

71-430
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 8 • ZESZYT 4



Pw

WARSZAWA 1970
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

K. SOB CZYK, Stochastyczna stabilność ruchu Стохастическая устойчивость движения Stochastic stability of motion	375
R. STANISZEWSKI, Problemy optyimizacyjne w syntezie układów mechanicznych Вопросы оптимизации при синтезе механических систем Optimization problems in synthesis of mechanical systems	407
R. IZWI CKI, Ostateczności nasypów i skarp w stanie równowagi granicznej Об устойчивости насыпей и откосов в состоянии предельного равновесия On the stability of the embankments and slopes in the state of limit equilibrium	427
W. GAWROŃSKI, O pewnej możliwości dowodu twierdzeń o stabilności i niestabilności ruchu okresowego Об одной возможности доказательства теорем об устойчивости и неустойчивости периодических движений On a certain possibility of proving the periodic motion stability and instability theorems	441
L. KALINOWSKI, J. LINKOWSKI, Wyrażna granica plastyczności metali w ujęciu teorii atmosfer Cottrella Предел текучести металлов в теории атмосфер Коттрелла Yield point phenomenon in the light of Cottrell atmospheres theory	449
A. DRESCHER, Zastosowanie modelowych materiałów czułych optycznie do analizy stanu naprężenia w ośrodkach sypkich Применение модельных оптически чувствительных материалов для исследования напряженного состояния сыпучих сред Application of optically sensible model materials in stress analysis of granular media	461
S. ZANORSKI, O profilach prędkości przy laminarnych przepływach polimerów О профилях скорости при ламинарных течениях полимеров On velocity profiles in laminar flows of polymers	479
BIULETYN INFORMACYJNY	493

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 8 • Z E S Z Y T 4



W A R S Z A W A 1 9 7 0
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИОННЫЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, BARBARA
SKARŻYŃSKA, MAREK SOKOŁOWSKI,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI, STEFAN ZAHORSKI
— REDAKTOR NACZELNY

РЕДАКЦИЯ

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (587+113) egz. Arkuszy wydawn. 10,0. Arkuszy drukarskich 8,25. Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składania 24.VII.1970 r. Druk ukończono w listopadzie 1970 r. Zam. 1233/70 K-60 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

STOCHASTYCZNA STABILNOŚĆ RUCHU

KAZIMIERZ SOB CZ Y K (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień analizy układów dynamicznych jest badanie stabilności ruchu. W teorii deterministycznej, opisującej ruch układu za pomocą aparatu analizy matematycznej, badania stabilności są daleko zaawansowane i można powiedzieć, że w chwili obecnej dla układów dynamicznych dyskretnych istnieje teoria stabilności ruchu (por. np. [1, 2]). W tej teorii, podstawy której związane są głównie z nazwiskiem Lapunowa, pojęcia stabilności i cała analiza oparte są na deterministycznym charakterze ruchu i jego zaburzeń.

W analizie stochastycznego ruchu układów dynamicznych zagadnienie stabilności jest również bardzo istotne. W tym przypadku jednak, ze względu na stochastyczny charakter ruchu, pojęcia stabilności muszą być oparte na probabilistycznych charakterystykach odpowiednich zdarzeń i sprecyzowane w języku teorii prawdopodobieństwa. Ponieważ w określeniach stabilności zasadniczą rolę odgrywa pojęcie granicy oraz takie pojęcia, jak *małe zaburzenie ruchu* itp., które mogą mieć różny probabilistyczny sens, to należy się spodziewać, że ilość różnych definicji stabilności stochastycznej będzie znacznie większa niż w przypadku stabilności klasycznej. Tak jest istotnie, na przykład zwykle pojęcie stabilności (według Lapunowa) czy stabilności asymptotycznej może być w przypadku ruchu stochastycznego zdefiniowane co najmniej w trzech różnych sensach — według prawdopodobieństwa, w sensie średniokwadratowym i w sensie prawie na pewno.

W ostatnich latach zagadnienia stochastycznej stabilności ruchu (podobnie jak inne zagadnienia dotyczące stochastycznych równań różniczkowych) są intensywnie badane i w chwili obecnej istnieje w tej dziedzinie bogata literatura. Sprecyzowano podstawowe pojęcia stabilności stochastycznej oraz podano wiele ważnych twierdzeń i metod dla różnych klas układów dynamicznych i przy różnych założeniach odnośnie własności wymuszeń losowych i stochastycznych parametrów układów.

Pierwsze uwagi na temat probabilistycznego traktowania stabilności ruchu pochodzą już z lat trzydziestych [5, 6, 7], natomiast w roku 1955 ukazała się praca [8], w której zawarte jest pewne kryterium stabilności stochastycznej (wyrażone przez wartość gęstości widmowej rozwiązania) dla równania różniczkowego rzędu pierwszego, którego współczynnik jest procesem stochastycznym gaussowskim i stacjonarnym. Pewne uwagi zwi-

zane ze stabilnością układów z losowym wymuszeniem zawiera też praca [9]; wbrew tytułowi dotyczy ona jednak innych jakościowych kwestii dla równań nieliniowych z losowym wymuszeniem (np. istnienie rozwiązań stacjonarnych).

Pierwsze ważniejsze i ogólniejsze rezultaty dotyczące stochastycznej stabilności ruchu zawierają prace [10, 11] oraz [12, 13] rozpoczynające jednocześnie okres intensywnych badań przypadający w tej dziedzinie na ostatnie dziesięciolecie. W pracach tych autorzy podali podstawowe pojęcia stabilności stochastycznej oraz wprowadzili ważne kryteria dotyczące stabilności według prawdopodobieństwa i w sensie średniokwadratowym. Należy podkreślić, że w pracach [10, 12], które powstały niezależnie i zawierają rezultaty podobne, po raz pierwszy zastosowano aparat funkcji Lapunowa do badania stabilności stochastycznej. W latach sześćdziesiątych otrzymano szereg bardzo interesujących i ogólnych rezultatów dotyczących różnych typów stabilności stochastycznej i innych pokrewnych zagadnień (np. ograniczoność i stacjonarność rozwiązań równań stochastycznych, stochastyczna stabilizacja niestabilnych układów deterministycznych itp.), rezultaty te związane są przede wszystkim z takimi nazwiskami, jak CAUGHEY, GICHMAN, HASMINSKI, KOZIN i in.

W chwili obecnej, najważniejsze rezultaty otrzymane w badaniach stabilności stochastycznej dotyczą układów dynamicznych, których wymuszenia są procesami stochastycznymi o charakterze *białego szumu*, gdyż wtedy można zastosować teorię procesów Markowa, a dokładniej aparat stochastyczny równań Ito (por. np. [14, 15, 16, 17, 18]). Badanie stabilności przy wymuszeniach innych typów jest trudniejsze, dlatego szereg autorów ograniczało się do badania stabilności tylko układów liniowych (por. np. [19, 20, 21]) lub układów nieliniowych specjalnej postaci (np. [21]); jednakże dla szerszej klasy układów nieliniowych otrzymano również interesujące rezultaty (por. np. [22, 23, 24]).

Mimo że istniejące obecnie badania nie są wystarczające i wiele zagadnień nie ma jeszcze rozwiązania, to jednak są one na tyle zaawansowane, że bez wątplenia stanowią podstawę dla przyszłej teorii stochastycznej stabilności ruchu.

Celem tego artykułu jest uporządkowanie i syntetyczne omówienie podstawowych pojęć oraz najważniejszych istniejących obecnie rezultatów dotyczących stochastycznej stabilności ruchu układów dynamicznych dyskretnych. Na zakończenie podamy pewne uwagi na temat innych stochastycznych zagadnień jakościowej analizy układów dyskretnych.

2. Stabilność ruchu. Zagadnienia deterministyczne

Zanim przystąpimy do omawiania zagadnień stabilności stochastycznej, przytoczymy kilka podstawowych faktów dotyczących klasycznej (tj. deterministycznej) stabilności ruchu. Z przytoczonych tutaj pojęć i oznaczeń będziemy korzystali w dalszych rozważaniach.

Niech ruch układu dynamicznego będzie opisany przez układ równań (w postaci wektorowej)

$$(2.1) \quad \frac{dy}{dt} = F(t, y),$$

gdzie t oznacza czas ($t_0 \leq t < +\infty$), zaś $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]$, $F(t, y) = [F_1(t, y), \dots, F_n(t, y)]$; $y(t)$ jest funkcją niewiadomą. Funkcja wektorowa $F(t, y)$ jest określona na iloczynie kartezjańskim przedziału czasu T i pewnego obszaru $D_y \in R^n$. Przestrzeń R^n nazywa się *przestrzenią fazową* układu (2.1).

Warunki początkowe dla układu (2.1) mają postać

$$(2.2) \quad y(t_0) = y^0, \quad y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0).$$

Zakładamy, że funkcja F spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego (2.1)–(2.2) — por. np. [4].

Rozwiązanie zagadnienia początkowego (2.1), (2.2) ma postać

$$(2.3) \quad y = \varphi(t) = \varphi(t; t_0, y^0), \quad \varphi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)].$$

Funkcja (2.3) określa w dowolnej chwili t położenie poruszającego się punktu, który w chwili początkowej $t = t_0$ znajdował się w punkcie $y^0 \in D_y$. Mówi się, że rozwiązanie (2.3) określa *ruch* układu dynamicznego (2.1) w przestrzeni fazowej. Krzywa przedstawiona równaniem (2.3) opisująca ruch nazywa się *trajektorią* ruchu. Wektor zerowy dla odróżnienia od liczby zero będziemy oznaczali: $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Określenie 2.1. Rozwiązanie (lub ruch niezaburzony) $\varphi(t)$ układu (2.1) nazywa się *stabilnym* (według Lapunowa), jeżeli dla dowolnego $t_0 \in T$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, że jeżeli dla dowolnego rozwiązania $y(t)$ układu (2.1)

$$(2.4) \quad \|y(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta,$$

to dla wszystkich $t > t_0$

$$(2.5) \quad \|y(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni R^n .

Innymi słowy, rozwiązanie $\varphi(t)$ jest stabilne, jeżeli rozwiązania, które leżą dostatecznie blisko niego w chwili t pozostają dowolnie blisko niego również dla $t > t_0$.

Jeżeli warunki powyższego określenia nie są spełnione, to ruch nazywa się *niestabilnym*. Jeżeli liczbę δ można wybrać niezależnie od t_0 , tj. $\delta = \delta(\varepsilon)$, to mówimy, że stabilność jest *jednostajna*.

W szczególnym przypadku, gdy $F(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ rozwiązanie trywialne (położenie równowagi) $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$ jest stabilne, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $t_0 \in T$ istnieje takie $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, że z nierówności

$$(2.6) \quad \|y(t_0)\| < \delta$$

wynika nierówność

$$(2.7) \quad \|y(t)\| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t > t_0.$$

Przez odpowiednią zamianę zmiennych zagadnienie o stabilności dowolnego rozwiązania zawsze można sprowadzić do badania stabilności rozwiązania trywialnego (por. np. [2]).

Określenie 2.2. Rozwiązanie (ruch niezaburzony) $\varphi(t)$ układu (2.1) nazywa się *asymptotycznie stabilnym*, jeżeli jest ono stabilne (według Lapunowa) oraz

$$(2.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Jeżeli rozwiązania $y(t)$ dążą do $\varphi(t)$ przy $t \rightarrow \infty$ jednostajnie względem t , to mówimy, że asymptotyczna stabilność jest *jednostajna* względem t . W szczególności, rozwiązanie trywialne $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$ jest asymptotycznie stabilne, jeżeli jest stabilne oraz przy $\|y(t_0)\| < \delta$

$$(2.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathbf{0}.$$

Powyższe określenia nic nie mówią o wielkości zaburzeń początkowych (czyli o wielkości liczby δ). Obszar G zaburzeń początkowych, tj. przy ustalonym t obszar $\|y(t_0)\| < M$, (gdzie M dana liczba), dla którego zachodzi relacja stabilności asymptotycznej (2.9), nazywa się *obszarem stabilności asymptotycznej* (lub obszarem przyciągania położenia równowagi $\varphi(t) \equiv \mathbf{0}$). Ważny jest przypadek, kiedy obszar asymptotycznej stabilności G jest całą przestrzenią fazową.

Określenie 2.3. Jeżeli $\varphi(t)$ jest stabilne (według Lapunowa) i relacja (2.8) jest prawdziwa dla wszystkich rozwiązań $y(t)$ niezależnie od ich wartości początkowych (tj. $G = R^k$), to mówimy, że rozwiązanie (ruch) $\varphi(t)$ jest *asymptotycznie stabilne globalnie*.

Oprócz pojęć określonych wyżej, w badaniach stabilności zostały wprowadzone jeszcze inne ważne pojęcia, np. stabilność eksponencjalna, stabilność warunkowa, stabilność ze względu na zaburzenia działające w sposób ciągły, stabilność techniczna i inne (por. np. [3]).

Badanie stabilności jest najprostsze w przypadkach, kiedy równania różniczkowe opisujące ruch układu dynamicznego można rozwiązać explicite. Podstawową klasą takich równań są równania liniowe o stałych współczynnikach. W zagadnieniach praktycznych spotykamy jednak układy nieliniowe, dla których nie można znaleźć rozwiązania dokładnego; analiza stabilności takich układów jest trudniejsza i wymaga specyficznych metod.

Najprostsza i historycznie pierwsza metoda badania stabilności układów nieliniowych opisanych równaniami postaci (2.1) polega na tym, że dane równania nieliniowe linearyzuje się i o stabilności (względnie niestabilności) orzeka się na podstawie równań liniowych — tzw. *równań pierwszego przybliżenia*, tj. równań postaci

$$(2.10) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie zwykle zakłada się, że $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{const}$. Mimo że metoda ta nie jest ogólna, istnieje jednak pewna klasa układów nieliniowych, dla których kwestie stabilności można rozstrzygać w oparciu o pierwsze (liniowe) przybliżenie. Jak zobaczymy w dalszych rozważaniach, procedura ta może być również stosowana w badaniach stabilności stochastycznej.

Podstawową metodą badania stabilności jest tzw. *druga metoda Lapunowa*. Jej istota polega na tym, że (nie rozwiązując równań ruchu) kryteria stabilności i niestabilności formułuje się w oparciu o własności pewnych funkcji związanych z danym układem równań — zwanych *funkcjami Lapunowa*. Wprowadzenie funkcji Lapunowa okazało się bardzo trafne i dało podstawę dla wielu ogólnych metod analizy jakościowej układów dynamicznych. Obecnie w oparciu o funkcje Lapunowa można rozstrzygać kwestie stabilności, badać problemy optymalnej stabilizacji układów dynamicznych oraz analizować inne zagadnienia jakościowe równań różniczkowych (por. np. [2, 3]). Pojęcie funkcji

Lapunowa okazało się również bardzo istotne w badaniach stochastycznej stabilności ruchu.

Niech $V(t, y) = V(t, y_1, \dots, y_n)$ będzie funkcją określoną i ciągłą w zbiorze $Z_0 = \{a < t < \infty, \|y\| < h\}$.

Rzeczywista, skalarna i ciągła funkcja $V(t, y)$ nazywa się *funkcją stałego znaku* (znaku dodatniego lub znaku ujemnego) w Z_0 , jeżeli $V(t, y) \geq 0$ lub $V(t, y) \leq 0$ dla $(t, y) \in Z_0$.

Funkcja $V(t, y)$ nazywa się funkcją *określoną dodatnio* (w sensie Lapunowa) w Z_0 , jeżeli istnieje ciągła funkcja skalarna $W(y)$ określona dla $\|y\| < h$ taka, że

$$(2.11) \quad \begin{aligned} V(t, y) &\geq W(y) > 0 \quad \text{dla} \quad \|y\| \neq 0, \\ V(t, \mathbf{0}) &= W(\mathbf{0}) = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie, funkcja $V(t, y)$ nazywa się funkcją *określoną ujemnie* w Z_0 , jeżeli istnieje $W(y)$ taka, że

$$(2.12) \quad \begin{aligned} V(t, y) &\leq -W(y) < 0 \quad \text{dla} \quad \|y\| \neq 0, \\ V(t, \mathbf{0}) &= W(\mathbf{0}) = 0. \end{aligned}$$

Funkcja określona dodatnio lub ujemnie nazywa się funkcją *określonego znaku*.

W szczególności jeżeli V nie zależy od t , tj. $V = V(y)$, to jest ona określonego znaku, jeżeli $(-1)^{\beta} V(y) > 0$ dla $\|y\| \neq 0$ i $V(\mathbf{0}) = 0$, przy czym dla funkcji określonej dodatnio $\beta = 0$, a dla funkcji określonej ujemnie $\beta = 1$.

Mówi się, że funkcja $V(t, y)$ posiada nieskończenie małą granicę przy $y \rightarrow \mathbf{0}$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$|V(t, y)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad \|y\| < \delta, \quad t \in (t_0, \infty).$$

Zauważymy, że jeżeli $V = V(y)$ jest funkcją ciągłą (niezależną od t) i taką, że $V(\mathbf{0}) = 0$, to $V(y)$ posiada nieskończenie małą granicę przy $y \rightarrow \mathbf{0}$. Analiza stabilności przy pomocy drugiej metody Lapunowa oparta jest na badaniu zachowania się funkcji $V(t, y)$ wzdłuż trajektorii rozważanego układu równań różniczkowych.

Niech funkcja $V \equiv V(t, y)$ będzie określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu w zbiorze Z_0 .

Określenie 2.4. Funkcja

$$(2.13) \quad \frac{dV}{dt} \equiv \dot{V}(t, y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_j} F_j \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + F \cdot \text{grad } V$$

nazywa się *pochođną funkcji* $V(t, y)$ ze względu na układ (2.1). Operacja przyporządkowująca funkcji V jej pochodną \dot{V} ze względu na układ (2.1) jest niekiedy nazywana *operatorem Lapunowa*.

A oto trzy podstawowe twierdzenia Lapunowa por. [2, 3].

Twierdzenie 2.1. (pierwsze twierdzenie Lapunowa). Jeżeli dla układu (2.1) istnieje dodatnio określona funkcja skalarna $V(t, y)$ posiadająca pochodną $\dot{V}(t, y)$ ze względu na układ (2.1) znaku ujemnego, to rozwiązanie trywialne $\varphi \equiv \mathbf{0}$ danego układu jest stabilne według Lapunowa.

Twierdzenie 2.2. (drugie twierdzenie Lapunowa). Jeżeli dla układu (2.1) istnieje dodatnio określona funkcja skalarna $V(t, y)$ posiadająca nieskończenie małą granicę przy

$y \rightarrow \mathbf{0}$ oraz mająca ujemnie określoną pochodną $\dot{V}(t, y)$ ze względu na układ (2.1), to rozwiązanie trywialne danego układu jest asymptotycznie stabilne.

Twierdzenie 2.3. (trzecie twierdzenie Lapunowa). Niech dla układu (2.1) istnieje funkcja $V(t, y)$ posiadająca nieskończenie małą granicę przy $y \rightarrow \mathbf{0}$ oraz mająca pochodną $\dot{V}(t, y)$ ze względu na układ (2.1) określonego znaku. Jeżeli dla pewnego $t' > a$ w dowolnym otoczeniu $\|y\| < \Delta$ ($\Delta < h$) znajdzie się punkt (t', y') , dla którego znak funkcji jest taki sam jak znak pochodnej \dot{V} , tj. taki, że

$$V(t', y')\dot{V}(t', y') > \mathbf{0},$$

to rozwiązanie trywialne $\varphi \equiv \mathbf{0}$ układu (2.1) jest niestabilne według Lapunowa.

Określenie 2.5. Funkcje $V(t, y)$ czyniące zadość warunkom twierdzeń 2.1, 2.2, 2.3 nazywają się funkcjami Lapunowa (odpowiednio I, II i III rodzaju).

3. Podstawowe pojęcia stabilności stochastycznej

Pojęcia stabilności przytoczone w poprzednim paragrafie przestają być użyteczne, jeżeli rozważamy stochastyczny ruch układów fizycznych. Koncepcje stabilności takiego ruchu (koncepcje stabilności stochastycznej) muszą uwzględniać jego probabilistyczny opis i wyrażać pojęcia stabilności w terminach charakterystyk odpowiednich zdarzeń losowych. W literaturze istnieje szereg różnych pojęć stochastycznej stabilności ruchu; tutaj przytoczymy najważniejsze z nich.

Niech ruch układu dynamicznego będzie opisany przez układ równań stochastycznych (w postaci wektorowej)

$$(3.1) \quad \frac{dY}{dt} = F[Y(t), t, X(t)],$$

gdzie F jest funkcją wektorową, zaś $X(t)$ i $Y(t)$ oznaczają procesy stochastyczne wektorowe. Nie ograniczając ogólności można przyjąć, że $F(\mathbf{0}, t, X(t)) = \mathbf{0}$ i badać stabilność rozwiązania trywialnego $Y(t) = \varphi(t) \equiv \mathbf{0}$.

Określenie 3.1. Rozwiązanie trywialne (ruch niezaburzony) układu (3.1) nazywa się:

a) *stabilne według prawdopodobieństwa*, jeżeli dla dowolnych (dowolnie małych) liczb $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje taka liczba $r > 0$, że dla dowolnego rozwiązania $Y(t)$ układu (3.1), które w chwili $t = t_0$ spełnia warunek

$$\|y^0\| = \|Y(t_0)\| < r,$$

jest dla wszystkich $t \geq t_0$ spełniona jedna z nierówności

$$(3.2) \quad P_t\{\|Y(y^0, t_0, t)\| < \varepsilon\} > 1 - \delta,$$

$$(3.2') \quad P_t\{\|Y(y^0, t_0, t)\| > \varepsilon\} < \delta,$$

lub nierówność silniejsza (por. [15, 17])

$$(3.2'') \quad \lim_{\|y^0\| \rightarrow 0} P\{\sup_{t \geq t_0} \|Y(y^0, t_0, t)\| > \varepsilon\} = 0;$$

w relacjach (3.2) i (3.2') $P_t\{\|Y\| \geq \varepsilon\}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t \geq t_0$ jest spełniona nierówność $\|Y(y^0, t_0, t)\| \geq \varepsilon$;

b) *asymptotycznie stabilne według prawdopodobieństwa*, jeżeli jest ono stabilne według prawdopodobieństwa i oprócz tego dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla wszystkich rozwiązań, dla których $\|y^0\| < M$, spełniona jest nierówność

$$(3.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_t \{ \|Y(y^0, t_0, t)\| < \varepsilon \} = 1,$$

gdzie M jest stałą określającą obszar stabilności asymptotycznej;

c) *asymptotycznie stabilne globalnie według prawdopodobieństwa*, jeżeli relacja (3.3) jest prawdziwa dla dowolnego $y^0 \in R^n$, tj. $M = \infty$.

W pracy [12] zostało podane nieco inne określenie asymptotycznej stabilności globalnej według prawdopodobieństwa.

Określenie 3.2. Rozwiązanie trywialne układu (3.1) nazywa się:

a) *stabilne średnio z potęgą p* (krótko *p -stabilne*), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $r > 0$, że dla wszystkich rozwiązań $Y(t)$ układu (3.1), dla których

$$\|y^0\| = \|Y(t_0)\| < r,$$

spełniona jest dla $t \geq t_0$ nierówność

$$(3.4) \quad E\{\|Y(y^0, t_0, t)\|^p\} < \varepsilon, \quad p > 0$$

(E oznacza wartość przeciętną);

b) *asymptotycznie stabilne średnio z potęgą p* (krótko *asymptotycznie p -stabilne*), jeżeli jest ono p -stabilne i poza tym, dla $t \rightarrow \infty$

$$(3.5) \quad E\{\|Y(y^0, t_0, t)\|^p\} \rightarrow 0;$$

jeżeli powyższa relacja zachodzi dla dowolnego $y^0 \in R^n$, to mówimy, że asymptotyczna p -stabilność jest *globalna*;

c) *eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą p* (krótko: *eksponencjalnie p -stabilne*), jeżeli istnieją takie stałe liczby dodatnie N i α , że dla wszystkich $t \geq t_0$ zachodzi nierówność

$$(3.6) \quad E\{\|Y(y^0, t_0, t)\|^p\} \leq N \|y^0\|^p \exp[-\alpha(t-t_0)].$$

Stabilność średnia z potęgą p (również asymptotyczna, eksponencjalna), jak wynika z określenia, charakteryzuje stabilność momentów rozwiązania i jest również nazywana stabilnością momentów. Dokładniej, jeżeli spełniony jest warunek (3.4) [odpowiednio (3.5) i (3.6)], to często mówi się, że *moment rzędu p rozwiązania jest stabilny* (odpowiednio — asymptotycznie stabilny, eksponencjalnie stabilny) w otoczeniu rozwiązania trywialnego (por. [18, 26]).

Jeżeli $p = 2$, to mówimy, że rozwiązanie trywialne jest stabilne (asymptotycznie stabilne, eksponencjalnie stabilne) *średnio z kwadratem*.

Określenie 3.3. Rozwiązanie trywialne układu (3.1) nazywa się *stabilne prawie na pewno* ([22, 27]) lub *z prawdopodobieństwem jeden*, jeżeli dla dowolnego rozwiązania $Y(t)$ układu (3.1) takiego, że $\|Y(t_0)\| < r$, wszystkie realizacje procesu $Y(t)$ oprócz co najwyżej ich zbioru o prawdopodobieństwie zero są stabilne.

Analogicznie określamy stabilność asymptotyczną i stabilność eksponencjalną prawie na pewno.

W pracach [19, 21] przyjęte jest następujące określenie: rozwiązanie trywialne układu (3.1) jest *asymptotycznie stabilne prawie na pewno* (lub) *z prawdopodobieństwem jeden* ze

względ u na obszar $D \subset R^n$, jeżeli dla każdego rozwiązania $Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.1) takiego że $y^0 \in D$ mamy

$$(3.7) \quad \|Y(y^0, t_0, t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{prawie na pewno,}$$

tj. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie T , że

$$(3.8) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P\{\sup_{t \geq T} \|Y(y^0, t_0, t)\| > \varepsilon\} = 0.$$

Dla autonomicznych układów liniowych i stacjonarnego procesu $X(t)$ powyższe określenie jest równoważne określeniu 3.3.

Niech $\Phi(t) = \Phi[Y(\cdot), t]$ będzie pewnym nielosowym funkcjonałem (skalarnym, wektorowym itp.) określonym na rozwiązaniach $Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.1) zależnym od $t \in [0, \infty)$ jak od parametru i spełniającym warunek $\Phi[0, t] \equiv 0$.

Określenie 3.4. Mówimy (por. [28]), że funkcjonal Φ jest stabilny, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $r > 0$, że dla każdego rozwiązania $Y(t)$ układu (3.1) takiego, że $\|y^0\| = \|Y(t_0)\| < r$ jest dla $t \geq t_0$ spełniona nierówność

$$(3.9) \quad |\Phi[Y(\cdot), t]| < \varepsilon;$$

funkcjonał Φ nazywa się asymptotycznie stabilny, jeżeli istnieje takie $M > 0$, że jeżeli $\|Y(t_0)\| < M$, to

$$(3.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi[Y(\cdot), t] = 0.$$

Najprostszymi funkcjonałami $\Phi[Y(\cdot), t]$, których stabilność jest ważna w zastosowaniach, są momenty rozwiązań układu równań (3.1), np. momenty pierwszego i drugiego rzędu

$$(3.11) \quad \Phi[Y(\cdot), t] = E[Y(t)], \quad \Phi[Y(\cdot), t] = E[Y(t)\bar{Y}(t)].$$

W pierwszym przypadku Φ jest funkcjonałem wektorowym, w drugim — macierzowym.

Tak więc, w przypadku szczególnym kiedy funkcjonal Φ jest momentem dowolnego rzędu $p > 0$ rozwiązania, stabilność funkcjonału Φ oznacza stabilność momentów (określenie 3.2).

Podane wyżej określenia dotyczą stabilności stochastycznej ze względu na zaburzenia warunków początkowych. Można również wprowadzić odpowiednie pojęcia stabilności stochastycznej ze względu na ciągle działające zaburzenia.

Niech będzie dany układ

$$(3.12) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t)$$

oraz układ *zaburzony*

$$(3.13) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t) + R(t),$$

gdzie $R(t)$ jest procesem stochastycznym.

Określenie 3.5. Rozwiązanie trywialne (ruch niezaburzony) układu (3.12) nazywa się *stabilne według prawdopodobieństwa ze względu na ciągle działające zaburzenia male w sen-*

się średnim, jeżeli dla dowolnego procesu $R(t)$ i $y^0 \in R^n$ dowolne rozwiązanie $Y(t) = Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.13) dąży do zera według prawdopodobieństwa, gdy

$$(3.14) \quad \|y^0\| + \sup_{t \geq t_0} E \|R(t)\| \rightarrow 0,$$

tj. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje takie $\gamma > 0$, że z nierówności

$$\|y^0\| + \sup_{t \geq t_0} E \|R(t)\| < \gamma$$

wynika, że dla $t \geq t_0$

$$P\{\|Y(y^0, t_0, t)\| > \varepsilon\} < \delta.$$

Określenie 3.6. Rozwiązanie trywialne układu (3.12) nazywa się *stabilne średnio z wykładnikiem p ze względu na ciągle działające zaburzenia małe w sensie średnim z wykładnikiem r* , jeżeli dla dowolnego procesu $R(t)$, $y^0 \in R^n$ i dla dowolnego rozwiązania $Y(t) = Y(y^0, t_0, t)$ układu (3.13) takiego, że

$$(3.15) \quad \|y^0\| + \sup_{t \geq t_0} E \{\|R(t)\|^r\} \rightarrow 0, \quad r > 0,$$

mamy dla $t \geq t_0$

$$(3.16) \quad \sup_{t > t_0} E \{\|Y(y^0, t_0, t)\|^p\} \rightarrow 0, \quad p > 0.$$

Zamiast układu (3.13) można rozpatrywać układ ogólniejszy

$$(3.17) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t) + R[Y, t, X(t)].$$

Wtedy w określeniach 3.5 i 3.6 warunki (3.14), (3.15) należy zamienić warunkiem

$$(3.18) \quad \|y^0\| + \sup_{t > t_0} E \left\{ \sup_Y \|R[Y, t, X(t)]\|^r \right\} \rightarrow 0.$$

Przytoczone określenia nie wyczerpują wszystkich możliwych koncepcji stabilności stochastycznej; w literaturze można spotkać jeszcze inne użyteczne pojęcia (por. np. [30, 31, 32, 33, 34, 57]). Na przykład w pracach [33, 34] zostały wprowadzone pojęcia stabilności entropijnej oraz zupełnej stabilności statystycznej interesujące przede wszystkim w analizie układów z losowymi warunkami początkowymi.

Określenie 3.7. Układ charakteryzuje się *ogólną stabilnością entropijną*, jeżeli jego entropia (jednowymiarowa) $H(t)$ przy $t \rightarrow +\infty$ dąży do $-\infty$. Jeżeli entropia $H(t)$ monotonicznie maleje przy wzroście t , to mówimy, że układ charakteryzuje się ogólną *monotoniczną* stabilnością entropijną.

Niech ruch niezaburzony układu odpowiada rozwiązaniu trywialnemu. Niech w chwili początkowej ruch zaburzony układu będzie scharakteryzowany przez zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n; t_0) = f_0(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Określenie 3.8. Ruch niezaburzony jest *statystycznie stabilny przy rozkładzie początkowym f_0* , jeżeli przy tym rozkładzie gęstość prawdopodobieństwa $f(y_1, y_2, \dots, y_n; t)$ rozwiązania, przy $t \rightarrow \infty$ dąży do delty Diraca, tj.

$$(3.19) \quad f(y_1, y_2, \dots, y_n; t) \rightarrow \delta(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \text{przy } t \rightarrow \infty.$$

Jeżeli warunek (3.19) zachodzi dla dowolnego rozkładu początkowego f_0 , to ruch niezaburzony charakteryzuje się *zupelną stabilnością statystyczną*.

Łatwo zauważyć, że jeżeli ma miejsce stabilność statystyczna zdefiniowana w określeniu 3.8, to wszystkie momenty rozwiązania dążą do zera przy $t \rightarrow \infty$ i odwrotnie.

W następnych paragrafach omówimy najważniejsze rezultaty otrzymane w analizie stabilności stochastycznej według przytoczonych tutaj definicji.

4. Stabilność według prawdopodobieństwa

4.1. Układy opisane przez równania stochastyczne Ito. W tym paragrafie omówimy najważniejsze kryteria stabilności stochastycznej scharakteryzowane przez określenie 3.1, tj. stabilności według prawdopodobieństwa. Najpierw scharakteryzujemy rezultaty dotyczące układów, na które działają wymuszenia o charakterze *bialego szumu*, tj. układy opisane przez stochastyczne równania różniczkowe Ito. Analiza stabilności takich układów została rozpoczęta przez HASMINSKIEGO [15] i do niego należą najważniejsze rezultaty (por. [15, 17]).

Niech ruch układu dynamicznego będzie opisany przez równanie (w postaci wektorowej)

$$(4.1) \quad \frac{dY}{dt} = F[Y(t), t] + \sigma[Y(t), t]X(t),$$

gdzie $X(t)$ jest wektorowym procesem *bialego szumu*, $F(y, t) = [F_1(y, t), \dots, F_n(y, t)]$, zaś $\sigma(y, t) = \{\sigma_{ij}(y, t)\}$ oznacza macierz o wymiarach $n \times n$.

Pochodna w powyższym równaniu nie może być rozumiana w zwykłym sensie, gdyż $X(t)$ jest dystrybucją losową. Ścisła interpretacja równania (4.1) bez korzystania z aparatu dystrybucji losowych oparta jest na teorii stochastycznych równań Ito. W tej interpretacji równanie (4.1) jest symbolicznym zapisem następującego równania dla różniczek

$$(4.2) \quad dY(t) = F[Y(t), t]dt + \sigma[Y(t), t]dZ(t),$$

gdzie $Z(t)$ jest procesem Wienera (procesem ruchu brownowskiego); *biały szum* jest uogólnioną pochodną procesu $Z(t)$, tj. $X(t) = \frac{dZ(t)}{dt}$. Równanie (4.2) nazywa się stochastycznym równaniem Ito i posiada rozwiniętą teorię (por. [18]).

Przy dość ogólnych założeniach odnośnie funkcji wektorowej $F(y, t)$ i funkcji macierzowej $\sigma(y, t)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $Y(t) = Y(y^0, t_0, t)$ równania (4.2) spełniające warunek początkowy $Y(t_0) = y^0$ i jest ono dyfuzyjnym procesem Markowa. Będziemy zakładali, że $F_i(\mathbf{0}, t) \equiv 0$, $\sigma_{ij}(\mathbf{0}, t) \equiv 0$; wtedy równanie (4.2) posiada trywialne rozwiązanie $Y(t) \equiv \mathbf{0}$ odpowiadające warunkowi $y^0 = \mathbf{0}$.

Z równaniem (4.2), dokładniej z procesem dyfuzyjnym $Y(t)$, jest związany operator (por. [18])

$$(4.3) \quad L = \frac{\partial}{\partial t} + L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n A_i(y, t) \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(y, t) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j},$$

gdzie $A_i(y, t) = F_i(y, t)$, $\{B_{ij}\} = B = \sigma \cdot \sigma^*$; σ^* — macierz transponowana względem σ . Obszar określoności operatora L jest zbiorem funkcji dwukrotnie w sposób ciągły róż-

niczkwalnych względem x i w sposób ciągły różniczkowalnych względem t , oprócz co najwyżej punktu $y = \mathbf{0}$. Oczywiście, dla $\sigma_{ij}(y, t) \equiv 0$ (układ deterministyczny) operator L jest operatorem Lapunowa.

Założmy, że współczynniki układu (4.2) są niezależne od czasu [proces jednorodny w czasie; wtedy $L(y, t) = L(y)$] oraz że drugi składnik operatora L_1 jest niezwyrodniałym operatorem eliptycznym, tj. istnieje funkcja ciągła $m(y)$ dodatnia dla $y \neq \mathbf{0}$ taka, że dla wszystkich rzeczywistych λ spełniona jest nierówność

$$(4.4) \quad \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(y) \lambda_i \lambda_j \geq m(y) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Stosując teorię procesów Markowa oraz pewne własności eliptycznych operatorów różniczkowych, HASMINSKIJ [15] wykazał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1. Rozwiązanie trywialne układu (4.2) o współczynnikach niezależnych od czasu i macierzy $\sigma(y)$ takiej, że spełniony jest warunek (4.4), jest stabilne według prawdopodobieństwa [w sensie (3.2'')] wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje ciągła nieujemna funkcja $V(y)$ znikająca tylko dla $y = \mathbf{0}$, dla której

$$(4.5) \quad L_1 V(y) \leq 0.$$

Dla procesu niejednorodnego w czasie odpowiadającemu operatorowi $L(t, y)$ prawdziwy jest następujący warunek wystarczający [15, 28].

Twierdzenie 4.2. Na to, aby rozwiązanie trywialne układu (4.2) było stabilne według prawdopodobieństwa [w sensie (3.2'')] wystarcza, aby istniała dodatnio określona funkcja skalarna $V(t, y)$, dla której

$$(4.6) \quad LV(t, y) \leq 0.$$

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia Lapunowa 2.1 i redukuje się do niego jeżeli $\sigma = 0$. Widzimy, że operator L charakteryzujący proces Markowa odgrywa tę samą rolę, co operator Lapunowa w analizie stabilności układów deterministycznych.

Następujące twierdzenie daje kryterium niestabilności.

Twierdzenie 4.3. Na to, aby rozwiązanie trywialne układu (4.2) o współczynnikach niezależnych od czasu i macierzy $\sigma(y)$ czyniącej zadość warunkowi (4.4) było niestabilne według prawdopodobieństwa (w sensie (3.2'')) wystarcza, aby istniała w pewnym otoczeniu punktu $y \equiv \mathbf{0}$ funkcja $W(y)$ taka, że

$$(4.7) \quad W(y) \rightarrow \infty, \quad \text{gdy } y \rightarrow \mathbf{0}, \quad L_1 W \leq 0,$$

w dowolnym punkcie tego otoczenia oprócz samego punktu $y = \mathbf{0}$.

Z powyższymi zagadnieniami związane są też rozważania BUCY [36], który rozpatruje równania Ito dla dyskretnych procesów Markowa oraz prace KUSHNERA [23, 37, 38]. Kushner otrzymuje szereg istotnych rezultatów. Między innymi jego analiza pozwala rozszerzyć zakres wyników Hasminskiego na przypadki, kiedy L nie jest operatorem eliptycznym, poza tym praca [23] zawiera konstrukcję stochastycznej funkcji Lapunowa.

Na zakończenie tego punktu rozważymy dwa przykłady ilustrujące zastosowanie powyższych twierdzeń. Otrzymamy również pewne wnioski dotyczące stabilności rozwiązania trywialnego równania Ito według pierwszego (liniowego) przybliżenia. Interesujące i ważne są jednak bardziej ogólne relacje między stabilnością stochastyczną układów

nieliniowych i stabilnością ich przybliżeń liniowych. Kwestie te rozważali NEWELSON i HASMINSKIJ [17] oraz GICHMAN [28]. Podstawowy rezultat dotyczący stabilności stochastycznej według pierwszego przybliżenia zawiera następujące twierdzenie [17], które można uważać za rozszerzenie twierdzenia Lapunowa o stabilności według pierwszego przybliżenia na przypadek procesów Markowa.

Twierdzenie 4.4. Na to, aby trywialne rozwiązanie układu

$$(4.8) \quad dY_i = \sum_{j=1}^n [F_i^j(t)Y_j + \Psi_i^0(t, Y_1, \dots, Y_n)]dt + \\ + \sum_{k,j=1}^n [\sigma_i^{jk}(t)Y_k + \Psi^{jk}(t, Y_1, \dots, Y_n)]dZ_j$$

było asymptotycznie stabilne według prawdopodobieństwa przy $t \geq t_0$, wystarczy, aby były spełnione warunki:

1) rozwiązanie trywialne układu liniowego

$$(4.9) \quad dY_i^0 = \sum_{j=1}^n F_i^j(t)Y_j^0 dt + \sum_{k,j=1}^n \sigma_i^{jk}(t)Y_k^0 dZ_j$$

było eksponencjalnie stabilne średnio z pewną potęgą $p > 0$, $t \geq t_0$;

2) funkcje $F_i^j(t)$ i $\sigma_i^{jk}(t)$ były ograniczone przy $t \geq t_0$, a funkcje Ψ_i^0 i Ψ^{jk} spełniały w pewnym otoczeniu punktu $y = 0$ warunek w postaci

$$(4.10) \quad \|\Psi(t, y_1, \dots, y_n)\| \leq \gamma \|y\|$$

z dostatecznie małą stałą $\gamma > 0$.

Warunki na to, aby rozwiązanie trywialne układu liniowego (4.9) było eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą p podamy w paragrafie następnym. Obecnie rozważmy dwa przykłady.

1. Rozważmy układ pierwszego rzędu w postaci (jednowymiarowy proces dyfuzyjny)

$$(a) \quad dY = F(Y)dt + \sigma(Y)dZ;$$

wtedy operator L_1 wyraża się następująco:

$$L_1 = F(y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} B(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Założmy, że

$$F(y) = F_0|y| + o(|y|), \\ B(y) = B_0y^2 + o(y^2), \quad (B_0 \geq 0),$$

dla $y \rightarrow 0$.

Korzystając z twierdzenia 4.1 oraz z twierdzenia 4.3 łatwo otrzymujemy następujący wniosek — t w i e r d z e n i e: rozwiązanie trywialne równania (a) jest stabilne według prawdopodobieństwa dla $F_0 < \frac{1}{2}B_0$ i niestabilne dla $F_0 > \frac{1}{2}B_0$.

Istotnie, 1) niech $F_0 < \frac{1}{2}B_0$; weźmy funkcję $V(y) = |y|^\gamma$, gdzie γ jest pewną liczbą dodatnią mniejszą niż $1 - \frac{2F_0}{B_0}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} L_1 V &= [F_0|y| + o(|y|)]\gamma|y|^{\gamma-1} + \left[\frac{1}{2} B_0 y^2 + o(y^2) \right] \gamma(\gamma-1)|y|^{\gamma-2} = \\ &= F_0|y|^\gamma \cdot \gamma + \frac{1}{2} B_0 \gamma(\gamma-1)|y|^\gamma + o(|y|^\gamma) = \\ &= \gamma|y|^\gamma [F_0 + \frac{1}{2} B_0(\gamma-1)] + o(|y|^\gamma) < 0 \end{aligned}$$

w dostatecznie małym otoczeniu punktu $y = 0$. Warunki twierdzenia 4.1 są spełnione i rozwiązanie jest stabilne.

2) Niech $F_0 > 1/2B_0$; można wtedy łatwo sprawdzić, że funkcja $V(y) = -\ln|y|$ czyni zadość twierdzeniu 4.3.

Z powyższego twierdzenia — wniosku można otrzymać pewne dodatkowe informacje. Niech np. $B(y) = o(y^2)$, tj. $B_0 = 0$. Wtedy stabilność asymptotyczna według pierwszego przybliżenia rozwiązania trywialnego układu deterministycznego

$$(b) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y)$$

gwarantuje stabilność według prawdopodobieństwa procesu Markowa $Y(t)$ opisanego równaniem

$$(c) \quad dY = F(Y)dt + \sqrt{B(Y)}dZ(t).$$

W przypadku niestabilności przybliżenia liniowego dla procesu (b), rozwiązanie trywialne układu (c) jest również niestabilne.

Zauważmy, że niestabilne położenie równowagi układu liniowego (b) przechodzi w położenie stabilne według prawdopodobieństwa, jeżeli wprowadzimy *losowość* postaci $\sqrt{B(Y)}\dot{X}$, tak aby tylko $B_0 > 2F_0$. Tak więc przytoczone twierdzenie — wniosek daje metodę stabilizacji położenia równowagi pewnej klasy układów pierwszego rzędu przez wprowadzenie *białego szumu*. Dla układów rzędu wyższego tak nie jest, wskazuje na to następujący przykład.

2. Rozważmy układ

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= Y_2 + \sigma(Y_1, Y_2)X_1, \\ \frac{dY_2}{dt} &= -Y_1 + \sigma(Y_1, Y_2)X_2, \end{aligned}$$

gdzie $X_1(t)$ i $X_2(t)$ są niezależnymi *białymi szumami*.

Łatwo sprawdzić, że położenie równowagi $y_1 = y_2 = 0$ tego układu w nieobecności składników losowych [$\sigma(y_1, y_2) \equiv 0$] jest stabilne ale nie asymptotycznie.

Operator L_1 dla naszego układu ma postać ($F_1 = Y_2, F_2 = -Y_1; B_{11} = B_{22} = \sigma^2(y_1, y_2), B_{12} = B_{21} = 0$)

$$L_1 = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + 1/2 \sigma^2(y_1, y_2) \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right].$$

Oczywiście, jeżeli $W = \ln(y_1^2 + y_2^2)$, to $L_1 W = 0$ i spełnia warunki twierdzenia 4.2, jeśli tylko $\sigma(y) \neq 0$ przy $y \neq 0$, $y = (y_1, y_2)$. Rozwiązanie trywialne naszego układu jest

więc niestabilne według prawdopodobieństwa. Przykład ten pokazuje, że nieasymptotyczna stabilność «bez losowości» może przejść w niestabilność według prawdopodobieństwa.

4.2. Inne układy nieliniowe. W analizie stabilności stochastycznej otrzymano również ważne rezultaty dla szerokiej klasy układów, które opisane są równaniami innymi niż równania Ito. Odnośnie stabilności według prawdopodobieństwa są to przede wszystkim kryteria otrzymane przez KACA i KRASOWSKIEGO [12] oraz HASMIŃSKIEGO [22].

W pracy [12] autorzy rozważają układ (w postaci wektorowej)

$$(4.11) \quad \frac{dY}{dt} = F[Y(t), X(t), t],$$

gdzie $X(t)$ jest jednorodnym procesem stochastycznym Markowa o skończonej liczbie stanów $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, przy czym prawdopodobieństwo $p_{ij}(\Delta t)$ przejścia ze stanu x_i do x_j w czasie Δt spełnia warunek

$$(4.12) \quad p_{ij}(\Delta t) = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad (i \neq j) \quad \alpha_{ij} = \text{const.}$$

Niech funkcja wektorowa $F = [F_1, F_2, \dots, F_n]$ będzie ciągła względem wszystkich zmiennych i spełnia warunek Lipschitza względem zmiennych y_i , tj.

$$(4.13) \quad |F_i(y_2, x(t), t) - F_i(y_1, x(t), t)| \leq M \|y_2 - y_1\|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

w obszarze $\{\|y\| < H, t \geq t_0\}$; $\|y\| = \max(|y_1|, \dots, |y_n|)$. Poza tym niech

$$(4.14) \quad F_i[0, x(t), t] \equiv 0.$$

Rozwiązanie układu (4.11) autorzy określają jako $(n+1)$ -wymiarowy proces stochastyczny $\{Y(t), X(t)\}$, którego realizacje czynią zadość równaniu (4.11).

W celu rozszerzenia drugiej metody Lapunowa na układy stochastyczne o postaci (4.11) wprowadza się funkcje skalarne $v(y, x, t)$ określone i ciągłe w obszarze $\|y\| < H$ i przyjmujące wartość zero dla $y = 0$. Uogólniając określenie podane w p. 2 mówimy, że funkcja $v(y, x, t)$ jest *określona dodatnio* (określona ujemnie), jeżeli istnieje dodatnio określona w sensie Lapunowa funkcja $w(y)$ taka, że $w(y, x, t) \geq v(y)$ [odpowiednio $w(y, x, t) \leq -w(y)$] dla wszystkich $y \neq 0$ i $t \geq t_0$.

Oznaczając przez $E[v|\eta, \xi, \tau]$ warunkową wartość przeciętną funkcji $v[Y(t), X(t), t]$ przy warunku: $Y(t) = \eta, X(t) = \xi$ dla $t = \tau$ i określając pochodną tej wartości przeciętnej ze względu na układ (4.11) w punkcie $t = \tau, X = \xi, Y = \eta$ jako granicę

$$(4.15) \quad \frac{dE[v]}{dt} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} (E\{[v(Y(t), X(t), t) - v(\eta, \xi, \tau)] | Y(\tau) = \eta, X(\tau) = \xi\}),$$

po skorzystaniu z własności procesów Markowa i relacji (4.12) otrzymujemy następujące wyrażenie [12]:

$$(4.16) \quad \frac{dE[v|y, x_j, t]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} F_i(y, x_j, t) + \sum_{k \neq j} \alpha_{jk} [v(y, x_k, t) - v(y, x_j, t)]$$

dla pochodnej $\frac{dE[v]}{dt}$ w punkcie $(y, x, = x_j, t)$.

A zatem, podobnie jak w przypadku równań deterministycznych, dla wyznaczenia pochodnej (wartości przeciętnej) ze względu na układ nie potrzeba rozwiązywać równań ruchu, wystarczy znać ich prawe strony i charakterystyki probabilistyczne procesu $X(t)$.

Możemy teraz sformułować kryterium stabilności według prawdopodobieństwa rozwiązania trywialnego układu (4.11) przy wprowadzonych wyżej założeniach stanowiące analogon pierwszego twierdzenia Lapunowa.

Twierdzenie 4.5. Jeżeli dla układu (4.11) istnieje dodatnio określona funkcja $v(y, x, t)$, której pochodna $\frac{dE[v]}{dt}$ ze względu na ten układ równań jest funkcją znaku ujemnego, to rozwiązanie trywialne układu (4.11) jest stabilne według prawdopodobieństwa [w sensie (3.2) lub (3.2')].

Na zakończenie tego punktu podamy przykład ilustrujący powyższe kryterium.

W pracy [12] zostało też wykazane twierdzenie podające kryterium asymptotycznej stabilności według prawdopodobieństwa układu (4.11) i stanowiące analogon drugiego twierdzenia Lapunowa. Natomiast w pracy [25] badana jest globalna stabilność asymptotyczna według prawdopodobieństwa rozwiązania trywialnego układu (4.11) przy wykorzystaniu idei dwóch funkcji Lapunowa. Interesujące rozważania dotyczące asymptotycznej stabilności według prawdopodobieństwa układów liniowych, których współczynniki są funkcjami procesu Markowa zawiera praca [39]. Rezultatów tych nie będziemy tutaj przytaczali (do pracy [12] wrócimy jeszcze w paragrafie następnym). Nieco inne podejście dotyczące rozszerzenia drugiej metody Lapunowa na układy stochastyczne dość ogólnej postaci spotykamy w pracy HASMINSKIEGO [22]. Warunki stabilności formułuje autor w terminach funkcji Lapunowa dla układu deterministycznego i zakłada, że dla występującego w równaniach procesu stochastycznego prawdziwe jest twierdzenie ergodyczne.

Niech będzie dany układ opisany równaniami (w postaci wektorowej)

$$(4.17) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t) + \sigma(Y, t)X(t),$$

gdzie σ jest macierzą o wymiarach $k \times l$, $F = [F_1, \dots, F_k]$, $Y(t) = [Y_1(t), \dots, Y_k(t)]$, $X(t)$ oznacza proces stochastyczny k -wymiarowy. Zakładamy, że $F(0, t) \equiv 0$, $\sigma_{ij}(0, t) \equiv 0$. Razem z układem (4.17) rozpatrujemy układ

$$(4.18) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t)$$

i związane z nim funkcje Lapunowa $V(y, t)$. Zakładamy, że rozpatrywane funkcje $V(y, t)$ spełniają warunek Lipschitza względem y

$$(4.19) \quad |V(y_2, t) - V(y_1, t)| < M \|y_2 - y_1\|$$

w każdym obszarze ograniczonym. Jeżeli stała M nie zależy od obszaru, tj.

$$\sup_{x, t} \frac{|V(y_2, t) - V(y_1, t)|}{\|y_2 - y_1\|} = M < \infty,$$

to będziemy oznaczali $V \in C(M)$. Przyjmiemy również oznaczenie

$$\|\sigma\| = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \sigma_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Twierdzenie 4.6. Jeżeli spełnione są następujące warunki:

1) dla układu (4.18) istnieje funkcja Lapunowa $V \in C(M)$ spełniająca warunki (c_1 i c_2 — są stałymi dodatnimi)

$$(4.20) \quad \inf_{\substack{t > 0 \\ \|y\| > r}} V(y, t) = V_r > 0, \quad \text{przy } r > 0,$$

$$(4.21) \quad \frac{d^0 V}{dt} \leq -c_1 V, \quad \|\sigma(y, t)\| \leq c_2 V,$$

gdzie $\frac{d^0 V}{dt}$ oznacza pochodną V ze względu na układ (4.18);

2) proces stochastyczny $X(t)$ spełnia nierówność

$$(4.22) \quad \sup_{t > 0} E\|X(t)\| < \frac{c_1}{Mc_2}$$

oraz $\|X(t)\| = \xi(t)$ czyni zadość twierdzeniu ergodycznemu (prawu wielkich liczb) w następującej słabej postaci: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że dla $t > T$

$$(4.23) \quad P \left\{ \left\| \frac{1}{t} \int_0^t \xi(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t E[\xi(s)] ds \right\| > \delta \right\} < \varepsilon,$$

to rozwiązanie trywialne układu (4.17) jest globalnie stabilne asymptotycznie według prawdopodobieństwa.

W oparciu o powyższe twierdzenie można łatwo wyprowadzić (por. [22]) stosunkowo proste kryterium dla układów liniowych w postaci

$$(4.24) \quad \frac{dY}{dt} = [A(t) + B(t)]Y,$$

gdzie elementy macierzy kwadratowej $B(t)$ są procesami stochastycznymi, a układ deterministyczny

$$(4.25) \quad \frac{dY}{dt} = A(t)Y$$

jest eksponencjalnie stabilny.

Twierdzenie 4.7. Niech układ (4.25) będzie eksponencjalnie stabilny. Wtedy układ (4.24) (jego rozwiązanie trywialne) jest asymptotycznie stabilny według prawdopodobieństwa dla dowolnego (macierzowego) procesu stochastycznego $B(t)$ takiego, że proces $\|B(t)\|$ spełnia twierdzenie ergodyczne (4.23) oraz $E\{\|B(t)\|\} < c$, gdzie c jest dostatecznie małą stałą dodatnią.

Na zakończenie tego punktu przytoczymy twierdzenie podające warunki wystarczające do stabilności według prawdopodobieństwa ze względu na ciągle działające zaburzenia [29].

Twierdzenie 4.8. Niech dla $y \in R^n$ i $t \geq t_0$ istnieje ciągła i różniczkowalna wszędzie, za wyjątkiem co najwyżej punktu $y = \mathbf{0}$, funkcja $V(y, t)$ o własnościach:

- 1) $V(\mathbf{0}, t) \equiv 0$; $\inf_{t \geq t_0, \|y\| > r} V(y, t) = V_r > 0$ przy $r > 0$;
- 2) $\|\text{grad}_y V(y, t)\| < c$, ($y \neq \mathbf{0}$);
- 3) w obszarze $t > t_0, \|y\| > r$ dla dowolnego r spełniona jest przy pewnej stałej $c_r > 0$ nierówność

$$\frac{d^0 V}{dt} < -c_r V.$$

Wtedy rozwiązanie trywialne układu (3.12) jest stabilne według prawdopodobieństwa ze względu na ciągle działające zaburzenia $R(t)$ małe w sensie średnim (por. określenie 3.5).

Rozważmy następujący przykład.

Niech będzie dany układ opisany równaniem

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + A_1(X) \frac{dY}{dt} + A_2(X) Y = 0,$$

które jest równoważne układowi

$$(*) \quad \frac{dY_1}{dt} = Y_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = -A_2(X) Y_1 - A_1(X) Y_2.$$

Funkcje $A_1(X)$ i $A_2(X)$ są znanymi ograniczonymi funkcjami zmiennej X , a proces stochastyczny $X(t)$ jest jednorodnym procesem Markowa o skończonej liczbie stanów $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, przy czym elementy macierzy przejścia p_{ij} są określone wzorami (4.12).

Wiadomo, że w przypadku deterministycznym warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności układu (*) przy $A_1 = \text{const}$ i $A_2 = \text{const}$ jest spełnienie nierówności $A_1 > 0$, $A_2 > 0$.

Założmy tutaj, że $A_2(x) > 0$ i wprowadźmy oznaczenie $A_1(x_k) = a_k$, $A_2(x_k) = b_k > 0$, przy $k = 1, 2, \dots, r$. Weźmy funkcję dodatnio określoną

$$v(y_1, y_2, y_k) = y_1^2 + \frac{1}{b_k} y_2^2.$$

Na podstawie (4.16) mamy

$$\frac{dE[v]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial v}{\partial y_2} (-b_k y_1 - a_k y_2) + \sum_{j \neq k=1}^r \alpha_{jk} [v(y_1, y_2, x_j) - v(y_1, y_2, x_k)].$$

Po przekształceniach mamy

$$\frac{dE[v]}{dt} = -y_2^2 \left\{ \frac{2a_k}{b_k} - \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) \alpha_{kj} \right\}.$$

A zatem, aby spełnione były warunki twierdzenia 4.5 potrzeba, żeby

$$(**) \quad \frac{2a_k}{b_k} - \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{b_j} - \frac{1}{b_k} \right) \alpha_{kj} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Tak więc, jeżeli dla układu (*) spełniony jest warunek (**) oraz $A_2(x_k) > 0$ ($k = 1, 2, \dots, r$), to rozwiązanie trywialne jest stabilne według prawdopodobieństwa. Zauważmy, że (w odróżnieniu od przypadku deterministycznego) stabilność według prawdopodobieństwa może mieć miejsce również wtedy, gdy niektóre z a_k są ujemne lub równe zero.

5. Stabilność średnia z p -tą potęgą

5.1. Układy opisane przez równania stochastyczne Ito. Zagadnienia dotyczące różnych typów stabilności średniej z p -tą potęgą rozwiązań równań Ito były przedmiotem badań wielu autorów (por. np. [42, 40, 16, 17, 41, 18], przy czym oprócz poszukiwania warunków (kryteriów) stabilności stochastycznej wiele uwagi poświęcono również zagadnieniu stabilizacji niestabilnych układów deterministycznych przez wprowadzenie do układu członów losowych.

Do najwcześniejszych badań w tej dziedzinie należą prace SAMUELSA [11, 42]. Badał on asymptotyczne własności momentów rzędu drugiego rozwiązań układów postaci

$$(5.1) \quad \begin{aligned} dY_1 &= Y_2 dt, & dY_2 &= Y_3 dt, \dots, & dY_{n-1} &= Y_n dt, \\ dY_n &= - \sum_{i=1}^n [a_i dt + \sigma_i dZ_i] Y_i, \end{aligned}$$

gdzie a_i i σ_i są stałymi.

Należy podkreślić, że Samuels nie korzystał z faktu, że proces $[Y_1(t), \dots, Y_n(t)]$ jest procesem Markowa, a więc również z teorii stochastycznych równań Ito. Układ (5.1) analizował metodą kolejnych przybliżeń startując z rozwiązania układu deterministycznego odpowiadającego równaniom (5.1). Otrzymał on warunki wystarczające dla asymptotycznej ograniczoności momentów rzędu drugiego; asymptotyczną ograniczoność momentów rzędu drugiego nazywa on stabilnością średniokwadratową.

W pracy [42] SAMUELS rozważa zagadnienie stabilizacji liniowego niestabilnego układu deterministycznego przez wprowadzenie *białego szumu* do współczynników układu, przy czym przez stabilizację rozumie on, że momenty drugiego rzędu układu stochastycznego powinny być asymptotycznie ograniczone. Otrzymał on jako wniosek, że układ postaci

$$(5.2) \quad \begin{aligned} dY_1 &= Y_2 dt, \\ dY_2 &= [\beta Y_2 - \lambda_0^2 Y_1] dt - \sigma Y_2 dZ, \quad \beta > 0 \end{aligned}$$

posiada stabilne (tj. ograniczone) momenty rzędu drugiego, mimo że układ deterministyczny (otrzymany przez odrzucenie drugiego członu w drugim równaniu) jest niestabilny. Rezultat ten, na skutek istnienia pewnych błędów rachunkowych okazał się jednak fałszywy [40]. CAUGHEY pokazał, że jeśli dany układ jest opisany przez równanie różniczkowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach posiadające nieograniczone (przy $t \rightarrow \infty$) rozwiązanie, to dodając do jednego ze współczynników gaussowski *biały szum* otrzymuje się również nieograniczone w sensie średniokwadratowym rozwiązanie (przy tych samych warunkach początkowych). Czyli stabilizacja w powyższym sensie (przy pomocy gaussowskiego *białego szumu*) jest niemożliwa.

Zagadnienia dotyczące stabilizacji momentów były także rozważane w pracach [43, 16, 44], zaś ogólny problem ograniczoności momentów rozwiązań równań Ito jest rozważany w pracach [18, 55]. Definitywne rozstrzygnięcie kwestii stabilizacji momentów za pomocą *białych szumów* zawiera praca NEWELSONA i HASMINSKIEGO [17]. Jako wniosek jednego z twierdzeń autorzy otrzymują następujący bardzo ważny rezultat.

Twierdzenie 5.1. Jeżeli deterministyczny układ liniowy

$$(5.3) \quad dY_i = \sum_{j=1}^n F_i^j(t) Y_j dt$$

nie jest asymptotycznie stabilny, to układ

$$(5.4) \quad dY_i = \sum_{j=1}^n F_i^j(t) Y_j dt + \sum_{k,j=1}^n \sigma_i^{jk}(t) Y_k dZ_j(t)$$

nie będzie asymptotycznie stabilny średnio z wykładnikiem p [w sensie określenia 3.2 — relacja (3.5)] przy $p \geq 1$ niezależnie od własności $\sigma_i^{jk}(t)$.

W pracy [17] zostały również podane kryteria stabilności średniej z potęgą p rozwiązań równań Ito w terminach funkcji Lapunowa. A oto kryterium będące uogólnieniem znanego twierdzenia o stabilności eksponencjalnej dla równań deterministycznych (por. [2]) na przypadek dowolnego układu stochastycznych równań różniczkowych Ito.

Twierdzenie 5.2. Jeżeli istnieje funkcja $V(y, t)$, dla której przy $t \geq t_0$ i $y \neq 0$ spełnione są warunki (c_1, c_2, c_3, c_4 — stałe dodatnie):

$$(5.5) \quad c_1 \|y\|^p \leq V(y, t) \leq c_2 \|y\|^p,$$

$$(5.6) \quad LV(y, t) \leq -c_3 \|y\|^p,$$

$$(5.7) \quad \left| \frac{dV}{dy_i} \right| \leq c_4 \|y\|^{p-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

to rozwiązanie trywialne układu (4.2) jest dla $t \geq t_0$ eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą p .

Jeżeli układ jest liniowy postaci (5.4), to warunki (5.5)–(5.7) są konieczne i wystarczające dla eksponencjalnej stabilności średniej z potęgą p (por. twierdzenie 4.4 o stabilności równań Ito według pierwszego przybliżenia).

Na podstawie powyższych rezultatów oraz faktu, że dla układów liniowych o stałych współczynnikach z asymptotycznej stabilności średniej z potęgą p wynika eksponencjalna stabilność średnia z potęgą p , łatwo otrzymuje się następujące kryterium.

Twierdzenie 5.3. Na to, aby rozwiązanie trywialne układu liniowego o stałych współczynnikach

$$(5.8) \quad dY_i = \sum_{j=1}^n F_i^j Y_j dt + \sum_{k,j=1}^n \sigma_i^{jk}(t) Y_k dZ_j$$

było asymptotycznie stabilne średnio z potęgą p potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnej dodatnio określonej i jednorodnej rzędu p funkcji $W(y)$ istniała dodatnio określona i jednorodna rzędu p funkcja $V(y)$ taka, że

$$(5.9) \quad L_1 V(y) = -W(y).$$

W zastosowaniach najczęściej używana jest stabilność średnia z kwadratem ($p = 2$). Istotne jest więc otrzymanie kryteriów algebraicznych zapewniających stabilność w sensie średniokwadratowym.

W pracy [43] została wskazana metoda otrzymania takich algebraicznych kryteriów stabilności średniej z kwadratem dla dowolnego układu liniowego z *białymi szumami*, jednak otrzymane według tej metody warunki są bardzo niewygodne w zastosowaniach, gdyż dla ich weryfikacji należy obliczyć n^2 wyznaczników, przy czym najwyższy stopień wyznacznika jest n^2 . Dlatego też należy podkreślić znaczenie warunków, jakie dla układów liniowych postaci (5.1) zostały otrzymane w pracy [41]. Korzystając z rezultatów pracy [17] autorzy wykazują, że dla asymptotycznej stabilności średniej z kwadratem układu (5.1) potrzeba i wystarcza, aby były spełnione warunki Routha–Hurwitza dla deterministycznej części układu (5.1), tj.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\dots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0,$$

oraz warunek

$$\Delta_n > \Delta,$$

gdzie Δ jest wyznacznikiem, który otrzymujemy z Δ_n przez zamianę pierwszego wiersza wierszem, którego elementy są funkcjami liniowymi stałych $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j$. Jeżeli w układzie (5.1) procesy $Z_i(t)$ są niezależnymi *białymi szumami*, to wyznacznik Δ powstaje z wyznacznika Δ_n przez zamianę pierwszego wiersza wierszem

$$[\sigma_{11}, -\sigma_{22}, \sigma_{33}, \dots, (-1)^{n-1} \cdot \sigma_{nn}].$$

Analizę stabilności momentów rozwiązań równań stochastycznych Ito spotykamy również w pracach GICHMANA (por. [18, 28]) oraz w pracy [45]. Dla układów liniowych autorzy wprowadzają równania różniczkowe dla momentów rozwiązań i sprowadzają w ten sposób badanie stabilności momentów do analizy stabilności rozwiązań deterministycznych liniowych równań różniczkowych. Należy również podkreślić, że w badaniach stabilności momentów rozwiązań równań nieliniowych, których współczynniki zawierają *białe szumy*, wiele autorów stosuje metody przybliżone. Na przykład praca [46] zawiera zastosowanie metody linearyzacji statystycznej do badania stabilności momentów.

Na zakończenie rozpatrzmy przykład.

Rozważmy układ opisany przez równania (5.2). Na podstawie procedury zawartej w pracy [16] pokażemy, że momenty rzędu drugiego rozwiązania nie są asymptotycznie stabilne.

Równanie Fokkera–Plancka–Kolmogorowa dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa przejścia procesu $[Y_1, Y_2]$ ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \beta \frac{\partial}{\partial y_2} (y_2 f) + \lambda_0^2 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} (y_2^2 f).$$

Na podstawie tego równania można formalnie otrzymać równania dla momentów rzędu drugiego przez pomnożenie jego obu stron odpowiednio przez y_1^2 , $y_1 y_2$, y_2^2 i scałkowanie po płaszczyźnie R^2 . Otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{2,0} &= 2m_{1,1}, \\ \dot{m}_{1,1} &= -\lambda_0^2 m_{1,0} + \beta m_{1,2} + m_{0,2}, \\ \dot{m}_{0,2} &= -2\lambda_0^2 m_{1,1} + (2\beta + \sigma^2) m_{0,2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(b) \quad m_{i,j} = E\{y_1^i y_2^j\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad i+j = 2.$$

Stabilność momentów jest określona przez części rzeczywiste pierwiastków równania charakterystycznego

$$\xi^3 - (3\beta + \sigma^2)\xi^2 + \beta(2\sigma + \sigma^2)\xi + 2\lambda_0^2(2\beta + \sigma^2) = 0.$$

Aby rozwiązania (tj. $m_{1,1}$, $m_{0,2}$, $m_{2,0}$) równań (a) dążyły asymptotycznie do zera, współczynniki równania muszą być dodatnie. Tak jednak nie jest, gdyż $3\beta + \sigma^2 > 0$. A zatem momenty rzędu drugiego nie mogą być asymptotycznie stabilne.

5.2. Inne układy nieliniowe. W analizie stabilności średniej z p -tą potęgą układów opisanych równaniami innymi niż równania Ito otrzymano również szereg ważnych rezultatów. Przede wszystkim należy wymienić prace BERTRAMA i SARACHIKA [10] oraz KACA i KRASOWSKIEGO [12], w których po raz pierwszy zastosowany został aparat funkcji Lapunowa do badania stabilności stochastycznej.

Rozważmy układ opisany równaniem w postaci wektorowej

$$(5.10) \quad \frac{dY}{dt} = F[Y(t), X(t), t].$$

BERTRAM i SARACHIK zakładają, że F jest funkcją ciągłą i spełnia warunek Lipschitza ze względu na y , $F[0, X(t), t] \equiv 0$, zaś proces $X(t)$ jest taki, że jego realizacje zachowują się na tyle regularnie, aby równanie (5.10) mogło być rozumiane jako równanie dla realizacji.

Twierdzenie 5.4. Jeżeli istnieje funkcja Lapunowa $V(y, t)$ określona na przestrzeni fazowej, która spełnia warunki:

- $V(0, t) = 0$,
- $V(y, t)$ jest ciągła względem y i t oraz istnieją jej pierwsze pochodne względem y i t ,
- $V(y, t) \geq \alpha \|y\|$ dla pewnej stałej $\alpha > 0$,
- $E\{dtV(y(t), t)\} \leq 0$,

to rozwiązanie trywialne układu (5.10) jest stabilne średnio z potęgą $p = 1$.

BERTRAM i SARACHIK zastosowali swoje rezultaty do układów takiej postaci, jakie w przypadku jednowymiarowym rozpatrywał ROSENBLUM [8], tj. dla układów

$$(5.11) \quad \frac{dY}{dt} = A(t)Y,$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą diagonalną: $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $a_{ij}(t) = a_i(t)$ dla $j = i$, $a_{ij}(t) = 0$ dla $i \neq j$. Dobierając odpowiednią funkcję Lapunowa V pokazali oni, że warunki

$$(5.12) \quad E \left\{ a_i(t) \exp \int_{t_0}^t a_i(\tau) d\tau \right\} < 0, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

zapewniają asymptotyczną stabilność średnią z potęgą $p = 1$. Rozważali oni także warunki stabilności dla układu (5.11), w którym współczynniki są odcinkami stałe.

Wiele ważnych kryteriów dla układów postaci (5.10) otrzymali KAC i KRASOWSKI [12], przy czym o procesie $X(t)$ zakładają oni, że jest to jednorodny proces Markowa o skończonej liczbie stanów $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ (por. założenia wyszczególnione w p. 4.2).

A oto ich twierdzenie dotyczące eksponencjalnej stabilności średniej z kwadratem.

Twierdzenie 5.5. Rozwiązanie trywialne układu (5.10) jest eksponencjalnie stabilne średnio z kwadratem wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje funkcja $v(y, x, t)$ (por. p. 4.2) spełniająca warunki (c_1, c_2, c_3 — stałe dodatnie)

$$(5.13) \quad c_1 \|y\|^2 \leq v(y, x, t) \leq c_2 \|y\|^2,$$

$$(5.14) \quad \frac{dE[v]}{dt} \leq -c_3 \|y\|^2,$$

gdzie $\|y\| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$.

Dla układu liniowego postaci

$$(5.15) \quad \frac{dY}{dt} = A[X(t)]Y$$

otrzymali oni kryterium dla asymptotycznej stabilności średniej z kwadratem w postaci $N \cdot r$ nierówności algebraicznych, gdzie $N = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Interesujące rozważania dotyczące asymptotycznej stabilności średniej z p -tą potęgą zawiera też praca [56]. Autor rozważa układy liniowe postaci (5.11) o współczynnikach odcinkami stałych przy następujących założeniach:

a) $A(t) = A_k$ dla $t_{k-1} \leq t < t_k$, $k = 1, 2, \dots$;

$A(t)$ jest macierzą o wymiarach $n \times n$,

b) $\{(t_k - t_{k-1})A_k\}$ jest ciągiem niezależnych macierzy losowych o jednakowych rozkładach,

c) $\{(t_k - t_{k-1})A_k\}$ jest łańcuchem Markowa macierzy losowych.

W swoich rozważaniach BHARUCHA korzysta w sposób istotny z pojęcia kroneckerowskiego iloczynu macierzy (wprowadzonego po raz pierwszy przez BELLMANA), wobec czego weryfikacja otrzymanych przez niego warunków stabilności średniej wymaga wyznaczenia wartości własnych macierzy o stosunkowo dużych wymiarach; np. dla równania n -tego rzędu i procesu Markowa (charakteryzującego strukturę układu) o m stanach należy obliczyć wartości własne macierzy o wymiarach $mn \times mn$.

Ciekawe rezultaty dotyczące asymptotycznego zachowania się momentów rozwiązań stochastycznych układów liniowych zawiera praca [20].

6. Stabilność prawie na pewno

Należy się spodziewać, że w analizie rzeczywistych układów dynamicznych największe znaczenie będzie miał taki rodzaj stabilności stochastycznej, którego istota jest najbardziej zbliżona do stabilności deterministycznej. Takim rodzajem stabilności stochastycznej jest stabilność prawie na pewno, bowiem wymaga ona, aby stabilność miała miejsce z prawdopodobieństwem jeden, lub inaczej — aby prawie wszystkie realizacje procesu stochastycznego opisujące ruch były stabilne (w sensie deterministycznym). Mimo że analiza tego typu stabilności (dotycząca szerszej klasy układów) została zapoczątkowana nieco później niż analiza innych rodzajów stabilności stochastycznej, to jednak otrzymano również wiele cennych rezultatów. Rezultaty te związane są przede wszystkim z takimi nazwiskami, jak KOZIN, CAUGHEY i GRAY, MOROZAN oraz HASMINSKIJ. Istotnym faktem dla analizy stabilności prawie na pewno było wskazanie przez KOZINA [19] możliwości wykorzystania twierdzeń ergodycznych w formułowaniu warunków tego typu stabilności.

Rozważmy liniowy układ stochastyczny opisany przez równania (w postaci wektorowej)

$$(6.1) \quad \frac{dY}{dt} = [A + B(t)]Y,$$

gdzie $A = \{a_{ij}\}$ jest stałą macierzą stabilną (wartości własne mają części rzeczywiste ujemne) o wymiarach $n \times n$, zaś $B(t)$ jest macierzą o wymiarach $n \times n$, której elementy

$$(6.2) \quad \{b_{ij}(t), \quad t \in [t_0 = 0, \infty)\}$$

są procesami stochastycznymi spełniającymi warunki:

- 1) posiadają ciągle prawie wszystkie realizacje,
- 2) są stacjonarne w węższym sensie,
- 3) są ergodyczne z prawdopodobieństwem 1, tj. z prawdopodobieństwem 1 zachodzi równość

$$(6.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_{ij}(\tau) d\tau = E[b_{ij}(t)] = E[b_{ij}(0)].$$

Korzystając z powyższych założeń oraz z lematu Gronwalla–Bellmana (por. [1]) łatwo otrzymuje się następujące twierdzenie [19]:

Twierdzenie 6.1. Niech będą spełnione przytoczone wyżej warunki i niech istnieje wartość przeciętna $E\{\|B(t)\|\}$, gdzie $\|B(t)\| \equiv \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}(t)|$. Wtedy istnieje stała C zależna od macierzy A taka, że nierówność

$$E\{\|B(t)\|\} < C$$

implikuje stabilność prawie na pewno trywialnego rozwiązania układu (6.1) [w sensie warunku (3.7)].

Założenie 1) dotyczące procesów $b_{ij}(t)$ zapewnia istnienie, jednoznaczność i ciągłość rozwiązania układu (6.1) z prawdopodobieństwem 1 dla dowolnego $Y(0) = y^0$. Warunki 2) i 3) są wprowadzone w celu otrzymania kryterium stabilności. Należy podkreślić, że

istnieją dwie ważne klasy procesów stacjonarnych w węższym sensie czyniące zadość warunkowi 3). Pierwszą klasą są tzw. procesy liniowe, tj. procesy o postaci

$$(6.4) \quad \int_{-\infty}^t p(t-\tau) dY(\tau),$$

gdzie $Y(t)$ są procesami o przyrostach niezależnych i jednorodnych. Proces $Y(t)$ może być na przykład procesem Wienera, a więc procesy postaci (6.4) obejmują ważną klasę procesów otrzymanych przez przepuszczenie gaussowskiego *białego szumu* przez filtr liniowy. Drugą ważną klasą stacjonarnych procesów ergodycznych (posiadających własność metrycznej tranzytywności) są procesy gaussowskie o ciągłej funkcji korelacyjnej i gęstości widmowej.

Ostrzejsze warunki zapewniające stabilność prawie na pewno rozwiązań układu (6.1) podali CAUGHEY i GRAY w pracy [21] używając aparatu funkcji Lapunowa. Otrzymane twierdzenia dla układu (6.1) rozszerzyli oni następnie na równania nieliniowe rzędu drugiego postaci

$$(6.5) \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\beta \frac{dY}{dt} + [1 + b(t)]Y + g(Y) = 0,$$

gdzie $b(t)$ jest procesem stochastycznym o własnościach takich, jak procesy $b_{ij}(t)$ w twierdzeniu 6.1, zaś g jest funkcją nieliniową o własnościach: 1) $g(y)$ — ciągła, 2) $|g(y)|$ — monotonicznie zanikająca, 3) $yg(y) \geq 0$, 4) $g(y) = -g(-y)$.

Należy tutaj wymienić również prace MOROZANA [47, 48, 49]. Autor bada stabilność prawie na pewno układów liniowych postaci (6.1) z losową macierzą A , nieliniowych układów równań stochastycznych Ito oraz inne ogólne zagadnienia związane ze stabilnością stochastyczną.

Ważne twierdzenie dotyczące asymptotycznej stabilności globalnej prawie na pewno dla układów nieliniowych postaci (4.17) otrzymał HASMINSKI [22]. Wykazał on, że jeżeli w twierdzeniu 4.6 sformułowanym w p. 4.2 warunek (4.23) zamienić warunkiem silniejszym (ergodyczność z prawdopodobieństwem 1)

$$(6.6) \quad P \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \xi(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t E[\xi(s)] ds \rightarrow 0 \right\} = 1,$$

to rozwiązanie trywialne układu (4.17) jest globalnie asymptotycznie stabilne prawie na pewno (w sensie określenia 3.3).

Omówione wyżej kryteria stabilności prawie na pewno są z praktycznego punktu widzenia dość skomplikowane. Z drugiej zaś strony wiadomo, że wygodną w zastosowaniach charakterystyką badanych procesów są ich momenty. Interesujące są więc relacje między własnościami momentów procesu stochastycznego opisującego ruch i stabilnością prawie na pewno. Badanie takich relacji dla liniowych układów stochastycznych jest przedmiotem pracy KOZINA [27]. Otrzymał on wystarczający warunek stabilności prawie na pewno wyrażony przez stosunkowo proste własności momentów. Poświęćmy chwilę uwagi tym interesującym i ważnym rezultatom.

Rozważmy liniowy układ stochastyczny postaci (6.1), gdzie A jest macierzą stałą o wymiarach $n \times n$, zaś $B(t)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi $\{b_{ij}(t), t \in [0, \infty)\}$, których prawie wszystkie realizacje są ciągłe i ograniczone na $[0, \infty)$; z ciągłości prawie wszystkich realizacji wynika mierzalność procesów $b_{ij}(t)$. Te warunki zapewniają istnienie, jednoznaczność i ciągłość prawie wszystkich realizacji rozwiązania

$$(6.7) \quad Y(y^0, t_0; t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad y^0 \in R^n$$

układu (6.1) dla dowolnego $t_0 > 0$ i dowolnego $y^0 \in R^n$. Niech $\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$.

Korzystając z własności mierzalnych procesów stochastycznych i opierając się na twierdzeniu o całkowalności realizacji takich procesów oraz uwzględniając liniowość układu (6.1) i ograniczoność realizacji macierzy $B(t)$, KOZIN wykazał prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie 6.2. Jeżeli dla $y^0 \in R^n$, $t > 0$, rozwiązanie (6.7) układu (6.1) przy wyszczególnionych wyżej założeniach o współczynnikach $b_{ij}(t)$ spełnia warunek

$$(6.8) \quad \int_{t_0}^{\infty} E\{\|Y(y^0, t_0; t)\|\} dt < \infty,$$

to rozwiązanie trywialne układu (6.1) jest prawie na pewno asymptotycznie stabilne globalnie (w sensie określenia 3.3).

Zauważmy, że dla otrzymania powyższej tezy nie zakładaliśmy stabilności średniej, niemniej warunek (6.8) sugeruje, że te dwa rodzaje stabilności stochastycznej nie są niezależne od siebie.

Istotnie, załóżmy na przykład, że rozwiązanie trywialne układu (6.1) jest eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą $p = 1$, tj. zachodzi relacja (3.6) dla $p = 1$. Z relacji tej wynika bezpośrednio, że $E\{\|Y(y^0, t_0; t)\|\}$ ma skończoną całkę, czyli spełniony jest warunek (6.8) powyższego twierdzenia. Możemy więc sformułować twierdzenie –

wniosek:
Jeżeli rozwiązanie trywialne układu (6.1), którego macierz współczynników $B(t)$ spełnia założenie podane wyżej, jest eksponencjalnie stabilne średnio z potęgą $p = 1$, wtedy jest ono również stabilne prawie na pewno.

Praca KOZINA, poza przytoczonym tutaj podstawowym twierdzeniem, zawiera jeszcze inne ciekawe rozważania, spośród których należy podkreślić przykłady wskazujące, że rozwiązanie, które jest asymptotycznie stabilne prawie na pewno, nie musi być stabilne średnio.

Poruszone tutaj zagadnienia dotyczące związku stabilności prawie na pewno z własnościami (w szczególności ze stabilnością) momentów są dla zastosowań bardzo istotne, jednakże w chwili obecnej są one jeszcze bardzo mało rozpracowane.

Podobnie, jak w przypadku innych typów stabilności stochastycznej, interesującym zagadnieniem są kwestie stabilizacji w sensie prawie na pewno niestabilnych układów deterministycznych przez wprowadzenie do układu członów losowych.

W pracach [50, 51] BOGDANOFF bada teoretycznie i eksperymentalnie problem stabilizacji w sensie prawie na pewno przez wprowadzenie losowego wymuszenia parametrycznego w postaci

$$(6.9) \quad B(t) = \eta \sum_{k=-N}^{+N} \varepsilon_k e^{i(\lambda_k t + \varphi_k)},$$

gdzie φ_k są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym na $[0, 2\pi]$. Proces stochastyczny (6.9) jest sumą drgań harmoniczych o losowych fazach i ma widmo dyskretne. BOGDANOFF pokazał, że jeżeli η jest dostatecznie małe, a $|\lambda_k + \lambda_j|_{k \neq j}$ są wystarczająco duże i $E\{\dot{B}(t)^2\} > gl$, to położenie równowagi układu

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= Y_2, \\ \frac{dY_2}{dt} &= \left(\frac{g}{l} + \frac{\ddot{B}(t)}{l} \right) \sin Y_1 - 2cY_2 \end{aligned}$$

jest stabilne prawie na pewno, mimo że położenie równowagi układu deterministycznego, otrzymanego po odrzuceniu członu zawierającego szum losowy, nie jest stabilne.

Zachodzi pytanie, czy można stabilizować układ w sensie prawie na pewno przez wprowadzenie losowego wymuszenia parametrycznego o widmie ciągłym i ewentualnie jak szeroka jest klasa takich procesów i układów. Odpowiedź na to pytanie pozostaje jeszcze problemem otwartym.

7. Stabilność entropijna

Entropia układu dynamicznego będąca pewną całkową ceną rozkładu prawdopodobieństwa jego stanu jest charakterystyką bardzo ogólną, toteż również pojęcie stabilności entropijnej jest bardzo słabym pojęciem stabilności stochastycznej. Niemniej okazuje się (por. np. [33]), że w pewnych zagadnieniach jest ono również istotne. Poświęcimy mu więc chwilę uwagi.

Rozważmy układ opisany równaniami

$$(7.1) \quad \frac{dY_i}{dt} = F_i[Y_1(t), \dots, Y_n(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pochodna entropii tego układu spowodowanej losowymi warunkami początkowymi wyraża się wzorem [33]

$$(7.2) \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n E \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right].$$

A zatem, jeżeli

$$(7.3) \quad \sum_{i=1}^n E \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right] < 0,$$

to układ (7.1) charakteryzuje się ogólną monotoniczną stabilnością entropijną.

W przypadku układów liniowych

$$(7.4) \quad \frac{dY_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)Y_k = 0,$$

równanie opisujące zmianę entropii ma postać

$$(7.5) \quad \frac{dH}{dt} = - \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

i warunki stabilności entropijnej przyjmują postać prostą. W sposób bezpośredni otrzymujemy następujące twierdzenia:

a) warunkiem koniecznym i dostatecznym ogólnej monotonicznej stabilności entropijnej układu (7.4) jest

$$(7.6) \quad \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) > 0;$$

b) warunkiem koniecznym i dostatecznym ogólnej entropijnej stabilności układu (7.4) jest

$$(7.7) \quad \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t a_{ii}(t) dt = \infty.$$

Dla układów o stałych współczynnikach warunki ogólnej monotonicznej stabilności entropijnej i ogólnej stabilności entropijnej pokrywają się i przyjmują postać

$$(7.8) \quad \sum_{i=1}^n a_{ii} > 0.$$

W tym przypadku wielkość $s = - \sum_{i=1}^n a_{ii}$ jest równa sumie pierwiastków równania charakterystycznego układu. A zatem otrzymujemy **twierdzenie**:

Na to, aby dla układu liniowego (7.4) miała miejsce ogólna stabilność entropijna potrzeba i wystarcza, aby suma pierwiastków równania charakterystycznego tego układu była ujemna ($s < 0$).

Zauważmy że układ liniowy, dla którego ma miejsce ogólna stabilność entropijna, może być niestabilny w zwykłym sensie. Jednakże układ liniowy niestabilny entropijnie jest również niestabilny w zwykłym sensie (tj. w sensie Lapunowa); wynika to (dla stałych współczynników) z powyższego twierdzenia oraz (dla zmiennych współczynników) ze znanego wzoru dla wyznacznika fundamentalnego układu rozwiązań układu (7.4). Jak wiemy, bardziej szczegółową charakterystyką stanu układu jest entropia dowolnej jego części, np. entropia jednej współrzędnej uogólnionej $H_i(t)$. Żądając, aby entropia każdej współrzędnej uogólnionej malała ze wzrostem t otrzymujemy silniejsze pojęcie *cząstkowej stabilności entropijnej* układu (7.1) — dokładniej charakteryzujące jego ruch.

Można oczywiście poszukiwać również warunków stabilności entropijnej dla układów, których entropia spowodowana jest nie tylko losowymi warunkami początkowymi, lecz także losowymi wymuszeniami zewnętrznymi. Jest to jednak zagadnienie trudniejsze, gdyż równanie opisujące zmianę w czasie entropii jest w tym przypadku skomplikowane.

Rozważmy przykład. Dla układu w postaci

$$\begin{aligned}\frac{dY_1}{dt} - Y_2 &= 0, \\ \frac{dY_2}{dt} + \left(\frac{l}{t} - 1\right)Y_2 - aY_1 &= 0,\end{aligned}$$

mamy zgodnie z równaniem (7.5)

$$\frac{dH}{dt} = 1 - \frac{b}{t},$$

czyli

$$H = H_0 + t - t_0 - b \ln \frac{t}{t_0},$$

gdzie H_0 jest entropią warunków początkowych. Przy $b/t > 1$ entropia początkowo maleje ze wzrostem t , a następnie rośnie. Przy $b/t < 1$ entropia monotonicznie wzrasta. W obu przypadkach układ jest entropijnie niestabilny.

8. Inne zagadnienia

Na zakończenie chcemy zwrócić uwagę na inne jakościowe problemy stochastycznych równań różniczkowych, przede wszystkim na takie kwestie, jak stacjonarność, okresowość oraz dysypatywność rozwiązań równań stochastycznych. Znajomość warunków gwarantujących wymienione własności rozwiązań jest w szeregu zastosowań bardzo istotna. Zagadnienia stacjonarności, periodyczności oraz ograniczoności rozwiązań równań stochastycznych są przedmiotem wielu prac (por. [52, 9, 53, 54, 29, 18]). Nie będziemy tutaj omawiać szerzej tych kwestii; dla ilustracji tej problematyki przytoczymy jedynie rezultaty otrzymane przez HASMINSKIEGO [29].

HASMINSKI wprowadził następujące pojęcie dysypatywności procesu stochastycznego i dysypatywności układu.

Określenie 8.1. Proces $Y(t) = Y(t, \omega)$ nazywa się *procesem dysypatywnym*, jeżeli zmienne losowe $\|Y(t, \omega)\|$ są jednostajnie względem t ograniczone według prawdopodobieństwa, tj. jednostajnie względem $t \geq t_0$ prawdopodobieństwo $P\{\|Y(t, \omega)\| > c\} \rightarrow 0$ przy $c \rightarrow \infty$.

Określenie 8.2. Układ

$$(8.1) \quad \frac{dY}{dt} = G[Y(t), t, X(t)]$$

nazywa się *układem dysypatywnym*, jeżeli zmienne losowe $\|Y(t, \omega)\|$ są ograniczone według prawdopodobieństwa jednostajnie względem $t \geq t_0$ i jednostajnie względem zmiennych losowych $Y_0(\omega) = Y(t_0, \omega)$ czyniącym zadość przy pewnym $k < \infty$ warunkowi

$$P\{\|Y_0(\omega)\| < k\} = 1.$$

Niech będzie dany układ (w postaci wektorowej)

$$(8.2) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t) + X(t, \omega)$$

i niech funkcja $F(y, t)$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej y . Niech $\frac{dV}{dt}$ będzie pochodną funkcji $V(y, t)$ ze względu na układ

$$(8.3) \quad \frac{dY}{dt} = F(Y, t).$$

Następujące twierdzenie podaje warunki dysypatywności układu (8.2) w terminach własności układu deterministycznego (8.3).

Twierdzenie 8.1. Niech dla $y \in R^n$ i $t \geq t_0$ istnieje nieujemna funkcja $V(y, t)$ o własnościach:

- 1) $\sup_{t \geq t_0} V(0, t) < \infty$; $\inf_{t \geq t_0} V(y, t) \rightarrow \infty$ przy $\|y\| \rightarrow \infty$;

- 2) funkcja $\|\text{grad}_y V\|$ jest ograniczona;

- 3) $\frac{dV}{dt} < c$, przy czym na zewnątrz pewnego obszaru ograniczonego spełniona jest

przy stałej $c_1 > 0$ nierówność

$$\frac{dV}{dt} < -c_1 V.$$

Wtedy układ (8.2) jest dysypatywny dla dowolnego procesu stochastycznego $X(t, \omega)$, dla którego

$$\sup_{t \geq t_0} E\{\|X(t, \omega)\|\} < \infty.$$

Rozpatrując różne węższe klasy procesów $X(t, \omega)$ można otrzymać warunki dysypatywności przy słabszych warunkach odnośnie układu (8.3).

Założmy, że funkcja F w układzie (8.2) i (8.3) zależy tylko od y , tj. $F(y, t) = F(y)$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.2. Jeżeli dla układu (8.3), w którym $F = F(y)$, istnieje różniczkowalna w sposób ciągły funkcja $V(y)$ taka, że:

- 1) $\inf V(y) = V(y_1)$ dla pewnego $y_1 \in R^n$;

- 2) funkcja $\frac{dV}{dt} \rightarrow -\infty$ przy $\|y\| \rightarrow \infty$;

- 3) funkcja $\|\text{grad } V\|$ jest ograniczona w R^n ,

to układ (8.2) posiada rozwiązanie stacjonarne dla dowolnego procesu stacjonarnego $X(t, \omega)$ o skończonej wartości przeciętnej.

Interesujące rezultaty dotyczące stacjonarności rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych znajdują się również w pracach [53, 9]; jednakże w pracy [9] pojęcie stacjonarności jest rozumiane nieco inaczej niż zwykle.

Literatura cytowana w tekście

1. R. BELLMAN, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill Company, 1953.
2. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Москва 1967.
3. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Москва 1966.
4. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва 1949.
5. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт, *О статистическом рассмотрении динамических систем*, Журн. Эксп. Теор. Физ., 3, 3 (1933).
6. Н. Д. Мойсеев, *О вероятности устойчивости по Ляпунову*, Докл. АН СССР, 1 (1936), 211.
7. В. В. Степанов, *К определению вероятности устойчивости*, Докл. АН СССР, 18 (1938), 151.
8. A. ROSENBLUM, *Analysis of linear systems with randomly time-varying parameters*, Proc. Symp. Inform. Networks, 1954, Brooklyn 1955, 145-153.
9. И. И. Ворович, *Об устойчивости движения при случайных возмущениях*, Изв. АН СССР, сер. матем., 1, 20 (1956).
10. J. E. BERTRAM, P. E. SARACHIK, *Stability of circuits with randomly time-varying parameters*, Proc. Int. Symp. on Circuit and Inform. Theory, Los Angeles 1959.
11. J. C. SAMUELS, *On the mean square stability of random linear systems*, IRE Trans. Circuit Theory, 6 (1959); Spec. Supl., 248-259.
12. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, *Об устойчивости систем со случайными параметрами*, Прикл. мат. мех., 5, 24 (1960).
13. Н. Н. Красовский, *Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях*, Прикл. мат. мех., 1, 24 (1960).
14. T. K. CAUGHEY, J. K. DIENES, *The behaviour of linear systems with randomly parametric excitation*, J. Math. Phys., 41 (1962), 300-310.
15. Р. З. Хасьминский, *Об устойчивости траектории марковских процессов*, Прикл. мат. мех., 6, 26 (1962).
16. J. L. BOGDANOFF, F. KOZIN, *Moments of the output of linear random systems*, J. Acoust. Soc. Amer., 8, 34 (1962), 1063.
17. М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский, *Об устойчивости стохастических систем*, Пробл. пер. информ., 3, 2 (1966).
18. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, Киев 1968.
19. F. KOZIN, *On almost sure stability of linear systems with random coefficients*, J. Math. Phys., 1, 42 (1963).
20. М. Г. Шур, *О линейных дифференциальных уравнениях со случайными возмущенными параметрами*, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 29 (1965).
21. Т. К. СЛАУГНЕЙ, А. Н. GRAY, *On the almost sure stability of linear dynamic systems with stochastic coefficients*, J. Appl. Mech., 2, E32 (1965).
22. Р. З. Хасьминский, *Об устойчивости нелинейных стохастических систем*, Прикл. матем. мех., 5, 30 (1966).
23. H. J. KUSHNER, *On the construction of stochastic Lapunov functions*, Trans. JEEE, 10 (1965), 477.
24. A. K. MAHALANABIS, S. PURKAYASTHA, *On the stability of stochastic Lurie type systems*, Int. J. Control, 4, 8 (1968).
25. И. Я. Кац, *Об устойчивости в целом стохастических систем*, Прикл. матем. мех., 2, 28 (1964).
26. А. Н. Малахов, *Статистическая устойчивость движения*, Изв. Высш. Учеб. Зав. Радиофизика, 1, 6 (1963).
27. F. KOZIN, *On relations between moment properties and almost sure Lapunov stability for linear stochastic systems*, J. Math. Anal. Appl., 2, 10 (1965).
28. И. И. Гихман, *Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений*. Сборник: „Пределные теоремы и стохастические выводы”, Ташкент 1966.
29. Р. З. Хасьминский, *О диссипативности случайных процессов определенных дифференциальными уравнениями*, Пробл. перед. информ., 1, 1 (1965).

30. J. C. SAMUELS, A. C. ERINGEN, *On stochastic linear systems*, J. Math. Phys., **2**, **38** (1959).
31. W. M. WONHAM, *Lapunov criteria for weak stochastic stability*, J. Diff. Eqs., **5** (1966), 195.
32. В. А. БРУСИН, М. Л. ТАЙ, *Абсолютная стохастическая устойчивость*. Изв. Высш. Учебн. Зав. Радиофизика, **7**, **10** (1967).
33. А. А. КРАСОВСКИЙ, *Статистическая теория переходных процессов в системах управления*, Москва 1966.
34. А. А. КРАСОВСКИЙ, *Энтропийная устойчивость линейных непрерывных систем автоматического управления*, Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, **5** (1963).
35. А. А. КРАСОВСКИЙ, *Об энтропийной устойчивости динамических систем*, Автомат. телемех., **3**, **26** (1965).
36. R. S. BUCY, *Stability and positive supermartingales*, J. Diff. Eqs., **1** (1965), 151.
37. H. J. KUSHNER, *Stochastic stability and control*, Academic Press, 1967.
38. H. J. KUSHNER, *On the stability of stochastic dynamical systems*, Proc. Natl. Acad. Sci., **8**, **53** (1967).
39. Э. А. ЛИДСКИЙ, *Об устойчивости решений медленно изменяющейся стохастической системы*, Сибирский мат. журн., **5**, **4** (1963).
40. T. K. SAUGHNEY, *Comments on «On the stability random systems»*, J. Acoust. Soc. Amer., **32** (1960), 1356.
41. М. В. НЕВЕЛЬСОН, Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ, *Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров*, Прикл. мат. мех., **2**, **30** (1966).
42. J. C. SAMUELS, *On the stability of random systems and the stabilization of deterministic systems with random noise*, J. Acoust. Soc. Amer., **5**, **32** (1960).
43. M. A. LEIBOWITZ, *Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters*, J. Math. Phys., **6**, **4** (1963).
44. Ю. Л. РАБОТНИКОВ, *О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров*, Прикл. мат. мех., **5**, **28** (1964).
45. Г. Н. МИЛЬШТЕЙН, Ю. М. РЕПИН, *О среднеквадратичной устойчивости стохастических дифференциальных уравнений*, Прикл. мат. мех., **3**, **31** (1967).
46. Y. SAWARAGI, *Statistical studies on the response of non-linear time varying control systems subjected to a suddenly applied stationary gaussian random input*, Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ., **24** (1962), 465.
47. T. MOROZAN, *Stability of some linear stochastic systems*, J. Diff. Eqs., **3** (1967), 153.
48. T. MOROZAN, *Stability of linear systems with random parameters*, J. Diff. Eqs., **3** (1967), 170.
49. T. MOROZAN, *Stability of differential systems with random parameters*, J. Math. Anal. Appl., **3**, **24** (1968).
50. J. L. BOGDANOFF, *Influence on the behavior of a linear dynamical system of some imposed motion of small amplitude*, J. Acoust. Soc. Amer., **34** (1962), 1055.
51. J. L. BOGDANOFF, S. J. CITRON, *On the stabilization of the inverted pendulum*, Proc. 9th Midwestern Mech. Conf. (1965).
52. S. BOCHNER, *Stationarity boundedness, almost periodicity of random valued functions*, Proc. 3rd Berkeley Symp. Prob. Statist., **2** (1955).
53. К. ИТО, М. НИСИО, *On stationary solutions of a stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ., **1**, **4** (1964).
54. А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, *О корреляционных функциях векторных процессов удовлетворяющих некоторым дифференциальным уравнениям*, Укр. мат. журн., **3**, **14** (1962).
55. M. ZAKAI, *On the ultimate boundedness of moments associated with solutions of stochastic differential equations*, Technion Haifa, Faculty of Electr. Eng. Pub., **58** (1966).
56. В. Н. ВНАРУЧА, *On the stability of randomly varying systems*, Ph. D. Thesis, Dept of Electr. Eng., Univ. California, Berkeley 1961.
57. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna maszyn wirnikowych przy wymuszeniach stochastycznych*, Dynamika Strojów, Proc. Vth Conf. on Dynamics of Machines, Liblice 1968.
58. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna układów stochastycznych*, Nonlinear Vibr. Probl., **10** (1969).
59. W. GAWROŃSKI, *Analiza pewnego układu nieliniowego przy wymuszeniu stochastycznym*, Mech. Teor. Stos., **1**, **8** (1970).
60. К. СОВСЗУК, *Stochastyczne równania różniczkowe*, rozdz. XXXV w: «Poradnik Inżyniera» – Matematyka, Warszawa (w druku).

Р е з ю м е

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В работе рассматриваются проблемы стохастической устойчивости движения дискретных динамических систем. В ней представлен обзор основных понятий и важнейших результатов полученных в течение последних лет.

Работа содержит определения устойчивости по вероятности, устойчивости в среднем, устойчивости почти наверное а также определения энтропийной устойчивости и полной статистической устойчивости. Далее представлены основные критерии стохастической устойчивости движения (в соответствующем смысле) систем описываемых с помощью стохастических уравнений Ито и других стохастических нелинейных систем.

Работа имеет общий характер; рассуждения проводятся с точки зрения качественных методов стохастических дифференциальных уравнений. В связи с чем представленные результаты могут быть применены для систем различной физической природы (например механических, электрических и др.).

S u m m a r y

STOCHASTIC STABILITY OF MOTION

The paper is concerned with the problems of stochastic stability of motion of discrete dynamical systems. It contains a systematic survey of the fundamental concepts and the most important results which have been obtained recently.

The definitions of stochastic stability in probability, stability in the mean, almost sure stability, entropy stability and total statistical stability are presented. Basing on these definitions, the fundamental conditions for stochastic stability of motion are discussed. The systems described by stochastic Ito equations and other nonlinear systems are considered.

The considerations are general. They are presented from the point of view of qualitative methods of stochastic differential equations, and the presented results may be applied to the systems of various physical nature (e.g. mechanical, electrical etc.).

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 kwietnia 1970 r.

PROBLEMY OPTYMIZACYJNE W SYNTEZIE UKŁADÓW MECHANICZNYCH

ROBERT STANISZEWSKI (WARSZAWA)

1. Założenia ogólne

Do rozważań przyjmuje się układ mechaniczny w sensie ogólnym. Cechy ogólności dotyczą przede wszystkim struktury układu, obciążeń statycznych i dynamicznych oraz wymiarów i przeznaczenia układu. Zakładamy, że rozpatrywany układ mechaniczny jest opisany zbiorem wielkości $W_j = W_1, W_2, \dots, W_n$. Spośród zbioru W_j wyodrębnia się grupę wielkości stałych — tak zwanych parametrów (podzbiór A) oraz grupę wielkości zmiennych zależnych od charakteru obciążenia, warunków otoczenia i sposobu eksploatacji układu (podzbiór B). Podzbiór parametrów mieści się w zakresie $1 \leq j \leq k$, a więc obejmuje wielkości $W_j = W_1, W_2, \dots, W_k$. Na etapie syntezy i projektowania układu wielkości W_j mogą występować jako zmienne, lub też mogą być funkcjami $W_j(X_i)$ innych wielkości $X_i = X_1, X_2, \dots, X_m$. W czasie eksploatacji układu wielkości W_j i funkcje $W_j(X_i)$ mają wartości stałe i przyjmują nazwę parametrów. Mogą co najwyżej ulegać niewielkim zmianom ze względu na starzenie się układu.

Do drugiej grupy zaliczamy podzbiór wielkości, których numery mieszczą się w zakresie $k+1 \leq j < n$. W czasie eksploatacji układu ulegają one zmianie w sposób regulowany według określonego programu, lub w sposób przypadkowy uwarunkowany warunkami użytkowania. Wielkości należące do podzbioru B mogą występować jako zmienne niezależne lub jako funkcje czasu $W_j(\tau) = W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)$. Wielkości te i ich funkcje odpowiednio ze sobą powiązane występują jako charakterystyki układu H_1, H_2, \dots, H_m . W zależności od postaci matematycznej W_j , mogą występować jako funkcje lub funkcjonały. Można je rozpisać następująco:

Dla podzbioru A :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} H_1 &= H_1(W_1, W_2, \dots, W_k) = H_1(W_{j \leq k}) \\ H_2 &= H_2(W_1, W_2, \dots, W_k) = H_2(W_{j \leq k}) \\ \hline H_l &= H_l(W_1, W_2, \dots, W_k) = H_l(W_{j \leq k}) \end{aligned}$$

lub

$$(1.2) \quad \begin{aligned} H_1 &= H_1[W_1(X_i), W_2(X_i), \dots, W_k(X_i)] = H_1[W_{j \leq k}(X_i)] \\ H_2 &= H_2[W_1(X_i), W_2(X_i), \dots, W_k(X_i)] = H_2[W_{j \leq k}(X_i)] \\ \hline H_l &= H_l[W_1(X_i), W_2(X_i), \dots, W_k(X_i)] = H_l[W_{j \leq k}(X_i)] \end{aligned}$$

Dla podzbioru B :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} H_{l+1} &= H_{l+1}(W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_n) = H_{l+1}(W_{j>k}) \\ H_{l+2} &= H_{l+2}(W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_n) = H_{l+2}(W_{j>k}) \\ H_m &= H_m(W_{k+1}, W_{k+2}, \dots, W_n) = H_m(W_{j>k}) \end{aligned}$$

lub

$$(1.4) \quad \begin{aligned} H_{l+1} &= H_{l+1}[W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = H_{l+1}[W_{j>k}(\tau)] \\ H_{l+2} &= H_{l+2}[W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = H_{l+2}[W_{j>k}(\tau)] \\ H_m &= H_m[W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = H_m[W_{j>k}(\tau)] \end{aligned}$$

gdzie wskaźnik i występujący przy wielkościach X_i przyjmuje wartości $1, 2, \dots, \mu$, a więc mieści się w zakresie $1 \leq i \leq \mu$.

Charakterystyki dla podzbioru A , a więc dla zakresu $1 \leq i \leq l$, będące na etapie syntezy funkcjami $H_i(W_{j \leq k})$ lub funkcjonalami $H_i[W_{j \leq k}(X_i)]$ w układzie eksploatowanym występują jako wskaźniki $\varrho_j = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_v$. Charakterystyki dla podzbioru B w zakresie $l+1 \leq i \leq m$, występujące jako funkcje $H_{l+1}(W_{j>k})$, lub funkcjonały i $H_{l+i}[W_{j>k}(\tau)]$ są użytkowymi charakterystykami układu mechanicznego.

2. Zagadnienie kryterium optyimizacyjnego i wielkości optyimizowanych

Proces optyimizacyjny poprzedza się przyjęciem odpowiedniego kryterium E , zbadaniem wpływu wielkości W_j i wyborem wielkości optyimizowanych U_i spośród W_j . W zależności od postaci matematycznej charakterystyk, kryterium optyimizacyjne może być funkcją lub funkcjonalem, a więc:

Dla podzbioru A

$$(2.1) \quad E_A = E_A(U_i) = \text{ekstr}_{U_i \in W_j} H_i(W_{j \leq k})$$

lub

$$(2.2) \quad E_A = E_A[U_i(X_i)] = \text{ekstr}_{U_i(X_i) \in W_j(X_i)} H_i[W_{j \leq k}(X_i)];$$

Dla podzbioru B

$$(2.3) \quad E_B = E_B(U_i) = \text{ekstr}_{U_i \in W_j} H_i(W_{j>k})$$

lub

$$(2.4) \quad E_B = E_B(U_i) = \text{ekstr}_{U_i(X_i) \in W_j(X_i)} H_i[W_{j>k}(\tau)].$$

Występujące w związkach kryterialnych i przy wielkościach optyimizowanych U ma inne znaczenie niż i występujące przy charakterystykach. Dla wielkości optyimizowanych w podzbiorze A mieści się ono w granicach $1 \leq i \leq k$, natomiast w podzbiorze B w zakresie $k+1 \leq i \leq n$. Dla charakterystyk i przybiera wartości w zakresie $1 \leq i \leq m$.

3. Warunki ograniczające

Wartości wielkości optyimizowanych wyznaczone matematycznie nie zawsze mogą być przyjęte ze względu na ograniczenia geometryczne, ciężarowe, ekonomiczne, fizyczne lub inne. W związku z tym, w zagadnieniach optyimizacyjnych muszą być uwzględnione warunki ograniczające. Realizuje się przez nałożenie ograniczeń, zarówno na wielkości optyimizowane jak i na kryteria optyimizacyjne. Zakładamy przedziały zawarte pomiędzy wartościami górnymi g i dolnymi d .

Zgodnie z tym mamy:

$$(3.1) \quad (W_j)_d \leq W_j \leq (W_j)_g,$$

$$(3.2) \quad [W_j(X_i)]_d \leq W_j(X_i) \leq [W_j(X_i)]_g,$$

$$(3.3) \quad [W_j(\tau)]_d \leq W_j(\tau) \leq [W_j(\tau)]_g,$$

$$(3.4) \quad [E(U_i)]_d \leq E(U_i) \leq [E(U_i)]_g,$$

$$(3.5) \quad \{E[U_i(X_i)]\}_d \leq E[U_i(X_i)] \leq \{E[U_i(X_i)]\}_g,$$

$$(3.6) \quad \{E[U_i(\tau)]\}_d \leq E[U_i(\tau)] \leq \{E[U_i(\tau)]\}_g.$$

W zależności od konkretnych zadań optyimizacyjnych, warunki ograniczające mogą być nałożone również na pochodne funkcji $[W_j(X_i)]$, $E(U_i)$ lub funkcjonały $E[U_i(X_i)]$ i $E_i[U(\tau)]$.

4. Budowa charakterystyk uogólnionych

Zamiast klasycznych charakterystyk układu mechanicznego H_1, H_2, \dots, H_m , wprowadza się charakterystyki uogólnione. Są nimi: efekt techniczny F , funkcja wysiłku K oraz efekt ogólny λ będący ilorzem F oraz K . Efekt techniczny układu mechanicznego jest definiowany jako charakterystyka uogólniona określająca właściwości techniczne układu z punktu widzenia realizacji celu. W związku z tym jest ona funkcją zależną bezpośrednio od charakterystyk H_1, H_2, \dots, H_m , a pośrednio od wielkości W_1, W_2, \dots, W_n . Jeśli zbiór wielkości częściowo lub całkowicie występuje w postaci funkcji, wówczas efekt techniczny jest funkcjonałem. Możemy więc zapisać:

$$(4.1) \quad F = F(H_1, H_2, \dots, H_m) = F(W_1, W_2, \dots, W_n) = F(W_j)$$

lub

$$F = F[H_1(W_{j \leq k}), H_2(W_{j \leq k}), \dots, H_m(W_{j \leq k})],$$

$$(4.2) \quad H_1(W_{j > k}), H_2(W_{j > k}), \dots, H_m(W_{j > k}) = F[W_1(X_i), W_2(X_i), \dots, W_{j=k}(X_i),$$

$$W_{k+1}(\tau), W_{k+2}(\tau), \dots, W_n(\tau)] = F[W_j(X_i, \tau)].$$

Niech wielkości W_j występujące jako elementy zbioru A mają właściwości techniczne opisane przez $P(p_j)$ i właściwości ekonomiczne określone przez $K_w(W_j, a_j)$. Natomiast

wielkości W_j występujące jako elementy zbioru B niech mają właściwości techniczne $Z(z_j)$ i ekonomiczne $K_e(W_j, a_i)$. Wtedy oba zbiory możemy rozpiścić w postaci:

$$(4.3) \quad A = \left\{ W_j(j = 1, 2, \dots, k): \begin{array}{l} P(p_j) \\ K_w(W_j, a_i) \end{array} \right\},$$

$$(4.4) \quad B = \left\{ W_j(j = k+1, k+2, \dots, n): \begin{array}{l} Z(z_j) \\ K_e(W_j, a_i) \end{array} \right\}.$$

Związki pomiędzy zbiorami A i B zapiszemy następująco:

$$(4.5) \quad A \cup B = V = \{W_j(j = 1, 2, \dots, n)\} = \\ = \{W_j(j = 1, 2, \dots, k)\} \cup \{W_j(j = k+1, k+2, \dots, n)\}.$$

$$(4.6) \quad [W_j(j = 1, 2, \dots, n) \in (A \cup B)] \equiv \\ \equiv [W_j(j = 1, 2, \dots, k) \in A] \vee [W_j(j = k+1, k+2, \dots, n) \in B].$$

$$(4.7) \quad A \cap B = \{W_j(j = 1, 2, \dots, k)\} \cap \{W_j(j = k+1, k+2, \dots, n)\} = 0.$$

Należy przy tym zauważyć, że pewne typy układów mechanicznych posiadają kilka zakresowości pracy. Niech funkcja $R(r_j)$ przyjmująca wartości dyskretne:

$$R(r_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla jednozakresowego układu} \\ C & \text{dla wielozakresowego układu} \end{cases}$$

opisuje stan zakresowości układu. Efekt techniczny układu $F(W_j)$ może być określony jako iloczyn funkcji opisujących właściwości techniczne w zbiorach A i B oraz funkcji zakresowości $R(r_j)$.

Ustalając, że:

- 1) $P(p_j)$ — określa właściwość elementów zbioru A , przy czym p_j są wybierane spośród W_j w zakresie $1 \leq j \leq k$,
- 2) $R(r_j)$ i $Z(z_j)$ — określają właściwości elementów zbioru B , przy czym r_j są wybierane spośród W_j w zakresie $k+1 \leq j \leq g$, natomiast z_j są wybierane spośród W_j w zakresie $g+1 \leq j \leq n$.

Związki na efekt techniczny (4.1), (4.2) będą miały postać:

$$(4.8) \quad F(W_j) = P(p_1, p_2, \dots, p_k) R(r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_g) Z(z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_n) = \\ = P(p_j) R(r_j) Z(z_j)$$

lub

$$(4.9) \quad F[W_j(\bar{X}_i, \tau)] = P[p_1(X_i), p_2(X_i), \dots, p_k(X_i)] R[r_{k+1}(X_i), r_{k+2}(X_i), \dots, r_g(X_i)] \times \\ \times Z[z_{g+1}(\tau), z_{g+2}(\tau), \dots, z_n(\tau)] = P[p_j(X_i)] R[r_j(X_i)] Z[z_j(X_i)]$$

W ogólnym przypadku wyrażenie (4.9) może mieć jeszcze inne postacie, mianowicie:

- (4.10) $F[W_j(X_i, \tau)] = P(p_j) R(r_j) Z(z_j),$
- (4.11) $F[W_j(X_i, \tau)] = P(p_j) R[r_j(X_i)] Z[z_j(\tau)],$
- (4.12) $F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_j(X_i)] R[r_j(X_i)] Z(z_j),$
- (4.13) $F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_j(X_i)] R(r_j) Z(z_j),$
- (4.14) $F[W_j(X_i, \tau)] = P(p_j) R[r_j(X_i)] Z(z_j),$
- (4.15) $F[W_j(X_i, \tau)] = P[p_j(X_i)] R(r_j) Z[z_j(\tau)].$

Funkcja wskaźników układu jest zależna od $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_v$. Można ją przedstawić jako iloczyn tych wskaźników podniesionych do odpowiednich wykładników wag $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v$; z tym, że wprowadzenie ω_i ma regulować różny stopień wpływu ϱ_i na efekt techniczny. W związku z tym, mamy:

$$(4.16) \quad P(p_j) = P(p_1, p_2, \dots, p_k) = (\varrho_1)^{\omega_1} (\varrho_2)^{\omega_2}, \dots, (\varrho_v)^{\omega_v} = \prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i}$$

lub

$$(4.17) \quad P[p_j(X_i)] = \prod_{i=1}^{i=v} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i}.$$

Funkcja zakresowości $R(r_j)$ przyjmuje określone wartości dyskretne zależne od rodzaju i przeznaczenia układu.

Funkcja stanu procesu $Z(z_j)$ opisuje dynamikę układu i jest równoważna całce z charakterystyki głównej $\bar{H}(\tau)$ w okresie czasu pracy układu $\tau_i - \tau_{i-1}$. Dla jednego włączenia układu, funkcja $Z(z_j)$ ma postać:

$$(4.18) \quad Z(z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_n) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau$$

lub

$$(4.19) \quad Z[z_j(\tau)] = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[z_j(\tau)] d\tau.$$

Dla d włączeń:

$$(4.20) \quad Z_d(z_j) = \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau$$

lub

$$(4.21) \quad Z_d[z_j(\tau)] = \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i[z_j(\tau)] d\tau.$$

Po uwzględnieniu związków na $P(p_j)$, $P[p_j(X_i)]$, $Z(z_j)$ i $Z[z_j(\tau)]$ we wzorach (4.8) i (4.9), otrzymamy wyrażenia na efekt techniczny, kolejno dla jednego włączenia oraz dla d włączeń:

$$(4.22) \quad F_1(W_j) = P(p_j) R(r_j) Z(z_j) = \prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau,$$

$$(4.23) \quad F_d(W_j) = R(r_j) \prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau$$

lub

$$(4.24) \quad F_1[W_j(X_i)] = \prod_{i=1}^{i=v} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau,$$

$$(4.25) \quad F_d[W_j(X_i)] = \prod_{i=1}^{i=v} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[Z_j(\tau)] d\tau.$$

Właściwości techniczno-ekonomiczne wielkości W_j jako elementów zbiorów A i B , są opisane przez funkcje wysiłku budowy $K_w(W_j, a_i)$ i eksploatacji układu $K_e(W_j, a_i)$. Cały wysiłek związany z wykonaniem i użytkowaniem układu mechanicznego można wyrazić przy pomocy ogólnej funkcji, a więc:

$$(4.26) \quad K(W_j, a_i) = \\ = K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i) = K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau,$$

przy czym:

$$K_w(W_j, a_i) = K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i),$$

$K_s(W_j, a_i)$ — funkcja wysiłku związana z syntezą i projektowaniem układu mechanicznego;

$K_d(W_j, a_i)$ — funkcja wysiłku związana z wdrażaniem projektu układu do produkcji;

$K_p(W_j, a_i)$ — funkcja wysiłku związana z produkcją układu mechanicznego;

$\bar{K}_e(W_j, a_i)$ — jednostkowa funkcja wysiłku eksploatacyjnego układu mechanicznego.

Iloraz efektu technicznego i funkcji wysiłku będziemy nazywać efektem ogólnym układu mechanicznego λ . W zależności od postaci matematycznej efektu technicznego, efekt ogólny przyjmuje formę funkcji $\lambda(W_j, a_i)$ lub funkcjonału $\lambda[W_j(X_i), a_i]$. Wykorzystując związki na F i K , otrzymamy podstawowe wzory ogólne na efekt ogólny. Kolejno mamy:

$$(4.27) \quad \lambda_1(W_j, a_i) = \lambda(W_1, W_2, \dots, W_n, a_1, a_2, \dots, a_m) = \\ = \frac{F(W_1, W_2, \dots, W_n)}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \\ = \frac{\prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_i) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \\ = \frac{\prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_e(\tau) d\tau} = \frac{F(W_j)}{K(W_j, a_i)},$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_d(W_j, a_i) &= \frac{\prod_{i=1}^{i=d} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau}{K_w(W_j, a_i) + K_{ed}(W_j, a_i)} = \\
 (4.28) \quad &= \frac{\prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1[W_j(X_i), a_i] &= \frac{F[W_1(X_i), W_2(X_i), \dots, W_n(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \\
 (4.29) \quad &= \frac{\prod_{i=1}^{i=v} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[z_j(\tau)] d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_d[W_j(X_i), a_i] &= \frac{F[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_{ed}(W_j, a_i)} = \\
 (4.30) \quad &= \frac{\prod_{i=1}^{i=v} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i[z_j(\tau)] d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau}
 \end{aligned}$$

We wzorach (4.28)–(4.30) podano jedynie dwa podstawowe przypadki. Pierwszy zawiera efekt techniczny w formie funkcji, a drugi w formie funkcjonału. Odwrotność efektu ogólnego stanowi tak zwany efekt wysiłu S .

5. Modele optymiczacyjne

Zgodnie z założeniami, przyjmuje się charakterystyki uogólnione jako kryteria optymiczacyjne. W myśl postulatów wynikających z problemu celu, efekt ogólny winien przyjmować największą wartość, natomiast efekt wysiłku najmniejszą wartość. W związku z tym, podstawowy model optymiczacyjny możemy rozpisać kolejno dla funkcji i funkcjonału, uwzględniając związki dla λ i S :

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda 1}(U_i) &= E_{\lambda 1}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_1(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \frac{F(W_j)}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \\
 (5.1) \quad &= \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod_{i=1}^{i=v} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)}.
 \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad E_{\lambda_d}(U_i) = E_{\lambda_d}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \frac{F_d(W_j)}{K_w(W_j, a_i) + K_{ei}(W_j, a_i)} =$$

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau}{K_s(W_j, a_i) + K_d(W_j, a_i) + K_p(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau},$$

$$(5.3) \quad E_{S_1}(U_i) = E_S(U_i) = E_{S_1}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S_1(W_j, a_i),$$

$$(5.4) \quad E_{S_d}(U_i) = E_S(U_i) = E_{S_d}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S_d(W_j, a_i),$$

$$(5.5) \quad E_{\lambda_1}[U_i(X_i)] = E_{\lambda_1}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_1[W_j(X_i), a_i] =$$

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{F_1[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[Z(z_j)] d\tau}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)},$$

$$(5.6) \quad E_{\lambda_d}[U_i(X_i)] = E_{\lambda_d}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i] =$$

$$= \max_{U_i \in W_j} \frac{F_d[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}[z_j(\tau)] d\tau}{K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau}.$$

$$(5.7) \quad E_{S_1}[U_i(X_i)] = E_{S_1}[U_i(X_i)] = E_{S_1}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_1[W_j(X_i), a_i],$$

$$(5.8) \quad E_{S_d}[U_i(X_i)] = E_{S_d}[U_i(X_i)] = E_{S_d}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i],$$

przy czym:

$$(5.9) \quad E_{\lambda}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \frac{F(W_j)}{K(W_j, a_i)},$$

$$(5.10) \quad E_S^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} \frac{K(W_j, a_i)}{F(W_j)},$$

$$(5.11) \quad E_{\lambda}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \frac{F[W_j(X_i)]}{K(W_j, a_i)},$$

$$(5.12) \quad E_S^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} \frac{K(W_j, a_i)}{F[W_j(X_i)]}.$$

Spośród wielu przypadków zadań optyimizacyjnych można wyróżnić trzy charakterystyczne. Pierwszy z nich obejmuje maksymalizację efektu ogólnego lub minimalizację efektu wysiłku ze względu na maksymalizację efektu technicznego. Drugi przypadek optyimizacyjny zawiera maksymalizację λ lub minimalizację S ze względu na minimalizację

zacje funkcji wysiłku. Wreszcie trzeci przypadek obejmuje maksymalizowanie efektu ogólnego lub minimalizowanie efektu wysiłku drogą maksymalizowania F i minimalizowania K . Kolejno podano opis matematyczny trzech charakterystycznych przypadków, dla których podstawowe związki mają postać:

Przypadek 1.

$$(5.12) \quad E_{\lambda_d}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i),$$

$$(5.13) \quad E_{S_d}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S(W_j, a_i),$$

przy

$$(5.14) \quad F(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{i=y}^{i=y} (\rho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau = \max F,$$

$$(5.15) \quad K(W_j, a_i) = \text{const } K$$

lub

$$(5.16) \quad E_{\lambda_d}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i],$$

$$(5.17) \quad E_{S_d}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i],$$

przy

$$(5.18) \quad \begin{aligned} F[W_j(X_i)] &= P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z[z_j(X_i)] = \\ &= \prod_{i=y}^{i=y} [\rho_i(X_i)]^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau = \max F, \end{aligned}$$

$$(5.19) \quad K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau = \text{const } K.$$

Przypadek 2.

$$(5.20) \quad E_{\lambda_d}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i),$$

$$(5.21) \quad E_{S_d}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S(W_j, a_i),$$

przy

$$(5.22) \quad F(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{i=y}^{i=y} (\rho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau = \text{const } F,$$

$$(5.23) \quad K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau = \min K$$

lub

$$(5.24) \quad E_{\lambda_d}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i],$$

$$(5.25) \quad E_{S_d}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i],$$

przy

$$(5.26) \quad F[W_j(X_i)] = P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z[z_j(\tau_i)] = \\ = \prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau = \text{const } F,$$

$$(5.27) \quad K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau = \min K.$$

Przypadek 3.

$$(5.28) \quad E_{\lambda_d}^{mx} \lambda(W_j, a_i) = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d(W_j, a_i),$$

$$(5.29) \quad E_{S_d}^{mn} S(W_j, a_i) = \min_{U_i \in W_j} S(W_j, a_i),$$

przy

$$(5.30) \quad F(W_j) = P(p_j)R(r_j)Z(z_j) = \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau = \max F,$$

$$(5.31) \quad K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau = \min K$$

lub

$$(5.32) \quad E_{\lambda_d}^{mx} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \max_{U_i \in W_j} \lambda_d[W_j(X_i), a_i],$$

$$(5.33) \quad E_{S_d}^{mn} S[W_j(X_i), a_i] = \min_{U_i \in W_j} S_d[W_j(X_i), a_i],$$

przy

$$(5.34) \quad F[W_j(X_i)] = P[p_j(X_i)]R[r_j(X_i)]Z[z_j(X_i)] = \\ = \prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau = \max F,$$

$$(5.35) \quad K(W_j, a_i) = K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(\tau) d\tau = \text{const } K.$$

6. Przedział celowości zmian wielkości W_j

W pracy [2] rozważono zagadnienie przedziału zmian wielkości W_j układu mechanicznego z punktu widzenia ich celowości i opłacalności. Ustalono zakres, w którym zmiany W_j prowadzą do zwiększenia efektu ogólnego; ograniczeniem przedziału jest związek wynikający z równania ekstremalizacyjnego funkcji $\lambda(W_j, a_i)$ względem W_j . Rozpatrzono

no cztery charakterystyczne przypadki zmian parametrów silnika spalinowego. Podstawowe założenia dla nich, przy n wytwarzanych silnikach, są następujące:

1) Założone są stałe wydatki na budowę i eksploatację n silników. Zadanie polega na wprowadzeniu pewnych zmian parametrów prowadzących do wzrostu efektu technicznego od $F_1(W_j)$ do $F_2(W_j)$, drogą zwiększenia złożoności konstrukcji

$$\begin{aligned} K_1(W_j, a_i) &= K_2(W_j, a_i) = \text{const}, \\ F_1(W_j) &< F_2(W_j). \end{aligned}$$

2) Założone są stałe wydatki na budowę i eksploatację n silników. Zadanie polega na wprowadzeniu pewnych zmian parametrów prowadzących do wzrostu efektu technicznego od $F_a(W_j)$ do $F_b(W_j)$, drogą uproszczenia konstrukcji

$$\begin{aligned} K_a(W_j, a_i) &= K_b(W_j, a_i) = \text{const}, \\ F_a(W_j) &< F_b(W_j). \end{aligned}$$

3) Założony jest stały efekt techniczny wytwarzanych silników. Zadanie sprowadza się do obniżenia ogólnych kosztów wytwarzania i eksploatacji od $K_1(W_j, a_i)$ do $K_2(W_j, a_i)$, drogą zmian konstrukcji

$$\begin{aligned} F_1(W_j) &= F_2(W_j), \\ K_1(W_j, a_i) &> K_2(W_j, a_i). \end{aligned}$$

4) Założony jest stały efekt techniczny wytwarzanych silników. Zadanie sprowadza się do obniżenia ogólnych kosztów wytwarzania i eksploatacji od $K_a(W_j, a_i)$ do $K_b(W_j, a_i)$, drogą uproszczenia konstrukcji

$$\begin{aligned} F_a(W_j) &= F_b(W_j), \\ K_a(W_j, a_i) &> K_b(W_j, a_i). \end{aligned}$$

Wyniki rozważań wszystkich przypadków dla przedziału $(W_j)_I \leq W_j \leq (W_j)_{II}$ prowadzą do nierówności

$$(6.1) \quad \frac{K(W_j, a_i)}{F(W_j)} dF(W_j) > dK(W_j, a_i).$$

Badania na innych układach prowadzą również do nierówności (6.1). Dalsza zmiana wielkości charakterystycznych, a więc dla przedziału $W_j > (W_j)_{II}$, dla wszystkich omówionych przypadków daje już nierówność przeciwną. W związku z tym, mamy dla przedziału $(W)_I \leq W_j \leq (W_j)_{II}$

$$(6.2) \quad SdF[(W_j)_I \leq W_j \leq (W_j)_{II}] > dK[(W_j)_I \leq W_j \leq (W_j)_{II}, a_i]$$

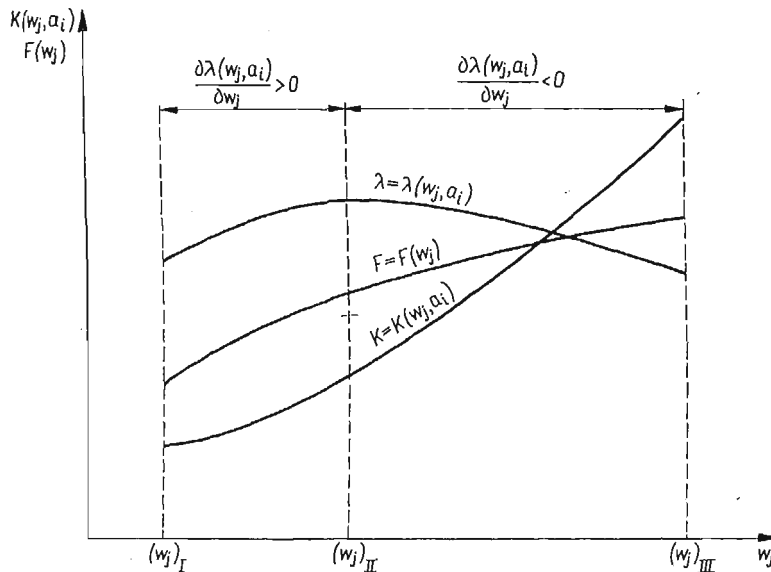
oraz dla przedziału $(W_j)_{II} \leq W_j \leq (W_j)_{III}$

$$(6.3) \quad SdF[(W_j)_{II} \leq W_j \leq (W_j)_{III}] < dK[(W_j)_{II} \leq W_j \leq (W_j)_{III}, a_i],$$

przy czym

$$S = S(W_j, a_i) = \frac{K(W_j, a_i)}{F(W_j)}.$$

W przedziale $(W_j)_I \leq W_j \leq (W_j)_{II}$, każdej zmianie wielkości W_j odpowiada większy przyrost efektu technicznego w porównaniu do przyrostu funkcji wysiłku, reprezentującej dodatkowe nakłady finansowe wynikłe z modyfikacji konstrukcji układu mechanicznego. W tym przypadku, zmiany są celowe i opłacalne. W przedziale $(W_j)_{II} \leq W_j \leq (W_j)_{III}$, każdej zmianie w sensie zwiększenia wielkości W_j (rys. 1) odpowiada mniejszy przyrost



Rys. 1

efektu technicznego w porównaniu do przyrostu funkcji wysiłku. A więc zmiany są nieopłacalne, chociaż mogą być celowe. Z tych rozważań wynika wniosek, że każde zamienienie optymalizacyjne związane ze zmianami konstrukcyjnymi powinno być poprzedzone zbadaniem wpływu zmian W_j na efekt ogólny układu mechanicznego.

Granica $W_j = (W_j)_{II}$ stanowi ograniczenie od góry dla związku (6.2), ważnego dla pierwszego przedziału oraz jest ograniczeniem od dołu dla związku (6.3), ważnego dla drugiego przedziału $(W_j)_{II} < W_j \leq (W_j)_{III}$. Granica dla $W_j = (W_j)_{II}$ jest kresem górnym przewagi wzrostu efektu technicznego nad przyrostem kosztów ogólnych. Można ją wyznaczyć z rozwiązania równania ekstremalizacyjnego efektu ogólnego jako ilorazu efektu technicznego i funkcji wysiłku.

Dla $F = F(W_j)$, $K = K(W_j, a_i)$ i $\lambda = \lambda(W_j, a_i)$ mamy

$$(6.4) \quad \frac{\partial \lambda(W_j = W_1 = U_1)}{\partial (W_j = U_1)} = \frac{1}{K(W_j, a_i)} \frac{\partial F(W_j = W_1 = U_1)}{\partial (W_j = U_1)} - \frac{F(W_1)}{[K(W_1, a_i)]^2} \times$$

$$\times \frac{\partial K(W_1, a_i)}{\partial (W_j = U_1)} = \frac{1}{K(W_1, a_i)} \frac{\partial [P(p_j = U_1)R(r_j = U_1)Z(z_j = U_1)]}{\partial (W_j = U_1)} -$$

$$- \frac{P(p_j = U_1)R(r_j = U_1)Z(z_j = U_1)}{[K(W_j, a_i)]^2} \frac{\partial K(W_j, a_i)}{\partial (W_j = U_1)} = \frac{1}{K(W_j, a_i)} \times$$

$$\begin{aligned}
 (6.4) \quad & \times \frac{\partial}{\partial(W_j = U_1)} \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau - \frac{1}{[K(W_j, a_i)]^2} \times \\
 \text{[c.d.]} \quad & \times \prod_{i=1}^{i=\nu} (\varrho_i)^{\omega_i} R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau \frac{\partial K(W_j, a_i)}{\partial(W_j = U_1)} = \frac{1}{K(U_1)} \frac{\partial F(U_1)}{\partial U_1} - \\
 & - \frac{F(U_1)}{[K(U_1)]^2} \frac{\partial K(U_1)}{\partial U_1}.
 \end{aligned}$$

Gdy efekt ogólny lub efekt wysiłku występują w formie funkcjonału, wówczas dla wyznaczenia wielkości optyimizowanych stosuje się metody wariacyjne. Zadanie optyimizacyjne polega na określeniu takich funkcji $U_1(X_i), U_2(X_i), \dots, U_m(X_i)$ — wybranych spośród $W_1(X_i), W_2(X_i), \dots, W_n(X_i)$, dla których $\lambda[W_j(X_i)]$ lub $S[W_j(X_i)]$ przyjmują wartości ekstremalne. Dla jednej funkcji optyimizowanej mamy

$$\begin{aligned}
 (6.5) \quad E[U_i(X_i)] &= \max_{U_i(X_i) \in W_j(X_i)} \lambda[W_j(X_i), a_i] = \\
 &= \max_{U_i \in W_j} \frac{F[W_j(X_i)]}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \max_{U_i \in W_j} \frac{\prod_{i=1}^{i=\nu} [\varrho_i(X_i)]^{\omega_i} R[r_j(X_i)] \sum_{i=1}^{i=\nu} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(\tau) d\tau}{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)} = \\
 &= G_0 + \int_{X_1}^{X_2} M(W, W', W'', \dots, W^{(n)}, X_i) dX,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad E[U_i(X_i)] &= \min_{U_i \in W_j} S[W_j(X_i), a_i] = \\
 &= \min_{U_i \in W_j} \frac{K_w(W_j, a_i) + K_e(W_j, a_i)}{F[W_j(X_i)]} = \bar{G}_0 + \int_{X_1}^{X_2} \bar{M}(W, W', W'', \dots, W^{(n)}, X_i) dX.
 \end{aligned}$$

W wyrażeniach (6.5) i (6.6) przez G_0 i \bar{G}_0 oznaczono wielkości funkcjonałów dla warunków początkowych. Funkcje $M(W, W', W'', \dots, W^{(n)}, X_i)$ i $\bar{M}(W, W', W'', \dots, W^{(n)}, X_i)$ spełniają równanie Eulera i w tej postaci są podstawą do określenia funkcji optyimizowanych.

7. Matematyczne własności funkcji [funkcjonałów] P, R, Z, F, K, λ i S

Funkcja wskaźników $P(p_j)$. Zmiennymi niezależnymi p_j na etapie syntezy i konstruowania są wskaźniki konstrukcji $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\nu$ związane ograniczeniami fizycznymi, geometrycznymi i technologicznymi. W określonych granicach, każdemu zbiorowi ϱ_i jest podporządkowana i ustalana wartość $P(p_j)$. Wskaźniki przyjmują tylko dodatnie wartości, natomiast wykładniki mieszczą się w zakresie $0 \leq \omega_i \leq e$, gdzie e — liczba dodatnia

i rzeczywista. Funkcja wskaźników jest funkcją określoną ciągłą i różniczkowalną w obszarze C -wymiarowym. Przy braku wpływu wskaźników ϱ_i na efekt techniczny, mamy

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \dots, \omega_v = 0; \quad P(p_j) = 1.$$

Przy liniowym wpływie, mamy

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1, \dots, \omega_v = 0; \quad P(p_j) = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_v.$$

Funkcja zakresowości $R(r_j)$. Przyjmuje wartości dyskretne $R(r_j) = 1$ dla układu jednozakresowego, $R(r_j) = f_1, f_2, \dots$ dla układów wielozakresowych, przy czym f_i — są liczbami dodatnimi.

Funkcja stanu procesu $Z(z_j)$. Własności matematyczne tej funkcji zależą od funkcji podcałkowej $\bar{H}(z_j)$. W badaniach syntezy i konstruowania układu, $\bar{H}(z_j)$ jest funkcją określoną, ciągłą i różniczkowalną. Każdemu uporządkowanemu zbiorowi Z_j jest podporządkowana określona wartość charakterystyki $\bar{H}(z_j)$. W czasie eksploatacji układu, przy założeniu stabilnej pracy, rozpatrywana funkcja podcałkowa jest również określona, ciągła i różniczkowalna. W obu przypadkach funkcja $Z(z_j)$ jest równoważna całce typu Cauchy'ego. W pewnych klasach układów operacje optyimizacyjne wymagają rozważania całki z funkcji $\bar{H}(z_j)$ jako całki Lebesgue'a. Z rozważań na kilku układach [2] wynika, że funkcje podcałkowe są złożone i dlatego całka jest w większości przypadków nierozwiązywalna zwykłymi metodami. Dzieliąc jednak przedział jednego włączenia na etapy, można zastępować funkcje podcałkową przez wielomiany.

Funkcja efektu technicznego $F(W_j)$. Matematyczne własności funkcji opisującej efekt techniczny $F(W_j)$ zależą od własności $P(p_j)$, $R(r_j)$ i $Z(z_j)$.

Funkcja wysiłku $K(W_j, a_i)$. Przy założeniu ustabilizowanych warunków ekonomicznych ($a_i = \text{const}$), funkcja $K(W_j, a_i)$ zależy od wybranych technicznych wielkości W_j . Każdemu uporządkowanemu zbiorowi W_j jest podporządkowana określona wartość funkcji wysiłku. W pewnych przypadkach, przy skokach a_i funkcja $K(W_j, a_i)$ może być nieciągła.

Funkcja efektu ogólnego $\lambda(W_j, a_i)$. Dla przypadku $a_i = \text{const}$, funkcja $\lambda(W_j, a_i)$ jest dodatnią, określoną, ciągłą i różniczkowalną. Tylko w nielicznych przypadkach może wystąpić osobliwość, dla pewnych punktów przy $a_i \neq 0$.

Funkcja efektu wysiłku $S(W_j, a_i)$. Występuje jako funkcja dodatnia, określona, ciągła i różniczkowalna. Uwagi o własnościach matematycznych są również słuszne wtedy, gdy omówione funkcje występują jako funkcjonały.

Przykład. Podstawowym problemem w dynamice układów mechanicznych jest optyimizacja parametrów. Rozpatrzmy zagadnienie wyznaczenia wielkości optyimalnych parametrów układu w oparciu o charakterystyki uogólnione [3]. Przy założeniu

$$(7.1) \quad K_w(W_j, a_i) + \int_0^{\tau_1} \bar{K}_e(W_j, a_i) d\tau = \text{const} = C_1,$$

$$(7.2) \quad K_w(W_j, a_i) + \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{K}_{ei}(W_j, a_i) d\tau = \text{const} = C_2,$$

zadanie sprowadza się do określenia wartości parametrów masy i tłumienia, przy których zachodzi związek

$$(7.3) \quad E(U_i) = \max F_d(W_j) = \max [P(p_j) R(r_j) Z(z_j)] = \\ = \max P(p_j) R(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_i(W_j, \tau) d\tau = P(p_j) R(r_j) [\max \int_0^{\tau_1} \bar{H}_1(W_j, \tau) d\tau + \\ + \max \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{H}_2(W_j, \tau) d\tau + \dots + \max \int_{\tau_{d-1}}^{\tau_d} \bar{H}_d(W_j, \tau) d\tau].$$

Przy

$$P(p_j) R(r_j) = \text{const} = C_3,$$

zagadnienie sprowadza się do badania

$$(7.4) \quad J = \max \int_0^T \bar{H}(W_j, \tau) d\tau$$

lub, po wydzieleniu funkcji rozwiązującej określającej rzeczywisty przebieg stanu nieustalonego $y_r(W_j, \tau)$ i po wprowadzeniu funkcji programowej $y_p(\tau)$, mamy

$$(7.5) \quad J = \max D \int_0^T [y_p(\tau) - \Delta y(W_j, \tau)] d\tau,$$

przy czym

$$(7.6) \quad y_r(W_j, \tau) = -[y_p(\tau) - y_r(W_j, \tau)] + y_p(\tau) = -\Delta y(\tau) + y_p(\tau),$$

D — charakterystyka stała.

Zamiast szukać maksimum wyrażenia (7.5), wystarczy, przy ustalonym $y_p(\tau)$, określić parametry przy których

$$(7.7) \quad \bar{J} = \min \int_0^T \Delta y(W_j, \tau) d\tau.$$

Niech równanie dla $y_r(\tau)$ ma postać

$$(7.8) \quad \frac{d^2 y_r(\tau)}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dy_r(\tau)}{d\tau} + y_r(\tau) = L,$$

przy czym

$$(7.9) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} y_r(\tau) = L_1, \quad y_r'(\tau = 0) = 0,$$

$$(7.10) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_r(\tau) = L_2.$$

Rozwiązanie równania (7.8) po wykorzystaniu przyjętych warunków początkowych, kolejno dla $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ i $\alpha > 1$, [przy czym $\alpha = \alpha(W_j)$], ma postać

$$(7.11) \quad y_r(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left[(L_1 - L_2) \cos \tau \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \sin \tau \sqrt{1 - \alpha^2} \right] + L_2,$$

$$(7.12) \quad y_r(\tau) = L_2 - (L_2 - L_1) (1 + \tau) e^{-\tau},$$

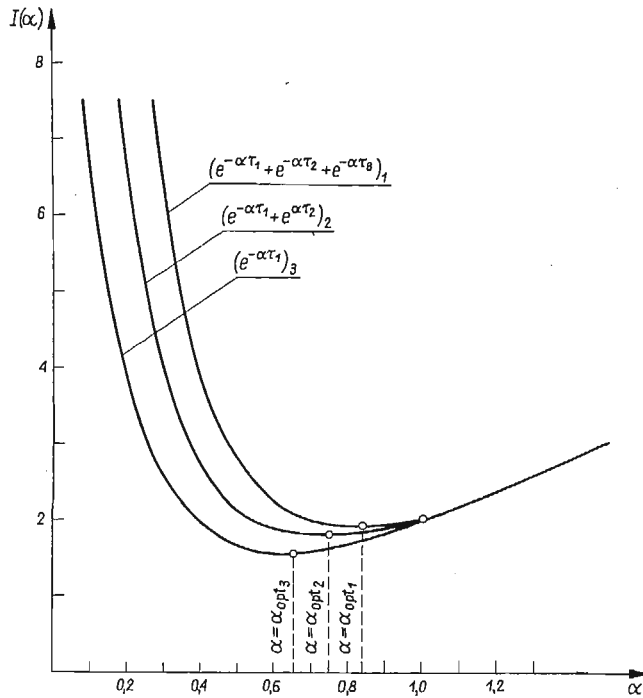
$$(7.13) \quad y_r(\tau) = G_1 e^{k_1 \tau} + G_2 e^{k_2 \tau},$$

gdzie

$$(7.14) \quad k_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

$$(7.15) \quad k_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Wstawiając do wyrażenia (7.7) kolejno rozwiązania (7.11), (7.12) i (7.13) jako funkcje $y_r(\alpha)$ otrzymamy $\bar{J}(\alpha)$, której przebieg pokazany jest na rys. 2. W zależności od ilości



Rys. 2

pulsacji ($\mu = 1, 2, 3$), α_{opt} przemieszcza się w kierunku większych wartości. Dla $\mu = 3$, minimum funkcji $\bar{J}(\alpha = \alpha_{opt})$ wynosi 1,52, przy czym wartość wielkości optyimizowanej wynosi 0,62. Wstawiając wartość α_{opt} do całki (7.7) oraz wracając do wyrażenia (7.3), poprzez związki (7.4) i (7.5), otrzymamy wyrażenie na $\max F(W_j)$.

8. Związki pomiędzy charakterystykami uogólnionymi i klasycznymi charakterystykami układów mechanicznych

Zarówno efekt techniczny, jak i efekt ogólny układu mechanicznego można sprowadzić do charakterystyk używanych przy opisie układów mechanicznych. Dla przykładu, dla układów jednozakresowych, przy $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \dots, \omega_v = 0$ oraz przy założeniu, że charakterystyka główna układu jest znaną funkcją czasu

$$\bar{H}(W_j, \tau) = H(\tau),$$

mamy

$$P(p_j) = 1, \quad R(r_j) = 1, \quad F(W_j) = H(\tau)[\tau_2 - \tau_1]$$

przy czym $\tau_2 - \tau_1$ — czas pracy układu dla jednego włączenia.

Jeśli charakterystyką główną jest moc układu, wtedy efekt techniczny redukuje się do funkcji określającej pracę układu mechanicznego. W rozpatrywanym przykładzie funkcja efektu ogólnego będzie określona jako iloraz pracy układu dla jednego włączenia oraz kosztów związanych z jego eksploatacją.

9. Względne postacie charakterystyk uogólnionych

W niektórych zagadnieniach optyimizacyjnych układów mechanicznych wygodniej jest używać wielkości względnych \bar{F} , \bar{K} , $\bar{\lambda}$ i \bar{S} . Przypadki takie występują w badaniach nad modyfikacją i poprawą charakterystyk układów oraz w badaniach eksploatacyjnych. Wprowadzając pojęcia uogólnionych charakterystyk rzeczywistych (rz) i teoretycznych (t), w odniesieniu do efektu technicznego, funkcji wysiłku, efektu ogólnego i efektu wysiłku, otrzymamy:

$$(9.1) \quad \bar{F}(W_1, W_2, \dots, W_m) = \frac{F^{(rz)}(W_1, W_2, \dots, W_m)}{F^{(t)}(W_1, W_2, \dots, W_m)} = \frac{P^{(rz)}(p_j) R^{(rz)}(r_j) Z^{(rz)}(z_j)}{P^{(t)}(p_j) R^{(t)}(r_j) Z^{(t)}(z_j)},$$

$$(9.2) \quad \bar{K}(W_1, W_2, \dots, W_m, a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{K^{(rz)}(W_j, a_i)}{K^{(t)}(W_j, a_i)} = \frac{K_w^{(rz)}(W_j, a_i) + K_e^{(tz)}(W_j, a_i)}{K_w^{(t)}(W_j, a_i) + K_e^{(tt)}(W_j, a_i)},$$

$$(9.3) \quad \bar{\lambda}(W_1, W_2, \dots, W_m, a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\lambda^{(rz)}(W_j, a_i)}{\lambda^{(t)}(W_j, a_i)} = \frac{F^{(rz)}(W_j) K^{(t)}(W_j, a_i)}{F^{(t)}(W_j) K^{(rz)}(W_j, a_i)},$$

$$(9.4) \quad \bar{S}(W_1, W_2, \dots, W_m, a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{S^{(rz)}(W_j, a_i)}{S^{(t)}(W_j, a_i)} = \frac{F^{(t)}(W_j) K^{(rz)}(W_j, a_i)}{F^{(rz)}(W_j) K^{(t)}(W_j, a_i)}.$$

Przy pełnym eksploatacyjnym wykorzystaniu układu mechanicznego, a więc przy zgodności wartości teoretycznych i rzeczywistych efektów i funkcji wysiłku, mamy:

$$(9.5) \quad \lim_{\substack{F^{(rz)} \rightarrow F^{(t)} \\ K^{(rz)} \rightarrow K^{(t)}}} \lambda(W_j, a_i) = \lim_{\substack{F^{(rz)} \rightarrow F^{(t)} \\ K^{(rz)} \rightarrow K^{(t)}}} \frac{\lambda^{(rz)}(W_j, a_i)}{\lambda^{(t)}(W_j, a_i)} = \\ = \lim_{\substack{F^{(rz)} \rightarrow F^{(t)} \\ K^{(rz)} \rightarrow K^{(t)}}} \frac{\prod_{i=v}^{i=d} (\varrho_i)_{rz}^{\omega_i} R_{rz}(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_{rz}(W_j, a_i) d\tau}{\prod_{i=v}^{i=d} (\varrho_i)_t^{\omega_i} R_t(r_j) \sum_{i=1}^{i=d} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \bar{H}_t(W_j, a_i) d\tau} = \lim_{\substack{F^{(rz)} \rightarrow F^{(t)} \\ K^{(rz)} \rightarrow K^{(t)}}} \frac{F^{(rz)}(W_j) K^{(t)}(W_j, a_i)}{F^{(t)}(W_j) K^{(rz)}(W_j, a_i)} = 1.$$

Przy niepełnym wykorzystaniu układu mechanicznego, mamy:

$$(9.6) \quad \lim_{\substack{F^{(rz)} \rightarrow F^{(t)} \\ K^{(rz)} > K^{(t)}}} \lambda(W_j, a_i) < 1$$

lub

$$(9.7) \quad \lim_{\substack{F^{(rz)} < F^{(t)} \\ K^{(rz)} \rightarrow K^{(t)}}} \lambda(W_j, a_i) < 1$$

10. Wnioski

Wprowadzenie charakterystyk uogólnionych i wykorzystanie ich jako kryteriów optymicznych pozwala na rozszerzenie wpływu wielkości układu na $E(U_i)$ w procesie optymicznym. Zastosowanie $\lambda(W_j, a_i)$ i $S(W_j, a_i)$ lub $\lambda[W_j(X_i), a_i]$ i $S[W_j(X_i), a_i]$ do określania wartości i funkcji optymiczowanych, uogólnia zadania ekstremalizacyjne występujące w syntezie i konstruowaniu. Należy przy tym nadmienić, że wprowadzenie takich charakterystyk do problematyki określania wartości optymalnych wielkości układu w pewnych przypadkach może rozszerzyć aparat matematyczny. Jednak wykorzystanie maszyn matematycznych do rozwiązywania konkretnych technicznych zadań optymicznych pozwoli na złagodzenie tej wady.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KULIKOWSKI, *Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej*, PWN, Warszawa, 1965 r.
2. R. STANISZEWSKI, *Wyznaczania optymalnej serii oraz badania wpływu zmian wielkości na efektywność produkowanych silników spalinowych przy pomocy charakterystyk uogólnionych*, Siln. Spal., 1/70.
3. R. STANISZEWSKI, *Problemy ekstremalizacyjne w syntezie i projektowaniu układów dynamicznych*. Materiały konferencji «Dynamika konstrukcji», Łańcut 1968 r.

Резюме

ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ СИНТЕЗЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе приводятся теории построения обобщенных характеристик используемых в дальнейшем в качестве оптимизационных критериев при определении оптимальных значений параметров. В качестве предмета рассмотрения принята механическая система в общем смысле — в отношении геометрии, веса структуры и происходящих физических явлений. Выведены зависимости на технический эффект и функции затрат. Общий эффект определен как отношение технического эффекта к функции затрат. Величина обратная общему эффекту является тн. обобщенной эффективностью затрат. Выведены основные уравнения оптимизации и приводятся общие выводы относительно приведенного вида обобщенных характеристик. Приводится пример иллюстрирующий применение обобщенных характеристик для оптимизации параметров в вопросах относящихся к динамике механических систем. Приводится также пример использования обобщенных характеристик для исследования целесообразности изменения значений отдельных параметров.

Summary

OPTIMIZATION PROBLEMS IN SYNTHESIS OF MECHANICAL SYSTEMS

The theories of construction of generalized characteristics are described in the paper, and their utilization as optimizing criterions is demonstrated. The object of investigations is assumed to be a mechanical system in a general sense — with respect to geometric, structural and loading properties and physical

phenomena occurring in the systems. The relations concerning the technological effect and effort functions are derived. The general effect is defined as the ratio of the technological effect to the effort function. The reciprocal of the general effect is the so-called effort effect. The fundamental optimization equations are derived and general conclusions concerning the forms of generalized characteristics are drawn. An example illustrating the application of generalized characteristics to the optimization of parameters in dynamical problems of mechanical systems is given. Another example of the application of generalized characteristics to the investigation of the purposefulness of the parameter changes concludes the paper.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 kwietnia 1970 r. — po raz drugi 6 maja 1970 r.

O STATECZNOŚCI NASYPÓW I SKARP W STANIE RÓWNOWAGI GRANICZNEJ¹⁾

RYSZARD JERZY I Z B I C K I (WROCLAW)

1. Wprowadzenie

W pracy rozważa się symetryczne, ciężkie masywy gruntowe o skończonej wysokości, obciążone na górnej poziomej powierzchni stałym naprężeniem normalnym (rys. 1 i 2). Przyjęto, że ośrodek znajduje się w stanie równowagi granicznej, której naruszenie spowoduje zsuwanie się ośrodka w dół. Zadanie polega na wyznaczeniu stanu naprężenia wewnątrz masywu i określeniu profilu zbocza wolnego od obciążeń zewnętrznych. W szczególnym przypadku, gdy profil zbocza ma w punkcie O pionową styczną, ciśnienie wzdłuż górnej krawędzi można rozpatrywać jako oddziaływanie pewnej warstwy ośrodka, w której występuje stan sprężysty (por. [1]).

SOKOŁOWSKI [2] rozpatrywał symetryczne, ciężkie masywy gruntowe, w których górne części ograniczone prostymi lub łukami parabol znajdują się w stanie sprężystym, a dolne o nieznanym profilu zbocza znajdują się w stanie granicznym. Pole naprężeń w części sprężystej dane jest w postaci prostych wzorów analitycznych. W części plastycznej pole naprężeń i profil brzegu swobodnego znajdujemy rozwiązując numerycznie odpowiednie różniczkowe równania charakterystyk.

Grunt traktuje się jako ciało sztywno-idealnie plastyczne, jednorodne i izotropowe. Zgodnie z przyjętym modelem gruntu parametry hipotezy Coulomba–Mohra, kąt tarcia wewnętrznego φ i kohezja k są stałe w całym rozpatrywanym obszarze. Przyjęto płaski stan odkształcenia. Układ równań równowagi granicznej otrzymany z równań równowagi wewnętrznej i warunku plastyczności Coulomba–Mohra jest typu hiperbolicznego (por. np. [1]) i rozwiązuje się go metodą charakterystyk. W większości przypadków podanie ścisłego rozwiązania analitycznego jest jednakże niemożliwe. Dlatego najczęściej trzeba się uciekać do metod przybliżonych: numerycznej metody różnic skończonych [1] lub metody graficznej [3]. Metody te dają przybliżoną wartość szukanej funkcji dla przyjętych jednych wartości parametrów występujących w równaniach stanu granicznego.

W pracy [4] SPENCER zaproponował metodę perturbacji po aproksymowanych (wyjściowych) charakterystykach, pozwalającą otrzymać przybliżone wyrażenie analityczne

¹⁾ Pracę wykonano podczas stażu naukowego odbywanego przez autora w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie w roku 1968/69, pod kierunkiem doc. dra Z. Mroza.

dla szukanej funkcji, przy założeniu, że jako dostatecznie mały można potraktować parametr $a\gamma/k$, gdzie γ jest ciężarem objętościowym ośrodka, a jest liniowym wymiarem deformowanego obszaru. Metodę perturbacji dla ośrodka Treski i płaskiego stanu odkształcenia stosowano w pracach [5, 6 i 7], a w pracy [8] dla stanu osiowej symetrii. W pracy [9] metodę perturbacji dostosowano do ośrodka typu Coulomba w stanie osiowej symetrii.

W niniejszej pracy zastosowano metodę Spencera do wyznaczenia stanu naprężenia w górnych obszarach deformacji skarpy i określenia przybliżonego kształtu zbocza.

2. Równania płaskiego stanu odkształcenia

Równania równowagi wewnętrznej mają postać

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0,$$

gdzie σ_x , σ_y , τ_{xy} są składowymi naprężeniami, X i Y są składowymi siłami ciężkości na jednostkę objętości odpowiednio wzdłuż osi układu współrzędnych x , y . Poszukiwany stan naprężenia musi spełniać, oprócz równań (2.1), warunek plastyczności Coulomba-Mohra

$$(2.2) \quad \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi + \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = k \cos \varphi,$$

gdzie k jest kohezją, tzn. wytrzymałością materiału na ścinanie przy naprężeniu normalnym $\sigma = 0$, φ jest kątem tarcia wewnętrznego.

Składowe granicznego stanu naprężenia można wyrazić związkami

$$(2.3) \quad \sigma_x = -p + q \cos 2\eta, \quad \sigma_y = -p - q \cos 2\eta, \quad \tau_{xy} = q \sin 2\eta,$$

gdzie

$$(2.4) \quad p = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad q = \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),$$

$$\operatorname{tg} 2\eta = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y), \quad 0 \leq \eta \leq \pi.$$

Graniczny stan naprężenia reprezentowany jest przez dwa niezależne parametry p i η .

Podstawiając (2.3) do (2.1), otrzymamy układ równań typu hiperbolicznego, którego charakterystyki α i β są określone odpowiednio przez równania

$$(2.5) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Phi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\Phi + \frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

gdzie $\Phi = \eta - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

Jeżeli $\partial/\partial s_\alpha$ i $\partial/\partial s_\beta$ oznacza różniczkowanie wzdłuż α i β — linii, wtedy związki wzdłuż charakterystyk mają postać

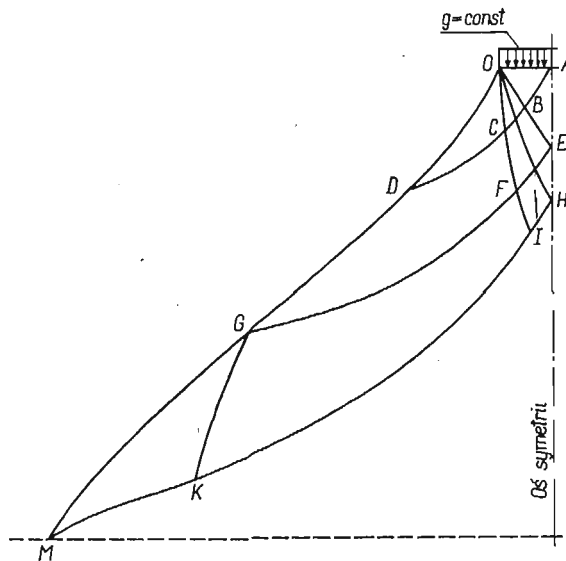
$$(2.6) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_\alpha} - X \cos(\Phi + \varphi) - Y \sin(\Phi + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial s_\beta} - 2q \frac{\partial \Phi}{\partial s_\beta} + X \sin \Phi - Y \cos \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Z warunków plastyczności (2.2) po podstawieniu (2.4) otrzymamy

$$(2.7) \quad q = p \sin \varphi + k \cos \varphi.$$

3. Schemat zadania

Na rys. 1 przedstawiono schematycznie układ obszarów plastycznych w przypadku nasypu o małych wymiarach korony w porównaniu z wysokością. Wychodząc z brzegu OA wyznaczamy stan naprężenia kolejno w obszarach OAB i OBC , a następnie znając

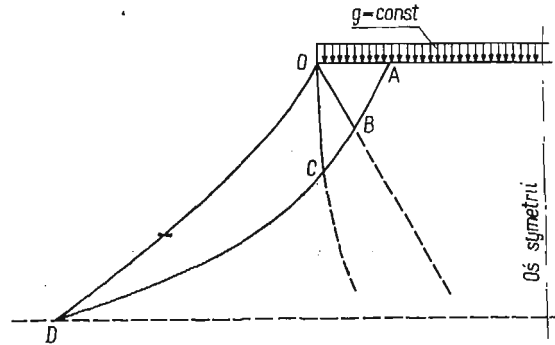


Rys. 1

przebieg linii OC określamy kształt brzegu swobodnego OD i stan naprężenia w OCD . Łatwo jest przedłużyć siatkę charakterystyk do obszaru ograniczonego linią EFG . Dalej postępujemy w sposób podobny do podanego przez BISHOPA [10]. Przedłużenie siatki charakterystyk, ograniczonej skrajną linią EFG rozpoczynamy od rozwiązania zagadnienia mieszanego, określonego znanymi wielkościami wzdłuż linii EFG i warunkiem symetrii na osi HA . Sformułowane zagadnienie mieszane określa jednoznacznie stan naprężenia w obszarze $EFGKIH$. Następnie należy rozwiązać zagadnienie odwrotne do zagadnienia brzegowego Cauchy'ego. Znając mianowicie przebieg linii GK wyznaczamy kształt brzegu swobodnego GM . Obszar na zewnątrz linii $HIKM$ jest sztywny. Przedstawiona siatka

charakterystyk ma charakter podobny do układu podanego przez EWINGA i HILLA [11] dla rozciąganej pręta z korbami.

W dalszych częściach pracy ograniczono się do podania przybliżonego rozwiązania zagadnienia w obszarze $OABCD$. Problem przedłużenia rozwiązania do linii $HIKM$ może stanowić treść oddzielnej pracy. Wydaje się, że problem ten może być rozwiązany w sposób podobny do podanego przez EWINGA w pracy [12].



Rys. 2

W przypadku nasypów o szerokiej koronie (rys. 2) lub skarp, kiedy ośrodek w jednym kierunku poziomym rozciąga się nieograniczenie, rozwiązanie budujemy w obszarze $OABCD$. Przedłużenie siatki charakterystyk jest możliwe do wykonania w sposób podobny do opisanego powyżej, w przypadku, kiedy materiał podłoża nie jest słabszy od materiału z którego zbudowany jest nasyp.

4. Warunki brzegowe

Dalsze rozważania ograniczamy do rozpatrzenia problemu przedstawionego schematycznie na rys. 3. Poszukujemy kształtu zbocza ograniczonego poziomą półosią $x \geq 0$ i obciążonego naprężeniem normalnym $\sigma_y = -g = \text{const}$ wzdłuż tej półosi. Profil zbocza $x < 0$ jest wolny od obciążeń zewnętrznych.

Jeżeli normalną i styczną składową naprężenia na zboczu oznaczmy przez σ_n i τ_{nt} , a przez λ oznaczmy kąt między styczną do zbocza w danym punkcie i osią x , wtedy można podać następujące wzory

$$(4.1) \quad \sigma_n = -p + q \sin[2(\Phi - \lambda) + \varphi], \quad \tau_{nt} = q \cos[2(\Phi - \lambda) + \varphi].$$

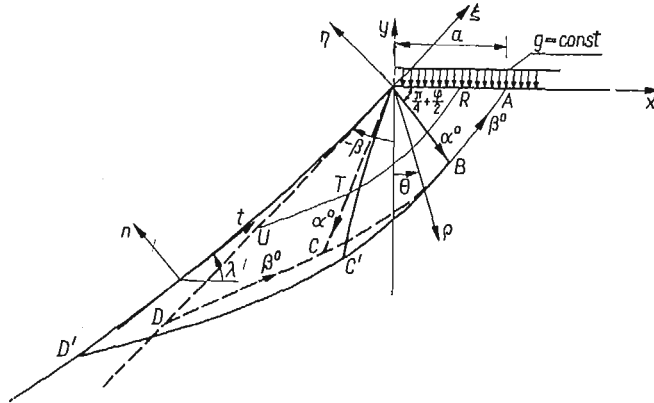
Z warunku $\sigma_n = \tau_{nt} = 0$, na zboczu otrzymamy

$$(4.2) \quad p = q = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi = \lambda - \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{\varphi}{2} \right) \text{ na } OD'.$$

Warunek $\sigma_y = -g$ i $\tau_{xy} = 0$ wzdłuż półosi $x \geq 0$ prowadzi do

$$(4.3) \quad p = \frac{g - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad q = \frac{g \sin \varphi + k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \text{ na } OA.$$

Jeżeli pominiemy wpływ sił ciężkości, wtedy wzory (4.3) będą także rozwiązaniem równań stanu granicznego w całym obszarze OAB .



Rys. 3

Stan naprężenia w obszarze OAB jest niezależny od współrzędnej x i daje się opisać następującymi równaniami:

$$(4.4) \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \gamma = 0,$$

gdzie γ jest ciężarem objętościowym ośrodka. Po scałkowaniu (4.4) i wyznaczeniu stałych z warunków brzegowych (4.3), w obszarze OAB otrzymamy

$$(4.5) \quad p = \frac{g - \gamma_y - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad q = \frac{(g - \gamma_y) \sin \varphi + k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

5. Równania metody perturbacji

Rozwiązania równań (2.6) i (2.7) poszukujemy w postaci szeregów potęgowych względem parametru ε :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} p &= p^0 + \varepsilon p' + \varepsilon^2 p'' + \dots, \\ q &= q^0 + \varepsilon q' + \varepsilon^2 q'' + \dots, \\ \Phi &= \Phi^0 + \varepsilon \Phi' + \varepsilon^2 \Phi'' + \dots, \end{aligned}$$

gdzie ε jest wielkością rzędu $a\gamma/k$ (a jest liniowym wymiarem deformowanego obszaru), a układ p^0, q^0 i Φ^0 jest rozwiązaniem analitycznym odpowiedniego problemu, kiedy wpływ sił ciężkości pomija się (rozwiązanie wyjściowe). Wyrazy p', q', Φ' i rzędów wyższych są rozwiązaniem liniowych równań perturbacyjnych odpowiedniej klasy.

Zmiennymi niezależnymi są długości łuku dwóch krzywych

$$(5.2) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Phi^0, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\Phi^0 + \frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

przyjętych jako układ współrzędnych, które są także α^0 i β^0 — charakterystyką rozwiązania wyjściowego. Jeżeli $\partial/\partial s_\alpha^0$ i $\partial/\partial s_\beta^0$ oznacza różniczkowanie wzdłuż wyjściowych α^0 i β^0 — linii, to

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\alpha} &= \cos(\varphi - \Phi + \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} + \sin(\Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\beta^0}, \\ \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\beta} &= -\sin(\Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} + \cos(\varphi + \Phi - \Phi^0) \frac{\partial}{\partial s_\beta^0}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (5.1) do (2.6) i (2.7) i mając na uwadze (5.3), otrzymamy te związki w postaci szeregów potęgowych względem ε . Przyrównując do zera wyrazy niezależne od ε , otrzymamy równania zerowej perturbacji

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p^0}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} &= 0, \quad \cos \varphi \frac{\partial p^0}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} = 0, \\ q^0 &= p^0 \sin \varphi + k \cos \varphi. \end{aligned}$$

Rozwiązanie (5.4) z (5.2) prowadzi do wartości wyjściowych.

Przyrównując do zera wyrazy rzędu ε , otrzymamy równania pierwszej perturbacji

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + 2q' \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} + \Phi' \left(\frac{\partial p^0}{\partial s_\beta^0} + \frac{2q^0}{\cos \varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} \right) + \varepsilon^{-1} \gamma \sin(\Phi^0 + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} - 2q' \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\beta^0} - \Phi' \left(\frac{\partial p^0}{\partial s_\alpha^0} - \frac{2q^0}{\cos \varphi} \frac{\partial \Phi^0}{\partial s_\alpha^0} \right) + \varepsilon^{-1} \gamma \cos \Phi^0 &= 0, \\ q' &= p' \sin \varphi. \end{aligned}$$

W rozwiązaniu ograniczonym do pierwszej perturbacji, równanie profilu zbrocza we współrzędnych η , ξ (rys. 3) ma postać

$$(5.6) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \varepsilon \Phi',$$

a z (4.2), (4.3), (4.5) i (5.1), jako warunki brzegowe dla zerowej i pierwszej perturbacji otrzymamy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} p^0 &= \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = \beta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad p' = 0 \quad \text{na } OD', \\ p^0 &= \frac{g - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad p' = -\varepsilon^{-1} \frac{\gamma \gamma}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi' = 0 \quad \text{na } OB. \end{aligned}$$

6. Rozwiązanie równań perturbacyjnych

6.1. Rozwiązanie wyjściowe. Układ charakterystyk rozwiązania wyjściowego przedstawiają linie przerywane na rys. 3. Zerowe pole naprężeń określają formuły w OAB

$$(6.1) \quad p^0 = \frac{g - k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad q^0 = \frac{g \sin \varphi + k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2};$$

w obszarze OBC

$$(6.2) \quad \begin{aligned} p^0 &= \frac{g+k \operatorname{ctg} \varphi}{1+\sin \varphi} \exp \left\{ \left(2\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \operatorname{tg} \varphi \right\} - k \operatorname{ctg} \varphi, \\ q^0 &= \frac{g \sin \varphi + k \cos \varphi}{1+\sin \varphi} \exp \left\{ \left(2\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \operatorname{tg} \varphi \right\}, \\ \Phi^0 &= \theta - \frac{\pi}{2}, \quad \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}; \end{aligned}$$

obszarze OCD

$$(6.3) \quad p^0 = q^0 = \frac{k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \Phi^0 = \beta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

gdzie ϱ , θ jest układem współrzędnych biegunowych ze środkiem w punkcie O , a kąt β określony jest wzorem

$$(6.4) \quad -\beta = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \ln \left[\left(\frac{g+k \operatorname{ctg} \varphi}{k \operatorname{ctg} \varphi} \right) \frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi} \right].$$

Profil zbocza stanowi prosta OD nachylna do osi x pod kątem $\left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$.

Ciągłe pole naprężeń powinno spełniać warunek $\beta \leq 0$, wtedy z (6.4) otrzymamy, że obciążenie zewnętrzne g musi spełniać nierówność

$$(6.5) \quad g \geq \frac{2k \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

nakładającą znane ograniczenie na rozwiązanie zagadnienia równowagi granicznej [1]. Zauważmy jeszcze, że w obszarze OBC charakterystyki β^0 są spiralami logarytmicznymi; równanie linii ST ma postać

$$(6.6) \quad \varrho = \varrho_0 \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \theta \right) \operatorname{tg} \varphi \right\},$$

gdzie $OS = \varrho_0$ oraz $\varrho_0 = \varrho_1 \exp(\beta \operatorname{tg} \varphi)$, $\varrho_1 = OT$.

6.2. Rozwiązanie równań pierwszej perturbacji. W obszarze $OC'D'$ zmiennymi niezależnymi jest układ współrzędnych s_α^0 , s_β^0 oparty na charakterystykach wyjściowych z osiami skierowanymi zgodnie z kierunkami α^0 i β^0 — linii. Mamy następujące związki między układami współrzędnych

$$(6.7) \quad s_\alpha^0 = \frac{\xi}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} - \frac{\eta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}, \quad s_\beta^0 = \frac{\xi}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} + \frac{\eta}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

W obszarze OBC zmiennymi niezależnymi jest układ współrzędnych biegunowych ϱ , θ . Wtedy mamy

$$(6.8) \quad \frac{\partial}{\partial s_\alpha^0} = \frac{\partial}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta^0} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} \quad \text{w } OBC'.$$

Równania pierwszej perturbacji (5.5), dla poszczególnych obszarów są następujące:
w OBC'

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial \varrho} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial \varrho} + \frac{4}{\varrho} q^0 \Phi' - \varepsilon^{-1} \gamma \cos(\theta + \varphi) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial \theta} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} - 2p' \sin \varphi + \varepsilon^{-1} \gamma \varrho \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} &= 0; \end{aligned}$$

w obszarze $OC'D'$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\alpha^0} + 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\alpha^0} + \varepsilon^{-1} \gamma \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) &= 0, \\ \cos \varphi \frac{\partial p'}{\partial s_\beta^0} - 2q^0 \frac{\partial \Phi'}{\partial s_\beta^0} + \varepsilon^{-1} \gamma \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie q^0 dane są odpowiednio przez wzory (6.2)₂ i (6.3)₁.

Po scałkowaniu kolejno równań (6.9)₂ i (6.9)₁ i po wyznaczeniu nieznanymi funkcji całkowania z warunków (5.7), w obszarze OBC' otrzymamy

$$(6.11) \quad \begin{aligned} p' &= \frac{3}{4} \varepsilon^{-1} \gamma \varrho \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\cos(\theta + \varphi)}{3 \cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp\left\{ \left(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) 3 \operatorname{tg} \varphi \right\} \right\}, \\ \Phi' &= -\frac{\cos \varphi}{8q^0} \varepsilon^{-1} \gamma \varrho \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \theta + \cos \theta}{1 + 8 \sin^2 \varphi} - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \varphi} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp\left\{ \left(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) 3 \operatorname{tg} \varphi \right\} \right\}. \end{aligned}$$

W obszarze $OC'D'$ po scałkowaniu (6.10), mamy

$$(6.12) \quad \begin{aligned} p' &= -\frac{1}{2 \cos \varphi} \left\{ \varepsilon^{-1} \gamma \left[s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + s_\beta^0 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right] - F(s_\beta^0) - G(s_\alpha^0) \right\}, \\ \Phi' &= -\frac{1}{4q^0} \left\{ \varepsilon^{-1} \gamma \left[s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - s_\beta^0 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right] - F(s_\beta^0) + G(s_\alpha^0) \right\}, \end{aligned}$$

stąd, wobec $p' = 0$, dla $s_\alpha^0 = -s_\beta^0$ otrzymujemy

$$(6.13) \quad F(s_\beta^0) = -G(-s_\beta^0) + \varepsilon^{-1} \gamma s_\beta^0 \left[\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

oraz

$$(6.14) \quad \begin{aligned} p' &= -\frac{1}{2\cos\varphi} \left\{ \varepsilon^{-1}\gamma(s_\alpha^0 + s_\beta^0) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + G(-s_\beta^0) - G(s_\alpha^0) \right\}, \\ \Phi' &= -\frac{1}{4q^0} \left\{ \varepsilon^{-1}\gamma \left[s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - s_\beta^0 \left(2\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right) \right] + G(-s_\beta^0) + G(s_\alpha^0) \right\}. \end{aligned}$$

Funkcję G wyznaczamy z warunku ciągłości $p^0 + \varepsilon p'$ i $\Phi^0 + \varepsilon \Phi'$ na linii OC' , której równanie rzędu ε ma postać

$$(6.15) \quad \frac{\varrho_1 d\theta}{d\varrho_1} = \varepsilon \Phi',$$

gdzie Φ' jest określone przez (6.11)₂. Biorąc pod uwagę, że $\theta = \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ dla $\varrho_1 = 0$, z (6.15) otrzymamy

$$(6.16) \quad \theta = \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\cos\varphi}{8q^0} \gamma \varrho_1 \left\{ \left[\frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} - \frac{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} - \frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg}\varphi) \right\}.$$

Na linii OC' , w klasie ε , mamy także $s_\alpha^0 = \varrho_1$. Wykorzystując teraz (6.2), (6.3), (6.11), (6.14) i (6.16), z warunku ciągłości p i Φ na OC' znajdujemy

$$(6.17) \quad G(s_\alpha^0) = - \varepsilon^{-1}\gamma s_\alpha^0 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon^{-1}\gamma s_\alpha^0 \cos\varphi \left\{ \left[\frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} - \frac{\cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} \right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} - \frac{3\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + 8\sin^2\varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg}\varphi) \right\}.$$

Wobec (6.17), w obszarze $OC'D'$ ostatecznie otrzymujemy

$$(6.18) \quad p' = \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \gamma (s_\alpha^0 + s_\beta^0) \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) \right\},$$

$$\Phi' = \frac{\cos \varphi}{4q^0} \varepsilon^{-1} \gamma (s_\beta^0 - s_\alpha^0) \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} - \frac{\cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \right\} \times$$

$$\times \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) + \frac{1}{2q^0} \varepsilon^{-1} \gamma s_\beta^0 \left[\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left(\beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

gdzie $q^0 = k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$.

Wzór na Φ' dla punktów położonych na zboczu OD' można otrzymać całkując bezpośrednio równania (6.9)₂ i (6.10)₂ wzdłuż wyjściowej linii STU . Mianowicie, po scałkowaniu otrzymamy

$$(6.19) \quad \exp(2\beta \operatorname{tg} \varphi) \left(p'_s - \frac{2q_s^0}{\cos \varphi} \Phi'_s \right) - \left(p'_T - \frac{2q_T^0}{\cos \varphi} \Phi'_T \right) -$$

$$- \varepsilon^{-1} \gamma \varrho_0 \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \exp(2\beta \operatorname{tg} \varphi) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} \gamma \varrho_1 \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} = 0$$

oraz

$$(6.20) \quad \left(p'_T - \frac{2q_T^0}{\cos \varphi} \Phi'_T \right) - \left(p'_U - \frac{2q_U^0}{\cos \varphi} \Phi'_U \right) + \varepsilon^{-1} \gamma \varrho_1 \frac{\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} = 0.$$

Eliminując z (6.19) i (6.20) wyrażenie $\left(p'_r - \frac{2q_r^0}{\cos \varphi} \Phi'_r\right)$ i wykorzystując brzegowe wartości (5.7) na p' i Φ' , dla zbocza otrzymamy

$$(6.21) \quad \Phi'_U = \frac{\cos \varphi}{2q_U^0} \varepsilon^{-1} \gamma s_\beta^0 \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) \right\}.$$

7. Przybliżony wzór na kształt zbocza

W rozwiązaniu ograniczonym do pierwszej perturbacji, na zboczu OD' mamy $s_\alpha^0 = -s_\beta^0$ oraz $\eta = 0$. Po podstawieniu (6.18)₂ lub (6.21) do (5.6) i po scałkowaniu otrzymamy następujący wzór na kształt zbocza

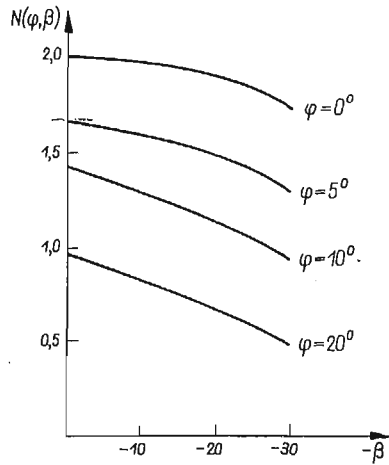
$$(7.1) \quad \eta = \frac{1}{8k} \gamma \xi^2 N(\varphi, \beta),$$

gdzie

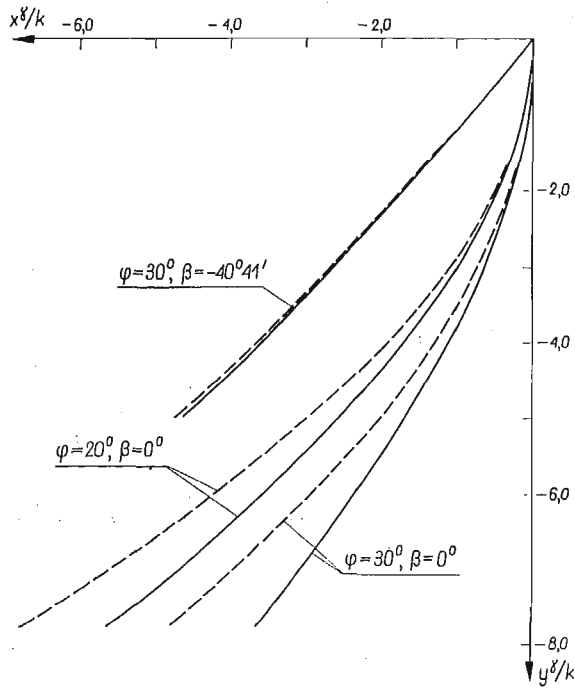
$$(7.2) \quad N(\varphi, \beta) = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \left\{ \left[\frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} + \frac{\sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} \right] + \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \varphi} - \frac{3 \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + 8 \sin^2 \varphi} \right] \exp(3\beta \operatorname{tg} \varphi) \right\}.$$

O charakterze funkcji $N(\varphi, \beta)$ informuje rys. 4, na którym przedstawiono wykresy zależności N od β dla $\varphi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$. Można stwierdzić, że przy wzroście obciążenia zewnętrznego g (kąt β maleje) wpływ ciężaru własnego ośrodka na kształt zbocza maleje.

Dla $-\beta \cong \frac{\pi}{2} - \varphi$ ($\varphi \leq 20^\circ$), $N = 0$ i profil zbocza stanowi prosta nachylona do osi x pod kątem równym w przybliżeniu kątowi tarcia wewnętrznego φ . Kształt zbocza jest więc w tym przypadku taki sam, jak w rozwiązaniu wyjściowym, kiedy pomija się wpływ sił ciężkości.



Rys. 4



Rys. 5

W przypadku, gdy kąt $\beta = 0$, tzn. gdy profil zbocza ma w punkcie O pionową styczną, obciążenie zewnętrzne g jest wtedy równe wartości $2k \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$ i można rozpatrywać je jako oddziaływanie warstwy ośrodka o wysokości $H = 2k \cos \varphi / \gamma (1 - \sin \varphi)$, w któ-

rej występuje stan sprężysty (por. [1]). Z (7.1) otrzymamy następujący wzór na kształt zbocza

$$(7.3) \quad \eta = \frac{1}{4k} \gamma \xi^2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{4} \right).$$

Na rys. 5, w układzie osi zmiennych bezwymiarowych $x' = \frac{\gamma x}{k}$ i $y' = \frac{\gamma y}{k}$, wykreślono kształt zbocza dla $\varphi = 20^\circ$ i 30° oraz $\beta = 0$, a także dla przypadku $\varphi = 30^\circ$ i $\beta = -40^\circ 41'$; linie przerywane odpowiadają rozwiązaniu perturbacyjnemu, linie ciągłe rozwiązaniom numerycznym podanym w pracach [1] i [13]. Dokładność otrzymanego rozwiązania perturbacyjnego (7.1) maleje ze wzrostem wysokości zbocza oraz wartości kąta tarcia φ , rośnie ze wzrostem obciążenia g .

8. Wnioski

Porównanie wyników rozwiązania perturbacyjnego i numerycznego pozwala stwierdzić, że wyprowadzony wzór na kształt zbocza może być zastosowany w inżynierskich obliczeniach stateczności skarp.

Podana przez SPENCERA metoda perturbacji powinna znaleźć szersze zastosowanie przy obliczaniu zadań nośności granicznej. Pozwala ona w sposób stosunkowo nieskomplikowany matematycznie znaleźć przybliżone rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego, a uzyskiwana dokładność rozwiązania jest wystarczająca z inżynierskiego punktu widzenia (por. [4, 5, 6, 7]).

Pracę należy traktować jako etap wstępny na drodze uzyskania kompletnych rozwiązań masywów gruntowych w stanie równowagi granicznej.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich* (przekł. z ros.), PWN, Warszawa 1958.
2. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Некоторые формы равнопорочных массивов*, *Механика Твёрдого Тела*, № 2 (1968), 44–51.
3. G. de JOSSELIEN de JONG, *Statics and kinematics in the failable zone of a granular material*, Delft 1959.
4. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity—III. Plane strain of ideal soil and plastic solids with body forces*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 10 (1962), 165–178.
5. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity—I. Plane strain of non-homogeneous plastic solids*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 9 (1961), 279–288.
6. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity—II. Plane strain of slightly irregular bodies*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 10 (1962), 17–27.
7. E. A. MARSHALL, *Rolling contact with plastic deformation*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 16 (1968), 243–254.
8. A. J. M. SPENCER, *The approximate solution of certain problems of axially-symmetric plastic flow*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 12 (1964), 231–244.
9. R. J. IZBICKI, *Zastosowanie metody perturbacji do analizy plastycznego płynięcia ośrodka typu Coulomba w stanie osiowej symetrii*, *Rozpr. Inżyn.*, 18 (1970).
10. J. W. F. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2 (1953), 43–53.

11. D. J. F. EWING, R. HILL, *The plastic constraint of V-notched tension bars*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 115-124.
12. D. J. F. EWING, *A series-method for constructing plastic slipline fields*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 105-114.
13. А. И. Говядинов, С. В. Фалькович, *Устойчивость откосов при предельном состоянии равновесия*, Инженерный сборник, 14 (1953), 3-30.

Р е з ю м е

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НАСЫПЕЙ И ОТКОСОВ В СОСТОЯНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

В работе рассматриваются симметричные массивные грунтовые сооружения нагруженные на верхней горизонтальной поверхности постоянным нормальным напряжением. Принимается, что среда находится в состоянии предельного равновесия.

Задача об определении напряженного состояния внутри сооружения и формы ската свободного от внешних напряжений решена для верхних областей деформации сооружения с помощью предложенного А. М. Спенсером метода возмущений.

На основе сравнения решения полученного с помощью метода возмущения с численным решением установлено, что выведенная приближенная формула на форму ската может применяться для инженерных расчетов устойчивости откосов.

S u m m a r y

ON THE STABILITY OF THE EMBANKMENTS AND SLOPES IN THE STATE OF LIMIT EQUILIBRIUM

A symmetric heavy soil mass loaded on its upper horizontal surface by a uniform normal load (Figs. 1 and 2) is considered in the paper. The medium is assumed to be in the state of limit equilibrium.

The problem of determination of the stress state within the mass and of the shape of the stress-free slope was solved for the upper region of the mass with the aid of the perturbation method proposed by SPENCER [4].

Comparison of the presented solution and the numerical solution yields the conclusion that the derived approximate formula for the form of the slope can be used in engineering calculations concerning the stability of slopes.

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1970 r.

O PEWNEJ MOŻLIWOŚCI DOWODU TWIERDZEŃ O STABILNOŚCI
I NIESTABILNOŚCI RUCHU OKRESOWEGO

WŁODZIMIERZ GA WR O Ń S K I (GDAŃSK)

Ważniejsze oznaczenia

Ω funkcja następstwa,
 $[t_a, t_b]$ przedział domknięty,

$$\text{colon } (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ macierz kolumnowa,}$$

E_n n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa,

\in symbol przynależności elementu do zbioru,

$\rho(x)$ norma wektora x ,

$\rho(x', x'') = \rho(x' - x'')$ wzajemna odległość punktów x' i x'' ,

$K[x_0, r]$ kula domknięta o środku x_0 i promieniu r

L hiperpowierzchnia bez styku w przestrzeni E_n (podprzestrzeń E_n).

W pracy podano nową metodę dowodu twierdzeń dotyczących stabilności i niestabilności ruchu okresowego. Dowód przeprowadzono wykorzystując twierdzenie o odwzorowaniu zwężającym Banacha.

Celem pracy jest wskazanie nowych możliwości wynikających z zastosowania metod analizy funkcjonalnej w teorii układów dynamicznych. Niektóre możliwości wykorzystania twierdzenia o odwzorowaniu zwężającym Banacha w tym dziale mechaniki wskazał HOLTZMAN [1].

Do badania układów nieliniowych, w szczególności o charakterystykach odcinkowo liniowych, stosowana jest metoda odwzorowań punktowych Poincaré-Andronowa [2].

Przeanalizujemy układ, którego stan dynamiczny opisany jest współrzędnymi x_1, x_2, \dots, x_n . Współrzędne te określają wektor x , nazywany wektorem fazowym układu.

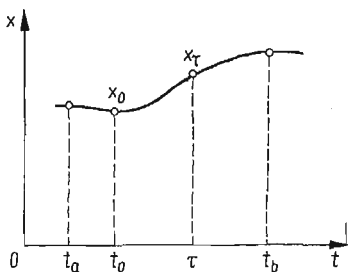
Przyjmujemy następujące określenie ([3], s. 19): wektorem fazowym układu nazywamy każdy wektor $x = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ o następujących własnościach:

1) składowe $x_i(t)$ charakteryzują stan dynamiczny układu w chwili t ,

2) dla danego wymuszenia $u(t)$ każdy stan początkowy $x(t_0) = x_0$ w sposób jednoznaczny wyznacza wartości $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ dla wszystkich t , przy czym spełnione są rów-

ności: $x(t, \tau, x_\tau) = x(t, t_0, x_0)$ jeżeli $x_\tau = x(\tau, t_0, x_0)$ dla wszystkich t, τ i t_0 z przedziału $[t_a, t_b]$ (rys. 1).

Równania różniczkowe określone w tym przedziale spełniają warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań. Współrzędne $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, nazywamy współrzędnymi fa-

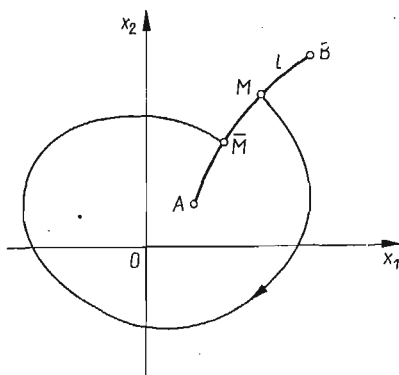


Rys. 1

zowymi układu. W przypadku $n = 2$ współrzędne x_1 i x_2 wyznaczają płaszczyznę fazową (rys. 2).

Niech dany będzie na płaszczyźnie fazowej łuk bez styku [4]. Pod pojęciem *łuk bez styku* rozumiemy gładką krzywą l , gdy:

1. Na krzywej l nie ma ani jednego punktu osobliwego.
2. Ani w jednym punkcie krzywa nie ma styku.



Rys. 2

Sformułowanie *łuk nie ma styku w punkcie M* oznacza, że trajektoria przechodząca przez punkt M nie jest styczna do łuku l .

Trajektoria wychodząca z punktu M łuku bez styku l (rys. 2) przecina łuk l w punkcie \bar{M} (w przypadku gdy nie przecina łuku l , mówimy, że punkt M nie ma następnego na tym łuku). Położenie punktu M na łuku l możemy jednoznacznie określić za pomocą jednej zmiennej niezależnej s (zmienną tą może być np. odległość M od końca łuku A),

Trajektoria fazowa wyznacza wzajemną zależność między punktami M i \bar{M} łuku bez styku, gdyż przez każdy punkt nieosobliwy płaszczyzny fazowej przechodzi tylko jedna trajektoria. Zależność tę zapiszemy w postaci

$$(1) \quad \bar{M} = TM,$$

przy czym T jest odwzorowaniem punktu M w \bar{M} .

Jeżeli istnieje punkt M^* na łuku l taki, że

$$M^* = TM^*,$$

to ruch opisywany przez trajektorię przechodzącą przez punkt M^* jest okresowy (punkty M i \bar{M} pokrywają się).

W postaci analitycznej zależność (1) zapisujemy następująco

$$\bar{s} = \Omega(s).$$

Funkcję $\Omega(s)$ nazywamy funkcją następstwa ([4], s. 90, [5], s. 641).

W przypadku ruchu okresowego mamy

$$s^* = \Omega(s^*).$$

Jest to warunek konieczny i dostateczny okresowości ruchu.

Można wykazać [6], że warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności ruchu okresowego jest

$$\left| \left(\frac{d\Omega}{ds} \right)_{s=s^*} \right| < 1.$$

Odwrotnie, gdy

$$\left| \left(\frac{d\Omega}{ds} \right)_{s=s^*} \right| > 1,$$

cykl jest niestabilny.

Zakładamy, że stan dynamiczny układu całkowicie i jednoznacznie opisuje n współrzędnych stanu. Współrzędne te wyznaczają przestrzeń fazową n -wymiarową E_n . Analogicznie do pojęcia łuku bez styku na płaszczyźnie fazowej przyjmujemy określenie hiperpowierzchni bez styku L w przestrzeni fazowej E_n . Jest to gładka powierzchnia, $n-1$ wymiarowa, na której nie ma ani jednego punktu osobliwego i w żadnym punkcie powierzchnia ta nie ma styku.

Niech dany będzie na hiperpowierzchni bez styku L , w przestrzeni E_n , punkt M_0 . Współrzędne tego punktu wyznaczają wektor fazowy $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$. Niech trajektoria fazowa wychodząca z tego punktu «przebiega» hiperpowierzchnię bez styku L w punkcie następnym M_1 , następnie w punkcie M_2 itd. Otrzymujemy ciąg punktów

$$(2) \quad M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots,$$

przy czym każdy następny punkt ciągu (2) wyznaczony jest poprzez poprzedzający go zależnością

$$\bar{M} = TM.$$

Kreską u góry oznaczono punkt następny po M , T jest symbolem odwzorowania punktu M w punkt \bar{M} .

Zależność między współrzędnymi punktów M i \bar{M} określa relacja

$$(3) \quad \bar{s} = \Omega(s),$$

$$\bar{s} = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{n-1}\}, \quad s = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby ruch wyżej zdefiniowanego układu był okresowy, jest istnienie takiego punktu s^* , że

$$(4) \quad s^* = \Omega(s^*), \quad s^* = \{s_1^*, s_2^*, \dots, s_{n-1}^*\}.$$

Dla określenia stabilności punktu stałego odwzorowania M^* o współrzędnych $s^* = \{s_1^*, s_2^*, \dots, s_{n-1}^*\}$ rozpatrzmy ciągi punktów M w obszarze bliskim punktowi stałego odwzorowania M^* . W ciągu (2) każdy punkt następny wyznaczony jest poprzez poprzedzający za pomocą funkcji następstwa (3).

Definicja 1. Punkt stałego odwzorowania M^* jest stabilny, jeżeli istnieje takie otoczenie tego punktu

$$(5) \quad \varrho(s, s^*) \leq \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

że wszystkie ciągi (2) z wyrazem początkowym M_0 należącym do otoczenia (5) są zbieżne do granicy M^* .

Definicja 2. Punkt stałego odwzorowania M^* jest niestabilny, jeżeli w dowolnie małym otoczeniu tego punktu

$$(6) \quad \varrho(s, s^*) \leq \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0$$

znajdzie się choćby jeden ciąg (2) z wyrazem początkowym należącym do obszaru (6), który nie jest zbieżny do granicy M^* .

Przy założeniu, że istnieją pochodne funkcji następstwa w otoczeniu punktu M^* , zbudujemy macierz A

$$(7) \quad A = [a_{ik}],$$

gdzie

$$(8) \quad a_{ik} = \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial s_k} \right)_{s=s^*}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n-1;$$

a więc mamy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \Omega_1}{\partial s_{n-1}} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \Omega_2}{\partial s_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Omega_{n-2}}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_{n-2}}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \Omega_{n-2}}{\partial s_{n-1}} \\ \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial s_1} & \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \end{bmatrix}_{s=s^*}.$$

Twierdzenie 1 [2]. Punkt s^* spełniający równość (4) jest stabilny w sensie Def. 1 jeżeli moduły pierwiastków wielomianu charakterystycznego λ_i macierzy A są mniejsze od jedności

$$(9) \quad |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, \dots, |\lambda_{n-1}| < 1.$$

Dowód. Konieczność. Weźmy jako otoczenie punktu s kulę domkniętą K_1

$$K_1 = K[s^*, \varepsilon_1].$$

W myśl podanej definicji punkt s^* jest stabilny, jeżeli odwzorowanie (3) na obszarze K_1 jest odwzorowaniem zwężającym ([7], s. 54), przy czym na mocy twierdzenia Banacha ([7], s. 54) w obszarze tym znajduje się tylko jeden punkt stałego odwzorowania.

Odwzorowanie (3) określone na obszarze metrycznym K_1 nazywamy zaś zwężającym, jeżeli są spełnione warunki

$$(10) \quad \bar{s} = \Omega(s); \quad \bar{s} \in K_1$$

i dla dowolnych s', s'' należących do obszaru K_1 spełniona jest nierówność

$$(11) \quad \varrho(s', \bar{s}'') \leq \alpha \varrho(s', s''),$$

gdzie

$$0 < \alpha < 1.$$

Przyjmując w związku (11) $s'' = s^*$ oraz oznaczając $s' = s$, otrzymujemy

$$\varrho(\bar{s}, s^*) \leq \alpha \varrho(s, s^*),$$

lecz

$$\varrho(\bar{s}, s^*) = \varrho(\bar{s} - s^*) = \varrho(\Delta \bar{s}),$$

$$\varrho(s, s^*) = \varrho(s - s^*) = \varrho(\Delta s),$$

a więc mamy

$$(12) \quad \varrho(\Delta \bar{s}) \leq \alpha \varrho(\Delta s),$$

gdzie

$$\Delta \bar{s} = \bar{s} - s^*, \quad \Delta s = s - s^*, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Założyliśmy, że na obszarze K_1 funkcja (3) jest ciągła i różniczkowalna, rozwijamy więc ją w punkcie s^* w szereg Taylora. Otrzymujemy

$$(13) \quad \bar{s} = s^* + A(s - s^*) + r.$$

Zgodnie z wyżej przyjętymi oznaczeniami związek (13) przyjmie postać

$$\Delta \bar{s} = A \Delta s + r,$$

gdzie $\Delta \bar{s} = \text{colon} (\Delta \bar{s}_1, \Delta \bar{s}_2, \dots, \Delta \bar{s}_{n-1})$, $\Delta s = \text{colon} (\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_{n-1})$, A — macierz kwadratowa rzędu $n-1$ liniowych współczynników, r — składowe rzędu drugiego i wyższych rzędów rozkładu (3) w szereg Taylora. Jeżeli otoczenie K_1 jest dostatecznie małe, wówczas $r \approx 0$ i wobec tego mamy

$$(14) \quad \Delta \bar{s} = A \Delta s,$$

gdzie macierz A zdefiniowana jest związkami (7) i (8).

Z (12) i (14) otrzymujemy

$$(15) \quad \varrho(A \Delta s) \leq \alpha \varrho(\Delta s).$$

Przyjmując za bazę podprzestrzeni L $n-1$ niezależnych wektorów własnych $\Delta s^{(i)}$, wektor Δs przedstawimy w postaci

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta s^{(i)},$$

gdzie b_i są składowymi wektora Δs .

Mamy stąd

$$\begin{aligned} \varrho(A\Delta s) &= \varrho\left(A \sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta s^{(i)}\right) = \varrho\left(\sum_{i=1}^{n-1} A b_i \Delta s^{(i)}\right) = \varrho\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i \lambda_i \Delta s^{(i)}\right) \leq \\ &\leq \max_i |\lambda_i| \varrho\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i \Delta s^{(i)}\right) = \max_i |\lambda_i| \varrho(\Delta s), \end{aligned}$$

gdzie λ_i — i -ta wartość własna macierzy A , czyli

$$(16) \quad \varrho(A\Delta s) \leq \max_i |\lambda_i| \varrho(\Delta s).$$

Z porównania (15) i (16) otrzymujemy, że warunek stabilności (16) jest spełniony, jeżeli wartości bezwzględne wszystkich pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy A są mniejsze od jedności.

Dostateczność. Załóżmy wbrew tezie, że jest spełniona zależność (9) i układ jest niestabilny. Ponieważ zachodzi (9), więc nierówność (16) słuszną dla każdego odwzorowania ciągłego zapiszemy w postaci

$$(17) \quad \varrho(A\Delta s) \leq \beta \varrho(\Delta s); \quad 0 < \beta < 1.$$

Związek (17) oznacza, że odwzorowanie (3) na obszarze K_1 jest odwzorowaniem zwięzającym, a punkt s^* jest stabilnym punktem tego odwzorowania.

Twierdzenie 2 [2]. Punkt s^* spełniający równość (4) jest niestabilny w sensie Def. 2, jeżeli moduł któregoś z pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy A jest większy od jedności

$$(18) \quad |\lambda_1| > 1 \quad \text{lub} \quad |\lambda_2| > 1, \dots, \quad \text{lub} \quad |\lambda_{n-1}| > 1.$$

Dowód. Konieczność. W myśl Def. 2 punkt s^* jest niestabilny, jeżeli odwzorowanie (3) nie jest odwzorowaniem zwięzającym, tj. jeżeli w zależności (15) $\alpha > 1$.

Dla odwzorowania (3) słuszny jest związek (16), dla dostatecznie małego otoczenia punktu s^* . Z porównania (15) i (16) wnioskujemy, że aby odwzorowanie nie było zwięzające, to $\max_i |\lambda_i| > 1$.

Dostateczność. Załóżmy wbrew tezie, że zachodzi (18) i układ jest stabilny. Z (18) wynika jednakże, że zależność (16) jest spełniona i dla takich Δs , że

$$(19) \quad \varrho(\Delta s) < \varrho(A\Delta s).$$

Z (15) i (19) otrzymujemy, że

$$\varrho(\Delta s) < \varrho(A\Delta s) \leq \alpha \varrho(\Delta s),$$

a więc $\alpha > 1$.

Istnieje więc takie otoczenie punktu s^*

$$K_2 = K[s^*, \varepsilon_2],$$

że odwzorowanie (3) na obszarze K_2 nie jest odwzorowaniem zwężającym [nie spełnione są warunki (10) i (11)], a więc punkt s^* jest niestabilny.

W przypadku występowania pierwiastków równania charakterystycznego, moduł których jest równy jedności. Twierdzenia 1 i 2 nie określają stabilności i niestabilności ruchu okresowego. Jest to przypadek krytyczny.

Literatura cytowana w tekście

1. J. M. HOLTZMAN, *Contraction maps and equivalent linearization*, The Bell System Technical Journal, 46, Nr 10 1967, 2405–2435, (tłum. ros. Механика, Сд. Пер. No 3/115 (1969).
2. Ю. И. Неймарк, *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*, Киев 1963, Труды МСНК, Т. 2, стр. 268–307.
3. Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Москва 1968.
4. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, и др., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Москва 1966.
5. N. MINORSKI, *Drgania nieliniowe*, Warszawa 1967.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э., Хайкин, *Теория колебаний*, Москва 1959.
7. А. М. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функции и функционального анализа*, Москва 1954.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

В работе дано новое доказательство теорем об устойчивости и неустойчивости периодических движений нелинейных систем. Рассматривается последовательность точек на гиперповерхности без контакта в n -мерном фазовом пространстве. Сходимость и расходимость этой последовательности исследована с помощью принципа сжатых отображений Банаха.

Summary

ON A CERTAIN POSSIBILITY OF PROVING THE PERIODIC MOTION STABILITY AND INSTABILITY THEOREMS

A new proof of stability and instability of the periodic motion of a non-linear system is given in the paper. A sequence of points lying on the hypersurface in the n -dimensional phase space is considered. Convergence and divergence of the sequence is analyzed, the Banach contraction operator theorem being used.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 stycznia 1970 r.

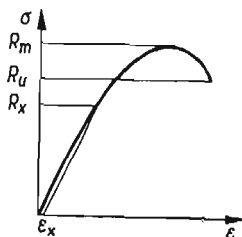
WYRAŻNA GRANICA PLASTYCZNOŚCI METALI W UJĘCIU TEORII ATMOSFER COTTRELLA

LUDOMIR KALINOWSKI, JERZY LINKOWSKI (WARSZAWA)

W artykule podane są podstawowe zagadnienia z zakresu teorii atmosfer Cottrella w zastosowaniu do wyraźnej granicy plastyczności w metalach. Artykuł ma na celu wprowadzenie czytelnika w podstawy teorii granicy plastyczności ujętej z punktu widzenia klasycznej teorii dyslokacji.

1. Wyrażna granica plastyczności w świetle faktów doświadczalnych

Jedną z najczęściej stosowanych mechanicznych prób badania materiałów jest próba rozciągania, której wynik charakteryzuje wykres przedstawiający naprężenie umowne σ w funkcji wydłużenia względnego ε . Jak wiadomo, naprężenie umowne określa się wzorem $\sigma = F/S_0$, gdzie F jest aktualną siłą, S_0 zaś początkowym przekrojem próbki, natomiast

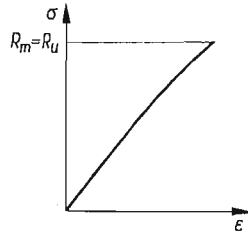


Rys. 1. Wykres rozciągania metalu plastycznego nie wykazującego wyraźnej granicy plastyczności

$\varepsilon = \Delta l/l_0$, gdzie Δl jest przyrostem długości, a l_0 początkową długością pomiarową próbki. Dla większości metali wykres taki wygląda, jak na rys. 1, gdzie zaznaczone są pewne charakterystyczne wielkości, mianowicie $R_m = F_m/S_0$ oznacza wytrzymałość na rozciąganie odpowiadającą największej sile obciążającej F_m uzyskanej w czasie przeprowadzania próby i podzielonej przez przekrój początkowy, R_u jest naprężeniem rozrywającym równym stosunkowi odpowiedniej siły F_u do S_0 . W przypadku metali wyraźnie kruchych $R_m = R_u$ (patrz rys. 2). Wielkość R_x (rys. 1) oznacza tzw. naprężenie graniczne przy określonym umownym wydłużeniu trwałym, które przyjmuje się zależnie od okoliczności w granicach 0,001—0,5% początkowej długości pomiarowej. Jest ono podstawą do określenia

tw. umownej granicy plastyczności $R_{0,2}$, która odpowiada umownemu wydłużeniu trwa-
 łemu 0,2%. W przypadku większości materiałów granica plastyczności może być określona
 tylko w sposób umowny.

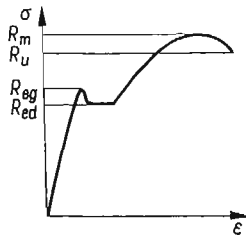
W niektórych metalach i stopach występuje znane od dawna zjawisko *wyraźnej* lub
 inaczej *naturalnej* granicy plastyczności. Mimo iż zjawisko to jest bardzo często obserwo-



Rys. 2. Wykres rozciągania materiału kruchego

wane w praktyce, jego mechanizm nie jest dotychczas jednoznacznie wyjaśniony i do dzisiaj
 stanowi temat wielu rozważań teoretycznych.

Schemat wykresu rozciągania materiału wykazującego wyraźną granicę plastyczności
 podany jest na rys. 3. Widzimy tu wyraźnie zaznaczające się naprężenia R_{ed} i R_{eg} , które
 nazywamy odpowiednio dolną oraz górną granicą plastyczności. Ich stosunek i wielkość
 zależy nie tylko od rodzaju i stanu badanego materiału, ale również od takich czynników,



Rys. 3. Wykres rozciągania metalu wykazującego wyraźną granicę plastyczności

jak prędkość rozciągania, temperatura czy sztywność maszyny zastosowanej do próby.
 W krańcowym przypadku wartości obu naprężeń mogą się zrównać. Poziomy fragment
 wykresu odpowiada równomiernemu wydłużaniu się próbki bez wzrostu naprężeń i okreś-
 lany jest czasem jako *plynięcie materiału*.

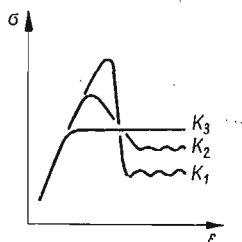
Wymienione zjawisko wyraźnej granicy plastyczności występuje w niektórych metalach
 często stosowanych w technice. Należy tu wymienić przede wszystkim żelazo techniczne
 oraz miękką stal i jest — jak się wydaje — związane w tym przypadku z obecnością ato-
 mów azotu i węgla w międzywęzłowych pozycjach struktury krystalicznej. Zostało ono
 również stwierdzone w polikrystalicznym molibdenie zawierającym domieszkę azotu,
 monokrystalicznym kadmie (również zawierającym azot), w pewnych przypadkach w mono-
 krystalicznym cynku, następnie zaś w pojedynczych kryształach mosiądzu β . Wyraźną
 granicę plastyczności stwierdzono również w niektórych stopach aluminium [1, 2], było

ono też obserwowane w mosiądzu α [3]. Okazało się wreszcie, że wyraźna granica plastyczności może występować w bardzo czystym krzemie [4].

W najbardziej charakterystyczny sposób granica plastyczności ujawnia się w stalach niskowęglowych i w żelazie technicznym. Po osiągnięciu naprężenia odpowiadającego granicy plastyczności, na powierzchni próbki pojawiają się delikatne pasma przebiegające zwykle pod kątem 45° do kierunku działania siły. W miarę wzrostu wydłużenia przy naprężeniu R_{ed} (poziomy zakres krzywej) zwiększa się ilość pasm, które w końcu, gdy naprężenie zacznie już wzrastać, pokrywają całą powierzchnię próbki siatką krzyżujących się linii.

Linie te po raz pierwszy opisane przez francuskiego uczonego PIOBERTA¹⁾, obserwowali następnie Polak RZESZOTARSKI²⁾, niemiecki uczoney LÜDERS i znany metalurg rosyjski CZERNOW³⁾. Pasma te znane są w literaturze pod nazwą pasm Lüdersa, a ostatnio coraz częściej określane są jako pasma Pioberta—Lüdersa.

Do prób rozciągania stosowane są maszyny różnych typów [5]. Zakładając określoną szybkość odkształcenia można stwierdzić, że zależnie od typu maszyny, a przede wszystkim jej sztywności, otrzymuje się dla danego materiału różne wartości górnej i dolnej granicy plastyczności, jak też różne wartości wydłużenia odpowiadającego wyraźnej granicy plastyczności. Im większa sztywność maszyny, tym w zasadzie wyższa będzie górna granica plastyczności danego materiału, a zarazem niższa jego dolna granica plastyczności, przy czym ze wzrostem sztywności maleje wielkość wydłużenia odpowiadającego wyraźnej granicy plastyczności. Istotną rolę odgrywa w tym przypadku również kształt i wielkość próbki. Wymienione efekty zależą oczywiście od szybkości odkształcenia, którą zresztą w maszynach nowego typu można regulować w szerokim zakresie. Wpływ sztywności maszyny (według MIKŁOWITZA [6]) przedstawiony jest na rys. 4.



Rys. 4. Fragment wykresu rozciągania charakteryzujący wpływ sztywności maszyny K na granicę plastyczności ($K_1 > K_2 > K_3$)

Na podstawie licznych doświadczeń zostało stwierdzone, że granica plastyczności stali zależy w dużym stopniu od temperatury i wzrasta znacznie w niskich temperaturach. Dla przykładu można podać, że według YOKOBORI'EGO [7] granica plastyczności stali w temperaturze ciepłego powietrza wzrasta prawie czterokrotnie w stosunku do wartości w temperaturze pokojowej.

¹⁾ Guillaume Piobert (1793–1871) matematyk francuski, od r. 1840 członek Akademii Francuskiej.

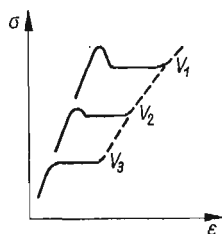
²⁾ Alfons Rzeszotarski (1847–1904), polski uczoney metalurg działający w Petersburgu.

³⁾ D. K. Czernow (1839–1921), metalurg rosyjski zajmujący się przemianami fazowymi i teorią obróbki cieplnej.

Jak wspomniano, również szybkość odkształcania ma duży wpływ na wartość granicy plastyczności. Okazało się, że zarówno górna jak i dolna granica plastyczności wzrasta wyraźnie wraz z szybkością odkształcania i na przykład według WINLOCKA [8] przy wzroście szybkości odkształcania od $0,002$ do $4,4 \text{ min}^{-1}$ granica plastyczności stali wzrasta mniej więcej dwukrotnie.

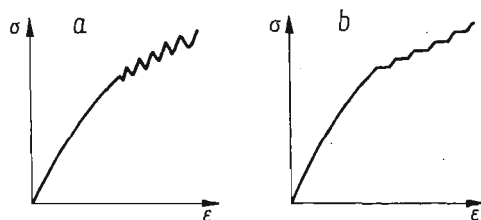
Charakter wykresu przedstawiającego naturalną granicę plastyczności zmienia się więc z szybkością odkształcania. Zależność ta dla stali zawierającej 1% Si, według MIKLOWITZA, podana jest na rys. 5.

W zjawisku naturalnej granicy plastyczności bardzo istotne jest to, że występujące płynięcie materiału pojawia się przy danym naprężeniu dopiero po pewnym czasie, który



Rys. 5. Fragment wykresu rozciągania charakteryzujący wpływ prędkości przeprowadzanej próby na granicę plastyczności ($V_1 > V_2 > V_3$)

można uważać za czas zarodkowania pasm Pioberta—Lüdersa. Jeżeli więc wstrzyma się rozciąganie przy odpowiednim naprężeniu, kiedy jeszcze nie wystąpiła wyraźna granica plastyczności, to po upływie pewnego czasu, jeśli próbka pozostaje pod działaniem stałego obciążenia, pojawia się charakterystyczne płynięcie. Ten czas zarodkowania zależy,



Rys. 6. Nietypowe przypadki wykresów rozciągania metali a) o charakterze zębatym, b) o charakterze schodkowym

dla danego materiału, od wartości naprężenia i temperatury. Oczywiście wymienione zjawisko można zauważyć jedynie po przekroczeniu odpowiedniego naprężenia, zależnego zresztą również od temperatury.

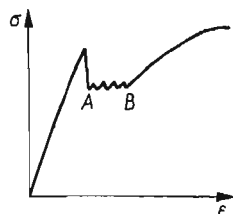
W pewnych warunkach niektóre materiały dają krzywe rozciągania odznaczające się początkowo gładkim przebiegiem, po którym pojawia się przebieg zębaty, jak na rys. 6a. Ten rodzaj krzywych występuje w określonym zakresie szybkości odkształcania i temperatury. Obserwowany był już przez LE CHATELIERA w miękkiej stali w zakresie $80\text{--}250^\circ\text{C}$ i w stopie $\text{Al} + 4,8\% \text{ Cu}$ w temperaturze pokojowej, lecz później MANJOINE [9] stwierdził,

że np. w miękkiej stali w temperaturze 200°C zębaty charakter krzywej rozciągania występuje jedynie przy szybkości odkształcania zawierającej się między $8,5 \cdot 10^{-4}$ a $2 \cdot 10^{-2} \text{ sek}^{-1}$. Wymienione zjawisko było obserwowane również w takich materiałach, jak duraluminium, mosiądz jednofazowy czy nikiel. W niektórych przypadkach otrzymano również krzywe rozciągania o charakterze schodkowym (rys. 6b). Przypuszcza się, że krzywe tego typu mają ścisły związek ze zjawiskiem wyraźnej granicy plastyczności, chociaż w pewnych przypadkach kształt krzywych może w dużym stopniu zależeć od rodzaju i szywności maszyny.

Przedstawione tu w dużym skrócie zjawiska związane z występowaniem w niektórych materiałach wyraźnej granicy plastyczności stanowiły od dawna przedmiot badań doświadczalnych oraz były bodźcem do tworzenia odpowiednich hipotez i teorii, dzięki którym możliwe byłoby powiązanie w logiczną całość zebranego materiału doświadczalnego.

2. Dawniejsze teorie wyraźnej granicy plastyczności

Na podstawie obserwacji wykresu rozciągania nasuwa się myśl, że wyraźna granica plastyczności jest wynikiem istnienia pewnych barier (przeszkód) w strukturze materiału, które w pierwszym okresie przeciwdziałają plastycznym odkształceniom materiału. Dopiero po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości naprężeń następuje przełamanie barier i materiał wykazuje wyraźne odkształcenia plastyczne. Bariery te mogą być różnie rozumiane, zależnie od pojęć jakie wprowadzono w różnych teoriach. Zatem mogą to być



Rys. 7. Wykres rozciągania krysztalu Cu w temperaturze 4,2°K, podczas którego wystąpiło bliźniakowanie (fragment AB)

dosłownie pojęte bariery w postaci wydzieleni fazowych otaczających, np. krystality materiału, wydzieleni drobnodispersyjnych, np. w płaszczyznach poślizgu, czy wreszcie bariery w sensie energetycznym, których pokonanie prowadzi np. do wyzwolenia się dyslokacji z atmosfery obcych atomów lub też powoduje odkształcenia wywołane tworzeniem się krysztalów bliźniaczych.

Potwierdzeniem tej ogólnej zasady może być wykres rozciągania monokrysztalu miedzi w niskiej temperaturze przedstawiony na rys. 7, na podstawie pracy [10]. W tym przypadku przy pewnym krytycznym naprężeniu następuje odkształcenie drogą tworzenia się bliźniaków deformacyjnych, stąd też wykres rozciągania jest podobny do wykresów rozciągania takich materiałów wykazujących naturalną granicę plastyczności, jak np. miękka stal (rys. 3).

Jedną z pierwszych teorii wyraźnej granicy plastyczności jest teoria błonek (membran), którą opracowali KÖSTER i DAWIDENKOW. Według tej teorii granice ziarn w materiale polikrystalicznym, jakim jest żelazo czy miękka stal, są otoczone cienkimi błonkami cementytu. Podczas odkształcenia próbki, gdy naprężenie osiągnie górną granicę plastyczności, błonki takie pękają i naprężenie spada do poziomu dolnej granicy plastyczności. Błonka cementytu jest więc zgodnie z tą teorią elementem umacniającym materiał. Potwierdzeniem tej teorii jest brak granicy plastyczności w próbce powtórnie rozciąganej. Trzeba jednak dodać, że po pewnym czasie, zależnym od temperatury, wyraźna granica plastyczności może się znów pojawić, co znowu, według wielu autorów, świadczy przeciw teorii membran, gdyż regeneracja błonek cementytu w stali uważana jest za zjawisko mało prawdopodobne lub wręcz niemożliwe.

Inną teorią dawniej sformułowaną jest teoria wydzielen, która została wprowadzona w 1943 roku przez EDWARDSA, PHILLIPSA i LIU przyjmujących, że wyraźna granica plastyczności jest spowodowana występowaniem submikroskopowych wydzielen w płaszczyznach poślizgu. Wydzielenia takie działając jako przeszkody mogą hamować ruch dyslokacji, natomiast gwałtowne przejście dyslokacji przez przeszkody, przy pewnym krytycznym naprężeniu, byłoby powodem pojawienia się wyraźnej granicy plastyczności.

Tworzenie się wydzielen w płaszczyznach poślizgu jest zgodne również ze zjawiskiem występowania wyraźnej granicy plastyczności w niektórych materiałach poddanych starzeniu.

Teoria wydzielen nie została jednak dotychczas szczegółowo opracowana.

3. Teoria atmosfer Cottrella-Bilby'ego

Według COTTRELLA, atomy niektórych pierwiastków występujących w metalach np. jako zanieczyszczenia, mogą gromadzić się przy dyslokacjach tworząc tzw. atmosfery. Atmosfery takie mogą być w pewnych przypadkach utworzone z defektów punktowych, takich jak wakanse.

Przypuśćmy, że średnie stężenie obcych atomów mogących utworzyć atmosferę przy dyslokacji wynosi c_0 . W takim razie stężenie tych atomów w atmosferze według COTTRELLA wynosi

$$(3.1) \quad c = c_0 e^{U/kT},$$

gdzie U jest energią oddziaływania obcego atomu z dyslokacją.

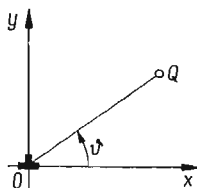
Poruszająca się dyslokacja może oderwać się od atmosfery pod warunkiem, że jej prędkość będzie większa od pewnej prędkości krytycznej wyrażonej następującym wzorem

$$(3.2) \quad v = \frac{4D}{l},$$

gdzie D jest współczynnikiem dyfuzji obcego atomu w danym środowisku, l — średnim promieniem atmosfery. Wzory te dotyczą tzw. atmosfer maxwellovskich.

Przechodząc do przykładu żelaza zanieczyszczonego nieznacznie domieszką węgla, można obliczyć minimalną temperaturę, od której możemy uważać atmosferę obcych atomów jako atmosferę maxwellovską. Dla oceny tej temperatury potrzebna jest znajo-

mość zarówno energii aktywacji U , jak i stężeń c oraz c_0 . W pierwszym przybliżeniu energię U można przyjąć jako równą energii aktywacji dyfuzji, która według [11] dla atomów węgla w żelazie α wynosi 84 200 J/mol oraz według [12] dla atomów azotu w żelazie α 78 000 J/mol. Jeżeli średnie względne stężenie atomowe atomów węgla w żelazie α wynosi $c_0 = 10^{-4}$ oraz maksymalne jakie możemy w tym przypadku założyć $c = 1$, to ze wzoru (3.1) otrzymujemy wartość temperatury dla atomów węgla $T = 1100^\circ\text{K}$ oraz dla atomów azotu $T = 1010^\circ\text{K}$. Poniżej tych temperatur odpowiednie atmosfery nie są już atmosferami maxwellowskimi. Niektórzy autorzy [13] przyjmują wartość $U = 47\,000$ J/mol dla atomów węgla w żelazie α , co daje wartość krytycznej temperatury istnienia atmosfer maxwellowskich równą 700°K . Wobec tego atmosfery atomów węgla (ewentualnie azotu) blokujące



Rys. 8. Schemat do wyjaśnienia oddziaływania dyslokacji krawędziowej na obcy atom znajdujący się w punkcie Q

dyslokacje w żelazie nie są atmosferami maxwellowskimi i dlatego nie mogą być stosowane do nich wzory (3.1) i (3.2). Należy więc przyjąć, że atmosfery tworzące się przy dyslokacjach w żelazie α są innego typu i składają się z atomów (węgla lub azotu) tworzących rodzaj łańcuchów. Atmosfery takie noszą nazwę atmosfer skondensowanych.

Rozważmy obecnie oddziaływanie dyslokacji krawędziowej (patrz rys. 8) znajdującej się w punkcie 0 na obcy atom w punkcie Q .

Jak wiadomo z teorii sprężystości, wokół dyslokacji krawędziowej występuje pole naprężeń, które można opisać następująco

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\vartheta &= -\frac{B \sin \vartheta}{r}, \\ \tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta r} &= \frac{B \cos \vartheta}{r}, \\ \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\vartheta) &= -\frac{2\nu B \sin \vartheta}{r}, \end{aligned}$$

gdzie σ_r , σ_ϑ i σ_z oznaczają odpowiednie naprężenia normalne (oś z jest prostopadła do płaszczyzny rysunku), $\tau_{r\vartheta}$ i $\tau_{\vartheta r}$ — odpowiednie naprężenia styczne oraz B współczynnik określany jako

$$B = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)},$$

przy czym ν oznacza stałą Poissona, a b moduł wektora Burgersa [14].

Naprężenie hydrostatyczne pola naprężeń wyraża się ogólnie wzorem

$$(3.4) \quad p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\vartheta + \sigma_z),$$

co w przypadku rozważanej dyslokacji krawędziowej daje

$$(3.5) \quad p = \frac{Gb}{3\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\sin \vartheta}{r}.$$

Przypuśćmy, że obcy atom znajdujący się w punkcie Q ma symetrię kulistą. Jeżeli pod wpływem działających naprężeń umowny promień atomowy ϱ tego atomu uległ zmianie i wynosi ϱ' , to względny przyrost promienia atomowego można określić jako $\varepsilon = (\varrho' - \varrho)/\varrho$. Wobec tego można przyjąć, że zmiana objętości tego atomu jest równa $\Delta V = 3V\varepsilon$. Jeżeli nastąpiło zmniejszenie objętości, to $\Delta V = -\frac{4}{3}\pi\varrho^3\varepsilon = -4\pi\varrho^3\varepsilon$. Energia związana ze zmianą objętości wynosi $U = -p\Delta V$, co daje w rozpatrywanym przypadku

$$(3.6) \quad U = \frac{4}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{Gb\varrho^3\varepsilon \sin \vartheta}{r}.$$

We wzorze tym uwzględniona jest tylko energia sprężysta środowiska otaczającego dany obcy atom.

BILBY podał dokładniejszą ocenę energii oddziaływania pola dyslokacji na obcy atom, uwzględniając dodatkowo energię sprężystą samego atomu przy założeniu, że jego własności sprężyste nie różnią się od własności środowiska. Otrzymał on wzór

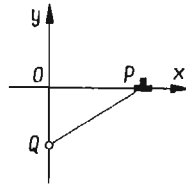
$$(3.7) \quad U = 4Gb\varrho^3\varepsilon \frac{\sin \vartheta}{r}.$$

Na podstawie tej zależności można zgodnie z ogólnymi zasadami wyrazić siłę radialną F_r i styczną (prostopadłą do radialnej) F_ϑ jako $F_r = -\partial U/\partial r$ oraz $F_\vartheta = (-1/r)(\partial U/\partial \vartheta)$. Stąd po uwzględnieniu wzoru (3.7) mamy

$$(3.8) \quad F_r = A \frac{\sin \vartheta}{r^2}, \quad F_\vartheta = -A \frac{\cos \vartheta}{r^2},$$

gdzie $A = 4Gb\varrho^3\varepsilon$.

Jak łatwo sprawdzić, siła wypadkowa wynosi $F = A/r^2$, trzeba jednak wyraźnie podkreślić, że dane pole nie jest polem centralnym i kierunek siły wypadkowej F nie przechodzi przez punkt 0.



Rys. 9. Oddziaływanie obcego atomu znajdującego się w punkcie Q na dyslokację krawędziową poruszającą się zgodnie z osią x

Przypuśćmy, że dana dyslokacja krawędziowa może przemieszczać się w określonej płaszczyźnie (rys. 9). Niech oś x oznacza krawędź przecięcia się tej płaszczyzny z płaszczyzną rysunku, punkt Q zaś jeden z atomów tworzących atmosferę skondensowaną rozciągającą się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku.

Atom atmosfery znajdujący się w punkcie Q działa na dyslokację P zgodnie z wzorami (3.8). Przyjmując dane, jak na rys. 9, można wyrazić rzut siły wymienionego oddziaływania na oś x w sposób następujący

$$(3.9) \quad F_x = \frac{A \sin 2\varphi}{r^2} = \frac{2Ay_1x}{(x^2 + y^2)^2};$$

maksimum tej siły występuje dla $x = y/\sqrt{3}$ i wynosi $F_{x\max} = (3A)/(4y_1^2)$. Wymieniona siła dotyczy oddziaływania jednego atomu znajdującego się w atmosferze z dyslokacją o jednostkowej długości. Przyjmując, że w atmosferze skondensowanej na jeden parametr sieciowy a przypada jeden atom atmosfery, mamy na jednostkę długości $1/a$ atomów. Stąd siła oddziaływania atmosfery na dyslokację może być przyjęta jako $F'_{x\max} = (3A)/(4y_1^2b)$. Płaszczyzna poślizgu jest położona pod kątem 45° w stosunku do siły $F''_{x\max}$ rozciągającej próbkę, więc $F''_{x\max} = (3\sqrt{2}A)/(4y_1^2b)$, stąd naprężenie odpowiadające górnej granicy plastyczności powinno wynosić

$$(3.10) \quad R_e = \frac{A}{y_1^2 b^2}.$$

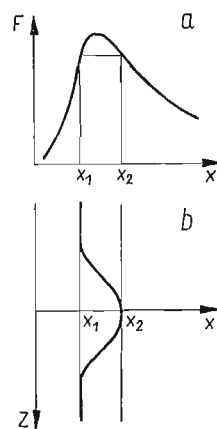
W przypadku żelaza α wartość A wynosi $3 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2$. Przyjmując, że wektor Burgersa \mathbf{b} jest równy najmniejszej odległości międzyatomowej otrzymuje się wartość $R_e = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. Ekstrapolując wartości doświadczalne do 0°K otrzymuje się wartość równą około $1,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Wartość ta jest więc dziesięciokrotnie mniejsza od otrzymanej teoretycznie. Co prawda wartość A , przy dokładniejszym oszacowaniu, jest nieco niższa niż poprzednio podana, pozostaje jednak dalej wyraźna niezgodność między wartością teoretyczną i doświadczalną. Należy więc przypuszczać, że deformacja materiału związana z istnieniem wyraźnej granicy plastyczności jest zapoczątkowana w pewnych tylko miejscach dzięki występowaniu spiętrzenia naprężeń, przy czym, jak wynika z podanych wartości liczbowych, współczynnik spiętrzenia nie przekracza w tym przypadku wartości 10.

Powyżej temperatury 0°K ucieczka dyslokacji od atmosfer jest ułatwiona wskutek fluktuacji cieplnych i pojawienie się wyraźnej granicy plastyczności jest wówczas możliwe pod wpływem działania naprężenia niższego od R_e . Można to wyjaśnić na podstawie następującego schematu. Wróćmy do wyrażenia (3.9) i przedstawmy tę zależność na wykresie (rys. 10a). Maksimum siły F_x odpowiada w tym przypadku granicy plastyczności, oczywiście po przejściu do naprężeń tnących, jak to było podane poprzednio. Przypuśćmy, że dyslokacja jest przesunięta o wielkość x_1 , której odpowiada siła F_{x_1} . Aby pod działaniem tej siły dyslokacja mogła oddalić się od atmosfery, musiałaby zajmować położenie x_2 będące położeniem nietrwałym. Energia potrzebna do przejścia dyslokacji z położenia x_1 w położenie x_2 może być dostarczona przez fluktuacje cieplne występujące w czasie w sposób chaotyczny. Jednak nie cały odcinek linii dyslokacji musi przejść z położenia x_1 w położenie x_2 , aby dyslokacja mogła oderwać się od atmosfery. Wystarczy, że tylko fragment linii dyslokacji znajdzie się poza punktem x_2 (jak to pokazano na rys. 10b). Jeśli fragment linii dyslokacji znajdujący się poza punktem x_2 jest odpowiednio duży, wówczas dyslokacja

będzie przy następnych fluktuacjach cieplnych stopniowo przesuwała się w tym kierunku, aż wreszcie działające naprężenie wystarczy do odsunięcia jej od atmosfery.

Zgodnie z obliczeniem Cottrella i Bilby'ego wartość wyraźnej granicy plastyczności znacznie spada ze wzrostem temperatury i przy przejściu od 0°K do 273°K obniża się mniej więcej dziesięciokrotnie, co zresztą zostało potwierdzone doświadczalnie. Fakt ten można wyjaśnić łatwo istnieniem wąskiej bariery potencjału w pobliżu atmosfery skondensowanej.

Jak powiedziano poprzednio, wyraźna granica plastyczności pojawia się przy niewielkiej zawartości obcych atomów w metalu. Na przykład w żelazie α , występuje ona najwyraźniej przy stosunkowo niewielkiej zawartości węgla i azotu. Przy większej zawartości węgla

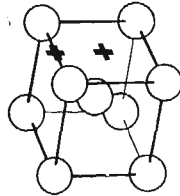


Rys. 10. Schemat wyjaśniający zjawisko oderwania się dyslokacji od atmosfery: a) bariera potencjału, b) położenie fragmentu linii dyslokacji. Oś F prostopadła do płaszczyzny rysunku

w stalach, granica plastyczności staje się mniej ostra i może zaniknąć zupełnie. Zanikanie wyraźnej granicy plastyczności spowodowane jest przez przeszkody takie, jak cementyt czy węgliki utrudniające ruch dyslokacji, który w takich przypadkach może się zwykle odbywać dopiero pod działaniem naprężenia przewyższającego naprężenie potrzebne do oderwania dyslokacji od atmosfery.

Dotychczas rozważany był problem oddziaływania na obcy atom dyslokacji krawędziowej. Oczywiście należy również uwzględnić oddziaływanie dyslokacji śrubowych. Ponieważ jednak w przypadku dyslokacji śrubowej σ_r , σ_θ i σ_z równe są zeru, więc naprężenie hydrostatyczne pola naprężeń jest w tym przypadku też równe zeru i — z grubsza rzecz oceniając — nie powinno być oddziaływania między dyslokacją śrubową i obcym atomem. Rozumowanie takie jest słuszne jednak tylko w tym przypadku, kiedy odkształcenie struktury spowodowane obecnością obcego atomu ma charakter symetryczny, jak np. w przypadku obcego atomu zajmującego geometryczny środek komórki elementarnej struktury $A1$ (regularnej ściennie centrowanej). Jednak atomy międzywęzłowe w strukturze $A2$ (regularnej przestrzennie centrowanej) zajmują pozycje w środkach ścian lub — co jest równoważne — w środkach krawędzi komórki elementarnej (rys. 11). Powoduje to niesymetryczną deformację struktury i wobec tego możliwe jest oddziaływanie obcych

atomów ze składową styczną pola naprężeń. Sytuacja taka ma miejsce w przypadku atomów węgla i azotu w żelazie α . Co więcej, jak wykazali ARDLEY i COTTRELL [3], również i w ostatnim przypadku jest możliwe oddziaływanie dyslokacji śrubowej z obcym atomem wywołującym symetryczne pole naprężeń, jeżeli dyslokacja rozpada się na dwie dyslokacje częściowe według mechanizmu podanego przez HEIDENREICHA i SHOKLEYA [15]. Wynika stąd wniosek, że wyraźna granica plastyczności może istnieć w metalach o strukturze *A1* nawet wtedy, gdyby zawierały one tylko dyslokacje śrubowe.



Rys. 11. Komórka elementarna struktury *A2*. Krzyżyki oznaczają możliwe położenia międzywęzłowe obcych atomów

Poza tym na podstawie teorii COTTRELLA można wyjaśnić występowanie wyraźnej granicy plastyczności w stopach Cu–Zn przy pewnej zawartości cynku wynoszącej około 1%. Ponieważ w tym przypadku mamy roztwór stały różnowęzłowy (substytucyjny), to w utworzeniu pola naprężeń przez obcy atom (w tym przypadku atom Zn) istotną rolę odgrywa różnica promieni atomowych atomu osnowy i atomu rozpuszczonego (w tym przypadku Cu i Zn).

Przedstawiony w niniejszym artykule zarys teorii atmosfer COTTRELLA oparty na podstawowych prawach teorii dyslokacji wyjaśnia nie tylko ogólny przebieg krzywej naprężenie–odkształcenie materiałów wykazujących wyraźną granicę plastyczności, lecz może stanowić punkt wyjścia do dalszych rozważań, np. na temat zależności granicy plastyczności od temperatury itp. Zagadnienia te wykraczają jednak poza ramy niniejszego artykułu.

Literatura cytowana w tekście

1. A. W. MC REYNOLDS, *AIMME*, **32** (1949), 185.
2. V. A. PHILLIPS, A. J. SWAIN, K. E. BORAL, *J. Int. Metals*, **81**, (1952–53), 625.
3. G. W. ARDLEY, A. H. COTTRELL, *Proc. Roy. Soc., London*, **A219** (1953), 328.
4. W. SYLWESTROWICZ, Dysertacja doktorska, Warszawa 1963.
5. S. KATARZYŃSKI, S. KOCAŃDA, M. ZAKRZEWSKI, *Badanie własności mechanicznych metali*, WNT, Warszawa 1967.
6. J. MIKLOWITZ, *A. Appl. Mech.*, **14** (1947), A31.
7. T. YOKOBORI, *Strength fracture and fatigue of materials*, P. Noordhoff, Gronigen 1964.
8. J. WINLOCK, W. E. LEITER, *Trans. A.S.M.*, **25** (1937), 163.
9. M. J. MANJOINE, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **A-211** (1944), 66.
10. T. H. BLEWITT, R. R. COLTMAN, J. K. REDMAN, *J. Appl. Phys.*, **6**, **28** (1957).
11. C. WERT, *Phys. Rev.*, **79** (1950), 601.

12. H. SCHUMANN, *Metalurgie and Gessereitechnik*, 4 (1954), 385.
13. J. D. FAST, M. B. VERRING, *J. Iron Steel Inst.*, 176 (1954), 24.
14. J. WEERTMAN, J. R. WEERTMAN, *Podstawy teorii dyslokacji*, PWN, Warszawa 1969.
15. R. D. HEIDENREICH, W. SHOCKLEY, *Report on strength of solids*, Phys. Soc., London 1948.

Р е з ю м е

ПРЕДЕЛ ТЕКУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ В ТЕОРИИ АТМОСФЕР КОТТРЕЛЛА

Теория атмосфер Коттрелла принадлежит к тем классическим частям теории дислокаций, которые играют важную роль во многих научных рассуждениях касающихся свойств металлов. В этой статье описано явление предела текучести на основе теории атмосфер.

В первой части работы на основе экспериментальных данных рассматривается четко выраженный предел текучести, обсуждаются условия появления такого предела, а также влияние таких фактов как температура, скорость деформации и жесткость испытательной установки. Даны также схемы кривых напряжение-деформация различного характера.

Во второй части говорится о более ранних теориях предела текучести: как теория мембран и теория выделений.

Третья часть посвящена основным вопросам формирования атмосфер примесных атомов вблизи дислокаций. Дальше описано образование атмосфер Максвелла и условия их перехода в конденсированные атмосферы. Наконец, на основе теории упругости обсуждается вывод формул определяющих значение предела текучести и влияние тепловых флуктуаций.

S u m m a r y

YIELD POINT PHENOMENON IN THE LIGHT OF COTTRELL ATMOSPHERES THEORY

The Cottrell atmospheres theory belongs to the classical chapters in the theory of dislocations and plays a significant part in many considerations concerned with the properties of metals. The present paper deals with the sharp yield point described on the ground of the atmospheres theory.

The first part of this paper outlines the yield point phenomenon from the experimental point of view. The conditions of its appearance and the influence of such factors as temperature, deformation rate and testing machine rigidity are described. Several types of the stress-strain curves are given.

The former yield point theories, namely the theory of membranes and precipitations theory are discussed in the second part of paper.

The third part contains the basic problems concerned with the atmospheres of foreign atoms assembled near the dislocations. Subsequently, the formation of Maxwell's atmospheres and their transition into condensed atmospheres is described. Finally, both the derivation of the principal formulae expressing the yield point value and the influence of thermal fluctuations are discussed.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1970 r.

ZASTOSOWANIE MODELOWYCH MATERIAŁÓW CZUŁYCH OPTYCZNIE DO ANALIZY STANU NAPRĘŻENIA W OŚRODKACH SYPKICH

ANDRZEJ D R E S C H E R (WARSZAWA)

1. Wstęp

Wzrastające w ostatnich latach zainteresowanie mechaniką ośrodków sypkich spowodowane jest niedostatecznym poznaniem ich cech mechanicznych przy równoczesnej potrzebie dokładniejszego projektowania konstrukcji magazynujących, transportujących i urabiających te materiały, jak i projektowania konstrukcji z nich wykonanych. Pod pojęciem ośrodków sypkich¹⁾ będziemy rozumieć wszystkie materiały, które w odróżnieniu od ośrodków ciągłych charakteryzują się, rozumianym makroskopowo, nieciągłym rozłożeniem masy. Nieistotne jest przy tym, czy pomiędzy poszczególnymi ziarnami ośrodka występują lub nie, w stanie nieobciążonym, wzajemne oddziaływania zarówno bezpośrednie, jak i przy udziale ośrodka wypełniającego wolne przestrzenie — pory. W tym ujęciu ośrodkami sypkimi będą zarówno grunty piaszczyste, jak i gliniaste, ziarno, sproszkowane rudy, cukier czy stosowane w różnych technologiach proszki.

Pomimo znacznego rozwoju prac teoretycznych i doświadczalnych poprawny opis czy też ściśle przewidywanie zachowania się tych materiałów nie zostały dotychczas sformułowane. Spośród zaproponowanych koncepcji opisu dają się wyróżnić dwie grupy. W pierwszej przyjmuje się założenie, że do ciał tych można zastosować podejście kontynualne. Uzyskane rezultaty mają więc charakter fenomenologiczny. W drugiej rozpoczyna się od analizy wzajemnych oddziaływań poszczególnych elementów (ziaren) ośrodka. Jest to podejście dyskretne. Niezadowalające rezultaty obu koncepcji wynikają częściowo z niedostatecznej ilości danych doświadczalnych informujących o wzajemnej zależności pomiędzy wielkościami dynamicznymi (np. naprężeniami, siłami) i kinematycznymi (np. odkształceniami, przemieszczeniami). Większość doświadczeń, podobnie jak dla ośrodków ciągłych, daje informacje jedynie o stanie deformacji ciała. W przypadku podejścia kontynualnego naprężenia określane są zazwyczaj z przesłanek logicznych, jak to ma miejsce w badaniach na próbkach walcowych czy rurkowych, lub też obliczane na podstawie założeń o własnościach ciała, np. rozwiązania teorii sprężystości dla skupionych lub ciągłych obciążeń zewnętrznych, czy też rozwiązania teorii plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia.

¹⁾ Termin ten używany jest powszechnie w polskiej literaturze, choć bardziej uzasadniony wydawałby się «ośrodki rozdrobnione».

Trudności eksperymentalnego określania stanu naprężenia w przypadku ośrodków ciągłych zostały częściowo pokonane przez zastosowanie modelowych materiałów optycznie czułych (fotosprężystość, fotoplastyczność). W odniesieniu do ośrodków sypkich podstawową metodą doświadczalnego wyznaczania stanu naprężenia jest zastosowanie specjalnie skonstruowanych elementów pomiarowych — dynamometrów — umieszczonych w pewnych punktach ośrodka. Metoda ta, dając zdaniem wielu autorów zadowalające wyniki, budzi jednakże szereg zastrzeżeń z uwagi na wprowadzone zaburzenie w badanym ośrodku przez element pomiarowy, jak i jedynie lokalne lub częściowe informacje. Pomimo postępującej miniaturyzacji czujników i prób pomiaru wszystkich składowych stanu naprężenia, jej stosowalność do ośrodków o małych ziarnach lub silnych wewnętrznych wiązaniach wydaje się ograniczona. Klasyfikację, zasady działania i opis czujników dynamometrycznych można znaleźć np. w pracy [14]. W pewnych badaniach zastępuje się czasem rzeczywisty ośrodek sypki modelem ośrodka ciągłego wykonanym z materiału optycznie czułego. Stosowane jest to np. przy analizie współpracy zapór wodnych z podłożem [9]. Metoda ta nie może jednakże mieć zastosowania w analizie rzeczywistych własności materiałów sypkich.

Na podstawie powyższych rozważań wydaje się być celowe zwrócenie uwagi na inną możliwość wyznaczania wielkości dynamicznych w ośrodkach sypkich, opartą na zastosowaniu optycznie czułych modelowych materiałów sypkich. Opracowanie niniejsze ma na celu przedstawienie dotychczas zaproponowanych optycznie czułych materiałów modelowych i uzyskanych wyników oraz pewne uwagi o dalszych możliwościach rozwoju tej metody.

Idea zastosowania modelowych materiałów optycznie czułych do analizy wielkości dynamicznych w ośrodkach sypkich należy do DANTU [2] i niezależnie do WAKABAYASHI [17]. W swej pierwszej pracy [2] DANTU zaproponował użycie dwóch różnych modeli ośrodka: a) ośrodka utworzonego ze szklanych wałeczków lub krążków, b) potłuczonego szkła (piasku szklanego). WAKABAYASHI zajmował się głównie modelem z piasku szklanego. Pomimo wykorzystania tego samego zjawiska fizycznego — dwójtomność wymuszona na skutek działania obciążeń zewnętrznych — i identycznej w przypadku szkła wielkości tego efektu, zarówno własności mechaniczne, jak i uzyskiwane informacje różnią zasadniczo oba te modele. Wynikają one przede wszystkim z różnic w kształtach i wielkościach ziaren. Różnice te pogłębiły się jeszcze w trakcie rozwoju badań na modelu utworzonym z wałeczków. Z tego też względu oba modele zostaną omówione osobno, choć wielu autorów analizowało je wspólnie.

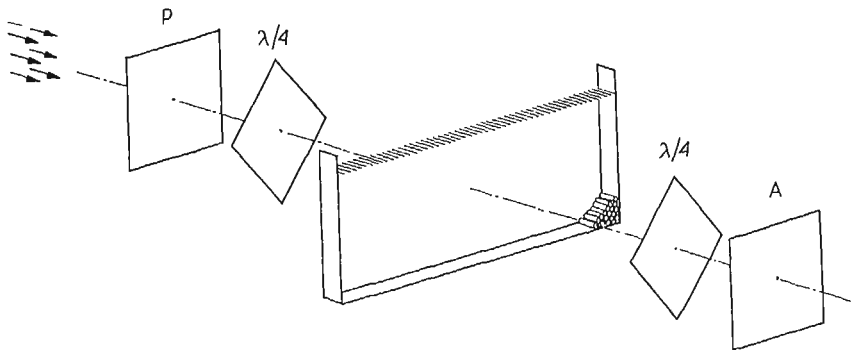
2. Model utworzony z wałeczków lub krążków

Model ośrodka sypkiego w postaci stosu wałeczków lub krążków wykonanych z metalu lub szkła znalazł szerokie zastosowanie w badaniach doświadczalnych nad statecznością i nośnością podłoża gruntowego. Model ten w literaturze mechaniki gruntów nosi nazwę modelu Taylora-Schneebeli. Zasadniczą jego cechą jest dwuwymiarowość możliwego ruchu elementów. Wałeczki lub krążki ułożone jeden na drugim, w jednej płaszczyźnie zawierającej przekroje poprzeczne, mogą ulegać deformacji jedynie w tej płaszczyźnie. Model ten stanowi zatem idealne odwzorowanie płaskiego stanu odkształ-

enia. Cecha ta jest tym istotna, że większość efektywnie rozwiązanych zagadnień nośności granicznej ośrodka sypkiego, opartych o równania teorii plastyczności, dotyczy właśnie przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Użycie rzeczywistego ośrodka sypkiego, np. piasku, umieszczonego w płaskim szklanym pojemniku, wprowadza pewne błędy w obserwowanej kinematyce ruchu spowodowane tarciami pomiędzy piaskiem a czołowymi szklanymi płytami. Wadą modelu w postaci stosu wałeczków jest idealizacja kształtu ziaren i wynikająca z niej struktura ośrodka. Stosowane kształty, najczęściej kołowe lub sześciokątne, odbiegają dość znacznie od rzeczywistych kształtów np. ziaren piasku. Wymiary wałeczków są także znacznie większe od wymiarów drobnoziarnistych materiałów sypkich. Zastrzeżenia te nie dyskwalifikują jednakże stosowności tego typu modeli, czego dowodem jest szereg otrzymanych interesujących wyników.

Model Taylora-Schneebeli stosuje się do obserwacji kinematyki ośrodka sypkiego w strefach plastycznego płynięcia. Bezpośrednie określenie stanu naprężenia jest niemożliwe. Obserwowana kinematyka może być porównana z rozwiązaniami teoretycznymi pola naprężeń lub stanowić podstawę do jego teoretycznego wyznaczenia.

DANTU, w cytowanej pracy [2], zaproponował obserwację modelu utworzonego ze szklanych wałeczków w świetle kołowo spolaryzowanym. Źródło światła znajduje się poza modelem, skąd promienie światła spolaryzowane kołowo przez analizator i ćwierćfalówkę przechodzą przez wałeczki prostopadle do ich kołowych płaszczyzn czołowych

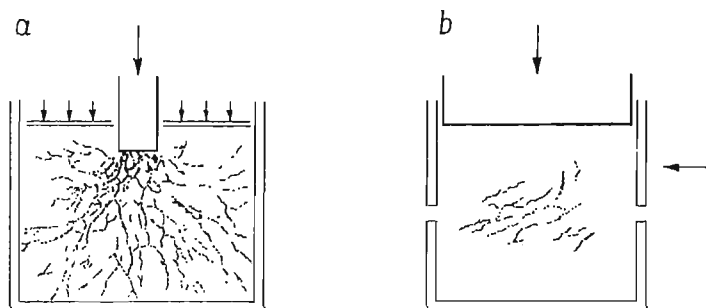


Rys. 1

(rys. 1). W przypadku obciążenia stosu siłami zewnętrznymi w kontaktujących się ze sobą wałeczkach powstają naprężenia (odkształcenia) wywołujące zjawisko dwójłomności wymuszonej. Po przejściu światła przez drugą ćwierćfalówkę i polaryzator obserwuje się, na skutek interferencji promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego, różną intensywność światła w pewnych obszarach poszczególnych wałeczków. W przypadku monochromatycznego źródła światła różna intensywność zaznacza się jako rozjaśnienie (ciemnego) lub zaciemnienie (jasnego) obrazu. Białe źródło światła powoduje powstanie obrazu barwnego złożonego z barw dopełniających do wygaszonych przez polaryzator. Wielkość tego efektu zależna jest od czułości optycznej materiału, wartości przyłożonego obciążenia i długości wałeczków.

Schemat doświadczenia wykonanego przez DANTU przedstawiono na rys. 2a. Schemat ten odpowiada w przybliżeniu zagadnieniu wciskania sztywnego stempla w półprzestrzeń sprężystą. Przylegające do stempla dwie płytki uniemożliwiają plastyczny wpływ materia-

łu zostały użyte celem wywołania znacznych nacisków pomiędzy wałeczkami. Użyty przez DANTU materiał wałeczków, których średnice wahały się od 2 do 6 mm, a długość wynosiła 20 mm, stanowiło szkło PYREX¹⁾. Na rys. 2 zaznaczono schematycznie uzys-



Rys. 2

kany obraz w świetle monochromatycznym, przy ustawieniu elementów układu optycznego dających ciemne pole w stanie nieobciążonym i rozproszonym źródle światła. Obraz ten składa się z łańcuchów rozświetlonych wałeczków układających się podobnie do systemu «korzeni» (na rys. 2 rozświetlone wałeczki zaciemniono). Zarówno niewielka średnica wałeczków, jak i niewielka czułość optyczna użytego materiału ($K = 156 \text{ Kg/cm rz. iz.}$) nie pozwalają na wyróżnienie w poszczególnych wałeczkach obszarów o różnej intensywności światła. W efekcie zarejestrowany obraz daje jedynie jakościową informację o rozmieszczeniu przenoszących obciążenia elementów modelu. Obrazy jasne na rysunku odpowiadają wałeczkom słabo lub w ogóle nieobciążonym.



Rys. 3

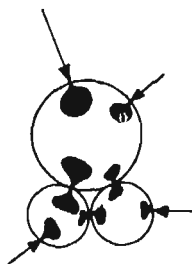
Drugi ze schematów obciążenia stosu wałeczków był podobny do warunków panujących w aparacie bezpośredniego ścinania (rys. 2b).

¹⁾ PYREX jest angielską marką szkła laboratoryjnego, charakteryzującego się dużą jednorodnością własności fizycznych, a zwłaszcza współczynnika rozszerzalności termicznej.

W następnej pracy [3] DANTU zastosował płaski model ośrodka do zobrazowania rozkładu oddziaływań wałeczków umieszczonych pomiędzy dwiema wysokimi pionowymi ścianami, zamkniętymi od dołu, podczas cyklicznych zmian obciążenia pionowego (rys. 3). Zaobserwował on, że ze wzrostem obciążenia pionowego wzrasta rozjaśnienie łańcuchów, przy czym ich geometryczna struktura nie ulega zmianom. Gęstość łańcuchów maleje wraz z oddalaniem się od górnej, obciążonej płaszczyzny stosu. Przy odciążeniu struktura łańcuchów nieznacznie zmienia się dążąc do bardziej jednorodnej.

Praca [2] wskazała na możliwość zaobserwowania sposobu przekazywania zewnętrznych obciążeń w modelowym ośrodku sypkim przy małych deformacjach, ograniczonych zastosowanymi schematami obciążeń. Uzyskane rezultaty, aczkolwiek mające charakter jakościowy, stały się bodźcem do dalszych prac.

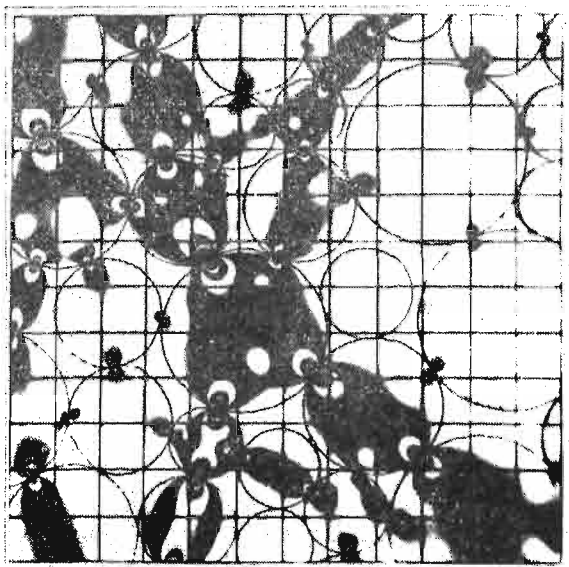
Tematykę tę podjął de JOSSELIN de JONG [6]. Zastosował on inny optycznie czuły materiał — perspex (polimetakrylan metylu), z którego wycięto płaskie krążki. Większa czułość optyczna perspexu ($K = 120 \text{ Kg/cm rz. iz.}$) i większe średnice w stosunku do wałeczków użytych przez DANTU pozwoliły zaobserwować w poszczególnych krążkach, poddanych ścisaniu w prostokątnym pudełku, kształty obszarów o różnej intensywności przechodzącego światła. Schematycznie przedstawia je rys. 4. Obrazy ciemne przylegają



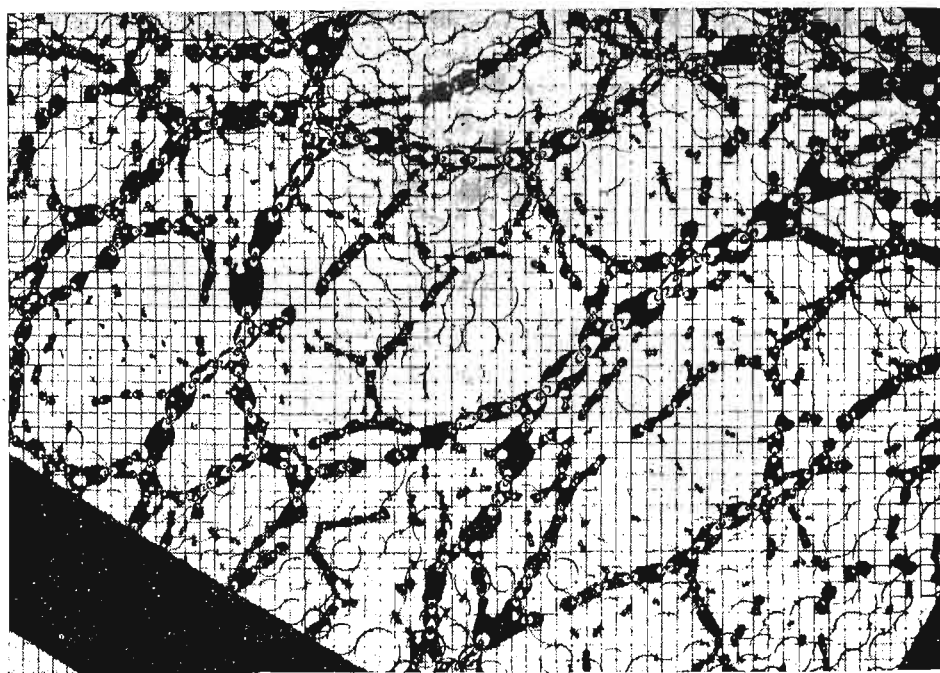
Rys. 4

do miejsc wzajemnego kontaktu krążków (układ optyczny dawał jasne pole w stanie nieobciążonym). De JOSSELIN de JONG podjął także próbę ilościowego określenia stanu naprężenia w krążkach wykorzystując do tego celu kompensator w postaci prostokątnej belki poddanej czystemu zginaniu, umieszczony przed badanym modelem. Zaobserwował przesunięcie poziomych izochrom w kompensatorze, jednakże nie przytoczył konkretnych wyników liczbowych. Rozważył też możliwość określenia siły kontaktu dwóch krążków przez pomiar intensywności światła wewnątrz kołowego wycinka o środku w punkcie kontaktu. Nie uzyskał jednakże zadowalających rezultatów.

Istotny krok naprzód w ilościowej ocenie zaobserwowanych efektów należy przypisać zastosowaniu przez de JOSSELINA de JONGA i VERRUIJTA [7] znacznie czulszego optycznie od szkła i perspexu materiału — żywicy CR-39 ($K = 14 \text{ Kg/cm rz. iz.}$). Autorzy ci wykonali doświadczenia na zbiorze płaskich krążków o średnicach od 10 mm do 40 mm i grubości 10 mm. Około 200 krążków zostało umieszczonych w prostokątnym pojemniku, którego boczne i górna ściany były ruchome i połączone z układem obciążającym. Układ obciążający pozwalał przykładać niezależnie różne obciążenia pionowe i poziome. Na skutek wysokiej czułości optycznej żywicy CR-39 istniejący w obciążonych krążkach stan



Rys. 5



Rys. 6

naprężenia (odkształcenia) był wystarczający do wywołania opóźnienia względnego promieni zwyczajnego i nadzwyczajnego o wartości kilkakrotnej długości fali użytego światła monochromatycznego. W efekcie zaobserwowano w poszczególnych krążkach wyraźne izochromy. Na rys. 5 przedstawiono fotografię izochrom jakościowo podobnych do uzys-

kanych w pracy [7]. Układ łańcuchów obciążonych krążków z izochromami, dla pewnego obszaru modelu, był podobny do rys. 6. Obie fotografie wykonano przy jasnym polu widzenia.

Możliwość wyraźnego zaobserwowania izochrom pozwoliła autorom na wyznaczenie sił kontaktowych pomiędzy krążkami. W tym celu skorzystali oni z rozwiązań teorii sprężystości stosowanych w elastoptyce. Zagadnienie stanu naprężenia w płaskim krążku poddanym działaniu dwóch przeciwnie skierowanych sił jest klasycznym zagadnieniem teorii sprężystości, którego rozwiązanie bardzo dobrze potwierdzają badania elastoptyczne. Stąd też płaski krążek stosowany jest wielokrotnie jako dynamometr elastoptyczny. W przypadku dwóch, przeciwnie skierowanych, skupionych sił działających wzdłuż średnicy krążka izochromy, odpowiadające liniom maksymalnych naprężeń stycznych, mają kształt symetrycznych owali [12]. Dla sił działających wzdłuż cięciwy izochromy mają bardziej złożony kształt. Rozwiązania te są statycznie wyznaczalne i nie uwzględniają sztywności materiału. De JOSSELIN de JONG i VERRUIJT założyli, że sztywność badanego materiału jest tak duża, że można pominąć nie punktowe w rzeczywistości przenoszenie się oddziaływań z krążka na krążek. Przyjęli ponadto, że kształt izochrom w sąsiedztwie kontaktu jest wystarczająco zbliżony do kół, by zadanie traktować jako działanie siły skupionej na półpłaszczyźnie (zadanie Flamanta). W tym przypadku zależność pomiędzy przyłożoną siłą a maksymalnym naprężeniem stycznym wyraża się następująco:

$$(2.1) \quad 2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2P}{\pi t d},$$

gdzie t jest grubością półpłaszczyzny, a d średnicą koła, stycznego do punktu przyłożenia siły, na którego obwodzie wzór (2.1) określa poszukiwane naprężenie styczne. Wykorzystując podstawowy związek elastoptyki

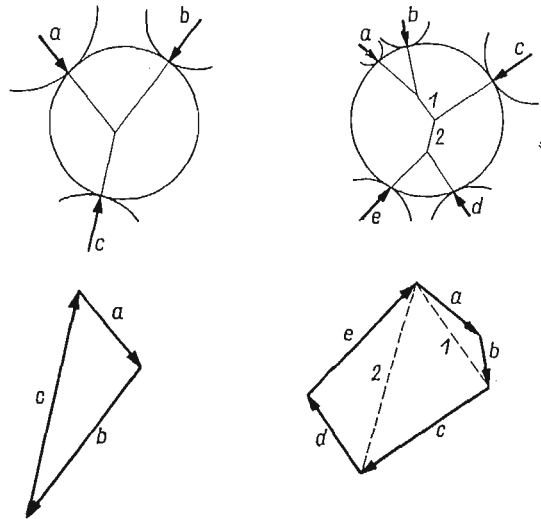
$$(2.2) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{Ct},$$

gdzie n jest rzędem izochromy, λ długością światła, C stałą elastoptyczną materiału, zależność pomiędzy siłą a izochromą wyraża się przez

$$(2.3) \quad P = \pi d \frac{n\lambda}{C}.$$

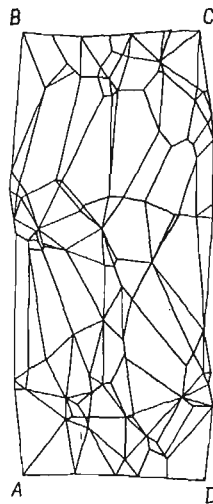
Z zależności (2.3) można wyznaczyć poszukiwaną siłę kontaktu, gdy znany jest rząd i średnica danej izochromy. Autorzy [7] przyjęli, że związek (2.3) ważny jest dla dowolnej liczby i dowolnego nachylenia sił pod warunkiem, że korzysta się z izochrom położonych w sąsiedztwie kontaktu krążków. Kierunek działania siły można przyjąć z wystarczającą dokładnością za pokrywający się z symetryczną izochrom w tym obszarze. Poprawność określonych w ten sposób sił kontaktowych zaproponowali sprawdzić korzystając z równań równowagi całego krążka. Równania równowagi sił żądają, by wielobok sił działających na dany krążek był zamknięty. Równanie równowagi momentów wymaga, by dla przypadku dwóch sił ich zwroty były przeciwne, a dla trzech sił, by kierunki przecinały się w jednym punkcie. Dla $m > 3$ sił kierunek wypadkowej $m-2$ sił musi również przecinać się z kierunkiem pozostałych dwóch sił w jednym punkcie (rys. 7). Warunki te wygodnie jest sprawdzać graficznie. W rezultacie otrzymuje się dla pewnego obszaru modelu

układ zamkniętych, łączących się wieloboków tworzących plan Cremony. Na rys. 8 przedstawiono przykładowo uzyskany w [7] plan Cremony dla wszystkich krążków umieszczonych w pojemniku, przy obciążeniu pionowym większym od poziomego. Poszczególne odcinki pomiędzy punktami A i B oraz C i D przedstawiają siły działające pomiędzy krążkami a dolną i górną ścianą pojemnika. B i C oraz A i D odpowiadają ścianom bocznym. Porównując wypadkowe \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{DA} z przyłożonymi do ścian obciążeniami autorzy uzyskali dobrą zgodność.



Rys. 7

Praca [7] pokazała możliwość dokładnego, ilościowego określenia dyskretnego rozkładu sił kontaktowych w modelowym ośrodku sypkim²⁾. W pracy tej nie analizowano pola deformacji.



Rys. 8

²⁾ Liczbowe wartości sił kontaktowych w modelu utworzonym z wałeczków z perspexu podał także Weber [22]. W pracy tej nie wyjaśniono jednakże, w jaki sposób określono te siły.

3. Model z piasku szklanego

Jako drugi modelowy ośrodek sypki DANTU [2] i WAKABAYASHI [17] zaproponowali potłuczone szkło (piasek szklany). W pracy [2] DANTU zastosował szkło PYREX, podobnego materiału użył WAKABAYASHI. Potłuczone szkło jest materiałem o własnościach mechanicznych prawie identycznych z rzeczywistym piaskiem. Kształt ziaren i struktura odpowiadają kwarcowym piaskom kopalnym, a jego uziarnienie może być dowolnie dobrane.

Materiał ten, choć utworzony z ziaren przezroczystych, stanowi w masie ośrodek zupełnie nieprzezroczysty, na skutek odbić i rozproszenia światła na ścianach ziaren. Jeżeli jednak pory pomiędzy ziarnami zostaną całkowicie wypełnione cieczą o identycznym



Rys. 9

ze szkłem współczynnika załamania światła (cieczą imersyjną) ośrodek ten staje się przezroczysty. Zjawisko to, zachodzące ściśle dla światła monochromatycznego i w określonej temperaturze, wykorzystywane jest w badaniach przepływu cieczy przez ośrodki porowate, badaniach prędkości dyfuzji cieczy itp. (np. [5]). Użycie cieczy imersyjnych znane jest także w badaniach elastooptycznych na modelach trójwymiarowych dla uniknięcia efektu załamania światła (np. [8]). Jako ciecze imersyjne dla szkła mogą być użyte, np. roztwór

jodku amonu w ilości 150 G na 100 cm³ wody, mieszanina benzenu i heptanu w stosunku około 100:28 części objętościowych.

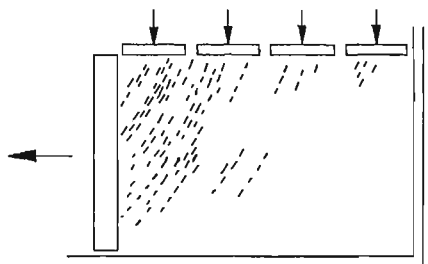
DANTU i WAKABAYASHI zaobserwowali, że jeżeli piasek szklany z wypełniającą pory cieczą imersyjną, umieszczony w płaskim szklanym pojemniku poddany jest obciążeniom zewnętrznym, to w świetle spolaryzowanym widoczne są, dla ciemnego pola widzenia, krótkie jasne linie układające się w delikatne pasma. Zjawisko to występuje zarówno w liniowo, jak i kołowo spolaryzowanym świetle, przy czym układ linii jest w obu przypadkach różny. Otrzymany obraz jest analogiczny do przedstawionego na rys. 9, uzyskanego w świetle kołowym dla podobnego schematu obciążenia, jak na rys. 2a. W świetle liniowo spolaryzowanym oprócz jasnych krótkich linii widoczne są szerokie, ciemne pasma przechodzące przez cały obszar. Położenie tych ciemnych pasm, jak i jasnych linii, zależne jest od nachylenia płaszczyzny polaryzacji. Autorzy [2] i [17] wykazali, że ciemne pasma są izoklinami. Porównując przebieg jasnych krótkich linii w świetle kołowym z trajektoriami naprężeń głównych, skonstruowanymi z izoklin, otrzymuje się pokrywanie tych pierwszych z jedną rodziną trajektorii. Zatem krótkie jasne linie w świetle kołowym odpowiadają kierunkom jednego z naprężeń głównych w danym punkcie ośrodka. W pracy [19] WAKABAYASHI podał fizykalną interpretację i zależności ilościowe obserwowanego efektu. Założył on, że w rozpatrywanym ośrodku tworzą się pod działaniem obciążeń, przypadkowo ukierunkowane łańcuchy ziaren. Łańcuchy te przenoszą osiowo różne obciążenia w zależności od położenia w modelu oraz geometrii i warunków brzegowych doświadczenia. Sumaryczny efekt dwójłomności dla każdego łańcucha, traktowanego jako jednoosiowo ściskany pręt, widoczny jako rozjaśnienie, jest tym większy — jaśniejszy łańcuch — im większe jest obciążenie. W świetle kołowo spolaryzowanym widoczne są głównie łańcuchy najsilniej obciążone. W świetle liniowym widoczne są, w zależności od nachylenia płaszczyzny polaryzacji, pozostałe łańcuchy. Koncepcję istnienia obciążonych łańcuchów ziaren potwierdzają wyniki uzyskane na modelu z wałeczków czy krążków omówione w p. 2 (rys. 6).

Wykonując pomiar intensywności światła w pewnych obszarach modelu z pomocą kompensatora Babinetta, WAKABAYASHI stwierdził proporcjonalność średniego efektu optycznego do wielkości obciążeń. Ilościowo jest on dwa razy mniejszy niż w monolitycznym szkłe. Dla zastosowanych przez DANTU i WAKABAYASHI obciążeń średnie rozjaśnienie linii odpowiada około 0,2 rzędu izochromy.

Oprócz wspomnianej jednej rodziny jasnych linii de JOSSELIN de JONG [6] zaobserwował drugą rodzinę, mniej wyraźnych, linii prostopadłych. Wykonując zdjęcia stereoskopowe wykazał przestrzenne ułożenie linii w modelu. Obraz uzyskiwany na normalnych zdjęciach odpowiada zatem zsumowaniu się linii występujących na różnych odległościach od powierzchni czołowych płaskiego modelu.

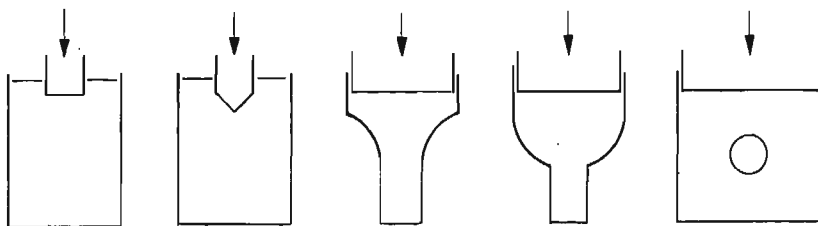
Pokrywanie się jasnych linii uzyskiwanych w świetle kołowo spolaryzowanym z kierunkami naprężeń głównych pozwoliło DANTU, WAKABAYASHI i NGUYEN CHANH na określenie trajektorii głównych w szeregu inżynierskich zagadnień brzegowych. DANTU [2, 3] wykonał badania na identycznych modelach, jak na rys. 2 i 3, uzyskując podobny układ linii, jak dla wałeczków. NGUYEN CHANH [15] wykorzystał opisywany efekt do wyznaczenia trajektorii naprężeń głównych w zagadnieniu parcia i oporu na pionowy mur oporo-

wy (rys. 10). Wyniki porównał z rozwiązaniem teoretycznym nośności granicznej zadania, uzyskując jakościową zgodność kierunków naprężeń określonych teoretycznie i doświadczalnie. Obszerne badania przy najróżniejszych schematach obciążeń wykonał WAKABAYASHI [17, 18, 19, 20, 21] (rys. 11) porównując otrzymane wyniki z rozwiązaniami przy-



Rys. 10

bliżonymi. Zbadał on wciskanie stempla, klina i dwóch zagłębionych klinów oraz określił kierunki naprężeń w lejach o różnym kształcie i w prostokątnym polu zawierającym sztywny cylinder (model obudowy chodnika). Dla szeregu schematów określił ilościowo z pomocą kompensatora Babinetta średni efekt optyczny w pewnych obszarach, uzys-



Rys. 11

kując w ten sposób pewne informacje o wartości naprężeń. Wspólną cechą tych doświadczeń jest ograniczenie się do analizy stanu naprężenia przy bardzo małych lub zlokalizowanych deformacjach ośrodka. W doświadczeniach ośrodek doznawał jedynie zagęszczenia. Stąd też nie analizowano przeważnie pola deformacji. Podobnie NGUYEN CHANH badał pierwszy moment powstania odporu lub parcia nie określając kształtu i cech pola deformacji.

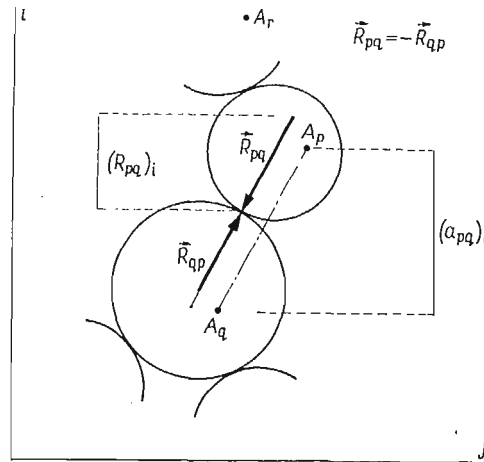
4. Analiza uzyskiwanych informacji

Omówione w p. 2 i 3 modelowe ośrodki sypkie różnią się nie tylko własnościami mechanicznymi, ale i uzyskiwanymi informacjami o wielkościach dynamicznych.

Ośrodek utworzony z waleczków lub krążków stanowi dość dalekie odwzorowanie rzeczywistego ośrodka sypkiego, przede wszystkim z uwagi na kształt i wielkość ziaren. Z drugiej jednakże strony rozmiary waleczków pozwalają na określenie rozkładu i wielko-

ści kontaktowych sił ich wzajemnego oddziaływania. Śledząc wzrost sił i ich konfigurację w funkcji obciążenia zewnętrznego czy deformacji uzyskuje się informacje, które mogą znaleźć bezpośrednie zastosowanie przy dyskretnym podejściu do opisu cech mechanicznych materiałów sypkich. Możliwe jest przy tym wprowadzenie określonej struktury ośrodka poprzez dobór wielkości i kształtów elementów.

Powyższe zalety tego modelu powodują jednakże trudności przy próbie wykorzystania rezultatów do porównania czy też stworzenia opisu kontynualnego. Należy przy tym wspomnieć, że model Taylora-Schneebeli jest stosowany głównie do weryfikacji doświadczalnej właśnie tego rodzaju opisu. Stąd też powstaje pytanie, jak przejść z wielkości



Rys. 12

dla ośrodka dyskretnego — sił do wielkości dla ośrodka ciągłego — naprężeń. W podejściu kontynualnym przyjmuje się, że w każdym punkcie ciała istnieje jednoznacznie określony tensor naprężenia. W przypadku zbioru walczków można mówić jedynie o tensorze naprężenia dla pewnego obszaru, przy czym stan naprężenia w poszczególnych walczkach jest nieinteresujący.

Pierwszą propozycję określenia tensora naprężenia dla skończonego obszaru z wielkości sił kontaktowych podał WEBER [22]. Rozpatrzył on udział każdej siły kontaktowej $\overline{R_{pq}}$, gdzie p i q oznaczają ziarna, działającej na długościach $\overline{a_{pq}}$, rozumianych jako odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami w dwóch ziarnach (rys. 12), w sumowaniu wszystkich sił działających w obszarze zawierającym wiele ziaren. W efekcie otrzymał następujące wyrażenie na średni tensor naprężenia

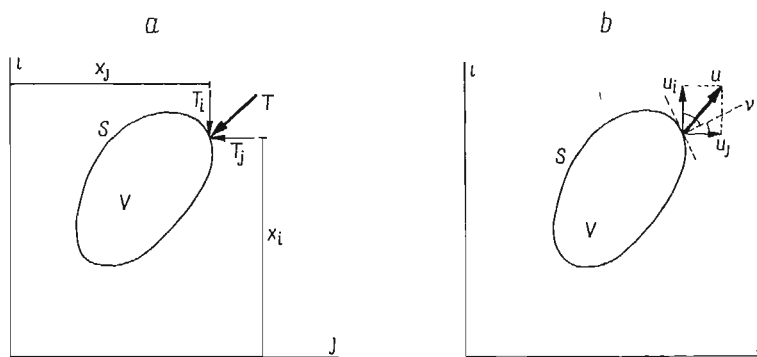
$$(4.1) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^{M_p} [(R_{pq})_i (a_{pq})_j],$$

gdzie i, j określają układ współrzędnych, $(R_{pq})_i$ i $(a_{pq})_j$ są składowymi wektorów $\overline{R_{pq}}$ i odcinków $\overline{a_{pq}}$, V objętością obszaru, a sumowanie należy wykonać po M ziarnach przynoszących siły na M_p ziarn. Wyznaczenie składowych $\bar{\sigma}_{ij}$ wymaga bardzo pracochłonnego sumowania sił i odległości wewnątrz całego obszaru.

W pracy [11] autorzy zdefiniowali średni tensor naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$ analogicznie do definicji użytej przez HILLA [13], omijając skomplikowaną procedurę Webera. Średni tensor naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$, będący całką po objętości V z naprężeń σ_{ij} w każdym punkcie, podzieloną przez objętość ciała, można przedstawić w następującej postaci, wykorzystując twierdzenie Greena i przeprowadzając symetryzację

$$(4.2) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2V} \int_S (T_i x_j + T_j x_i) ds,$$

gdzie T_i , T_j są składowymi sił działających na powierzchnię S objętości V , a x_i , x_j odległościami punktu działania siły od układu współrzędnych (i, j) (rys. 13a). Wyrażenie



Rys. 13

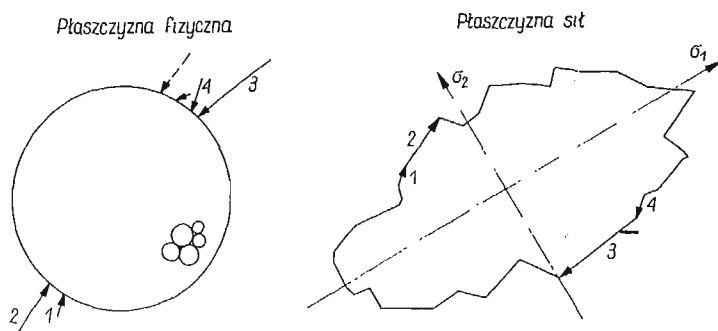
(4.2) oznacza, że do określenia składowych $\bar{\sigma}_{ij}$ wystarczające jest zsumowanie sił działających na powierzchni obszaru, a w przypadku ośrodka płaskiego na obwodzie, co jest znacznie prostsze niż w przypadku (4.1). Przeprowadzając pewne sumowanie sił i odległości w związku (4.1) można wykazać jego równoważność ze związkiem (4.2), który otrzymano na znacznie prostszej drodze.

Powyżej zdefiniowany średni tensor naprężenia można wyznaczyć dla dowolnego kształtu i wielkości obszaru i dowolnego rozkładu sił wewnątrz, czy też na obwodzie. Do jego wyznaczenia wystarczający jest plan Cremony (rys. 8) i znajomość punktów przyłożenia sił, co daje bezpośrednio fotografia zbioru (rys. 6). W przypadku konkretnego rozkładu sił kontaktowych w zbiorze wybór wielkości i położenia obszaru jest rzeczą subiektywną. Dla uchwycenia tego wpływu, zwłaszcza przy niejednorodnym rozkładzie sił, należy przeprowadzić obliczenia dla różnych wymiarów i położenia obszaru. Tą drogą można określić najwłaściwszą reprezentację ośrodka dyskretnego przez model ciągły.

W pracy [11] rozpatrzono także inny, graficzny sposób wyznaczania stanu naprężenia. Wycinając w modelu obszar kołowy można wykazać, że dla jednorodnego wewnątrz stanu naprężenia wielobok sił działających na jego obwodzie powinien mieć kształt elipsy, której długości półosi głównych, podzielone przez średnicę koła, określają wartości naprężeń głównych, a położenie osi kierunkui główne (rys. 14). Wykreślając kolejne wieloboki dla kół o różnej średnicy i różnym położeniu środka można graficznie uchwycić odstępstwo

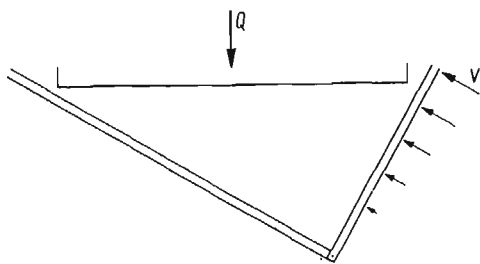
od jednorodności stanu naprężenia, a tym samym przybliżenie jakie dokonuje się przyjmując średni tensor naprężenia.

W pracy [22] WEBER wykonał obliczenie składowych tensora $\bar{\sigma}_{ij}$ według (4.1) dla zbioru wałeczków poddanych hydrostatycznemu ciśnieniu. Otrzymał dobrą zgodność z wartością przyłożonego ciśnienia (por. uwagę w p. 2). Autorzy [10] przeprowadzili obliczenia analityczne według (4.2) i graficzne dla schematu obciążenia zbioru wałeczków przedstawio-



Rys. 14

nego na rys. 15 uzyskując informacje o stanie naprężenia podczas deformacji ośrodka. W schemacie tym jedno z ramion klina było nieruchome, podczas gdy drugie doznawało obrotu zgodnie i przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Spoczywająca na stosie płyta Q, użyta dla zwiększenia wzajemnych oddziaływań krążków z żywicy CR-39, mogła doznawać dowolnych przemieszczeń i obrotów wynikających z deformacji zbioru. Z porównania



Rys. 15

kierunków głównych obliczonych tensorów naprężenia z przebiegiem łańcuchów obciążonych krążków (rys. 6) wynika ich przybliżone pokrywanie się. Wniosek ten potwierdza, że w modelu z piasku szklanego obserwowane jasne linie wyznaczają kierunki naprężeń głównych.

Przedstawione powyżej rozważania wskazują, że modelowy ośrodek sypki utworzony z wałeczków czy krążków może być również wykorzystany w fenomenologicznym opisie zjawisk.

Model z piasku szklanego, z uwagi na obserwowane efekty sumaryczne dla wielu ziaren, nie nadaje się do podejścia dyskretnego. Z uzyskiwanych dotychczas z tego modelu

informacji za najistotniejszą należy uznać możliwość wyznaczenia trajektorii naprężeń głównych. Same wartości naprężeń są nieznane, a zastosowanie kompensatorów daje tylko pewne informacje jakościowe. Znajomość trajektorii naprężeń głównych może jednakże dostarczyć istotnych danych przy porównaniu rozwiązań teoretycznych z doświadczeniem. Należy także zaznaczyć, że w pewnych przypadkach istnieje możliwość analitycznego wyznaczenia stanu naprężenia na podstawie znajomości jedynie przebiegu trajektorii naprężeń głównych. Równania równowagi płaskiego stanu naprężenia odniesione do ortogonalnej siatki trajektorii naprężeń głównych, zwane równaniami Lamé'go Maxwella mają następującą postać

$$(4.3) \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0,$$

gdzie s_1 i s_2 są długościami elementów wzdłuż trajektorii a ρ_1 , ρ_2 promieniami krzywizn. Równania (4.3), z których każde przedstawia różniczkowanie względem jednej zmiennej, mają analogiczną postać do równania wzdłuż charakterystyk teorii plastyczności. W tym przypadku charakterystykami są trajektorie naprężeń głównych. Można zatem znaleźć rozwiązanie układu (4.3) podobnie, ja to się czyni w zadaniach teorii plastyczności, tzn. rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego, charakterystyczne i mieszane. Powyższa możliwość została wykorzystana w zagadnieniach optymalizacji konstrukcji [1]. W elastooptyce nie jest dotychczas stosowana, choć koncepcja całkowania wzdłuż odpowiednich charakterystyk została podana w pracy [16] dla wielkości uzyskiwanych z izochrom.

Jak zaznaczono w p. 2 i 3, wspólną cechą dotychczas opublikowanych rezultatów na obu modelach jest ograniczenie się do rejestracji sił czy naprężeń przy bardzo małych deformacjach, na ogół pomijanych w analizie. Za zasadniczą tego przyczynę należy uznać trudności eksperymentalne: Dla wywołania efektu dwójłomności wymuszonej w modelu z wałeczków, a zwłaszcza w piasku szklanym, konieczne są duże naciski ziaren. Stąd też w wykonanych doświadczeniach przykładano obciążenie ze wszystkich stron modelu, lub też ograniczano jego ruch przez sztywne ściany. Doświadczenia przy istnieniu wolnej powierzchni, wobec małego ciężaru własnego modelu, nie pozwalają na zaobserwowanie efektów optycznych. Również obecność cieczy w modelu z piasku szklanego utrudnia realizację znacznych odkształceń.

Pewną próbę pomiaru naprężeń w trakcie deformacji modelu podjęli autorzy pracy [11] (rys. 15). Obrót ramienia pozwolił uzyskać względnie jednorodne pole deformacji przy wielkości odkształceń postaciowych około 1,5%. Z pomiaru względnego położenia krążków określono średni tensor odkształcenia $\bar{\epsilon}_{ij}$ dla analogicznych obszarów kołowych jak dla naprężeń. Średni tensor odkształcenia zdefiniowano za HILLEM [13] jako całkę po obszarze z odkształceń w punktach, co prowadzi przy wykorzystaniu twierdzenia Greena do następującej postaci

$$(4.4) \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2V} \int_S (U_i \nu_j + U_j \nu_i) ds,$$

gdzie U_i i U_j są składowymi wektora przemieszczenia U na brzegu ciała S ; ν_i , ν_j są składowymi jednostkowego wektora normalnego do powierzchni S (cosinusami kierunkowymi) w punktach o danych przemieszczeniach (rys. 13b). Dla wyznaczenia $\bar{\epsilon}_{ij}$ wystarczająca

jest zatem znajomość przemieszczeń brzegu. W definicji $\bar{\varepsilon}_{ij}$, podobnie jak w $\bar{\sigma}_{ij}$, przyjmuje się założenie o ciągłości ośrodka. Dokładna analiza uzyskanych wyników zostanie opublikowana.

Zależność (4.4) można również zastosować do określenia stanu odkształcenia w modelu z piasku szklanego. Z uwagi jednakże na niewielkie wymiary ziaren w stosunku do całej objętości modelu można do wyznaczenia stanu odkształcenia skorzystać z ogólnie stosowanych metod obliczania deformacji w ośrodkach ciągłych np. metody siatek, gdzie odkształcenia określa się z pomiaru przemieszczeń węzłów prostokątnej siatki (por. np. [10]).

5. Uwagi końcowe

Z przedstawionej powyżej charakterystyki modelowych materiałów sypkich czułych optycznie oraz analizy uzyskiwanych z badań informacji wynika niewątpliwa wartość omówionych metod doświadczalnego określenia stanu naprężenia w ośrodkach sypkich. Metody te stanowią mogą istotne uzupełnienie innych, tradycyjnych metod. Pomimo uzyskanych interesujących rezultatów, szereg zagadnień pozostaje jednakże nadal otwartych i wymagających dalszych opracowań.

Jako pierwsze zagadnienie można tu wymienić ograniczenie omawianych metod do materiałów idealnie sypkich tzn. pozbawionych spójności. Otwartym problemem pozostaje także określenie stanu naprężenia w przypadkach trójwymiarowej deformacji. Pewne rezultaty uzyskał DANTU [4] w badaniach na trójwymiarowym zbiorze kul wykonanych z żywicy Catalin. Po przyłożeniu obciążeń do zbioru kul poddano cały model wygrzewaniu uzyskując w ten sposób zamrożenie stanu deformacji. Ze stanu deformacji kul określono wartości sił kontaktowych z pomocą wzorów Hertza, wiążących wielkość powierzchni kontaktu dwóch kul z siłą nacisku. Dla wizualnego przedstawienia zamrożonego stanu naprężenia w kulach wypełniono wolne przestrzenie aralditem i wycięte z całego modelu płaskie płytki obserwowano w świetle spolaryzowanym. Otrzymano podobne do rys. 6 układy izochrom będące jednakże efektem obciążeń w różnych płaszczyznach.

Pewne zastrzeżenia może także budzić przyjęta przez de JOSSELINA de JONGA i VERRIJTA [7] aproksymacja rzeczywistego kształtu izochrom przez koła i wynikający stąd związek (2.3). Dla uniknięcia tego błędu w pracy [11] zrezygnowano z korzystania z wyrażenia analitycznego wykonując skalowanie użytych krążków dla różnych sił i różnego stosunku średnic. Uzyskano w ten sposób krzywe podające wprost zależność siły kontaktu od oddalenia izochromy od punktu kontaktu.

Jako pożądanе dalsze kierunki badań można na pierwszym miejscu wymienić obserwację wielkości dynamicznych (sił, naprężeń) przy znacznych deformacjach ośrodka. Zagadnienie to jest ważne przy poszukiwaniu praw rządzących przepływem materiałów sypkich przez kanały, leje zsypanowe itp. Doświadczenia takie pozwoliłyby także na weryfikację praw fizycznych opisujących stan plastycznego płynięcia materiału. Celowe byłyby także próby zastąpienia piasku szklanego materiałem czulszym optycznie co pozwoliłoby na zmniejszenie przykłađanych obciążeń.

Literatura cytowana w tekście

1. A. S. L. CHAN, *The design of Michell optimum structures*, Coll. Aero. Cranf. Rep., 142, 1960.
2. P. DANTU, *Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents*, Proc. 4-th ICOSOMFE, 144-148, London 1957.
3. P. DANTU, *Étude expérimentale d'un milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles*, Ann. Ponts Chauss., No 4, 1967.
4. P. DANTU, *Étude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent*, Geotechnique, 18, 1968, 50-55.
5. G. de JOSSELIN de JONG, *Discussion of «Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits»*, Trans. Amer. Geoph. Un., Vol. 39, No 6, 1958, 1160-1162.
6. G. de JOSSELIN de JONG, *Foto-elastisch onderzoek van korrelstapeligen*, LGM Med., Vol. 4, No 4, 1960, 119-134.
7. G. de JOSSELIN de JONG, A. VERRUJUT, *Étude photo-élastique d'un empilement de disques*, Cah. Gr. Franc. Rheol., T. 2, No 1, 1969, 73-86.
8. R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, *Metoda warstwy elastoptycznej w zastosowaniu do modelowego badania przestrzennych zagadnień kontaktowych*, Rozpr. Inż., T. 15, z. 3, 1967, 455-469.
9. R. DOROSZKIEWICZ, *Badania naprężeń w konstrukcjach niejednorodnych obciążonych ciężarem własnym*, Rozpr. Inż., T. 16, z. 2, 1968, 177-207.
10. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation*, Arch. Mech. Stos., T. 19, z. 1, 1967, 99-113.
11. A. DRESCHER, G. de JOSSELIN de JONG, *Application of photoelasticity to granular media*, (w oprac.).
12. M. FROCHT, *Photoelasticity*, Vol. I, Wiley, New York, 1941.
13. R. HILL, *Élastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, 1964, 357-372.
14. A. NIEMIERKO, B. OBIEGAŁKA, *O sposobach pomiaru składowych naprężeń w gruntach*, Arch. Inż. Łąd., T. XIII, z 4, 1967, 645-661.
15. NGUYEN CHANH, *Étude expérimentale de la poussée et de la butée des terres*, Ann. Ponts Chauss., No 4, 1968.
16. W. SZCZEPIŃSKI, *Method of characteristics in computation of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn., Vol. XII, No 12, 1964, 619-626.
17. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powdered mass*, Proc. 7-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1957, 153-158.
18. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powdered mass*, Proc. 8-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, 235-242.
19. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powder mass*, Proc. 9-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1959, 133-140.
20. T. WAKABAYASHI, *A further study on the determination of stress in powder mass*, Proc. 10-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1960, 187-192.
21. T. WAKABAYASHI, *Photoelastic method for determination of stress in powder mass*, Proc. 11-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1961, 135-138.
22. J. WEBER, *Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. Application à la rhéologie de ces milieux*, Cah. Gr. Franc. Rheol., T. 1, No 3, 1966, 161-170.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД

В работе рассматривается возможность применения модельных оптически чувствительных материалов для определения напряженного состояния в сыпучих средах. Обсуждается подробно два вида модельных сыпучих сред: а) среда составленная из валиков либо кружков из оптически

чувствительного материала, б) стеклянный песок с порами заполненными иммерсионной жидкостью. На основе литературных данных и собственных исследований проанализированы механические и оптические особенности обеих моделей а также виды информации получаемых из опытов. Указывается, что при использовании законов эластооптики модель построенная из валиков снабжает непосредственно информацией дискретного характера (о контактных силах), которая может использоваться и для континуального подхода путем введения среднего тензора напряжения. Приводится метод определения компонент этого тензора. Модель в виде стеклянного песка сообщает данные о траекториях главных напряжений на основе которых можно в некоторых случаях определить аналитическим путем значения напряжений. Рассмотрены также вопросы описания сред.

В работе рассмотрены достигнутые результаты и дальнейшие возможности развития метода, который должен найти широкое применение в научных исследованиях.

Summary

APPLICATION OF OPTICALLY SENSIBLE MODEL MATERIALS IN STRESS ANALYSIS OF GRANULAR MEDIA

Discussed is the problem of application of photoelastic materials as model media for experimental stress analysis in granular masses. Distinguished are two kinds of model media: a) medium composed of rollers or discs of a photoelastic material, b) crushed glass sand with pores filled by an immersion fluid. The mechanical and optical properties of both types of models are discussed on the basis of published data and author's results. The rollers model furnishes direct information of the discrete character (contact forces). These information may be, however, used also if the continua approach is employed by introducing the concept of a mean stress tensor. Proposed is the procedure allowing to estimate the components of this mean tensor. The glass sand model furnishes data on the principal stresses trajectories. In some cases the values of stresses may be calculated if use is made of the stress trajectories. The problem of description of the deformation of media is discussed.

The paper contains a review of recent results and discussion on further possible development of the method, which seems to be very promising for research works in mechanics of granular media.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 marca 1970 r.

O PROFILACH PRĘDKOŚCI PRZY LAMINARNYCH PRZEPLYWACH POLIMERÓW

STEFAN Z A H O R S K I (WARSZAWA)

1. Wstęp

Znajomość możliwie dokładnych profili prędkości dla roztworów i stopionych polimerów przepływających przez rury i kanały o przekroju prostokątnym posiada istotne znaczenie nie tylko dla analizy procesów technologicznych, lecz również dla badania i wyjaśnienia różnych «anomalii» towarzyszących przepływowi (wpływ naprężeń normalnych, redukcja oporów przepływu, poślizgi na ściankach itp.). Metody doświadczalnego wyznaczania krzywych płynięcia (konsystencji) dla cieczy nienewtonowskich, za jakie uważa się większość roztworów i stopionych polimerów, znane są dobrze z literatury podstawowej (por. np. [1, 2, 3, 4, 5]). Krzywe płynięcia pozwalają na analityczne określanie profili prędkości w oparciu o przyjęty idealny model cieczy (równania konstytutywne), co z kolei nie zawsze prowadzi do zadowalającej zgodności z profilami obserwowanymi w rzeczywistości.

Ostatnio podjęto liczne próby bezpośredniego mierzenia profili prędkości, stosując różne urządzenia elektryczne, optyczne itp., zarówno dla roztworów polimerów (por. [6, 7, 8, 9]), jak i dla stopionych polimerów (por. [10, 11, 12]) przepływających z różnymi szybkościami. Niezależnie od różnego stopnia trudności technicznych i niedokładności pomiarów (różne wymiary ziaren znaczących, zaburzenia wywołane obecnością elektrod i innych elementów pomiarowych), wymienieni autorzy różnili się nieraz znacznie w ocenie pewnych zjawisk towarzyszących przepływowi. I tak np. w pracy [11] stwierdzono przy przepływach stopionych polietylenów poślizg na ściankach i uznano go za istotną przyczynę rozrywania stopu (*melt fracture*), podczas gdy przy dokładniejszych pomiarach przedstawionych w [12] zjawiska poślizgu w ogóle nie obserwowano.

Korzyść ze znajomości analitycznych wyrażeń opisujących dokładnie rzeczywiste profile prędkości w cieczach nienewtonowskich jest ogromna, zwłaszcza przy badaniach teoretycznych. Na przykład w zagadnieniu stateczności przepływu i przejścia do przepływu zaburzonego, kształt profilu prędkości odgrywa rolę pierwszoplanową i niejednokrotnie decyduje o samym zjawisku (por. np. [13, 14]).

W niniejszych rozważaniach zwrócono uwagę na możliwość opisu przepływów stopionych polimerów przy małych szybkościach ścinania, za pomocą równań konstytutywnych nieściśliwej cieczy lepkosprężystej stopnia trzeciego (por. [15]). Odpowiednie

analityczne profile prędkości porównano z doświadczalnymi wynikami pracy [12]. Właściwą część rozważań poprzedzono krótkim omówieniem innych równań o charakterze empirycznym, jak prawo potęgowe Ostwalda—de Waele'a (por. [1, 2, 4]), zwracając szczególną uwagę na wady i zalety różnych sposobów podejścia.

2. Krzywe płynięcia i prawo potęgowe

Doświadczalne wyznaczanie krzywych płynięcia cieczy nienewtonowskich przepływających przez cylindryczne kapilary (przepływ Poiseuille'a) bazuje na następujących zależnościach Rabinowitscha—Mooneya (por. [4, 16]):

$$(2.1) \quad q_w = \frac{1}{\pi R^3} \left[3Q + \Delta P \frac{dQ}{d\Delta P} \right] = \frac{D_c}{4} \left[3 + \frac{d(\log D_c)}{d(\log \tau_w)} \right],$$

$$D_c = \frac{4Q}{\pi R^3}, \quad \tau_w = \frac{\Delta P}{l} \frac{R}{2},$$

gdzie q_w jest gradientem szybkości ścinania na ścianie przewodu, τ_w — odpowiadającym mu naprężeniem ścinającym, Q — wydatkiem cieczy, ΔP — spadkiem ciśnienia na długości l przepływu ustalonego, zaś R — promieniem wewnętrznym kapilary. Wielkości D_c i τ_w , z których pierwsza nazywana jest często pozorną szybkością ścinania, są zgodne ze zmiennymi konsystentnymi REINERA [1]. Zupełnie analogiczny wzór dla płaskich przepływów w kanałach (płaski przepływ Poiseuille'a) o grubości $a = 2h$ i szerokości b przybiera postać (por. [12, 4])

$$(2.2) \quad q_w = \frac{1}{2h^2b} \left[2Q + \Delta P \frac{dQ}{d\Delta P} \right] = \frac{D_s}{3} \left[2 + \frac{d(\log D_s)}{d(\log \tau_w)} \right],$$

$$D_s = \frac{3Q}{2h^2b}, \quad \tau_w = \frac{\Delta P}{l} h.$$

Zależności (2.1) i (2.2) dają jednoznaczny związek między τ_w i D_c lub D_s — opisujący własności cieczy w określonej temperaturze. W przypadku przeprowadzenia obliczeń dla ustalonych wartości D_c lub D_s wystarczy dokonać pomiaru w jednym doświadczeniu. Nie wchodząc w techniczne szczegóły samych doświadczeń, wspomnimy tylko, że korzystając z zależności (2.1) lub (2.2) należy uwzględnić odpowiednie poprawki na «efekty wejściowe» warunkujące rozwinięcie profilu prędkości w przepływie ustalonym (por. np. [4, 17]).

Doświadczalnie zaobserwowany fakt, że przy różnych zakresach szybkości ścinania zależności $\tau_w - D_c$ lub $\tau_w - D_s$ przybierają, w podwójnie logarytmicznej skali, postać bardzo zbliżoną do liniowej, był bezpośrednim powodem szerokiej kariery prawa potęgowego (Ostwalda—de Waele'a) w postaci następującej:

$$(2.3) \quad \tau = k|q|^n, \quad k > 0, \quad n \geq 1 \text{ lub } n \leq 1.$$

Prawo powyższe wiąże naprężenie ścinające τ z odpowiednim gradientem ścinania q za pośrednictwem dwóch stałych: miary konsystencji cieczy k (np. charakteryzującej lepkość przy $q = 1 \text{ sek}^{-1}$), wykładnika zachowania się cieczy n .

Zależności typu (2.3) i inne zostały obszernie omówione w literaturze (por. [1, 2, 4]), toteż obecnie ograniczymy się do przypomnienia, że prowadzą one do profili prędkości w postaci

$$(2.4) \quad v = \frac{Q}{\pi R^2} \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left| \frac{r}{R} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

dla przepływu przez kapilarę i

$$(2.5) \quad v = \frac{Q}{2hb} \frac{2n+1}{n+1} \left[1 - \left| \frac{y}{h} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

dla płaskiego przepływu w szczelinie.

W stosunku do prawa potęgowego (2.3) wysuwano cały szereg zastrzeżeń różnej natury (por. REINER [1]). Niektóre z nich, jak zależność wymiaru stałej materiałowej k od wykładnika potęgi n oraz nieobiektywność, mogą być usunięte poprzez wprowadzenie bezwymiarowego gradientu ścinania oraz zapisanie (2.3) w innej postaci, w której pozorna lepkość $\eta = \tau/q$ jest funkcją drugiego niezmiennika szybkości deformacji. Inne, jak np. własność, że dla $q = 0$ pozorna lepkość staje się nieskończoną lub zerową w zależności od tego czy $n < 1$, czy też $n > 1$, nie mogą być ominięte bez zmiany charakteru prawa (2.3). Ostatni fakt posiada istotne znaczenie, gdyż wprowadza zmiany w centralnej części profilu prędkości niezależnie od realnych własności lepkich cieczy przy małych gradientach ścinania.

Z punktu widzenia teoretycznej poprawności i ogólności wzoru (2.3) lista zasadniczych zastrzeżeń może być znacznie dłuższa. I tak np., nie pozwala on na ujmowanie bardziej złożonych przepływów wiskozymetrycznych, nie opisuje własności lepkością cieczy nienewtonowskich, efektów naprężeń normalnych itp. W czasie gdy dysponujemy ogólną teorią cieczy prostych i teorią przepływów wiskozymetrycznych (por. [3, 15]), należy traktować prawo (2.3) jako zależność empiryczną, ułatwiającą obliczenia w określonym zakresie parametrów fizycznych, lecz nie mogącą stanowić podstawy nowoczesnej wiskozymetrii i bardziej zaawansowanych studiów nad przepływami polimerów.

Gwoli sprawiedliwości należy dodać, że o popularności praw potęgowych w reologii zadecydowała stosunkowa prostota obliczeń, łatwość doświadczalnego wyznaczenia stałych k i n oraz możliwość opisu krzywych płynięcia w różnych zakresach szybkości ścinania poprzez właściwy dobór stałych.

3. Profile prędkości przy przepływach cieczy lepkością stopnia trzeciego

Jako kontrpropozycję w stosunku do prawa potęgowego, rozważymy obecnie możliwość zastosowania równań konstytutywnych nieściśliwej cieczy lepkością stopnia trzeciego do wyznaczenia profili prędkości w powolnych przepływach stopionych polimerów przez kapilary i szczeliny. Równania stopnia trzeciego pozwalają na odpowiednią

aproxymację funkcji wiskozymetrycznych dla ustalonych przepływów nieściśliwych cieczy prostych (por. [3, 15]). Należy nadmienić, że teoria funkcji wiskozymetrycznych daje zgodny z rzeczywistością opis licznych rozcieńczonych i skoncentrowanych roztworów polimerów; są to przede wszystkim prace MARKOVITZA i współpracowników [3, 18].

Dla wystarczająco powolnych przepływów nieściśliwych cieczy prostych równania konstytutywne mogą być zapisane w postaci następującej (por. [15]):

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_0(1 + \gamma \operatorname{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1), \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}_1 = 0,$$

ponieważ dla ustalonych przepływów wiskozymetrycznych $\mathbf{A}_n = 0$ dla $n \geq 3$. W równaniu powyższym η_0 oznacza lepkość przy zerowym gradiencie ścinania, α_1 , α_2 i β — współczynniki odpowiedzialne za lepkość sprężyste własności cieczy, γ — współczynnik charakteryzujący zmianę lepkości, p — dowolną funkcję skalarną. Kinematyczne tensory Rivlina — Ericksena są zdefiniowane następująco (por. [15]):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T, \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1 + \nabla \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{A}_1, \end{aligned}$$

gdzie $\nabla \mathbf{v}$ jest gradientem prędkości, zaś wskaźnik T oznacza operację transponowania.

Można łatwo pokazać (por. [15, 18]), że stałe materiałowe w (3.1) wiążą się z funkcjami wiskozymetrycznymi w sposób następujący:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \eta(q) &= \eta_0(1 + 2\gamma q^2) + 2\beta q^2 + o(q), \\ \sigma_1(q) &= 2\alpha_1 q^2 + \alpha_2 q^2 + o(q^4), \\ \sigma_2(q) &= \alpha_2 q^2 + o(q^4), \end{aligned}$$

przy czym η oznacza funkcję lepkości, zaś σ_1 i σ_2 — odpowiednie funkcje naprężeń normalnych. W ogólnym przypadku cieczy prostej obowiązują związki

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \eta_0 &= \lim_{q \rightarrow 0} \eta(q), \\ \alpha_2 &= \lim_{q \rightarrow 0} [\sigma_2(q)/q^2], \\ \alpha_1 &= \lim_{q \rightarrow 0} [(\sigma_1 - \sigma_2)/2q^2]. \end{aligned}$$

3.1. Płaskie przepływy Poiseuille'a. Dla płaskiego przepływu w kanale lub szczelinie równania (3.1) upraszczają się do postaci (por. [15])

$$(3.1.1.) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_0(1 + \eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}_1 = 0,$$

a ponieważ w kartezjańskim układzie współrzędnych jedyną niezerową składową prędkości jest prędkość w kierunku przepływu $v(y)$, mamy

$$(3.1.2) \quad [\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2q^2 \end{bmatrix}, \quad q = \frac{\partial v}{\partial y}$$

oraz

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -p, & \sigma_{22} &= -p + 2\alpha_2 q^2, & \sigma_{33} &= -p, \\ \sigma_{12} &= \eta_0(1 + 2\eta_1 q^2)q. \end{aligned}$$

Podstawiając (3.1.3) do równań równowagi w postaci

$$(3.1.4) \quad \operatorname{div} \sigma = \rho \dot{v} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right),$$

otrzymamy

$$(3.1.5) \quad p = -2\alpha_2 q^2 + fx, \quad \eta_0(1 + 2\eta_1 q^2)q = -fy,$$

gdzie przez $f = \Delta P/l$ oznaczyliśmy gradient ciśnienia w kierunku przepływu.

Ostatnie z równań (3.1.5) zapisane w postaci

$$(3.1.6) \quad \frac{\partial v}{\partial y} + 2\eta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^3 = -\frac{f}{\eta_0} y,$$

można całkować bezpośrednio; wygodniej jest jednak przedstawić wynik całkowania w postaci następującego szeregu (por. [13])

$$(3.1.7) \quad v(y) = \frac{fh^2}{2\eta_0} \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{M}{2} \left(1 - \frac{y^4}{h^4} \right) + M^2 \left(1 - \frac{y^6}{h^6} \right) - \frac{11}{4} M^3 \left(1 - \frac{y^8}{h^8} \right) + \dots \right],$$

gdzie $M = 2\eta_1(fh)^2/\eta_0^2$ jest parametrem charakteryzującym zmianę lepkości ze wzrostem gradientu ścinania. Szereg (3.1.7) jest bezwzględnie zbieżny dla małych $|M|$ ($|M| \leq 0,3$). W praktycznych obliczeniach można z wystarczającym stopniem dokładności ograniczyć się do trzech pierwszych wyrazów szeregu (3.1.7) nawet dla $|M| \leq 0,5$.

Warto nadmienić, że dla ustalonych wartości f , h i η_0 profil prędkości będzie bardziej wydłużony, niż odpowiedni profil paraboliczny, gdy $M < 0$ i spłaszczony, gdy $M > 0$ (por. [13]). Nieco inaczej ma się sprawa, gdy porównujemy profile prędkości dla ustalonego wydatku Q . Mamy wówczas

$$(3.1.8) \quad Q = 2 \int_0^h v(y) b dy = \frac{2fh^3b}{3\eta_0} \left[1 - \frac{3}{5} M + \frac{9}{7} M^2 \right]$$

oraz

$$(3.1.9) \quad v(y) = \frac{3Q}{4hb \left(1 - \frac{3}{5} M + \frac{9}{7} M^2 \right)} \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{M}{2} \left(1 - \frac{y^4}{h^4} \right) + M^2 \left(1 - \frac{y^6}{h^6} \right) \right],$$

a zatem dla małych $M < 0$ profil będzie bardziej spłaszczony, niż w przypadku cieczy newtonowskiej ($M = 0$).

Warto jeszcze dodać, że profil prędkości (3.1.7) lub (3.1.9) nie zależy od parametru α_1 charakteryzującego lepkośćsprężyste własności cieczy, oraz że $M < 0$ ($\eta_1 < 0$) odpowiada zmniejszającej się, wraz z gradientem ścinania, pozornej lepkości cieczy. Ostatni fakt jest najczęściej obserwowany przy ustalonych przepływach roztworów i stopów polimerów (por. [2, 3, 4]).

Wprowadzając pojęcie gradientu (szybkości) ścinania na ścianie kanału $q_w = |\partial v / \partial y|_{y=h}$, można, na podstawie (3.1.8) i (3.1.9), stwierdzić, że

$$(3.1.10) \quad Q = \frac{2}{3} q_w b h^2 \frac{1 - 0,6M + 1,29M^2}{1 - M + 3M^2},$$

$$(3.1.11) \quad v_{\max} = v(0) = \frac{q_w h}{2} \frac{1 - 0,5M + M^2}{1 - M + 3M^2}.$$

3.2. Przepływy Poiseuille'a. Rozumując analogicznie i uwzględniając równania konstytutywne w pełnej postaci (3.1) dochodzimy, dla przepływu przez cylindryczne kapilary, do zależności następujących:

$$(3.2.1) \quad [\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 2q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = q;$$

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + (2\alpha_1 + \alpha_2)q^2, & \sigma_{22} &= -p, \\ \sigma_{33} &= -p + \alpha_2 q^2, & \sigma_{13} &= \eta_0 \left[1 + \left(2\gamma + \frac{2\beta}{\eta_0} \right) q^2 \right] q \end{aligned}$$

uzyskanych w założeniu, że w walcowym układzie współrzędnych kierunek przepływu pokrywa się z osią z , a jedyną niezerową składową prędkości jest $v(r)$. Podstawiając (3.2.2) do równań równowagi (3.1.4) otrzymamy

$$(3.2.3) \quad q + \left(2\gamma + \frac{2\beta}{\eta_0} \right) q^3 = -\frac{f}{2\eta_0} r,$$

a po scałkowaniu i uwzględnieniu, że $v(R) = 0$,

$$(3.2.4) \quad v(r) = \frac{fR^2}{4\eta_0} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{N}{8} \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) + \frac{N^2}{16} \left(1 - \frac{r^6}{R^6} \right) \right],$$

gdzie

$$(3.2.5) \quad N = \frac{(fR)^2}{\eta_0^2} \left(2\gamma + \frac{2\beta}{\eta_0} \right) = \frac{(fR)^2}{\eta_0^2} 2\eta_1.$$

Ponieważ

$$(3.2.6) \quad Q = 2 \int_0^R \pi r v(r) dr = \frac{\pi R^4 f}{8\eta_0} \left[1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32} N^2 \right],$$

mamy

$$(3.2.7) \quad v(r) = \frac{2Q}{\pi R^2 \left(1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32} N^2 \right)} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{N}{8} \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) + \frac{N}{16} \left(1 - \frac{r^6}{R^6} \right) \right];$$

a także

$$(3.2.8) \quad Q = \frac{\pi R^3}{4} q_w \frac{1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32} N^2}{1 - \frac{N}{4} + \frac{3}{16} N^2},$$

$$(3.2.9) \quad v_{\max} = v(0) = \frac{q_w R}{2} \frac{1 - \frac{N}{8} + \frac{N^2}{16}}{1 - \frac{N}{4} + \frac{3}{16} N^2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że nawet dla jednakowych wartości η_0 , γ i β parametry M i N nie są identyczne; zależą one od gradientu ciśnienia f oraz grubości $2h$ i promienia R . Dopiero dla tych samych cieczy przepływających przy tym samym gradiencie ciśnienia przez kapilarę i szczelinę, której grubość równa jest średnicy wewnętrznej kapilary, mamy $M \equiv N$.

3.3. Płaskie przepływy z warstwą przyścienną. Rozważmy obecnie płaski przepływ przez kanał, w którym obserwuje się zjawisko efektywnego poślizgu na ściankach. Jeśli warstwa przyścienna cieczy posiada, np. na skutek wpływu dużego gradientu ścinania w pobliżu ścianki, lepkość mniejszą niż reszta cieczy, znaczna część ścinania realizuje się w warstwie przyściennej. Zjawisko takie obserwowane w przepływach zawiesin (np. [8]), roztworów (np. [6]) i stopionych polimerów (np. [10, 11]) ma istotny wpływ na kształt profilu prędkości.

Zakładając, że ciecz opisana jest równaniem (3.1.1), a bardzo cienka warstwa przyścienna podobnym równaniem ze stałą lepkością η_{02} , otrzymamy (por. [19])

$$(3.3.1) \quad v_1(y) = \frac{fh^2}{2\eta_{01}} \left[\frac{1}{m} - \frac{y^2}{h^2} + \delta^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) - \frac{M}{2} \left(\delta^4 - \frac{y^4}{h^4} \right) + \right. \\ \left. + M^2 \left(\delta^6 - \frac{y^6}{h^6} \right) \right], \quad 0 \leq y \leq h_1,$$

$$v_2(y) = \frac{fh^2}{2\eta_{01}} \frac{1}{m} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad h_1 \leq y \leq h,$$

gdzie

$$(3.3.2) \quad m = \frac{\eta_{02}}{\eta_{01}}, \quad \delta = \frac{h_1}{h}, \quad M = \frac{2\eta_1(fh)^2}{\eta_{01}^2},$$

zaś wskaźnikami 1 i 2 oznaczono wielkości odnoszące się odpowiednio do rdzenia i warstwy przyściennej.

Biorąc pod uwagę, że

$$(3.3.3) \quad Q = 2 \int_0^{h_1} bv_1(y) dy + 2 \int_{h_1}^h bv_2(y) dy = \\ = \frac{2fh^3b}{3\eta_0} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \delta (1 - \delta^2) - \frac{3}{5} M \delta^5 + \frac{9}{7} M^2 \delta^7 \right],$$

mamy

$$(3.3.4) \quad Q = \frac{2}{3} bh^2 q_w \left[m + \frac{3}{2} (1 - m) \delta (1 - \delta^2) - \frac{3}{5} M \delta^5 m + \frac{9}{7} M^2 \delta^7 m \right],$$

$$(3.3.5) \quad v_{\max} = v_1(0) = \frac{q_w h}{2} \left[(1 - \delta^2) + \delta^2 m - \frac{M}{2} \delta^4 m + M^2 \delta^6 m \right],$$

gdzie q_w tak jak poprzednio oznacza gradient ścinania na ściance.

Jeśli założyć, że warstwa przyścienna jest bardzo cienka ($\delta \approx 1$, $\delta^2 \approx 1$, itp.) i mniej lepka przy małych gradientach ścinania ($m < 1$), to zależności (3.3.4) i (3.3.5) upraszczają się do postaci

$$(3.3.6) \quad Q = \frac{2}{3} q_w b h^2 m (1 - 0,6M + 1,29M^2),$$

$$(3.3.7) \quad v_{\max} = \frac{1}{2} q_w h m (1 - 0,5M + M^2).$$

3.4. Zmiana lepkości a krzywe płynięcia. Dotychczasowe rozważania dotyczyły zależności pozwalających opisać profile prędkości w powolnych przepływach przez kanały i kapilary. Niezależnym zagadnieniem jest określenie parametrów M i N na podstawie znajomości doświadczalnych krzywych płynięcia (konsystencji) $\tau_w - D_s$ lub $\tau_w - D_c$.

Wykorzystując, na przykład, zależności (3.1.9) i (3.2.7) oraz przyrównując odpowiednie gradienty ścinania na ściankach do wartości wynikających z wzorów Rabinowitscha-Mooneya (2.1)₂, (2.2)₂, otrzymamy

$$(3.4.1) \quad \frac{1}{3} \left[2 + \frac{d(\log D_s)}{d(\log \tau_w)} \right] = \frac{1 - M + 3M^2}{1 - \frac{3}{5}M + \frac{9}{7}M^2},$$

$$(3.4.2) \quad \frac{1}{4} \left[3 + \frac{d(\log D_c)}{d(\log \tau_w)} \right] = \frac{1 - \frac{N}{4} + \frac{3}{16}N^2}{1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32}N^2}.$$

Jeżeli w zakresie małych gradientów ścinania krzywe płynięcia uzyskane w podwójnie logarytmicznej skali są zbliżone do linii prostych (por. [1, 4]), to wyrażenia z lewej strony (3.4.1) i (3.4.2) przybierają wartości stałe — związane ze współczynnikami nachylenia prostych $\log D_s - \log \tau_w$ lub $\log D_c - \log \tau_w$. Wystarczy teraz rozwiązać odpowiednie równania drugiego stopnia na M lub N .

Oczywiście możliwe są inne sposoby określania parametrów M , N , np. na podstawie doświadczalnie uzyskanego przebiegu funkcji viskozymetrycznych $\eta(q)$, $\sigma_1(q)$, $\sigma_2(q)$ (por. [3]).

4. Porównanie z wynikami doświadczeń dla stopionych polimerów

Niedawno den OTTER, WALES i SCHIJF, [12], przeprowadzili bardzo dokładne próby bezpośredniego pomiaru profili prędkości dla stopionych polimerów przepływających z małymi szybkościami ścinania przez szczelinę o głębokości $2h = 0,83$ mm i szerokości $b = 10$ mm (stosunek głębokości do szerokości 1:12). Badaniom poddano: dwa polietyleny o dużej gęstości Marlex 6002 i Marlex 6050, jeden polietylen o małej gęstości Stamytan 1700 oraz polidwumetyl siloxan Siloprene RS, z tym, że dla dwu ostatnich polimerów badania przeprowadzono również dla szybkości przepływu przewyższających wartości charakterystyczne dla zjawiska rozrywania stopu. Pomiaru prędkości przeprowadzano metodami optycznymi wykorzystując naturalne zanieczyszczenia polimerów dostępnych w handlu; odpowiedni opis aparatury i metod pomiaru podano w cytowanej już pracy [12].

Zmierzone profile prędkości porównywano z profilami obliczonymi na podstawie krzywych płynięcia, stosując prawo potęgowe [wzory (2.3) i (2.4)]. Gradient ścinania na ścianie q_w obliczano w myśl (2.1), zaś wykładnik potęgi n określano na podstawie pomiarów przeprowadzonych dla przepływów w kapilarach. Już poprzednio w innej pracy [20] stwierdzono dobrą zgodność krzywych płynięcia wyznaczonych z przepływów przez kapilary i szczeliny.

Niektóre wyniki badań autorów pracy [12] przedstawiono na rys. 1, 2 i 3, a potrzebne dane liczbowe zebrano w tablicy 1. Na rysunkach powyższych krzywe ciągłe opisują profile prędkości dla prawa potęgowego (2.3).

Tablica 1

Polimer	Temperatura przepływu °C	Indeks stopu	Wykładnik potęgi n	Doświadczalna wartość q_w sek ⁻¹	Obliczone v_{max} mm/sek	Obliczone Q mm ³ /sek
SILOPRENE RS	20	—	0,62	6,2	0,98	5,9
MARLEX 6002	190	0,25	0,455	7,1	0,92*)	5,8
MARLEX 6050	170	5,0	0,62	6,2	0,98	5,9

*) W przeciwieństwie do pozostałych wyników, wartość powyższa jest nieco mniejsza niż wartość (0,96) wynikająca z wyk. resu w pracy [12].

Przy dokładnym porównaniu profili prędkości z profilami wynikającymi z naszych poprzednich rozważań, istotną trudność stanowi brak wszystkich danych pozwalających odtworzyć odpowiednie krzywe płynięcia. W związku z tym zastosowano procedurę następującą:

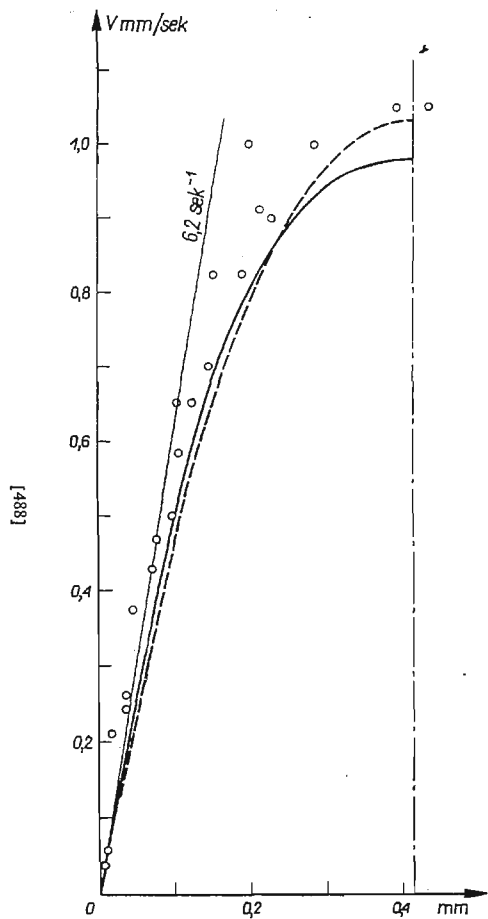
Na podstawie (2.5) otrzymano zależność

$$(4.1) \quad |q_w| = \frac{Q}{2h^2b} \frac{2n+1}{n},$$

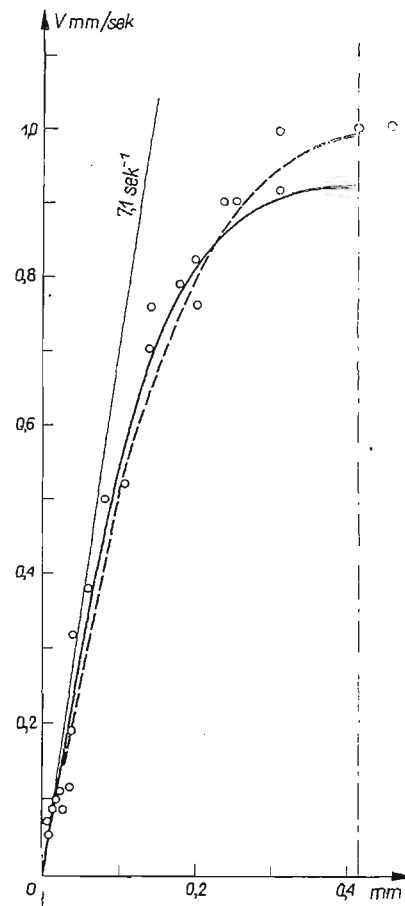
z której, znając wartości q_w podane w pracy [12] oraz wykładnik potęgi n , można obliczyć wydatek Q równy w przybliżeniu wartości zmierzonej. Następnie rozwiązano równanie (3.1.10) wyznaczając odpowiednie (ujemne) wartości M . Znajomość przybliżonego parametru M pozwoliła obliczyć v_{max} w myśl (3.1.11) oraz wyznaczyć cały profil prędkości (3.1.8).

Powyższy sposób podejścia zastosowano do przypadków przedstawionych na rys. 1 i 2, uzyskując: $Q = 5,9$ mm³/sek, $M \approx -0,29$ i $v_{max} = 1,035$ mm/sek dla Siloprenu RS oraz $Q = 5,8$ mm³/sek, $M \approx -0,5$ i $v_{max} = 0,995$ mm/sek dla Marlexu 6002. Profile prędkości przedstawiono na rys. 1 i 2 liniami przerywanymi.

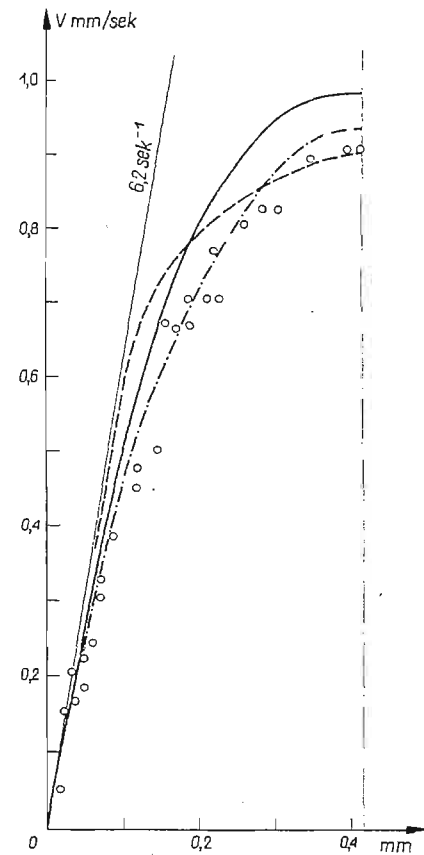
Identyczna procedura zawodzi dla przypadku przepływu Marlexu 6050, dla którego, jak widać z rys. 3, profil prędkości obliczony na podstawie prawa potęgowego (linia ciągła) leży znacznie powyżej profilu utworzonego z punktów pomiarowych. Nawet ewentualne przyjęcie $M > 0$, co jest sprzeczne z doświadczalnie stwierdzonym zmniejszaniem się lepkości wraz ze wzrostem gradientu ścinania, niewiele pomaga. W celu uzyskania profilu prędkości możliwie zgodnego z przebiegiem pomiarów, należy przyjąć



Rys. 1. Profile prędkości dla Siloprenu RS przy 20°C. Kółkami oznaczono prędkości zmierzone w pracy [12]



Rys. 2. Profile prędkości dla Marlexu 6002 przy 190°C. Kółkami oznaczono prędkości zmierzone w pracy [12]



Rys. 3. Profile prędkości dla Marlexu 6050 przy 170°C. Kółkami oznaczono prędkości zmierzone w pracy [12]

albo występowanie efektywnego poślizgu w cienkiej warstwie przyściennej, albo też założyć, że obliczony w myśl (4.1) wydatek cieczy jest zbyt duży w porównaniu z wydatkiem rzeczywistym.

Chociaż możliwość występowania efektywnego poślizgu na ściankach nie została jednoznacznie udowodniona (por. Wstęp), zjawisko to wydaje się bardziej prawdopodobne dla Marlexu 6050 niż dla Marlexu 6002, jeśli przyjąć, że większy indeks stopu odpowiada mniejszym bocznym rozgałęzieniom polimeru, co z kolei sprzyjałoby większemu wpływowi ścianki na orientację struktury. Stwierdzono także w pracy [20], że dla Marlexu 6050 odpowiedni współczynnik charakteryzujący poprawkę na «efekty wejściowe» (por. [17]) w kapilarach jest dla małych naprężeń ścinających wyraźnie mniejszy niż dla Marlexu 6002 i bardziej zbliżony do stałej Couette'a dla przepływów cieczy newtonowskich. Oznacza to, że dla Marlexu 6050 ustalony profil przepływu jest osiągany na krótszej części przewodu, czemu sprzyjałoby niewątpliwie istnienie efektywnego poślizgu na ściankach.

Wykorzystując (3.3.6) i (3.3.7) oraz obliczone $Q = 5,9 \text{ mm}^3/\text{sek}$ i wzięte z pomiarów $v_{\max} = 0,9 \text{ mm}/\text{sek}$ (por. rys. 3), otrzymamy $m \approx 0,28$ i $M \approx -1$. Chociaż ostatnia wartość wychodzi znacznie poza dopuszczalny zakres $|M|$, przy którym można korzystać z rozwinięcia w szereg (3.1.7), odpowiedni profil prędkości dla porównania zaznaczono na rys. 3 linią przerywaną.

Założenie mniejszego, niż obliczony na podstawie (4.1), wydatku cieczy, np. $Q = 5,5 \text{ mm}^3/\text{sek}$, daje w myśl (3.1.9) i (3.1.10) wartości następujące: $M \approx -0,4$, $v_{\max} = 0,93 \text{ mm}/\text{sek}$. Odpowiadający im profil prędkości, oznaczony na rys. 3 linią kropka-kreska, dość dobrze opisuje układ punktów doświadczalnych. Warto również dodać, że dla jeszcze mniejszych wartości $Q = 5,1 \text{ mm}^3/\text{sek}$ z jednoczesnym uwzględnieniem zjawiska poślizgu otrzymamy dla $v_{\max} = 0,92 \text{ mm}/\text{sek}$ wartości $M \approx 0,71$ i $M \approx 0(!)$, również właściwie opisujące rzeczywisty profil prędkości. Rozważania powyższe dobrze ilustrują znaczenie znajomości możliwie dokładnego wydatku cieczy; mając dane dla przepływu Q i v_{\max} , jesteśmy w stanie jednoznacznie określić wszystkie pozostałe parametry cieczy.

Zaznaczmy jeszcze, że znajomość parametru cieczy M określonego na podstawie przepływu przez szczelinę pozwala porównać gradienty ścinania na ściance q_w i maksymalne prędkości v_{\max} obliczone na podstawie prawa potęgowego (2.3) i równań konstytutywnych (3.1) dla przepływów przez cylindryczne kapilary. I tak dla Siloprenu RS, przy ustalonym wydatku oraz tak dobranych wymiarach szczeliny i kapilary, żeby $M = N$ (por. p. 3.2), q_w wynikające z prawa potęgowego będzie o 11% większe, niż ta sama wielkość wynikająca z równań cieczy stopnia trzeciego, zaś v_{\max} odpowiednio mniejsze o 10%. Odchylenia powyższych wielkości dla Marlexu 6002 wyniosą 18–19%.

5. Krótkie wnioski

Reasumując dotychczasowe rozważania można stwierdzić, że:

1) równania konstytutywne nieściśliwej cieczy lepkosprężystej stopnia trzeciego pozwalają na opis profili prędkości i krzywych płynięcia dla stopionych polimerów (Siloprene RS, Marlex 6002) przepływających z małymi szybkościami przez kanały lub kapilary;

2) równania powyższe dają na ogół mniejsze spłaszczenie profili prędkości na osi przepływu niż prawa potęgowe; fakt ten wynika przede wszystkim z istnienia skończonej lepkości przy zerowym gradiencie ścinania;

3) proponowane równania konstytutywne mogą być stosowane do opisu bardziej złożonych przepływów wiskozymetrycznych umożliwiając uwzględnianie własności lepko-sprężystych, efektów naprężeń normalnych itp.;

4) parametry odpowiedzialne za zmiany pozornej lepkości cieczy wraz ze wzrostem gradientu ścinania zależą istotnie od doświadczalnych parametrów krzywych płynięcia, a zwłaszcza od wydatku cieczy;

5) niewielka modyfikacja rozważanych zależności umożliwia uwzględnienie zjawiska efektywnego poślizgu na ściankach przewodu; występowanie tego zjawiska ma istotny wpływ na kształt obliczonego profilu prędkości.

Literatura cytowana w tekście

1. M. REINER, *Deformation and Flow*, London 1949.
2. W. L. WILKINSON, *Non-Newtonian Fluids*, London-Oxford-New York-Paris 1960.
3. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin-Heidelberg-New York 1960.
4. D. M. MCKELVEY, *Polymer Processing*, New York 1962.
5. A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, New York-London-Sydney 1967.
6. B. A. TOMS, *Detection of a wall effect in laminar flow of solutions of a linear polymer*, J. Colloid Sci., **4** (1949), 511-521.
7. V. C. PATEL, M. R. HEAD, *Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows*, J. Fluid Mech., **38** (1969), 181-201.
8. S. L. SOO, *Pipe flows of suspensions*, Appl. Sci. Res., **21** (1969), 68-84.
9. G. J. REUSSWIG, F. F. LING, *A reassessment of the wall effect of non-Newtonian flow of polymer solutions*, App. Sci. Res., **21** (1969), 260-283.
10. J. J. BENBOW, R. V. CHARLEY, P. LAMB, *Unstable flow of molten polymers*, Nature, **192** (1961), 223-225.
11. B. MAXWELL, J. C. GALT, *Velocity profiles for polyethylene melt in tubes*, J. Polymer Sci., **62** (1962), S50-S53.
12. J. L. den OTTER, J. L. S. WALES, J. SCHIJF, *The velocity profiles of molten polymers during laminar flow*, Rheolog. Acta, **6** (1967), 205-209.
13. S. ZAHORSKI, *Instability depending on elastic properties of fluids in plane steady shearing flows*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 145-166.
14. S. ZAHORSKI, *Effect of diffusion of viscoelastic properties on instability of plane, free-surface flows*, Arch. Mech. Stos., **22** (1970), 213-231.
15. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Encycl. of Physics, vol. III/3, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
16. B. RABINOWITSCH, *Über die Viskosität und Elastizität von Solen*, Z. Phys. Chem., A **145** (1929), 1-26.
17. E. G. BAGLEY, *End corrections in the capillary flow of polyethylene*, J. Appl. Phys., **28** (1957), 624-627.
18. H. MARKOWITZ, *Normal stress measurements on polymer solutions*, Proc. IVth Inter. Congress Rheol., part 1, New York-London-Sydney 1965.
19. S. ZAHORSKI, *Role of elasticity stratification in two-layer flows down an inclined plane*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 571-583.
20. J. L. S. WALES, J. L. den OTTER, H. JANESCHITZ-KRIEGL, *Comparison between slit viscometry and cylindrical capillary viscometry*, Rheol. Acta, **4** (1965), 146-152.

Р е з ю м е

О ПРОФИЛЯХ СКОРОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПОЛИМЕРОВ

Точные по возможности сведения о профилях скорости для растворов и расплавов полимеров протекающих по трубам и каналам весьма существенны с точки зрения технологических процессов ровно как из точки зрения анализа более сложных явлений (аномальное течение, неустойчивость и др.). Существует много экспериментальных методов определения кривых течения, на основе которых получают аналитические профили скорости для различных уравнений состояния. Одной из наиболее широко применяемых моделей является модель жидкости со степенным законом вязкости, против которой можно однако выдвинуть много доводов (ср. [1]). В последнее время предприняты попытки определения профилей скорости с помощью прямых измерений (ср. [9, 11, 12]).

В настоящей работе предложены уравнения состояния вязко-упругой жидкости третьего порядка для описания медленных, ламинарных течений расплавов полимеров через щели и цилиндрические капилляры. Эти уравнения не только более общи по своей природе но и вытекающие из них зависимости могут легко модифицироваться для случая „эффективного скольжения” вдоль стенок. Для иллюстрации, полученные путем теоретических рассуждений профили, сравниваются с экспериментами других авторов проведенными для течения сквозь щели (ср. [12, 20]).

S u m m a r y

ON VELOCITY PROFILES IN LAMINAR FLOWS OF POLYMERS

A knowledge of possibly exact velocity profiles for polymer solutions and melts in pipe and channel flows is of great importance for technological processes as well as for more advanced analysis of flows (anomalous effects, instability etc.). There exist numerous methods of experimental determination of flow curves, on the basis of which analytical velocity profiles are obtained for various constitutive equations. One of the most widely used models is that of so-called *power law fluid* against which, however, many objections can be formulated (cf. [1]). More recently, attempts have been made to determine velocity profiles by means of direct measurements (cf. [9, 11, 12]).

In the present paper the constitutive equations of a visco-elastic fluid of third grade are proposed for description of slow laminar flows of molten polymers in slits and cylindrical capillaries. These equations are not only of more general nature (an approximation for simple fluids) but also the resultant relations can be easily modified for the case of *effective slip* at the walls. For further illustration, the velocity profiles resulting from our theoretical considerations have been compared with the slit flow experiments of other authors (cf. [12, 20]).

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 marca 1970 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

KOMUNIKAT

OBEJMUJĄCY SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA I KWARTAŁ 1970 ROKU

I. ROZWIJANIE DZIAŁALNOŚCI W DZIEDZINIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych w Oddziałach ilustruje poniżej zamieszczona tabela:

L. p.	Oddział	Liczba			
		zebrań	referatów	uczestników	dyskutantów
1	Bydgoszcz	1	1	20	6
2	Częstochowa	3	3	45	10
3	Gdańsk	—	—	—	—
4	Gliwice	—	—	—	—
5	Kraków	—	—	—	—
6	Łódź	1	1	9	4
7	Poznań	2	2	20	5
8	Szczecin	2	2	51	12
9	Warszawa	1	1	40	4
10	Wrocław	2	2	23	11
	Razem	12	12	208	52

Tematyka referatów wygłaszanych na zebraniach naukowych była następująca:

L. p.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczestników	dyskulantów
			Oddział w Bydgoszczy		
1	12.01.70	E. KARAŚKIEWICZ	Drgania własne pewnego układu wibrouderzeniowego o dwóch stopniach swobody	20	6
			Oddział w Częstochowie		
2	29.01.70	J. STOJANOWSKI	Podstawy reologii fenomenologicznej	22	4
3	25.02.70	T. KRUPKOWSKI	Nieliniowe własności cieczy dipolowych	13	3

L. p.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
4	25.03.70	R. PARKITNY	O naprężeniach własnych ciał stygnących	10	3
Oddział w Łodzi					
5	19.03.70	W. BARAŃSKI	Oddziaływanie wewnętrzne w ośrodku ciągłym	9	4
Oddział w Poznaniu					
6	29.01.70	S. PRZYGÓ- RZEWSKI	Zastosowanie techniki wibracyjnej na stanowis- kach do przyspieszonych badań maszyn	12	2
7	20.02.70	A. ŚLIWIŃSKI	Badania struktury ciał stałych za pomocą ultra- dźwięków o wysokiej częstotliwości	8	3
Oddział w Szczecinie					
8	21.01.70	J. DOROB- CZYŃSKI	Stateczność miejscowa kratowych masztów i wież	17	5
9	04.03.70	K. GRUDZIŃSKI i J. LORKIEWICZ	Wytrzymałość walcowych klejonych połączeń me- tali	34	7
Oddział w Warszawie					
10	06.04.70	M. ALEKSANDER (Londyn) (organizowane wspólnie z IPPT)	Plastyczne odkształcenia metali przy wysokich ciśnieniach	38	4
Oddział we Wrocławiu					
11	02.02.70	E. GAWRYCH- ŻUKOWSKI	Automatyzacja obliczeń układów prętowych przy użyciu elektronicznych maszyn cyfrowych	11	5
12	02.03.70	K. RYKALUK	Stan naprężeń w dźwigarze powierzchniowym szczególnego rodzaju	12	6
Razem				206	52

2. Organizowanie sympozjów i konferencji naukowych dotyczących wybranych działów specjalnych

1) **Oddział w Gliwicach** zorganizował w dniach 17—23 lutego 1970 r. Sympozjon na temat «Metody statystyczne w mechanice», poświęcony aktualnym problemom zastosowania różnych metod statystycznych w mechanice. Sympozjon zgromadził 79 uczestników, przedstawicieli uczelni i instytutów krajowych zainteresowanych tematyką. Na sympozjon zgłoszono 33 referaty, których obszerne streszczenia wydano drukiem. Tytuły referatów były następujące:

- 1 K. BIERNATOWSKI Rachunek prawdopodobieństwa w mechanice gruntów
- 2 Wł. BOGUSZ Stateczność techniczna układów stochastycznych
- 3 Wł. BOGUSZ Związek między funkcją Lapunowa a gęstością prawdopodobieństwa
- 4 St. BRAMSKI Badania wpływu przypadkowych podmuchów wiatru na ruch śmigłowca z auto-
M. CZERKAS stabilizatorem
- 5 E. CZOGAŁA Wpływ skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła na losowe charakterystyki
T. CHMIELNIAK rozkładu temperatur przy stochastycznych źródłach ciepła
- 6 T. CHMIELNIAK Rozkład temperatury w przecie przy przypadkowych $\bar{\tau}$ położeniach źródeł ciepła
E. CZOGAŁA
- 7 T. CHMIELEWSKI Eksperymentalne badania drgań stochastycznego odpowiednika współczynnika
dynamicznego
- 8 W. CHMIELEWSKI Wielokanałowe analizatory cyfrowe do badań statystycznych
E. KAMIŃSKI

- 9 J. CZUBASZEK Zdarzenia losowe w pomiarach wartości wytrzymałości doraźnej oraz granicznego odkształcenia ścinanych ośrodków sypkich
- 10 M. DIETRICH O statystycznym ujęciu obciążenia dynamicznego zębów kół zębatych
T. KOPYT
Wł. OZIMOWSKI
- 11 J. JAŻWIŃSKI O pewnej metodzie przybliżonej oceny niezawodności elementów mechanicznych
H. TOMASZEK
- 12 St. KAWULOK Zastosowanie metody korelacyjnej do analizy wyników badań obciążenia zbrojenia szybowego
- 13 Z. KOLEND A Uzgadnianie bilansów energii w procesach wymiany ciepła
- 14 J. KUBIK Problem ekstremalnych obciążeń losowych
- 15 T. LAMBER Wpływ metod pomiaru na przedział ufności naprężeń własnych w drutach sta-
J. WOJNAROWSKI lowych
- 16 L. MÜLLER Zastosowanie przyrządów do przetwarzania danych pomiarowych
- 17 J. MURZEWSKI Komulacja losowych impulsów obciążenia konstrukcji
A. WINIARZ
- 18 T. OPOLSKI Statystyczna weryfikacja rozkładów wielkości ziarn stali
S. LEWANDOWSKI
M. GOŁĘBIEWSKA
- 19 Zb. OSIŃSKI Problemy stochastyczne w drganiach nieliniowych
- 20 P. RUSEK Zastosowanie funkcji korelacyjnych do oceny jakości świdrów gryzowych
- 21 B. SKALMIERSKI Niektóre metody statystyczne w dynamice układów mechanicznych
- 22 B. SKALMIERSKI O pewnym problemie ugięć powłoki cylindrycznej pod wpływem obciążeń sto-
E. CZOGAŁA chastycznych
- 23 A. STRUPCZEWSKI Zastosowanie metody statystycznej do wyznaczania współczynników gorącego
W. ŻYSZKOWSKI miejsca w wysokostrumieniowym reaktorze badawczym
- 24 B. SZARANIEC Metoda numeryczna rozwiązania układu równań różniczkowych z funkcjami losowymi
- 25 J. SZARGUT Zastosowanie rachunku wyrównawczego w technice cieplnej
- 26 A. TYLIKOWSKI Przypadkowy rozkład temperatury w płycie o niejednakowych stałych materia-
T. CHMIELNIAK łowych
- 27 A. TYLIKOWSKI Geometrycznie nieliniowe drgania przypadkowe płyty prostokątnej
- 28 A. TYLIKOWSKI Niestacjonarne drgania przypadkowe wywołane rozruchem pewnych układów transportowych
- 29 J. WICHER Identyfikacja nieliniowego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody znajdującego się pod działaniem wymuszeń przypadkowych
- 30 J. WICHER O współczynnikach linearyzacji statystycznej w metodzie E. D. Zajdenberga
- 31 M. ZABAWA Pewna probabilistyczna metoda doboru parametrów układów mechanicznych
- 32 J. ŻÓŁTOWSKI Studia nad specyfikacją niezawodności automatycznych linii obrabiarkowych
S. ZIEMBA
- 33 R. POMIERSKI Szacowanie błędu wielkości wyznaczonych z badań doświadczalnych przy pomia-
W. KASPRZAK rach pośrednich
B. LYSIK

Zreferowano 26 prac, 7 zaś, z przyczyn obiektywnych, nie mogło być wygłoszonych.

2) **Oddział w Krakowie.** W dniach 6 i 7 marca 1970 r. odbyło się II Sympozjum na temat «Techniki Wibracyjnej», którego współorganizatorami byli Akademia Górniczo-Hutnicza, Zakład Dynamiki i Automatematycznej Regulacji IPBM, Zakład Mechaniki Technicznej IPBM oraz Zakład Układów Mechanicznych IPPT PAN w Warszawie. Wygłoszono 22 referaty oraz 5 komunikatów. W Sympozjum uczestniczyło 106 osób, a w dyskusji wzięło udział 41 osób.

Tematyka referatów była następująca:

- 1 St. ZIEMBA Technika wibracyjna w Polsce
Zb. ENGEL

- 2 Wł. BOGUSZ Optymalizacja urządzeń wibracyjnych
- 3 B. KOSSOWSKI Wibracyjne maszyny budowlane PRL — stan obecny, specjalizacja w ramach RWPG i perspektywy ich rozwoju
- 4 E. KARAŚKIEWICZ Drgania uderzeniowe wymuszone pewnego układu dwumasowego
- 5 Cz. CEMPEL Drgania uderzeniowe prętów
- 6 Zb. ENGEL Analiza pewnego układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody z wymuszeniem impulsowym
- St. KASPRZYK
- 7 J. ADAMCZYK Wpływ sił udarowych na drgania pewnego układu mechanicznego
- A. BĘBEN
- St. KASPRZYK
- 8 K. PI SZCZEK Wpływ drgań mechanicznych na organizm ludzki w ujęciu probabilistycznym
- 9 J. RANISZEWSKI Analiza teoretyczna i doświadczalna ruchu wibromłota o dwóch stopniach swobody
- 10 M. ZABAWA O pewnej metodzie syntezy układów drgających zapewniającej dostatecznie dużą amplitudę drgań w przypadku obciążeń losowych
- 11 A. ŁOPATA Wpływ parametrów geometrycznych wibratora bezwładnościowego na zmianę prędkości kątowej
- 12 T. PI ECH Wibrometr do pomiaru parametrów drgań o niskich i bardzo niskich częstotliwościach
- 13 J. GIERGIEL Tarcie konstrukcyjne w dyskretnych i ciągłych układach mechanicznych
- 14 J. BAZAN Wpływ wibracji na parametry siłowe w procesie ciągnięcia
- A. PASIERB
- 15 Z. DRZYMAŁA Niektóre aspekty wibracyjnego brykietowania wiórów metalowych
- 16 T. BANASZEWSKI Badanie trajektorii rzeszot przesiewaczy wibracyjnych typu WK-2
- J. BŁASHKE
- W. CIEŚLIK
- 17 M. HOPP Wibracyjne oczyszczanie stożkowych sit szczelinowych OSO
- 18 A. CZUBAK Niektóre aspekty ruchu warstwy nosiwa na rynnę przenośnika wibracyjnego
- 19 St. BEDNARZ Analiza czynników wpływających na wartości drgań normalnych
- 20 J. WAPIENNIK Dynamiczne tłumienie drgań płyty o dwóch stopniach swobody
- 21 J. ADAMKIEWICZ Analiza pewnego urządzenia wibracyjnego do zagęszczania gruntu
- St. CZAREŃSKI
- 22 J. NIZIOŁ Wpływ przypadkowej prędkości kątowej obiektu na drgania giroskopu wibracyjnego

3) **Oddział w Warszawie.** W dniach 5 i 6 lutego 1970 r. odbyło się IV Sympozjum z zakresu «Doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego».

Obrady toczyły się podczas dwóch Sesji Plenarnych — na początku pierwszego dnia i na końcu drugiego oraz w 5 sekcjach stanowiących pewne grupy tematyczne.

Pierwsza Sesja Plenarna

Przewodniczył prof. dr Z. BRZOSKA, sekretarzem był dr Z. TERESZKOWSKI.

- 1 Z. BRZOSKA Projektowanie powłok o równomiernej wytrzymałości metodą analogii błonowej
- S. ŁUKASIEWICZ (wygłosił S. Łukasiewicz)
- 2 S. KOCANĀDA O zmęczeniowym pękaniu elementów ze stopów PA-6
- 3 Z. PAWŁOWSKI Badania nad anizotropią mechaniczną i akustyczną miękkiej stali poddanej dużym odkształceniom plastycznym (wygłosił T. Sobiepanek)
- T. SOBIEPANEK
- 4 M. HEBDA Badania naprężeń własnych II rodzaju i substruktura w warstwie wierzchniej elementów maszyn
- 5 Z. DYŁĄG Badanie nacisków pierścieni tłokowych o dużych średnicach (wygłosił Z. Orłoś)
- Z. ORŁOŚ

- 6 J. ZAWADZKI Wpływ charakterystyki cyklu na reoefekty zużycia polimerów przy okresowo
 J. KAŁWAK zmiennych wymuszeniach kinematycznych (wygłosił J. Kalwak)
 W dyskusji nad referatami było 20 wypowiedzi.

Sekcja I — B a d a n i e K o n s t r u k c j i

Przewodniczył doc. dr P. JASTRZĘBSKI, protokółował mgr inż. J. ZWOLIŃSKI.

- 7 M. BIJAK-ŻOCHOWSKI Nadwyżki dynamiczne obciążeń na zębach kół zębatach prostych
 8 L. DIETRICH Weryfikacja rozwiązań teorii plastyczności dla osiowo symetrycznych elementów z karbem
 9 H. FRĄCKIEWICZ Nośność zbiorników cylindrycznych ściskanych nieosiowo symetrycznie i zespół
 10 S. OWCZAREK Dwie metody wyznaczania optymalnej linii kształtu przejścia od belki do słupa na podstawie elastooplastycznych badań modelowych
 11 J. STUPNICKI Wpływ prędkości toczenia i poślizgu na naprężenia kontaktowe walców współpracujących w oleju
 12 R. WOJNAR Pewne zagadnienia rozkładu naprężeń w modelu zapory grawitacyjnej
 13 J. STUPNICKI Efekt sił poprzecznych w powłokach słabo wypukłych w okolicy działania
 S. ŁUKASIEWICZ obciążenia skupionego
 W dyskusji wzięło udział 18 osób.

Sekcja II — W ł a s n o ś c i M e c h a n i c z n e M a t e r i a ł ó w

Przewodniczył doc. dr M. HEBDA, protokółował inż. L. ADAMEC.

- 14 A. DRESCHER Badania własności reologicznych metakrylanu metylu (wygłosił B. Michalski)
 B. MICHALSKI
 15 L. BRUNARSKI Badania dynamicznych charakterystyk materiałów w belkach wielowarstwowych (wygłosił M. Kosiorek)
 M. KOSIOREK
 16 L. BRUNARSKI Pełzanie stali St 37 S w zależności od temperatury (wygłosił L. Brunarski)
 M. KOSIOREK
 17 S. GAŁCZYŃSKI Badania modelowe jako założenia przy określaniu ciśnienia górotworu
 18 R. MORACZEWSKI Wpływ napełniaczy na niektóre własności stabilności wymiarów łożysk wykonanych z poliamidu T-27
 19 Z. ORŁOŚ Własności reologiczne pewnej żywicy epoksydowej (wygłosił K. Szulborski)
 K. SZULBORSKI
 20 K. TURSKI Badania wpływu odkształceń plastycznych na zachowanie się metali przy różnych drogach wtórnego obciążenia

Dyskutantów było 18.

Sekcja III — Z a g a d n i e n i a S t a t e c z n o ś c i

Przewodniczył prof. dr St. KOCAŃDA, protokółował mgr inż. L. ADAMEC.

- 21 Z. TERESZKOWSKI Doświadczalna metoda wyznaczania naprężeń krytycznych w płytach
 22 M. KMIECIK Wpływ odkształceń wstępnych na nośność graniczną osiowo ściskanych płyt prostokątnych
 23 Z. TERESZKOWSKI Naprężenia krytyczne w płytach z otworami kołowymi (wygłosił A. Skąła)
 A. SKAŁA
 W dyskusji zabrało głos 7 osób.

Sekcja IV — M e t o d y B a d a ń

Przewodniczył doc. dr Z. ORŁOŚ, protokółował mgr inż. J. ZWOLIŃSKI.

- 24 A. BORCZ Czujniki do pomiaru naprężeń
 S. KOBIELAK
 Z. MARCINKOWSKI

- 25 M. BRZOZA Interferencja rastrów w zastosowaniu do pomiarów odkształceń modeli
 26 A. DRESCHER Zastosowanie elastooptyki do pomiarów naprężeń w ośrodkach sypkich
 G. de JOSSELING de JONG
 27 A. JAWORSKI Formowanie modeli powłok metodą galwanotechniczną
 28 J. KAPKOWSKI Badanie sprężysto-plastycznych płaskich stanów naprężenia metodą pokryć
 J. STUPNICKI optycznie czynnych
 29 J. LIETZ Elastooptyczna metoda badania fal naprężeń
 30 F. RUDOL Określenie niektórych właściwości mechanicznych heterogenicznych stopów
 żelaza z pomiarów twardości
 31 M. WOLNA Epoksydowe materiały elastooptyczne o niskim module Younga
 W dyskusji zabrało głos 20 osób.

Sekcja V — Zagadnienia Zmęczenia

Przewodniczył prof. dr St. KOCANĀDA, protokółował mgr inż. L. ADAMIEC.

- 32 B. JANCELEWICZ Badania zużycia zmęczeniowego cienkościennych konstrukcji duralowych
 w obszarach przylegających do pęknięcia zmęczeniowego
 33 A. LESZ Granica pełzania stali 15 H 11 MF przy cyklicznym pełzaniu (wygłosił A. Lesz)
 J. PRUSIECKI
 34 S. OZIEMSKI Eksperymentalna ocena trwałości zmęczeniowej konstrukcji nośnej wysięgnika
 M. SOBCZYKIEWICZ dźwigowego (wygłosił W. Sobczykiewicz)
 35 M. NOWAK Wpływ czasu obciążenia i temperatury na moduł Younga poliamidu (wygłosił
 J. ZAWADZKI M. Nowak)
 W dyskusji nad referatami zabrało głos 16 osób.

Druga (końcowa) Sesja Plenarna

Przewodniczył prof. dr J. SZMELTER, protokółował dr Z. TERESZKOWSKI.

- 36 J. KLEPACZKO Metody doświadczalne w badaniach metali przy dużych prędkościach deforma-
 cji
 37 P. JASTRZĘBSKI Wpływ mimośrodowości osłabienia na wytrzymałość pasm ze stopów aluminio-
 wych (wygłosił S. Wichniewicz)
 38 R. DOROSZKIEWICZ Przegląd badań elastooptycznych pracowni analizy doświadczalnej naprężeń
 39 A. KARAMARA Przykład pomiarów odkształceń dynamicznych ramy kompresora gazowego
 w warunkach ruchomych
 40 J. CZUBASZEK Wytrzymałość długotrwała ośrodka sypkiego na ścinanie w przypadku znacznych
 naprężeń

W dyskusji zabrało głos 20 osób.

Ogółem liczba głosów w dyskusji przekroczyła 100 wypowiedzi.

Referat podsumowujący wygłosił prof. dr Z. BRZOSKA — Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego Sympozjum. Stwierdził on, że w stosunku do poprzednich sympozjów na ten temat zwiększyła się wydatnie liczba referatów, a także ich treść była na wiele wyższym poziomie.

3. Organizowanie sesji problemowych

Nową formę działalności podjął Oddział Warszawski PTMTS organizując, zamiast zebrań naukowych z jednym referatem, sesje problemowe, podczas których przedstawiono kilka prac w pewien sposób ze sobą powiązanych.

W ramach zapoczątkowanej jeszcze w ub. roku akcji, w I kwartale 1970 r. zorganizowano (w dniu 6 kwietnia) Sesję z udziałem 21 osób, podczas której wygłoszono następujące referaty: J. ODERFELD — Optymalizacja konstrukcji, A. MORECKI — Mechanika manipulatorów, M. DIETRZYCH — Miernictwo dynamiczne kół zębatych. W dyskusji nad referatami zabrało głos 11 osób.

4. Konkursy naukowe

1) **Oddział w Częstochowie** ogłosił w I kwartale b.r. konkurs na rok 1970, na temat «Mechanika ciała sztywnego». Należy podkreślić fakt, że nie jest to konkurs finansowany przez Zarząd Główny, gdyż Oddział w Częstochowie postarał się, aby nagrody konkursowe ufundowane zostały przez inną instytucję.

2) **Oddział w Gliwicach** ogłosił w I kwartale b. r. ogólnokrajowy konkurs na rok 1970 na prace z zakresu badań doświadczalnych w mechanice.

3) **Oddział w Warszawie** ogłosił w I kwartale ogólnokrajowy konkurs na rok 1970, na najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki, w zakresie zastosowań inżynierskich.

II. ROZPOWSZECHNIANIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej

1) Organ wydawniczy PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA ukazuje się nadal jako kwartalnik. W I kwartale 1970 r. ukazał się tom 8, zeszyt 1, o objętości 7,75 arkusza wydawniczego. Tom 8, zeszyt 2 został już złożony do druku, a zeszyt 3 znajduje się w opracowaniu technicznym.

2) **Oddział w Gliwicach.** W związku z przeprowadzonym Sympozjum na temat «Metody statystyczne w mechanice», Oddział wydał obszernie streszczenia zgłoszonych na imprezę 33 referatów.

3) **Oddział w Krakowie** wydał materiały zawierające streszczenia referatów zgłoszonych na II Sympozjum na temat «Techniki wibracyjnej»

4) **Oddział w Warszawie** wydał streszczenia referatów zgłoszonych na IV Sympozjum z zakresu doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego.

2. Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów:

a) **Kursy.** **Oddział w Gliwicach** prowadzi, zakrojony na okres dwóch lat, kurs na temat «Podstawy mechaniki ośrodków odkształcalnych». Liczba słuchaczy wynosi 30 osób. Dwugodzinne wykłady odbywają się raz w tygodniu. Zakończona już została pierwsza część kursu.

b) **Seminaria.** **Oddział w Gdańsku.** Seminarium na temat «Ogólna mechanika ośrodka ciągłego». Dwugodzinne wykłady prowadzono raz na 2 tygodnie. Seminarium na temat «Metody statystyczne w mechanice». Dwugodzinne wykłady prowadzono raz w tygodniu.

3. Dążenie do zwiększenia liczby członków PTMTS ilustruje poniżej zamieszczona tabela:

L. p.	Oddział	Stan na koniec IV kwart. 1969 r.	Stan na koniec I kwart. 1970 r.	Przybyło lub ubyło w okresie sprawoz- dawczym
1	Bydgoszcz	—	14	+14
2	Częstochowa	17	22	+ 5
3	Gdańsk	38	37	- 1
4	Gliwice	54	56	+ 2
5	Kraków	81	80	- 1
6	Łódź	35	37	+ 2
7	Poznań	50	62	+12
8	Szczecin	29	28	- 1
9	Warszawa	156	157	+ 1
10	Wrocław	59	61	+ 2
	Razem	519	554	+35

III. R Ó Ż N E

1. Powstanie Oddziału PTMTS w Bydgoszczy

Opierając się na upoważnieniu XI Zjazdu Delegatów, Prezydium Zarządu Głównego na zebraniu w dniu 8 stycznia 1970 r. podjęło uchwałę o celowości powołania Oddziału PTMTS w Bydgoszczy. Na tej podstawie, w dniu 12 lutego 1970 r. odbyło się zebranie Członków Założycieli Oddziału w Bydgoszczy. Przewodniczącym Oddziału wybrany został dr Krzysztof WERNEROWSKI. Nowo wybrany Zarząd ukonstytuował się jak następuje: Z-ca przewodniczącego — dr T. KABAT, sekretarz — mgr inż. B. SIOLKOWSKI skarbnik — mgr inż. J. CABAŃSKI.

2. Zebrania organizacyjne

W pierwszym kwartale 1970 r. odbyły się następujące zebrania organizacyjne:

Prezydium Zarządu Głównego		1
Zarząd Oddziałów:		
Bydgoszcz	2	
Częstochowa	3	
Gdańsk	2	
Gliwice	1	
Kraków	—	
Łódź	2	
Poznań	1	
Szczecin	2	
Warszawa	1	
Wrocław	3	17

(Nie podano Walnych Zgromadzeń, które w I kwartale dopiero zaczęły się odbywać).

Inne zebrania organizacyjne w Oddziałach:

Bydgoszcz (Członków Założycieli)	1	
Warszawa (Komitetu Organizacyjnego Sympozjum)	2	3
Razem zebrań organizacyjnych		<hr/> 21

(Plenarne zebranie Zarządu Głównego oraz jedno zebranie Prezydium Z. Gł. odbyły się już w II kwartale 1970 r.)

SPIS TREŚCI TOMU VIII — 1970

Zeszyt 1

<p>G. N. SAWIN, A. N. GUŻ, A. S. KOSMODAMIANSKIJ, Zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych dla obszarów niekanonicznych (Przegląd prac radzieckich) Задачи механики сплошных сред для неканонических областей (Обзор советских статей) Problems of mechanics of continuous media for non-canonical regions (Survey of Soviet papers)</p>	3
<p>A. LIŁTEWKA, Modelowanie płaskich sprężystoplastycznych zagadnień metodą fotoplastyczności Моделирование плоских упруго-пластических задач методом фотопластичности The modelling of the plane elasto-plastic problems by means of the photoplastic method</p>	19
<p>W. TOMCZAK, L. BULZAK-MROZOWSKA, Wyznaczenie pola temperatury i pola strumienia ciepłego w przegrodzie wielowarstwowej przy harmonicznie zmiennym przepływie ciepła Определение температурного поля и поля теплового потока в многослойной стенке при изменяющемся по гармоническому закону тепловом потоке Determination of the temperature and heat flux field in a multi-layer diaphragm at harmonic heat flow</p>	27
<p>S. KALISKI, O przybliżonym integralnym oszacowaniu kumulacji plazmy poddanej działaniu koncentrycznego impulsu ciśnienia О приближенной интегральной оценке кумуляции плазмы подвергнутой действию концентрического импульса давления On an approximate, integral determination of cumulation of the plasma under the action of the concentric pressure impulse</p>	37
<p>W. GAWROŃSKI, Analiza pewnego układu nieliniowego przy wymuszeniu stochastycznym Анализ одного класса нелинейной системы со случайным возмущением Analysis of one class nonlinear system to stochastic excitation</p>	45
<p>S. BORKOWSKI, Naprężenia kontaktowe w półpłaszczyźnie sprężystej o wzmocnionym brzegu Контактные напряжения в упругой полуплоскости с подкрепленным краем Contact stresses in elastic half-plane with stiffened boundary</p>	55
<p>Z. J. PIEKARSKI, G. SZEFER, O pewnym przypadku pełzania półpłaszczyzny z nieciągłymi warunkami brzegowymi Об одном случае ползучести полуплоскости с разрывными краевыми условиями On a certain case of creep of a half-plane with discontinuous boundary conditions</p>	63
<p>J. KŁEPACZKO, Uogólnione warunki stateczności w próbie rozciągania Обобщение условия устойчивости при испытаниях на растяжение Discussion of the generalized conditions for stability in the tension test</p>	75
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	93

Zeszyt 2

<p>J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, Aproksymacja powierzchni nośności granicznej przekroju rurociągu Аппроксимация предельной поверхности для поперечного сечения толстостенного трубопровода при сложных нагрузках On approximation of the yield surface of a thick-walled pipe-line under complex loads</p>	107
<p>A. MŁOTKOWSKI, Przybliżone obliczanie płyty kołowej, uźebrowanej jednostronnie obciążonej antysymetrycznie</p>	127

Приближенное решение подвергнутой антисимметричному изгибу круговой пластинки подкрепленной односторонними радиальными ребрами Approximate solution of a circular plate with one-sided ribs subjected to antisymmetric bending	
J. MARYNIAK, M. LOSTAN, Stateczność podłużna szybowca z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł Влияние изгибной деформируемости крыльев на продольную устойчивость планера Effect of fluxural deformability of wings on the longitudinal stability of a glider	137
J. KÖNIG, Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie Основные теоремы теории приспособляемости упруго-пластических конструкций к изменяющимся во времени нагрузке Basic theorems on shakedown of elastic-plastic structures under time-dependent loadings	139
A. GAJEWSKI, Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna Некоторые вопросы выбора оптимальной формы стержня сжимаемого полярно направленной силой Certain problems of optimum design of a rod compressed by a polar force	159
R. KRZYWIĘC, Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie dwuwskaznikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju Механико-стереомеханическая аналогия для класса уравнений Лагранжа второго порядка с двумя индексами Mechanical-elastic analogy in the class of two-index Lagrange equations of second kind	175
BIULETYN INFORMACYJNY	193
Zeszyt 3	
STANISŁAW OCHĘDUSZKO — Wspomnienie pośmiertne	203
M. JANAS, A. SAWCZUK, Zagadnienia plastycznej analizy powłok (kierunki badań w Polsce w dziesięcioleciu 1960–1969) Вопросы анализа пластических оболочек (направления польских исследований 1960–1969) Problems in plastic analysis of shells (research trends in Poland for the decade 1960–1969)	205
B. DUSZCZYK, Ograniczenia na funkcję energii sprężystej wynikające z warunku silnej eliptyczności Ограничения накладываемые условием сильной эллиптичности на функцию упругой энергии Limitations implied on the elastic energy function by the strongellipticity condition	225
W. WOJNO, Uwagi o infinitezymalnej teorii materiałów sprężysto–lepkoplastycznych Замечания к infiniteзимальной теории упруго-вязкопластических материалов Notes on the infinitesimal theory of elastic–viscoplastic materials	239
L. KONIECZNY, Teoria przystosowywania się belek Теория приспособляемости Shake-down theory of beams	259
P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, Gęste heksagonalne siatki sprężyste Плотные гексагональные упругие решетки Dense elastic lattices of hexagonal type	277
T. BEDNARSKI, Pomiar odkształceń plastycznych membrany kołowej obciążonej impulsem ciśnienia Измерения пластической деформации круговой мембраны при импульсной нагрузке The measurement of the dynamic plastic deformation of a circular membrane	295

- J. KARKOWSKI, Granice obszarów plastycznych w rozciąganych elementach z karbem lub otworem 319
 Границы пластических областей в растягиваемых элементах с надрезом или отверстием
 Elastic-plastic boundaries in notched specimens under tension

Zeszyt 4

- K. SOBZYK, Stochastyczna stabilność ruchu 375
 Стохастическая устойчивость движения
 Stochastic stability of motion
- R. STANISZEWSKI, Problemy optymalizacyjne w syntezie układów mechanicznych 407
 Вопросы оптимизации при синтезе механических систем
 Optimization problems in synthesis of mechanical systems
- R. IZWIŚKI, O stateczności nasypów i skarp w stanie równowagi granicznej 427
 Об устойчивости насыпей и откосов в состоянии предельного равновесия
 On the stability of the embankments and slopes in the state of limit equilibrium
- W. GAWROŃSKI, O pewnej możliwości dowodu twierdzeń o stabilności i niestabilności ruchu okresowego 441
 Об одной возможности доказательства теорем об устойчивости и неустойчивости периодических движений
 On a certain possibility of proving the periodic motion stability and instability theorems
- L. KALINOWSKI, J. LINKOWSKI, Wyrażna granica plastyczności metali w ujęciu teorii atmosfer Cottrella 449
 Предел текучести металлов в теории атмосфер Коттрелла
 Yield point phenomenon in the light of Cottrell atmospheres theory
- A. DRESCHER, Zastosowanie modelowych materiałów czułych optycznie do analizy stanu naprężenia w ośrodkach sypkich 461
 Применение модельных оптически чувствительных материалов для исследования напряженного состояния сыпучих сред
 Application of optically sensible model materials in stress analysis of granular media
- S. ZANORSKI, O profilach prędkości przy laminarnych przepływach polimerów 479
 О профилях скорости при ламинарных течениях полимеров
 On velocity profiles in laminar flows of polymers
- BIULETYN INFORMACYJNY 493

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony; stronicę z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3 itd.) 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście na marginesie należy podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich, np. ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1., 2. itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja „Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej”, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21.

W następnym zeszycie ukazażą się prace:

- J. J. TELEGA, Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji (przegląd prac)
Применение линейного программирования для определения несущей способности конструкций (обзор статей)
Application of linear programming to the determination of the limit load capacity of structures (survey of publications)
- T. GALKIEWICZ, Zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu
Проблема устойчивости ортотропной конической оболочки подвергнутой скручиванию
Nonlinear stability problem of an orthotropic conical shell subjected to torsion
- K. FIDELUS, A. MORESKI, Niektóre własności zmiennej struktury biomechanizmów
Некоторые свойства переменной структуры биомеханизмов
Some properties of variable structures of biomechanics
- M. GALOS, Plastyczne skręcanie niejednorodnych prętów o zmiennej średnicy
Пластическое кручение неоднородных стержней переменного диаметра
Plastic torsion of non-homogeneous rods of variable thickness
- J. HALAUNBRENNER, M. КМИЕСК, Zjawisko rezonansu w kontakcie ciał sprężystych
Явление резонанса в контакте упругих тел
The resonance phenomenon for elastic bodies in contact
- M. ЖОКІЕЛ, Odpowiedniość modelowa dla cienkościennych prętów o bisymetrycznym otwartym przekroju poprzecznym
Критерии подобия тонкостенных стержней бисимметрического открытого сечения
Model correspondence criteria for thin-walled rods of bi-symmetric open cross-section
- J. BAUER, E. WŁODARCZYK, Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności
Динамика жесткой плиты находящейся на упруго-пластическом неоднородном основании
Dynamics of a rigid plate resting on elastic-plastic non-homogeneous medium
- K. TURSKI, Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążenia
Исследование влияния пластической деформации на поведение металла при разных путях вторичного нагружения
Investigation of the influence of plastic deformation on behaviour of metals under various ways of repeated loading
- J. BARAN, K. MARCHELEK, Redukcja stopni swobody układów dyskretnych
Приведение степеней свободы дискретных систем
Reduction of the number of degree of freedom in discrete systems
- BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro I7, pokój I724)

Mech. Teor., T. 8, z. 4, s. 373—504, Warszawa 1970, Indeks 36712