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x), & y_2''(x), & \cdots\cdots & y_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & y_2^{(n-1)}(x), & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Układ $n$ całek szczególnych: $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ dla których $\Delta \neq 0$, nazywa się **u k ł a d e m z a s a d n i c z y m**. W przypadku przeciwnym, gdy $\Delta = 0$, pomiędzy niektórymi z funkcji $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ musi zachodzić zależność linjowa i rozwiązanie powyższego układu, a zatym i znalezienie całki ogólnej, jest rzeczą niemożliwą.

Wskażemy w tym miejscu pewną ciekawą własność wrońskianu.

Wyznacznik ten jest funkcją zmiennej $x$; oznaczymy go przez $W(x)$ lub wprost przez $W$. Łatwo udowodnić, że jeżeli mamy jakikolwiek wyznacznik /niekoniecznie Wrońskiego/, którego wyrazy są funkcjami jakiejś zmiennej, np. $x$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

to można jego pochodną względem tej zmiennej wyrazić w sposób następujący:

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} a_1', & b_1', & c_1' \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2', & b_2', & c_2' \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3', & b_3', & c_3' \end{vmatrix}$$

Dla udowodnienia tego wystarczy rozwinąć $\Delta$ na sumę iloczynów i zróżniczkować. Twierdzenie to dotyczy oczywiście wyznaczników o dowolnej liczbie wierszy i kolumn.

Zróżniczkujemy według powyższego wzoru wyznacznik Wrońskiego.

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1', & y_2', & y_3', & \cdots & y_n' \\ y_1', & y_2', & y_3', & \cdots & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & y_3^{(n-1)}, & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & \cdots & y_n \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & \cdots & y_n'' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & y_3^{(n-1)}, & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots\cdots + \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & \cdots & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3', & \cdots & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & y_3^{(n-2)}, & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & y_3^{(n)}, & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Wszystkie wyznaczniki składowe, prócz ostatniego, mają po dwa wiersze jednakowe; takie wyznaczniki zaś, jak wiadomo, są równe zeru. A zatym pochodną wrońskiana będzie:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & \dots\dots\dots & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3', & \dots\dots\dots & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'', & \dots\dots\dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & y_3^{(n-2)}, & \dots\dots\dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & y_3^{(n)}, & \dots\dots\dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Powstaje ona z wyznacznika przez zastąpienie w ostatnim wierszu pochodnej $(n-1)$-go rzędu przez pochodną $n$-go rzędu. x)

Przenieśmy w danym równaniu redukowanym wszystkie wyrazy oprócz pierwszego na prawą stronę:

$$y^{(n)} = -X_1 y^{(n-1)} - X_2 y^{(n-2)} - X_3 y^{(n-3)} - \dots\dots\dots - X_{n-1} y' - X_n y.$$

Podstawiając zamiast $y$ wartości szczegó[illegible] $y_1, y_2,$ ........ $y_n$, otrzymamy szereg równości:

$$y_1^{(n)} = -X_1 y_1^{(n-1)} - X_2 y_1^{(n-2)} - X_3 y_1^{(n-3)} - \dots\dots\dots - X_{n-1} y_1' - X_n y$$

$$y_2^{(n)} = -X_1 y_2^{(n-1)} - X_2 y_2^{(n-2)} - X_3 y_2^{(n-3)} - \dots\dots\dots - X_{n-1} y_2' - X_n y_2$$

..................................................................................................

$$y_n^{(n)} = -X_1 y_n^{(n-1)} - X_2 y_n^{(n-2)} - X_3 y_n^{(n-3)} - \dots\dots\dots - X_{n-1} y_n' - X_n y_n$$

Pomnóżmy wyrazy ostatniego wiersza wrońskiana przez

x) widać to zresztą z przykładu $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

$$\frac{d\Delta}{dx} = \cancel{y_1' y_2'} - \cancel{y_2' y_1'} + y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

spółczynnik $-X_1$:

$$-WX_1 = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & \dots\dots & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3', & \dots\dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_1 y_1^{(n-1)}, & -X_1 y_2^{(n-1)}, & -X_1 y_3^{(n-1)}, & \dots\dots & -X_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Następnie pomnóżmy wyrazy pierwszego wiersza tego wyznacznika przez $-X_n$, drugiego wiersza przez $-X_{n-1}$, trzeciego przez $-X_{n-2}$ i t.d., przedostatniego przez $-X_2$ i dodajmy to odpowiednich wyrazów ostatniego wiersza, wskutek czego wartość wyznacznika się nie zmieni. Uwzględniając wyżej napisane równości, otrzymamy:

$$-WX_1 = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & \dots\dots & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3', & \dots\dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & y_3^{(n)}, & \dots\dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Porównywując ten wyznacznik z wyznacznikiem, wyrażającym pochodną wrońskiana, widzimy, że

$$\frac{dW}{dx} = -WX_1 .$$

Całkując to po uprzedniem oddzieleniu zmiennych, znajdziemy:

$$\int \frac{dW}{W} = -\int X_1\, dx,$$

czyli

$$\log W = -\int X_1\, dx + \log C,$$

skąd

$$W(x) = C e^{-\int\limits_{x_0}^{x} X_1(x)dx}.$$

Dla wyznaczenia stałej $C$ uczyńmy $x=x_0$:

$$W(x_0) = C$$

A zatym

$$W(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} X_1(x)dx}.$$

Przypuśćmy, że dla wartości $x=x_0$ układ jest zasadniczy, t. zn. $W(x_0) \neq 0$. W takim razie układ ten będzie zasadniczym przy dowolnej wartości zmiennej $x$, gdyż funkcja wykładnicza $e^{-\int\limits_{x_0}^{x} X_1(x)dx}$ jest naogół różna od zera. Tylko w pewnych punktach osobliwych $\int\limits_{x_0}^{x} X_1(x)\,dx = \infty$; $e^{-\int\limits_{x_0}^{x} X_1(x)dx} = 0$; $W(x) = 0$. Punkty te można jednak z pod naszego rozważania wykluczyć.

Z równania

$$W(x) = C\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} X_1(x)dx}$$

łatwo wywnioskować, że dwa wyznaczniki Wrońskiego danego równania /utworzone z różnych całek tego równania/ mogą różnić się tylko stałą $C$.

Udowodnimy teraz, że jeżeli mamy $n+1$ całek równania różniczkowego $n$-go rzędu, to pomiędzy temi całkami musi zachodzić zawsze związek linjowy.

Niech będą dane całki szczególne: $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$.

Utwórzmy wyznacznik, mający $n+1$ wierszy i tyleż kolumn:

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2, & \cdots\cdots & y_n \\ y, & y_1, & y_2, & \cdots\cdots & y_n \\ y', & y_1', & y_2', & \cdots\cdots & y_n' \\ y'', & y_1'', & y_2'', & \cdots\cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ y^{(n-1)}, & y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-2)}, & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik ten jest równy zeru, gdyż posiada dwa wiersze jednakowe. Rozwińmy go według elementów pierwszego wiersza: pierwszy podwyznacznik /minor/ jest wyznacznikiem Wrońskiego; tak samo podwyznaczniki następne. Wyznacznik utworzony będzie więc równy:

$$y c e^{-\int_{x_0}^{x} X_1 dx} - y_1 c_1 e^{-\int_{x_0}^{x} X_1 dx} + y_2 c_2 e^{-\int_{x_0}^{x} X_1 dx} - \cdots\cdots \pm y_n c_n e^{-\int_{x_0}^{x} X_1 dx} = 0,$$

albo

$$e^{-\int_{x_0}^{x} X_1 dx}\left(cy - c_1 y_1 + c_2 y_2 - \cdots\cdots \pm c_n y_n\right) = 0.$$

Ponieważ pierwszy czynnik tego iloczynu jest różny od zera, więc

$$cy - c_1 y_1 + c_2 y_2 - \cdots\cdots \pm c_n y_n = 0,$$

co dowodzi słuszności twierdzenia.

Dane są całki szczególne $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$. Chcemy ułożyć równanie różniczkowe redukowane, posiadające te właśnie rozwiązania. W tym celu tworzymy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2, & \cdots & y_n \\ y', & y_1', & y_2', & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n)}, & y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

i rozwijamy go według elementów pierwszej kolumny. Otrzymamy żądane równanie:

$$y^{(n)} \cdot P_1 + y^{(n-1)} \cdot P_2 + y^{(n-2)} \cdot P_3 + \cdots + y' \cdot P_n + y \cdot P_{n+1} = 0.$$

Udowodniliśmy poprzednio, że jeżeli wrońskian $W \neq 0$, to funkcje $y_1, y_2, \cdots y_n$ są linjowo niezależne. Łatwo udowodnić twierdzenie odwrotne: jeżeli $W = 0$, to pomiędzy funkcjami temi zachodzi związek linjowy.

Tak więc nierówność $W \neq 0$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby układ całek $y_1, y_2, \cdots y_n$ był zasadniczym.

Zapoznamy się teraz z następną z kolei własnością równania różniczkowego redukowanego:

4/ Znając jedną całkę szczególną równania linjowego zredukowanego, możemy rząd równania obniżyć o jedność.

Niech $y_1$ będzie znaną całką szczególną równania zredukowanego $F/y/ = 0$, czyli niech $F/y_1/ = 0$. Całkę ogólną danego równania przedstawimy w postaci $y = y_1 \cdot z$, gdzie $z$ jest nową niewiadomą. Kolejne pochodne $y$-ka są równe:

$$y' = z'y_1 + zy_1'$$

$$y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$$

..........................................................

$$y^{(n)} = z^{(n)}y_1 + nz^{(n-1)}y_1' + \frac{n(n-1)}{2}z^{(n-2)}y_1'' + \dots\dots + nz'y_1^{(n-1)} + zy_1^{(n)}$$

Po podstawieniu tych pochodnych do równania zredukowanego otrzymamy:

$$F(y) = F(y_1 \cdot z) = y_1 z^{(n)} + z^{(n-1)}(ny_1' + Q_1 y_1) + \dots\dots\dots +$$

$$+ z \cdot \cancel{F(y_1)} = 0, \quad \text{"}0$$ Patrz str. 188 wyraz (A)

gdzie

$$F(y_1) = y_1^{(n)} + Q_1 y_1^{(n-1)} + \dots\dots\dots + Q_{n-2}y_1'' +$$

$$+ Q_{n-1}y_1' + Q_n y_1 = 0.$$ Patrz str. 177

Dzieląc otrzymane równanie przez $y_1$ i podstawiając $z' = u$; $z'' = u'$ i t.d. znajdziemy: Spo[illegible] z [illegible] $F(y_1) = 0$

$$u^{(n-1)} + \frac{Q_1}{y_1}u^{(n-2)} + \dots\dots\dots + \frac{Q_n}{y_1}u = 0.$$

Jest to równanie linjowe zredukowane rzędu $(n-1)$-go.

Jeżeli do tego równania podstawimy $\frac{u'}{u} = v$, czyli $u = e^{\int v\,dx}$, dostaniemy równanie rzędu $(n-2)$-go, lecz już nie linjowe.

Gdybyśmy wprost do równania $F(y) = 0$ podstawili

$\frac{y'}{y} = v$ , czyli $y = e^{\int v\,dx}$, $\frac{y''}{y} = v' + v^2$ i t.d., to w otrzymanym równaniu rzędu $(n-1)$-go występowałyby już potęgi wyższe; nie byłoby więc to równanie linjowe.

Każde więc równanie linjowe możemy sprowadzić do rzędu o jedność niższego, przyczem jeżeli znamy całkę szczególną, to otrzymane równanie jest także linjowe, w przeciwnym zaś razie nie.

<u>W n i o s e k .</u> Znając dwie całki równania linjowego, można rząd jego obniżyć o 2 i t.d.

<u>P r z y k ł a d .</u> Dane jest równanie różniczkowe:

$$y'' + X_1 \cdot y' + X_2 \cdot y = 0,$$

którego znaną całką szczególną jest $y_1(x)$ . Podstawimy $y = y_1 \cdot z$,

$$y' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z'$$

$$y'' = y_1'' \cdot z + 2y_1' z' + y_1 \cdot z''$$

Otrzymamy:

$$\underbrace{y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''}_{y''} + \underbrace{X_1 y_1' z + X_1 y_1 z'}_{X_1 y'} + X_2 y_1 z = 0.$$

Grupujemy wyrazy w sposób następujący:

$$y_1 z'' + (2y_1' + X_1 y_1) z' + \underbrace{(y_1'' + X_1 y_1' + X_2 y_1)}_{=0} z = 0. \quad (A)$$

Wyrażenie w ostatnim nawiasie jest zerem, gdyż spełnia równanie dane; a zatym

$$y_1 z'' + (2y_1' + X_1 y_1) z' = 0.$$

Oznaczmy teraz $z' = u$, $z'' = u'$:

$$y_1 \cdot \frac{du}{dx} + u(2y_1' + X_1 y_1) = 0.$$

Oddzielamy następnie zmienne i dzielimy przez $y_1$:

$$\frac{du}{u} + \left(X_1 + \frac{2y_1'}{y_1}\right)dx = 0.$$

Całkując to, znajdziemy:

$$\log u + \int X_1\,dx + 2\log y_1 = \log C_1,$$

albo

[illegible]

$$u \cdot e^{\int X_1 dx} \cdot y_1^2 = C_1\,;$$ [illegible] $\log u + \int X_1 dx \log e + 2\log y_1 = \log C_1$

A więc

$$u = z' = \frac{C_1}{y_1^2} \cdot e^{-\int X_1 dx},$$

skąd

$$z = C_1 \int \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2}\,dx + C_2.$$

Całką ogólną danego równania będzie zatym

[illegible] $y = y_1 z$;
$$y = C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2}\,dx + C_2 y_1.$$

Rozważając własności równania redukowanego, mówiliśmy, że jeżeli mamy $n$ całek takiego równania, tworzących układ zasadniczy, to możemy utworzyć całkę ogólną równania redukowanego.

Udowodnimy przy pomocy indukcji, że układ taki istnieje.

Niech będzie dane równanie różniczkowe linjowe redukowane rzędu $k$ :

$$y^{(k)}+X_1 y^{(k-1)}+\dots\dots\dots+X_k\cdot y=0,$$

dla którego $y_1$ jest jedną z całek szczególnych. Podstawmy $y=y_1\cdot z$ oraz $z'=u$ . Otrzymamy równanie rzędu $k-1$ :

$$u^{(k-1)}+P_1 u^{(k-2)}+\dots\dots\dots+P_{k-1}u=0.$$

Przypuśćmy, że całki szczególne $u_1, u_2, \dots\dots u_{k-1}$ tego równania tworzą układ zasadniczy, t.zn., że wrońskian dla tych całek jest różny od zera:

$$W(u_1, u_2, \dots\dots u_{n-1})\neq 0.$$

Z powyższych całek szczególnych mamy:

$$z_1=\int u_1\,dx;\quad z_2=\int u_2\,dx;\dots\dots\dots\dots z_{k-1}=\int u_{k-1}\,dx.$$

A zatym dla rozpatrywanego równania rzędu $k$ będą następujące całki szczególne:

$$y_1,\quad y_1\int u_1\,dx,\quad y_1\int u_2\,dx,\dots\dots\dots y_1\int u_{k-1}\,dx.$$

Utwórzmy z tych $k$ całek wyznacznik Wrońskiego:

$$W(y_1,\ y_1 z_1,\ y_1 z_2,\dots\dots\dots y_1 z_{k-1})=$$
$$=x^{k-1}\cdot W(u_1, u_2, \dots\dots u_{k-1})\neq 0.$$

Wrońskian $W(u_1, u_2, \dots\dots u_{n-1})$ jest z założenia różny od zera; również czynnik $x^{k-1}$ nie jest tożsamościowo zerem. A zatym rozpatrywany wyznacznik nie równa się tożsamościowo zeru, czyli układ $k$ całek szczególnych danego równania $k$ rzędu jest zasadniczy.

Jeżeli więc powyższe twierdzenie jest słuszne dla równań rzędu drugiego, to jest słuszne i dla równań rzędu trzeciego, a stąd i dla równań stopnia czwartego i t.d.

## RÓWNANIA LINJOWE REDUKOWANE O SPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH.

Dane jest równanie linjowe:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

gdzie $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ są to liczby stałe. Uczynimy zadość temu równaniu, podstawiając $y = e^{kx}$ i dobierając odpowiednią wartość dla $k$. Wówczas

$$y' = k \cdot e^{kx}; \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}, \cdots\cdots y^{(n)} = k^n \cdot e^{kx};$$

dane równanie przyjmie postać:

$$e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} k + a_n) = 0.$$

Czynnik $e^{kx}$ jest naogół różny od zera; musi więc być

$$f(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Równanie $f(k) = 0$ nazywa się **r ó w n a n i e m c h a r a k t e r y s t y c z n y m** danego równania linjowego. Jest to zwykłe równanie algebraiczne $n$-go stopnia. Napisać je można wprost, zastępując w danym równaniu $y$ przez $k$, zaś rząd pochodnej przez równy jej wykładnik potęgi.