

KOMISJA WYDAWNICZA  
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

---

Prof. M. T. HUBER

# STATYKA LOTNICZA

WEDŁUG WYKŁADÓW  
na Politechnice Warszawskiej

ZREDAGOWAŁ  
L. M. DULĘBA

WYDANO WESPÓŁ Z SEKCJĄ LOTNICZĄ KOŁA MECH.  
STUD. POL. WARSZ.



№ 218.

WARSZAWA, 1930

KOMISJA WYDAWNICZA  
TOW. BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

---

Prof. M. T. HUBER

# STATYKA LOTNICZA

WEDŁUG WYKŁADÓW

na Politechnice Warszawskiej

ZREDAGOWAŁ

L. M. DULĘBA

WYDANO WESPÓŁ Z SEKCJĄ LOTNICZĄ KOŁA MECH.  
STUD. POL. WARSZ.



№ 218.

WARSZAWA, 1930

BIBLIOTEKA  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ  
Warszawa, ul. J. J. Politechnicznej 7

C.7887



MP.534

80-15-552.

55001/339-28

## OD WYDAWCÓW.

*Wypuszczając swe nowe wydawnictwo wspólnie z Sekcją Lotniczą Koła Mechaników Studentów Politechniki Warszawskiej, poczuwamy się do miłego obowiązku złożenia serdecznego podziękowania p. prof. Maksymiljanowi Huberowi za łaskawe przejżenie i uzupełnienie niniejszego skryptu, oraz pp. dziekanowi prof. Bohdanowi Stefanowskiemu i prof. Gustawowi Mokrzyckiemu za udzielenie subsydjum w wysokości prawie połowy kosztów wydawnictwa.*

SEKCJA LOTNICZA  
KOŁA MECHANIKÓW  
STUD. POLIT. WARSZ

KOMISJA WYDAWNICZA  
TOW. BRATN. POM.  
STUD. POLIT. WARSZ.



## W S T Ź P .

Rozważając konstrukcje lotnicze ze względu na ich wytrzymałość, widzimy, że na pierwszy plan wysuwają się tu inne zagadnienia, niż w odniesieniu do części maszyn.

Jedną z istotnych cech konstrukcji lotniczej jest jej lekkość; stosujemy więc kratownice nitowane lub spawane nawet na elementy o niewielkich wymiarach; natomiast sztywność jest tu wymagana dużo mniejsza niż w częściach maszyn / takich n.p. jak wał turbiny parowej/.

Ze względu na cienkość elementów trzeba zwrócić uwagę, oprócz wytrzymałości, także na ich stateczność. N.p. pręty ściskane, przez odłożenie przekroju ze względów wytrzymałościowych według wzoru:

$$F = \frac{P}{k}$$

gdzie  $P$  - siła ściskająca,  $k$  - współczynnik wytrzymałości na zerwanie,  $F$  - przekrój pręta, należy jeszcze sprawdzić na wyboczenie według teoretycznego wzoru Eulera:

$$P_{kr} \approx \alpha \frac{EJ}{l^2}$$

$P_{kr}$  - siła wybaczająca,  $E$  - moduł sprężystości,  $J$  - najmniejszy moment bezwładności przekroju pręta,  $l$  - długość pręta,  $\alpha$  - współczynnik zależny od sposobu ustalenia końców pręta.

Podstawiając  $J = F i^2$ , gdzie  $i$  - ramię bezwładności i rozwiązując względem  $F$ , otrzymamy:

$$F = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{l}{i} \right)^2 \frac{P_{kr}}{E} = \frac{1}{\alpha} s^2 \frac{nP}{E}$$

jeżeli  $s = \frac{l}{i}$  oznacza smukłość pręta, zaś  $n$  pewność na wyboczenie ( $nP = P_{kr}$ ).

To samo odnosi się do cienkich powłok; n.p. metalowego pokrycia skrzydła, które musi być odpowiednio usztywnione.

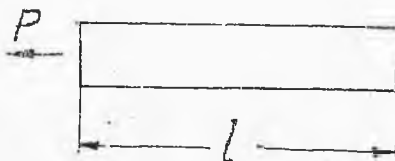


Rys. 1.

## ROZDZIAŁ I.

### LEKKOŚĆ KONSTRUKCJI.

**1. ŚCISKANIE I ROZCIĄGANIE.** Rozpatrzmy pręt podlegający prostemu ściskaniu lub rozciąganiu. Przekrój pręta



Rys. 2.

$$F = \frac{P}{k}$$

przy czym  $k$  oznacza naprężenie dopuszczalne.

Objętość  $V = Fl$ ; ciężar

$$G = Fl \gamma = \frac{P \gamma}{k} l$$

Ciążar pręta z materiału o innym ciężarze właściwym i innej wytrzymałości na zerwanie:

$$G_1 = Pl \frac{\gamma}{k_1}$$

Stosunek ciężarów:

$$G : G_1 = Pl \frac{\gamma}{k} : Pl \frac{\gamma}{k_1} = \frac{\gamma}{k} : \frac{\gamma}{k_1}$$

Konstrukcja będzie tam lżejsza, im mniejszy będzie stosunek  $\frac{\gamma}{k}$ . Niektórzy autorowie wprowadzają stosunek  $\frac{K_r}{\gamma}$ , zwany długością zerwania. Jak łatwo sprawdzić, liczba ta wyraża długość pręta, ulegającego zerwaniu pod wpływem własnego ciężaru. / Wtedy  $K_r$  oznacza wytrzymałość doraźną na rozciąganie /.

2. ZGINANIE. Oznaczmy  $\sigma$  - naprężenie materiału,  $M$  - moment zginający,  $J$  - moment bezwładności przekroju;  $Z$  - odległość skrajnego punktu przekroju od osi obojętnej:

$$\sigma = \frac{Mz}{J}; \quad \frac{J}{Z} = W; \quad W - \text{wskaznik przekroju}$$

/zwany także "momentem wytrzymałości"/.

Dla przekroju kołowego:

$$J = \frac{d^4 \pi}{64}; \quad W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

Oznacząc dopuszczalne naprężenie materiału przez  $k$ , otrzymamy:

$$k = \frac{M 32}{d^3 \pi}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 M}{\pi k}}$$



Ciężar pręta na jednostkę długości:

$$G = F l \gamma = \frac{\pi d^2}{4} \gamma = \frac{\pi}{4} \gamma \left( \frac{32 M}{\pi k} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Dla materiału o innym ciężarze właściwym i innej wytrzymałości:

$$G_1 = \frac{\pi}{4} \gamma_1 \left( \frac{32 M}{\pi k_1} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Dzielnąc, otrzymamy:

$$G : G_1 = \frac{\gamma}{k^{2/3}} : \frac{\gamma_1}{k_1^{2/3}}$$

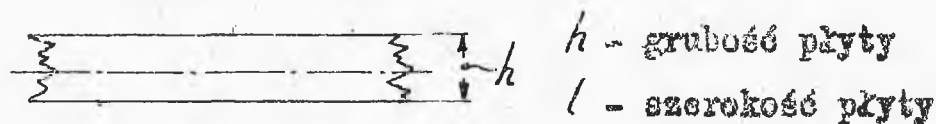
Przeliczając to samo dla innych przekroi z w a r t y c h / nie drążonych /, zauważymy, że ten sam stosunek jest miarą lekkości konstrukcji zginanej.

3. SKRĘCANIE. Dla prętów o przekroju kołowym naprężenie:

$$\tau = \frac{M}{J_p} \frac{d}{2} ; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Zależność ta sama co i dla gięcia, więc i stosunek ciężarów będzie taki sam, tylko  $k$  będzie oznaczał współczynnik wytrzymałości na skręcanie.

#### 4. ZGINANIE PŁYT.



Rys. 3.

Naprężenie:

$$\sigma = \frac{6 M'}{l h^2}$$

Przeliczając grubość i ciężar jednostki szerokości i dłu-

gości dla dwóch płyt z różnych materiałów otrzymamy :

$$G = 1h1\gamma = \gamma \sqrt{6 \frac{M'}{k}}$$

$$G_1 = 1h_11\gamma_1 = \gamma_1 \sqrt{6 \frac{M'_1}{k_1}}$$

Dzieląc, otrzymamy:

$$G : G_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{k}} : \frac{\gamma_1}{\sqrt{k_1}}$$

### 5. WYBOCZENIE.

$$P_{kr} = \alpha \frac{EJ}{l^2}$$

Przy ustaleniu przegubowem końców :



Przy utwierdzeniu, czyli zamocowaniu sztywnem:



Przeliczając pręt, wprowadzamy współczynnik bezpieczeństwa;  $P$  - siła działająca na pręt.

$$nP = P_{kr} = \alpha \frac{EJ}{l^2} ; \quad J = F i^2$$

$$nP = \alpha \frac{EF}{(l/i)^2} ; \quad \frac{l}{i} = s$$

Dla dwóch różnych materiałów przekroje:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{n P s^2}{\alpha E} \\ F_1 &= \frac{n P s_1^2}{\alpha E_1} \end{aligned} \right\} F : F_1 = \frac{n P s^2}{\alpha E} : \frac{n P s_1^2}{\alpha E_1} = s^2 E_1 : E s_1^2$$

Ciążary prętów :

$$G = Fl_y ; \quad G_1 = F_1 l_{y_1}$$

Dla przekrojów podobnych :

$$\frac{F}{F_1} = \frac{l^2}{l_1^2} ; \quad l^2 = \frac{l^2}{s^2}$$
$$\frac{F}{F_1} = \frac{l^2}{s^2} \frac{s_1^2}{l_1^2} = \frac{s_1^2}{s^2}$$

Podstawiając to, otrzymamy:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{E_1}{E} \frac{F_1}{F} ; \quad \frac{F^2}{F_1^2} = \frac{E_1}{E} ; \quad \frac{F}{F_1} = \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}}$$

$$G : G_1 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_1}} : \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}}$$

6. WSPÓŁCZYNNIKI LEKKOŚCI. Zestawmy w tabliczkę współczynniki decydujące o lekkości konstrukcji z danego materiału:

Ciągnienie i ciśnienie	$\frac{1}{\sqrt{k}}$
Zginanie i skręcanie prętów oraz belek	$\frac{1}{\sqrt{k^{2/3}}}$
Zginanie płyty	$\frac{1}{\sqrt{k^{1/2}}}$
Wyboczenie sprężyste	$\frac{1}{\sqrt{E^{1/2}}}$

Podamy te wskaźniki dla różnych materiałów podając ciężar właściwy  $\gamma$  w  $\text{kg/m}^3$ , zaś naprężenie dopuszczalne  $k$  w  $\text{kg/cm}^2$ . Materiały będą uszeregowane od najlżejszych do najcięższych.

1. Zrywanie:  $\frac{f}{k}$

Drut ze stali tyglowej	0,42 - 0,79
Dural	0,54 - 1,11
Stal sprężynowa hartowana	1,05
" " niehartowana	1,57
Stal niklista	2,32
Drzewo sosnowe lub świerk.	2,70 - 3,80

2. Zginanie i skręcanie:  $\frac{f}{k^{2/3}}$

Dural	13,5 - 18,3
Sosna i świerk	11,0 - 26,9
Stal sprężynowa	20,5 - 26,9
Stal niklista	34,8

3. Zginanie płyt:  $\frac{f}{k^{1/2}}$

Drzewo sosnowe i świerkowe	25,3 - 62,0
Dural	51,1 - 64,2
Stal sprężynowa	91,0 - 111,0
Stal niklista	135

4. Wybieczenie:  $\frac{1}{E}^{1/2}$  / dla pełnych przekroji /

Drzewo sosnowe i świerkowe 1,02 - 2,49

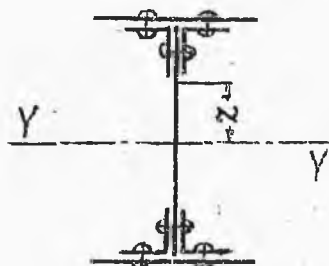
Dural 3,47

Stal sprężynowa 5,30

Jak widzimy, w wielu wypadkach drzewo pod względem lekkości wysuwa się na plan pierwszy i dlatego tak często bywa w lotnictwie stosowane.

## R O Z D Z I A 2 II.

### OBŁICZENIE NITOWANYCH BELEK TROWYCH.



Rys. 5.

Gdyby belkę taką traktować jako litą całość, to naprężenie w dowolnym punkcie wyniesiłoby:

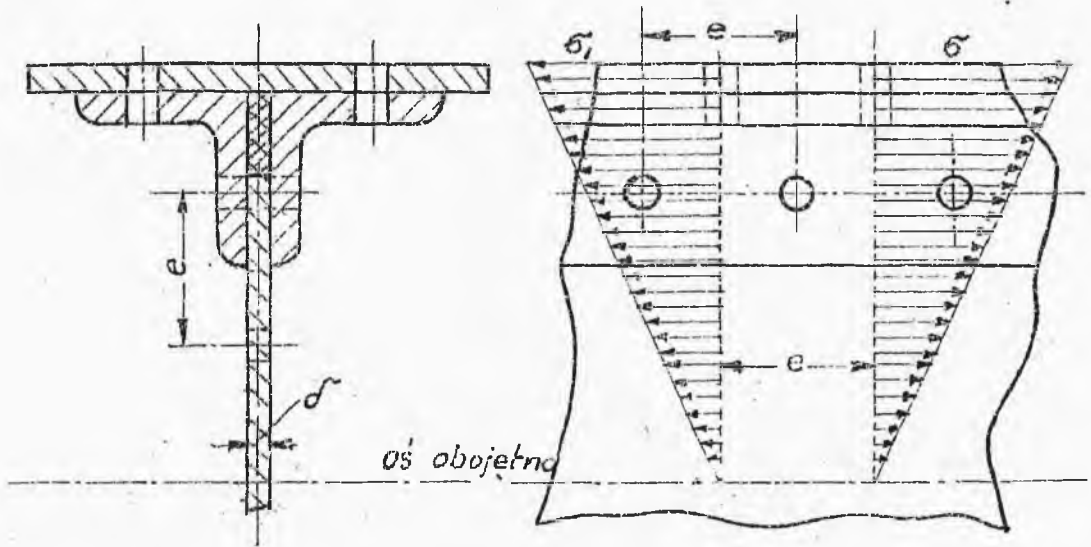
$$\sigma = \frac{M}{J} z$$

Ze względu na niepełną sztywność połączeń, nie dającą się ująć rachunkowo, traktujemy to empirycznie, przyjmując tylko przekrój netto belki / bez otworów na nity/.

Nity pionowe i poziome powinny być nie w tym samym przekroju, aby mniej osłabiały przekrój.

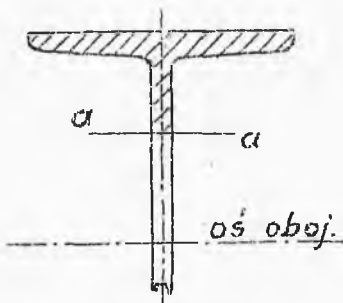
Grubość nita zależy od grubości ścianek. Tak je dobieramy, aby nacisk na ścianki otworu nie przekroczył wartości

dopuszczalnych.



Rys. 6.

Nity pośredniczą w przeniesieniu sił ścinających z "p a s ó w" belki /złożonych z nakładek i kątowników / na ściankę.



Rys. 7.

Z teorii ogólnego zgięcia belki litej wiadomo, że naprężenie ścinające w dowolnym przekroju a - a wynosi :

$$\tau = \frac{T S}{J_y \delta}$$

$S$  - moment statyczny przekroju ponad a-a / zakreskowanego / względem osi obojętnej,  $T$  - siła ścinająca,  $\delta$  - grubość ścianki.

Dla obliczenia siły działającej na jeden nit rozpatrzmy na-

prężenia w nakładce i kątownikach / rys.6./ :

$$\sigma = \frac{M}{J_y} z ; \quad \sigma_1 = \frac{M_1}{J_y} z$$

Moment statyczny nakładki i kątowników  $S' = \int z dF$

$$\sigma dF = \frac{Mz dF}{J_y} ; \quad \sigma_1 dF = \frac{M_1 z dF}{J_y}$$

Siła ścinająca nit:

$$\begin{aligned} P_t &= \int \sigma dF - \int \sigma_1 dF = \\ &= \int \frac{Mz dF}{J_y} - \int \frac{M_1 z dF}{J_y} = \frac{M - M_1}{J_y} \int z dF = \frac{M - M_1}{J_y} S' \end{aligned}$$

Siła ścinająca:

$$T = \frac{dM}{dx}$$

co w przybliżeniu zastępujemy przyrostem momentu na jednostkę długości:

$$T = \frac{M - M_1}{e}$$

Podstawiając, otrzymamy:

$$P_t = \frac{T e}{J_y} S'$$

Nit jest dwucięty, stąd średnie naprężenie ścinające nit:

$$\tau' = \frac{P_t}{2 \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2 P_t}{\pi d^2} = \frac{2}{\pi d^2} \frac{T e}{J_y} S'$$

Stąd obliczamy  $e$ , znając dopuszczalne  $\tau$  i zakładając

$d$  - w zależności od grubości blach.

**NAPRĘŻENIA STYCZNE W ŚCIANCE.** Naprężenia te najniebezpieczniejsze w przekroju osłabionym przez nity składają się z dwóch części: 1/ naprężenia przeciętione przez nit z nakładki i kątowników 2/ przeniesione z górnej części ścianki / podwójnie zakreskowanej na rys.6./:

$$\tau_{w\ ściance} = \frac{TS'}{J_y \delta} + \frac{TS''}{J_y \delta} = \frac{T}{J_y \delta} (S' + S'')$$

$\delta$  - grubość ścianki,  $S''$  - moment statyczny górnej części ścianki względem osi obojętnej.

Przekrój ten jest osłabiony otworami, więc rzeczywiste naprężenie będzie większe w stosunku  $e:(e-d)$ , jeżeli założymy, że otwory potrzebne do krycia styków blachy ścianki są w przekroju pionowym również rozmieszczone w odstępach  $e$

$$S = S' + S'' ; \quad \tau_{spr.} = \frac{TS e}{\delta J_y (e-d)}$$

Prócz ścinania elementy ścianki są narażone na rozciąganie lub ściskanie spowodowane zginaniem. Do sprawdzenia stosujemy warunek wytrzymałościowy w postaci:

$$\sigma_{red.} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq K$$

Tutaj oznacza  $\sigma$  naprężenie normalne uwarunkowane momentem zginającym, zaś  $\tau$ -naprężenie styczne obliczone powyżej.

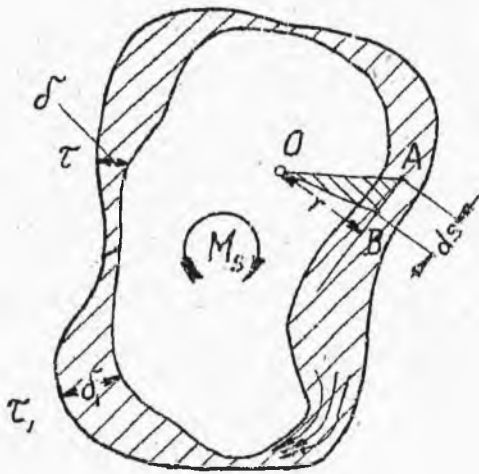


## R O Z D Z I A Ł III.

### SKRĘCANIE PRZEKROJÓW DRĄŻONYCH.

W prętach skręcanych o przekroju pełnym mamy duże naprężenia na obwodzie, wewnątrz przekroju małe; materiał tam jest niewyżytkowany. Dlatego wykonywa się zwykle elementy skręcane jako puste wewnątrz; ale zbyt cienka ścianka staje się niestateczna, a obliczenie stateczności jest bardzo trudne.

Obliczymy naprężenia w skręcanym przekroju wewnątrz pustym o grubości ścianki zmiennej w sposób ciągły.



Rys. 8.

Teoretyczne rozważania wskazują, że rozkład naprężeń jest identyczny z rozkładem prędkości przepływu cieczy idealnej przy krążeniu po takim przekroju.

Prędkości przepływu są proporcjonalne do naprężeń.

Ze względu na niewielką grubość ścianek możemy naprężenia

przyjąć za stałe w całej grubości.

Z powodu nieskończoności cieczy, prędkość jej musi być od-

wrotnie proporcjonalna do szerokości przekroju, a więc to samo dzieje się z naprężeniami:

$$\delta\tau = \delta\tau_0 = const.$$

Moment skręcający :

$$M_s = \int r ds \delta\tau = \delta\tau \int r ds = 2\delta\tau \int \frac{r ds}{2} = 2F_0\tau\delta$$

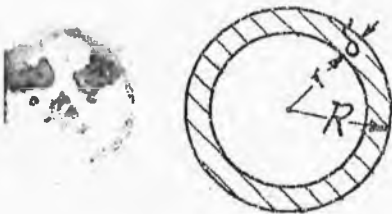
gdzie  $F_0$  oznacza pole ograniczone linią średnią między zewnętrznym a wewnętrznym konturem przekroju, gdyż  $\frac{r ds}{2}$  równa się polu  $\Delta OAB$ .

Stąd naprężenie w ściance :

$$\tau = \frac{M_s}{2F_0\delta}$$

Dla przykładu przeliczymy to dla kilku przekroi.

1. Dla pierścienia kołowego:



Rys. 9.

$$\tau = \frac{M_s}{2r_0^2\pi\delta}$$

$$r_0 = \frac{R+r}{2}$$

Według wzoru zwykle używanego:

$$\tau = \frac{M_s R}{J_p} ; \quad J_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2}$$



$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_s R}{R^4 - r^4}$$

$$R^4 - r^4 = (R^2 + r^2)(R - r)(R + r)$$

$$R - r = \delta; \quad R + r = 2r_0$$

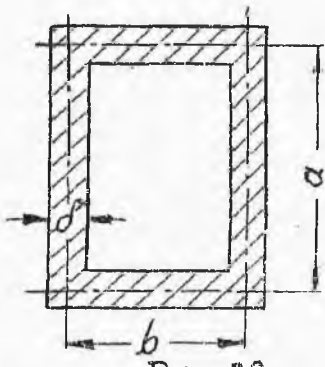
Ze względu na niewielką różnicę między  $R$  i  $r$  możemy przyjąć:  $R^2 + r^2 \cong 2r_0^2$ ;  $R \cong r_0$

Podstawiając, otrzymamy:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_s r_0}{2r_0^2 \delta 2r_0} = \frac{M_s}{2\pi r_0^2 \delta}$$

analogicznie do wyniku z nowego wzoru.

2. Dla prostokąta:

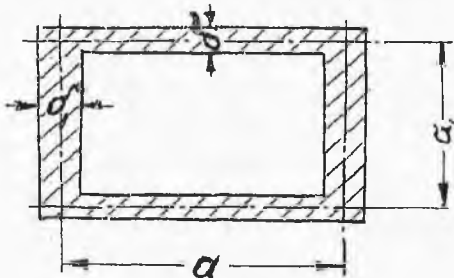


Rys. 10.

$$F_0 = ab$$

$$\tau = \frac{M_s}{2abd}$$

3. Dla prostokąta, gdy grubość ścianek nie równa:

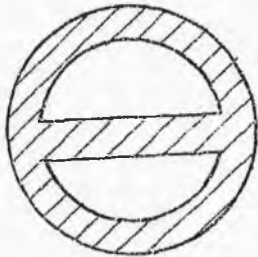


Rys. 11.

$$\tau = \frac{M_s}{2aa_1\delta}$$

$$\tau_1 = \frac{M_s}{2aa_1\delta_1}$$

Wzory te stosują się tylko do przekroi o jednym wydrążeniu



Rys.12.

bez ścianek wewnątrz.

Naprzekład do przekroju  
wskazanego na rysunku 12  
stosować ich nie można.

## ROZDZIAŁ IV.

### KONSTRUKCJE KRATOWE.

---

#### § 1. RODZAJE KONSTRUKCJI KRATOWYCH.

Dzięki temu, że w konstrukcjach tych poszczególne pręty są tylko ściskane lub rozciągane, mamy materiał najlepiej wykorzystany.

Mogą one być statycznie wyznaczalne lub statycznie niewyznaczalne. Najprostsze kratownice statycznie wyznaczalne składają się z szeregu trójkątów.

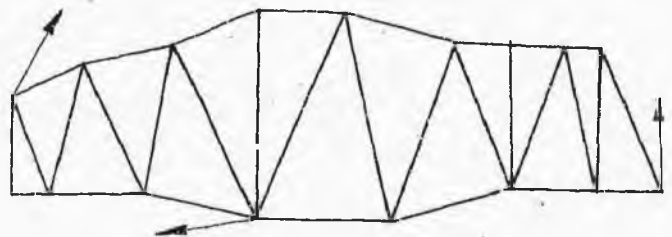
Ilość węzłów -  $w$

ilość prętów -  $p$

Wyrunkiem koniecznym / lecz

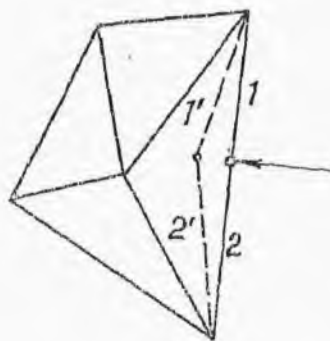
niewystarczającym / aby kratownica

była statycznie wyznaczalna jest  $p = 2w - 3$ .



Rys.13.

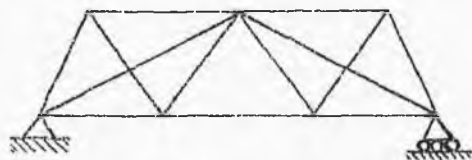
Zdarzają się wypadki wyjątkowe. N.p. kratownica na rys.14



spełnia warunek  $p = 2w - 3$ , lecz obliczając siły w prętach, otrzymamy w prętach 1 i 2 siły nieskończenie wielkie. W rzeczywistości pręty te ugną się / wydkuszą/, przyjmą położenia 1' i 2', ale pomimo to siły będą bardzo wielkie, choć skończone. Wypadku takiego należy unikać, bo często

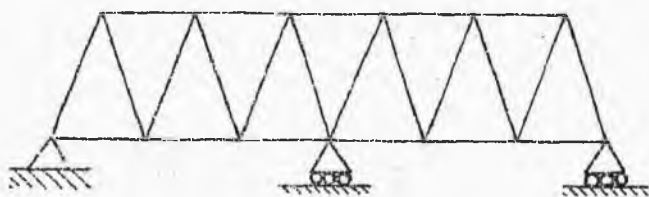
Rys.14

może on się niepostrzeżony wkraść do konstrukcji. Kratownice statycznie niewyznaczalne mogą być: 1/ statycznie nie-



Rys.15.

wyznaczalnie wewnętrznie, rys.15, gdy z powodu przesztynnienia nie można statycznie wyznaczyć sił wewnętrznych lub 2/ statycznie niewy-



Rys.16.

znaczalnie zewnętrznie / rys.16 /, gdy nie można wyznaczyć reakcyj podporowych / czyli "odporów"/.

Dla kratownic statycznie wyznaczalnych stosuje się do obliczenia sił w prętach:

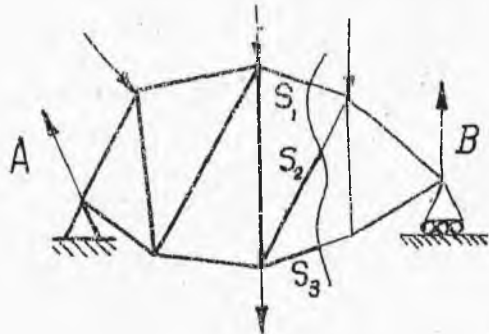
- 1/ Metoda przecięć Rittera.
- 2/ Metoda planu sił Cremony.
- 3/ Metoda Culmanna.

Z tych metod dobrze znanych ze statyki, przypomnimy tutaj

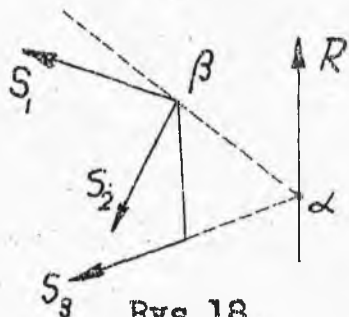
tylko pokrótce trzecią.

## § 2. WYZNACZANIE SIŁ METODĄ CULMANN A .

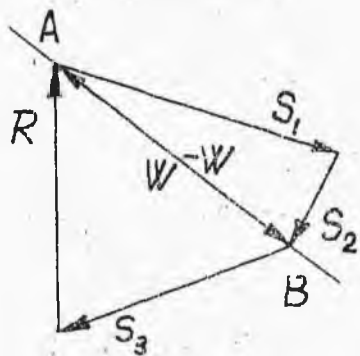
Oznaczmy przez  $R$  wypadkową sił zewnętrznych / wraz z od-



Rys.17.



Rys.18.



Rys.19.

porom  $B$  /, działających na odciętą część kratownicy / uwydatnioną cięszymi linjami /.

Siły wewnętrzne  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  i wypadkowa  $R$  muszą być w równowadze. Wypadkowa sił  $S_1$  i  $S_2$  musi przechodzić przez ich punkt przecięcia się  $\beta$ , zaś wypadkowa siły  $S_3$  i  $R$  przez punkt  $\alpha$  / rys.18 /.

Ponieważ obie te wypadkowe się równoważą, więc ich linje działania muszą leżeć na prostej  $\alpha\beta$ .

Nakreślmy teraz wielobok sił:

z końca danej siły  $R$  prowadzimy  $AB \parallel \alpha\beta$  ; a z początku // do pręta  $S_3$ .

W ten sposób otrzymujemy trójkąt sił  $R S_3 W$  . Odwróciwszy kierunku  $W$

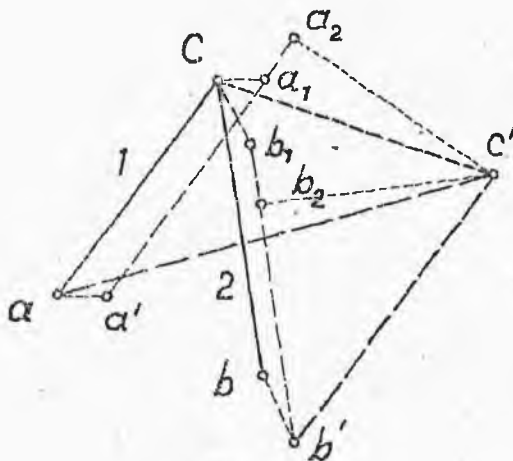
kreślmy drugi trójkąt sił  $-W S_1 S_2$  .

### § 3. WYZNACZANIE WYKREŚLNE

#### PRZESUNIĘĆ WĘZŁÓW.

W skutek obciążenia pręty kratownicy odkształcają się, wydłużają się lub skracają, węzły doznają przesunięć. Po obliczeniu kratownicy należy te odkształcenia znaleźć, również dla wyznaczenia sił w kratownicach statycznie niewyznaczalnych potrzebne jest znalezienie odkształceń.

Można to wykonać wykreslnie lub rachunkowo. Rozpatrzmy dwa pręty należące do kratownicy. / rys.20 /.



Rys.20.

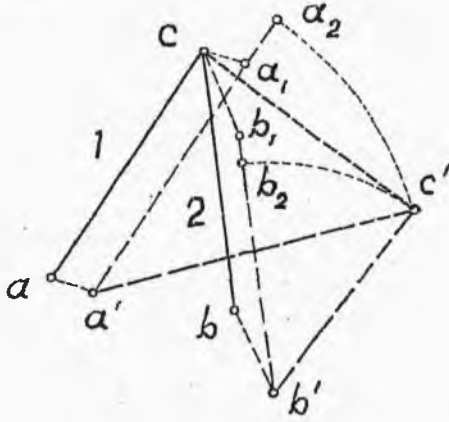
Wydłużenia sprężyste  $\Delta$  kreślimy zawsze w większej skali niż same pręty, aby były widoczne na rysunku. Znając naprężenia i przekroje w prętach, możemy obliczyć ich wydłużenia lub skrócenia  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ .

Niech  $aa'$  i  $bb'$  będą przesunięciami węzłów  $a$  i  $b$

Znając je i mając  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$ , należy wyznaczyć przesunięcie węzła  $c$ .

Gdyby skale prętów, wydłużeń i przesunięć były jednokowe postąpilibyśmy jak na rys.21.

Z punktów  $a'$  i  $b'$ , będących nowymi położeniami węzłów  $a$  i

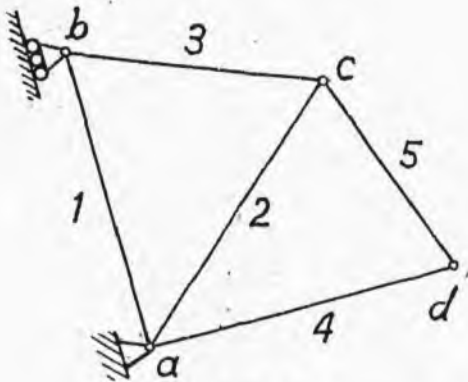


Rys.21.

$b$ , kreślimy odcinki  $a'a_1$  i  $b'b_1$ , równe i równoległe do  $ac$  i  $bc$ ; na ich przedłużeniach odmierzamy odkształcenia  $a, a_2$  i  $b, b_2$  i zakreslamy łuki promieniami  $a'a_2$  i  $b'b_2$ ; na ich przecięciu znajdziemy punkt  $c'$ , będący nowym położeniem węzła  $c$ ; odcinek

$cc'$  przedstawia przesunięcie węzła  $c$ . Ze względu na bardzo niewielki wymiar przesunięć w stosunku do długości prętów, łuki możemy zastąpić prostokątami prostymi wystawionymi z  $a_2$  i  $b_2$ . To samo czynimy na rys.20 kreśląc wydkużenia i przesunięcia w większej skali.

Przerobimy to samo dla kratownicy / rys.22 /.



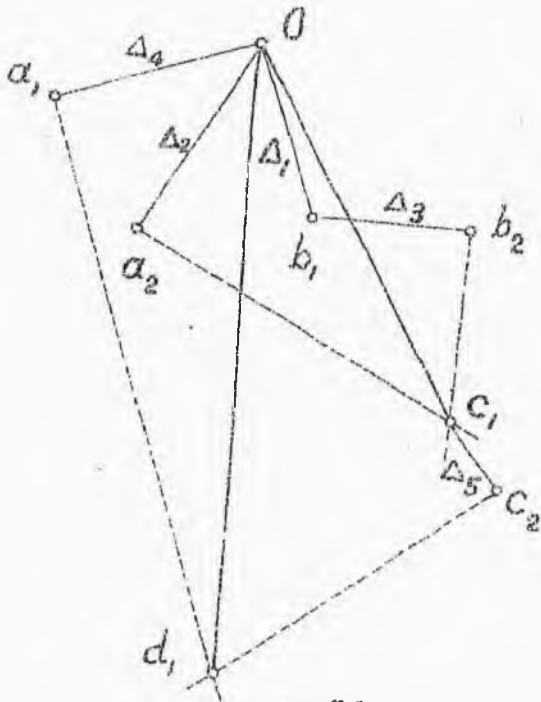
Rys.22.

Najpierw jedną ze znanych metod obliczamy siły w prętach, a znając ich przekroje obliczamy wydkużenia  $\Delta$ .

Przypuśomy, że węzeł  $a$  jest ustalony, zaś węzeł  $b$  może się przesuwać wzdłuż prostej  $ab$ .



Nakreśliśmy plan przesunięć Williot'a / rys.23 /.



Rys.23.

Obieramy dowolny punkt  $O$  i kreślimy z niego odkształcenie  $\Delta_1$ , równoległe do pręta 1 ; z jego końca kreślimy odkształcenie  $\Delta_3$  równoległe do pręta 3 i z punktu  $b_2$  wystawiamy prostopadłą do  $b_1b_2$ . Z  $O$  kreślimy odkształcenie  $\Delta_2$  równoległe do pręta 2 , i z jego końca wystawiamy prostopadłą; na przecięciu tych dwóch

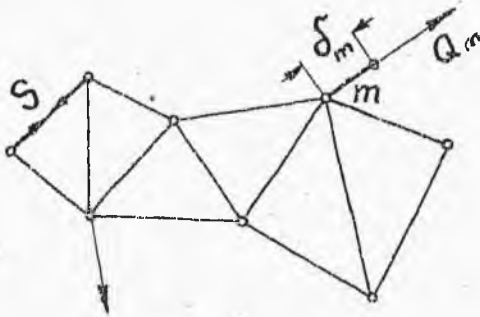
prostopadłych leży punkt  $c$  ; wektor  $Oc$ , przedstawia przesunięcie punktu  $C$  .

Z punktu  $C$ , kreślimy odkształcenie  $\Delta_5$ , z jego końca wystawiamy prostopadłą; z punktu  $O$  kreślimy wydkużenie  $\Delta_4$ , z jego końca wystawiamy prostopadłą. Punkt przecięcia się prostopadłych -  $d$  . Wektor  $Od$ , przedstawia przesunięcie węzła  $d$  . Im węzeł dalszy od podpór tem większe jest jego przesunięcie i łatwo może się zdarzyć, że punkty wypadną poza rysunek. Dlatego zwykle punkty nieruchome obieramy w środku kratownicy, a po wykreśleniu planu przesunięć, spełniamy warunki podparcia przez obrót całej kratownicy.

## § 4. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH - NYCH.

Dla wyznaczenia naprężeń w kratownicach statycznie niewyznaczalnych posługujemy się metodami Castigliano'a lub Mohr'a. Przyjmując znajomość pierwszej metody z innych wykładów, zajmiemy się tutaj drugą.

Jest ona zastosowaniem jednej z najogólniejszych zasad mechaniki, zasady prac przygotowanych / wirtualnych /. Są to prace jakie wykonałyby siły wewnętrzne lub zewnętrzne przy możliwych przesunięciach nieskończenie małych. Warunkiem równowagi układu jest, aby suma prac przygotowanych sił zewnętrznych i wewnętrznych była równa zero.



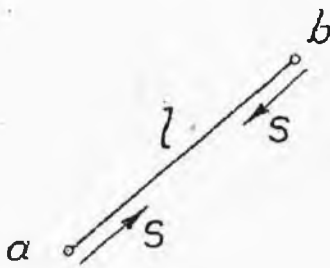
Rys.24.

Oznaczmy przez  $S$  - siły wewnętrzne,  $Q_m$  - siła zewnętrzna, działająca na węzeł  $m$  - ty.

$\delta_m$  - składowa przesunięcia rzeczywistego w kierunku siły  $Q_m$ .

Nazwijmy przez  $\bar{Q}_m$  siłę zewnętrzną wyobrażoną / w rzeczywistości nie działającą / i obliczone z niej naprężenia i przesunięcia przez  $\bar{S}$  i  $\bar{\delta}_m$ .

Praca przygotowana sił wewnętrznym jest zawsze ujemna, gdyż w pręcie rozciągany, wydłużającym się, siły wewnętrzne / działające na węzły końcowe / skierowane są ku sobie, zaś w ściskanym nadwrót.



Rys. 25.

Jeśli wydłużenie wynosi  $\Delta l$  to praca obu sił =  $-S \Delta l$ .

Całkowita praca przygotowana sił wewnętrznym =  $-\sum S \Delta l$ .

Całkowita praca przygotowana sił zewnętrznym =  $\sum Q_m \delta_m$ .

Wprowadzając te oznaczenia możemy napisać trzy równania równowagi:

$$\sum S \Delta l = \sum Q_m \delta_m \quad (1)$$

- dla sił zewnętrznych i wewnętrznych rzeczywistych, zaś wydłużeń i przesunięć wyobraźalnych.

$$\sum \bar{S} \Delta l = \sum \bar{Q}_m \delta_m \quad (2)$$

- dla sił zewnętrznych i wewnętrznych wyobraźalnych, zaś wydłużeń i przesunięć rzeczywistych.

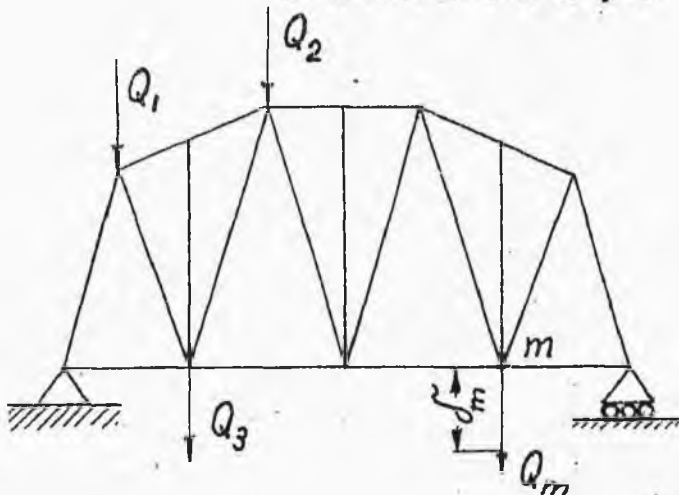
$$\sum S \Delta l = \sum Q_m \delta_m \quad (3)$$

- dla sił zewnętrznych i wewnętrznych rzeczywistych, i przesunięć i wydłużeń rzeczywistych.

Równania te do przesunięć rzeczywistych zastosował Mohr, dla wyznaczenia naprężeń i odkształceń w układach kratowych. Jest to metoda przybliżona, gdyż równania te są ściśle jedynie dla przesunięć nieskończenie małych. Zwykle jednak odkształcenia są tak małe, że przybliżenie jest zupełnie wystarczające. Przy dużych odkształceniach / skrzydła samolotów / mogą zajść przypadki, w których równań tych stosować nie można.

### § 5. WYZNACZENIE RACHUNKOWE

#### PRZESUNIĘĆ WĘZŁÓW.



Rys.26.

W kratownicy / rys. 26 / wyznaczmy pionową składową przesunięcia  $m$ -tego węzła  $\delta_m$ . Najpierw obliczymy naprężenia i wydłużenia prętów powstałe dzięki działaniu sił zewnętrznych.

Następnie wyobrazimy sobie, że na kratownicę działa tylko pionowa siła jednostkowa umieszczona w  $m$ -tym węźle i pod tem założeniem obliczymy odpowiednie siły  $\bar{S}$  w prętach.

Stosując równanie 2/ zasady prac przygotowanych, otrzymamy:

$$\bar{l} \bar{f}_m = \sum \bar{S} \Delta l$$
$$\Delta l = \frac{Sl}{EF} = S \left( \frac{l}{EF} \right) = S \rho$$

dla uproszczenia wprowadzamy oznaczenie :

$$\rho = \frac{l}{EF}$$

którego wymiar jest  $\left[ \frac{cm}{kg} \right]$ .

Podstawiając, otrzymamy:

$$\bar{l} \bar{f}_m = \sum \bar{S} S \rho$$

$\bar{S}, S$  i  $\rho$  mamy obliczone, możemy więc z tego równania znaleźć:  $\bar{f}_m$ .

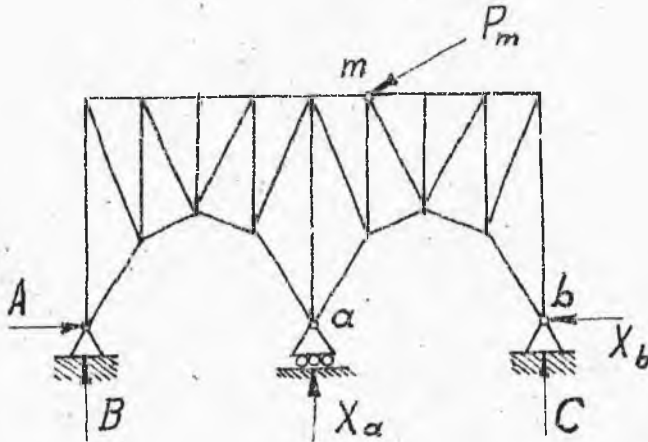
## § 6. WYZNACZENIE SIŁ

### W PRĘTACH.

Przyjmijmy, że w kratownicy wyjąłmy jeden pręt. Węzły, które on łączył mogą się ku sobie zbliżyć, co wywoła przesunięcia wszystkich innych węzłów, łatwe do obliczenia. Stosując równanie 1/ otrzymamy / pracują tylko siły zewnętrzne /:

$$\sum Q_m \bar{f}_m = S \Delta \bar{l}; \quad S = \frac{\sum Q_m \bar{f}_m}{\Delta \bar{l}}$$

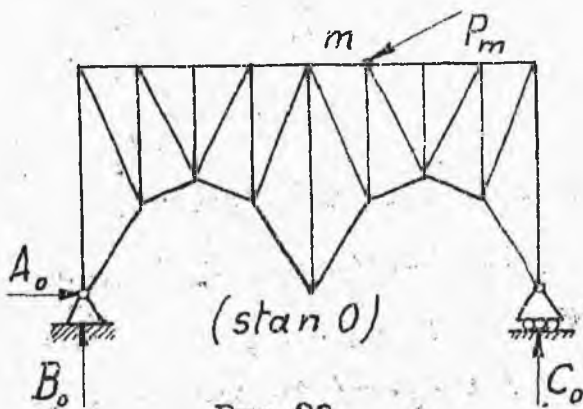
§ 7. OBLICZENIE SIŁ W UKŁADACH  
STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH.



Rys. 27.

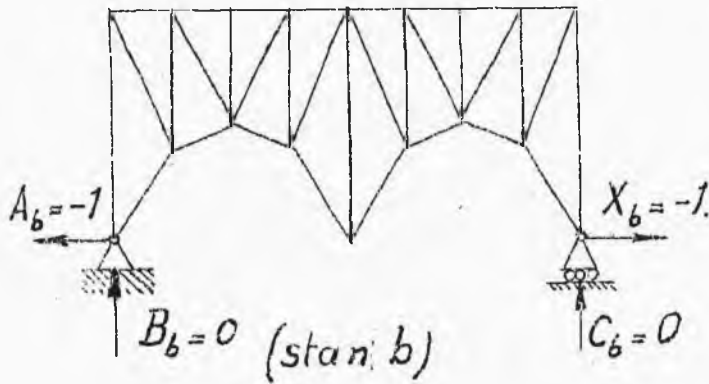
Siły wewnętrzne są  $S$ . Za statycznie niewyznaczalne przyjmujemy reakcje  $X_a$  i  $X_b$ .

Ten układ zastępujemy pomocniczym układem statycznie wyznaczalnym, otrzymanym przez usunięcie podpór i reakcji zbytecznych, a pozostawienie niezbędnych. /rys. 28/.

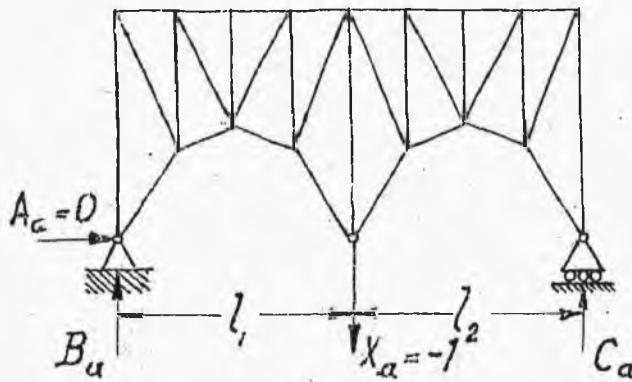


Rys. 28.

I. Zakładając to samo obciążenie co w układzie danym obliczymy z łatwością odpory  $A_0$ ,  $B_0$  i  $C_0$  i siły wewnętrzne  $S_0$ .



Rys. 29.



(stan a)

Rys. 30.

i siły wewnętrzne  $S_a$ .

Rzeczywiste siły w prętach będą sumą sił wywołanych przez I, II i III obciążenie, tylko obciążenia  $S_a$  i  $S_b$  należy mnożyć przez odpowiednie reakcje  $X_a$  i  $X_b$ , gdyż  $S_a$  i  $S_b$  były wyznaczone przy  $X_a = -1$  i  $X_b = -1$  co nie odpowia-

II. Zakładając

$$X_b = -1$$

obciążenie jak na rys. 29 / siły wewnętrzne  $P_m$  odrzucamy / , wyznaczamy siły wewnętrzne  $S_b$ .

III. Zakładając

$$X_a = -1$$

i przyjmując, że pozatem inne siły nie działają / rys. 30. / wyznaczamy odpory:

$$A_a = 0$$

$$B_a = 1 \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

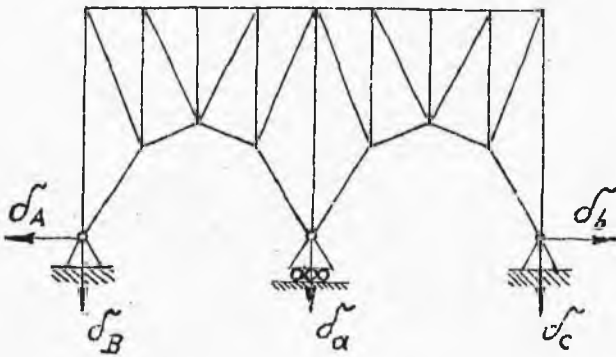
$$C_a = 1 \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

da rzeczywistości.

$$S = S_0 - X_a S_a - X_b S_b \quad (1)$$

Siły rzeczywiste dają się przedstawić jako suma sił wywołanych przez obciążenia zewnętrzne w układzie sta-

tycznie wyznaczalnym, zwanym układem podstawowym, i sił wywołanych działaniem samych reakcji statycznie niewyznaczalnych.



Aby rozważania nasze były zupełnie ogólne, przyjmijmy, że podpory nie są sztywne i ulegają przesu-

Rys. 31.

nięciom o  $\delta_A$ ,  $\delta_B$ ,  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  i  $\delta_c$ .

Takie same równania jak dla sił w prętach mamy dla znalezienia rzeczywistych reakcji podporowych:

$$A = A_0 - X_a A_a - X_b A_b \quad (2)$$

$$B = B_0 - X_a B_a - X_b B_b \quad (3)$$

$$C = C_0 - X_a C_a - X_b C_b \quad (4)$$

Aby móc te siły i reakcje wyznaczyć, należy obliczyć  $X_a$  i  $X_b$ . W tym celu zastosujemy równania pracy:



1/ Weźmiemy siły odpowiadające stanowi /a/, i przesunięcia odpowiadające stanowi rzeczywistemu, czyli równanie:

$$\sum \bar{Q}_m \delta_m = \sum \bar{S} \Delta l$$

$$+1 \delta_a - B_a \delta_b - C_a \delta_c = \sum S_a \Delta l \quad (5)$$

znak „+” ponieważ kierunek siły i przesunięcia są zgodne.

znak „-” ponieważ kierunki siły i przesunięcie są przeciwne.

Wiemy, że:

$$\Delta l = \frac{S l}{EF} = S \rho$$

przez co według równania /1/:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b$$

Oznaczmy  $-B_a \delta_b - C_a \delta_c = +L_a$ ;  $L_a$  - praca sił, wywołanych stanem a na przesunięciach rzeczywistych.

Podstawiając w równanie /5/, otrzymamy:

$$1 \delta_a + L_a = \sum S_a S \rho$$

i podstawiając S według równania /1/:

$$1 \delta_a + L_a = \sum S_0 S_a \rho - X_a \sum S_a^2 \rho + X_b \sum S_a S_b \rho \quad (6)$$

Stosując równania pracy dla sił wywołanych stanem b i przesunięć rzeczywistych, otrzymamy:

$$1 \delta_b + A_b \delta_a - C_b \delta_c = \sum S_b \Delta l \quad (7)$$

Stosując analogiczne podstawienia jak w poprzednim równaniu, otrzymamy:

$$1 \delta_b + L_b = S_o S_b \rho - X_a \sum S_a S_b \rho - X_b \sum S_b^2 \rho \quad (8)$$

Równania /6/ i /8/ są to dwa równania sprężystości, z których możemy wyznaczyć nieznane wielkości  $X_a$  i  $X_b$ , poczem znajdujemy kąty  $S$ ,  $A$ ,  $B$ , i  $C$  z równań /1/, /2/, /3/ i /4/.

Równań sprężystości otrzymamy, w każdym układzie statycznie niewyznaczalnym tyle, ile razy jest on statycznie niewyznaczalny, bo dla tylu stanów zastosujemy równania pracy.

### § 8. ZASADA BETTIEGO I PRAWO MAXWELLA.

Przekształćmy równania sprężystości przez dokonanie pewnych podstawień:

$$\sum S_o S_a \rho = \sum S_o \Delta l_a$$

gdzie  $\Delta l_a = S_a \rho$

$\Delta l_a$  - wydłużenie wywołane stanem sił / $\alpha$ /, /rys.

30/. Suma ta musi być równa pracy sił zewnętrznych stanu /0/ na przesunięciach stanu / $\alpha$ /.

$$\sum S_o \Delta l_a = \sum P_m \delta_{m\alpha}$$

Reakcje pracy tu nie wykonują, gdyż w stanie /a/, do którego odnosimy przesunięcia, podpory uważamy za sztywne. Analogicznie biorąc siły i przesunięcia z innych stanów otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \sum S_\alpha S_b \delta &= \sum S_\alpha \Delta l_b = 1 \delta_{ab} \\ &= \sum S_b \Delta l_\alpha = 1 \delta_{ba} \end{aligned} \right\} \text{Stąd } \delta_{ab} = \delta_{ba} \quad (1)$$

$$\sum S_b^2 \delta = 1 \delta_{bb}$$

$\delta_{ab}$  - oznacza przesunięcie punktu zaczepienia siły  $X_\alpha$  /o kierunku i zwrocie tejże siły/ odpowiadające stanowi /b/, t.j. sile  $X_b = -1$  /.

$\delta_{ba}$  - oznacza przesunięcie punktu zaczepienia siły  $X_b$  /o kierunku i zwrocie tejże siły/, odpowiadające stanowi /a/, t.j. działaniu siły  $X_\alpha = -1$  /.

Podstawiając te wyrażenia w równania sprężystości, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 1 \delta_\alpha + L_\alpha &= \sum P_m \delta_{m\alpha} - X_\alpha \delta_{\alpha\alpha} - X_b \delta_{ab} \\ 1 \delta_b + L_b &= \sum P_m \delta_{mb} - X_\alpha \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} \end{aligned} \quad (2)$$

Równanie /1/ wyraża prawo Maxwella:

"Jeśli w układzie sprężystym pewna siła działa najpierw na dowolny węzeł  $\alpha$ , a następnie na dowolny wę-

zeż  $b$ , to odpowiadające sobie przesunięcia węzła  $a$  pod działaniem siły w węźle  $b$  i węzła  $b$  pod działaniem siły w węźle  $a$  są jednakowe."

Objaśnienie: przesunięciami odpowiadającymi sobie nazywamy tutaj składowe przesunięć całkowitych wzięte w kierunku każdej z rozpatrywanych sił. Jest to szczególnie wypadek zasady Bettiego:

Jeżeli na układ sprężysty działamy dwoma układami sił  $P_i$  i  $Q_i$  i jeżeli przesunięcia węzłów pod działaniem sił  $Q_i$  oznaczamy przez  $q_i$ , zaś przesunięcia pod działaniem sił  $P_i$  przez  $p_i$ , to / jeżeli układ podlega prawu Hooke'a i zasadzie superpozycji / zachodzi równość:

$$\sum P_i q_i = \sum Q_i p_i$$

Z twierdzenia Bettiego można wyprowadzić równania sprężystości:

Rozpatrzmy dwa układy sił:

- 1/ Stan rzeczywisty.
- 2/ Stan  $/a/$ .

Praca sił stanu  $/a/$  na przesunięciach rzeczywistych jest równa pracy sił rzeczywistych na przesunięciach wywołanych stanem sił  $/a/$  - jest to równanie sprężystości  $/6/$ .

Tak samo, rozpatrując stan rzeczywisty i stan  $/b/$ ,

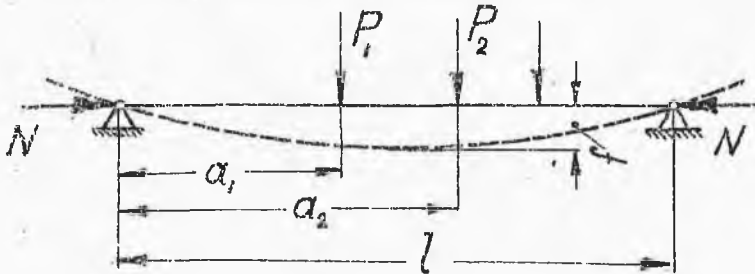
otrzymamy równanie sprężystości  $(\delta)$ .

Do znalezienia przesunięć  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{bb}$  i t.p. możemy się posługiwać planem przesunięć Williot'a.

## ROZDZIAŁ V.

### NAPRĘŻENIA W BELCE ZGINANEJ I ŚCISKANEJ LUB ROZCIĄGANEJ.

Załóżmy przekrój belki stały.



Pod wpływem poprzecznych sił  $P_i$  nastąpi ugięcie belki, powstanie strzałka  $f$ .

Rys. 32.

W Zastosujemy ogólne twierdzenie dynamiki: gdy układ sprężysty jest w równowadze, to energia jego osiąga ekstremum; przy minimum mamy równowagę stałą, przy maksimum - obwiejną.

Energja zgiętej sprężystej belki wynosi:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} dx \quad (1)$$

Dla określenia krzywej ugięcia belki stosujemy przy-

bliżone równanie, dostatecznie dokładne dla niewielkich ugięć:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' \quad (2)$$

$\rho$  - promień krzywizny ugięcia belki.

Stąd:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int EJ (y'')^2 dx \quad (3)$$

Równanie krzywej ugięcia możemy przedstawić w postaci szeregu Fouriera; biorąc tylko pierwszy wyraz, otrzymamy:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4)$$

Całkowita energia układu :

$$U = \mathcal{U} - \sum P_i y_i - N \delta l \quad (5)$$

energia  
ugięcia

energia sił  
zginających

energia sił  
podłużnych

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$y' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$y'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Podstawiając w równanie /3/ i całkując, otrzymamy:

$$\mathcal{H} = \frac{\pi^4}{4} \frac{EJ}{l^3} f^2 \quad (6)$$

według równania /4/.

$$y_i = f \sin \frac{\pi \alpha_i}{l}$$

$$\sum P_i y_i = f \sum P_i \sin \frac{\pi \alpha_i}{l} \quad (7)$$

Oznaczmy:  $ds$  - długość elementu pręta,  $dx$  - jego rzut,  
 $\delta l = \int_0^l (ds - dx)$  - wydłużenie spowodowane zginaniem.

$$ds = dx \sqrt{1 - y'^2}$$

$$\delta l = \int_0^l dx [\sqrt{1 - y'^2} - 1]$$

Rozwijając pierwiastek według dwumianu Newton'a i biorąc pierwszy wyraz, otrzymamy:

$$[\sqrt{1 - y'^2} - 1] = 1 + \frac{1}{2} y'^2 + \dots - 1 = \frac{1}{2} y'^2 + \dots$$

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx$$

Podstawiając znane  $y'$ , otrzymamy:

$$\delta l = \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l} \quad (8)$$

$$N \delta l = N \frac{\pi^2 f^2}{4l}$$

Podstawiając w równanie /5/ wielkości obliczone w równaniach /6/, /7/ i /8/, otrzymamy:

$$U = \frac{\pi^4 EJ}{4} f^2 - f \sum P_i \sin \frac{\pi \alpha_i}{l} - \frac{\pi^2 f^2}{4l} N \quad (9)$$

Różniczkując, znajdziemy minimum tej funkcji:

$$\frac{dU}{df} = \frac{\pi^4 EJ}{2} f - \sum P_i \sin \frac{\pi \alpha_i}{l} - \frac{\pi^2}{2} \frac{f}{l} N = 0$$

Rozwiązując względem  $f$ , znajdziemy:

$$f = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \frac{\sum P_i \sin \frac{\pi \alpha_i}{l}}{1 - \frac{N}{\pi^2} \frac{l^2}{EJ}} \quad (10)$$

dla  $N=0$

$$f_0 = \frac{2l^3}{\pi^4 EJ} \sum P_i \sin \frac{\pi \alpha_i}{l} \quad (11)$$

Różnica między tym wynikiem przybliżonym a dokładnym, otrzymanym przez całkowanie wzoru:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

wynosi około ½ %. Wyrażenie:

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = N_E$$

jest identyczne z wartością krytyczną siły ściskającej / wzór Eulera /.

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{N}{N_E}} \quad (12)$$



gdy  $N$  zbliża się do  $N_E$ , to  $f$  rośnie, wzór przestaje być stosowalnym; jest on wystarczająco dokładny dla:

$$N < \frac{N_E}{2}$$

Rozciąganiu odpowiada znak " plus ", "+"; rozciąganie zmniejsza strzałkę ugięcia, a więc i naprężenia.

Mając strzałkę ugięcia, łatwo jest obliczyć naprężenia.

Weźmy dla przykładu belkę swobodnie podpartą, ściskaną i równomiernie obciążoną.

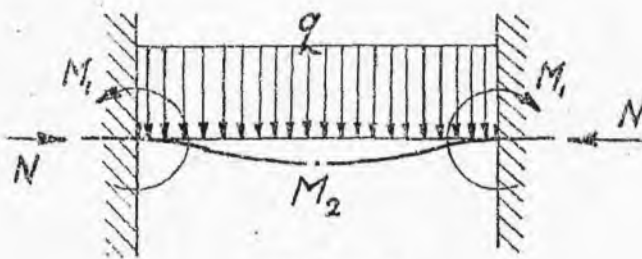
$$M_{max} = Nf + \frac{ql^2}{8}; \quad f_0 = \frac{5}{384} q \frac{l^4}{EJ}$$

$$M_{max} = \pm \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{N}{1 \mp \frac{N}{N_E}} + \frac{ql^2}{8}$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} \left( 1 \pm \frac{5}{48} \frac{\pi^2}{\pi^2} \frac{Nl^2}{EJ} \frac{1}{1 \mp \frac{N}{N_E}} \right) \\ = \frac{ql^2}{8} \left( 1 \pm \frac{1,028}{\frac{N_E}{N} \mp 1} \right)$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{ql^2}{8W} \left( 1 \pm \frac{1,028}{\frac{N_E}{N} \mp 1} \right)$$

Dla belki na końcach utwierdzonej /rys.33/:



Rys. 33.

$$f = \frac{f_0}{1 \mp \frac{N}{N_E}}$$

$$N_E = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Dokładniejsze rozwiązanie tego samego zagadnienia otrzymamy, całkując równanie

$$\frac{M}{EJ} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Dla pręta swobodnie podpartego i jednostajnie obciążonego otrzymamy, całkując:

$$f = \left( \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \right) \frac{2 - (2 + u^2) \cos u}{5/12 u^4 \cos u} \quad (13)$$

$f_0$  - strzałka ugięcia pręta tylko zginanego,

$$u = \sqrt{\frac{NI^2}{4EJ}} \quad - \text{ pomocnicze oznaczenie.}$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \quad (14)$$

Dla belki utwierdzonej /rys.33/:

$$f = f_0 \frac{24}{u^4} \left[ \frac{u(1 - \cos u)}{\sin u} - \frac{u^2}{2} \right] \quad (15)$$

$$M_1 = \frac{ql^2}{12} \left( \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{tg} u} \right) \quad (16)$$

$$M_2 = \frac{ql^2}{24} \frac{6 \left( \frac{u}{\sin u} - 1 \right)}{u^2} \quad (17)$$

Gdy nie ma siły podłużnej,  $N=0$ , otrzymamy z tych wzorów wzory dla prostego zginania, znane z nauki wytrzymałości.

Gdy siła podłużna jest rozciągająca, to należy

we wzory podstawić  $N < 0$ , otrzymamy  $u$  - urojone.

Funkcje trygonometryczne zamieniają się na hyperboliczne:

$$f = f_0 \frac{2 - (2 - u^2) \cosh u}{5/12 u^4 \cosh u} \quad (18)$$

$$\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$$

$$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$$

Równania te choć dokładniejsze są jednak też rozwiązaniem przybliżonym.

Z równań tych widzimy, że ściskanie pręta zginanego zwiększa w nim naprężenia, zaś rozciąganie - wogóle zmniejsza.



## R O Z D Z I A Ł VI.

### OBLICZANIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH.

#### § 1. UWAGI OGÓLNE.

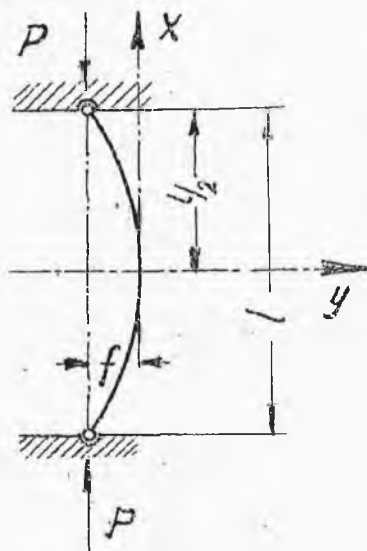
Dział ten posiada bardzo obszerną literaturę ; wzorów mamy bardzo wiele, więc przedewszystkiem musimy znać zakresy stosowalności tych wzorów.

Jest to typowe zadanie badania stałości równowagi : czy równowaga pręta ściskanego daną siłą jest stała w stanie prostym, czy w stanie wygiętym ? Prócz tego należy jeszcze zbadać, czy pręt nie ulegnie zniszczeniu pod działaniem danych sił. Są to dwa zupełnie odrębne zagadnienia, a mieszanie ich z sobą, co często się spotyka, prowadzi do wielu błędów.

#### § 2. R Ó W N A N I E E U L E R A I T E T M A J E R A

Teoretyczne rozważanie naprężeń w pręcie prostociosowym, jednorodnym i centralną siłą ściskanym, niema w praktyce bezpośredniego zastosowania, gdyż w rzeczywistości niema ani prętów jednorodnych, ani prostociosowych, ani zupełnie centralnych obciążeń.

Przy rozciąganiu niewielkie odchylenia od tych trzech warunków prawie nie wpływają na skutki obciążenia, natomiast przy pretach ściskanych mogą mieć decydujące znaczenie.



Rys. 34

Mimo to, ma rozwiązanie teoretyczne przypadku idealnego bardzo ważne znaczenie pośrednie i dlatego wypada się nim zająć przedewszystkiem.

Różniczkowe równanie linii ugięcia :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

iloczyn  $EJ$  - nazywany sztywnością zginania.

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

To równanie daje się scałkować zapomocą funkcji eliptycznych.

Dla niewielkich ugięć, możemy pominąć wyraz  $(\frac{dy}{dx})^2$  jako niewielki w porównaniu z jednością, otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{M}{EJ}$$

Po scałkowaniu /z uwzględnieniem warunków krańcowych, dla

$x=0$  jest  $y=0$  i  $\frac{dy}{dx}=0$ ;

$$y = f(1 - \cos kx) \quad (1) \quad \text{gdzie } k = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

W znalezionam równaniu linii ugięcia figuruje niezna-  
na strzałka wybożenia  $f$ . Napozór wydaje się, że można ją  
wyznaczyć z warunku :

$$\text{dla } y = f ; \quad x = \frac{l}{2}$$

Warunek ten daje jednakże równanie :

$$f = f \left( 1 - \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) \quad (2)$$

z którego widocznie nie da się obliczyć  $f$ . Ale z ró-  
wnania tego można wyprowadzić jeden wniosek bardzo donio-  
sły. Ażeby mogła powstać różna od zera / a według zało-  
żenia wywołu b a r d z o m a ł e / strzałka  $f$ , mu-  
si wyrażenie w nawiasach być równe 1, czyli :

$$\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0$$

Temu zaś czynią zadość tylko następujące wartości ar-  
gumentu funkcji cos :

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2}, 3 \frac{\pi}{2}, 5 \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

Odpowiadające wartości siły są:

$$P \equiv P_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} ; \dots \dots \dots (2n+1)^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (3)$$

Te wartości nazwiemy Eulerowskimi. Skoro jednakże siła

$P \neq P_E$ , to równanie /2/ spełnia się tylko dla  $f=0$ , t. zn. dla niewygiętej postaci równowagi pręta. Ten wniosek z naszej teorii jest sprzeczny z doświadczeniem, które wskazuje, że równowaga sprężysta wygiętej postaci pręta zachodzi przy najrozmaitszych skończonych wartościach strzałki i odpowiadających wartościach siły ściskającej, przekraczających pewną ściśle określoną wartość  $k r y$  t y c z n ą  $P_m$ . Okazuje się przeto, że tutaj nie wystarcza teoria oparta na przybliżonym równaniu różniczkowym linii ugięcia. Natomiast poprzedni wynik teorii, dotyczący najmniejszej wartości siły, dla której obok prostej postaci równowagi jest możliwa także wygięta/ o nieskończenie małej strzałce/ pozostaje w mocy. Wynik ten powiada

że:

$$P_{kr} \equiv P_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (3)$$

i daje się sprawdzić rozwiązaniem dokładnem. To rozwiązanie, podane już z końcem XVIII wieku przez Lagrange'a, przedstawia następujący związek między siłą  $P$ , a strzałką ugięcia:

$$\sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2} \frac{f}{l} \sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)^2 \cos^2 \varphi}} \quad (4)$$

Stąd łatwo odczytać, że nieskończenie małej strzałce  $f$  odpowiada  $P = P_E$ . Skoro zaś  $f$  wzrasta, to wzrastać musi i  $P > P_E$ .

Rozwinąwszy całkę eliptyczną po prawej stronie na szereg, otrzymamy:

$$\sqrt{\frac{P}{P_E}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{f}{l} \sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{f}{l} \sqrt{\frac{P}{P_E}}\right)^4 + \dots \quad (5)$$

Nietrudno dowieść, że szereg ten jest zbieżny dla wszelkich wartości  $P_E < P < 1,6 P_E$ .

Dobry wzór przybliżony dla strzałki  $f$  znajdziemy, za - trzymując tylko dwa pierwsze wyrazy szeregu, czyli:

$$\sqrt{\frac{P}{P_E}} \approx 1 + \frac{\pi^2}{16} \frac{f^2}{l^2} \frac{P}{P_E}$$

Stąd:

$$\frac{f}{l} \approx \frac{4}{\pi} \sqrt{\sqrt{\frac{P}{P_E}} - \frac{P}{P_E}} \quad (6)$$

Jeszcze lepszy wzór przybliżony otrzymujemy, zastępując funkcję pod całkową w powyższej całce, przybliżoną wartością średnią przez podstawienie  $\frac{1}{2}$  zamiast  $\cos^2 \varphi$ .

Wtedy:

$$\sqrt{\frac{P}{P_E}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{8} \frac{f^2}{l^2} \frac{P}{P_E}}}$$

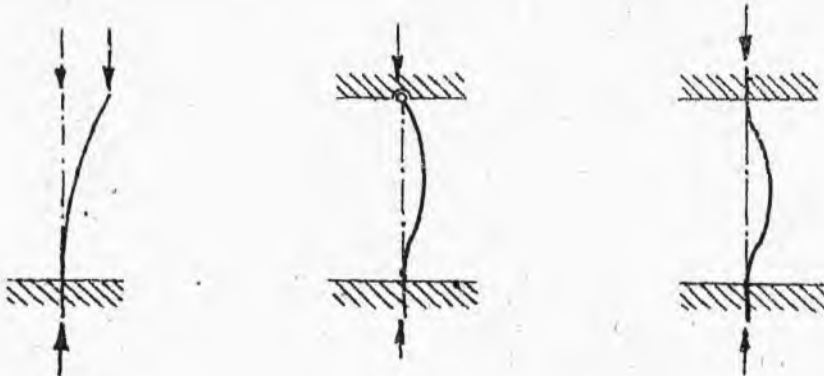


a stąd po rozwiązaniu :

$$\frac{f}{l} \approx \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P_E}{P} \left(1 - \frac{P_E}{P}\right)} \quad (7)$$

Tak z rozwiązania ścisłego, jak i ostatnich przybliżonych widać, że wyboczenie o skończonej strzałce zajść może tylko przy wartości siły ściskającej:  $P > P_{kr} = P_E$ . Wartość krytyczna obciążenia jest więc wartością, rozgraniczającą te wartości  $P < P_{kr}$ , dla których jedyną postacią równowagi pręta jest postać prostoosiowa, od tych wartości  $P > P_{kr}$ , dla których zachodzi równowaga sprężysta także przy postaci krzywoosiowej. W tym drugim przypadku już doświadczenie poucza, że tylko postać zakrzywiona jest s t a t e c z n ą, a prosta nie.

Dla prętów, o końcach ustalonych inaczej, aniżeli w przypadku powyższym, znajdziemy wzory analogiczne :



Rys. 35.

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2}$$

$$P_{kr} = 20,24 \frac{EJ}{l^2}$$

$$P_{kr} = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Analogicznie możemy wyprowadzić wzory dla prętów utwierdzonych podatnie / sprężystie /, lub w środku swej długości prowadzonych. Wszystkie te wzory mają postać:  $P_{kr} = \alpha \frac{EJ}{l^2}$  przy czym współczynnik liczbowy  $\alpha$  zależy od sposobu podparcia pręta. Wzory te ważne są tylko dla prętów o stałym przekroju. Nad wybaczeniem prętów, robiono wiele badań doświadczalnych / Tetmajer, Considère, Bauschinger, Kármán, Memmler, Ostenfeld i inni/.

Doświadczenia potwierdziły wzór teoretyczny Eulera w granicach jego ważności, zależnych od materiału pręta.

Przekształćmy wzór Eulera :

$$P_{kr} = \alpha \frac{EJ}{l^2}$$

$$J = Fi^2$$

$$P_{kr} = \alpha \frac{EF}{(l/i)^2}$$

$$\frac{P_{kr}}{F} = \sigma_{kr} = \frac{\alpha E}{S^2} \quad (8)$$

$i$  - najmniejsze ramie bezwładności.

$S$  - smukłość pręta.

$\sigma_{kr}$  - naprężenie krytyczne.

Wydó wzoru oparliśmy na prawie Hooke'a, a więc wzór jest prawdziwy dopóki naprężenie  $\sigma_{kr}$  nie przekroczy gra-

nicy proporcjonalności:  $\sigma_{kr} < \sigma_{pr}$  / Rys.37 /.

Powyżej  $S_{gr}$  ważny jest wzór Eulera.

$$\sigma_{pr} = \frac{\alpha E}{S_{gr}^2} \quad (9); \quad S_{gr} = \sqrt{\frac{\alpha E}{\sigma_{pr}}} \quad (10)$$

Przyjawszy np. normalny przypadek ustalenia przegibnego końców, mamy dla żelaza

$$E = 2000000 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{pr} = 2000 \text{ kg/cm}^2; \quad S_{gr} = 100$$

dla stali  $S_{gr}$  jest nieco mniejsze, gdyż większe jest  $\sigma_{pr}$ .

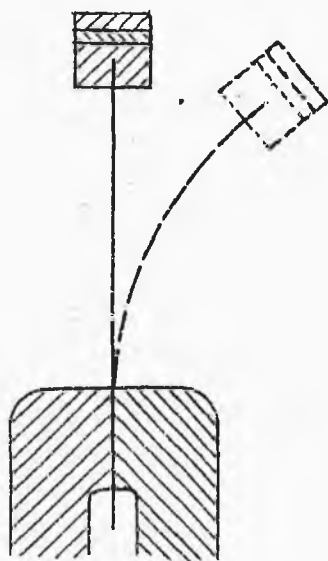
Wzór Eulera jest ważny również i dla prętów drewnianych.

Dla każdego materiału słupa / t.j. pręta ściskanego podłużnie / można przeto znaleźć wartość smukłości  $S = l/i$ , zwaną smukłością graniczną  $S_{gr}$ , która rozgranicza słupy "krępe" o smukłości  $S < S_{gr}$  od słupów "smukłych" o  $S > S_{gr}$ . Tylko do tych ostatnich stosuje się wzór Eulera, czyli innymi słowy:

Wzór Eulera podaje dokładną wartość obciążenia krytycznego tylko dla słupów o smukłości  $S > S_{gr}$ .

Dlatego wyboczenie takich słupów nazywają także wyboczeniem sprężystem; zaś wyboczenie słupów o smukłościach  $S < S_{gr}$  niesprężystem.

Że zjawisko wyboczenia przy osiowym ściskaniu słupa pryzmatycznego i jednolitego polega na zmianie warunków stateczności równowagi w zależności od wielkości siły obciążającej, dowodzi jasno proste doświadczenie następujące: Prostą sprężynę/rys. 36/ utwierdzamy dokładnie pionowo w imadle i obciążamy na



Rys. 36.

górnym końcu przez przyśrubowanie kolejno ciężarków różnej wielkości.

Przy obciążaniu ciężarkiem znacznie mniejszym od wartości  $P_{kr}$  sprężyna pozostaje prosta, a po wytrąceniu jej z prostego położenia równowagi waha<sup>się</sup> dość szybko około tego położenia i po pewnym

czasie wraca doń wskutek nieuniknionych oporów ruchu.

Wahnięcia są tem szybsze, im obciążenie jest mniejsze.

Gdy ciężarek jest mało co mniejszy od  $P_{kr}$ , to wahnięcia sprężyny stają się bardzo powolne, ale z czasem układ zajmuje położenie pionowe. Skoro jednakże przytwierdzimy ciężarek nieco większy od  $P_{kr}$ , to niepodobna nawet przy największej ostrożności otrzymać trwałej

równowagi przy prostej postaci sprężyny. Natomiast równowaga taka zachodzi przy postaci wygiętej. Potrącenie bowiem ciężarka powoduje wahnięcia około tejże zakrzywionej postaci równowagi, co dowodzi, że ona jest teraz postacią równowagi statecznej. Stateczność ta, mierzona częstością wahnień, warasta teraz ze wzrostem  $P$ , czyli oddalaniem się od wartości  $P = P_{kr}$ , podobnie jak przedtem ubywała w miarę zbliżania się do tej wartości. A zatem przy obciążeniu siłą  $P = P_{kr}$  ma równowaga charakter **r ó w n o w a g i o b o j ę t n e j**.

Przy obliczaniu prętów konstrukcyjnych narażonych na podłużne osiowe ściskanie musimy oczywiście zapewnić stateczność projektowanej prostej postaci pręta. Wymiary pręta muszą być przeto takie, ażeby największa siła  $P$ , na jaką będzie narażony w czasie służby w konstrukcji, nie przekraczała  $N$  - tej części  $P_{kr}$ , jeżeli  $N$  oznacza obrany **s t o p i e ń b e z p i e - c z e ń s t w a**, czyli **p e w n o ść** ze względu na stateczność.

To jest warunek stateczności:

$$nP \leq P_{kr}$$

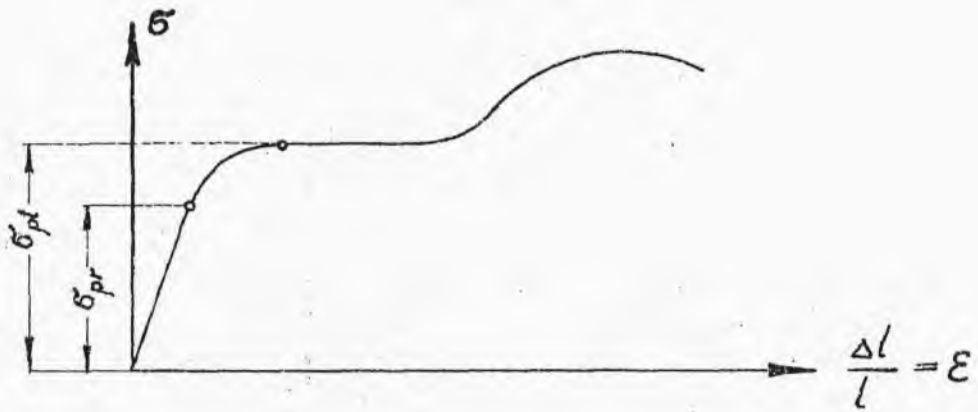
Albo dzieląc obustronnie przez pole przekroju  $F$  :

$$n\sigma \leq \sigma_{kr}$$

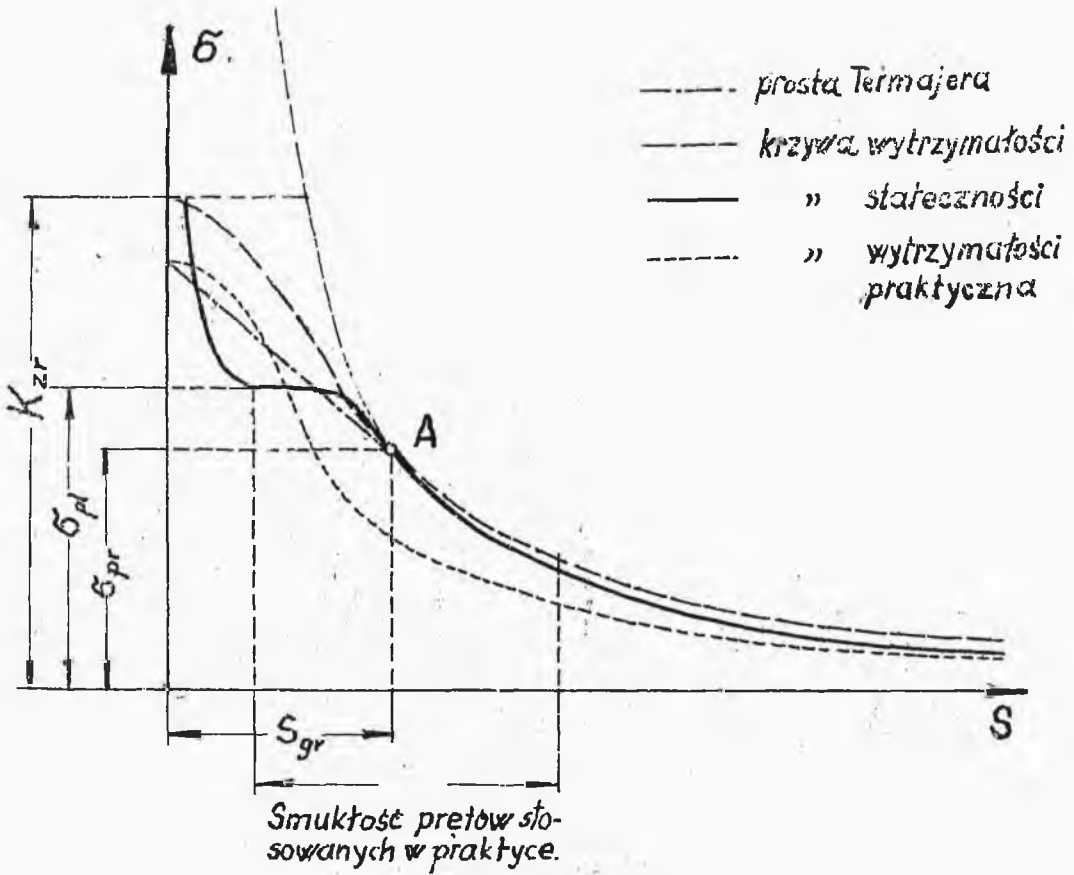
Wykres  $\sigma_{kr}$  w zależności od smukłości  $S$  przedstawiono na rys. 38 linią grubą. Linja ta od punktu A, odpowiadającego smukłości granicznej  $S_{gr}$ , jest oczywiście hiperbolą Eulerowską  $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{S^2}$ . Dla  $S < S_{gr}$  wrysowano tę linię mniej więcej według doświadczeń Kármán'a nad wybaczeniem niesprężystym prętów stalowych.

Ale obok warunku stateczności musi być spełniony także warunek wytrzymałości, t. zn. musi zachodzić pewność ze względu na osiągnięcie przez naprężenia wartości niebezpiecznych  $\sigma_{nieb}$  t. j. takich, które warunkują pojawienie się niedopuszczalnych odkształceń trwałych / plastycznych / , albo / w przypadku materiałów kruchych / pęknięcie.

Warunkowi wytrzymałości odpowiada na wykresie krzywa naprężeń niebezpiecznych, czyli krzywa wytrzymałości. Łatwo zauważyć, że w obszarze wyboczenia sprężystego, krzywa ta będzie leżała nieco wyżej od krzywej stateczności, albowiem dopiero po przekroczeniu wartości krytycznej przez obciążenie zajdzie wygięcie pręta, co za tem idzie znaczne powiększenie naprężeń po stronie



Rys. 37.



Rys. 38.

wklęsłej. Rachunek wykazuje zgodnie z doświadczeniem, że różnice rzędnych obu krzywych są przy smukłościach najczęściej stosowanych w praktyce - znikomo małe.

Dopiero przy bardzo wielkich wartościach smukłości występuje ta różnica wyraźniej.

W obszarze wyboczenia niesprężystego  $|S < S_{gr}|$ , poczynawszy od  $S_{gr}$  w dół, obie krzywe się zlewają zrazu, poczem przy całkiem małych wartościach  $S$  krzywa wytrzymałościowa przebiega niżej od statecznościowej. Tutaj jej postać nie jest dokładnie znana, ale praktycznie mało ważna. Zależy ona zresztą od bliższego określenia naprężenia niebezpiecznego.

Obie rozpatrywane krzywe odnoszą się ściśle do wyidealizowanego przypadku obciążenia środkowego przy prostej osi słupa i materiale jednolitym.

Nieuniknione w praktyce zboczenia od tego przypadku powodują pewne odchylenia doświadczalnej krzywej wytrzymałościowej od powyższej teoretycznej. Te odchylenia są całkiem nieznaczne w obszarze  $S > S_{gr}$ , natomiast bardzo wyraźne w obszarze  $S < S_{gr}$ .

Tutaj praktyczna krzywa wytrzymałościowa przebiega znacznie niżej od krzywej, otrzymanej przy bardzo starannym centrowaniu w doświadczeniach laboratoryjnych.



W ogromnym materiale doświadczalnym Tetmajera odpowiadała dokładność centrowania zwykłej praktycznej.

W obszarze powyżej  $S_{gr}$ , zwanym wyboczeniem sprężystym, punkty otrzymane z tych doświadczeń były bardzo blisko hyperboli Eulera; natomiast poniżej  $S_{gr}$ , w obszarze wyboczenia niesprężystego, punkty były rozrzucone, nie układały się w żadną krzywą.

W obszarze tym krzywa stateczności i wytrzymałości są zupełnie oddzielne; krzywa stateczności dla prętów, których smukłość zbliża się do zera, teoretycznie dąży do nieskończoności; natomiast w praktyce pręt pozostając w stanie równowagi w stanie prostym ulega zniszczeniu pod działaniem obciążenia.

Dlatego Tetmajer dla obciążenia niebezpiecznego przyjął prostą, łączącą punkt hyperboli Eulera, odpowiadający  $S_{gr}$ , z  $\sigma_{nieb}$  dla pręta ściśkanego, niepodlegającego wyboczeniu.

Równanie tej prostej  $\sigma_{nieb} = a - bS$  gdzie  $a$  — naprężenie niebezpieczne ze względu na wytrzymałość materiału,  $b$  — współczynnik ustalony empirycznie.

Jak widzimy z tych rozważań nie można stworzyć jednolitej formuły do obliczenia prętów we wszystkich obszarach smukłości.

Przetendujący do tego dawny wzór Navier - Schwartz

- Rankina:

$$\frac{P_w}{F} = \frac{a}{1+bs^2}$$

nie ma żadnej wartości naukowej, a bardzo małą praktyczną.

### § 3. ZASTOSOWANIE ENERGETYCZ-

### NEGO KRYTERJUM RÓWNOWAGI.

Metoda ta jest łatwiejsza od całkowania równania różniczkowego linii ugięcia, gdy mamy wypadki bardziej skombinowane, n.p. pręt zginany, w wielu punktach podparty i ściskany.

Dla przykładu rozpatrzmy pręt obu końcami przegibnie ustalony / rys.34 /. Energia sprężystości / czyli praca odkształcenia / wynosi w nim:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V \quad V - \text{objętość pręta.}$$

Jak wiemy, pręt znajduje się w równowadze, gdy całkowita energia układu osiąga ekstremum: przy minimum - równowaga stała; przy maximum - równowaga chwiejna.

W układzie sprężystym mamy energję potencjalną sił sprężystych i sił zewnętrznych.

Jeśli, przez wygięcie ściskanego pręta dodatkową siłą boczną, spowodujemy wzrost energii układu, znaczy, że w stanie prostym mieliśmy równowagę stałą. Gdy nastą-

pi zmniejszenie energii - równowaga w stanie prostym była niestateczna.

Granice między temi dwoma wypadkami stanowi obciążenie krytyczne. Energię sił wewnętrznych / sprężystości / oznaczyliśmy przez  $\Pi$ , jej przyrost, spowodowany zgięciem pręta, przez  $\Delta \Pi$ .

Przy zgięciu pręta końce jego zbliżają się, przez co energia potencjalna  $U$  sił zewnętrznych maleje o  $\Delta U$ .

Gdy  $\Delta \Pi - \Delta U = 0$  mamy krytyczną wartość obciążenia. Energia  $\Pi$  i  $U$  została już obliczona przy obliczaniu pręta jednocześnie zginanego i ściskanego / Roz. V /.

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \int_1 E J (y'')^2 dx$$

gdzie  $y=f(x)$  jest równaniem krzywej ugięcia.

$$\Delta U = \frac{P}{2} \int_1 (y')^2 dx$$

$$\Delta \Pi = \Delta U ; \quad \frac{1}{2} \int_1 E J (y'')^2 dx = \frac{P}{2} \int_1 (y')^2 dx$$

$$P_{kr} = \frac{\int_1 E J (y'')^2 dx}{\int_1 (y')^2 dx} \quad (11)$$

Dla praktycznego zastosowania tego równania brak nam równania krzywej ugięcia  $y = f(x)$ , gdyż  $P_{kr}$  zależy od tej krzywej. Rzeczywista krzywa będzie ta dla której  $P_{kr}$  będzie najmniejsze, co zachodzi, gdy niema żadnych sił dodatkowych powodujących wygięcia, a więc rzeczywista linja ugięcia od samego ściskania.

Dla rozwiązania tego równania zakładamy prawdopodobny kształt krzywej opatrzony nieoznaczonymi parametrami. N.p. dla naszego wypadku weźmiemy szereg Fouriera, mogący przedstawiać dowolną krzywą:

$$y = f_1 \sin \frac{\pi x}{l} + f_2 \frac{\sin 3\pi x}{l} + \dots$$

Zwykle wystarczająco dokładne jest wziąć jeden lub dwa wyrazy. Możemy też różniczkować cały szereg, podstawić w równanie /11/ i, różniczkując względem  $f_1, f_2, f_3$  i t.d., obliczyć tak te parametry, aby  $P_{kr}$  było minimum.

Z rachunku tego wypadnie  $f_1 \neq 0$  zaś reszta  $f_n = 0$ , a więc wrócimy do dawnego rozwiązania.

Możemy krzywą ugięcia przyjąć za parabolę o równaniu:

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2$$
$$y' = \frac{8f}{l^2} x$$
$$y'' = \frac{8f}{l^2}$$

gdzie  $f$  - nieoznaczony parametr będący strzałką ugięcia.

Podstawiając w szukane całki, otrzymamy:

$$\int_{-l/2}^{+l/2} EJ \left( \frac{8f}{l^2} x \right)^2 dx = \frac{64 EJ f^2}{l^3}$$

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \left( \frac{8f}{l^2} x \right)^2 dx = \frac{64}{12} \frac{f^2 l^3}{l^4} = \frac{64}{12} \frac{f^2}{l}$$

$$P_{kr} \approx \frac{54 EJ f^2}{l^3} \frac{12}{64} \frac{l}{f^2} = 12 \frac{EJ}{l^2} \quad (12)$$

Rozwiązanie to od rozwiązania dokładnego różni się o 20%. Gdybyśmy uwzględnili dalsze wyrazy funkcji wymiernej n.p.  $y = \alpha x^2 + \beta x^4$  / wyraz zawierający  $x^3$  nie potrzebny, gdyż krzywa względem osi  $y$  jest symetryczna /, to błąd wynosiłby około 1%.

Metodę tę zastosował prof. Timoszenko do rozwiązania wielu zawiłych zagadnień.

#### § 4. WZÓR JOHNSONA - OSTENFELDA.

Robiąc doświadczenia nad wytrzymałością osiowo ściśniętych prętów, otrzymujemy następujące wyniki: najpierw pod działaniem siły pręt skraca się; początkowo odkształcenie jest sprężyste, następnie staje się trwałym po przekroczeniu granicy sprężystości. Tu już obciążenie pręta jest niebezpieczne, siła obciążająca  $P_{nieb}$  jest granicą, do której możemy dopuszczać siły działające na ten

pręt jako m. element konstrukcyjny. Przy dalszem obciążaniu pręt zacznie się wyginać, następuje wyboczenie niesprężyste, jeżeli smukłość pręta jest mniejsza od smukłości granicznej, obliczonej ze wzoru Eulera :

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{G_{gr}}}$$

Natomiast dla prętów o smukłości większej od granicznej zachodzi wyboczenie sprężyste, to jest przed przekroczeniem granicy sprężystości, a tylko przy osiągnięciu przez siłę ściskającą wartości krytycznej  $P_{kr}$ , obliczonej ze wzoru Eulera.

Po wyboczeniu się pręta /sprężystem lub niesprężystem/ możemy jeszcze siłę ściskającą zwiększać, aż osiągniemy granicę wytrzymałości  $P_{największe}$ , po dojściu do którego, ugięcie pręta wzrasta, nawet ze zmniejszeniem siły, i następuje złamanie.

Ponieważ wzajemne położenie wielkości  $P_{nieb}$ ;  $P_{kr}$  i  $P_{najw}$  zależy od smukłości pręta  $S = \frac{l}{c}$ , więc i krzywą naprężeń kreślimy zawsze jako funkcję smukłości  $S$  / rys.38/. Dla dużych smukłości  $S > S_{gr}$  niebezpieczne obciążenie elementu konstrukcyjnego wynosi  $P_{kr}$ , to jest obciążenie, przy którym rozpoczyna się wygięcie pręta. Natomiast dla smukłości  $S < S_{gr}$  już przed osiągnięciem wartości  $P_{kr}$ , wyginającej pręt obciążenie sta-

je się niebezpieczne  $P_{nieb}$ , bo, przekroczywszy granicę sprężystości, wywołuje odkształcenia plastyczne.

Nad wyboczeniem prętów drewnianych wykonał w ostatnich latach wiele doświadczeń prof. Ostenfeld w Kopenhadze. Doświadczenia dokonywał przeważnie nad świerczyną polską i szwedzką. Znalazł, że dla świerczyny polskiej współczynnik sprężystości  $E$  waha się w granicach od 105000  $kg/cm^2$  do 205000  $kg/cm^2$ , średnio 156000  $kg/cm^2$ , a więc znacznie więcej, niż zwykle podręczniki podają.

Wytrzymałość doraźna na ściskanie wynosiła od 400 do 790  $kg/cm^2$ , średnio 580  $kg/cm^2$ .

Dla prętów ścispanych o smukłości  $S < S_{gr}$  prof. Ostenfeld podał następujący wzór empiryczny, zgodny z jego doświadczeniami:

$$\sigma_{nieb} = 247(1 - 0,0000618 S^2) \quad (13)$$

/ważny dla smukłości od 40 do  $S_{gr}$  przy czym  $S_{gr} = 75$  do 80/.

Wzór empiryczny Tetmajera linjowy:

$$\sigma_{nieb} = 293 - 1,94 S$$

daje w tych granicach  $S$  wartości nieco mniejsze.

Dla smukłości  $S > S_{gr}$  jest stosowny wzór Eulera ze współczynnikiem Tetmajera, odpowiadającym pozornie wartości

$$E = 100000 \text{ kg/cm}^2: \quad \sigma_{nieb} = \frac{987000}{S^2}$$

Wzór Ostenfelda, chociaż paraboliczny, w zastosowaniu jest wygodniejszy od linjowego wzoru Tetmajera. Zobaczymy to na przykładzie. W praktyce zwykle mamy dane obciążenie pręta  $P$ , jego długość  $l$ , materiał, a więc współczynnik sprężystości  $E$  i granicę wytrzymałości  $k_c$  i współczynnik pewności  $n$ .

Szukamy przekroju  $F$ . Najpierw zakładamy kształt przekroju i w podręczniku szukamy pomocniczej wielkości  $\varphi = \frac{F}{l^2}$  stałej dla danego przekroju.

$$\text{Dla koła} \quad -\varphi = 4\pi$$

$$\text{Dla kwadratu} \quad -\varphi = 12$$

$$\text{Dla prostokąta} \quad -\varphi = 12 \frac{b}{h}$$

Następnie musimy przeprowadzić dwa obliczenia :

1/ Z wzoru Eulera :

$$\sigma_{nieb} = \pi^2 \frac{E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{l^2} \frac{F}{\varphi}$$

$$\sigma = \frac{P}{F} ; \sigma_{nieb} = \frac{P_n}{F}$$

$$\frac{P_n}{F} = \frac{\pi E F}{l^2 \varphi}$$

$$F = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{P_n \varphi}{E}} \quad (14)$$



Teraz obliczamy dla znalezionej przekroja smukłość  $S$  ; jeżeli wypadnie  $S > S_{gr}$  to wzór Eulera był tu słusnie zastosowany. Natomiast w przeciwnym wypadku musimy przeprowadzić drugie obliczenie.

2/ Ze wzoru Ostenfelda :

$$\sigma_{nieb} = k - \gamma S^2$$

gdzie  $k$  i  $\gamma$  są spókożaynikami zależnymi od materjału.

Podstawiając  $\sigma = \frac{nP}{F}$  i  $S^2 = \frac{l^2 \varphi}{F}$  , otrzymamy:

$$\frac{nP}{F} = k - \gamma \frac{l^2 \varphi}{F}$$
$$F = \frac{nP}{k} + \frac{\gamma l^2 \varphi}{k}$$

Ponieważ  $\frac{nP}{k} = F_0$

jest to przekrój obliczony ze względu na samo ściskanie, nie uwzględniając wybożenia, możemy napisać:

$$F = F_0 + \frac{\gamma \varphi l^2}{k} \quad (15)$$

Dla drzewa jest

$$\frac{\gamma}{k} = 0,0000618; \quad F = F_0 + 0,0000618 \varphi l^2$$

przyczem  $F, F_0$  i  $l$  w cm.

### § 5. PRZEKROJE DRAŻONE .

Dla przekroi drażonych, oprócz obliczenia całego pręta na ścianki, musimy się jeszcze upewnić, że nie nastąpi wyłoczenie samych ścianek w postaci sfaldowania się ich.

Dla przekroju rurowego i dla naprężeń nie przekraczających granicy sprężystości mamy następujący wzór, określający naprężenie, przy którym zachodzi wyłoczenie ścianek:

$$\sigma_{kr} = E \frac{\delta}{r} \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \quad (16)$$

$\mu = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  liczba Poissona  
 $\delta$  - grubość ścianki  
 $r$  - promień rury

Wzór ten jest ważny dla długości  $l$  niezbyt małych w porównaniu do  $r$ , że wzoru Bulora mieliśmy

$$\sigma_{kr}' = \frac{\pi^2 E l^2}{l^2}$$

wzór ten nie straci ważności w naszym przypadku, jeżeli do wartości mniejszą od poprzedniego, czyli gdy:

$$\sigma_{kr}' < \sigma_{kr}$$

$$\frac{\pi^2 E l^2}{l^2} < E \frac{\delta}{r} \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

po podstawieniu wartości liczbowych i przeliczeniu

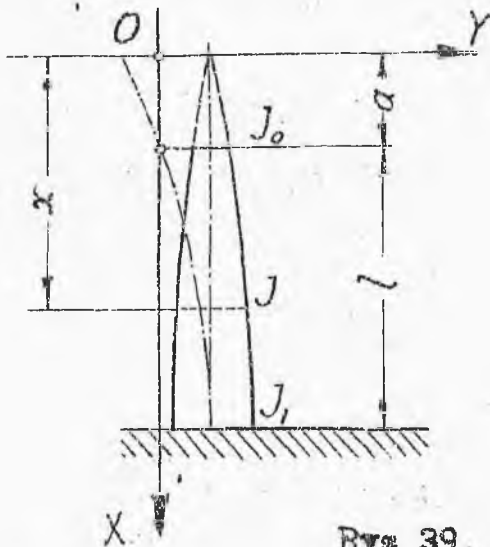
/ dla rury  $i^2 \approx \frac{r^2}{2}$  /, otrzymany:

$$\frac{\sigma}{r} > 8 \left(\frac{r}{l}\right)^2 \quad \text{albo} \quad \frac{\sigma}{l} > 8 \left(\frac{r}{l}\right)^3 \quad (17)$$

warunek ważności wzoru Eulera dla cienkościennego pręta rurkowego.

### § 6. PRĘTY O ZMIENNYM PRZEKROJU.

Dla lekkości często robimy pręty w środku grubsze, gdzie zachodzi największe niebezpieczeństwo wyboczenia, zaś ku końcom cieńsze. Prętami takimi zajmował się już Euler. Dla obliczenia takiego pręta/rys.39/musimy znać prawo, według którego zmienia się moment bezwładności przekroju  $J$ . Oś  $Y$  prowadzimy przez pomysłany



Rys.39.

punkci  $O$ , w którym moment bezwładności przekroju byłby zero, gdyby powyżej końca pręta zmieniał się według założonego prawa. Oś  $X$  prowadzimy przez ugięty ko-

niec pręta. Załóżmy kwadratową zmianę momentu:

$$\left. \begin{aligned} J_0 &= c a^2 \\ J_1 &= c (l+a)^2 \\ J &= c x^2 \end{aligned} \right\} c = \frac{J_0}{l^2} \left( \sqrt{\frac{J_1}{J_0}} - 1 \right)^2$$

Różniczkowe równanie linii ugięcia :

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py$$

podstawiając założoną zmienną  $J$  :

$$Ec x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0$$

Całkowanie możliwe tylko dla

$$\frac{P}{Ec} > \frac{1}{4}$$

doprowadza do wyniku:

$$y = \sqrt{x} \left[ c_1 \sin\left(\beta \log \frac{x}{a}\right) + c_2 \cos\left(\beta \log \frac{x}{a}\right) \right] \quad (18)$$

$$\text{gdzie } \beta = + \sqrt{\frac{P}{Ec} - \frac{1}{4}}$$

jak widzimy dla  $\frac{P}{Ec} < \frac{1}{4}$

wypadają wartości urojone.

Stałe  $c_1$  i  $c_2$  wyznaczamy z warunków krańcowych. Z warunku  $x=a$ ;  $y=0$  wynika  $c_2=0$ . Stałą  $c_1$  obliczamy z warunku:  $x=a+l$ ;  $\frac{dx}{dy} = 0$ .


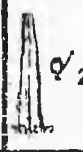

Stosując energetyczne kryterium równowagi pręta dojdziemy do warunku




$$\operatorname{tg} (2\beta \log \frac{J_0}{J_1}) - 2\beta = 0 \quad (19)$$

Wyliczywszy stąd  $\beta$ , i podstawiając w równanie określające znaczenie  $\beta$ , otrzymamy

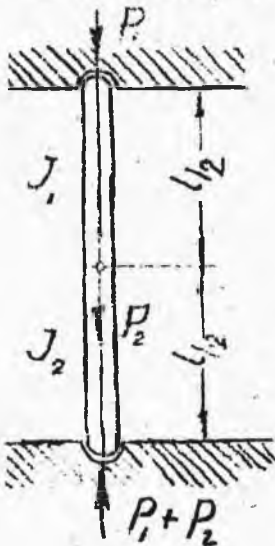
$$P_{kr} = \alpha \frac{EJ_1}{l^2} \quad (20)$$

gdzie  $\alpha$  zależy od stosunku  $\frac{J_0}{J_1}$  i od założonego prawa zmienności  $J$ . Poniższa tabliczka podaje przeliczone  $\alpha$  dla różnych wielkości  $\frac{J_0}{J_1}$ , dla dwóch wypadków zamocowania pręta i dla dwóch praw zmiany  $J$ :

$\frac{J_0}{J_1}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	1,000	5 400	6,372	7,052	7,616	8,092
	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023
	0,000	3,121	4,414	5,406	6,242	6,979

$\frac{J_0}{J_1}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$J = c x^2$ 	8,512	8,892	9,244	9,568	9,870
$J = c x^2$ 	2,128	2,223	2,311	2,392	2,467
$J = c x^4$ 	7,645	8,258	8,828	9,363	9,870

§ 7. PRĘT OPCIĄŻONY W ŚRODKU.



Rys. 40.

Dla tak obciążonego pręta (rys. 40) dla wyoboczenia sprężystego mamy wzór:

$$(P_1 + P_2)_{kr} = \pi^2 \frac{E J_2}{(\beta l)^2} \quad (21)$$

gdzie  $\beta$  zależy od stosunku  $\frac{J_1}{J_2}$  i od  $k$ .

$$k = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Poniższa tabliczka podaje wartości współczynnika  $\beta$

dla różnych  $k$  i  $\frac{J_2}{J_1}$ .

$\frac{J_2}{J_1} \backslash k$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
1,00	1,00	0,95	0,91	0,89	0,87
1,25	1,05	1,005	0,97	0,94	0,915
1,50	1,12	1,06	1,02	0,99	0,96
1,75	1,18	1,11	1,07	1,04	1,005
2,00	1,24	1,16	1,12	1,08	1,05

### § 8. WYBOCZENIE NIMOŚRODOWE



Rys.41.

Dla ściskania nimosrodowego wartość krytyczna obciążenia  $P_{kr}$  nie istnieje, gdyż nawet najmniejsza siła powoduje pewne ugięcie pręta. Mamy więc za zadanie znaleźć  $P_{nieb}$ .

Linję ugięcia / rys.41./ możemy znaleźć jak dla pręta zginanego i ści-

skanego, przy czem moment zginający:

$$M = P(f + \delta)$$

Przekrój niebezpieczny znajduje się w środku pręta i tam w skrajnem włóknie po stronie wklęsłej zachodzi największe naprężenie:

$$\sigma_{nieb} = \frac{P}{F} + \frac{Me}{J}$$

Oznaczając średnie naprężenie  $\sigma = \frac{P}{F}$

i naprężenie krytyczne ze wzoru Eulera  $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{S^2}$

i wprowadzając równanie krzywej ugięcia pręta, dojdziemy do wzoru:

$$\sigma_{nieb} = \sigma \left( 1 + \frac{\delta}{k} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} \right) \quad (22)$$

gdzie  $k = \frac{l^2}{e_1}$  - promień rdzenia przekroju w płaszczyźnie, w której zachodzi wyboczenie.

Wzór ten do bezpośredniego użytku dla obliczenia pola przekroju jest żmudny w rachunkach, ale w "Przeglądzie Technicznym" / r.1928. Artykuł prof. M.T. Hubera "Obliczenie wytrzymałościowe prętów podkłonnie ściskanych"/, mamy podane wykresy, które niezmiernie upraszczają nam zadanie. /str. 169/



Działając obie strony równania przez  $\sigma_E$  i oznaczając:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_E} = y; \quad \frac{\sigma}{\sigma_E} = z; \quad \frac{f}{k} = x;$$

otrzymamy

$$y = z \left( 1 + x \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{z} \right) \quad (23)$$

wspomniane wykresy przedstawiają się prostych  $y = f(x)$  dla różnych  $z = \text{const}$ . Mając pret. mogą obliczyć maksymalne dopuszczalne obciążenie. Najpierw zakładam miarodowocę obciążenie  $f$ , jaka może zajść w konstrukcji. Znam niebezpieczne naprężenie dla danego materiału  $\sigma_{nieb}$  i obliczam  $\sigma_E$  i  $k$ .

Z tych danych obliczam  $y$  i  $x$  i na ich przecięciu z wykresem znajduję  $z$

$$z = \frac{\sigma}{\sigma_E} = \frac{n P}{P_E}$$

skąd obliczam dopuszczalne obciążenie:

$$P = \frac{P_E z}{n}$$

gdzie  $P_E$  jest krytycznym obciążeniem ze wzoru Eulera zaś  $n$  współczynnikiem pewności.

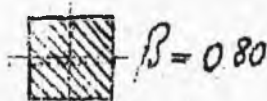
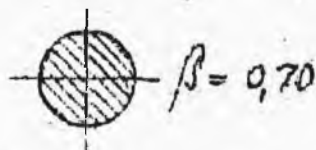
Doświadczenia Ostenfelda wykazały, że powyżej przytoczonego wzór można stosować i przy naprężeniach prze-

kraczących granicę sprężystości; należy tylko wprowadzić pewną poprawkę w postaci współczynnika znalezionego empirycznie dla danego przekroju i materiału.

Wzór przyjmie postać:

$$\sigma_{nieb} = \sigma \left( 1 - \beta \frac{L}{k} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} \right) \quad (24)$$

$\beta$  - oznacza ten doświadczalny współczynnik, wynoszący dla różnych przekrojów drzewa.



Obliczając  $\sigma = \frac{\pi^2 E}{S^2}$  należy współczynnik sprężystości  $E$  zmniejszyć o 10% przy obciążeniach przekraczających granicę sprężystości.

Analogicznie można znaleźć współczynniki dla innych materiałów i przekrojów, ale wymaga to zestawienia olbrzymiej ilości danych doświadczalnych, która ta praca nie została jeszcze dokonana.

Wzór powyższy można znacznie uprościć przez dokonanie pewnych przybliżonych podstawień.

Oznaczmy:

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_E}} = \alpha$$

$$\begin{aligned} \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha} - 1 = \\ &= 1 + \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 1 + \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

W przybliżeniu możemy przyjąć:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

otrzymamy :  $\sec \alpha \cong 1 + \frac{\frac{1}{2} \alpha^2}{1 - \frac{1}{2} \alpha^2}$

ponieważ  $\alpha^2 = \frac{\pi^2 \sigma}{4 \sigma_E}$

otrzymamy:  $\sec \alpha \cong 1 + \frac{\frac{\pi^2 \sigma}{8 \sigma_E}}{1 - \frac{\pi^2 \sigma}{8 \sigma_E}}$

Zastąpmy teraz w liczniku  $\frac{\pi^2}{8}$  przez  $\frac{5}{4}$  zaś w mianowniku przez 1. Popękniony przytem błąd znosi się częściowo z błędem popełnionym przy zastąpieniu sinusa kąta przez sam kąt.

Otrzymamy :

$$\sec \cong 1 + \frac{\frac{5}{4} \frac{\sigma}{\sigma_E}}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_E}} = 1 + \frac{5}{4} \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma}$$

Podstawiając do wzoru /24/, otrzymamy :

$$\check{\sigma}_{nieb} \cong \sigma \left[ 1 + \beta \frac{\check{\sigma}}{k} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma} \right) \right] \quad (25)$$

Jak duża jest dokładność tego przybliżenia zobaczymy przeliczając dla różnych stosunków  $\frac{\sigma}{\sigma_E}$  wartość dokładną i przybliżoną wyrazu  $\sec \alpha$ .

Wyniki podaje następująca tabliczka :

$\frac{\sigma}{\sigma_E}$	0,1	0,5	0,8	1
$\sec \alpha$	1,139	2,250	6,000	$\infty$
$1 + \frac{5}{4} \frac{\sigma}{\sigma_E - \sigma}$	1,138	2,252	6,061	$\infty$

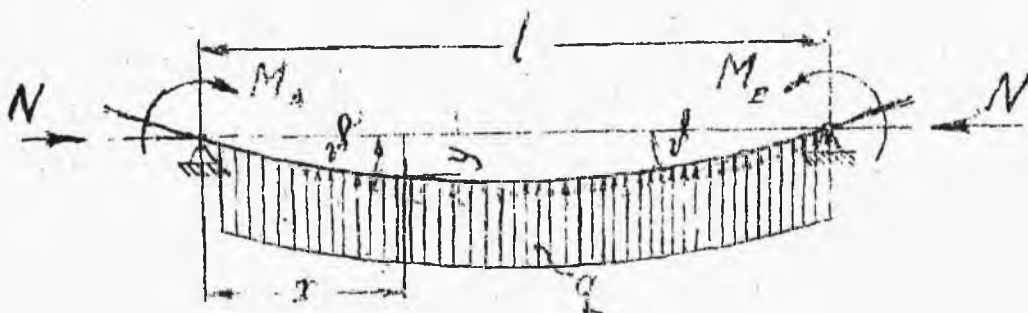


## ROZDZIAŁ VII.

### BELKI WIELOPRZESŁOWE ZGINANE SIŁAMI POPRZECZNYMI I POLEŻENIE ŚCISKANE.

Belki takie grają ważną rolę w budowie płatowców, w ten sposób obciążone są podkłonice w dwupłatach i jednoplatach z zastrzałkami. Poniżej tutaj sposób obliczanie ich najdokładniejszy ze stosowanych w praktyce.

#### § 1. BELKA JEDNOPRZESŁOWA.



Rys. 42

Rozpatrzmy belkę /rys.42/, zginaną jednostajnym obciążeniem  $q$ ; momentami podporowymi  $M_A$  i  $M_B$  i ścisną siłą osiową  $N$ .

Moment zginający w przekroju  $x$  wynosi :

$$M = M_B \cdot \frac{x}{l} + M_A \cdot \frac{x-l}{l} - \frac{q l}{2} x + \frac{q x^2}{2} + N y =$$

$$= M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{l} - \frac{q}{2}(l-x)x + Ny \quad (1)$$

Wychodząc z przybliżonego równania linii ugięcia

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad \text{i oznaczamy} \quad \sqrt{\frac{EJ}{N}} = k$$

otrzymamy z równania // / różniczkowe równanie linii ugięcia:

$$k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = - \frac{1}{N} \left[ M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{l} + \frac{q}{2}(l-x)x \right] \quad (2)$$

Całkowanie tego równania prowadzi do wyniku:

$$y = C_1 \cos \frac{x}{k} + C_2 \sin \frac{x}{k} + 2 \frac{k^2}{N} + \frac{1}{N} \left[ M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{l} - \frac{q}{2}(l-x)x \right] \quad (3)$$

Sprawdzimy ten wynik przez dwukrotne różniczkowanie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{C_1}{k} \sin \frac{x}{k} + \frac{C_2}{k} \cos \frac{x}{k} +$$

$$- \frac{1}{N} \left[ (M_B - M_A) \frac{1}{l} - \frac{q l}{2} + q x \right]$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{C_1}{k^2} \cos \frac{x}{k} - \frac{C_2}{k^2} \sin \frac{x}{k} - \frac{q}{N}$$

Mnożąc obie strony równania przez  $k^2$  i dodając  $y$ ,  
otrzymamy:

$$k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = - \frac{1}{N} \left[ M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{l} - \frac{q}{2} (l-x)x \right]$$

a więc równanie różniczkowe /2/ z którego wyszliśmy.

Dla wyznaczenia stałych całkowania  $C_1$  i  $C_2$  posłużymy się warunkiem sztywności podpór:

$$\text{dla } x = 0, \quad y = 0$$

$$\text{i dla } x = l, \quad y = 0$$

Podstawiając pierwszy warunek w równanie /3/ otrzymamy:

$$0 = C_1 + q \frac{k^2}{N} - \frac{M_A}{N}$$

$$C_1 = \frac{1}{N} (M_A - q k^2)$$

oznaczymy  $M_A - q k^2 = D_1$ , wtedy  $C_1 = \frac{D_1}{N}$

Z drugiego warunku otrzymamy:

$$0 = C_1 \cos \frac{l}{k} + C_2 \sin \frac{l}{k} + q \frac{k^2}{N} - \frac{M_B}{N}$$

Podstawiając obliczone  $C_1$ , otrzymamy:

$$C_2 = \frac{1}{N} \frac{D_2}{\sin \alpha} - D_1 \cotg \alpha$$

gdzie  $\alpha = \frac{l}{k} = l \sqrt{\frac{N}{EJ}}$  zaś  $D_2 = M_B - qk^2$

podstawiając znalezione stałe w równanie / 3 /,

otrzymamy:

$$y = \frac{1}{N} \left[ D_1 \left( \cos \frac{x}{k} - \sin \frac{x}{k} \cotg \alpha \right) + D_2 \frac{\sin \frac{x}{k}}{\sin \alpha} + \right. \\ \left. + qk^2 - M_A - (M_B - M_A) \frac{x}{l} + \frac{q}{2} (l-x)x \right] \quad (4)$$

Znalezione  $y$  podstawiamy w równanie / 1 / ;

otrzymamy:

$$M = \left[ D_1 \left( \cos \frac{x}{k} - \sin \frac{x}{k} \cotg \alpha \right) + D_2 \frac{\sin \frac{x}{k}}{\sin \alpha} + qk^2 \right] \quad (5)$$

Z równania / 4 / linii ugięcia możemy obliczyć kąty między stycznymi do tej linii w punktach podparcia a nie ugiętą osią belki:

$$\vartheta = -\frac{1}{N} \left[ -\frac{D_1}{k} \left( \sin \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{D_2}{k} \frac{1}{\tg \alpha} + \right. \\ \left. - (M_B - M_A) \frac{1}{l} - \frac{ql}{2} \right]$$



Analogicznie równanie otrzymamy dla  $\mathcal{J}'$ . Podstawiając odpowiednie wyrażenia zamiast  $D_1$  i  $D_2$  przekształcając równania, otrzymamy:

$$\mathcal{J}' = \frac{1}{Nl} \left[ M_A \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + M_B \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) + \right. \\ \left. - ql^2 \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (7)$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{Nl} \left[ M_A \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) + M_B \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + \right. \\ \left. - ql^2 \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (8)$$

oznaczymy:

$$\frac{1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}}{Nl} = \psi'$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1}{Nl} = \psi''$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}}{Nl} = \psi'''$$

Otrzymamy:

$$\mathcal{J}' = M_A \psi' + M_B \psi'' - ql^2 \psi''' \quad (9)$$

$$\mathcal{J} = M_A \psi'' + M_B \psi' - ql^2 \psi''' \quad (10)$$

W dalszym ciągu zadaniem naszym będzie znalezienie największego momentu i przekroju, w którym on zachodzi.

Dla znalezienia maximum funkcji  $M=f(x)$  zróżniczkujemy ją i przyrównamy pochodną do zera:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{k} \left[ \cos \frac{x}{k} \left( \frac{D_2}{\sin \alpha} - D_1 \cot \alpha \right) - D_1 \sin \frac{x}{k} \right] = 0$$

Rozwiązując to równanie względem  $x$ , otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{k} = \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\sin \alpha} - \cot \alpha = \frac{D_2 - D_1 \cos \alpha}{D_1 \sin \alpha} \quad (11)$$

Równanie / 5 /, przez wyciągnięcie przed nawias  $\cos \frac{x}{k}$  i pogrupowanie wyrazów, możemy przedstawić w postaci:

$$M = \cos \frac{x}{k} \left[ D_1 + \operatorname{tg} \frac{x}{k} \left( \frac{D_2}{\sin \alpha} - D_1 \cot \alpha \right) \right] + k^2 q \quad (12)$$

obliczyliśmy:  $\operatorname{tg} \frac{x}{k} = \frac{D_2 - D_1 \cos \alpha}{D_1 \sin \alpha}$

stąd wyliczymy:  $\cos \frac{x}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{k}}} =$

$$= \frac{D_1 \sin \alpha}{\pm \sqrt{D_1^2 \sin^2 \alpha + D_2^2 - 2 D_1 D_2 \cos \alpha + D_1^2 \cos^2 \alpha}}$$

$$= \pm \frac{D_1 \sin \alpha}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 - 2 D_1 D_2 \cos \alpha}}$$

Podstawiając w równanie /12/, /ze względu na znak wyrażenia dla  $\operatorname{tg} \frac{x}{k}$  należy zatrzymać tutaj znak minus „-“/, otrzymamy :

$$M_{\text{extr.}} = qk^2 - \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 - 2 D_1 D_2 \cos \alpha} \quad (13)$$

Podstawiając odpowiednie wartości zamiast  $D_1$ ,  $D_2$  i  $k$  otrzymamy:

$$M_{\text{extr.}} = ql^2 \left[ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\left( \frac{M_A}{ql^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{M_A}{ql^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \left( \frac{M_B}{ql^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \cos \alpha + \left( \frac{M_B}{ql^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2} \right] \quad (14)$$

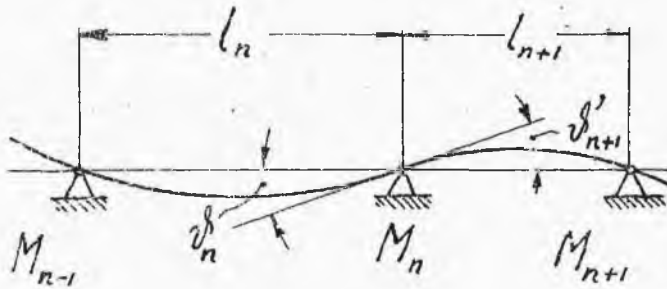
Gdy momenty podporowe nie istnieją  $M_A = M_B = 0$ , to równanie upraszcza się :

$$M_{\text{extr.}} = qk^2 \left[ 1 - \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \right] =$$

$$= \frac{ql^2}{L^2} \left( 1 - \sec \frac{\alpha}{2} \right) \quad (15)$$

§ 2. BELKA CIĄGAŁA.

Postaramy się teraz wyprowadzić równanie dla belki ciągłej, analogiczne do znanego równania trzech momentów, tylko bardziej ogólne, bo uwzględniające siły osiowe /rys.43 /.

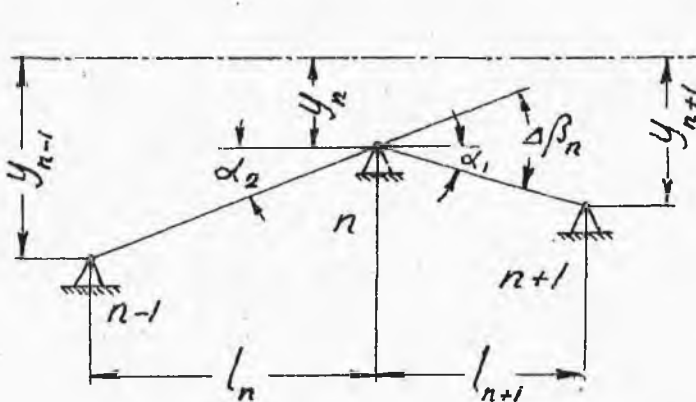


Rys.43.

Gdy podpory są na jednej wysokości, wtedy ciągłość belki wyraża się równaniem:

$$v_n + v'_{n+1} = 0$$

Jeżeli uwzględnimy ugięcie podpór lub umieszczenie ich nie na jednej prostej, wtedy odcinki łączące punkty podparcia zawierają między sobą kąt  $\Delta\beta$  / rys.44/.



$$\Delta\beta_n = \alpha_1 - \alpha_2$$

kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  jako niewielkie zastąpimy przez ich tangensy:

$$\Delta\beta_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}} - \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \quad (16)$$

Rys.44.

Gdy podpory leżą na jednej wysokości

$$y_{n+1} = y_n = y_{n-1}; \quad \Delta\beta_n = 0$$

W przeciwnym wypadku mamy równanie:

$$v_n^{\beta} + v_{n+1}^{\beta'} = \Delta\beta_n \quad (17)$$

Ponieważ każde z przęsek belki podlega analogicznemu obciążeniu do belki jednoprzęskowej, na którą działają momenty podporowe, więc kąty  $v_n^{\beta}$  i  $v_{n+1}^{\beta'}$  możemy obliczyć z równań / 9 / i / 10 /, zastępując wszelkie wielkości odpowiednimi indeksami:

$$v_n^{\beta} = M_{n-1} \psi_n'' + M_n \psi_n' - q_n l_n^2 \psi_n''' \quad (18)$$

$$v_{n+1}^{\beta'} = M_n \psi_{n+1}' + M_{n+1} \psi_{n+1}'' - q_{n+1} l_{n+1}^2 \psi_{n+1}''' \quad (19)$$

Podstawiając w równanie / 17 / i grupując wyrazy, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta\beta_n + q_n l_n^2 \psi_n''' + q_{n+1} l_{n+1}^2 \psi_{n+1}''' = \\ = M_{n-1} \psi_n'' + M_n (\psi_n' + \psi_{n+1}') + M_{n+1} \psi_{n+1}'' \quad (20) \end{aligned}$$

Jest to równanie zupełnie analogiczne do równania trzech momentów / Bertot - Clapeyron / przybierają tylko współczynniki  $\psi$ , zależące od podłużnej siły  $N$ , i od długości i sztywności belki.

Posługujemy się tym równaniem analogicznie do rów-

nania trzech momentów dla obliczenia momentów podporowych.

Gdy siła ściskająca osiągnie wartość krytyczną Eule-rowską, wtedy momenty wypadają nieskończenie wielkie, co oczywiście w rzeczywistości nie zachodzi, bo siły skończone mogą wywołać tylko skończone naprężenia; powodem tego jest zastosowanie przy wyprowadzaniu powyższego wzoru przybliżonego równania linii ugięcia

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

W praktyce niema to dla nas znaczenia bo przy tych obciążeniach belka ulega złamaniu.

### § 3. ZASTOSOWANIE PRAKTYCZNE .

Dla praktycznego zastosowania wyprowadzonego równania należy dokonać pewnych przekształceń. Otrzymaliśmy równanie /20/:

$$\begin{aligned} M_{n-1} \psi_n'' + M_n (\psi_n' + \psi_{n+1}') + M_{n+1} \psi_{n+1}'' &= \\ &= q_n l_n^2 \psi_n''' + q_{n+1} l_{n+1}^2 \psi_{n+1}''' + \Delta \beta_n \end{aligned}$$

gdzie współczynniki mają następujące znaczenie :

$$\psi' = \frac{1}{lN} \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) ; \quad N_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

$$\psi'' = \frac{1}{lN} \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right); \quad \alpha = \frac{l}{k} = \sqrt[4]{\frac{N}{EJ}} =$$

$$\psi''' = \frac{1}{lN} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad = \pi \sqrt[4]{\frac{N}{N_E}}$$

Dla kąta pochylenia belki na podporze otrzymaliśmy równanie / 7 / :

$$\psi'' = M_A \frac{1}{lN} \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + M_B \frac{1}{lN} \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) +$$

$$- ql^2 \frac{1}{lN} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

Gdy niema siły podłużnej  $N$ , wtedy równanie przyjmuje postać:

$$(\psi'') = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \quad (21)$$

Możemy w analogicznej formie napisać równanie / 7 / na kąt  $\psi''$ , mnożąc i dzieląc każdy wyraz odpowiednio przez  $3EJ$ ,  $6EJ$  lub  $24EJ$  i stosując oznaczenie  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{N}{EJ}}$ :

$$\psi'' = \frac{M_A l}{3EJ} \left[ \frac{3EJ}{l^2 N} \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right] + M_B \frac{l}{6EJ} \left[ \frac{6EJ}{l^2 N} \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) \right] +$$

$$- \frac{ql^3}{24EJ} \left[ \frac{24EJ}{l^2 N} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{M_A l}{3EJ} \left[ \frac{3}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right] + \frac{M_B l}{6EJ} \left[ \frac{6}{\alpha^2} \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right) \right] +$$

$$- \frac{q l^3}{24EJ} \left[ \frac{24}{\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (22)$$

Jak widzimy siła podkresna wprowadziła do każdego wyrazu równania współczynniki będący tylko funkcją  $\alpha$ .

Wprowadźmy pewne oznaczenia na te funkcje:

Współczynnik pierwszy wyraża Nachylenie belki w Punkcie działania Momentu - nazwijmy go: napum /  $\alpha$  /.

Współczynnik drugi wyraża Nachylenie belki od Końcowego Momentu - nazwijmy go: nakom /  $\alpha$  /.

Współczynnik trzeci wyraża Nachylenie belki od Obciążenia - nazwijmy go : naob /  $\alpha$  /

Wprowadzając te oznaczenia do równania trzech momentów i zakładając stałe  $EJ$  i  $\alpha$  dla wszystkich przęseł, otrzymamy:

$$\frac{M_{n-1} l_n}{EJ} \frac{1}{6} \operatorname{nakom}(\alpha) + 2 \frac{M_n}{EJ} \left( \frac{l_n}{6} \operatorname{napum}(\alpha) + \frac{l_{n+1}}{6} \operatorname{napum}(\alpha) \right) +$$

$$+ \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{EJ} \frac{1}{6} \operatorname{nakom}(\alpha) =$$

$$= \frac{q_n l_n^3}{4EJ} \frac{1}{6} \operatorname{naob}(\alpha) +$$

$$+ \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{4EJ} \frac{1}{6} \operatorname{naob}(\alpha) + \Delta \beta_n \quad (23)$$



Mnożąc równanie przez  $6EJ$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} M_{n-1} l_n \text{nakom}(\alpha) + 2M_n (l_n + l_{n+1}) \text{napum}(\alpha) + M_{n+1} l_{n+1} \text{nakom}(\alpha) = \\ = \frac{1}{4} q l_n^3 \text{naob}(\alpha) + \frac{1}{4} q l_{n+1}^3 \text{naob}(\alpha) + \\ + 6EJ \Delta \beta_n \end{aligned} \quad (24)$$

Gdy siły ściskające, momenty bezwładności, lub współczynnik sprężystości są różne dla różnych przęsek, wtedy wygodniej jest obliczyć kąty nachylenia belki na danej podporze, przyrównać je do siebie i z tego równania obliczyć moment na danej podporze.

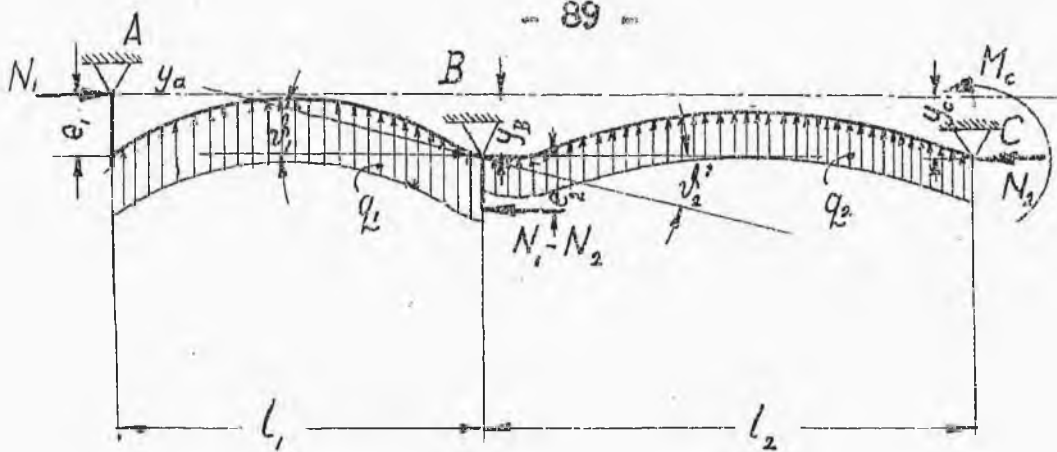
Dla obliczenia kątów nachylenia mamy następujące wzory:

$$\vartheta' = \frac{M_A l}{3EJ} \text{napum}(\alpha) + \frac{M_B l}{6EJ} \text{nakom}(\alpha) - \frac{q l^3}{24EJ} \text{naob}(\alpha) \quad (25)$$

$$\vartheta = \frac{M_A l}{6EJ} \text{nakom}(\alpha) + \frac{M_B l}{3EJ} \text{napum}(\alpha) - \frac{q l^3}{24EJ} \text{naob}(\alpha) \quad (26)$$

Funkcje  $\text{napum} / \alpha /$ ,  $\text{nakom} / \alpha /$  i  $\text{naob} / \alpha /$  zostały obliczone i ułożone w tablice, umieszczone na końcu książki.

Przykład liczbowy / zaczerpnięty z wykładów prof. Madelunga w Berlinie /



Rys. 45.

Dane / rys. 45 / :

$$l_1 = 400 \text{ cm} \quad e_1 = 5 \text{ cm} \quad y_A = 0$$

$$l_2 = 500 \text{ cm} \quad e_2 = -12 \text{ cm} \quad y_B = 10 \text{ cm}$$

$$\Delta\beta_1 = \frac{y_B - y_A}{l_1} = 0,025 \quad y_C = 29 \text{ cm}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{y_C - y_B}{l_2} = 0,038$$

Przekroje:

Materiał: duralumin

$$F_1 = 8 \text{ cm}^2 \quad F_2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$J_1 = 800 \text{ cm}^4 \quad J_2 = 500 \text{ cm}^4 \quad E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_1 = 80 \text{ cm}^3 \quad W_2 = 50 \text{ cm}^3$$

$$q_1 = 5,0 \text{ kg/cm} \quad q_2 = 4,8 \text{ kg/cm}$$

$$N_1 = 17000 \text{ kg} \quad N_2 = 8000 \text{ kg}$$

Na podporze A mamy moment tylko od mimośrodkowego ściskania:

$$M_A = N e_1 = 85000 \text{ kg cm}$$

Na podporze  $C$  mamy dany moment od zwisającej części skrzydła:

$$M_c = 96000 \text{ kgcm.}$$

Na podporze  $B$ , prócz szukanego momentu, spowodowanego ciążkością belki, działa jeszcze moment od mimośrodowej siły  $N_1 - N_2$ . Siłę tę policzymy jako działającą na pierwsze przęsło, lecz również możnaby ją / z odwrotnym znakiem / zaliczyć do przęsła drugiego; na wynik rachunku nie ma to wpływu.

Ten dodatkowy moment wynosi:  $(N_1 - N_2)e_2 = -108000 \text{ kgcm}$

Obliczmy współczynniki  $\alpha$  dla obu przęseł:

$$k_1 = \sqrt{\frac{EJ_1}{N_1}} = 181,5 \text{ cm}; \quad \alpha_1 = \frac{l_1}{k_1} = 2,202 (= 126^\circ)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{EJ_2}{N_2}} = 209,5 \text{ cm}; \quad \alpha_2 = \frac{l_2}{k_2} = 2,390 (= 137^\circ)$$

Z tablicy znajdziemy:

$$\text{nakom } |\alpha_1| = 2,1318$$

$$\text{napur } |\alpha_1| = 1,6115$$

$$\text{nakom } |\alpha_2| = 2,6313$$

$$\text{napur } |\alpha_2| = 1,8709$$

$$\text{naob } |\alpha_1| = 1,9476$$

$$\text{naob } |\alpha_2| = 2,3590$$

Obliczymy według równań |25| i |26|:

$$v_1 = \frac{M_A l_1}{6EJ_1} \text{nakom}(\alpha_1) + [M_B + (N_1 - N_2)e_2] \frac{l_1}{3EJ_1} \text{napum}(\alpha_1) +$$

$$- \frac{q_1 l_1^3}{24EJ_1} \text{naob}(\alpha_1) + \Delta\beta_1$$

$$v_2' = - \frac{M_B l_2}{3EJ_2} \text{napum}(\alpha_2) - \frac{M_c l_2}{6EJ_2} \text{nakom}(\alpha_2) +$$

$$+ \frac{q_2 l_2^3}{24EJ_2} \text{naob}(\alpha_2) + \Delta\beta_2$$

Z warunku ciągłości belki  $v_1' = v_2'$ , po podstawieniu wartości liczbowych, otrzymamy równanie:

$$\frac{85000 \times 400 \times 2,1318}{6 \times 700000 \times 800} + M_B \left( \frac{400 \times 1,6115}{3 \times 700000 \times 800} + \frac{500 \times 1,8709}{3 \times 700000 \times 500} \right) +$$

$$+ \frac{96000 \times 500 \times 2,6313}{6 \times 700000 \times 500} - \frac{708000 \times 400 \times 1,6115}{3 \times 700000 \times 800} =$$

$$= \frac{5 \times 400^3 \times 1,9476}{24 \times 700000 \times 800} + \frac{4,8 \times 500^3 \times 2,359}{24 \times 700000 \times 500} + 0,038 - 0,025$$

Z tego równania obliczymy moment gnący  $M_B$  na podporze B.

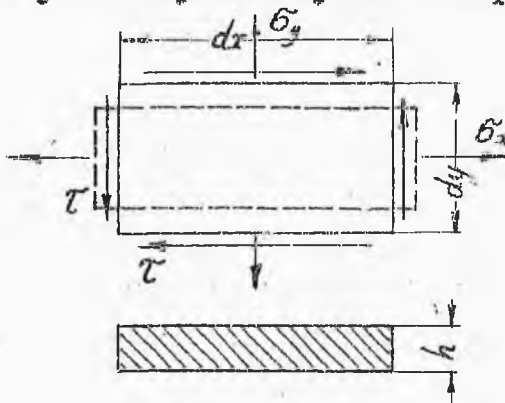
## ROZDZIAŁ VIII.

### WYTRZYMAŁOŚĆ CIENKICH PŁYT.

#### § 1. DWUWYMIAROWY STAN NAPIĘCIA.

Rozważając wytrzymałość cienkich płyt, możemy zwykle pominąć naprężenia normalne w przekrojach podłużnych, równoległych do płaszczyzny płyty i składowe styczne w przekrojach poprzecznych, posiadające kierunek prostopadły do płaszczyzny płyty.

Przyjmujemy zatem, że w każdej warstewce płyty panuje dwuwymiarowy stan napięcia.



Przyjmujemy, że materiał nie jest izotropowy, lecz w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach współczynnik sprężystości osiąga maximum i minimum. Te-

Rys.46. go rodzaju materiały zo-

wiemy krótko " ortotropowemi ". Własność tę posiadają np. materiały włókniste jak drzewo.

W materiałach tych obciążenia normalne, działające w tych dwóch głównych kierunkach, nie wywołują naprę-

żeń stycznych ; natomiast przy obciążeniach w innych kierunkach naprężenia styczne powstają.

W dwuwymiarowym stanie napięcia wszystkie naprężenia, działające na wycięty element płyty / rys.46 / o grubości  $h$  i bokach  $dx$  i  $dy$  można sprowadzić do następujących / rys.46 /: naprężenia normalne w kierunku dwóch głównych osi sprężystości  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  ; naprężenia styczne  $\tau$  jednakowe dla obu kierunków / własność dwuwymiarowego stanu napięcia /.

Oznaczmy przez  $E_1$ , współczynnik sprężystości, a przez  $m_1$ , liczbę Poisson'a w kierunku osi  $x$ , zaś przez  $E_2$  i  $m_2$  - w kierunku osi  $y$ .

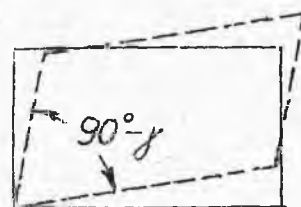
Stąd odkształcenia  $\epsilon_x$  i  $\epsilon_y$ , wywołane naprężeniami normalnymi, wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{1}{m_2} \frac{\sigma_y}{E_2} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{1}{m_1} \frac{\sigma_x}{E_1} \end{aligned} \right\} (1)$$

wydłużenie                      skrócenie

Prócz tego naprężenia ścinające wywołują odkształcenia postaciowe / rys.47 /  $\gamma = \frac{\tau}{G}$

Pomiędzy współczynnikami sprężystości ciała izotropowego zachodzi związek:



Rys.47.

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E$$

Również istnieją pewne związki między współczynnikami sprężystości ciała ortotropowego, które postaramy się wyprowadzić.

Energja odkształcenia elementu płyty wynosi:

$$dU = U' h dx dy \quad (2)$$

gdzie

$$U' = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau \gamma) \quad (3)$$

jest energją odkształcenia jednostki objętości.

Gdy odkształcenia, bez zmiany naprężeń, otrzymają nieskończenie małe wirtualne przyrosty, to energja wzrośnie o

$$\delta U' = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau \delta \gamma \quad (4)$$

Różniczkując  $U' = f(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma)$  otrzymamy:

$$\delta U' = \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U'}{\partial \gamma} \delta \gamma \quad (5)$$

Z równań |4| i |5| otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial U'}{\partial \varepsilon_y}; \quad \tau = \frac{\partial U'}{\partial \gamma} \quad (6)$$

Ponieważ związki między naprężeniami a wydłużeniami są funkcjami liniowymi i jednorodnymi, więc rugując z równania /3/ naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau$  przy pomocy wydłużeń  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\gamma$  otrzymamy energię odkształcenia  $U'$  jako jednorodną kwadratową funkcję wydłużeń. Funkcja taka ma ogólną postać:

$$U' = \frac{1}{2} a_{11} \epsilon_x^2 + a_{12} \epsilon_x \epsilon_y + a_{13} \epsilon_x \gamma + \frac{1}{2} a_{22} \epsilon_y^2 + a_{23} \epsilon_y \gamma + \frac{1}{2} a_{33} \gamma^2$$

gdzie liczby  $a$  oznaczają stałe materiału.

Przez różniczkowanie tego równania względem  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\gamma$  znajdziemy naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau$  według równań /6/:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11} \epsilon_x + a_{12} \epsilon_y + a_{13} \gamma \\ \sigma_y &= a_{21} \epsilon_x + a_{22} \epsilon_y + a_{23} \gamma \\ \tau &= a_{31} \epsilon_x + a_{32} \epsilon_y + a_{33} \gamma \end{aligned} \right\} (7)$$

Ponieważ przyjmujemy ortogonalną anizotropowość materiału i zakładamy kierunki osi  $x$  i  $y$  zgodne z kierunkami głównych osi sprężystości, więc naprężenia styczne  $\tau$  mogą powodować tylko odkształcenia postaciowe, a więc:  $a_{31} = a_{13} = 0$ ;  $a_{23} = a_{32} = 0$



Z równań /7/ obliczymy odkształcenia :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \sigma_x - \frac{a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \sigma_y - \frac{a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \sigma_x \\ \gamma &= \frac{\tau}{a_{33}} \end{aligned} \right\} (8)$$

Oznaczywszy każdy współczynnik jedną literą, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\sigma_y}{E_3} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\sigma_x}{E_3} \\ \gamma &= \frac{\tau}{G_0} \end{aligned} \right\} (9) \quad \begin{aligned} E_1 &= \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} \\ E_2 &= \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \\ E_3 &= \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{12}} \\ G_0 &= a_{33} \end{aligned}$$

Porównując równania /9/ z równaniami /1/ zauważymy tożsamość:

$$E_3 = E_1 m_1 = E_2 m_2 \quad (10)$$

Jest to szukany związek między współczynnikami sprężystości ciała ortotropowego.

Podstawiając otrzymane równania /9/ na odkształcenia

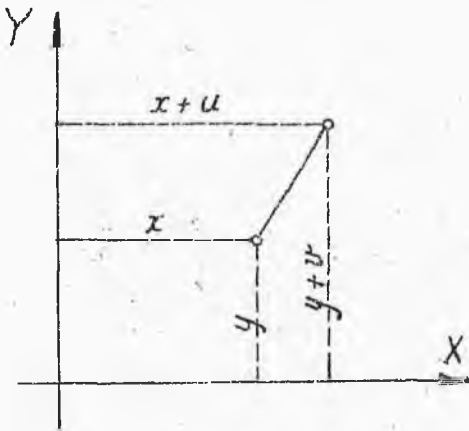
w równania / 2 / i / 3 / na pracę odkształcenia elementu płyty i całkując na całą powierzchnię płyty, otrzymamy całkowitą pracę odkształcenia płyty.

$$U = \iint U^h dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint h \left( \frac{\sigma_x^2}{E_1} + \frac{\sigma_y^2}{E_2} - \frac{2\sigma_x \sigma_y}{E_3} + \frac{\tau^2}{G_0} \right) dx dy \quad (11)$$

Przejdziemy teraz do naszego głównego zadania: obliczyć naprężenia w płycie, mając dane siły zewnętrzne, wymiary płyty i stałe materiału.

Wprowadzimy pewne oznaczenia / rys.48 / :



Niech  $x$  i  $y$  będą współrzędnymi jakiegoś punktu płyty przed odkształceniem sprężystym, zaś  $x+u$  i  $y+v$  po odkształceniu;  $u$  i  $v$  są to składowe przesunięć skutkiem odkształcenia.

Rys.48.

Ważny drugi punkt nieskończenie bliski o współrzędnych  $x+dx$  i  $y+dy$ ; po odkształceniu jego współrzędne będą  $x+u+dx+du$  i  $y+v+dy+dv$ .

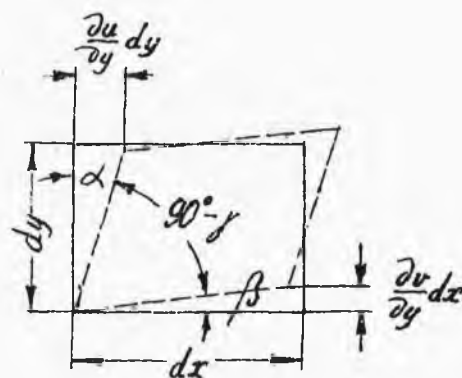
Posługując się temi oznaczeniami możemy napisać stosunki przyrostu elementu długości do jego długości

$$\frac{du}{dx} \quad \text{i} \quad \frac{dv}{dy}$$

co jak wiadomo jest wydłużeniem jednostkowym.

Otrzymamy trzy równania:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (12)$$



Rys. 49

Trzecie równanie wynika z rys.49:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha &= \frac{\partial u}{\partial y} dy : dy = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \operatorname{tg} \beta \approx \beta &= \frac{\partial v}{\partial x} dx : dx = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \gamma = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Podstawiając otrzymane z równań /12/ wielkości  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma$  w równania /9/, różniczkując pierwsze równanie dwukrotnie względem  $y$ , drugie dwukrotnie względem  $x$ , trzecie raz względem  $x$  i raz względem  $y$

i odejmując od sumy dwóch pierwszych trzecie, otrzymamy:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{1}{E_3} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} +$$
$$- \frac{1}{E_3} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{G_0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = 0 \quad (13)$$

Warunkiem równowagi elementu płyty są równania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Z równań tych widzimy, że naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau$  możemy traktować jako drugie pochodne pewnej funkcji  $\varphi$  dwóch zmiennych  $x$  i  $y$ . Funkcję tę wprowadził do nauki sprężystości Airy.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Wstawiając te wartości w równanie /13/, otrzymamy równanie różniczkowe z jedną niewiadomą  $\varphi$  :

$$E_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + E_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0 \quad (14)$$

gdzie oznaczono:

$$k = E_1 E_2 \left( \frac{1}{2G_0} - \frac{1}{E_3} \right)$$

To równanie określa postać funkcji naprężeń /Airy'ego/.

Gdy ciało jest izotropowe, wtedy:

$$E_1 = E_2 = E; \quad E_3 = m E; \quad G_0 = G = \frac{m}{2(m+1)} E$$

Równanie uprzedzi się:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (15)$$

Jest to tak zwane równanie biharmoniczne.

Zagadnienie znalezienia naprężeń w płycie zostało sprowadzone do całkowania równania biharmonicznego w przypadku ciała izotropowego, zaś w przypadku ciała ortotropowego równanie jest nieco zawilsze, ale całkuje się analogicznie, jak biharmoniczne.

## § 2. UGIĘCIE PŁYTY.

W lotnictwie stosujemy nieraz płyty bardzo cienkie, n.p. ścianki belek dwuteowych i t.p. Stąd powstają tu

zagadnienia stateczności ; ścianka belki przed złamaniem może ulec pofakdowaniu.

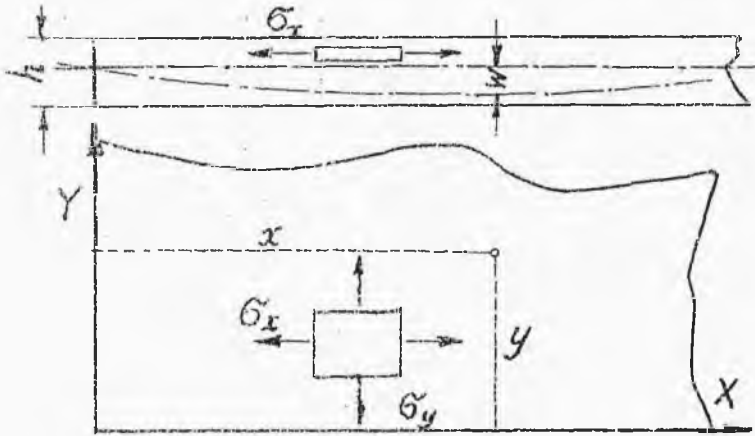
Zagadnienia związane z wytrzymałością płyt są znacznie więcej skomplikowane niż zagadnienia, odnoszące się do belek. Dlatego wprowadzimy parę założeń upraszczających zadanie.

Zakładamy, że po ugięciu się płyty mamy pewną warstwę obojętną, w której nie ma naprężeń. Założenie to jest przybliżone, gdyż powierzchnia ugiętej płyty jest wogóle powierzchnią nierozwijalną, a więc w tej pomysłanej warstwie obojętnej musiały zajść pewne wydłużenia. To przybliżone założenie nie odbiega wiele od rzeczywistości, jeśli ugięcie płyty jest małe zarówno w stosunku do jej wymiarów poprzecznych jak i do jej grubości. Przy ugięciach niewielkich naprężenia w obciążonej płycie zależą od kwadratu jej grubości, natomiast przy dużych ugięciach powstają siły rozciągające, podobnie jak w belce o końcach zamocowanych w sposób nie pozwalający na zbliżenie się ich ku sobie ; tu naprężenia będą zależały od pierwszej potęgi grubości płyty.

Zajmować się będziemy płytami, których grubość jest niewielka w porównaniu z wymiarami poprzecznymi.

W rozważaniach pominiemy naprężenia normalne  $\sigma_z$ , pro-

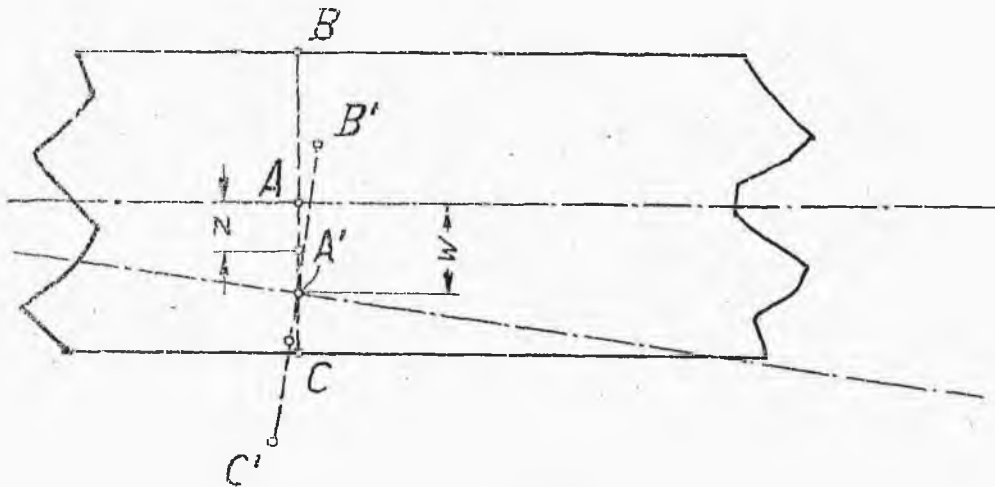
stopadłe do płaszczyzny płyty / jest to duży błąd, gdy mamy siły skoncentrowane / i naprężenia styczne  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni płyty. Inaczej mówiąc zakładamy, że zginana płyta znajduje się w dwuwymiarowym stanie napięcia, istnieją tylko na-



prężenia:  $\sigma_x, \sigma_y$  i  $\tau$ .

Teraz będziemy poszukiwali ugięcia płyty w zależności od położenia danego punktu, czyli równania

Rys.50.  $w = f(x, y)$ .



Rys.51.

Zakładamy, / rys.51 / że punkty znajdujące się na jednej prostej prostopadłej do płaszczyzny obojętnej, zostaną na tej prostej po ugięciu się płyty i że punkty powierzchni obojętnej przy odkształceniu poruszają się po prostych prostopadłych do płaszczyzny płyty.

Przy tych założeniach, jeśli współrzędne punktu  $A$  na powierzchni obojętnej były przed ugięciem  $x, y$  i  $0$  to po ugięciu będą  $x, y$  i  $w$ .

Natomiast punkt nie leżący na płaszczyźnie obojętnej posiadał przed ugięciem współrzędne  $x, y$  i  $z$  zaś po ugięciu  $x+u, y+v$  i  $z+w$ .

Z tych założeń i oznaczeń wynikają równania:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (16)$$

Podstawiając równania / 16 / w równania / 12 /, otrzymamy:

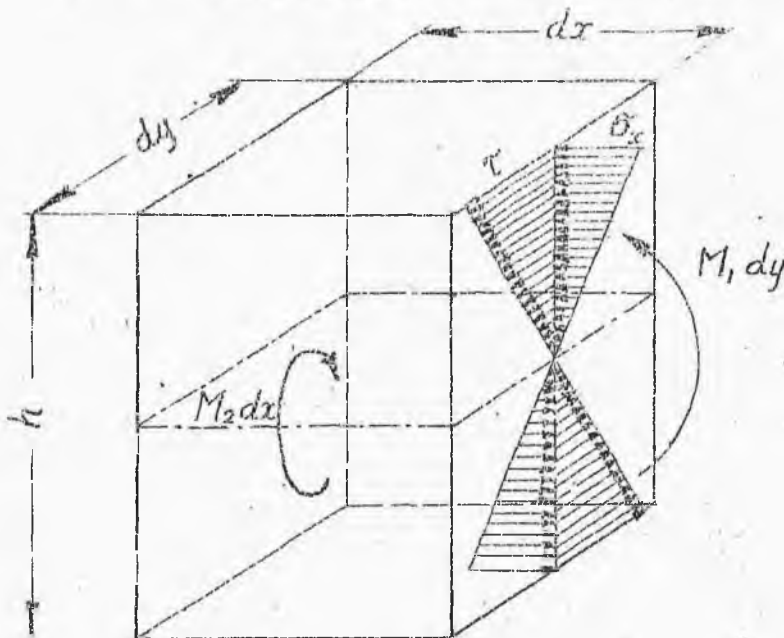
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (17)$$



Podstawiając równania /17/ w równania /1/ i rozwiązując względem naprężeń, otrzymamy :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_1 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) z \\ \sigma_y &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) z \\ \tau &= -2 G_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} z \end{aligned} \right\} (18)$$

Jeśli znajdziemy  $W = f(x, y)$ , to z tych równań możemy obliczyć naprężenia w każdym punkcie płyty; naprężenia maksymalne znajdą w kątach skrajnych / największe  $z$  /.



Rys. 52.

szsze  $z$  /.

Jak z powyższych równań widzimy, naprężenia rosną liniowo w miarę oddalania się od powierzchni obojętnej.

Rys. 52 obra-

zuje rozkład naprężeń w wyciętym elemencie płyty.

Naprężenia ścinające powodują skręcanie płyty, zaś normalne - dają moment zginający.

Nazwijmy przez  $M_1$ , wielkość momentu działającego w danym punkcie i odniesionego do jednostki przekroju wzdłuż osi  $y$ , przez  $M_2$  - wzdłuż osi  $x$ .

Otrzymamy równanie :

$$M_1 dy = \int_{z=-h/2}^{z=+h/2} \sigma_x z dy dz$$

Podstawiając na miejsce  $\sigma_x$  wartość według równań /18/ i całkując, otrzymamy :

$$M_1 = -B_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (19)$$

gdzie

$$B_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_1 \frac{h^3}{12}$$

Wartość  $B_1$  dla płyty izotropowej wynosi  $EJ$ , czyli jest to sztywność zginania jednostki szerokości płyty w kierunku osi  $x$ .

Obliczmy analogicznie dla drugiej ściany:

$$M_2 = -B_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (20)$$

gdzie

$$B_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_2 \frac{h^3}{12}$$

Dla naprężeń stycznych, oznaczając przez  $D$  moment skręcający odniesiony do jednostki szerokości, mamy równanie :

$$D dx = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau x dx dz$$

Przeliczając analogicznie jak dla momentu  $M_1$ , otrzymamy :

$$D = -2c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

gdzie

$$c = G_0 \frac{h^3}{12}$$

sztwność skręcania płyty.

Ogólny wzór na energię potencjalną odkształconej płyty ma postać :

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\underbrace{\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau \gamma}_{\text{energia odniesiona do jednostki objętości}}) dx dy dz$$

Wstawimy na miejsce  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ ,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\gamma$  odpowiednie wartości z równań / 17 / i / 18 / i dokonując całkowanie i przekształcenia, otrzymamy:

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[ B_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + B_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{B_1}{m_2} + \frac{B_2}{m_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (22)$$

Ten sam wynik można otrzymać prostszą drogą:

Naprężenia normalne zastąpimy momentami zginającymi, zaś naprężenia styczne momentami skręcającymi.

Odształcenia proporcjonalne do naprężeń rosną w sposób linjowy od zera na powierzchni obojętnej do maximum we włóknie skrajnem .

Energja odkształcenia spowodowanego gięciem będzie wynosiła:

$$- \frac{1}{2} M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2} M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy$$

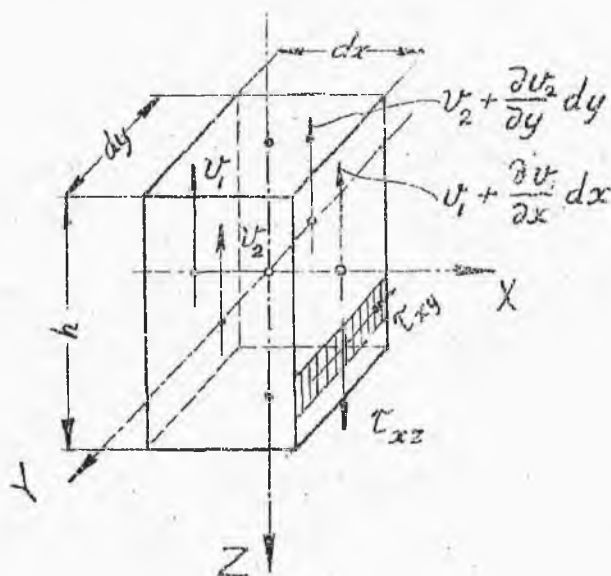
Do tego należy dodać jeszcze energję odkształcenia spowodowanego skręcaniem ; równa się ona momentowi skręcającemu pomnożonemu przez kąt skręcenia.

Wynosi ona :

$$-\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy - \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx$$

Podstawiając odpowiednie wielkości na momenty według równań /19/, /20/ i /21/ i sumując, otrzymamy na energię odkształcenia równanie /22/.

Postaramy się teraz wyprowadzić różniczkowe równanie powierzchni ugięcia płyty.



Rys. 53.

Naprężenia równoległe do osi  $x$  dadzą siłę tnącą, jak to miało miejsce w belce zginanej. Oznaczmy przez  $U_1$  siłę tnącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $x$ , a przez  $U_2$  - w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $y$ .

Pierwszy indeks / rys. 53/ przy naprężeniu ścinającym oznacza oś, do której jest prostopadła płaszczyzna, w której leży naprężenie, zaś drugi - oś, do której naprężenie jest równoległe.

N.p. naprężenie  $\tau_{xy}$  leży na ścianie prostopadłej do osi  $x$  i ma kierunek

Przesuwając się wzdłuż osi  $x$ , o element  $dx$ , siła tnąca zmieni się z  $V_1$  na  $V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} dx$ .

Analogicznie przy przesunięciu wzdłuż osi  $y$  siła  $V_2$  zmieni się na  $V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y} dy$ .

Podobnie dzieje się z momentami zginającymi :

$$M_1 \quad \text{zmieni się na} \quad M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx$$
$$M_2 \quad \text{zmieni się na} \quad M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial y} dy$$

i z momentem skręcającym :

$$D \quad \text{zmieni się na} \quad D + \frac{\partial D}{\partial x} dx$$

Napiżmy warunek równowagi momentów wszystkich naprężeń względem osi  $y$ , przechodzącej przez środek rozpatrywanego elementu płyty / rys.53 /:

$$M_1 dy - (M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial x} dx) dy + D dx - (D + \frac{\partial D}{\partial y} dy) dx +$$
$$+ V_1 dy \frac{dx}{2} + (V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x} dx) \frac{dx}{2} dy = 0$$

Odrzucając wyrazy nieskończenie małe trzeciego rzędu, otrzymamy:

$$V_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y}$$

Siły poprzeczne zależą zatem w bardzo prosty sposób od cząstkowych pochodnych momentów gnących i skręcających. Podobnie biorąc momenty naprężeń względem osi  $x$ , otrzymamy:

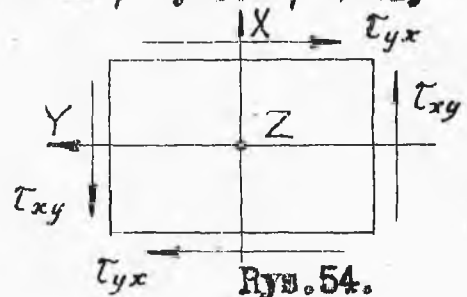
$$V_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}$$

Podstawiając odpowiednie wyrażenia na momenty gnące i skręcające, według równań |19|, |20| i |21|, otrzymamy :

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -B_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \left( \frac{B_1}{m_2} + 2c \right) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \\ V_2 &= -B_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - \left( \frac{B_2}{m_1} + 2c \right) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right\} (23)$$

Z warunku równowagi względem osi  $Z$  / rys.54 / otrzymamy :

$$\tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{yz}$$



Rzutując wszystkie siły na oś  $Z$  i zakładając ob-

ciężenie płyty w danym punkcie  $p \text{ kg/cm}^2$ , otrzymamy jako warunek równowagi :

$$p \, dx \, dy - v_1 \, dx + \left( v_1 \frac{dv_1}{dy} \, dy \right) dx - v_2 \, dy + \left( v_2 \frac{dv_2}{dx} \, dx \right) dy = 0$$

Po podstawieniu na  $v_1$  i  $v_2$  wielkości według równań /23/ i przeliczeniu, otrzymamy :

$$B_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \left( \frac{B_1}{m_2} + \frac{B_2}{m_1} + 4c \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p$$

oznaczając :  $\frac{B_1}{m_2} + \frac{B_2}{m_1} + 4c = 2H$

otrzymamy w następującej postaci różniczkowe równanie powierzchni ugięcia płyty :

$$B_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p \quad (24)$$

Zadanie zostało sprowadzone do zagadnienia poszukiwania takiej funkcji  $W$ , któraby czyniła zadość temu równaniu przy danym obciążeniu  $p$ . Funkcje nieznane otrzymane przy całkowaniu znajdziemy z warunków brzegowych.



Gdy płyta jest ortotropowa, to współczynniki mają następujące znaczenie :

$$B_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_1 \frac{h^3}{12}$$

$$B_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 1} E_2 \frac{h^3}{12}$$

$$C = G_0 \frac{h^3}{12}$$

Dla płyty izotropowej :

$$m_1 = m_2 = m ; \quad E_1 = E_2 = E$$

$$G_0 = G = \frac{m}{2(m+1)} E$$

$$B_1 = B_2 = \frac{m^2}{m^2 - 1} E \frac{h^3}{12} = B$$

$$C = \frac{m}{2(m+1)} E \frac{h^3}{12}$$

$$2H = \frac{B}{m} + \frac{B}{m} + \frac{2m}{m+1} E \frac{h^3}{12} = \frac{2m^2 - 1}{m^2 - 1} \frac{1}{m} E \frac{h^3}{12} + \frac{2m}{m+1} E \frac{h^3}{12} = 2B$$

W przypadku płyty izotropowej równanie się uprości:

$$B \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + B \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{p}{B} \quad (25)$$

gdzie  $B$  - sztywność zginania paska płyty o szerokości  $1$ .

Zastosujemy energetyczne kryterjum równowagi.

Dana jest płyta podparta i obciążona ; energia potencjalna obciążenia wynosi  $\sum P_i w_i$ , zaś energia wewnętrzna sił sprężystości -  $U$ . Warunkiem równowagi jest :

$$\delta(U - \sum P_i w_i) = 0$$

Z warunku tego doszlibyśmy do poprzednio wyprowadzonego równania różniczkowego powierzchni ugięcia .

Przejdźmy do warunków brzegowych ; praktycznie może istnieć kilka sposobów podparcia płyty: 1/ zawiasa idąca wzdłuż krawędzi, 2/ swobodne podparcie pozwalające na przesuwanie się płyty, 3/ podparcie w kilku punktach, 4/ sztywne utwierdzenie brzegu płyty.

Gdy podpora jest sztywna mamy warunek brzegowy  $w = 0$  .

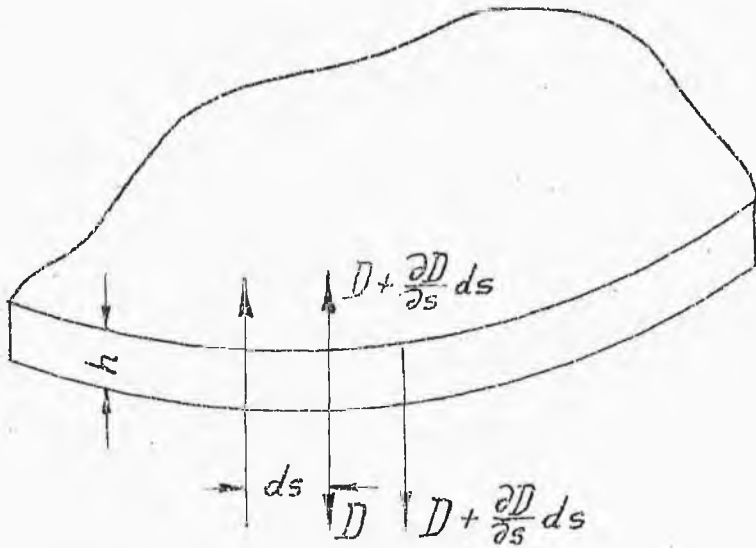
Przy swobodnym podparciu momenty zginające na brzegu płyty istnieć nie mogą  $M = 0$  .

Natomiast nie jest koniecznym dla cienkich płyt aby moment skręcający na brzegu był zerem / rys.55 /.

Moment skręcający wynosi  $D ds$ , momenty te mogą być rozpatrywane jako pary sił, każda siła wynosi

$$\frac{D ds}{ds} = D$$

W sąsiednim elemencie będzie moment  $D + \frac{\partial D}{\partial s} ds$



rys. 55.

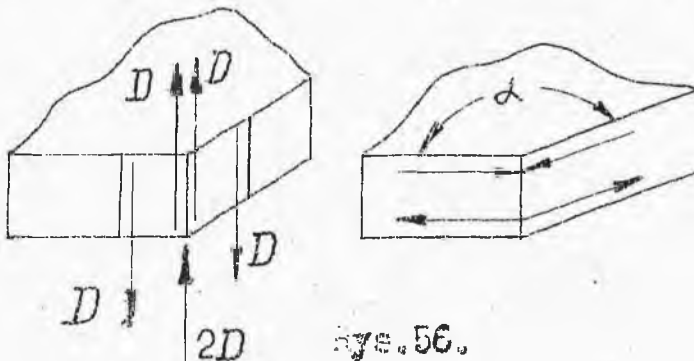
Jako wypadkową otrzymamy  $\frac{\partial D}{\partial s} ds$

Układ ten jest równoważny z układem sił:

$$R'' ds = \frac{\partial D}{\partial s} ds; \quad R'' = \frac{\partial D}{\partial s}$$

$R''$  - jest to równoważna reakcja.

Płyty prostokątne /rys.56/ posiadają zakamienie; istnieją tam momenty na ściankach, zaś na wierzchołku siła  $2D$ . Odnosi się to do każdej płyty, której



rys. 56.

róg na kąt

$$\alpha < 180^\circ$$

Na każdym ost-  
rym wierzchoł-  
ku płyty, swo-  
bodnie dokoła

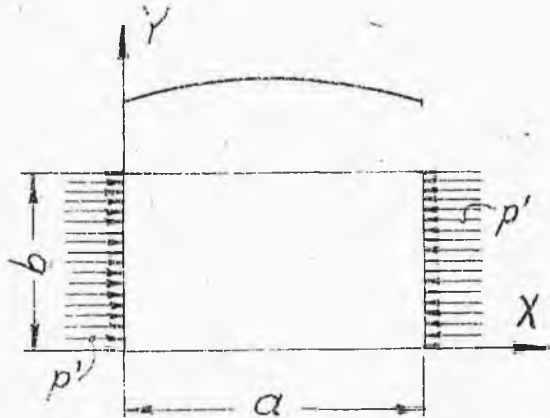
podparte] muszą powstać skupione reakcje .

Momenty nie zawsze są jednakowe na obu ścianach, mogą być  $D_1$  i  $D_2$  wtedy siła skupiona wynosi  $D_1 + D_2$  .

W przypadku doskonałego utwierdzenia płyty, na brzegach muszą ugięcia zniknąć, styczne do powierzchni ugięcia są przy uginaniu się płyty w tych punktach nieruchome. Momenty skręcające i zginające wtedy na brzegu płyty istnieją. Na swobodnym brzegu płyty momenty zginające są równo zero.

### § 3. S T A T E C Z N O Ś Ć P Ł Y T .

Rozpatrzmy przypadek płyty wzdłuż czterech krawędzi podparte] / rys. 57 / . Obciążenia krytycznego, przy którym



Rys. 57.

plyta zaczyna być w równowadze stałej w stanie wygiętym, możemy znaleźć dwoma sposobami

Albo znajdziemy równanie powierzchni ugięcia przez całkowanie różniczkowego równania tej powierzchni;

jest to metoda uciążliwa, całkowanie często trzeba uskutecznić przez rozwijanie funkcji w szereg ; albo możemy

zastosować metodę energetyczną.

Jeżeli przez  $u_z$  i  $u_w$  oznaczymy energję wewnętrzną i zewnętrzną układu ściśniętej płyty, lecz nie wyboczonej, zaś przez  $\widehat{u}_z$  i  $\widehat{u}_w$  - płyty wygiętej nieskończenie małą, to warunkiem stanu krytycznego, analogicznie jak dla prętów ścisanych, będzie warunek równowagi obojętnej:

$$u_z + u_w = \widehat{u}_z + \widehat{u}_w$$

Inaczej można to wyrazić:

$$u_w - \widehat{u}_w = \widehat{u}_z - u_z = \Delta L_z$$

Przyrost energii wewnętrznej równa się pracy sił zewnętrznych :

$$\Delta u_w = \Delta L_z$$

Równanie powierzchni ugięcia możemy ogólnie przedstawić jako podwójną sumę szeregu trygonometrycznego :

$$W = \sum_{\nu} \sum_{s} A_{\nu s} \sin \frac{\nu \pi x}{a} \sin \frac{s \pi y}{b} \quad (26)$$

gdzie  $A_{\nu s}$  są to nieznane współczynniki, zaś  $\nu$  i  $s$  szeregi liczb naturalnych .

Równanie to różniczkujemy i podstawiamy w równanie / 22 /, wyrażające energję wyboczonej płyty.

Otrzymamy szereg wyrazów typu :

$$\iint A_{rs} A_{r's'} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{r'\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \sin \frac{s'\pi y}{b} dx dy$$

są one równe zeru dla  $r' \neq r$  i  $s' \neq s$

Dzięki temu wyrażenie na energję znacznie się uprości i po przeliczeniu otrzymamy :

$$\Delta U_w = \frac{\pi^2}{8} ab \sum_r \sum_s A_{rs}^2 \left( r^4 \frac{B_1}{a^3} + 2r^2 s^2 \frac{H}{a^2 b^2} + s^4 \frac{B_2}{b^3} \right) \quad (27)$$

Teraz obliczymy pracę sił zewnętrznych.

Zbliżenie się końców płyty  $\delta \bar{a}$  z powodu ugięcia się jej przeliczamy analogicznie jak dla pręta i otrzymujemy :

$$\delta \bar{a} = \frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

Praca sił zewnętrznych / obciążenie na metr bieżący wynosi  $p'$  / wynosi :

$$\Delta L_2 = \int_0^b p' dy \delta \bar{a} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b p' \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

Różniczkując funkcję ugięcia płyty i podstawiając, otrzymamy po zcałkowaniu :

$$\Delta L_2 = \frac{\pi^2}{8} p' ab \sum_r \sum_s \frac{r^2}{a^2} A_{rs}^2 \quad (28)$$

Przyrównując do siebie pracę sił zewnętrznych  $\Delta L_2$  i przyrost energii wewnętrznej  $\Delta U_w$  [ równania / 27 / i / 28 / ], otrzymamy równanie, z którego obliczymy krytyczne obciążenie płyty:

$$p' = \frac{\pi^2 \sum_r \sum_s A_{rs}^2 (B_1 \frac{r^4}{a^4} + 2H \frac{r^2 s^2}{a^2 b^2} + B_2 \frac{s^4}{b^4})}{\sum_r \sum_s \frac{r^2}{a^2} A_{rs}^2} \quad (29)$$

Należy jeszcze obliczyć nieznane współczynniki  $A_{rs}$ . Oczywiście zależą one tylko od kształtu powierzchni ugięcia płyty ; dla nas najniebezpieczniejszym będzie takie ugięcie płyty, przy którym obciążenie krytyczne jest najmniejsze, rozumie się, że zachodzi to, gdy płyta nie jest pośrodku wcale podparta.

Dla dobrania tak  $A_{rs}$  , aby  $p'$  było minimum , różniczkujemy równanie na  $p'$  względem każdego  $A_{rs}$  pochodne te przyrównamy do zera:

$$\frac{\partial p}{\partial A} = 0$$

Z równań tych zresztą, wszystkich analogicznych wynika warunek

$$\frac{B_1 \frac{r^4}{a^4} + 2H \frac{r^2 s^2}{a^2 b^2} + B_2 \frac{s^4}{b^4}}{\frac{r^2}{a^2}} = \frac{\sum_r \sum_s A_{rs}^2 (B_1 \frac{r^4}{a^4} + 2H \frac{r^2 s^2}{a^2 b^2} + B_2 \frac{s^4}{b^4})}{\sum_r \sum_s \frac{r^2}{a^2} A_{rs}^2}$$

Widzimy, że cała prawa strona tego równania występuje we wzorze / 29 / na obciążenie krytyczne, więc możemy ją tam zastąpić lewą stroną tego równania, nie zawierającą nieznanymi współczynników  $A_{rs}$ .

Podstawiając, otrzymamy :

$$p'_{kr} = \pi^2 \frac{a^2}{r^2} (B_1 \frac{r^4}{a^4} + 2H \frac{r^2 s^2}{a^2 b^2} + B_2 \frac{s^4}{b^4}) \quad (30)$$

Nie wiemy jeszcze jakie wziąć współczynniki  $r$  i  $s$ , będące liczbami naturalnymi.

Z równania widzimy bezpośrednio, że  $p'_{kr}$  jest minimum przy  $s=1$  :

$$p'_{kr} = \pi^2 \frac{a^2}{r^2} (B_1 \frac{r^4}{a^4} + 2H \frac{r^2}{a^2 b^2} + \frac{B_2}{b^4}) \quad (31)$$



Oznaczamy:

$$\frac{a^2}{b} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \varepsilon; \quad \frac{H}{\sqrt{B_1 B_2}} = \eta$$

i wprowadzimy pewną bezwymiarową funkcję obciążenia krytycznego:

$$F_{kr} = p_{kr}' \frac{b^2}{B_2}$$

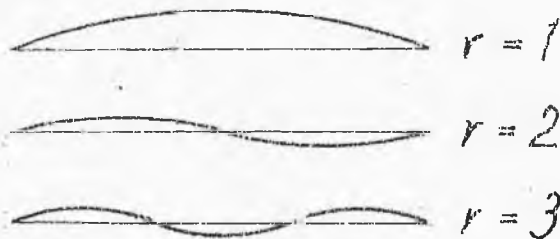
Podstawiając to w równanie, otrzymamy:

$$F_{kr} = \pi^2 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left( \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{r^2}{\varepsilon^2} + 2\eta \right) \quad (32)$$

Wielkość  $r$ , przy którym zachodzi minimum tej funkcji zależy od wielkości  $\varepsilon$ .

Dla niewielkich  $\varepsilon$  mamy  $r = 1$ .

Fizycznie  $r$  oznacza ilość półfal, na które ugnie się płyta / rys.58 /.



Rys.58.

Dla wypadku skrajnego, przy którym minimum tej funkcji zachodzi przy pewnym  $r$  musi zachodzić równość:

$$\frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{r^2}{\varepsilon^2} + 2\eta = \frac{\varepsilon^2}{(r+1)^2} + \frac{(r+1)^2}{\varepsilon^2} + 2\eta$$

Po rozwiązaniu, otrzymamy :

$$\varepsilon_{gr} = \sqrt{r(r+1)}$$

Stąd po podstawieniu wartości liczbowych  $r=1, 2, 3, \dots$ :

$$r = 1 \quad \text{gdy} \quad \varepsilon \leq \sqrt{2}$$

$$r = 2 \quad \text{"} \quad \sqrt{2} \leq \varepsilon \leq \sqrt{6}$$

$$r = 3 \quad \text{"} \quad \sqrt{6} \leq \varepsilon \leq \sqrt{12} \quad \text{i t.d.}$$

Rozpatrzmy jak zmienia się ten wzór ze zmianą stosunku długości boków płyty.

Dla płyt bardzo krótkich, dla  $\varepsilon \leq \sqrt{2}$  mamy  $r=1$  i wzór ma postać :

$$F_{kr} = \pi^2 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \left( \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} + 2\eta \right)$$

Podstawiając na  $F_{kr}$  i  $\varepsilon$  odpowiednie wyrażenia, po przeliczeniu otrzymamy:

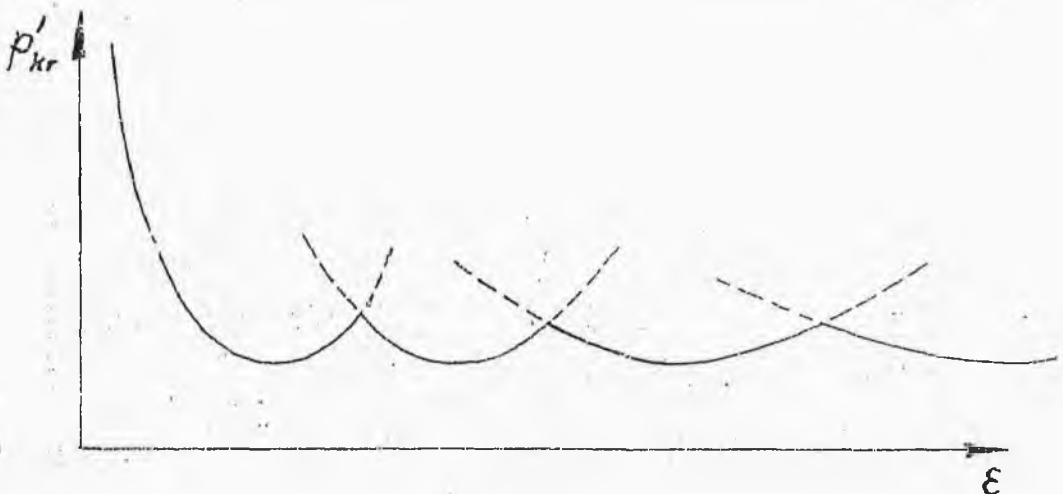
$$p'_{kr} = \pi^2 \frac{\sqrt{B_1 B_2}}{b^2} \left( \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} + \frac{b^2}{a^2} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + 2\eta \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi^2 \frac{\sqrt{B_1 B_2}}{a^2} \left( \frac{a^4}{b^4} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} + \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + 2 \frac{a^2}{b^2} \eta \right) = \\
 &= \frac{\pi^2 B_1}{a^2} \left( 1 + \frac{B_2}{B_1} \frac{a^4}{b^4} + 2 \eta \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \right) \quad (33)
 \end{aligned}$$

Jak widzimy dla  $b \gg a$  wyraz w nawiasie dąży do jedności, a wyrażenie na  $p'_{kr}$  staje się analogiczne do wzoru Eulera.

Gdy płyta staje się dłuższa /  $a$  - rośnie / wtedy jest coraz większy wpływ podparcia brzegów i  $p'_{kr}$  rośnie.

Gdy  $a$  tak wzrośnie, że otrzymamy  $\varepsilon \geq \sqrt{2}$ , wtedy wzór się zmieni, bo musimy podstawić  $r=2$



rys 59.

Rys. 59 przedstawia zależność pomiędzy  $p'_{kr}$  a  $\varepsilon$ ; widzimy tam szereg krzywych dla różnych  $r$ ; miarodajne są te gałęzie krzywych, które dla danego  $\varepsilon$  dają najmniejsze  $p'_{kr}$  / linia ciągła /.

Rozpatrzmy wyboczenie płyty bardzo długiej  $b \ll a$ . Jak wiemy długość jednej półfali  $\lambda = \frac{a}{r}$

Wielkość  $\varepsilon = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}$  mamy zawartą w granicach:

$$\sqrt{(r-1)r} \leq \frac{a}{b} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \leq \sqrt{r(r+1)}$$

Dzieliąc nierówność przez  $r^2$  otrzymamy:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{r}} \leq \frac{a}{br} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{r}}$$

Gdy  $a$  rośnie i dąży do nieskończoności, wtedy i  $r$  dąży do nieskończoności i obie granice wyrażenia  $\varepsilon/r$  dążą do jedności, a więc i samo wyrażenie musi dążyć do jedności:

$$\frac{a}{br} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = 1$$

stąd:

$$\frac{a}{r} = b \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} = \lambda$$

Długi pasek ściśkany podparty na czterech brzegach

przy wyboczeniu sprężystym wygnie się w postaci szeregu niecek o długości  $\lambda = 6\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$ .

Należy jeszcze rozpatrzeć przypadek wyboczenia niesprężystego; przy obliczaniu prętów opieraliśmy się na obszernym materiale doświadczalnym; dla płyt takiego materiału nie posiadamy, bo doświadczenia są trudne do przeprowadzenia i kosztowne. Dlatego musimy się tu zadowolić pewnym przybliżeniem, przenosząc dane doświadczalne dla prętów do wytrzymałości płyt. Posiadamy dla prętów tablice, które podają ilekroć trzeba mniejszy naprężenie dopuszczalne na ściskanie dla danego materiału w zależności od smukłości pręta. Współczynniki te wprowadzimy również do wzorów na wytrzymałość płyt.

Ze wzorów na wyboczenie płyt widzimy, że kształt powierzchni ugięcia płyty wybaczanej nie zależy od własności materiału, będzie on taki sam dla płyty z materiału izotropowego, jak i anizotropowego, jak również i dla kraty lub siatki.

Inaczej rzecz się przedstawia przy zginaniu. Tam dla płyty izotropowej / posiada  $\eta = 1$  / cała płyta ugięnie się w jedną stronę / rys. 60 /.

Natomiast płyta anizotropowa /  $\eta < 1$  / może się po-

fałdować, w pewnych punktach nastąpi ugięcie w kierunku przeciwnym do działania siły / rys.61./



Rys.60



Rys.61.

Wzór /32/ na wyboczenie dla płyty izotropowej da się znacznie uprościć. Mianowicie, oznaczając grubość płyty przez  $h$  i  $E' = \frac{m^2}{m^2-1} E$ ,

otrzymamy:

$$F_{kr} = p_{kr} \frac{12 b^2}{E' h^3} = \pi^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{a^2}{b^2} + r^2 \frac{b^2}{a^2} + 2 \right) = \pi^2 \left( \frac{a}{rb} + r \frac{b}{a} \right)^2$$

Oznaczając

$$\sigma_{kr} = \frac{p_{kr}}{h}$$

otrzymamy:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E' h^2}{12 b^2} \left( \frac{a}{rb} + \frac{rb}{a} \right)^2 \quad (34)$$

Znając n.p. dla stali  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , możemy ten wzór przedstawić w postaci:

$$\sigma_{kr} = \Omega \left( \frac{100h}{b} \right)^2 \quad (35)$$

gdzie  $\rho$  zależy tylko od stosunku  $\frac{a}{b}$ .

Mamy tablice w książce prof. N. T. Hubera "Studia nad belkami teowymi" podające wielkość  $\rho$  dla różnych stosunków  $\frac{a}{b}$ .

Prócz rozpatrzonego tu przypadku ściskania płyty, mogą zajść wypadki obciążenia wiele bardziej skomplikowanego, jak n.p. ściskanie płyty w obu kierunkach, ściskanie w jednym kierunku, a rozciąganie w drugim, zginanie płyty w jej płaszczyźnie i t.p.

Wszystkie te wypadki nie przedstawiają wiele większych trudności niż tu rozważany i są rozwiązane w wyżej wymienionym dziele.

Tablice także podane są ułożone dla stali, jednakże można je stosować i do innych materiałów, mnożąc wszystkie liczby przez stosunek modułów sprężystości  $\frac{E_2}{E_1}$ .



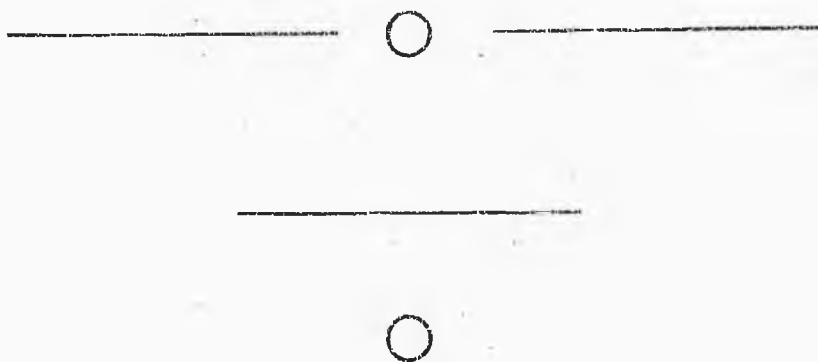
Trudniejsze jest do rozwiązania zagadnienie, gdy płyta jest w swej płaszczyźnie ścinana; wtedy powstają pofałdowania ukośne / rys. 62 /.

Rys. 62.

Gdy zdołamy ustalić kształt powierzchni pofałdowania, to wnioskujeśmy z niego w ja-

kich miejscach i w jakim kierunku dać należy żebra usztywniające; dla płyt zginanych najlepiej dawać żebra ukośne, bo występują w nich naprężenia ściskające. Gdy żebra są rozmieszczone gęsto, to jest wszystko jedno w jakim je dany kierunku.

Przy rozważaniu wytrzymałości cienkiej blachy falistej, możemy ją traktować analogicznie do płyty ortotropowej o bardzo znacznej sztywności zginania w jednym kierunku, zaś niewielkiej w drugim.





T A B L I C A F U N K C Y J .

\*\*\*\*\*

$$\text{nakom } |\alpha| = \frac{6}{\alpha^2} \left( \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

$$\text{napun } |\alpha| = \frac{3}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\text{tg} \alpha} \right)$$

$$\text{naob } |\alpha| = \frac{24}{\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} \text{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nakom $ \alpha $	napun $ \alpha $	naob $ \alpha $
0	0	1.0000	1.0000	1.0000
0.03491	2	1.0001	1.0001	1.0001
0.06981	4	1.0006	1.0003	1.0005
0.10472	6	1.0013	1.0007	1.0011
0.13963	8	1.0023	1.0013	1.0019
0.17453	10	1.0036	1.0020	1.0030
0.20944	12	1.0051	1.0029	1.0044
0.24435	14	1.0070	1.0040	1.0060
0.27925	16	1.0092	1.0052	1.0078

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	zakom / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
0.31416	18	1.0116	1.0066	1.0099
0.34907	20	1.0144	1.0082	1.0123
0.38397	22	1.0175	1.0100	1.0150
0.41888	24	1.0209	1.0120	1.0179
0.45379	26	1.0246	1.0140	1.0210
0.48869	28	1.0286	1.0165	1.0245
0.52360	30	1.0329	1.0188	1.0282
0.55851	32	1.0376	1.0214	1.0322
0.59341	34	1.0427	1.0243	1.0365
0.62832	36	1.0481	1.0273	1.0411
0.66323	38	1.0538	1.0306	1.0460
0.69813	40	1.0599	1.0341	1.0513
0.73304	42	1.0664	1.0377	1.0568
0.76794	44	1.0734	1.0416	1.0628
0.80285	46	1.0807	1.0458	1.0690
0.83776	48	1.0884	1.0502	1.0756
0.87266	50	1.0966	1.0548	1.0825
0.90757	52	1.1052	1.0596	1.0898

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakon / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
0.94248	54	1.1143	1.0647	1.0976
0.97738	56	1.1239	1.0701	1.1058
1.01229	58	1.1340	1.0758	1.1144
1.04720	60	1.1446	1.0817	1.1234
1.08210	62	1.1558	1.0879	1.1329
1.11701	64	1.1675	1.0945	1.1428
1.15192	66	1.1799	1.1013	1.1533
1.18682	68	1.1928	1.1086	1.1643
1.22173	70	1.2065	1.1161	1.1759
1.25664	72	1.2208	1.1241	1.1880
1.29154	74	1.2359	1.1324	1.2007
1.32645	76	1.2517	1.1412	1.2140
1.36126	78	1.2683	1.1503	1.2281
1.39626	80	1.2858	1.1600	1.2429
1.43117	82	1.3042	1.1701	1.2584
1.46608	84	1.3236	1.1807	1.2747
1.50098	86	1.3440	1.1918	1.2918
1.53589	88	1.3654	1.2035	1.3099
1.57080	90	1.3880	1.2158	1.3289

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakon / $\alpha$ /	napus / $\alpha$ /	nach / $\alpha$ /
1.60570	92	1.4118	1.2288	1.3489
1.64061	94	1.4370	1.2425	1.3700
1.67552	96	1.4635	1.2568	1.3922
1.71042	98	1.4915	1.2720	1.4157
1.74533	100	1.5211	1.2879	1.4405
1.78024	102	1.5524	1.3048	1.4666
1.81514	104	1.5856	1.3226	1.4944
1.85005	106	1.6208	1.3415	1.5237
1.88496	108	1.6582	1.3615	1.5549
1.91986	110	1.6979	1.3827	1.5880
1.95477	112	1.7403	1.4052	1.6232
1.98968	114	1.7853	1.4291	1.6607
2.02458	116	1.8335	1.4546	1.7007
2.05949	118	1.8850	1.4818	1.7434
2.09440	120	1.9401	1.5109	1.7891
2.12930	122	1.9994	1.5421	1.8381
2.16421	124	2.0631	1.5755	1.8908
2.19911	126	2.1318	1.6115	1.9476

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakom $ \alpha $	napun $ \alpha $	naob $ \alpha $
2.23402	128	2.2060	1.6503	2.0089
2.26893	130	2.2865	1.6922	2.0753
2.30383	132	2.3741	1.7377	2.1474
2.33874	134	2.4695	1.7872	2.2260
2.37365	136	2.5739	1.8412	2.3119
2.40855	138	2.6886	1.9005	2.4061
2.44346	140	2.8152	1.9657	2.5100
2.44695	140.2	2.8286	1.9725	2.5210
2.45044	140.4	2.8421	1.9795	2.5321
2.45393	140.6	2.8557	1.9865	2.5433
2.45742	140.8	2.8695	1.9936	2.5546
2.46091	141.0	2.8835	2.0008	2.5660
2.46440	141.2	2.8976	2.0080	2.5776
2.46789	141.4	2.9118	2.0153	2.5893
2.47138	141.6	2.9262	2.0227	2.6011
2.47487	141.8	2.9407	2.0302	2.6130
2.47837	142.0	2.9554	2.0378	2.6250
2.48186	142.2	2.9703	2.0454	2.6372

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopniach	nakon $ \alpha $	napun $ \alpha $	naob $ \alpha $
2.48535	142.4	2.9853	2.0531	2.6495
2.48834	142.6	3.0005	2.0609	2.6520
2.49233	142.8	3.0159	2.0688	2.6746
2.49582	143.0	3.0314	2.0767	2.6873
2.49931	143.2	3.0471	2.0848	2.7001
2.50280	143.4	3.0630	2.0929	2.7131
2.50629	143.6	3.0790	2.1011	2.7263
2.50958	143.8	3.0953	2.1095	2.7396
2.51327	144.0	3.1117	2.1179	2.7530
2.51676	144.2	3.1283	2.1264	2.7666
2.52025	144.4	3.1451	2.1350	2.7804
2.52374	144.6	3.1621	2.1437	2.7943
2.52723	144.8	3.1792	2.1524	2.8084
2.53073	145.0	3.1966	2.1614	2.8226
2.53422	145.2	3.2142	2.1704	2.8370
2.53771	145.4	3.2320	2.1795	2.8516
2.54120	145.6	3.2500	2.1887	2.8663
2.54469	145.8	3.2683	2.1980	2.8812

---

$\alpha$ w radjansach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nakon   $\alpha$	napum   $\alpha$	naob   $\alpha$
2.54818	146.0	3.2867	2.2074	2.8963
2.55167	146.2	3.3054	2.2170	2.9116
2.55516	146.4	3.3243	2.2266	2.9270
2.55865	146.6	3.3434	2.2364	2.9427
2.56214	146.8	3.3627	2.2463	2.9585
2.56563	147.0	3.3823	2.2563	2.9746
2.56912	147.2	3.4022	2.2664	2.9908
2.57261	147.4	3.4223	2.2767	3.0072
2.57610	147.6	3.4426	2.2871	3.0238
2.57959	147.8	3.4632	2.2976	3.0407
2.58309	148.0	3.4841	2.3082	3.0577
2.58658	148.2	3.5052	2.3190	3.0750
2.59007	148.4	3.5266	2.3299	3.0925
2.59356	148.6	3.5483	2.3410	3.1102
2.59705	148.8	3.5702	2.3522	3.1282
2.60054	149.0	3.5925	2.3635	3.1464
2.60403	149.2	3.6150	2.3750	3.1648
2.60752	149.4	3.6379	2.3866	3.1834

---

$\alpha$	$\alpha^0$	naokm	napum	naob
w radjunach	w stopn.	/ $\alpha$ /	/ $\alpha$ /	/ $\alpha$ /
2.61101	149.6	3.6610	2.3984	3.2023
2.61450	149.8	3.6845	2.4104	3.2215
2.61799	150.0	3.7083	2.4225	3.2409
2.62148	150.2	3.7323	2.4348	3.2606
2.62497	150.4	3.7568	2.4472	3.2806
2.62846	150.6	3.7815	2.4598	3.3008
2.63195	150.8	3.8066	2.4726	3.3213
2.63545	151.0	3.8321	2.4855	3.3421
2.63894	151.2	3.8579	2.4987	3.3631
2.64243	151.4	3.8841	2.5120	3.3845
2.64592	151.6	3.9107	2.5255	3.4062
2.64941	151.8	3.9376	2.5392	3.4282
2.65290	152.0	3.9650	2.5531	3.4505
2.65639	152.2	3.9927	2.5672	3.4731
2.65988	152.4	4.0208	2.5814	3.4961
2.66337	152.6	4.0494	2.5959	3.5194
2.66686	152.8	4.0784	2.6107	3.5431
2.67035	153.0	4.1078	2.6256	3.5671

---



---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakon	napum	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
2.67384	153.2	4.1376	2.6408	3.5914
2.67733	153.4	4.1680	2.6561	3.6162
2.68082	153.6	4.1987	2.6718	3.6412
2.68431	153.8	4.2300	2.6876	3.6667
2.68781	154.0	4.2617	2.7037	3.6926
2.69130	154.2	4.2940	2.7201	3.7189
2.69479	154.4	4.3267	2.7367	3.7456
2.69828	154.6	4.3600	2.7535	3.7727
2.70177	154.8	4.3938	2.7707	3.8003
2.70526	155.0	4.4281	2.7881	3.8283
2.70875	155.2	4.4631	2.8058	3.8568
2.71224	155.4	4.4986	2.8237	3.8857
2.71573	155.6	4.5346	2.8420	3.9151
2.71922	155.8	4.5731	2.8606	3.9450
2.72271	156.0	4.6086	2.8795	3.9754
2.72620	156.2	4.6465	2.8987	4.0063
2.72969	156.4	4.6857	2.9182	4.0377
2.73318	156.6	4.7243	2.9380	4.0697

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakom / $\alpha$ /	napun. / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
2.73667	156.8	4.7643	2.9582	4.1022
2.74017	157.0	4.8049	2.9788	4.1353
2.74366	157.2	4.8462	2.9997	4.1690
2.74715	157.4	4.8883	3.0210	4.2032
2.75064	157.6	4.9311	3.0426	4.2381
2.75413	157.8	4.9748	3.0647	4.2737
2.75762	158.0	5.0192	3.0871	4.3098
2.76111	158.2	5.0644	3.1100	4.3467
2.76460	158.4	5.1105	3.1333	4.3842
2.76809	158.6	5.1575	3.1570	4.4224
2.77153	158.8	5.2053	3.1812	4.4613
2.77507	159.0	5.2541	3.2058	4.5010
2.77856	159.2	5.3038	3.2309	4.5415
2.78205	159.4	5.3545	3.2565	4.5828
2.78554	159.6	5.4062	3.2826	4.6248
2.78903	159.8	5.4589	3.3092	4.6677
2.79253	160.0	5.5127	3.3363	4.7115
2.79602	160.2	5.5675	3.3640	4.7561

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakom   $\alpha$	napum   $\alpha$	naob   $\alpha$
2.79951	160.4	5.6235	3.3922	4.8017
2.80300	160.6	5.6807	3.4211	4.8482
2.80649	160.8	5.7390	3.4505	4.8957
2.80998	161.0	5.7986	3.4805	4.9442
2.81347	161.2	5.8595	3.5112	4.9937
2.81696	161.4	5.9217	3.5426	5.0442
2.82045	161.6	5.9853	3.5746	5.0959
2.82394	161.8	6.0502	3.6073	5.1488
2.82743	162.0	6.1166	3.6408	5.2028
2.83092	162.2	6.1845	3.6750	5.2580
2.83441	162.4	6.2540	3.7100	5.3145
2.83790	162.6	6.3251	3.7458	5.3722
2.84139	162.8	6.3978	3.7824	5.4314
2.84489	163.0	6.4722	3.8199	5.4919
2.84838	163.2	6.5485	3.8582	5.5538
2.85187	163.4	6.6265	3.8975	5.6173
2.85536	163.6	6.7065	3.9378	5.6823
2.85885	163.8	6.7885	3.9790	5.7489

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopniach	nakona / $\alpha$ /	napum / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
2.86234	164.0	6.8725	4.0213	5.8172
2.86583	164.2	6.9587	4.0646	5.8873
2.86932	164.4	7.0471	4.1091	5.9591
2.87281	164.6	7.1378	4.1547	6.0328
2.87630	164.8	7.2309	4.2015	6.1084
2.87979	165.0	7.3265	4.2496	6.1861
2.88328	165.2	7.4246	4.2989	6.2658
2.88676	165.4	7.5255	4.3496	6.3478
2.89026	165.6	7.6292	4.4017	6.4320
2.89375	165.8	7.7359	4.4553	6.5186
2.89725	166.0	7.8456	4.5104	6.6077
2.90074	166.2	7.9584	4.5671	6.6994
2.90423	166.4	8.0746	4.6255	6.7938
2.90773	166.6	8.1943	4.6856	6.8910
2.91121	166.8	8.3176	4.7475	6.9911
2.91470	167.0	8.4447	4.8114	7.0944
2.91819	167.2	8.5759	4.8772	7.2008
2.92168	167.4	8.7112	4.9451	7.3107

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakoa	napum	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
2.92517	167.6	8.8508	5.0152	7.4241
2.92866	167.8	8.9951	5.0876	7.5412
2.93215	168.0	9.1442	5.1624	7.6622
2.93564	168.2	9.2983	5.2398	7.7874
2.93913	168.4	9.4578	5.3198	7.9168
2.94262	168.6	9.6229	5.4026	8.0508
2.94611	168.8	9.7939	5.4884	8.1896
2.94961	169.0	9.9711	5.5773	8.3335
2.95310	169.2	10.1548	5.6694	8.4827
2.95659	169.4	10.3457	5.7651	8.6375
2.96008	169.6	10.5438	5.8644	8.7982
2.96357	169.8	10.7497	5.9677	8.9653
2.96706	170.0	10.9638	6.0750	9.1391
2.97055	170.2	11.1867	6.1867	9.3200
2.97404	170.4	11.4189	6.3031	9.5084
2.97753	170.6	11.6610	6.4245	9.7049
2.98102	170.8	11.9137	6.5511	9.9098
2.98451	171.0	12.1776	6.6833	10.1239

---

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakom	napun	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
2.98800	171.2	12.4535	6.8215	10.3478
2.99149	171.4	12.7423	6.9662	10.5821
2.99498	171.6	13.0448	7.1178	10.8275
2.99847	171.8	13.3621	7.2767	11.0849
3.00197	172.0	13.6954	7.4436	11.3552
3.00546	172.2	14.0457	7.6190	11.6394
3.00895	172.4	14.4144	7.8037	11.9384
3.01244	172.6	14.8032	7.9984	12.2537
3.01593	172.8	15.2135	8.2038	12.5865
3.01942	173.0	15.6473	8.4210	12.9384
3.02291	173.2	16.1067	8.6510	13.3109
3.02640	173.4	16.5939	8.8949	13.7060
3.02989	173.6	17.1116	9.1541	14.1259
3.03338	173.8	17.6627	9.4299	14.5727
3.03687	174.0	18.2506	9.7241	15.0495
3.04036	174.2	18.8791	10.0387	15.5592
3.04385	174.4	19.5525	10.3757	16.1052
3.04734	174.6	20.2758	10.7375	16.6911

---

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakon	napun	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
3.05083	174.8	21.0548	11.1273	17.3233
3.05433	175.0	21.8961	11.5483	18.0054
3.05782	175.2	22.8076	12.0043	18.7444
3.06131	175.4	23.7983	12.5000	19.5478
3.06480	175.6	24.8792	13.0408	20.4240
3.06829	175.8	26.0631	13.6330	21.3639
3.07178	176.0	27.3653	14.2844	22.4396
3.07527	176.2	28.7947	15.0100	23.6021
3.07876	176.4	30.3944	15.8100	24.8980
3.08225	176.6	32.1823	16.7041	26.3482
3.08574	176.8	34.1937	17.7100	27.9787
3.08923	177.0	36.4733	18.8500	29.8266
3.09272	177.2	39.0785	20.1526	31.9385
3.09621	177.4	42.0846	21.6563	34.3753
3.09970	177.6	45.5916	23.4100	37.2183
3.10319	177.8	49.7363	25.4827	40.5781
3.10669	178.0	54.7100	27.9700	44.6100
3.11018	178.2	60.7888	31.0100	49.6100

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakom / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
3.11367	178.4	68.3375	34.8100	55.6975
3.11716	178.6	76.1571	39.6957	63.6201
3.12065	178.8	91.1833	46.2100	74.1933
3.12414	179.0	109.4200	55.3300	88.9600
3.12763	179.2	135.7750	69.0100	111.1350
3.13112	179.4	182.3656	91.8100	148.1350
3.13461	179.6	273.5500	137.4100	222.0100
3.13810	179.8	547.1000	274.2100	443.7600
3.14159	180.0			
3.14503	180.2	-545.6810	-273.0	-443.2
3.14857	180.4	-272.8423	-136.2	-221.5
3.15201	180.6	-162.8598	-90.57	-147.6
3.15550	180.8	-137.3982	-67.79	-110.6
3.15899	181.0	-109.1363	-54.10	-88.5
3.16248	181.2	-91.3779	-44.98	-73.6
3.16597	181.4	-78.2692	-38.47	-63.1
3.16946	181.6	-68.4489	-33.58	-55.18
3.17296	181.8	-60.8176	-29.78	-49.02



---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakom	napum	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
3.17645	182.0	-54.7184	-26.78	-44.09
3.17994	182.2	-49.7294	-24.26	-40.06
3.18343	182.4	-45.5747	-22.19	-36.70
3.18692	182.6	-42.0594	-20.45	-33.86
3.19041	182.8	-39.1271	-18.94	-31.42
3.19390	183.0	-36.5080	-17.61	-29.31
3.19739	183.2	-34.2170	-16.49	-27.46
3.20008	183.4	-32.1954	-15.29	-25.83
3.20437	183.6	-30.4000	-14.60	-24.83
3.20786	183.8	-28.7939	-13.79	-23.08
3.21135	184.0	-27.3496	-13.07	-21.92
3.21484	184.2	-26.0771	-12.42	-20.85
3.21833	184.4	-24.8858	-11.83	-19.90
3.22182	184.6	-23.7984	-11.29	-19.02
3.22531	184.8	-22.8026	-10.79	-18.22
3.22881	185.0	-21.8857	-10.33	-17.48
3.23230	185.2	-21.0630	- 9.913	-16.81
3.23579	185.4	-20.2779	- 9.523	-16.17

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakosa   $\alpha$	napam   $\alpha$	naob   $\alpha$
3.23988	185.6	-19.5498	-9.254	-15.58
3.24277	185.8	-18.8726	-8.7755	-15.03
3.24526	186.0	-18.2566	-8.5080	-14.52
3.24975	186.2	-17.6637	-8.2147	-14.04
3.25324	- 186.4	-17.1081	-7.9249	-13.61
3.25673	186.6	-16.6002	-7.6799	-13.18
3.26022	186.8	-16.1081	-7.4360	-12.68
3.26371	187.0	-15.6444	-7.2046	-12.41
3.26720	187.2	-15.2182	-6.9877	-12.06
3.27069	187.4	-14.8040	-6.7829	-11.73
3.27418	187.6	-14.4109	-6.4047	-11.42
3.27767	187.8	-14.0481	-6.4029	-11.12
3.28116	188.0	-13.6940	-6.2270	-10.84
3.28465	188.2	-13.3662	-6.0604	-10.56
3.28815	188.4	-13.0444	-5.9016	-10.30
3.29164	188.6	-12.7465	-5.7500	-10.06
3.29513	188.8	-12.6358	-5.6051	- 9.83
3.29862	189.0	-12.1818	-5.4665	- 9.60

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nakom / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
3.30311	189.2	-11.9138	-5.3346	-9.39
3.30560	189.4	-11.6643	-5.2089	-9.18
3.30909	189.6	-11.4184	-5.0866	-8.98
3.31258	189.8	-11.1806	-4.9700	-8.80
3.31607	190.0	-10.9623	-4.8579	-8.614
3.31956	190.2	-10.7501	-4.7507	-8.442
3.32305	190.4	-10.5469	-4.6476	-8.275
3.32655	190.6	-10.3447	-4.5481	-8.113
3.33004	190.8	-10.1558	-4.4523	-7.959
3.33353	191.0	-9.9733	-4.3598	-7.808
3.33702	191.2	-9.7974	-4.2710	-7.666
3.34051	191.4	-9.6231	-4.1853	-7.526
3.34400	191.6	-9.4587	-4.1024	-7.3591
3.34749	191.8	-9.3001	-4.0223	-7.3616
3.35098	192.0	-9.1467	-3.9447	-7.1371
3.35447	192.2	-8.9982	-3.8699	-7.0171
3.35796	192.4	-8.8545	-3.7975	-6.8996
3.36145	192.6	-8.7152	-3.7273	-6.7861

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakom	napun	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
3.36494	192.8	-8.5763	-3.6592	-6.6702
3.36843	193.0	-8.4454	-3.5933	-6.5691
3.37192	193.2	-8.3221	-3.5295	-6.4667
3.37542	193.4	-8.1953	-3.4675	-6.3661
3.37891	193.6	-8.0786	-3.4073	-6.2693
3.38240	193.8	-7.9624	-3.3489	-6.1747
3.38589	194.0	-7.8488	-3.2920	-6.0823
3.38938	194.2	-7.7388	-3.2370	-5.9938
3.39287	194.4	-7.6319	-3.1833	-5.9070
3.39636	194.6	-7.5276	-3.1311	-5.8227
3.39985	194.8	-7.4289	-3.0803	-5.7409
3.40334	195.0	-7.3302	-3.0308	-5.6606
3.40683	195.2	-7.2339	-2.9827	-5.5834
3.41032	195.4	-7.1401	-2.9359	-5.5075
3.41381	195.6	-7.0511	-2.8902	-5.4358
3.41730	195.8	-6.9617	-2.8456	-5.3621
3.42079	196.0	-6.8769	-2.8021	-5.2916
3.42429	196.2	-6.7988	-2.7565	-5.2237

---

---

$\alpha$	$\alpha^{\circ}$	nakom	napum	naob
w radjanach	w stopniach	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
3.43778	196.4	-6.7110	-2.7184	-5.1568
3.43127	196.6	-6.6302	-2.6781	-5.0913
3.43476	196.8	-6.5520	-2.6387	-5.0284
3.43825	197.0	-6.4759	-2.6003	-4.9660
3.44174	197.2	-6.4021	-2.5626	-4.9059
3.44523	197.4	-6.3302	-2.5260	-4.8465
3.44872	197.6	-6.2578	-2.4900	-4.7888
3.45221	197.8	-6.1889	-2.4550	-4.7323
3.45570	198.0	-6.1214	-2.4206	-4.6768
3.45919	198.2	-6.0555	-2.3872	-4.6227
3.46268	198.4	-5.9908	-2.3543	-4.5700
3.46617	198.6	-5.9257	-2.3221	-4.5183
3.46966	198.8	-5.8638	-2.2907	-4.4678
3.47316	199.0	-5.8031	-2.2599	-4.4180
3.47665	199.2	-5.7434	-2.2297	-4.3697
3.48014	199.4	-5.6850	-2.2002	-4.3221
3.48363	199.6	-5.6282	-2.1713	-4.2756
3.48712	199.8	-5.5736	-2.1429	-4.2301

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopniach	nakom   $\alpha$	napam   $\alpha$	naob   $\alpha$
3.49061	200.0	-5.5185	-2.1134	-4.1852
3.49410	200.2	-5.4645	-2.0879	-4.1416
3.49759	200.4	-5.4114	-2.0611	-4.0986
3.50108	200.6	-5.3609	-2.0350	-4.0565
3.50457	200.8	-5.3097	-2.0093	-4.0152
3.50806	201.0	-5.2599	-1.9840	-3.9745
3.51155	201.2	-5.2118	-1.9593	-3.9350
3.51504	201.4	-5.1635	-1.9350	-3.8960
3.51853	201.6	-5.1173	-1.9113	-3.8577
3.52203	201.8	-5.0705	-1.8878	-3.8202
3.52552	202.0	-5.0260	-1.8648	-3.7832
3.52901	202.2	-4.9821	-1.8422	-3.7471
3.53250	202.4	-4.9378	-1.8201	-3.7115
3.53599	202.6	-4.8919	-1.7983	-3.6765
3.53948	202.8	-4.8535	-1.7769	-3.6422
3.54297	203.0	-4.8127	-1.7558	-3.6084
3.54646	203.2	-4.7722	-1.7351	-3.5754
3.54995	203.4	-4.7325	-1.7148	-3.5428

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nakon / $\alpha$ /	naprz / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
3.55344	203.6	-4.6923	-1.6949	-3.5108
3.55693	203.8	-4.6547	-1.6752	-3.4794
3.56042	204.0	-4.6138	-1.6558	-3.4483
3.56391	204.2	-4.5796	-1.6368	-3.4180
3.56740	204.4	-4.5429	-1.6182	-3.3880
3.57089	204.6	-4.5056	-1.5998	-3.3586
3.57439	204.8	-4.4712	-1.5816	-3.3296
3.57788	205.0	-4.4371	-1.5638	-3.3010
3.58137	205.2	-4.4023	-1.5462	-3.2731
3.58486	205.4	-4.3693	-1.5289	-3.2455
3.58835	205.6	-4.3358	-1.5119	-3.2183
3.59184	205.8	-4.3035	-1.4952	-3.1916
3.59533	206.0	-4.2708	-1.4788	-3.1652
3.59882	206.2	-4.2396	-1.4625	-3.1393
3.60231	206.4	-4.2087	-1.4465	-3.1138
3.60580	206.6	-4.1697	-1.4308	-3.0886
3.60929	206.8	-4.1475	-1.4152	-3.0639
3.61278	207.0	-4.1178	-1.3999	-3.0394

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nakon / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
3.61627	207.2	-4.0886	-1.3848	-3.0155
3.61976	207.4	-4.0599	-1.3699	-2.9917
3.62326	207.6	-4.0314	-1.3553	-2.9683
3.62675	207.8	-4.0033	-1.3392	-2.9454
3.63024	208.0	-3.9756	-1.3265	-2.9226
3.63373	208.2	-3.9484	-1.3125	-2.9003
3.63722	208.4	-3.9221	-1.2988	-2.8783
3.64071	208.6	-3.8955	-1.2850	-2.8565
3.64420	208.8	-3.8692	-1.2716	-2.8351
3.64769	209.0	-3.8440	-1.2582	-2.8139
3.65118	209.2	-3.8182	-1.2451	-2.7932
3.65467	209.4	-3.7936	-1.2323	-2.7725
3.65816	209.6	-3.7693	-1.2195	-2.7523
3.66165	209.8	-3.7446	-1.2068	-2.7323
3.66514	210.0	-3.7207	-1.1945	-2.7126
3.66863	210.2	-3.6974	-1.1821	-2.6952
3.67213	210.4	-3.6741	-1.1701	-2.6739
3.67562	210.6	-3.6511	-1.1580	-2.6549

---



$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nak on   $\alpha$	napus   $\alpha$	na.ob   $\alpha$
3.67911	210.8	-3.6284	-1.1462	-2.6362
3.68260	211.0	-3.6062	-1.1346	-2.6177
3.68609	211.2	-3.5840	-1.1231	-2.5995
3.68958	211.4	-3.5620	-1.1117	-2.5815
3.69307	211.6	-3.5405	-1.1005	-2.5637
3.69656	211.8	-3.5190	-1.0894	-2.5462
3.70005	212.0	-3.4985	-1.0784	-2.5288
3.70354	212.2	-3.4775	-1.0767	-2.5118
3.70703	212.4	-3.4576	-1.0569	-2.4931
3.71052	212.6	-3.4370	-1.0464	-2.4782
3.71401	212.8	-3.4170	-1.0359	-2.4617
3.71750	213.0	-3.3978	-1.0256	-2.4454
3.72099	213.2	-3.3782	-1.0154	-2.4294
3.72449	213.4	-3.3588	-1.0053	-2.4134
3.72798	213.6	-3.3399	-0.9954	-2.3977
3.73148	213.8	-3.3214	-0.9855	-2.3822
3.72496	214.0	-3.3029	-0.9758	-2.3669
3.73845	214.2	-3.2845	-0.9662	-2.3517

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	znak $ \alpha $	znak $ \alpha $	znak $ \alpha $
3.74194	214.4	-3.2664	-0.9567	-2.3558
3.74543	214.6	-3.2491	-0.9472	-2.3220
3.74892	214.8	-3.2311	-0.9379	-2.3074
3.75241	215.0	-3.2139	-0.9293	-2.2929
3.75590	215.2	-3.1969	-0.9196	-2.2787
3.75939	215.4	-3.1796	-0.9106	-2.2645
3.76288	215.6	-3.1630	-0.9017	-2.2505
3.76637	215.8	-3.1462	-0.8929	-2.2367
3.76986	216.0	-3.1300	-0.8842	-2.2230
3.77336	216.2	-3.1138	-0.8756	-2.2096
3.77685	216.4	-3.0978	-0.8671	-2.1962
3.78034	216.6	-3.0820	-0.8587	-2.1830
3.78383	216.8	-3.0662	-0.8502	-2.1699
3.78732	217.0	-3.0508	-0.8428	-2.1570
3.79081	217.2	-3.0355	-0.8338	-2.1442
3.79430	217.4	-3.0203	-0.8257	-2.1316
3.79779	217.6	-3.0055	-0.8177	-2.1190
3.80128	217.8	-2.9906	-0.8098	-2.1067

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakon $ \alpha $	napun $ \alpha $	naob $ \alpha $
3.80477	218.0	-2.9758	-0.8020	-2.0944
3.80826	218.2	-2.9616	-0.7942	-2.0832
3.81175	218.4	-2.9470	-0.7865	-2.0703
3.81524	218.6	-2.9329	-0.7789	-2.0585
3.81873	218.8	-2.9190	-0.7713	-2.0468
3.82223	219.0	-2.9052	-0.7639	-2.0351
3.82572	219.2	-2.8916	-0.7565	-2.0236
3.82921	219.4	-2.8779	-0.7491	-2.0122
3.83270	219.6	-2.8645	-0.7419	-2.0010
3.83619	219.8	-2.8513	-0.7347	-1.9898
3.83968	220.0	-2.8379	-0.7277	-1.9788
3.87459	222	-2.7140	-0.6601	-1.8742
3.90949	224	-2.6018	-0.5983	-1.7793
3.94440	226	-2.5003	-0.5417	-1.6926
3.97931	228	-2.4080	-0.4894	-1.6133
4.01421	230	-2.3237	-0.4759	-1.5404
4.04912	232	-2.2464	-0.3959	-1.4731
4.08402	234	-2.1758	-0.3538	-1.4109

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakon	napun	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
4.11893	236	-2.1109	-0.3144	-1.3532
4.15384	238	-2.0508	-0.2775	-1.2996
4.18875	240	-1.9959	-0.2426	-1.2496
4.22366	242	-1.9452	-0.2095	-1.2028
4.25856	244	-1.8984	-0.1782	-1.1590
4.29347	246	-1.8551	-0.1483	-1.1180
4.32838	248	-1.8152	-0.1199	-1.0793
4.36338	250	-1.7786	-0.0927	-1.0429
4.39819	252	-1.7445	-0.0665	-1.0086
4.43310	254	-1.7133	-0.0414	-0.9762
4.46800	256	-1.6845	-0.0171	-0.9455
4.50291	258	-1.6581	+0.0063	-0.9164
4.53782	260	-1.6340	+0.0292	-0.8889
4.57273	262	-1.6113	0.0513	-0.8627
4.60763	264	-1.5919	0.0729	-0.8377
4.64254	266	-1.5739	0.0940	-0.8140
4.67745	268	-1.5577	0.1147	-0.7913
4.71235	270	-1.5434	0.1351	-0.7697

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	sinus / $\alpha$ /	cosinus / $\alpha$ /	tan / $\alpha$ /
4.74726	272	-1.5309	0.1552	-0.7491
4.78217	274	-1.5200	0.1750	-0.7294
4.81707	276	-1.5110	0.1947	-0.7105
4.85198	278	-1.5036	0.2143	-0.6924
4.88689	280	-1.4975	0.2338	-0.6750
4.92180	282	-1.4940	0.2534	-0.6584
4.95670	284	-1.4919	0.2730	-0.6424
4.99161	286	-1.4912	0.2867	-0.6270
5.02652	288	-1.4924	0.3126	-0.6122
5.06142	290	-1.4957	0.3339	-0.5980
5.09633	292	-1.5007	0.3733	-0.5843
5.13124	294	-1.5078	0.3742	-0.5711
5.16614	296	-1.5170	0.3956	-0.5584
5.20105	298	-1.5283	0.4176	-0.5461
5.23596	300	-1.5421	0.4403	-0.5343
5.27087	302	-1.5581	0.4636	-0.5228
5.30577	304	-1.5773	0.4879	-0.5117
5.34068	306	-1.5990	0.5132	-0.5010

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nakos / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
5.37559	308	-1.6240	0.5398	-0.4906
5.41049	310	-1.6587	0.5677	-0.4806
5.44540	312	-1.6850	0.5972	-0.4708
5.48031	314	-1.7218	0.6285	-0.4615
5.51521	316	-1.7633	0.6673	-0.4523
5.55012	318	-1.8105	0.6977	-0.4435
5.58503	320.0	-1.8637	0.7364	-0.4349
5.58852	320.2	-1.8683	0.7403	
5.59201	320.4	-1.8751	0.7444	
5.59550	320.6	-1.8810	0.7485	
5.59899	320.8	-1.8870	0.7526	
5.60249	321.0	-1.8930	0.7568	
5.60598	321.2	-1.8989	0.7610	
5.60947	321.4	-1.9050	0.7653	
5.61296	321.6	-1.9112	0.7696	
5.61645	321.8	-1.9176	0.7738	
5.61994	322.0	-1.9239	0.7782	-0.4265
5.62343	322.2	-1.9305	0.7826	

---

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakon	napun	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
5.62692	322.4	-1.9372	0.7870	
5.63041	322.6	-1.9437	0.7915	
5.63390	322.8	-1.9504	0.7960	
5.63740	323.0	-1.9573	0.8006	
5.64089	323.2	-1.9642	0.8052	
5.64438	323.4	-1.9713	0.8098	
5.64787	323.6	-1.9783	0.8145	
5.65136	323.8	-1.9854	0.8192	
5.65485	324.0	-1.9926	0.8240	-0.4184
5.65834	324.2	-2.0000	0.8288	
5.66183	324.4	-2.0076	0.8337	
5.66532	324.6	-2.0151	0.8385	
5.66881	324.8	-2.0229	0.8435	
5.67231	325.0	-2.0307	0.8485	
5.67580	325.2	-2.0385	0.8536	
5.67929	325.4	-2.0466	0.8587	
5.68278	325.6	-2.0545	0.8639	
5.68627	325.8	-2.0623	0.8691	

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopni.	nałosa / $\alpha$ /	napin / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
5.68976	326.0	-2.0711	0.8744	-0.4105
5.69325	326.2	-2.0795	0.8796	
5.69674	326.4	-2.0879	0.8850	
5.70023	326.6	-2.0966	0.8905	
5.70372	326.8	-2.1054	0.8960	
5.70722	327.0	-2.1145	0.9015	
5.71071	327.2	-2.1234	0.9071	
5.71420	327.4	-2.1326	0.9128	
5.71769	327.6	-2.1420	0.9185	
5.72118	327.8	-2.1512	0.9243	
5.72467	328.0	-2.1609	0.9302	-0.4029
5.72816	328.2	-2.1704	0.9361	
5.73165	328.4	-2.1803	0.9421	
5.73514	328.6	-2.1904	0.9482	
5.73863	328.8	-2.2006	0.9543	
5.74213	329.0	-2.2109	0.9605	
5.74562	329.2	-2.2212	0.9667	
5.74911	329.4	-2.2317	0.9730	



$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakon	napun	nsob
w radjanach	w stopni.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
5.75260	329.6	-2.2425	0.9795	
5.75609	329.8	-2.2533	0.9860	
5.75953	330.0	-2.2643	0.9925	-0.3954
5.76307	330.2	-2.2753	0.9992	
5.76656	330.4	-2.2870	1.0060	
5.77005	330.6	-2.2984	1.0128	
5.77354	330.8	-2.3099	1.0197	
5.77704	331.0	-2.3220	1.0266	
5.78053	331.2	-2.3339	1.0338	
5.78402	331.4	-2.3464	1.0410	
5.78751	331.6	-2.3589	1.0482	
5.79100	331.8	-2.3713	1.0556	
5.79449	332.0	-2.3842	1.0631	-0.3811
5.79798	332.2	-2.3973	1.0706	
5.80147	332.4	-2.4106	1.0783	
5.80496	332.6	-2.4240	1.0860	
5.80845	332.8	-2.4377	1.0939	
5.81195	333.0	-2.4514	1.1018	

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopniach	nakom / $\alpha$ /	napum / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
5.81544	333.2	-2.4656	1.1100	
5.81893	333.4	-2.4798	1.1182	
5.82242	333.6	-2.4946	1.1264	
5.82591	333.8	-2.5093	1.1348	
5.82940	334.0	-2.5242	1.1434	-0.3811
5.83289	334.2	-2.5399	1.1521	
5.83638	334.4	-2.5551	1.1608	
5.83987	334.6	-2.5712	1.1698	
5.84336	334.8	-2.5871	1.1788	
5.84686	335.0	-2.6037	1.1881	
5.85035	335.2	-2.6199	1.1973	
5.85384	335.4	-2.6370	1.2068	
5.85733	335.6	-2.6544	1.2165	
5.86082	335.8	-2.6721	1.2263	
5.86431	336.0	-2.6901	1.2362	-0.3742
5.86780	336.2	-2.7083	1.2463	
5.87129	336.4	-2.7263	1.2566	
5.87478	336.6	-2.7457	1.2669	

---

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopniach	nakon / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
5.87827	336.8	-2.7648	1.2775	
5.88177	337.0	-2.7843	1.2883	
5.88526	337.2	-2.8040	1.2992	
5.88875	337.4	-2.8229	1.3104	
5.89224	337.6	-2.8447	1.3217	
5.89573	337.8	-2.8662	1.3331	
5.89922	338.0	-2.8874	1.3449	-0.3676
5.90271	338.2	-2.9090	1.3568	
5.90620	338.4	-2.9318	1.3689	
5.90969	338.6	-2.9541	1.3812	
5.91318	338.8	-2.9776	1.3938	
5.91668	339.0	-3.0008	1.4066	
5.92017	339.2	-3.0252	1.4196	
5.92366	339.4	-3.0500	1.4328	
5.92715	339.6	-3.0745	1.4463	
5.93064	339.8	-3.1003	1.4601	
5.93413	340.0	-3.1267	1.4741	-0.3610
5.93762	340.2	-3.1535	1.4884	

$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopn.	nakom / $\alpha$ /	napum / $\alpha$ /	naeb / $\alpha$ /
5.94111	340.4	-3.1799	1.5030	
5.94460	340.6	-3.2078	1.5179	
5.94809	340.8	-3.2365	1.5331	
5.95159	341.0	-3.2656	1.5486	
5.95508	341.2	-3.2952	1.5644	
5.95857	341.4	-3.3255	1.5805	
5.96206	341.6	-3.3574	1.5970	
5.96555	341.8	-3.3889	1.6138	
5.96904	342.0	-3.4213	1.6310	-0.3547
5.97253	342.2	-3.4543	1.6486	
5.97602	342.4	-3.4880	1.6665	
5.97951	342.6	-3.5236	1.6848	
5.98300	342.8	-3.5590	1.7036	
5.98650	343.0	-3.5950	1.7228	
5.98999	343.2	-3.6330	1.7424	
5.99348	343.4	-3.6708	1.7625	
5.99697	343.6	-3.7110	1.7832	
6.00046	343.8	-3.7505	1.8024	

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakom	napum	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
6.00395	344.0	-3.7923	1.8257	-0.3485
6.00744	344.2	-3.8341	1.8480	
6.01093	344.4	-3.8782	1.8706	
6.01442	344.6	-3.9218	1.8938	
6.01791	344.8	-3.9682	1.9177	
6.02141	345.0	-4.0157	1.9421	
6.02490	345.2	-4.0643	1.9672	
6.02839	345.4	-4.1131	1.9931	
6.03188	345.6	-4.1644	2.0195	
6.03537	345.8	-4.2172	2.0467	
6.03886	346.0	-4.2717	2.0747	-0.3424
6.04235	346.2	-4.3276	2.1035	
6.02584	346.4	-4.3853	2.1332	
6.04933	346.6	-4.4427	2.1636	
6.05282	346.8	-4.5057	2.1950	
6.05632	347.0	-4.5664	2.2273	
6.05981	347.2	-4.6314	2.2607	
6.06330	347.4	-4.7002	2.2951	

---

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakom	napun	naob
w radjanach	w stopn.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
6.06679	347.6	-4.7694	2.3306	
6.07028	347.8	-4.8404	2.3672	
6.07377	348.0	-4.9141	2.4050	-0.3366
6.07726	348.2	-4.9870	2.4441	
6.08075	348.4	-5.0689	2.4847	
6.08424	348.6	-5.1500	2.5264	
6.08773	348.8	-5.2369	2.5697	
6.09123	349.0	-5.3240	2.6145	
6.09472	349.2	-5.4146	2.6611	
6.09821	349.4	-5.5085	2.7095	
6.10170	349.6	-5.6087	2.7595	
6.10519	349.8	-5.7100	2.8115	
6.10868	350.0	-5.8154	2.8656	-0.3308
6.11217	350.2	-5.9279	2.9219	
6.11566	350.4	-6.0421	2.9806	
6.11915	350.6	-6.1646	3.0418	
6.12264	350.8	-6.2883	3.1053	
6.12614	351.0	-6.4219	3.1717	

---

---

$\alpha$	$\alpha^\circ$	nakom	napun	naob
# radjanach	w stopa.	$ \alpha $	$ \alpha $	$ \alpha $
6.12963	351.2	-6.6551	3.2415	
6.13312	351.4	-6.7034	3.3144	
6.13661	351.6	-6.8513	3.3905	
6.14010	351.8	-7.0116	3.4703	
6.14359	352.0	-7.1749	3.5540	-0.3252
6.14708	352.2	-7.3513	3.6422	
6.15057	352.4	-7.5319	3.7352	
6.15406	352.6	-7.7279	3.8330	
6.15755	352.8	-7.9347	3.9360	
6.16105	353.0	-8.1465	4.0445	
6.16454	353.2	-8.3779	4.1606	
6.16803	353.4	-8.6235	4.2830	
6.17152	353.6	-8.8766	4.4082	
6.17501	353.8	-9.1541	4.5512	
6.17850	354.0	-9.4501	4.6983	-0.3197
6.18199	354.2	-9.7570	4.8314	
6.18548	354.4	-10.0950	5.026	
6.18897	354.6	-10.4587	5.207	

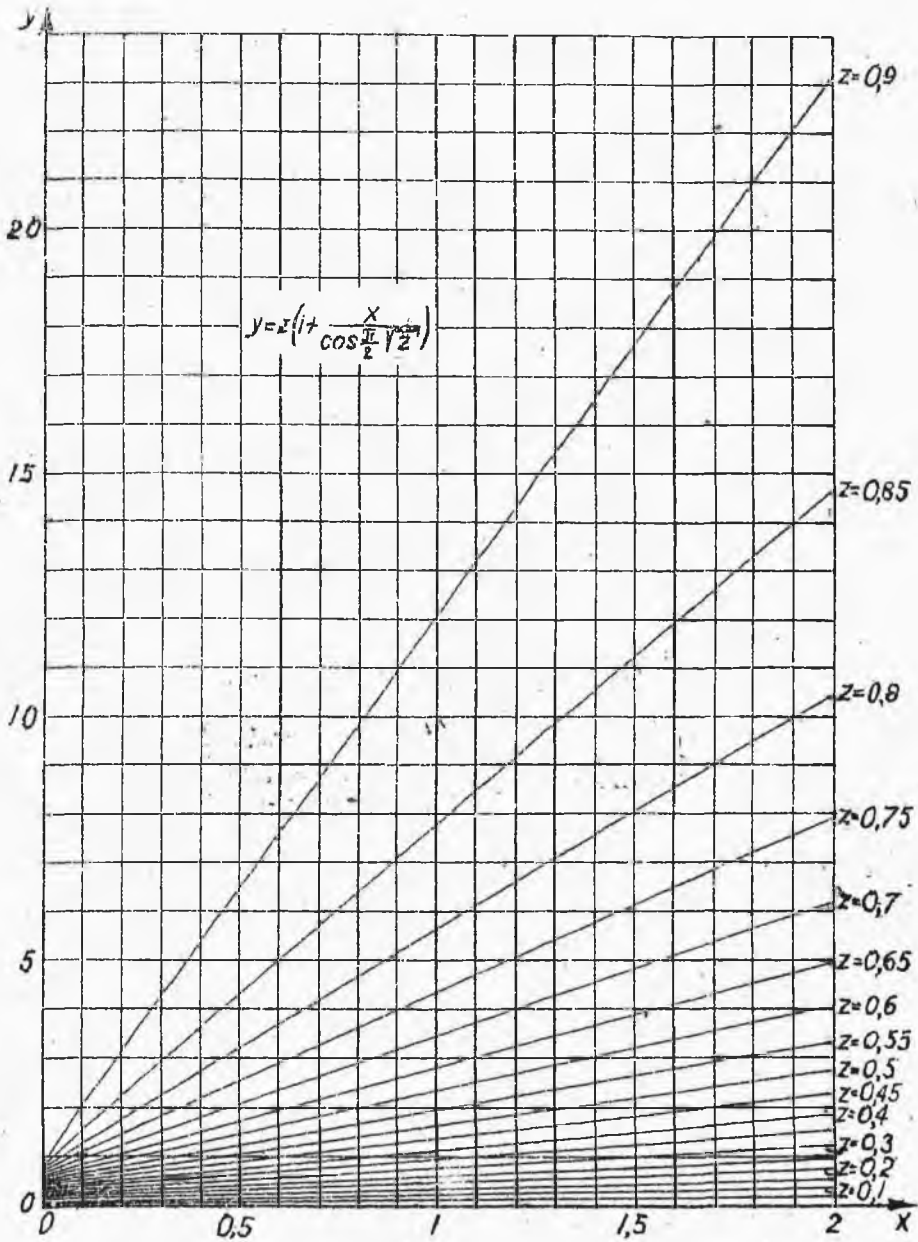
---

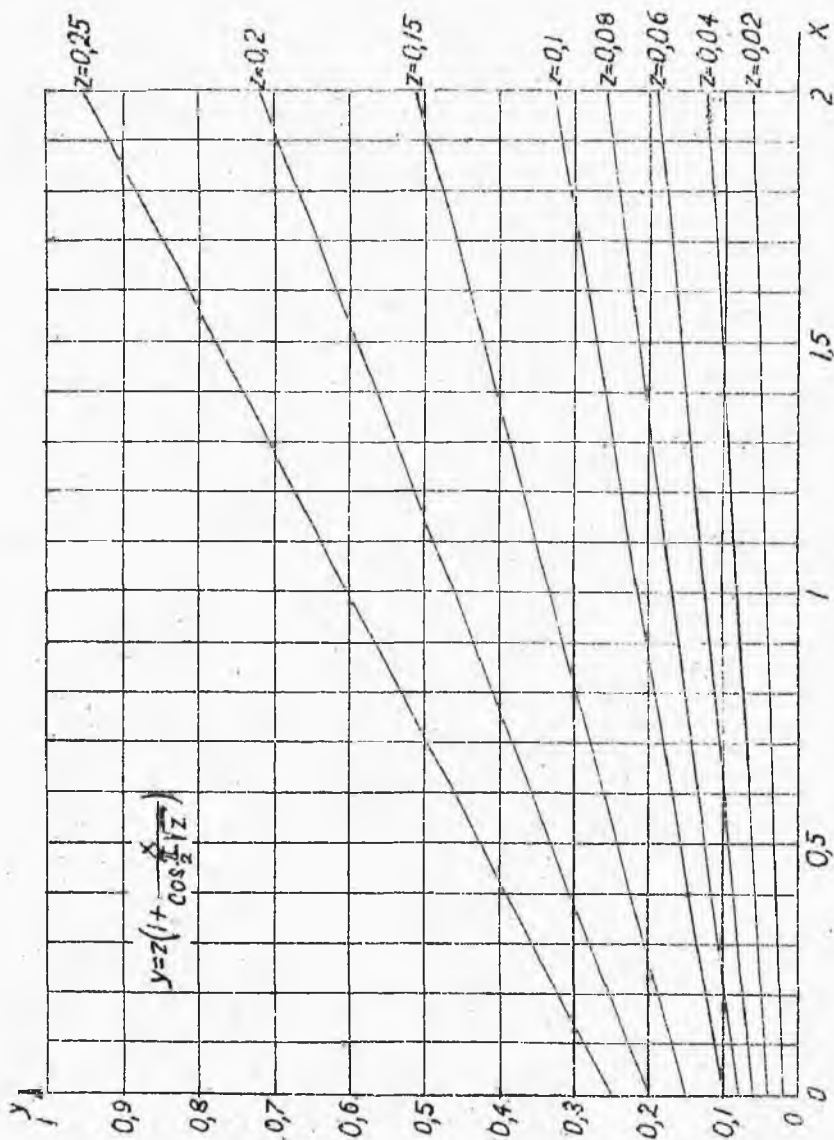
$\alpha$ w radjanach	$\alpha^\circ$ w stopniach	nakom / $\alpha$ /	napun / $\alpha$ /	naob / $\alpha$ /
6.19246	354.8	-10.8505	5.402	
6.19596	355.0	-11.2611	5.61	
6.19945	355.2	-11.7188	5.84	
6.20294	355.4	-12.2165	6.09	
6.20643	355.6	-12.7596	6.36	
6.20992	355.8	-13.3547	6.66	
6.21341	356.0	-13.9907	6.98	-0.3143
6.21690	356.2	-14.7119	7.34	
6.22039	356.4	-15.5144	7.75	
6.22388	356.6	-16.4116	8.09	
6.22737	356.8	-17.4214	8.70	
6.23087	357.0	-18.5664	9.26	
6.23436	357.2	-19.8757	9.92	
6.23785	357.4	-21.3405	10.67	
6.24134	357.6	-23.0972	11.55	
6.24483	357.8	-25.1883	12.58	
6.24832	358.0	-27.6677	13.83	-0.3091
6.24181	358.2	-30.7172	15.35	





WYKRESY  
DO OBLICZANIA PRĘTÓW ŚCISKANYCH MIMOŚRODOWO.





SPIS RZECZY .

---

	str.
W S T Ę P .....	5
ROZDZIAŁ I.	
LEKKOŚĆ KONSTRUKCJI.....	6
ROZDZIAŁ II.	
OBLICZENIE NITOWANYCH BELEK TEOWYCH.....	12
ROZDZIAŁ III.	
SKRĘCANIE PRZEKROJÓW DRAŻONYCH.....	16
ROZDZIAŁ IV.	
KONSTRUKCJE KRATOWE.	
§ 1. Rodzaje konstrukcji kratowych.....	19
§ 2. Wyznaczanie sił metodą Culmanna.....	21
§ 3. Wyznaczanie wykreślne przesunięć węzłów.....	22
§ 4. Zasada prac przygotowanych.....	25
§ 5. Wyznaczanie rachunkowe przesunięć węzłów.....	27
§ 6. Wyznaczanie rachunkowe sił w prętach	28
§ 7. Obliczanie sił w układach statycznie niewyznaczalnych.....	29

str.

§ 8. Zasada Betti'ego i prawo Maxwell'a... 33

## ROZDZIAŁ V.

NAPRĘŻENIA W BELCE ZGINANEJ I ŚCISKANEJ  
LUB ROZCIĄGANEJ..... 36

## ROZDZIAŁ VI.

### OBLICZANIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH.

§ 1. Uwagi ogólne..... 43

§ 2. Równania Eulera i Tetmajera..... 43

§ 3. Zastosowanie energetycznego kryterjum  
równowagi..... 57

§ 4. Wzór Johnsona - Osterfelda..... 60

§ 5. Przekroje drażbne..... 65

§ 6. Pręty o zmiennym przekroju..... 66

§ 7. Pręty obciążone w środku..... 69

§ 8. Wyboczenie mimośrodowe..... 70

## ROZDZIAŁ VII.

### BELKI WIELOPRZĘSŁOWE ZGINANE SIŁAMI PO- PRZECZNYMI I PODEŁUŻNIE ŚCISKANE.

§ 1. Belka jednoprzęsłowa..... 76

§ 2. Belka ciągła..... 83

	str.
§ 3. Zastosowanie praktyczne .....	85
POZDZIAŁ VIII	
WYTRZYMAŁOŚĆ CIENKICH PŁYT.	
§ 1. Dwuwymiarowy stan napięcia.....	92
§ 2. Ugięcie płyty.....	100
§ 3. Stateczność płyt.....	115
TABLICE FUNKCJI „ NAPUM / $\alpha$ / ”, „ NAKOM / $\alpha$ / ” I „ NAOB / $\alpha$ / ”.....	128
WYKRESY do obliczania prętów ściskanych mino- środkowe.....	169
SPIS RZECZY.....	171



nr 534

BIBLIOTEKA  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ  
Warszawa, ul. J. J. Jedności Robotniczej 1

K. I.  
J-17  
15/5