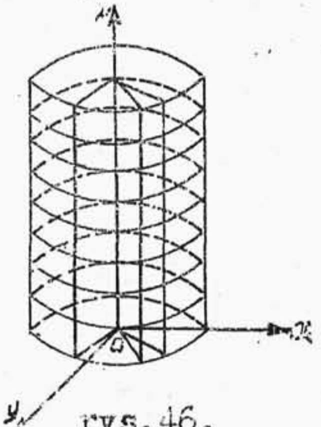
powierzchni walcowej.

Tym sposobem powstaną na powierzchni walcowej prostokąty krzywolinjowe; suma ich pól daje nam pole powierzchni walcowej.



rys. 46.

Gdy mamy dane równanie jakiejś krzywej

$$u = \varphi(v),$$

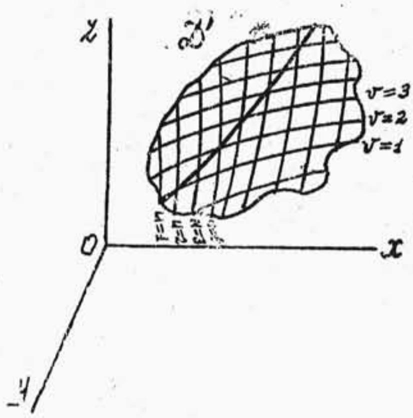
to możemy tę krzywą wykreślić na powierzchni kuli lub walca, korzystając z sieci, powstałej w sposób wyżej opisany, tak, jak to czynimy na kratkowanym papierze. /Słuszność tego wynika z odpowiedzialności, dającej się ustalić pomiędzy płaszczyzną a powierzchnią kuli lub walca/. Prostym równoległym do osi Ox na płaszczyźnie, odpowiadają na kuli równoleżniki, zaś na walcu koła, położone w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny podstawy walca; prostym równoległym do osi Oy na płaszczyźnie odpowiadają znowu południki na kuli i tworzące na powierzchni walca.

WSPÓŁRZĘDNE KRZYWOLINJOWE /OGÓLNE/ NA POWIERZCHNI.

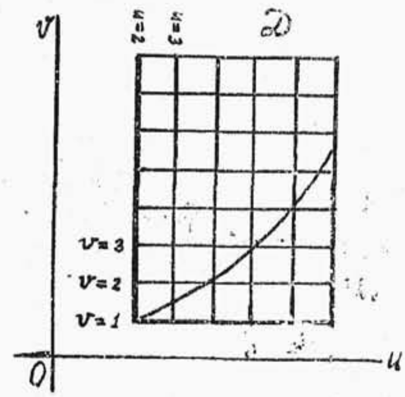
Można wogóle ustalić odpowiedniość pomiędzy płaszczyzną a dowolną powierzchnią krzywą i to sposobami najrozmaitszemi; np. punktowi danej powierzchni może odpowiadać rzut jego na płaszczyznę daną; ogólnie zaś zapomocą 2-ch parametrów u i v, od których zależą x, y, z na powierzchni, za pośrednictwem równań:

$$x = f_1(u,v);$$
$$y = f_2(u,v);$$
$$z = f_3(u,v).$$

Nadając wartości stałe najpierw parametrowi u , następnie v , otrzymamy na powierzchni dwie rodziny krzywych, którym odpowiadają na płaszczyźnie proste równoległe do osi u i v . Dwom krzywym /po jednej z każdej rodziny/ odpowiadają same osie. Obszarowi $\mathcal{D}$ na płaszczyźnie odpowiada na powierzchni obszar $\mathcal{D}'$; krzywej płaskiej w obszarze $\mathcal{D}$ odpowiada krzywa przestrzenna w obszarze $\mathcal{D}'$.



rys.47.



rys.48.

Weźmy pod uwagę dowolny punkt M na powierzchni, w którym przecinają się dwie krzywe danych rodzin, wyrażające się na tej powierzchni równaniami: $v = v_0$; $u = u_0$. Zobaczmy przedewszystkim pod jakim kątem się te krzywe przecinają /kąt między stycznemi/. Otóż dla pierwszej krzywej mamy:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du = \frac{\partial f_1(u,v_0)}{\partial u}du;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du = \frac{\partial f_2(u,v_0)}{\partial u}du;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du = \frac{\partial f_3(u,v_0)}{\partial u}du.$$

Z gieometrji analitycznej wiadomo, iż różniczki dx, dy, dz są proporcjonalne do dostaw kątów kierunkowych stycznej do krzywej. Więc

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}}.$$

Analogicznie dla drugiej stycznej mamy:

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}};$$

$$\cos\beta' = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}}.$$

Wiemy następnie, że jeżeli θ będzie oznaczać kąt między temi stycznemi, to

$$\cos\theta = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'.$$

Oznaczmy dla skrócenia:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} = F$$

Wobec tego

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E\cdot G}},$$

a stąd

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{E\cdot G-F^2}}{\sqrt{E\cdot G}}$$

Może się zdarzyć, że wszystkie krzywe jednej rodziny przecinają się ze wszystkiemi krzywemi drugiej rodziny pod kątami prostemi. Mamy wówczas na powierzchni układ p r o s t o k ą t n y czyli o r t o g o n a l n y , bardzo zbliżony do układu Kartezjusza na płaszczyźnie. Warunkiem koniecznym i dostatecznym takiego układu jest: $F = 0$.

Zobaczmy teraz, jak się wyraża element łuku we współrzędnych krzywolinjowych. Otóż wiemy, że

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ponieważ na powierzchni zmienne x, y, z są funkcjami zmiennych niezależnych u i v, przeto

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Wprowadzając oznaczenia, jak poprzednio, znajdziemy:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Gdy układ jest ortogonalny powyższe wyrażenie się upraszcza:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Zobaczmy teraz, w jaki sposób wyrazi się p o l e j a k i e j ś p o w i e r z c h n i we w s p ó ł r z ę d n y c h k r z y w o l i n j o w y c h na t e j ż e p o w i e r z c h n i .

Z określenia pola powierzchni krzywej, jako granicy sumy części płaszczyzn stycznych wynika wzór:

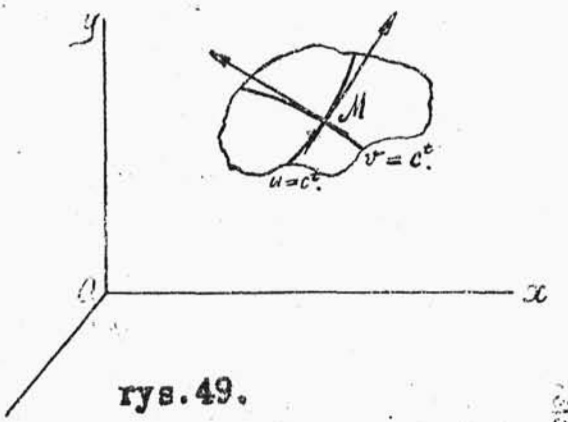
$$P = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx\, dy}{\cos\gamma},$$

gdzie γ oznacza kąt, jaki tworzy płaszczyzna styczna do powierzchni danej z płaszczyzną xoy. /Ten kąt równa się także kątowi normalnej z osią OZ /. Element $dx\,dy$ można zastąpić przez $\Delta\, du\, dv$, jeżeli Δ oznacza wyznacznik funkcyjny:

$$dx\, dy = \Delta\, du\, dv.$$

Poprowadźmy przez punkt $M(X,Y,Z)$ powierzchni płaszczyznę styczną do niej:

$$(X-x)\cos\alpha+(Y-y)\cos\beta+(Z-z)\cos\gamma=0.$$



rys.49.

W tej płaszczyźnie znajdą się styczne do krzywych, położonych na danej powierzchni i odpowiadających osiom współrzędnych $0x$ i $0y$:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cos\alpha+\frac{\partial y}{\partial u}\cos\beta+\frac{\partial z}{\partial u}\cos\gamma=0;$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}\cos\alpha+\frac{\partial y}{\partial v}\cos\beta+\frac{\partial z}{\partial v}\cos\gamma=0;$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Rozwiązując ten układ trzech równań znajdziemy:

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Ponieważ licznik powyższego ułamka jest właśnie wyznacznikiem funkcyjnym Δ , więc

$$\cos\gamma=\frac{\Delta}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

A zatym
$$P=\iint_{(\sigma)}\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\Delta}\,\Delta\,du\,dv,$$

czyli
$$P=\iint_{(\sigma)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

W przypadku szczególnym, gdy

$$x=f_1(u,v)=u;$$
$$y=f_2(u,v)=v;$$
$$z=f(u,v);$$

t.zn. gdy mamy powierzchnię określoną przez równanie

$z = f(x,y)$, otrzymujemy:

$$E = 1 + 0 + p^2;$$
$$G = 0 + 1 + q^2;$$
$$F = 0 + 0 + p \cdot q;$$

więc

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1+p^2)(1+q^2) - p^2 q^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

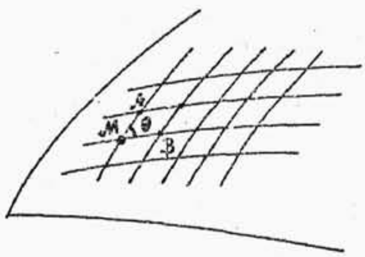
Otrzymamy zatym znany już nam wzór, wyrażający pole powierzchni

$$P = \iint_{\mathcal{D}'} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

gdyż $du = dx, dv = dy$. Obszar $\mathcal{D}'$ jest rzutem na płaszczyznę xoy obszaru całkowania $\mathcal{D}$ na danej powierzchni.

Łatwo można powyższy wzór ogólny dla przypomnienia w sposób nie ubiegający o ścisłość wyprowadzić. Można mianowicie uważać jedno oczko sieci krzywej za równoległobok /zastępujemy łuki przez styczne/; jego polem będzie

$MA \cdot MB \cdot \sin\theta$.



rys. 50.

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Niech v przybierze wartość stałą, zaś u niech się zmienia; wówczas

$$ds_v^2 = E\,du^2,$$

skąd

$$ds_v = \sqrt{E}\,du.$$

Niech teraz u przybierze stałą wartość, a v się zmienia:

$$ds_u = \sqrt{G}\,dv.$$

Więc $MA = \sqrt{E}\,du, \quad MB = \sqrt{G}\,dv, \quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$

W takim razie pole jednego oczka wyrazi się przez

$$\frac{\sqrt{E}\,du\,\sqrt{G}\,dv\,\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

zaś całkowite pole powierzchni przez

$$P=\iint_{\mathcal{D}'}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Gdy układ jest ortogonalny, mamy $F=0$, więc

$$P=\iint_{\mathcal{D}'}\sqrt{EG}\,du\,dv.$$

Przypuśćmy np., że mamy obliczyć pole obszaru na powierzchni kuli o promieniu R, zawartego pomiędzy dwoma południkami i dwoma równoleżnikami. Tutaj mamy:

$$x=R\sin\psi\cos\theta;$$
$$y=R\sin\psi\sin\theta;$$
$$z=R\cos\psi.$$

Punkty danego obszaru muszą czynić przytym zadość nierównościom:

$$\psi_1\leqslant\psi\leqslant\psi_2;$$
$$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2.$$

Jeżeli chodzi o pole obszaru jakiegokolwiek, którego kontur przecina się z dowolnym równoleżnikiem w 2-ch punktach, to

$$F_1(\theta)\leqslant\psi\leqslant F_2(\theta);$$
$$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2.$$

Układ, utworzony z południków i równoleżników jest ortogonalny. Uwzględniając więc, że

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=R^2;$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=R^2\sin^2\psi;$$

będziemy mogli napisać:

$$P=\iint\limits_{D} R^2 \sin\psi \, d\psi \, d\theta = R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{F_1(\theta)}^{F_2(\theta)} \sin\psi \, d\psi = R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|\cos\psi\right|_{F_1(\theta)}^{F_2(\theta)} d\theta .$$

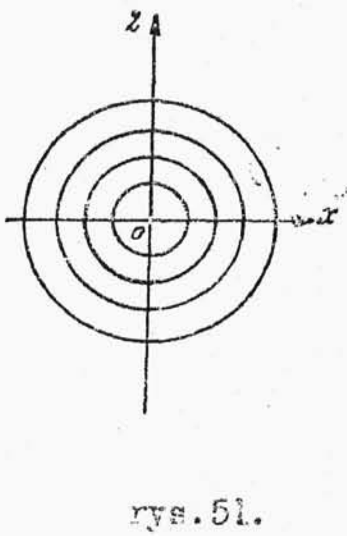
Dla ostatecznego wyznaczenia P należy znać oczywiście funkcje $F_1(\theta)$ i $F_2(\theta)$ t.j. kształt obszaru na powierzchni kuli.

ELEMENT OBJĘTOŚCI WE WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH I PÓŁBIEGUNOWYCH.

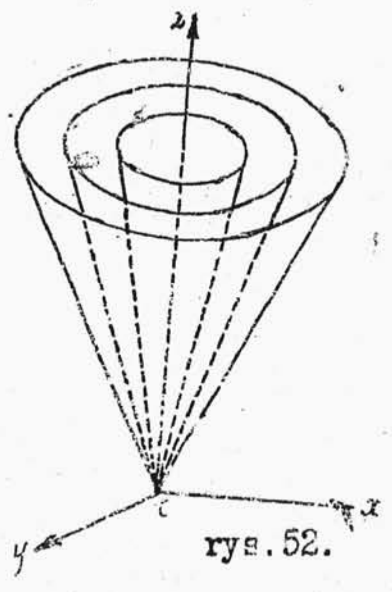
Element objętości możemy zawsze obliczyć przy pomocy wyznacznika $|\Delta| du\, dv$. Można też otrzymać wartość elementu objętości przy pomocy rozważań geometrycznych.

Aby wyznaczyć element objętości we współrzędnych biegunowych, należy tylko zdać sobie sprawę z tego, w jaki sposób jest w tych współrzędnych położenie jakiegoś punktu wyznaczone.

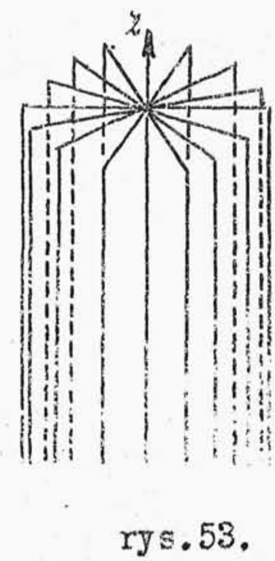
Otóż mamy tutaj trzy parametry: ρ, ψ, θ ; uczyńmy kolejno każdy z nich stałym, zmieniając dwa pozostałe. W pierw-



rys. 51.



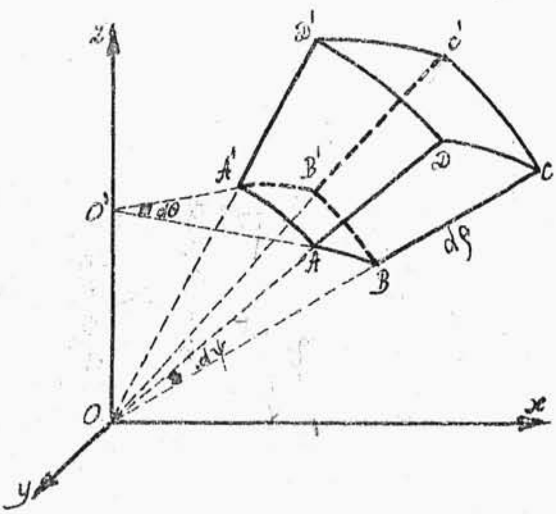
rys. 52.



rys. 53.

szym przypadku $(\rho = const)$ otrzymamy szereg kul współśrodkowych, w drugim $(\psi = const)$ szereg powierzchni stożkowych o osi z i wspólnym wierzchołku O, zaś w trzecim przypadku $(\theta = const)$ pęk płaszczyzn, przechodzących przez oś z.

Tak więc punkt dany będzie leżał na przecięciu się odpowiedniej kuli, odpowiedniej powierzchni stożkowej oraz odpowiedniej płaszczyzny.



rys.54.

Elementem objętości jest tutaj bryła o sześciu ścianach, które stanowią trzy rodzaje wyżej wymienionych powierzchni: dwie kule o promieniach ρ i $\rho+\Delta\rho$, dwie powierzchnie stożkowe o kątach ψ i $\psi+\Delta\psi$, dwie płaszczyzny o kątach θ i $\theta+\Delta\theta$. Jak łatwo widzieć tego rodzaju kostka przestrzenna jest ortogonalna.

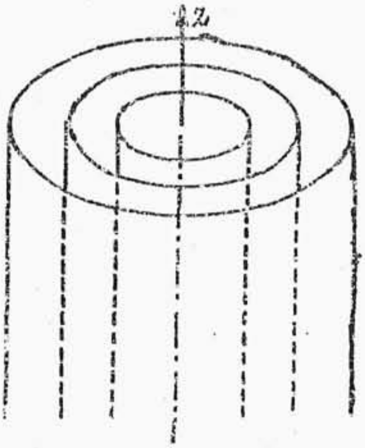
Jej objętość $\quad dv = AA' \cdot AB \cdot AD$.

Lecz $\quad AA' = \rho \sin\psi \, d\theta; \quad AB = \rho \, d\psi; \quad AD = d\rho.$

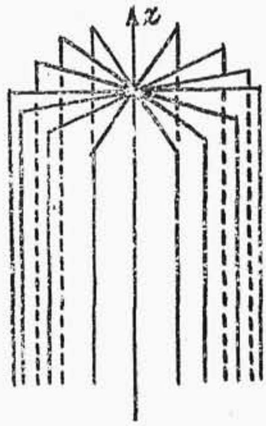
Stąd

$$dv = \rho^2 \sin\psi \, d\psi \, d\rho \, d\theta.$$

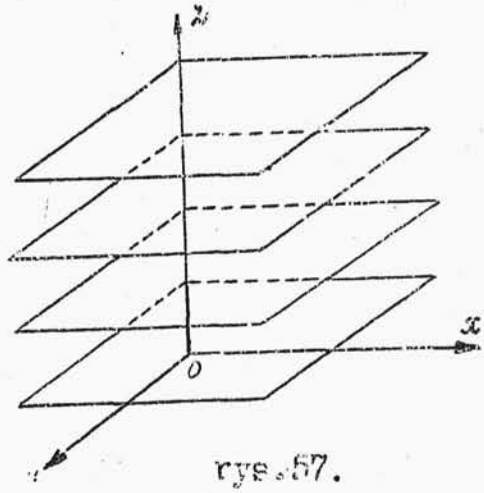
Podobnie wyznaczamy element objętości we współrzędnych półbiegunowych. Położenie punktu jest tutaj określone przy pomocy trzech współrzędnych: z, r i θ. Ustałając kolejno każdą z nich, a zmieniając dwie pozostałe,



rys.55.



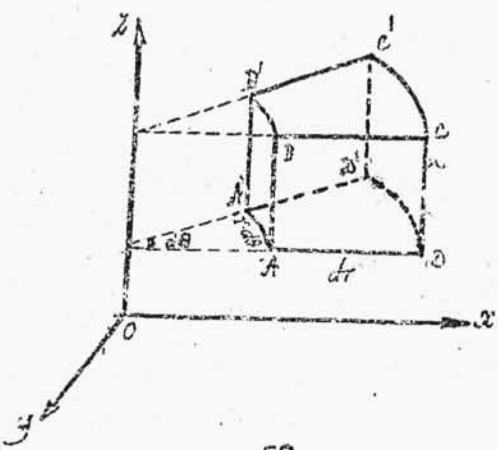
rys.56.



rys.57.

otrzymamy trzy rodziny powierzchni: rodzinę walców współśrodkowych dla r stałego; rodzinę płaszczyzn, przechodzących przez oś z dla θ stałego; wreszcie rodzinę płaszczyzn równoległych do xoy dla z stałego.

Elementem objętości jest znowu kostka przestrzenna, ograniczona przez dwa walce o promieniach r i $r+\Delta r$, dwie płaszczyzny, przechodzące przez oś z i tworzące kąty θ i $\theta+\Delta\theta$ oraz przez dwie płaszczyzny równoległe do xoy i oddalone od niej o z i $z+\Delta z$..



rys.58.

Jeżeli zauważymy tutaj, że

$$AB = dz;$$

$$AD = dr;$$

$$AA' = r d\theta;$$

to będziemy mogli napisać odrazu objętość kostki przestrzennej:

$$dv = r\,dr\,dz\,d\theta.$$