

S. 11. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

~~INSTYTUT TECHNIKI BUDOWLANEJ
ul. Nowowiejska 15
Warszawa~~

~~BIBLIOTEKA
L. 7. 2
KE~~

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 8 • ZESZYT 5

OWS 1970 K 111/1111
11111111111111111111

Pw^a

WARSZAWA 1970

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

Pamięci Profesora Stanisława OCHĘDUSZKI	203
M. JANAS, A. SAWCZUK, Zagadnienia plastycznej analizy powłok (kierunki badań w Polsce w dziesięcioleciu 1960-1969)	205
Вопросы анализа пластических оболочек (направления польских исследований 1960-1969)	
Problems in plastic analysis of shells (research trends in Poland for the decade 1960-1969)	
B. DUSZCZYK, Ograniczenia na funkcję energii sprężystej wynikające z warunku silnej eliptyczności	225
Ограничения накладываемые условием сильной эллиптичности на функцию упругой энергии	
Limitations implied on the elastic energy function by the strong-ellipticity condition	
W. WOJNO, Uwagi o infinitesimalnej teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych	239
Замечания к инфинитесимальной теории упруго/вязкопластических материалов	
Notes on the infinitesimal theory of elastic/viscoplastic materials	
L. KONIECZNY, Teoria przystosowywania się belek	257
Теория приспособляемости балок	
Shake-down theory of beams	
P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, Gęste heksagonalne siatki sprężyste	277
Плотные гексагональные упругие решетки	
Dense elastic lattices of hexagonal type	
T. BEDNARSKI, Pomiar odkształceń plastycznych membrany kołowej obciążonej impulsem ciśnienia	295
Измерения пластической деформации круговой мембраны при импульсной нагрузке	
The measurement of the dynamic plastic deformation of a circular membrane	
J. KARPOWSKI, Granice obszarów plastycznych w rozciąganych elementach z karbem lub otworem	319
Границы пластических областей в растягиваемых элементах с надрезом или отверстием	
Elastic-plastic boundaries in notched specimens under tension	
Biuletyn Informacyjny	329

J. H. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

~~WYDZIAŁ MECHANIKI
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
WARSZAWA~~

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 8 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 7 0

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, BARBARA
SKARŻYŃSKA, MAREK SOKOŁOWSKI,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI, STEFAN ZAHORSKI
— REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (587+113) egz. Arkuszy wydawn. 14,5. Arkuszy drukarskich 10,75. Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składania 22.IV.1970 r. Druk ukończono w październiku 1970 r. Zam. 727/70 K-59 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

PAMIĘCI PROFESORA STANISŁAWA OCHĘDUSZKI

W dniu 17 grudnia 1969 r., niespodziewanie dla najbliższego otoczenia i licznych rzesz wychowanków, zmarł nagle profesor STANISŁAW OCHĘDUSZKO, wybitny uczony, nauczyciel i wychowawca młodzieży akademickiej, twórca śląskiej szkoły termodynamiki.

STANISŁAW OCHĘDUSZKO urodził się w roku 1899 w Lesku, w rodzinie nauczycielskiej. Już w roku 1925 rozpoczął pracę dydaktyczną jako asystent Politechniki Lwowskiej. W latach 1929–31 odbył studia zagraniczne w Zurychu i Monachium, gdzie wykonał u prof. Nusselta pracę doktorską na temat zagadnień spalania w silniku Diesla i uzyskał stopień doktora nauk technicznych. W roku 1936 przeprowadził habilitację w Politechnice Lwowskiej i w roku 1937 objął jako profesor nadzwyczajny kierownictwo Katedry Teorii Maszyn Ciepłych. Pracę dydaktyczną kontynuował również w czasie trwania wojny. Równocześnie pracował wówczas nad swym dziełem pt. *Teoria maszyn ciepłych*.

W lipcu 1946 roku przyjechał prof. OCHĘDUSZKO do Gliwic. Tu z całą energią włączył się do prac nad organizacją Politechniki Śląskiej i z ogromnym zapałem podjął trud kształcenia młodzieży akademickiej. W roku 1947 został mianowany profesorem zwyczajnym. Przez 23 lata kierował Katedrą Teorii Maszyn Ciepłych Politechniki Śląskiej. W pierwszych latach powojennych był równocześnie kierownikiem Katedry Pomiarów Maszyn Ciepłych i prowadził wykłady na Politechnice Wrocławskiej. Był pierwszym dziekanem utworzonego z Jego inicjatywy Wydziału Mechaniczno-Energetycznego. W latach od 1956 do 1959 piastował godność Rektora Politechniki Śląskiej. W roku 1960 został powołany w poczet członków korespondentów Polskiej Akademii Nauk.

Okres działalności prof. OCHĘDUSZKI na ziemi śląskiej stanowił najdłuższy i najbardziej owocny odcinek Jego 45-letniej pracy naukowo-dydaktycznej. W latach powojennych zorganizował od podstaw kierowaną przez Niego Katedrę. Skupił wokół siebie zespół młodych pracowników nauki, którym przekazywał swą wiedzę i doświadczenie. Podjął pracę nad organizacją niezbędnych laboratoriów. Za jedno z głównych swych zadań uważał dostarczenie przemysłowi dobrych inżynierów. Dlatego dużo wysiłku włożył w opracowanie właściwych programów studiów. Zagadnieniem tym pasjonował się do ostatnich chwil swego życia. Szczególnie gorąco zajął się zorganizowaniem ruchowo-energetycznego kierunku studiów, kształcącego specjalistów w dziedzinie racjonalnej gospodarki cieplnej w przemyśle. Rozwijając ten kierunek doprowadził do utworzenia Wydziału Mechaniczno-Energetycznego.

Już od pierwszych lat powojennych zabiegał prof. OCHĘDUSZKO o dostarczenie młodzieży akademickiej niezbędnych podręczników naukowych. Biorąc pod uwagę najpilniejszą potrzeby opublikował w roku 1948 trzy tłumaczenia podręczników niemieckich. W roku

1955 doprowadził do końca wydanie 3-tomowego dzieła pt. *Teoria maszyn cieplnych*. Dzieło to zostało wyróżnione nagrodą państwową i nagrodą honorową wydawnictwa. Był współautorem obszernego zbioru zadań z termodynamiki technicznej ogłoszonego drukiem w roku 1960. W roku 1964 wydał podręcznik pt. *Termodynamika stosowana*, wznowiony później w roku 1967. Podręczniki prof. OCHĘDUSZKI odznaczają się niezwykłą starannością opracowania i wysokim poziomem naukowym.

W pracy dydaktyczno-wychowawczej prof. OCHĘDUSZKĘ cechowała duża życzliwość dla młodzieży akademickiej połączona ze stawianiem jej dużych wymagań wynikających z dążenia do przekazania uczniom jak największych zasobów wiedzy i do zaszczepienia im zasad pracowitości, systematyczności i obowiązkowości. Był znany jako znakomity wykładowca, obdarzony talentem przystępnego przekazywania trudnej wiedzy termodynamicznej. Młodzież akademicka zawsze wysoko ceniła Profesora i dawała niejednokrotnie temu wyraz.

Wyteżona praca dydaktyczno-wychowawcza i organizacyjna nie przeszkodziła prof. OCHĘDUSZCE rozwijać ożywionej działalności naukowej. Opublikował On ponad 70 oryginalnych prac naukowych. W pracach tych zajmował się głównie zagadnieniami bilansowania energii, problemami zastosowań technicznych drugiej zasady termodynamiki i zagadnieniami spalania. Liczne prace poświęcił prof. OCHĘDUSZKO sprawie wdrażania międzynarodowego układu jednostek miar SI oraz sprawie poprawnego nazewnictwa technicznego. Swą działalność naukową starał się zawsze wiązać z potrzebami przemysłu. Wdrażał również swych uczniów do rozwijania kontaktów z przemysłem. Dlatego inicjował liczne prace dyplomowe wykonywane w zakładach przemysłowych i dążył do tego, by tematyka prac doktorskich oraz habilitacyjnych łączyła się z zagadnieniami stawianymi przez przemysł.

Osobnym rozdziałem owocnej działalności prof. OCHĘDUSZKI było kształcenie kadr naukowych. Wychował On 16 doktorów, z których 10 uzyskało już tytuły profesorów i docentów. Uczniowie prof. OCHĘDUSZKI działają dziś niemal we wszystkich polskich uczelniach technicznych.

W uznaniu zasług prof. OCHĘDUSZKI w dziedzinie działalności naukowej i dydaktyczno-wychowawczej został On odznaczony licznymi wysokimi odznaczeniami i nagrodami, a Politechnika Śląska nadała Mu w dniu 2.X.1969 r. zaszczytny tytuł doktora honoris causa.

Prof. OCHĘDUSZKO wielce zasłużył się dla rozwoju Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Należał do grupy członków założycieli Oddziału Gliwickiego PTMTS. Aktywnie uczestniczył w pracach Towarzystwa. Był między innymi przewodniczącym Komisji Jednostek Oddziału Gliwickiego PTMTS i w ramach działalności tej Komisji wydawał informator o układzie SI. Brał udział w pracach sądów konkursowych rozstrzygających konkursy naukowe organizowane przez Oddział Gliwicki PTMTS. Na zjazd naukowy 10-lecia PTMTS opracował referat o powojennym dorobku polskiej termodynamiki technicznej. Aktywnie uczestniczył w sympozjach naukowych organizowanych przez PTMTS.

Niespodziewana śmierć przerwała owocną działalność prof. OCHĘDUSZKI. Wyniki Jego wyteżonej i godnej naśladowania pracy będą jednak owocować w dalszym ciągu, gdyż zasady, którymi kierował się w życiu i pracy zaszczepił swym uczniom i wychowankom.

ZAGADNIENIA PLASTYCZNEJ ANALIZY POWŁOK¹⁾
(KIERUNKI BADAŃ W POLSCE W DZIESIĘCIOLECIU 1960-1969)

MAREK JANAS, ANTONI SAWCZUK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Analiza plastyczna konstrukcji stanowi obecnie dobrze rozwiniętą dziedzinę studiów. Niektóre jej działy rozwinęły się jako zamknięte teorie posługujące się własnymi metodami analizy. W zakresie teorii powłok plastycznych szereg zagadnień można traktować obecnie jako klasyczne; wśród nich wymienić należy:

1) nośność graniczną, czyli analizę początkowego płynięcia sztywno-plastycznych powłok zbudowanych z materiałów metalo-podobnych;

2) analizę małych odkształceń sprężysto-plastycznych poprzedzających plastyczne płynięcie.

Szczegółowe omówienie równań opisujących te problemy znaleźć można w pracy [61] lub w monografiach [8, 11, 58, 59]; tutaj potraktujemy je marginesowo. Nasza uwaga skupia się raczej na problemach wybiegających poza zakres zagadnień klasycznych, a mianowicie, na takich zagadnieniach, jak:

3) nośność graniczna konstrukcji złożonych, np. zbrojonych lub zbudowanych z materiałów o różnych własnościach przy ściskaniu i rozciąganiu;

4) stany pokrytyczne konstrukcji sztywno-plastycznych i sprężysto-plastycznych; to zagadnienie sprowadza się do analizy dużych odkształceń płyt i powłok;

5) analiza dostosowania się, czyli zachowania się konstrukcji przy obciążeniach powtarzalnych.

Z uwagi na analogię w metodach analizy powłok i konstrukcji płytowo-tarczowych, przegląd obejmuje wyniki dotyczące także tych ostatnich konstrukcji. Wyłączone z przeglądu są problemy kształtowania plastycznego, obliczania zbiorników grubościennych i większość zagadnień lepko-sprężysto-plastycznych. Dane bibliograficzne dotyczące zagadnień wykraczających poza tak określone ramy znaleźć można w pracy przeglądowej ŻYCKOWSKIEGO [99]. Omówieniu stanu aktualnego i kierunków rozwoju teorii powłok plastycznych, jednak ze zwróceniem uwagi na prace radzieckie, poświęcony jest przegląd RYCHLEWSKIEGO i SZAPIRO [71]. Badania w zakresie plastycznego formowania powłok omówił SZCZEPIŃSKI w pracach [91, 92] oraz w książce [93].

¹⁾ Praca przygotowana na kolokwium IASS «Progress in shell structures in the last 10 years and its future development», Madryt 1969.

Dla jasności przedstawimy na wstępie zasady analizy plastycznej. Pełny układ równań problemów plastyczności zawiera:

- 1) warunek plastyczności przedstawiony w przestrzeni naprężeń przez wypukłą powierzchnię zamkniętą;
- 2) prawo płynięcia, czyli prawo chwilowego ruchu elementów uplastycznionych; zwykle przyjmowane jest ono w postaci stowarzyszonego prawa płynięcia;
- 3) równania ruchu;
- 4) związki kinematyczne opisujące prędkości odkształcenia w zależności od prędkości ruchu lub odkształcenia w zależności od przemieszczeń.

Rozwiązanie problemu brzegowego podaje rozkład naprężeń i prędkości przemieszczeń zgodne z warunkami na podporach. Ponieważ ścisłe rozwiązanie tak postawionego problemu jest rzadko osiągalne, rozwinęły się pewne sposoby przybliżone. Szczególnie przydatne okazują się tu metody teorii stanów granicznych. Opierają się one na dwóch podstawowych twierdzeniach pochodzących od GWOZDIEWA [5], HILLA [6] oraz DRUCKERA, GREENBERGA i PRAGERA [1] i pozwalają wyznaczać górne i dolne oszacowania nośności. Kinematycznie dopuszczalne rozwiązania pomijają warunki statyczne i dają oszacowania od góry, podczas gdy rozwiązania statycznie dopuszczalne spełniają tylko równania równowagi i warunek plastyczności.

Różne aspekty zastosowania metod przybliżonych opartych na powyższych zasadach zostaną omówione w rozdziałach 3 i 4.

2. Powierzchnie graniczne

Aby mogło nastąpić nieograniczone płynięcie powłoki z materiału sprężysto-plastycznego lub aby powstać mogły jakiegokolwiek odkształcenia powłoki sztywno-plastycznej, cały przekrój powłoki ulec musi uplastycznieniu. Jednakże warunek plastyczności określany jest zwykle przy pomocy naprężeń i dotyczy izolowanego punktu w przekroju poprzecznym powłoki. Dla potrzeb analizy powłok warunek ten musi być odpowiednio przekształcony, czyli wyrażony przy pomocy sił wewnętrznych związanych z określonym punktem powierzchni środkowej. Taką transformację warunku plastyczności z przestrzeni naprężeń do przestrzeni sił ułatwiają założenia o prostych normalnych i o prawie płaskim stanie naprężenia. Dzięki temu deformację dowolnej warstwy opisać możemy przy pomocy sześciu parametrów odkształcenia: zmian krzywizny κ_{ij} i odkształceń powierzchni środkowej λ_{ij} . Stąd określić możemy, dla danych prędkości odkształceń, stan naprężeń w całym przekroju poprzecznym, korzystając z warunku normalności wektora płynięcia do powierzchni granicznej, czyli ze stowarzyszonego prawa płynięcia. Naprężenia mogą być więc określone przy pomocy sześciu parametrów κ_{ij} i λ_{ij} . Po scałkowaniu naprężeń po grubości powłoki otrzymujemy siły osiowe N_{ij} i momenty M_{ij} ; one także zależą od wymienionych sześciu parametrów kinematycznych. Należy zaznaczyć, że dzięki założeniu o prostych normalnych siły poprzeczne nie wchodzą do tego przekształcenia. Okazuje się, że warunek symetrii sił osiowych i momentów równoważny jest założeniu o małej grubości powłoki w porównaniu z promieniami krzywizn.

Otrzymane wyrażenia na siły wewnętrzne są jednorodne i zerowego stopnia ze względu na prędkości odkształceń. Dlatego jedynie pięć parametrów może być niezależnych. Eliminując te parametry z sześciu równań otrzymujemy hiperpowierzchnię w sześciowymiarowej przestrzeni sił osiowych N_{ij} i momentów M_{ij}

$$(2.1) \quad F(N_{ij}, M_{ij}) = 0, \quad (i, j = 1, 2).$$

Ta hiperpowierzchnia jest nazywana powierzchnią graniczną. Można też określić powierzchnię graniczną w postaci (2.1) zupełnie bez operowania naprężeniami, a traktując powłokę jako dwuwymiarową przestrzeń zakrzywioną. Taka procedura zastosowana została dla płyt w pracach [81, 82].

W teorii plastyczności szeroko stosuje się wprowadzone przez PRAGERA [17] pojęcie uogólnionych zmiennych (patrz także [7]). Występują tu uogólnione naprężenia Q_i , odkształcenia q_i i prędkości odkształceń \dot{q}_i . Wybór uogólnionych zmiennych nie jest jednoznaczny. Jeśli jako naprężenia uogólnione przyjmiemy siły wewnętrzne powłoki N_{ij} i M_{ij} , odpowiednie uogólnione prędkości odkształceń określone są przez tożsamościową zależność opisującą prędkość rozpraszania energii wewnętrznej

$$(2.2) \quad D = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_A Q_i \dot{q}_i dA \equiv \int_A (M_{ij} \dot{\lambda}_{ij} + N_{ij} \dot{\lambda}_{ij}) dA,$$

gdzie V oznacza całkowitą objętość ciała, zaś A — całkowitą powierzchnię środkową powłoki.

Okazuje się, że stowarzyszone prawo płynięcia zachodzi także i dla zmiennych uogólnionych. Dlatego uogólnione prędkości odkształceń mogą być otrzymane z (2.1) przy pomocy zależności potencjalnej

$$(2.3) \quad \dot{\lambda}_{ij} = \nu \frac{\partial F}{\partial N_{ij}}, \quad \dot{\lambda}_{ij} = \nu \frac{\partial F}{\partial M_{ij}},$$

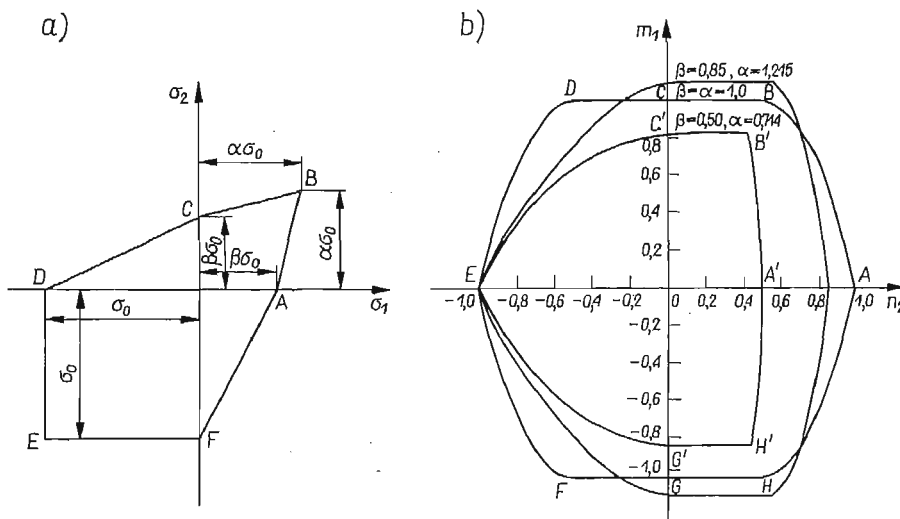
gdzie, zgodnie z zasadą o nieujemności dysypacji energii w czasie plastycznego płynięcia, skalarny mnożnik ν jest nieujemny.

Warunek plastyczności (2.1) można zapisać przy pomocy składowych stanu naprężenia, choć nie wszystkie te składowe są wielkościami uogólnionymi w rozumieniu definicji (2.2). Z drugiej strony, niewystępowanie niektórych składowych w warunku plastyczności nie musi oznaczać znikania odpowiadających im składowych prędkości odkształceń. Te składowe stają się wówczas *reakcjami kinematycznymi*.

Dla poprawnego formułowania teorii przybliżonych niezbędną okazuje się analiza własności geometrycznych powierzchni granicznych. Dyskusję takich własności dla materiałów spełniających warunki plastyczności Hubera–Misesa i Treski przeprowadzili SAWCZUK i RYCHLEWSKI [88]. Badali oni powłoki pełnościennie i sandwiczowe i wykazali, że powierzchnie graniczne uzyskane dla poszczególnych typów powłok są rzutami lub przecięciami ogólnej hiperpowierzchni opisanej w wielowymiarowej przestrzeni sił wewnętrznych. Duża liczba wymiarów jest jedną z głównych trudności w operowaniu powierzchniami granicznymi, dlatego celowe staje się dążenie do zmniejszenia tej liczby. Jedną z możliwych dróg postępowania jest wprowadzenie nowych zmiennych uogólnionych będących kombinacjami sił wewnętrznych; takie podejście było omawiane przez RYCHLEWSKIEGO [70].

Plastycznie anizotropowe powłoki otrzymuje się bądź przez zastosowanie materiałów anizotropowych (anizotropowe kontinuum), bądź przez takie rozmieszczenie materiału izotropowego, że powłoka uzyskuje własności zależne od kierunku (np. powłoki faliste, zbrojone czy żebrowane). Te dwa typy anizotropii zwane są zwykle *fizycznym* oraz *technicznym* lub *konstrukcyjnym*. Oba typy anizotropii dają inne równania powierzchni granicznej. Różnice te omawiane były przez MROZA [53] oraz w pracy [73].

Powłoki zbudowane z plastycznie nieizotropowego ośrodka ciąglego (anizotropia fizyczna) analizowało wielu badaczy. Dla materiałów spełniających warunek Hubera–Misesa (OLSZAK i URBANOWSKI [14]) powierzchnię graniczną podano w [74]. Podobne wyniki, ale dla warunku HILLA [6], otrzymał MIKELADZE [13]. Dyskusję własności powierzchni



Rys. 1. a) Warunek plastyczności dla różnych granic plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu przedstawiony w przestrzeni naprężeń głównych, b) powierzchnia graniczna dla kołowych powłok walcowych [72]

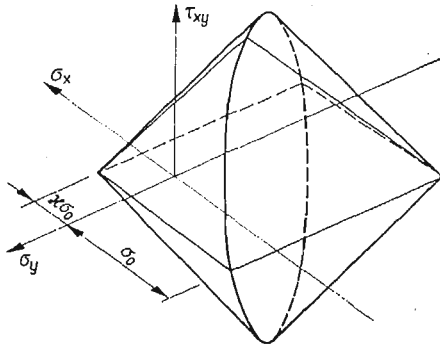
granicznych dla odcinkowo liniowych warunków plastyczności przeprowadzono w pracach [20, 58]. Powierzchnię graniczną dla żebrowanych powłok walcowych podali BIRON i SAWCZUK [22].

W przypadku materiałów, dla których obowiązują inne warunki plastyczności niż Hubera–Misesa i Treski, problem budowy powierzchni granicznych jest bardziej złożony. Przed zastosowaniem przedstawionej powyżej procedury należy określić odpowiedni warunek plastyczności. SANKARANARAYANAN i OLSZAK [72] przyjęli dla płaskiego stanu naprężenia warunek opisany w przestrzeni naprężeń głównych przez nieregularny sześciokąt. Na rys. 1 pokazano uzyskaną przez nich powierzchnię graniczną dla powłoki walcowej zbudowanej z materiału o różnych granicach plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu.

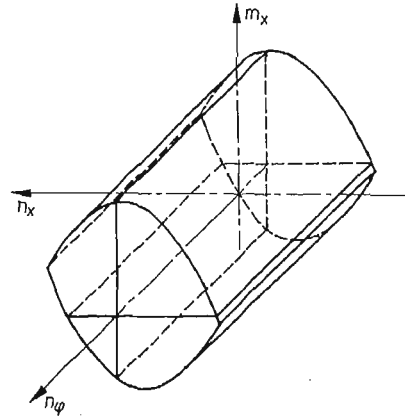
Cechy powierzchni granicznych zbudowanych z materiałów *znakoczulych* (np. beton) zasługują na specjalną uwagę. Dla materiałów charakteryzujących się w płaskim stanie naprężenia trzema granicami plastyczności: σ_c — przy ściskaniu, $\sigma_t = \kappa\sigma_c$ — przy rozcią-

ganiu i $\sigma_s = \theta \sigma_c$ — przy maksymalnym ścinaniu, można przyjąć (przy $\kappa \ll 1$), warunek maksymalnych naprężeń normalnych. Taki warunek, pokazany na rys. 2, zastosowano w pracy [30] do wyznaczenia powierzchni granicznej dla powłok niesymetrycznych.

W przypadku przekrojów niejednorodnych (wielowarstwowych lub zbrojonych), przy całkowaniu naprężeń po grubości przekroju należy uwzględnić zmienność warunku plastyczności [35]. Szczególnie ważny jest tu przypadek żelbetu. Dla żelbetowych płyt zbrojonych ortogonalnie przyjmuje się na ogół warunek *kwadratowy* lub *prostokątny*, chociaż niektórzy autorzy (np. KWIECIŃSKI [44–47]) podają inne propozycje. Jeśli pominąć wytrzymałość betonu na rozciąganie, to cały przekrój żelbetowy może być traktowany jako spełniający



Rys. 2. Warunek największych naprężeń głównych dla materiałów znakoczulych [30]



Rys. 3. Powierzchnia graniczna dla żelbetowego zbiornika walcowego [86]

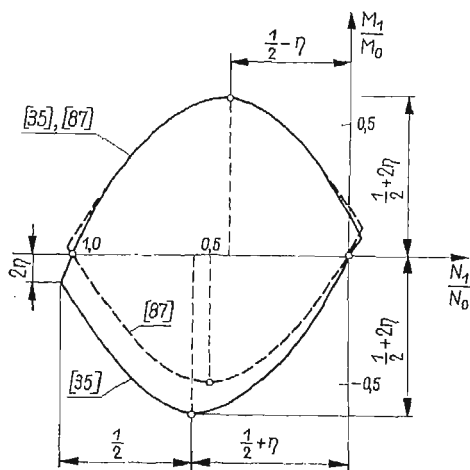
warunek największych naprężeń normalnych (rys. 2). Mamy wówczas $\kappa = 0$ w betonie oraz $\kappa = 1$ w warstwach zbrojenia. Dla zbrojenia rozłożonego symetrycznie w co najmniej dwóch warstwach, dobre przybliżenie daje przyjęcie przekroju jednorodnego z odpowiednio dobranymi zastępczymi granicami plastyczności przy ścisaniu i rozciąganiu (JANAS, KÖNIG [35]).

Przy kwadratowym warunku plastyczności siły wewnętrzne w jednym kierunku głównym nie zależą w stanie plastycznym od sił w drugim kierunku. Wobec tego powierzchnię graniczną w przestrzeni głównych sił uogólnionych można przedstawić w postaci dwóch niezależnych krzywych w płaszczyznach $M_1 N_1$ i $M_2 N_2$. Podejście oparte na tej własności było zastosowane przez MROZA [53, 56] oraz SAWCZUKA i OLSZAKA [87]. Dla powłok walcowych powierzchnia graniczna uzyskana przy pominięciu zbrojenia ścisane podana została przez SAWCZUKA i KÖNIGA [86] i przedstawia sobą skończony walec paraboliczny (rys. 3) w przestrzeni siły obwodowej N_θ oraz osiowego momentu M_x i siły N_x .

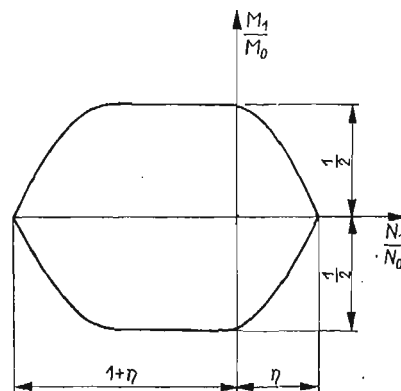
Założenie o niezależności uplastycznienia w każdym z kierunków głównych może być wykorzystane także i w przypadku odkształceń nie spełniających warunku obrotowej symetrii. Mamy wówczas powierzchnię graniczną dla każdego z kierunków głównych identyczną z zależnością dla prostokątnych prętów obciążanych mimośrodowo. Odpowied-

nie krzywe graniczne dla różnych rodzajów przekrojów podano w pracy [32]. Na rys. 4 pokazano ogólną krzywą graniczną dla przekroju podwójnie zbrojonego; linia przerywana przedstawia uproszczoną zależność [87] pomijającą zbrojenie ściskane. Na rys. 5 pokazano krzywą graniczną dla jednowarstwowego zbrojenia ułożonego w środku przekroju [55].

Pewne uproszczenia powierzchni granicznych wprowadzić można w szczególnych rozpatrywanych przypadkach. MRÓZ i XU-BING-YE [57] zaproponowali wygodne uprosz-



Rys. 4. Krzywa graniczna dla podwójnie zbrojonego przekroju żelbetowego [35]



Rys. 5. Krzywa graniczna dla symetrycznego, pojedynczo zbrojonego przekroju żelbetowego

czenie powierzchni uzyskanej przez ONATA i PRAGERA [16] dla powłok obrotowo symetrycznych spełniających warunek Treski. Przybliżone powierzchnie graniczne stosuje się niemal we wszystkich rozwiązaniach zagadnień z dużymi odkształceniami powłok.

3. Nośność graniczna

Głównym problemem teorii stanów granicznych jest określenie obciążenia niszcącego. Uzyskane dotychczas rozwiązania problemów brzegowych dla początkowego plastycznego płynięcia dotyczą niemal wyłącznie przypadków obrotowej symetrii (szczegóły — patrz HODGE [8]). Dużą liczbę wyników przytoczyli MASSONNET i SAVE [11] oraz OLSZAK i SAWCZUK [61].

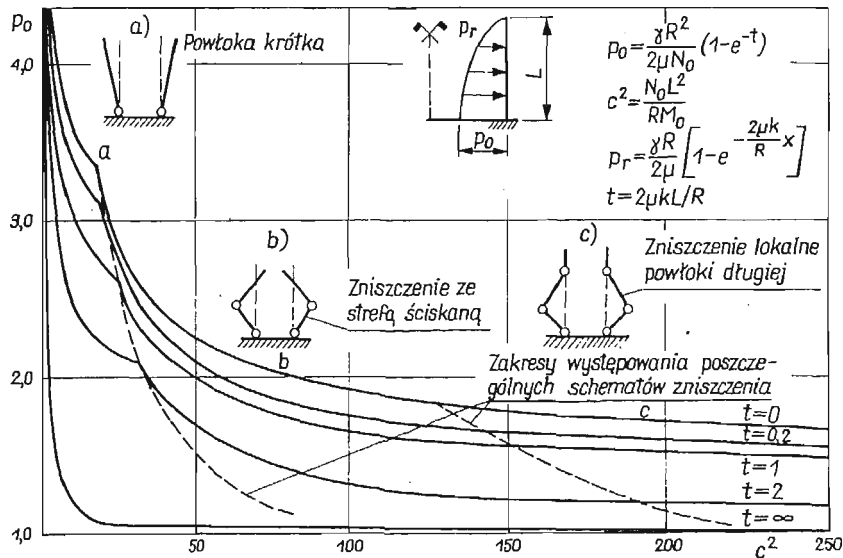
Ścisłe rozwiązania oraz górne i dolne oszacowania nośności metalowych kopuł sferycznych uzyskane zostały przez MROZA i XU BING-YE [57] przy odpowiednio uproszczonej powierzchni granicznej dla materiału Treski. KÖNIG [40] porównał pola prędkości w stanie zniszczenia powłok walcowych dla dwóch różnych praw płynięcia: dla prawa potencjalnego (2.3) i dla pewnego prawa niestowarzyszonego. BIRON i SAWCZUK [22] zaproponowali metodę całkowania równań opisujących stan graniczny powłok żebrowanych i podali pewne rozwiązania dla przypadku powłok walcowych. Porównanie analizy plastycznej

powłoki walcowej przy różnych powierzchniach granicznych przeprowadzone zostało przez SAWCZUKA i HODGE'A [85]. Wynika zeń, że pola naprężeń i prędkości przemieszczeń zależą wyraźnie od przyjętego warunku plastyczności, podczas gdy ciśnienie niszczące zmienia się w mniejszym stopniu.

Kompletne rozwiązania zadań nośności granicznej dla przypadków nie spełniających warunku obrotowej symetrii są bardzo rzadkie. Wymienić tu należy pracę RYCHLEWSKIEGO [69] dotyczącą powłok helikoidalnych, gdzie główną uwagę poświęcono mechanizmom zniszczenia.

W ogólnym przypadku, gdy równania opisujące problem nośności granicznej rzeczywiście zależą od dwóch współrzędnych, stosowane być muszą metody oszacowania nośności od góry i od dołu. MROWIEC i ŻYCZKOWSKI [51, 52] podali oszacowania dolne dla nośności rurociągu poddanego zginaniu i ciśnieniu wewnętrznemu. Metody oszacowania nośności od góry omówione zostaną w następnym rozdziale.

Odształcenia sprężysto-plastyczne badane były przez KÖNIGA [39], który podał ogólne wyrażenia opisujące przemieszczenia. KÖNIG i KLEPACZKO [43] badali teoretycznie i doświadczalnie wpływ zamocowania brzegów powłoki walcowej na pola naprężeń w fazie poprzedzającej wyboczenie.



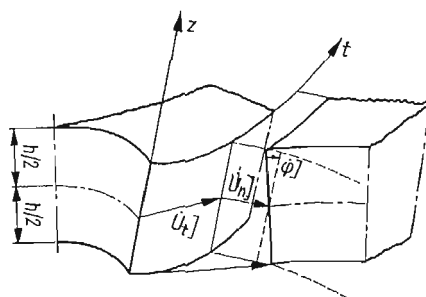
Rys. 6. Obciążenia graniczne dla silosów żelbetowych [86]

Metody poszukiwania rozwiązań kompletnych pokrewne są metodom stosowanym w projektowaniu optymalnym. Optymalne projektowanie konstrukcji plastycznych polega na określaniu ich wymiarów przy pewnych dodatkowych warunkach dotyczących funkcji kosztów (np. objętość materiału, koszty wykonania itp.). W tej dziedzinie prace MROZA [54–56] wnoszą duży wkład dotyczący twierdzeń podstawowych oraz konkretnych rozwiązań dla powłok zbrojonych. ŁUKASIEWICZ [48] rozpatrywał obrotowo-symetryczne powłoki zbliżone kształtem do stożkowych, zbudowane z materiału spełniającego warunek

zastosował w przypadku powłok pojęcie linii załomu wprowadzone przez JOHANSENA [9] dla płyt.

Eksperymentalne i teoretyczne studium dotyczące podstaw teorii linii załomów dla żelbetowych powłok walcowych podano w pracy [75]. W pracy [28] rozpatrzono mechanizmy zniszczenia odpowiadające obrotom sztywnych płyt względem przestrzennego układu osi. Dla takich mechanizmów w przegubach plastycznych występują ścinania w płaszczyznach stycznych do powłoki i linie *skupionych odkształceń* nie pokrywają się z głównymi kierunkami odkształceń.

Pojęcie takich *uogólnionych przegubów plastycznych* wyjaśnione jest na rys. 7 i 8. Rysunek 7 podaje wektorowe przedstawienie chwilowego ruchu dwóch sztywnych płyt



Rys. 8. Nieciągłości przemieszczeń w uogólnionym przegubie plastycznym [35]

płaskiej konstrukcji. Na linii dzielącej płyty występują nieciągłości kąta obrotu oraz normalnych i stycznych przemieszczeń płaszczyzny środkowej, które są odpowiednio równe

$$(4.1) \quad \dot{\varphi}] = \varphi_{12}, \quad \dot{U}_n] = t\psi_{12}, \quad \dot{U}_t] = \Phi_1 \Delta = \Phi_2 \Delta.$$

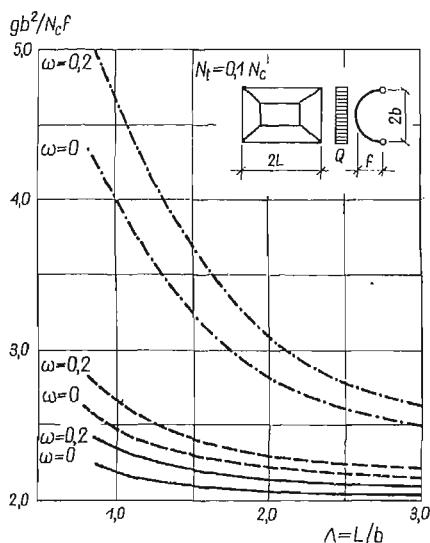
Jak pokazuje rys. 8, nieciągłości te dają *skupione odkształcenia*. Są one nowymi uogólnionymi prędkościami odkształceń: krzywizną — $\bar{\kappa}_{nn} = \dot{\varphi}]$, osiowym odkształceniem normalnym $\bar{\lambda}_{nn} = \dot{U}_n]$ i odkształceniem postaciowym na powierzchni środkowej $\bar{\lambda}_{nt} = \dot{U}_t]$. Obliczenie dysypacji energii jest wówczas pracochłonne, lecz uzyskane na tej drodze górne oszacowania nośności mogą dawać znacznie niższe wartości w porównaniu z wynikami opartymi na prostej teorii linii załomów, jak np. w pracy [18]. Na rys. 9 podano górne oszacowania nośności małowyniosłego przekrycia walcowego uzyskane w pracy [29] dla różnych wielkości parametrów stosunków *długość–szerokość* $\Lambda = L/b$ i *grubość–wyniosłość* $\omega = h/f$. Przedstawione wyniki dotyczą wytrzymałości przekroju przy osiowym rozciąganiu N_t równej 10% wytrzymałości przy ściskaniu N_c . Linie ciągłe oznaczają omawiane rozwiązanie, zaś linie przerywane odpowiadają rozwiązaniu przybliżonemu opartemu na warunku plastyczności w postaci ośmiościanu opisanego na pokazanych na rys. 1 stożkach. Linie osiowe przedstawiają wyniki dla uproszczonej teorii linii załomów.

Podójście podobne do omówionego powyżej zastosowane zostało w pracy [37] do analizy łukowych zapór żelbetowych. Szereg ważnych wzorów na dysypację energii w uogólnionych przegubach plastycznych podany został przez JANASA i KÖNIGA w pracy [35]. W przypadku, gdy udział energii pochłoniętej przez odkształcenia giętne jest mały w porównaniu

z całą energią rozpraszaną w procesie odkształcenia plastycznego, wyrazi się ona wzorem

$$(4.2) \quad D = \frac{N_c}{2} \left\{ \left(1 + 2 \sum_i \eta_i \right) \sqrt{\dot{U}_n^2 + \dot{U}_r^2} - \dot{U}_n \right\}.$$

Intensywność i -tej warstwy zbrojenia oznaczono przez η_i , N_c oznacza wytrzymałość przekroju betonowego na ściskanie, zaś nieciągłości \dot{U}_n i \dot{U}_r objaśnia wzór (4.1) i rys. 8. W [35] podano przykłady liczbowe górnych oszacowań nośności dla przekryć walcowych, paneli o podwójnej krzywiznie i dla tarczownic.



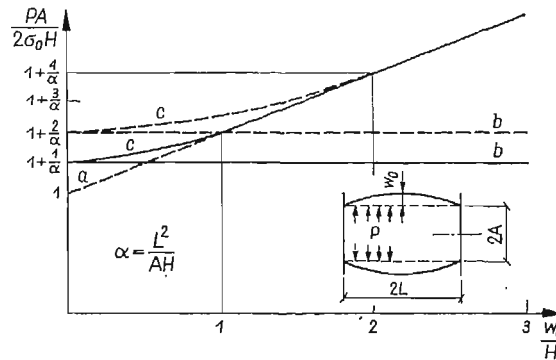
Rys. 9. Obciążenia graniczne dla małowyniosłego przekrycia walcowego [29]

Mechanizmy zniszczenia realizujące się poprzez powstanie układu linii załomów badane były w pracach [31, 38]. Wykazano tam, że jeśli przy różnoimiennym zginaniu momenty graniczne są różne, to powierzchnia środkowa musi doznawać odkształceń nawet w przypadku czystego zginania. Jeśli więzy poprzeczne przeciwstawiają się powstaniu takich odkształceń, to od samego początku procesu deformacji występują także i w płytach siły osiowe (efekt tarczowy). Płyty zachowują się wtedy nawet przy małych odkształceniach jak powłoki, czy tarczownice. Okazuje się, że klasyczna teoria linii załomów jest wówczas kinematycznie niedopuszczalna i niezbędne jest wprowadzenie do niej omówionego poprzednio pojęcia uogólnionych przegubów plastycznych.

5. Duże ugięcia

Studia z zakresu dużych odkształceń plastycznych przyciągają wciąż wzrastające zainteresowanie ze względu na ich znaczenie przy określaniu rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji. Efekty wzmocnienia geometrycznego badane są bądź w fazie niewielkich ugięć jako tzw. *stany pokrytyczne*, bądź dla bardzo zaawansowanych odkształceń plastycznych, gdy powłoki i płyty zachowują się jak membrany.

Teoria niewielkich, skończonych ugięć zakłada małość odkształceń, a więc pomija zmiany grubości powłoki. Natomiast kąty obrotu odkształconej powierzchni środkowej wpływają na postać równań równowagi i zależności kinematycznych. Teorię tego typu dla idealnie plastycznych powłok rozwinęła DUSZEK [23] i zastosowała do badania *stanów pokrytycznych* konstrukcji sztywno-plastycznych. Ze swej przybliżonej teorii otrzymała ona zależności między obciążeniem i ugięciem w przejściowej fazie między początkowym plastycznym płynięciem i czysto membranowym stanem dla obciążonych równomiernym ciśnieniem zbiorników walcowych o różnych warunkach podparcia krawędzi [23, 24, 26]. Okazuje się, że walec przechodzi w stan czysto membranowy już dla ugięć rzędu grubości powłoki. Pokazano to na rys. 10 dla przegubowego podparcia (linie ciągłe) i dla pełnego zamocowania krawędzi (linie przerywane). Przy tych samych założeniach DUSZEK otrzymała w pracach [25, 27] wyniki dla małowyniosłych kopuł.



Rys. 10. Zależności między obciążeniem i przemieszczeniem dla powłok walcowych obciążonych ciśnieniem równomiernym [24]; *a* — rozwiązanie błonowe, *b* — teoria małych przemieszczeń, *c* — przybliżona teoria dla skończonych przemieszczeń

Przy większych odkształceniach konieczne jest podejście dokładniejsze niż pozwala na to teoria Kármána. Stosując współrzędne Lagrange'a, WASZCZYŹYŃ [95] zbudował uściśnione równania dla teorii małych odkształceń i dużych ugięć powłok obrotowo-symetrycznych. Równania te wykorzystał przy rozwiązywaniu zagadnień w oparciu o teorię odkształceń sprężysto-plastycznych. Obliczenia numeryczne zilustrowane zostały przykładem małowyniosłego stożka ściętego.

ORKISZ zastosował w swych badaniach dużych odkształceń membranowych powłok obrotowych podejście GRIGORIEWA (patrz np. [4]). Stan bardzo dużych odkształceń powłok mogących przenosić jedynie rozciągające siły obwodowe analizował on w ramach deformacyjnej teorii plastyczności. W szeregu prac przedstawił metody i wyniki rozwiązań numerycznych dla pierścieniowych membran, ściętych stożków [62, 63] i dla powłok ortotropowych [65]. Ważny problem odciążania badany był w pracy [64]. ORKISZ i WILK [68] podali numeryczny sposób całkowania równań uzyskanych w pracy [66], a opisujących duże deformacje powłok w ramach teorii plastycznego płynięcia. Praca [67] stanowi podsumowanie i rozwinięcie wymienionych publikacji ORKISZA.

Duże odkształcenia i utratę stateczności powłok poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego i rozciągających sił krawędziowych badał MARCINIĄK [49, 50] dla celów teorii

formowania plastycznego. Bogaty przegląd prac poświęconych formowaniu plastycznemu znaleźć można w opracowaniach i książkach SZCZEPIŃSKIEGO [91–93].

Bardzo duże odkształcenia ciśnieniowych walcowych zbiorników stalowych były badane przez JANASĄ i SAVE'A (badania na rozerwanie dla potrzeb optymalnego projektowania). Doświadczenia te [36] pozwalają określić taki sposób rozdzielenia materiału pomiędzy powłokę i dna, który daje konstrukcję optymalną. WIERZBICKI i ANDRZEJEWSKI [97] pokazali, że efekty geometrycznej nieliniowości grają istotną rolę w przypadku dynamicznych obciążeń (obciążenia wybuchowe).

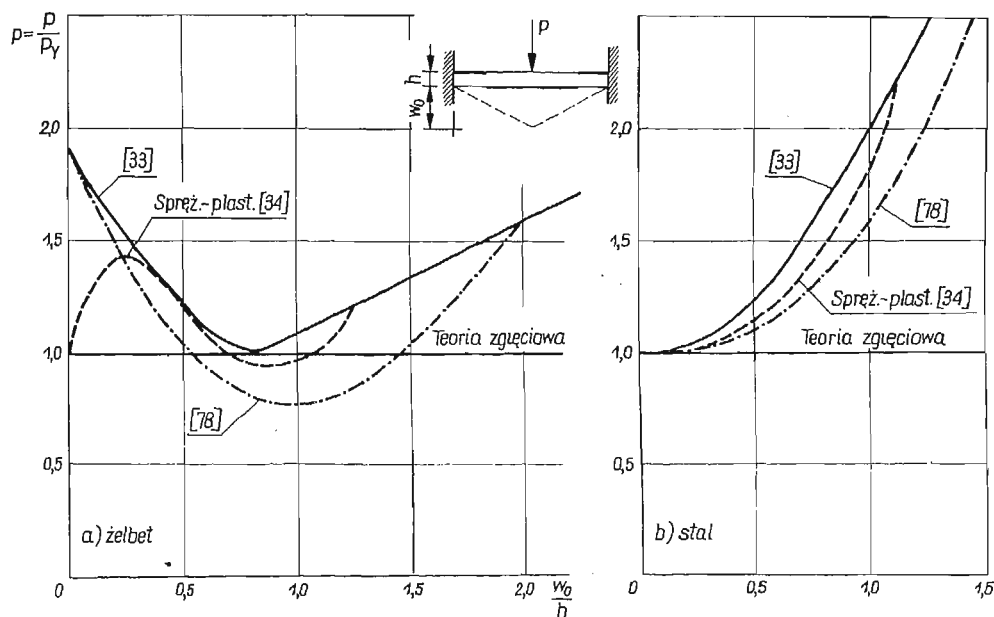
Analiza płyt przy skończonych ugięciach wykorzystuje metody stosowane w teorii powłok. Z tego względu omówimy tu w skrócie także i wyniki dotyczące płyt. WASZCZY-SZYN [94] zastosował wyprowadzone przez siebie ścisłe równania do numerycznej analizy sprężysto-plastycznych ugięć płyt kołowych. Podał on przykład dla pierścieniowej płyty z materiału o liniowym wzmocnieniu. WIERZBICKI i KELLY [96, 98] wykorzystali dla sztywno-plastycznych płyt kołowych obciążonych dynamicznie metodę opartą na teorii Kármána, zbliżoną do metody stosowanej do powłok [23–27].

Jak już zaznaczono, kompletne rozwiązania problemów dla dużych przemieszczeń rzadko prowadzą do wyników w postaci analitycznej. Stąd wynika zainteresowanie metodami przybliżonymi pozwalającymi określić zależność między obciążeniem i ugięciem w fazie *pokrytycznej*, czyli po wyczerpaniu początkowej nośności granicznej konstrukcji. Podejście kinematyczne zastosowane zostało do płyt przez ONATA i HAYTHORNTHWAITA [15]. Rozpatrywali oni odkształconą płytę kołową jako powłokę stożkową o wzrastającej wyniosłości, określając dla każdej wartości ugięcia odpowiednie obciążenie graniczne. RŻANICYN [19] zastosował do dużych ugięć metodę linii załomów przy pewnych uproszczeniach dotyczących sił wewnętrznych w przegubach plastycznych. Pierwsze rozwiązania dotyczące zachowania pokrytycznego płyt żelbetowych podał WOOD [21]. Metoda linii załomów zastosowana została przez SAWCZUKA i WINNICKIEGO [89, 90] do prostokątnych płyt żelbetowych. Rozpatrywano tam mechanizm zniszczenia płyt w postaci układu płatów połączonych przegubami *obrotowymi* i *rozciągliwymi*, w których siły wewnętrzne zależały od ugięcia. Badano różne warunki podparcia i uzyskane zależności obciążenie–ugięcie porównano z wynikami doświadczeń. Dalsze wyniki dla dużych odkształceń płyt sztywno-plastycznych podano w pracach [77–80].

Jeśli warunki podparcia uniemożliwiają poziome przemieszczenia krawędzi płyty, to odkształceniom towarzyszą ściskające siły osiowe. Ściskanie to maleje ze wzrostem ugięć i dlatego zależność między obciążeniem i ugięciem ma charakter niestateczny. Zagadnienie to badane było w pracy [33] i zilustrowane przykładami dla sztywno-plastycznych płyt kwadratowych i kołowych.

Okazuje się, że jeśli uwzględniona zostaje osiowa ścisłość sprężysta płyty żelbetowej [34], to wzmacniający efekt ściskania (efekt tarczowy) jest znacznie słabszy. Maksymalne obciążenie, które przenieść może płyta występuje dla ugięć mniejszych od połowy jej grubości. Wyniki uzyskane przy uwzględnieniu ścisłości sprężystej dają przejście od czysto zgięciowej teorii do analizy sztywno-plastycznej efektu tarczowego. Rysunek 11 podaje syntetyczne wyniki z prac [33, 34, 78] dla najprostszego przypadku walcowego zginania zamocowanego pasma płytowego. Obciążenie P podano jako funkcję ugięcia środka w_0 ; obie zmienne przedstawione są w postaci bezwymiarowej: P/P_y , (stosunek obciążenia do

zgięciowego obciążenia granicznego) i w_0/h (stosunek ugięcia do grubości). Krzywe z rys. 11a dotyczą pasma żelbetowego, zaś z rys. 11b — pasma stalowego. Jak widać, jedynie krzywe dla żelbetu mają charakter niestateczny.



Rys. 11. Zależności między obciążeniem i przemieszczeniem dla zamocowanego pasma płytowego

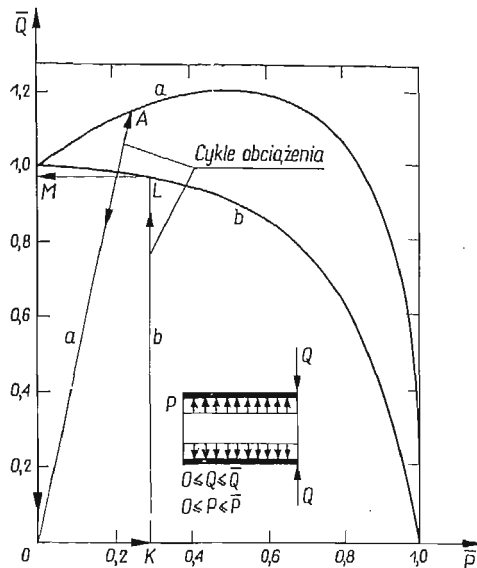
6. Dostosowanie konstrukcji

Konstrukcja sprężysto-plastyczna poddana działaniu obciążeń powtarzalnych lub działaniu kilku obciążeń zmieniających się niezależnie w pewnych granicach może utracić cechy użytkowe bądź wskutek narastania odkształceń (zniszczenie *przyrostowe*), bądź wskutek zmęczenia plastycznego (przemienne odkształcenia plastyczne). Analiza dostosowania się konstrukcji polega na znalezieniu ograniczeń programu obciążenia, przy których konstrukcja zachowywać się będzie sprężysto. Uznajemy, że konstrukcja dostosuje się do danego programu obciążenia, jeśli po skończonej liczbie cykli odkształcenia plastycznego powstanie w niej taki układ naprężeń resztkowych, że dalsze odkształcenia będą już czysto sprężyste.

Kompletne rozwiązanie dla przypadku zmiennych obciążeń winno polegać na określaniu, krok po kroku, całej historii zachowania się konstrukcji. Podejście takie jest na ogół zbyt pracochłonne i dlatego opracowano metody pozwalające oszacowywać dopuszczalne obszary zmienności obciążeń. Twierdzenie MELANA [12] pozwala uzyskać dolne oszacowanie obszaru dostosowania się konstrukcji. Głosi ono, że konstrukcja dostosuje się do danego obciążenia, jeśli istnieje taki niezależny od czasu układ naprężeń resztkowych, że w każdej chwili suma naprężeń resztkowych i naprężeń otrzymanych z analizy sprężystej

nie będzie przekraczać warunku plastyczności. Dla zastosowania w teorii płyt i powłok używającej zmiennych uogólnionych twierdzenie to wymaga odpowiedniego zmodyfikowania. Takie uogólnienia podał KÖNIG [41, 42] wraz z szeregiem przykładów. Zasadniczym elementem jego rozważań jest wprowadzenie pojęcia powierzchni sprężystej. Jest ona wypukłą funkcją uogólnionych naprężeń i znajduje się wewnątrz powierzchni granicznej; przy stanach naprężenia odpowiadających wnętrzu powierzchni sprężystej konstrukcja zachowuje się czysto sprężysto. Zagadnienia związane z określaniem takiej powierzchni oraz jej przemieszczania się i odkształcenia przy wzroście plastycznych odkształceń omówione zostały w pracach [41, 42].

Górne oszacowania obszarów dostosowania się konstrukcji uzyskać można wykorzystując twierdzenie KOITERA o *nieprzystosowaniu* [10]. Mówi ono, że konstrukcja nie przystosuje się do rozpatrywanego programu obciążenia, jeśli można znaleźć taki kinematycznie dopuszczalny cykl odkształceń, że praca obciążeń zewnętrznych przewyższa energię rozpraszaną w trakcie tego cyklu. Energia jest wówczas rozpraszana w każdym cyklu i w końcu



Rys. 12. Granice dopuszczalnych obszarów obciążenia dla powłoki walcowej; *a* — krzywa obciążenia granicznego dla jednoparametrowego obciążenia; *b* — górne oszacowanie obszaru dostosowywalności [83]

konstrukcja ulec musi zniszczeniu bądź przez wzrost odkształceń, bądź przez plastyczne zmęczenie. Twierdzenie to jest analogiczne do twierdzenia teorii stanów granicznych o górnej granicy obciążenia. W celu zastosowania twierdzenia Koitera w teorii powłok, musi być ono zapisane przy pomocy zmiennych uogólnionych. Łącząc twierdzenie z warunkami określającymi pola przemieszczeń dopuszczalnych związanych z określonym profilem naprężeń w stanie granicznym, można uzyskać oszacowanie od góry obszaru dostosowania się. W szczególności udaje się to przeprowadzić dla przypadku odcinkowo liniowych powierzchni granicznych.

Na możliwość wykorzystania twierdzenia Koitera w praktycznych obliczeniach wskazał pierwszy GOCHFELD [3]. Niezależną od czasu postać tego twierdzenia przydatną do analizy

powłok podano w pracy [83]. Na rys. 12 podano krzywe określające obszar zniszczenia przyrostowego oraz nośność graniczną powłoki walcowej obciążonej pierścieniem sił i ciśnieniem wewnętrznym. Pokazano tam także odpowiednie drogi obciążenia. Rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej dotyczy obu grup obciążeń wzrastających proporcjonalnie, zaś krzywa zniszczenia przyrostowego odpowiada dowolnej drodze obciążenia, np. oznaczonego „na” rysunku łamaną *OKLM*. Warto zwrócić uwagę na fakt, że „dla obciążenia jednoparametrowego (np. droga *OAO*) krzywa nośności granicznej wyraźnie różni się od krzywej oszacowującej od góry obszar zniszczenia przyrostowego uzyskanej z przyrostowej postaci twierdzenia Koitera podanej w [83] dla dowolnego cyklu obciążenia. Zastosowanie tego twierdzenia wymaga jednak na ogół w praktycznych przypadkach sięgnięcia do metod numerycznych.

7. Wnioski

Obecny stan badań w dziedzinie powłok plastycznych wydaje się wskazywać, że nowe rozwiązania z zakresu teorii stanów granicznych uzyskać można przez szersze zastosowanie technik numerycznych.

Koncepcyjnie nowych wyników oczekiwać można w dziedzinach takich, jak:

- 1) Nośność graniczna konstrukcji złożonych (konstrukcje zbrojone i krucho-plastyczne); zwrócenia uwagi wymaga tak dobór właściwych warunków plastyczności, jak i odpowiednich metod analizy.
- 2) Teoria dużych odkształceń powłok; problem stateczności odkształceń plastycznych staje się istotniejszy od klasycznych zagadnień początkowej nośności granicznej.
- 3) Przybliżone metody analizy dużych przemieszczeń opartych na odpowiednio uogólnionych twierdzeniach teorii stanów granicznych lub na nowych twierdzeniach, na przykład o oszacowaniach przemieszczeń.
- 4) Analiza odkształceń sprężysto-plastycznych przy obciążeniach wieloparametrowych; w dziedzinie dostosowywania się konstrukcji brak wciąż efektywnych metod obliczeniowych.
- 5) Metody optymalnego projektowania plastycznego dla specjalnych funkcji kosztu, włączając w to optymalne projektowanie z uwagi na dostosowanie się konstrukcji.
- 6) Dynamiczne zachowanie się powłok plastycznych i kruchych, szczególnie z uwzględnieniem dużych przemieszczeń.

Literatura cytowana w tekście

Bibliografia ogólna

1. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *The safety factor of an elastic plastic body in plane strain*, J. Appl. Mech., **18** (1951), 371.
2. M. N. FIALKOW, *Limit analysis of simply supported circular shell roofs*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., **84** (1958), EM3, Pap. 1706.

3. Д. А. ГОХФЕЛЬД, *Некоторые задачи теории приспособляемости пластин и оболочек*, Труды VI Вс. Конф. Обол. Пласт. Баку, Наука, Москва 1966, 284.
4. A. S. GRIGORIEV, *The stress state and carrying capacity of flexible plates and shells at large deformations. Non-classical shell problems* (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North Holland, PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 890.
5. А. А. ГВОЗДЕВ, *Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределенных систем, претерпевающих пластические деформации*, Труды Конф. Пласт. Деформ., АН СССР, Москва 1938; по английски: *Int. J. Mech. Sci.*, 1 (1960), 322.
6. R. HILL, *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Univ. Press, London 1950.
7. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
8. P. G. HODGE, *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. I. 1963.
9. K. W. JOHANSEN, *Yield-line Theory*, Cement and Concrete Assoc., London 1961; по датски: Kobenhavn 1943.
10. W. T. KOITER, *A new general theorem on shake-down of elasto-plastic structures*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetensch., B 59 (1956), 24.
11. Ch. MASSONNET, M. SAVE, *Calcul Plastique des Constructions*, 2, CBLIA, Bruxelles 1963.
12. E. MELAN, *Der Spannungszustand eines Hencky-Miseschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung*, Sitz. Ber. Ak. Wiss., Wien, IIa 147 (1938), 73.
13. М. Ш. МИГЕЛАДЗЕ, *Статика анизотропных пластичных оболочек*, Изд. АН ГРУЗ. ССР, Тбилиси 1963.
14. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elasto-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 8 (1956), 85.
15. E. T. ONAT, R. T. HAYTHORNTHWAITE, *The load-carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech., 23 (1956), 49.
16. E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of shells of revolution*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetensch., B 57 (1954), 534.
17. W. PRAGER, *The general theory of limit design*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. (Istanbul 1952), 2, Istanbul 1956, 65.
18. A. R. RZHANITSYN, *Calculation of shallow shells by the limit design method*, Simplified Calculation Methods of Shell Structures (Proc. Coll. Brussels 1961), North-Holland, Amsterdam 1962, 438; по русски: ЦНИИСК — Иссл. Вopr. Теории Пласт. Проч. Стр. Констр., Москва 1958.
19. A. R. RZHANITSYN, *The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium*, IX Congr. Int. Méc. Appliquée, 6, Université de Bruxelles, Brussels 1957, 331.
20. A. SAWCZUK, *Linear theory of plasticity of anisotropic bodies and its applications to problems of limit analysis*, Arch. Mech. Stos., 11 (1959), 541.
21. R. H. WOOD, *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*, Thames and Hudson, London 1961.

Prace Polskie 1960-1969

22. A. BIRON, A. SAWCZUK, *Plastic analysis of rib-reinforced cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 34 (1967), 37.
23. M. DUSZEK, *Effect of geometry changes on the carrying capacity of cylindrical shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., 13 (1965), 183.
24. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech. Stos., 18 (1966), 599.
25. М. ДУШЕК, *Пластическое поведение пологих сферических оболочек при больших прогибах*, Bull. Acad. Pol. Sci., 15 (1967), 565.
26. M. DUSZEK, *Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmian kształtu*, Rozp. Inżyn., 15 (1967), 653.
27. M. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Theory of Thin Shells (Proc. Symp. IUTAM Copenhagen 1967), Springer Verlag, Berlin 1969, 374.
28. M. JANAS, *Nośność graniczna przekrycia walcowego*, Arch. Inż. Łąd., 8 (1962), 365.

29. M. JANAS, *Limit analysis of non-symmetric plastic shells by a generalized yield-line method*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 997.
30. M. JANAS, *Yield loci for non-symmetric plastic shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., **13** (1965), 9.
31. M. JANAS, *Kinematical compatibility problems in yield-line theory*, Mag. Concr. Res., **19** (1967), 33.
32. M. JANAS, *Nośność graniczna łuków i sklepień*, Arkady, Warszawa 1967.
33. M. JANAS, *Large plastic deformations of reinforced concrete slabs*, Int. J. Solids Struct., **4** (1968), 61.
34. M. JANAS, *An elastic-plastic analysis of the arching action in reinforced concrete slabs*, Bull. Inf. CEB (in press).
35. M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Nośność graniczna powłok — przekrycia i zbiorniki*, Arkady, Warszawa 1968.
36. M. JANAS, M. SAVE, *Investigation of optimal design of cylindrical vessels for assigned bursting pressure*, Pipes and Tanks (Proc. Symp. IASS, Weimar 1968).
37. M. JANAS, A. SAWCZUK, *Some aspects of the load-carrying capacities of arch dams*, Theory of Arch Dams (Proc. Symp. IASS, Southampton 1964), Pergamon Press, Oxford 1964, 627.
38. M. JANAS, A. SAWCZUK, *Influence of position of lateral restraints on carrying capacities of plates*, Arch. Inż. Łąd., **12** (1966), 231.
39. J. A. KÖNIG, *Deformations of cylindrical elastic-plastic shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., **12** (1964), 13.
40. J. A. KÖNIG, *Przybliżone określanie odkształceń płyt i powłok plastycznych w oparciu o niestowarzyszone prawo płynięcia*, Rozp. Inżyn., **13** (1965), 55.
41. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 228.
42. J. A. KÖNIG, *Shakedown theory of plates*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 623.
43. J. A. KÖNIG, J. KLEPACZKO, *Ściskanie osiowe powłoki cylindrycznej z równoczesnym ciśnieniem wewnętrznym*, Rozp. Inżyn., **14** (1966), 263.
44. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield criterion for initially isotropic reinforced slab*, Mag. Concr. Res., **17** (1965), 97.
45. M. W. KWIECIŃSKI, *Some tests on the yield criterion for a reinforced concrete slab*, Mag. Concr. Res., **17** (1965), 135.
46. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield criterion for an orthotropic reinforced slab*, Int. J. Solids Struct., **1** (1965), 439.
47. M. W. KWIECIŃSKI, *Yield condition for orthotropically reinforced slab*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 615.
48. S. ŁUKASIEWICZ, *On the optimum design of shells loaded with concentrated forces*, Theory of Thin Shells (Proc. IUTAM Symp. Copenhagen 1967), Springer Verlag, Berlin 1969, 161.
49. Z. MARCINIAK, *Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **17** (1965), 577.
50. Z. MARCINIAK, *Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych*, Mech. Teor. Stos., **4** (1966), 13.
51. M. MROWIEC, *Stan graniczny rurociągu cienkościennego w przypadku ciśnienia wewnętrznego i zginania*, Rozp. Inżyn., **14** (1966), 513; po angielsku: Bull. Acad. Pol. Sci., **15** (1967), 615.
52. M. MROWIEC, M. ŻYCZKOWSKI, *Krzywe nośności granicznej dla cienkościennego rurociągu poddanego ciśnieniu wewnętrznemu i zginaniu*, Rozp. Inżyn., **15** (1967), 615.
53. Z. MRÓZ, *The load-carrying capacity of orthotropic shells*, Arch. Mech. Stos., **12** (1960), 85.
54. Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., **19** (1961), 127.
55. Z. MRÓZ, *Limit analysis of plastic structures subjected to boundary variations*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 63.
56. Z. MRÓZ, *Optimum design of reinforced shells of revolution*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland — PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 732.
57. Z. MRÓZ, XU BING-YE, *The load carrying capacities of symmetrically loaded spherical shells*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 245.
58. W. OLSZAK, Z. MRÓZ, P. PERZYNA, *Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity*, Pergamon Press, Oxford 1963; po rosyjsku: Mir, Moskwa 1964; po czesku: CSAV, Praha 1964.
59. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Plasticity under nonhomogeneous conditions*, Advances in Applied Mechanics, **8** (1962), 131; po rosyjsku: Mir, Moskwa 1964.
60. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Théorie de la capacité portante des constructions non-homogènes et orthotropes*, Ann. Inst. Techn. Bat. Trav. Publ., **13** (1960) 517; po portugalsku: Tecnica Revista de Engenharia, **34** (1960), 31 i 111.

61. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Inelastic Behaviour in Shells*, Nordhoff, Groningen 1967.
62. Я. ОРКИШ, *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, Инжен. Журн., 5 (1965), 976.
63. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., 13 (1965), 693, po angielsku: Bull. Acad. Pol. Sci., 15 (1967), 31.
64. J. ORKISZ, *Problem odciążania obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teor. Stos., 3 (1965), 63.
65. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia niesprężystych wiotkich osiowo-symetrycznych powłok ortotropowych w stanie błonowym*, Rozpr. Inżyn., 15 (1967), 697.
66. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym w świetle teorii plastycznego płynięcia*, Mech. Teor. Stos., 5 (1967), 463.
67. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zesz. Nauk. Polit. Krak., Kraków 1967.
68. J. ORKISZ, J. WILK, *Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teor. Stos., 7 (1969), 179.
69. J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of helicoidal shells*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 819.
70. Я. РЫКЛЕВСКИЙ, *К общей теории идеально пластических оболочек*, Труды VI Всес. Конф. Обол. Пласт., Баку, Наука, Москва 1966, 873.
71. Я. РЫКЛЕВСКИЙ, Г. С. ШАПИРО, *Идеально пластические пластинки и оболочки*, Труды VI Всес. Конф. Обол. Пласт., Баку, Наука, Москва 1966, 987.
72. R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK, *The load-carrying capacities of plates and shells*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 842.
73. A. SAWCZUK, *Yield condition for anisotropic shells*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8 (1960), 273.
74. A. SAWCZUK, *On the theory of anisotropic plates and shells*, Arch. Mech. Stos., 13 (1961), 355.
75. A. SAWCZUK, *On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells*, Shell Research (Proc. Symp., Delft 1961), North-Holland, Amsterdam 1961, 217.
76. A. SAWCZUK, *On limit analysis of anisotropic shells*, Non-classical Shell Problems (Proc. Symp. IASS, Warszawa 1963), North-Holland-PWN, Amsterdam-Warszawa 1964, 909.
77. A. SAWCZUK, *On initiation of the membrane action in rigid-plastic plates*, J. Mécanique, 3 (1964), 15.
78. A. SAWCZUK, *Membrane action in flexure of rectangular plates with restrained edges*, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete (Proc. Symp., Miami 1964), ASCE, New York 1965, 347.
79. A. SAWCZUK, *Estimation of the post-yield-load-deflection relationship of perfectly plastic plates*, Theory of Plates and Shells (Proc. Conf., Smolenice 1963), SAV., Bratislava 1966, 435.
80. A. SAWCZUK, *Large deflections of rigid plastic plates*, Applied Mechanics (Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech., Munich 1964), Springer Verlag, Berlin 1966, 224.
81. A. SAWCZUK, *On formulation of the equations of limit analysis of structures*, Z. angew. Math. Mech., Sonderheft, 46 (1966), 28.
82. A. SAWCZUK, *On yield criteria and collapse modes for plates*, J. Non-Linear Mech., 2 (1967), 233.
83. A. SAWCZUK, *On incremental collapse of shells under cyclic loading*, Theory of Thin Shells (Proc. IUTAM Symp., Copenhagen 1967), Springer Verlag, Berlin 1969, 328.
84. A. SAWCZUK, *Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells*, J. Mech. Phys. Solids, 17 (1969), 291.
85. A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Comparison of yield condition for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst., 269 (1960), 362.
86. A. SAWCZUK, J. A. KÖNIG, *Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych*, Arch. Inż. Łąd., 8 (1962), 161.
87. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *A method of limit analysis of reinforced concrete tanks*, Simplified Calc. Meth. Shell Struct. (Proc. Coll. Brussels 1961), North-Holland, Amsterdam 1962, 416.
88. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, Arch. Mech. Stos., 12 (1960), 29.

89. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Analiza plastyczna płyt żelbetowych przy dużych ugięciach*, Arch. Inż. Łąd., **9** (1963), 461.
90. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Plastic behaviour of simply supported reinforced concrete plates at moderately large deflections*, Int. J. Solids Struct., **1** (1965), 97.
91. W. SZCZEPIŃSKI, *Recent advances in the theory of drawing of thin shells*, Appl. Mech. Rev., **14** (1961), 173.
92. W. SZCZEPIŃSKI, *Recent Advances in the Theory of Drawing of Metals*, Applied Mechanics Surveys, Spartan Books-McMilan, Washington 1966, 525.
93. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki*, PWN, Warszawa 1967.
94. Z. WASZCZYŻYŃ, *Skończone sprężysto-plastyczne ugięcia płyt kołowo-symetrycznych*, Rozpr. Inżyn., **15** (1967), 123.
95. Z. WASZCZYŻYŃ, *Ścisłe równania i obliczenie sprężysto-plastycznych ugięć powłok obrotowo-symetrycznych*, Rozpr. Inżyn., **16** (1968), 363.
96. T. WIERZBICKI, *Large deflections of a strain rate sensitive plate loaded impulsively*, Arch. Mech. Stos. **21** (1969), 67.
97. T. WIERZBICKI, H. ANDRZEJEWSKI, *An experimental and theoretical study of impulsively loaded viscoplastic cylindrical shells*, Prace IPPT 12/1969, Warszawa (publikacja wstępna).
98. T. WIERZBICKI, J. M. KELLY, *Finite deflections of a circular viscoplastic plate subject to projectile impact* Int. J. Solids Struct., **4** (1968), 1081.
99. M. ŻYCZKOWSKI, *Rozwój teorii plastyczności i wytrzymałości w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (1958-1967)*, Mech. Teor. Stos., **6** (1968), 361.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 stycznia 1970 r.

OGRANICZENIA NA FUNKCJĘ ENERGII SPRĘŻYSTEJ
WYNIKAJĄCE Z WARUNKU SILNEJ ELIPTYCZNOŚCI

BERNARD DUSZCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W liniowej teorii sprężystości przyjmuje się, że funkcja materiałowa (energia sprężysta) jest dodatnio określoną formą kwadratową; dla materiałów izotropowych odpowiada to warunkom: $\mu > 0$ i $3\lambda + 2\mu > 0$. Ograniczenie to zapewnia, że klasyczne infinitezimalne teorie prowadzą do fizycznie dopuszczalnych wyników w przypadku małych odkształceń.

W roku 1956 (por. [4] § 51) TRUESDELL sformułował podobny problem w teorii nieliniowej: czy można ustalić taki zbiór warunków ograniczających, który zapewni fizycznie dopuszczalne rozwiązanie w każdym dopuszczalnym stanie odkształcenia i dla każdego materiału? Ponieważ teoria liniowa jest szczególnym przypadkiem nieliniowej teorii sprężystości oczywiste jest, że te *nieznane* warunki winny implikować wspomniane wyżej klasyczne ograniczenia.

W międzyczasie opublikowano wiele prac zajmujących się tym problemem¹⁾ i zaproponowano szereg warunków stanowiących częściową odpowiedź na postawione pytania. Jednym z nich jest warunek silnej eliptyczności ($S-E$), wykorzystywany m.in. w teorii propagacji fal, przy badaniu jednoznaczności i stateczności rozwiązań nieliniowej teorii sprężystości i in.

W pracy niniejszej zajmujemy się warunkiem $S-E$, jego statycznymi implikacjami oraz wynikającymi zeń oszacowaniami na funkcję energii sprężystej, a także jego związkiem z jednoznacznością rozwiązań przemieszczeniowego zagadnienia brzegowego zbudowanego dla małych dodatkowych deformacji nałożonych na wstępną skończoną deformację.

2. Podstawowe równania teorii małych dodatkowych deformacji nałożonych na duże

Wprowadźmy trzy różne konfiguracje ciała B w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa:

- 1) konfiguracja $\overset{\circ}{C}$ odpowiadająca stanowi naturalnemu ciała B ,
- 2) konfiguracja $\overset{\circ}{C}$ odpowiadająca wstępnej skończonej deformacji ciała B oraz
- 3) konfiguracja $\overset{*}{C}$ odpowiadająca dodatkowej nieskończonej małej deformacji ciała B .

¹⁾ Szczegółowy przegląd wyników tych prac podano w [4], § 51

Zakładając ponadto będziemy, że rozważane ciało B zbudowane jest z materiału hipersprężystego i że proces deformacji ciała jest procesem izotermicznym. Oznacza to, że istnieje funkcja energii sprężystej W (na jednostkę objętości w konfiguracji \mathring{C}), zależna od tensora odkształcenia γ_{ij} i punktu materialnego P .

Przy opisie stanu deformacji posługiwać się będziemy konwekcyjnym układem współrzędnych $\{\theta^i\}$. Oznaczając przez \mathring{g}_{ij} i g_{ij} współrzędne tensora metrycznego odpowiednio w konfiguracji \mathring{C} i C oraz przez \mathbf{g}_i wektory bazy w C , mamy dla wstępnej deformacji

$$(2.1) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \mathring{g}_{ij}),$$

$$(2.2) \quad \tau^{ij} = \frac{\rho}{\rho^0} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}},$$

$$(2.3) \quad \nabla_i \tau_{ij} + \rho f^j = 0,$$

$$(2.4) \quad \tau^{ij} n_i = p^j \quad \text{na powierzchni } S,$$

gdzie γ_{ij} oznacza tensor odkształcenia, τ^{ij} — tensor naprężenia, $\mathbf{f} = f^i \mathbf{g}_i$ — siły masowe, $\mathbf{p} = p^i \mathbf{g}_i$ — siły powierzchniowe na jednostkę powierzchni S w konfiguracji C . Równości (2.3) i (2.4) przedstawiają odpowiednio równania równowagi i warunki brzegowe.

Jeśli przyjąć, że ciało jest izotropowe i jednorodne, tensor naprężenia τ^{ij} można przedstawić w innej postaci. Mamy bowiem

$$(2.5) \quad W = W(I_1, I_2, I_3),$$

gdzie I_k są niezmiennikami stanu odkształcenia

$$(2.6) \quad I_1 = \mathring{g}^{rs} g_{rs}, \quad I_2 = \mathring{g}^{rs} g^{rs} I_3, \quad I_3 = \det(g_{ij}) / \det(\mathring{g}_{ij}).$$

Wówczas

$$(2.7) \quad \tau^{ij} = \Phi_1 \mathring{g}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + \Phi_3 I_3 g^{ij},$$

przy czym oznaczono

$$(2.8) \quad b^{ij} = g_{rs} (\mathring{g}^{ij} \mathring{g}^{rs} - \mathring{g}^{ir} \mathring{g}^{js}),$$

$$(2.9) \quad \Phi_i = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_i}.$$

Korzystając z ogólnej teorii małych dodatkowych deformacji nałożonych na duże, opracowanej przez GREENA, RIVLINA i SHIELDA [1], uzupełnionej następnie interpretacją na gruncie rachunku wariacyjnego przez GUO ZHONG-HENGA i URBANOWSKIEGO [9], podamy związki opisujące stan ciała B w konfiguracji \mathring{C} .

Niech wektor $\varepsilon \mathbf{w}$ ($\mathbf{w} = w^i \mathbf{g}_i$, ε — dostatecznie mały parametr) określa dodatkowe nieskończenie małe przemieszczenie ciała B . Na skutek dodatkowego przemieszczenia podane uprzednio wielkości doznają pewnych przyrostów, których liniowe części mają postać (por. [10]):

$$(2.10) \quad \mathbf{g}'_i = \nabla_i w^r \mathbf{g}_r,$$

$$(2.11) \quad g'_{ij} = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i = 2\gamma'_{ij},$$

$$(2.12) \quad g' = \det(g'_{ij}) = g g'_{rs} g^{rs}, \quad \frac{\rho'}{\rho^0} = -\frac{\rho}{\rho^0} \nabla_i w^i,$$

$$(2.13) \quad \tau'^{ij} = \frac{\rho}{\rho^0} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{rs}} \gamma'_{rs} + \frac{\rho'}{\rho^0} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = K^{ijrs} \nabla_r w_s - \tau^{ij} \nabla_r w^r,$$

$$(2.14) \quad \nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma'_{rs}{}^i \tau^{sj} + \Gamma'_{rs}{}^i \tau^{rs} + \rho' f^i + \rho f'^i = 0,$$

$$(2.15) \quad \Gamma'_{ij}{}^k = \nabla_i \nabla_j w^k,$$

$$(2.16) \quad n_i \tau'^{ij} + n'_i \tau^{ij} = p'^i \quad \text{na } S,$$

gdzie

$$(2.17) \quad K^{ijrs} = \frac{\rho}{\rho^0} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{rs}}, \quad K^{ijrs} = K^{rsij} = K^{ijsr} = K^{jirs},$$

lub dla materiałów izotropowych

$$(2.18) \quad I'_1 = \hat{g}^{ij} g'_{ij}, \quad I'_2 = a^{ij} g'_{ij}, \quad I'_3 = \frac{g'}{\hat{g}},$$

$$(2.19) \quad \tau'^{ij} = \Phi_1 \hat{g}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + \Phi_2 b'^{ij} + \Phi_3 I_3 g^{ij} + \Phi_3 I_3 g'^{ij} + \Phi_3 I_3 g_{ij},$$

$$(2.20) \quad b'^{ij} = (\hat{g}^{ij} \hat{g}^{rs} - \hat{g}^{ir} \hat{g}^{js}) g'_{rs},$$

$$(2.21.1) \quad \Phi'_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} I'_j - \frac{\Phi_i}{2I_3} I_3 \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(2.21.2) \quad A_{ij} = A_{ji} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}, \quad a^{ij} = (g^{ij} g^{rs} - g^{ir} g^{js}) \hat{g}_{rs} I_3.$$

Podstawiając (2.13) i (2.15) do równań równowagi (2.14) i uwzględniając (2.3) otrzymujemy

$$(2.22) \quad C^{ijrs} \nabla_i \nabla_r w_s + \nabla_i C^{ijrs} \nabla_r w_s + \rho f'^j = 0,$$

gdzie

$$(2.23) \quad C^{ijrs} = K^{ijrs} + \tau^{ir} g^{js},$$

przy czym dla materiałów izotropowych

$$(2.24) \quad K^{ijrs} = 2A_{11} \hat{g}^{ij} \hat{g}^{rs} + 2A_{12} (\hat{g}^{ij} a^{rs} + \hat{g}^{rs} b^{ij}) + 2A_{13} I_3 (\hat{g}^{ij} g^{rs} + g^{ij} \hat{g}^{rs}) + 2A_{22} a^{rs} b^{ij} + \\ + 2A_{23} I_3 (g^{ij} a^{rs} + b^{ij} g^{rs}) + 2A_{33} I_3^2 g^{ij} g^{rs} - \Phi_2 (\hat{g}^{is} \hat{g}^{jr} + \hat{g}^{ir} \hat{g}^{js}) - \Phi_3 I_3 (g^{is} g^{jr} + \\ + g^{ir} g^{js}) + 2\Phi_2 \hat{g}^{ij} \hat{g}^{rs} + 2\Phi_3 g^{ij} g^{rs}.$$

Ponieważ tensor γ_{ij} jest symetryczny, można, nie zawężając ogólności, dobrać układ współrzędnych konwekcyjnych $\{\vartheta^i\}$ (związany z konfiguracją C) w ten sposób, by wektory bazy pokrywały się z osiami głównymi tensora γ_{ij} . Tensor odkształcenia oraz pomocnicze tensory a^{ij} , b^{ij} mają wówczas postać diagonalną i pewne współczynniki w równaniach równowagi (2.22) znikają. Jedynie C^{iih} , C^{ijij} , C^{ijji} , C^{ijjj} (nie sumować!) nie są równe tożsamościowo zeru.

Rozważmy przypadek, gdy jednorodnie izotropowe ciało B poddane zostało jednorodnej wstępnej deformacji. Zgodnie z poprzednią uwagą można przyjąć, że $\{\vartheta^i\}$ pokrywa się w konfiguracji C z ortogonalnym kartezjańskim układem współrzędnych $\{x, y, z\}$. Współczynniki (2.23) są wówczas stałe, ponieważ mamy:

$$(2.25) \quad \dot{g}_{ij} = \lambda_i^{-2} g_{ij}, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \dot{g}^{ii} = \frac{1}{\dot{g}_{ii}}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) g_{ij},$$

$$(2.26) \quad I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \quad I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2,$$

$$(2.27) \quad \tau^{ii} = \lambda_i^2 [\Phi_1 + (I_1 - \lambda_i^2) \Phi_2] + \Phi_3 I_3, \quad \tau^{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j,$$

$$(2.28) \quad \tau'^{ij} = (K^{ijrs} - \tau^{ij} g^{rs}) \nabla_r w_s, \quad \nabla_r w_s = \partial_r w_s = w_{s,r},$$

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} K^{1111} = 2A_{11} \lambda_1^4 + 4A_{12} \lambda_1^4 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 4A_{13} I_3 \lambda_1^2 + 2A_{22} \lambda_1^4 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 + \\ \quad + 4A_{23} I_3 \lambda_1^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 2A_{33} I_3^2, \\ K^{1122} = 2A_{11} \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 2A_{12} \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_3^2) + 2A_{13} I_3 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \\ \quad + 2A_{22} \lambda_1^2 \lambda_2^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) (\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + 2A_{23} I_3 (\lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \\ \quad + 2A_{33} I_3^2 + 2\Phi_2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + 2\Phi_3 I_3, \\ K^{1221} = -\Phi_2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \Phi_3 I_3; \end{array} \right.$$

pozostałe współczynniki otrzymujemy przez cykliczną zamianę wskaźników.

Ostatecznie, jeśli pominąć siły masowe, równania równowagi (2.22) przyjmują następującą postać:

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^{1111} w_{1,11} + C^{2121} w_{1,22} + C^{3131} w_{1,33} + (C^{1122} + C^{2112}) w_{2,12} + \\ \quad + (C^{1133} + C^{3113}) w_{3,13} = 0, \\ (C^{2211} + C^{1221}) w_{1,12} + C^{1212} w_{2,11} + C^{2222} w_{2,22} + C^{3232} w_{2,33} + \\ \quad + (C^{2233} + C^{3223}) w_{3,23} = 0, \\ (C^{3311} + C^{1331}) w_{1,13} + (C^{3322} + C^{2332}) w_{2,23} + C^{1313} w_{3,11} + \\ \quad + C^{2323} w_{3,22} + C^{3333} w_{3,33} = 0, \end{array} \right.$$

przy czym $C^{ijjj} + C^{jjij} = C^{jjii} + C^{ijji}$ (nie sumować!).

Zauważmy na koniec, że jeśli rozciągnięcia λ_i są równe (tzn. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$), wszystkie współczynniki układu (2.30) można wyrazić przez dwie wielkości M i N , jednoznacznie określone przez funkcję energii W , zależne jedynie od parametru deformacji (rozciągnięcia) λ , mianowicie

$$(2.31) \quad \begin{aligned} C^{iiii} &= M(\lambda), & C^{ijij} &= N(\lambda), & (\text{nie sumować!}) \\ C^{ijij} + C^{ijji} &= C^{ijjj} + C^{jjij} = M(\lambda) - N(\lambda). \end{aligned}$$

3. Warunek $S-E$

Rozważmy następujący liniowy układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych:

$$(3.1) \quad A^{ijrs}(\mathbf{x}) \partial_i \partial_r w_s + \Omega^j(\mathbf{w}) = F^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

gdzie Ω^j jest dowolnym liniowym operatorem różniczkowym rzędu < 2 .

Utwórzmy macierz

$$(3.2) \quad \mathbf{a} = \|a^{js}\| = \|A^{ijrs} \xi_i \xi_r\|, \quad |\xi| \neq 0,$$

i przedstawmy ją w postaci sumy jej części symetrycznej i antysymetrycznej

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = \|c^{js}\| = \|C^{ijrs} \xi_i \xi_r\| = \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^T),$$

$$\mathbf{k} = \|k^{js}\| = \|K^{ijrs} \xi_i \xi_r\| = \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^T).$$

Będziemy mówili (por.[2]), że układ (3.1) jest silnie eliptyczny w obszarze $B \subset E^3$, jeśli macierz \mathbf{c} jest dodatnio²⁾ określona w każdym punkcie \mathbf{x} tego obszaru, dla dowolnego wektora ξ , $|\xi| \neq 0$, to znaczy jeśli zachodzi nierówność

$$(3.3) \quad C^{ijrs}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_r \eta_j \eta_s > 0$$

dla dowolnych wektorów ξ i η , $|\xi| \neq 0$, $|\eta| \neq 0$ i każdego $\mathbf{x} \in B$. Układ ten jest eliptyczny w obszarze B , jeśli macierz \mathbf{a} jest nieosobliwa w każdym punkcie obszaru B , tzn.

$$(3.4) \quad \det(A^{ijrs} \xi_i \xi_r) \neq 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \in B.$$

Można stąd wnioskować, że układy spełniające warunek (3.3) (warunek ten nazywać będziemy dalej warunkiem $S-E$) należą do klasy układów eliptycznych — lecz nie na odwrót.

Jak zostało pokazane np. w pracach [2, 3] warunek (3.3) jest wystarczający, by przy odpowiednio regularnych współczynnikach i wystarczająco małym obszarze B istniało rozwiązanie pierwszego zagadnienia brzegowego dla układu (3.1), i było ono jedyne. W dalszych rozważaniach zastosujemy warunek (3.3) do równań równowagi (2.22) i wyznaczmy stąd pewne ograniczenia dla wstępnej deformacji oraz dla funkcji energii sprężystej W .

Powróćmy zatem do równań równowagi (2.22). Z (2.17) i (2.23) widać, że $C^{ijrs} = C^{rsij}$, a więc macierz (3.2)

$$\|A^{ijrs} \xi_i \xi_r\| = \|C^{ijrs} \xi_i \xi_r\|, \quad |\xi| \neq 0$$

jest symetryczna. Warunek $S-E$ dla tej macierzy jest równoważny (3.3). Na to, by \mathbf{c} była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, aby spełnione były następujące nierówności

$$(3.5) \quad \begin{aligned} c^{11} &> 0, \\ c^{11} c^{22} - c^{12} c^{21} &> 0, \\ \det(c^{ij}) &> 0. \end{aligned}$$

Bezpośrednie wnioski z (3.5) wskazują, że także musi zachodzić

$$(3.6) \quad c^{22} > 0 \quad \text{i} \quad c^{33} > 0,$$

a stąd wynika natychmiast, że

$$(3.7) \quad C^{ijij} > 0 \quad (\text{nie sumować!}).$$

Oczywiście, warunki (3.7) są tylko konieczne dla spełnienia (3.5), ale nie wystarczają.

²⁾ lub ujemnie określona; w tym przypadku wystarczy pomnożyć wszystkie równania układu (3.1) przez (-1) , by otrzymać dodatnią określoność.

Ze względu na skomplikowaną postać ostatnich dwu nierówności układu (3.5), dalszą ich analizę prowadzić będziemy przy zastosowaniu do szczególnych przypadków równań równowagi. Przy jednorodnej i *jednakowej* wstępnej deformacji współczynniki układu równań równowagi (2.30) spełniają dodatkowe związki (2.31): w tym przypadku mamy tylko dwie niezależne wielkości (*funkcje materiałowe*, zależne tylko od współczynnika deformacji λ) M i N , przez które wyrażają się wszystkie współczynniki układu (2.30). Tutaj warunki (3.5) wyrażają się stosunkowo prosto, mamy bowiem

$$\begin{cases} c^{11} = M\xi_1^2 + N(\xi_2^2 + \xi_3^2) > 0, \\ c^{11}c^{22} - c^{12}c^{21} = N[M(\xi_1^2 + \xi_2^2) + N\xi_3^2] > 0, \\ \det(c^{ij}) = MN^2|\xi|^3 > 0, \end{cases}$$

co z kolei równoważne jest następującym nierównościom

$$(3.8) \quad M > 0 \quad \text{i} \quad N > 0,$$

stanowiącym warunek $S-E$ dla układu (2.30), którego współczynniki spełniają dodatkowo związki (2.31).

Rozważmy teraz przypadek, gdy przy wstępnej jednorodnej deformacji (2.25) dodatkowa deformacja jest płaska

$$w_1 = w_1(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad w_2 = w_2(\vartheta^1, \vartheta^2), \quad w_3 \equiv 0.$$

Układ (2.30) redukuje się wówczas do dwu równań i warunki (3.5) przyjmują postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & C^{1111}\xi_1^2 + C^{2121}\xi_2^2 > 0, \\ & C^{1111}C^{1212}\xi_1^4 + [C^{1111}C^{2222} + C^{1212}C^{2121} - (C^{1122} + C^{2112})^2]\xi_1^2\xi_2^2 + \\ & \quad + C^{2222}C^{2121}\xi_2^4 > 0. \end{aligned}$$

Lewa strona drugiej nierówności jest trójmianem kwadratowym; warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by trójmian ten był dodatni dla każdego ξ jest

$$(3.10) \quad (\sqrt{C^{1111}C^{2222}} + \sqrt{C^{2121}C^{1212}})^2 > (C^{1122} + C^{2112})^2, \quad C^{ijij} > 0,$$

albo

$$(3.11) \quad (\sqrt{C^{1111}C^{2121}} + \sqrt{C^{2222}C^{1212}})^2 + H > 0, \quad C^{ijij} > 0,$$

jeśli zauważyć, że (3.9)₂ przedstawić można w następujących równoważnych postaciach

$$(3.12.1) \quad C^{1111}C^{1212}\xi_1^4 + (C^{1111}C^{2121} + C^{2222}C^{1212} + H)\xi_1^2\xi_2^2 + C^{2222}C^{2121}\xi_2^4 > 0,$$

lub

$$(3.12.2) \quad (C^{1111}\xi_1^2 + C^{2222}\xi_2^2)(C^{1212}\xi_1^2 + C^{2121}\xi_2^2) + H\xi_1^2\xi_2^2 > 0,$$

gdzie

$$H = 4\lambda_1^4\lambda_2^4(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2[(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - K^{1212}(A_{11} + 2\lambda_3^2A_{12} + \lambda_3^4A_{22})].$$

Sprawdzić można natychmiast, że nierówności (3.8) są szczególnym przypadkiem (3.12.2) jeśli przyjąć $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ponieważ nierówności (3.10) [lub równoważne (3.11)] mają skomplikowaną, a przez to trudną do zinterpretowania postać, spróbujemy podać nieco silniejsze warunki (wystarczające), lecz w prostszej formie.

Zbudujemy formę kwadratową

$$(3.13) \quad A_{ij} \xi^i \xi^j,$$

w której, zgodnie z (2.21.2) oznaczono

$$A_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j},$$

zaś $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ — dowolny niezerowy wektor. Z (2.29) wnioskujemy, że występujące we współczynnikach układu (2.30) wielkości K^{iiii} stanowią wartość formy (3.13) dla pewnego wektora ξ , zatem ich znak zależy jedynie od określoności (dodatniej czy ujemnej) tej formy. Określoność formy (3.13) w istotny sposób wpływa również na znak współczynnika H w nierówności (3.12). Przypomnijmy postać współczynników C^{ijkl} :

$$C^{ijkl} = K^{ijkl} + \tau^{ik} g^{jl};$$

tak więc

$$(3.14) \quad \begin{cases} C^{1111} = K^{1111} + \tau^{11}, \\ C^{2222} = K^{2222} + \tau^{22}, \\ C^{1212} = K^{1212} + \tau^{11}, \\ C^{2121} = K^{1212} + \tau^{22}. \end{cases}$$

Jeśli zatem $\tau^{ii} > 0$ (nie sumować!) oraz forma (3.13) jest dodatnio określona, wówczas $C^{iiii} > 0$ (wniosek słuszny także dla $i = 3$); jeśli forma (3.13) jest dodatnio określona oraz³⁾

$$(3.15) \quad -\tau < K^{1212} \leq \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}^2 \lambda_3^4 + 2A_{12} \lambda_3^2 + A_{11}}, \quad \tau = \min_{<i>}(\tau^{ii}),$$

gdzie, jak wiadomo z (2.29),

$$K^{1212} = K^{2121} = -\lambda_1^2 \lambda_2^2 (\Phi_2 + \lambda_3^2 \Phi_3),$$

współczynnik H jest nieujemny dla każdego λ_i . Można więc powiedzieć, że dodatnia określoność formy (3.13) oraz warunek (3.15) wystarczają, przy dodatnich naprężeniach głównych τ^{ii} , by spełniony był warunek $S-E$.

Trzeba zauważyć, że jeśli $\tau^{ii} > 0$, dodatniość formy (3.13) nie jest konieczna. Przypuśćmy bowiem, że $A_{ij} \xi^i \xi^j < 0$.

Wówczas, jeśli

$$(3.16) \quad K^{1212} \geq \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}^2 \lambda_3^4 + 2A_{12} \lambda_3^2 + A_{11}},$$

³⁾ W przypadku dwuwymiarowym można przyjąć $\lambda_3 = 1$.

(nawet jeśli $K^{1212} > 0$), wyrażenie H jest nieujemne. Wiadomo, że $K^{iiii} < 0$; jeśli wielkości te są dostatecznie małe, wówczas

$$C^{iiii} = K^{iiii} + \tau^{ii} g^{ii} > 0, \quad (\text{nie sumować!}),$$

a także

$$C^{ijij} = K^{ijij} + \tau^{ii} g^{jj} > 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,$$

i warunek (3.12.2) jest spełniony.

Oczywiście w przypadku, gdy przynajmniej jedno z naprężeń głównych jest ujemne potrzeba, by forma (3.13) była dodatnio określona. Wynika to bezpośrednio z warunku $C^{ijij} > 0$. A oto warunki wystarczające na to, by przy takich naprężeniach warunek (3.12.2) był spełniony

$$(3.17) \quad \begin{aligned} K^{iiii} &> \tau^{ii}, \quad A_{ij} \xi^i \xi^j > 0, \\ -\bar{\tau} < K^{1212} &\leq \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22} \lambda_3^2 + 2A_{12} \lambda_3^2 + A_{11}}, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\tau} = \min_{<i>}(\tau^{ii})$.

Nie wszystkie z uzyskanych w tym paragrafie nierówności mają w statyce równie jasną interpretację fizyczną jak np. w teorii propagacji fal⁴⁾. Szczególnie nierównościom (3.16) czy (3.17)₃, a tym samym nierówności (3.10)₁, trudno nadać wyraźny sens fizyczny. Lepiej wygląda sprawa z warunkami (3.10)₂. Korzystając z określenia (2.23) współczynników C^{ijkl} można bezpośrednim rachunkiem sprawdzić, że z warunku $C^{iiii} > 0$ wynika, że

$$(3.18) \quad \frac{\partial \tau^{ii}}{\partial \lambda_i} > 0.$$

Oznacza to, że jeśli prostopadłościan z materiału izotropowego wydłużymy w kierunku jednego z kierunków głównych (podczas gdy pozostałe ściany nie ulegną zmianie), naprężenie rozciągające (lub siła rozciągająca) rośnie. Wniosek ten wydaje się być zgodny z intuicją (por. [4], § 51).

Nierówności $C^{ijij} > 0$, $i \neq j$ prowadzą do warunku⁵⁾

$$(3.19) \quad \Phi_1 + \lambda_1^2 \Phi_2 > 0.$$

Warto zauważyć interesujące tożsamości, jakie spełniają współczynniki C^{ijij} , $i \neq j$:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \frac{C^{1212}}{\lambda_1^2} - \frac{C^{2121}}{\lambda_2^2} &= \frac{C^{1313}}{\lambda_1^2} - \frac{C^{3131}}{\lambda_3^2} = \frac{C^{2323}}{\lambda_2^2} - \frac{C^{3232}}{\lambda_3^2} = 0, \\ \left(\frac{C^{1212}}{\lambda_1^2} - \frac{C^{2323}}{\lambda_2^2} \right) \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} &= \left(\frac{C^{2323}}{\lambda_2^2} - \frac{C^{3131}}{\lambda_3^2} \right) \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = \\ &= \left(\frac{C^{3131}}{\lambda_3^2} - \frac{C^{1212}}{\lambda_1^2} \right) \frac{1}{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} = -\Phi_2. \end{aligned}$$

⁴⁾ W teorii propagacji fal warunek $S-E$ jest konieczny i wystarczający, by w danym materiale mogły propagować się fale rzeczywiste. Warunek $C^{iiii} > 0$ zapewnia dodatniość kwadratu prędkości głównych fal podłużnych, zaś $C^{ijij} > 0$, $i \neq j$ dodatniość kwadratu prędkości głównych fal poprzecznych ([4], § 90).

⁵⁾ Truesdell zaproponował ten warunek przy dyskusji nieściśliwego materiału izotropowego, [8]. (Por. także [5, 6]).

Korzystając z określenia (2.27) i powyższych tożsamości otrzymujemy

$$(3.21) \quad \tau^{ii} - \tau^{jj} = C^{ijij} - C^{jijj} = \frac{1}{\lambda_i^2} C^{ijij} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2),$$

$$(3.22) \quad \frac{\tau^{ii}}{\lambda_i^2} - \frac{\tau^{jj}}{\lambda_j^2} = \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{\lambda_i^2 \lambda_j^2} K^{ijij}.$$

Ponieważ $C^{ijij} > 0$, z (3.21) wnioskujemy, że w izotropowym materiale, w którym $S-E$ jest spełnione, większe naprężenia występują w kierunku większych odkształceń. W równości (3.22) o znaku różnicy po lewej stronie decyduje znak K^{ijij} . I tak np. przy ściskaniu [tzn. gdy zachodzi (3.17)] wielkości K^{ijij} są dodatnie i dla $\lambda_i > \lambda_j$ powinno być $\lambda_i^{-2} \tau^{ii} > \lambda_j^{-2} \tau^{jj}$, (por. [4] § 51]).

Zauważmy jeszcze, że korzystając z (3.20) nierówność (3.11)₁ przedstawić można w prostszej postaci

$$(3.23) \quad \lambda_1^{-2} C^{1212} (\sqrt{\lambda_2^2 C^{1111}} + \sqrt{\lambda_1^2 C^{2222}})^2 + H > 0.$$

Nierówność ta wraz z (3.11)₂ tworzy warunek równoważny warunkowi $S-E$ w postaci (3.10).

4. Uwagi o jednoznaczności przemieszczeniowego zagadnienia brzegowego

Na początku tego paragrafu zaznaczono, że warunek $S-E$ wystarcza na to, by rozważane przemieszczeniowe zagadnienie brzegowe miało rozwiązanie i było ono jedyne. Niżej przytoczymy warunki konieczne, aby przemieszczeniowe zagadnienie brzegowe dla układu (2.30) miało rozwiązanie jednoznaczne.

Założmy zatem, że układ (2.30)

$$(4.1) \quad C^{ijkl} \partial_i \partial_k w_l = 0,$$

spełniony jest w pewnym ograniczonym obszarze B , przy warunku

$$(4.2) \quad \mathbf{w} = 0 \quad \text{na brzegu } S.$$

Ponieważ zawsze istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie (zerowe) tego zagadnienia, zbudujemy warunki, przy których jest ono jedyne. Założmy, że rozwiązanie ma postać

$$(4.3) \quad \mathbf{w} = (h_{ij} \partial^i \partial^j - m) \cdot \mathbf{a},$$

gdzie $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ jest dowolnym stałym wektorem, \mathbf{h} — macierz o stałych elementach, m — dowolna liczba dodatnia.

Jeśli macierz \mathbf{h} jest dodatnio określona, wówczas \mathbf{w} znika na powierzchni elipsoidy

$$(4.4) \quad h_{ij} \partial^i \partial^j \leq m.$$

Podstawiając (4.3) do (4.1) otrzymujemy

$$(4.5) \quad C^{ijkl} h_{ik} a_l = 0.$$

Na to, by powyższy układ równań algebraicznych był spełniony jedynie przez $\mathbf{a} = 0$, potrzeba i wystarcza, aby

$$(4.6) \quad \det(C^{ijkl} h_{ik}) \neq 0.$$

Wykazaliśmy więc, że dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązań (4.1) przy warunkach (4.2) potrzeba, by dla dowolnej dodatnio określonej macierzy \mathbf{h} spełniony był warunek (4.6). Korzystając z tego wyniku wykażemy dalej, że jeśli współczynniki równań (4.1) spełniają związki (2.31), warunek $S-E$ (3.8) jest jednocześnie (dla przypadku płaskiego) konieczny dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązań. Uwzględniając bowiem (2.31) w (4.6) mamy

$$(4.7) \quad MN(h_{11} + h_{22})^2 - (M - N)^2(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) \neq 0.$$

Ponieważ (4.7) zachodzi dla dowolnej dodatnio określonej macierzy \mathbf{h} , zatem $MN > 0$, a stąd⁶⁾ $M \geq 0$ i $N \geq 0$, przy czym M i N nie mogą zniknąć jednocześnie.

Przypuśćmy, że $M = 0$ i $N > 0$. Okazuje się, że istnieje wówczas nietrywialne rozwiązanie układu (4.1) przy warunkach (4.2) [nie należące do klasy rozwiązań (4.3)].

Wystarczy skonstruować taką funkcję $\varphi \neq \text{const}$, że $w_i = \varphi_{,i}$, $\varphi_{,i} = 0$ na S , np.

$$(4.8) \quad \varphi = \begin{cases} (r - r_0)^4 & \text{gdy } r \leq r_0, \\ 0 & \text{gdy } r > r_0, \end{cases}$$

gdzie r_0 jest promieniem kuli $K \subset B$, r — odległością punktu $P \in B$ od środka kuli K . Ponieważ pole wektorowe \mathbf{w} jest potencjalne, a równania (4.1) przyjmują przy $M = 0$ postać

$$(4.9) \quad N(w_{i,k} - w_{k,i})_{,k} = 0,$$

z łatwością stwierdzamy, że rozważane zagadnienie brzegowe ma rozwiązanie niezerowe.

Niech teraz $N = 0$ i $M > 0$. Natychmiast sprawdzamy, że np. pole wektorowe

$$(4.10) \quad \mathbf{w} = \begin{cases} (r - r_0)^4 \cdot (\vartheta^2, -\vartheta^1, 0) & \text{dla } r \leq r_0, \\ 0 & \text{dla } r > r_0, \end{cases}$$

jest wówczas nietrywialnym rozwiązaniem tego zagadnienia. W ten sposób [por. (3.8)] dowód został zakończony.

Analogicznie postępując wykazać można, że koniecznym warunkiem jednoznaczności jest $C^{ijj} \geq 0$. Jeśli bowiem przyjąć $h_{12} = h_{13} = h_{23} = 0$, z (4.6) mamy

$$C^{1111}h_{11} + C^{2222}h_{22} + C^{3333}h_{33} \neq 0,$$

przy czym $h_{ii} > 0$ (nie sumować!), a stąd $C^{ijj} \geq 0$.⁶⁾

5. Przykład

Rozważmy nieskończenie długi jednorodny walec kołowy, o promieniu \hat{a} w konfiguracji \hat{C} i a w konfiguracji C . Oznaczając przez λ współczynnik jednorodnej, osiowo-symetrycznej deformacji i wprowadzając biegunowy układ współrzędnych mamy kolejno (por. [7]):

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \hat{a} &= \lambda \hat{a}, \\ g_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \hat{g}_{ij} &= \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Gamma_{22}^1 &= -r, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \tau^{11} &= r^2 \tau^{22} = \lambda^2 \Phi_1 + (\lambda^4 + \lambda^2) \Phi_2 + I_3 \Phi_3, & \tau^{33} &= \lambda^2 \Phi_1 + 2\lambda^2 \Phi_2 + I_3 \Phi_3, \\ \nabla_i \tau^{ij} &\equiv 0, & \tau^{11} &= -p \quad \text{dla } r = a. \end{aligned}$$

⁶⁾ Por. notkę²⁾; forma (3.3) jest ujemnie określona, jeśli $M < 0$ i $N < 0$.

Równania równowagi dla małych dodatkowych deformacji przyjmują postać⁷⁾

$$(5.2) \quad \begin{aligned} M \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r} u \right) + N \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} + (M-N) \frac{1}{r^2} v_{r\vartheta} - M \frac{2}{r^3} v_{\vartheta} &= 0, \\ (M-N) u_{r\vartheta} + N v_{rr} + M \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta} + (M+N) \frac{1}{r} u_{\vartheta} - N \frac{1}{r} v_r &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań tego układu poszukiwać będziemy w postaci

$$(5.3) \quad u = f(r) \cos n\vartheta, \quad v = rg(r) \sin n\vartheta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie f i g są odpowiednio regularnymi funkcjami zmiennej r . Otrzymujemy stąd

$$(5.3.1) \quad \begin{aligned} M \left(f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f \right) - N \frac{n^2}{r^2} f + (M-N) \frac{n}{r} g' - (M+N) \frac{n}{r^2} g &= 0, \\ N \left(g'' + \frac{1}{r} g' - \frac{1}{r^2} g \right) - M \frac{n^2}{r^2} g - (M-N) \frac{n}{r} f' - (M+N) \frac{n}{r^2} f &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem ogólnym tego układu jest

$$(5.4) \quad f_n(r) = \sum_{i=1}^4 C_{ni} r^{x_i}, \quad g(r) = \sum_{i=1}^4 C_{ni} \gamma_i r^{x_i},$$

gdzie $\gamma_i = \frac{n[N(x_i-1)-M(x_i+1)]}{Mn^2-N(x_i^2-1)}$, C_{ni} — stałe całkowania, natomiast x_i są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$(5.5) \quad x^4 - 2(n^2+1)x^2 + (n^2-1)^2 = 0,$$

równymi odpowiednio

$$(5.6) \quad x_1 = n+1, \quad x_2 = n-1, \quad x_3 = -n+1, \quad x_4 = -n-1,$$

gdy $n > 1$. Dla $n = 0$ i $n = 1$ pierwiastki są wielokrotne i rozwiązanie ma postać

$$(5.7) \quad f_0(r) = c_{01}r + c_{02}r^{-1} \quad \text{dla}^8) \quad n = 0,$$

$$f_1(r) = c_{11}r^2 + c_{12} + c_{13} \ln r + c_{14}r^{-2},$$

$$(5.8) \quad g_1(r) = c_{11}\gamma_1 r^2 + c_{12}\gamma_2 + c_{13}\gamma_3 \left(\ln r + \frac{M-N}{M+N} \right) + c_{14}\gamma_4 r^{-2}, \quad \text{dla } n = 1.$$

Ponieważ dla $r = 0$ przemieszczenia są ograniczone i ponieważ wykluczamy z rozważań ruch sztywny, należy przyjąć

$$c_{02} = c_{12} = c_{n3} = c_{n4} = 0$$

⁷⁾ Przyjęto oznaczenia: $\vartheta^1 = r, \vartheta^2 = \vartheta, w_1 = u, w_2 = v, \frac{\partial u}{\partial r} = u_r \dots$

⁸⁾ Ponieważ $v = 0$ dla $n = 0$, można przyjąć $g_0(r) = 0$

i ostatecznie mamy

$$(5.9) \quad f_0(r) = c_{01}r, \quad g_0(r) \equiv 0 \quad \text{dla } n = 0,$$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} f_1(r) &= c_{11}r^2, \\ g_1(r) &= c_{11} \frac{N-3M}{M-3N} r^2 \quad \text{dla } n = 1, \end{aligned}$$

$$(5.11) \quad \begin{aligned} f_r(r) &= c_{n1}r^{n+1} + c_{n2}r^{n-1}, \\ g_r(r) &= c_{n1}\gamma r^{n+1} - c_{n2}r^{n-1} \quad \text{dla } n > 1, \end{aligned}$$

$$(5.12) \quad \gamma = \frac{Nn - M(n+2)}{Mn - N(n+2)}.$$

Poszukiwać będziemy teraz warunków, przy których dane zagadnienie brzegowe ma rozwiązanie niejednoznaczne.

Założmy, że na brzegu S funkcje u i v znikają:

$$(5.13) \quad u = v = 0, \quad \text{dla } r = a,$$

lub, co jest równoważne

$$f_r(r) = g_r(r) = 0, \quad \text{gdy } r = a.$$

Dla $n = 0$ i $n = 1$ jest tylko trywialne rozwiązanie. Dla $n > 1$ mamy, na mocy (5.11)

$$(5.14) \quad \begin{cases} c_{n1}a^{n+1} + c_{n2}a^{n-1} = 0, \\ c_{n1}\gamma a^{n+1} - c_{n2}a^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Warunkiem istnienia nietrywialnych rozwiązań jest tu

$$(5.15) \quad M = -N.$$

Uzyskaliśmy spodziewany wynik. Już bowiem przy ustalaniu warunków koniecznych dla S - E (s. 233) zauważyliśmy, że dla $MN < 0$ zawsze można znaleźć taki obszar B , dla którego przemieszczeniowy problem brzegowy jest niejednoznaczny.

Weźmy dla przykładu $\mathbf{w} = \mathbf{a} (h_{ij}x^i x^j - m)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $h_{11} = 1$, $h_{22} = h_{33} = -\frac{M}{N}$, $h_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Tak skonstruowana funkcja spełnia równania równowagi (2.30)–(2.31) w całej przestrzeni.

Z drugiej strony, macierz \mathbf{h} jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $MN < 0$. Obszarem B jest wówczas elipsoida (elipsa). W naszym przykładzie, kiedy $M = -N$, jest to koło.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformation superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., A. 211 (1952).
2. C. B. MORREY, *Second order elliptic systems of differential equations*. Contrib. Theory Partial Diff. Eqs., Annals Math. Studies, No 33 (1954).
3. М. Т. Вишик, *О сильно-эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Мат. Сборник, 29 (71), № 3 (1951).

4. Encyklopedia of Physics, vol. III/3, Springer-Verlag, 1965.
5. M. BAKER, J. L. ERICKSEN, *Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids*, J. Washington Academy of Sciences, **44** (1954).
6. H. ZORSKI, *On the equations describing small deformations superposed on finite deformation*, Proc. Int. Sympos. Secondorder Effects, Haifa 1962.
7. B. DUSZCZYK, *Stateczność pełnego walca obciążeniowego ciśnieniem zewnętrznym*, Mech. Teoret. i Stosow., **4**, **5** (1967).
8. C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of elasticity and field dynamics*, J. Rational Mech. and Analysis, **1**, 125-300 (1952).
9. GUO ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., **2**, **15** (1963).
10. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

Р е з ю м е

ОГРАНИЧЕНИЯ НАКЛАДЫВАЕМЫЕ УСЛОВИЕМ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ
НА ФУНКЦИЮ УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ

Представлены, выраженные через перемещения, уравнения равновесия для малых добавочных деформаций наложенных на конечную деформацию. Применительно к этим уравнениям исследуется условие $S-E$ и дается вытекающая из него оценка функции упругой энергии. Даются также некоторые необходимые условия однозначности краевой задачи на перемещения для малых добавочных деформаций наложенных на конечную деформацию.

S u m m a r y

LIMITATIONS IMPLIED ON THE ELASTIC ENERGY FUNCTION BY
THE STRONG-ELLIPTICITY CONDITION

Displacement equations of equilibrium governing small deformations superposed on a finite deformation of an elastic solid are discussed. In particular the $S-E$ (Strong Ellipticity) condition is studied and some estimates of the elastic energy are given. Necessary conditions are also derived for uniqueness of the solution to the displacement boundary-value problem.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1969 r.

UWAGI O INFINITEZYMALNEJ TEORII
MATERIAŁÓW SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYCH

WŁODZIMIERZ WOJNO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Materiał sprężysto/lepkoplastyczny jest modelem materiału, który zachowuje się sprężysto do osiągnięcia statycznej granicy plastyczności, po której przekroczeniu pojawiają się w nim efekty reologiczne w postaci sprzężonych ze sobą efektów lepkich i plastycznych. Praktyczna przydatność badań nad zachowaniem się tego modelu wynika zasadniczo stąd, że w ramach teorii opisującej jego własności można ująć własności wrażliwych na prędkość odkształcenia materiałów plastycznych¹⁾.

Ogólne podstawy opisu własności materiałów sprężysto/lepkoplastycznych przyniosła w roku 1932 praca HOHENEMSERERA i PRAGERA [3] (patrz również PRAGER [15, 16]). Idea HOHENEMSERERA i PRAGERA została rozszerzona dzięki pracom PERZYNY [6-8], poświęconym sformułowaniu i analizie równań konstytutywnych dla wrażliwych na prędkość odkształcenia materiałów plastycznych. Równania konstytutywne, opisujące własności sprężysto/lepkoplastycznych gruntów, zostały zaproponowane i szczegółowo przedyskutowane przez OLSZAKA i PERZYNE w pracy [5]. Wyżej cytowane prace dotyczą procesów izotermicznych i odkształceń infinytezymalnych. Uogólnienia proponowanych w pracy [8] równań konstytutywnych, przez uwzględnienie wpływu temperatury, dokonali na drodze czysto fenomenologicznej najpierw OLSZAK i PERZYNA [4], później PERZYNA i WIERZBICKI [11].

Sformułowanie i analizę równań konstytutywnych dla izotropowych materiałów sprężysto/lepkoplastycznych w przypadku odkształceń skończonych i procesów izotermicznych przyniosła praca [12]. Koncepcję tę rozszerzono na przypadek procesów termodynamicznych w pracy [18]. W końcu ogólne sformułowanie termodynamicznej teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych zostało dokonane w pracy [19] (patrz również [20]), oraz w oparciu o koncepcję termodynamiki materiałów z parametrami wewnętrznymi w pracy [14].

Głównym celem niniejszej pracy jest rozszerzenie, na drodze przejścia granicznego²⁾ od przedstawionej w [18, 19, 20] teorii przy odkształceniach skończonych³⁾, proponowanej

¹⁾ Obszerne opracowania zagadnień teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych zawiera praca [9] i monografie [10, 13].

²⁾ Przy założeniu, że odkształcenia i przyrosty temperatury są małe. Pojęcie małości tych wielkości zostało dokładnie sprecyzowane w p. 3.

³⁾ Zarys tej teorii jest przedstawiony w skrócie w p. 2.

w pracach [4—8, 11] infinitezymalnej teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych na przypadek procesów termodynamicznych, a także uzyskanie i przebadanie ograniczeń, jakie wynikają z drugiego prawa termodynamiki.

2. Termodynamiczny opis własności materiałów sprężysto/lepkoplastycznych przy odkształceniach skończonych

Zgodnie z pracami [18, 19, 20], własności materiałów sprężysto/lepkoplastycznych, poddanych procesom termodynamicznym przy odkształceniach skończonych, są w szczególnym przypadku opisane układem równań konstytutywnych

$$(2.1) \quad \psi = {}^e\hat{\psi}({}^e\mathbf{E}, \vartheta) + {}^i\hat{\psi}({}^i\mathbf{E}),$$

$$(2.2) \quad \eta = -\partial_{\vartheta} {}^e\hat{\psi}({}^e\mathbf{E}, \vartheta),$$

$$(2.3) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \rho_R \partial_{{}^e\mathbf{E}} {}^e\hat{\psi}({}^e\mathbf{E}, \vartheta),$$

$$(2.4) \quad \mathbf{q}_R = \hat{\mathbf{q}}_R({}^e\mathbf{E}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta, \text{Grad } \vartheta),$$

$$(2.5) \quad \dot{{}^i\mathbf{E}} = \mu(\vartheta) < \Phi(\mathcal{F}) > \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta), \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}^T,$$

gdzie: ψ jest energią swobodną właściwą (na jednostkę masy), η — entropią właściwą, $\tilde{\mathbf{T}}$ — drugim tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa⁴⁾, \mathbf{q}_R — wektorem strumienia przepływu ciepła na jednostkę powierzchni w konfiguracji początkowej, ρ_R jest gęstością masy w tej konfiguracji, $\vartheta > 0$ jest temperaturą bezwzględną, Grad jest operatorem gradientu względem współrzędnych \mathbf{X} w konfiguracji początkowej, zaś kropka oznacza różniczkowanie materialne. ${}^e\mathbf{E}$ i ${}^i\mathbf{E}$ są tensorami odkształcenia odpowiednio sprężystego i niesprężystego, które spełniają postulat addytywności

$$(2.6) \quad \mathbf{E} = {}^e\mathbf{E} + {}^i\mathbf{E},$$

gdzie \mathbf{E} jest tensorem odkształcenia Lagrange'a.

Równanie (2.5) postuluje, że prędkość odkształcenia niesprężystego w materiale sprężysto/lepkoplastycznym jest proporcjonalna do funkcji $\Phi(\mathcal{F})$, gdzie \mathcal{F} jest funkcją statycznego uplastycznienia, określoną za pośrednictwem statycznego warunku plastyczności $f = k(\kappa)$ przez zależność

$$(2.7) \quad \mathcal{F} = \frac{f(\tilde{\mathbf{T}}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta)}{k(\kappa(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta))} - 1.$$

Występujący w (2.7) tensor ${}^p\mathbf{E}$ jest odkształceniem plastycznym, zdefiniowanym jak w pracy [2]. Współczynnik proporcjonalności w równaniu (2.5) jest iloczynem skalarnej funkcji $\mu(\vartheta) > 0$, charakteryzującej własności lepkiego materiału i symetrycznej funkcji tensorowej \mathbf{N} . Wprowadzona w (2.7) funkcja $k(\kappa)$ jest skalarną funkcją parametru κ wzmożenia izotropowego materiału. Parametr ten spełnia równanie różniczkowe

$$(2.8) \quad \dot{\kappa} = \text{tr} \{ \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta) {}^p\dot{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}, \dot{\vartheta}) \},$$

⁴⁾ Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ wyraża się w zależności od tensora naprężenia Cauchy'ego \mathbf{T} wzorem

$$\tilde{\mathbf{T}} \equiv \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T,$$

gdzie \mathbf{F} oznacza gradient deformacji, zaś $J > 0$ — jego Jakobian.

gdzie \mathbf{M} jest symetryczną funkcją tensorową. Zakłada się, że funkcje \mathbf{N} i \mathbf{M} spełniają zasadę obiektywności materialnej.

Symbol $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$ w równaniu (2.5) jest zdefiniowany następująco

$$(2.9) \quad \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathcal{F} \leq 0, \\ \Phi(\mathcal{F}) > 0 & \text{dla } \mathcal{F} > 0. \end{cases}$$

Z równania (2.5) wynika dynamiczny warunek plastyczności

$$(2.10) \quad f(\tilde{\mathbf{T}}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta) = k(\kappa(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta)) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\text{tr} {}^i\dot{\mathbf{E}}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta)} (\text{tr} \mathbf{N}^2)^{-1/2} \right] \right\},$$

dla materiałów sprężysto/lepkoplastycznych, wykazujących wzmocnienie izotropowe i anizotropowe. Zależność (2.10) opisuje zmianę aktualnej powierzchni płynięcia w procesie termodynamicznym.

Funkcja wewnętrznej dysypacji w materiale sprężysto/lepkoplastycznym jest określona przez związek

$$(2.11) \quad \sigma = \hat{\sigma}({}^e\mathbf{E}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta) = \frac{1}{\varrho\vartheta} \mu(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr}[(\tilde{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathbf{R}} \partial_{i_E} {}^i\hat{\psi}) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta)],$$

zgodnie z którym nierówność dysypacji wewnętrznej przybiera formę

$$(2.12) \quad \text{tr}[(\tilde{\mathbf{T}} - \varrho_{\mathbf{R}} \partial_{i_E} {}^i\hat{\psi}) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta)] \geq 0.$$

Tak więc własności materiału sprężysto/lepkoplastycznego w procesie termodynamicznym określone są przez funkcje ${}^e\hat{\psi}$, ${}^i\psi$, $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}$, \mathbf{N} , $\Phi(\mathcal{F})$ oraz $\mu(\vartheta)$, przy czym nierówność (2.12) stanowi podstawowe ograniczenie, jakie przy określonych ${}^e\hat{\psi}$, ${}^i\hat{\psi}$ musi spełniać funkcja \mathbf{N} .

Gdy materiał wykazuje wzmocnienie tylko izotropowe, pojawiająca się w (2.7) funkcja f nie zależy od ${}^p\mathbf{E}$. W tym przypadku postuluje się, że również i funkcja \mathbf{N} w (2.5) nie zależy od ${}^i\mathbf{E}$.

Jak wykazano, w przypadku gdy $\mu(\vartheta) \rightarrow \infty$ dla każdej wartości ϑ , ${}^i\mathbf{E} \rightarrow {}^p\mathbf{E}$ i układ równań konstytutywnych (2.1)–(2.5) dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego przechodzi w sformułowany przez GREENA i NAGHDIEGO [2] układ równań konstytutywnych teorii plastycznego płynięcia w postaci

$$(2.13) \quad \psi = {}^e\hat{\psi}({}^e\mathbf{E}, \vartheta) + {}^p\hat{\psi}({}^p\mathbf{E}),$$

$$(2.14) \quad \eta = -\partial_{\vartheta} {}^e\hat{\psi}({}^e\mathbf{E}, \vartheta),$$

$$(2.15) \quad \tilde{\mathbf{T}} = \varrho_{\mathbf{R}} \partial_{e_E} {}^e\hat{\psi}({}^e\mathbf{E}, \vartheta),$$

$$(2.16) \quad \mathbf{q}_{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{R}}({}^e\mathbf{E}, {}^i\mathbf{E}, \vartheta, \text{Grad} \vartheta),$$

$$(2.17) \quad {}^p\dot{\mathbf{E}} = \lambda \langle \text{tr}(\partial_{\tilde{\mathbf{T}}} f \dot{\tilde{\mathbf{T}}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta} \rangle \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta),$$

gdzie

$$(2.18) \quad \lambda = \{ \text{tr}[(\partial_{\kappa} k \mathbf{M} - \partial_{p_E} f) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta)] \}^{-1},$$

zaś symbol $\langle \text{tr}(\partial_{\tilde{\mathbf{T}}} f \dot{\tilde{\mathbf{T}}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta} \rangle$ jest określony jak poniżej

$$(2.19) \quad \langle \text{tr}(\partial_{\tilde{\mathbf{T}}} f \dot{\tilde{\mathbf{T}}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta} \rangle = \begin{cases} [\] & \text{gdy } f = \kappa, \dot{\kappa} \neq 0 \text{ i } [\] > 0, \\ 0 & \text{gdy } f = \kappa, \dot{\kappa} = 0 \text{ i } [\] \leq 0, \text{ lub gdy } f < \kappa. \end{cases}$$

Jak wykazano w pracy [2], można bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że $\lambda > 0$.

W procesie plastycznego płynięcia funkcja (2.11) przechodzi w funkcję dysypacji wewnętrznej w materiale sprężysto-plastycznym

$$\sigma = \hat{\sigma}({}^e\mathbf{E}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta) = \frac{1}{\varrho_R \dot{\vartheta}} \lambda \langle \text{tr}(\partial_{\tilde{T}} f \dot{\tilde{T}}) + \partial_{\vartheta} f \dot{\vartheta} \rangle \text{tr}[(\tilde{\mathbf{T}} - \varrho_R \partial_{p\mathbf{E}} {}^p\hat{\psi}) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta)],$$

z której, ze względu na $\lambda > 0$ i warunek (2.19)₁, dla przypadku obciążania mamy nierówność dysypacji wewnętrznej

$$(2.20) \quad \text{tr}[(\tilde{\mathbf{T}} - \varrho_R \partial_{p\mathbf{E}} {}^p\hat{\psi}) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta)] \geq 0.$$

Ponadto przy $\lambda > 0$ ze związku (2.18) wynika nierówność

$$(2.21) \quad \text{tr}[(\partial_{\kappa} k \mathbf{M} - \partial_{p\mathbf{E}} f) \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{T}}, {}^p\mathbf{E}, \vartheta)] > 0,$$

odgrywająca ograniczającą rolę przy formułowaniu równań konstytutywnych teorii plastycznego płynięcia (patrz [2]).

3. Ogólna infinytezymalna teoria materiałów sprężysto/lepkoplastycznych

Na wstępie należy nadmienić, że przejście od teorii lepkoplastyczności przy odkształceniach skończonych do infinytezymalnej może prowadzić w rezultacie do kilku różnych teorii w zależności od tego, jaką wielkość przyjmie się za miarę małości deformacji. Możliwości te zostały szczegółowo przedyskutowane w monografii [17]. W niniejszej pracy przejście do teorii lepkoplastyczności przy nieskończeniu małych deformacjach zostanie dokonane przy założeniu, że małe są gradienty przemieszczenia i że małe są przyrosty temperatury, liczone od temperatury w chwili początkowej.

Aby sprecyzować dokładnie pojęcie małości przyjętych wielkości zauważmy, że w chwili t gradient $\mathbf{H}(t)$ wektora przemieszczenia z konfiguracji odniesienia wyraża się w zależności od gradientu deformacji $\mathbf{F}(t)$ przez związek

$$(3.1) \quad \mathbf{H}(t) \equiv \mathbf{F}(t) - \mathbf{1},$$

gdzie $\mathbf{1}$ oznacza tensor fundamentalny. Wprowadźmy wielkość

$$(3.2) \quad \delta \equiv \sup_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{H}(t)|, \quad |\mathbf{H}(t)| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)},$$

gdzie $|\mathbf{H}(t)|$ jest naturalną normą gradientu wektora przemieszczenia w przestrzeni dziewięciowymiarowej. Wielkość δ będziemy w dalszym ciągu przyjmować za miarę małości deformacji.

Tensor nieskończenie małego odkształcenia $\tilde{\mathbf{E}}(t)$, używany jako miara odkształcenia w klasycznej, infinytezymalnej teorii sprężystości, jest zdefiniowany jako

$$(3.3) \quad \tilde{\mathbf{E}}(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T).$$

Deformację odpowiadającą danemu gradientowi $\mathbf{F}(t)$ będziemy uważali za nieskończenie małą w każdej chwili t , jeżeli

$$(3.4) \quad \delta \ll 1.$$

Rozważmy funkcję⁵⁾ $\varphi(t)$ zdeterminowaną przez $H(t)$. Jeżeli istnieje stała M^0 , niezależna od czasu t , funkcji $H(t)$ i δ taka, że

$$(3.5) \quad |\varphi| \leq M^0 \delta^n \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < \infty,$$

funkcja $\varphi(t)$ jest wielkością rzędu δ^n , co będziemy zapisywali przez $\varphi = O(\delta^n)$. Wynika stąd, że określony przez (3.4) tensor $\tilde{E}(t)$ jest wielkością rzędu $O(\delta)$. Na podstawie powyższego można wykazać, iż

$$(3.6) \quad E = \tilde{E} + O(\delta^2) = O(\delta),$$

a zatem, gdy zachodzi (3.4), wielkość rzędu $O(\delta^2)$ jest pomijalnie mała w porównaniu z \tilde{E} i w przypadku nieskończenie małych deformacji mamy

$$(3.7) \quad E = \tilde{E} \quad \text{gdy} \quad \delta \ll 1.$$

Z (2.6) i (3.7) wynika, że także części sprężysta ${}^e\tilde{E}$ i niesprężysta ${}^i\tilde{E}$ infinitezimalnego odkształcenia są również wielkościami rzędu $O(\delta)$.

Oznaczmy temperaturę w chwili początkowej przez ϑ_0 , natomiast przez $\Delta\vartheta$ przyrost temperatury, równy

$$(3.8) \quad \Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0.$$

Zauważmy, że temperatura ϑ_0 w chwili początkowej jest niezależna od czasu, funkcji $H(t)$ i δ . Można więc zatem uważać przyrost temperatury za mały, jeżeli zachodzi warunek

$$(3.9) \quad |\Delta\vartheta| \leq \vartheta_0 \delta,$$

co oznacza, że przyjmujemy w dalszym ciągu, iż $\Delta\vartheta = O(\delta)$.

Założmy, że materiał z zerowymi naprężeniami początkowymi jest jednorodny i znajduje się w stanie spoczynku przy stałej temperaturze ϑ_0 i entropii η_0 . W przypadku, gdy spełniony jest warunek (3.4) tensory naprężenia Pioli-Kirchhoffa \tilde{T} i Cauchy'ego T są nierozróżnialne, tj.

$$(3.10) \quad \tilde{T}(t) = T(t) \quad \text{gdy} \quad \delta \ll 1$$

i dzięki (3.7), równania konstytutywne (2.2) oraz (2.3) przyjmują postać

$$(3.11) \quad \eta = -\partial_s {}^e\hat{\psi}({}^e\tilde{E}, \vartheta), \quad T = \varrho_R \partial_{e\tilde{E}} {}^e\hat{\psi}({}^e\tilde{E}, \vartheta).$$

Rozwijając prawą stronę równania (3.11)₂ w szereg w otoczeniu $(0, \vartheta_0)$, przy warunku $T = 0$ w punkcie $(0, \vartheta_0)$, a następnie ograniczając się do wyrazów rzędu $O(\delta)$ mamy

$$(3.12) \quad \begin{cases} T = \varrho_R ({}^eA[{}^e\tilde{E}] + {}^eA\Delta\vartheta), \\ T^K{}_L = \varrho_R ({}^eA^K{}_L{}^M{}_N {}^e\tilde{E}^N{}_M + {}^eA^K{}_L\Delta\vartheta), \end{cases}$$

gdzie eA jest stałym tensorem czwartego rzędu o symetrii

$$(3.13) \quad {}^eA^K{}_L{}^M{}_N = {}^eA_L{}^{KM}{}_N = {}^eA_L{}^K{}_N{}^M = {}^eA^K{}_{LN}{}^M = {}^eA^M{}_N{}^K{}_L,$$

⁵⁾ $\varphi(t)$ jest tu oznaczeniem ogólnym zarówno funkcji skalarnej, jak i tensorowej.

natomiast ${}^e\mathbf{A}$ jest stałym tensorem symetrycznym rzędu drugiego. Równanie (3.12) można napisać w postaci odwróconej⁶⁾

$$(3.14) \quad \begin{cases} {}^e\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varrho_R} {}^e\mathbf{A}^{-1} [\mathbf{T}] + {}^e\mathbf{A}^* \Delta\vartheta, \\ {}^e\tilde{\mathbf{E}}^K{}_L = \frac{1}{\varrho_R} {}^e\mathbf{A}^K{}_L M_N T^N{}_M + {}^e\mathbf{A}^*{}_L \Delta\vartheta. \end{cases}$$

Ze względu na stałość ${}^e\mathbf{A}$ oraz ${}^e\mathbf{A}^*$, a także na fakt, że zarówno ${}^e\tilde{\mathbf{E}}$ jak i $\Delta\vartheta$ są wielkościami rzędu odpowiednio $\mathbf{0}(\delta)$ i $0(\delta)$, z (3.12) wynika, iż \mathbf{T} jest także wielkością rzędu $\mathbf{0}(\delta)$.

Jeżeli ograniczymy się do przypadku, w którym energia swobodna ψ jest wielkością rzędu $0(\delta^2)$, wówczas jak widać z (3.11) i (3.12), funkcja $\hat{\psi}$ winna mieć postać

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \psi &= {}^e\hat{\psi}({}^e\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) + {}^i\hat{\psi}({}^i\tilde{\mathbf{E}}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}({}^e\tilde{\mathbf{E}} {}^e\mathbf{A} [{}^e\tilde{\mathbf{E}}]) + \Delta\vartheta \text{tr}({}^e\mathbf{A} {}^e\tilde{\mathbf{E}}) + \frac{1}{2} \mathbf{A} (\Delta\vartheta)^2 + \frac{1}{2} \text{tr}({}^i\tilde{\mathbf{E}} {}^i\mathbf{A} [{}^i\tilde{\mathbf{E}}]), \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{A} jest stałym skalarem, zaś ${}^i\mathbf{A}$ jest stałym tensorem czwartego rzędu, jaki spełnia warunki symetrii (3.13). W tym przypadku równanie (3.11)₁ przyjmuje formę

$$(3.16) \quad \eta = -\text{tr}({}^e\mathbf{A} {}^e\tilde{\mathbf{E}}) - \mathbf{A} \Delta\vartheta.$$

Z (3.15) i (3.16) wynika, że dla ${}^e\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, ${}^i\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ i $\vartheta = \vartheta_0$ mamy $\psi = 0$ i $\eta_0 = \eta(\mathbf{0}, \vartheta_0) = 0$. Zatem w tym przypadku η oznacza jednocześnie przyrost entropii. Ponadto ciepło właściwe przy stałym odkształceniu sprężystym, równe

$$(3.17) \quad c \equiv \vartheta \partial_\vartheta \eta = -\mathbf{A} \vartheta = -\mathbf{A} \Delta\vartheta + c_0,$$

gdzie c_0 oznacza ciepło właściwe przy $\vartheta = \vartheta_0$; jest liniową funkcją przyrostu $\Delta\vartheta$. Otrzymane w ten sposób równania (3.12) i (3.16) są równaniami konstytutywnymi liniowej teorii termosprężystości.

Przechodząc do opisu niesprężystego zachowania się materiału sprężysto/lepkoplastycznego przy nieskończonej małych deformacjach widzimy, że dzięki zależnościom (3.7) oraz (3.10) równanie konstytutywne (2.5) przyjmuje postać

$$(3.18) \quad {}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{T}, {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) = \mu(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \mathbf{N}(\mathbf{T}, {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta), \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}^T.$$

⁶⁾ Stały tensor czwartego rzędu ${}^e\mathbf{A}$ posiada te same warunki symetrii co tensor ${}^e\mathbf{A}$. ${}^e\mathbf{A}^{-1}$ jest tensorem odwrotnym do tensora ${}^e\mathbf{A}$. Rozpatrywany jako macierz 6×6 spełnia warunki

$${}^e\mathbf{A}^K{}_L M_N {}^e\mathbf{A}^N{}_M R_S = {}^e\mathbf{A}^K{}_L M_N {}^e\mathbf{A}^N{}_M R_S = \frac{1}{2} (\delta^K{}_S \delta^R{}_L + G^{KR} G_{SL}),$$

gdzie G_{KR} jest tensorem metrycznym w konfiguracji odniesienia. Natomiast

$${}^e\mathbf{A}^*{}_L = {}^e\mathbf{A}^K{}_L M_N {}^e\mathbf{A}^N{}_M$$

jest stałym tensorem symetrycznym drugiego rzędu.

Przyjmijmy, że występująca w (3.18) funkcja \mathbf{N} ma postać quasi-liniową względem zmiennych T , ${}^i\tilde{\mathbf{E}}$ i ϑ . Niech więc funkcja ta posiada formę

$$(3.19) \quad \mathbf{N} = \mathbf{H}\mathbf{1} + \mathbf{G}(\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \text{tr}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}^2)[T] + \\ + \mathbf{H}(\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \text{tr}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}^2)[{}^i\tilde{\mathbf{E}}] + G(\vartheta_0)\Delta\vartheta,$$

gdzie: \mathbf{H} jest skalarem, funkcje tensorowe czwartego rzędu \mathbf{G} i \mathbf{H} spełniają warunki symetrii (3.13), zaś \mathbf{G} jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu. ${}_D T$ i ${}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}$ oznaczają dwiatory odpowiednio tensora naprężenia i tensora odkształcenia niesprężystego. Załóżmy ponadto, że drugi i trzeci wyraz w (3.19) jest jednorodny względem T i ${}^i\tilde{\mathbf{E}}$. W szczególności gdy \mathbf{G} i \mathbf{H} są tensorami stałymi, funkcja \mathbf{N} staje się liniową. Uwzględniając zależności (3.10), (3.15) oraz (3.19) otrzymujemy z (2.12) nierówność

$$\text{tr}\{(T - \varrho_R {}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{\mathbf{E}}])\mathbf{H}\mathbf{1}\} + \text{tr}\{(T - \varrho_R {}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{\mathbf{E}}])\mathbf{G}[T]\} + \text{tr}\{(T - \varrho_R {}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{\mathbf{E}}])\mathbf{H}[{}^i\tilde{\mathbf{E}}]\} + \\ + \text{tr}\{G(\vartheta_0)(T - \varrho_R {}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{\mathbf{E}}])\}\Delta\vartheta \geq 0,$$

która musi być spełniona dla każdego T , ${}^i\tilde{\mathbf{E}}$ i $\Delta\vartheta$. Musi być więc spełniona także i w chwili, gdy zaczyna się rozwijać pierwszy proces deformacji niesprężystej, to jest gdy ${}^i\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ przy ${}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}} \neq \mathbf{0}$. Ale przy tych warunkach przyjmuje ona postać nierówności

$$\mathbf{H}\text{tr} T + \text{tr}\{\mathbf{T}\mathbf{G}(\text{tr}_D T^2)[T]\} + \text{tr}\{G(\vartheta_0)T\}\Delta\vartheta \geq 0,$$

jaka, ze względu na dowolność $\Delta\vartheta$, może być spełniona wtedy, gdy znika $\text{tr}\{G(\vartheta_0)T\}\Delta\vartheta$, tzn. gdy $G(\vartheta_0) = \mathbf{0}$. Oznacza to, że określona przez (3.19) funkcja \mathbf{N} musi mieć postać

$$(3.20) \quad {}^0\mathbf{N}(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{H}\mathbf{1} + \mathbf{G}(\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \text{tr}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}^2)[T] + \mathbf{H}(\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \text{tr}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}^2)[{}^i\tilde{\mathbf{E}}]$$

i jednocześnie spełniać podstawową nierówność

$$(3.21) \quad \text{tr}\{(T - \varrho_R {}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{\mathbf{E}}]){}^0\mathbf{N}(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}})\} \geq 0.$$

W przypadku nieskończenie małych deformacji statyczny warunek plastyczności zależy od zmiennych T , ${}^p\tilde{\mathbf{E}}$ oraz $\Delta\vartheta$, z których każda jest wielkością rzędu $0(\delta)$. Jeżeli założymy, iż statyczna powierzchnia plastyczności jest w przestrzeni naprężenie—temperatura gładka i zamknięta, wówczas zachowując człony rzędu $0(\delta^2)$, możemy funkcję f przedstawić w postaci formy kwadratowej

$$(3.22) \quad f = \text{tr}(\mathbf{B}T) + \text{tr}(\mathbf{C}{}^p\tilde{\mathbf{E}}) - D\Delta\vartheta + \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{J}[T]) + \frac{1}{2}\text{tr}({}^p\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{K}[{}^p\tilde{\mathbf{E}}]) + \\ + \frac{1}{2}N(\Delta\vartheta)^2 + \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{M}[{}^p\tilde{\mathbf{E}}]) + \text{tr}(\mathbf{J}T)\Delta\vartheta + \text{tr}(\mathbf{K}{}^p\tilde{\mathbf{E}})\Delta\vartheta,$$

gdzie: tensory symetryczne drugiego rzędu \mathbf{B} i \mathbf{C} są wielkościami rzędu $0(\delta)$, D jest wielkością skalarną rzędu $0(\delta)$, \mathbf{J} oraz \mathbf{K} są tensorami czwartego rzędu o warunkach symetrii (3.13), \mathbf{J} i \mathbf{K} są symetrycznymi tensorami drugiego rzędu, zaś N jest skalarem.

Przyjmijmy w dalszych rozważaniach, że

$$(3.23) \quad k(\varkappa) = \varkappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta).$$

Ponieważ w tym przypadku $f = \varkappa$, parametr \varkappa winien być wielkością rzędu $0(\delta^2)$. Zatem i pochodna $\dot{\varkappa}$, która jak widać z (2.8) jest teraz równa

$$(3.24) \quad \dot{\varkappa} = \text{tr} \{ \mathbf{M}(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) {}^p\dot{\tilde{\mathbf{E}}}(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta, \dot{T}, \dot{\vartheta}) \},$$

powinna być wielkością rzędu $0(\delta^2)$ ⁷⁾.

Założmy, że występującą w (3.24) funkcję \mathbf{M} możemy przyjąć jako liniową względem T , ${}^p\tilde{\mathbf{E}}$ i ϑ , tj., że

$$(3.25) \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}[T] + \mathbf{S}[{}^p\tilde{\mathbf{E}}] + \mathbf{P}\Delta\vartheta,$$

gdzie \mathbf{P} i \mathbf{S} są stałymi tensorami czwartego rzędu o symetrii (3.13), zaś \mathbf{P} jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu. Z (3.24) widać, że przyjmując \mathbf{M} w postaci (3.25), tj. jako wielkość rzędu $0(\delta)$, postulujemy jednocześnie, iż rząd wielkości prędkości odkształcenia plastycznego jest równy $0(\delta)$.

Przy przejściu granicznym do teorii plastycznego płynięcia dla przypadku nieskończenie małych deformacji, określona przez (3.20) funkcja ${}^o\mathbf{N}(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}})$ przechodzi w funkcję ${}^o\mathbf{N}(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}})$, zaś zależność (2.21) — w nierówność

$$\text{tr}[(\mathbf{M} - \partial_{{}^p\tilde{\mathbf{E}}}f) {}^o\mathbf{N}(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}})] > 0.$$

Jak wykazano w pracy [2], nierówność powyższa implikuje warunek

$$(3.26) \quad \mathbf{P} = \mathbf{K}$$

oraz ograniczenie

$$(3.27) \quad \text{tr}\{[(\mathbf{P} - \mathbf{M}^T)[T] + (\mathbf{S} - \mathbf{K})[{}^p\tilde{\mathbf{E}}] - \mathbf{C}] {}^o\mathbf{N}(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}})\} > 0,$$

które muszą spełniać występujące w (3.20) i (3.25) wielkości \mathbf{P} , \mathbf{M} , \mathbf{S} , \mathbf{H} , \mathbf{K} , \mathbf{G} , \mathbf{C} i \mathbf{H} .

Założmy w końcu, iż występującą w równaniu konstytutywnym (3.18) funkcję $\mu(\vartheta)$ możemy przyjąć w postaci liniowej

$$(3.28) \quad \mu(\vartheta) = \mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta > 0.$$

Ze względu na (3.23) funkcja statycznego uplastycznienia (2.7) przyjmuje formę

$$(3.29) \quad \mathcal{F}(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) = \frac{f(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)}{\varkappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)} - 1,$$

gdzie $f(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)$ jest określona przez (3.22) i dzięki zależnościom (3.20) oraz (3.28), równanie (3.18) uzyskuje postać

$$(3.30) \quad {}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi(\mathcal{F}) > {}^o\mathbf{N}(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}}).$$

⁷⁾ Jeżeli $\dot{\varkappa}$ jest wielkością rzędu $0(\delta^2)$, to zachodzi $|\dot{\varkappa}| \ll P^o\delta^2$. Oznaczając przez $b < \infty$ końcową chwilę procesu, mamy

$$|\varkappa| = \left| \int_0^b \dot{\varkappa} dt \right| \leq \int_0^b |\dot{\varkappa}| dt \leq P^o\delta^2 \int_0^b dt = \bar{P}\delta^2,$$

gdzie $\bar{P} = P^ob$. I odwrotnie, aby \varkappa było wielkością rzędu $0(\delta^2)$ powinno być $\dot{\varkappa}$ wielkością rzędu $0(\delta^2)$.

Z (3.30) otrzymujemy dynamiczny warunek plastyczności

$$(3.31) \quad f(T, {}^i\tilde{E}, \vartheta) = \kappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\text{tr} {}^i\tilde{E}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta} (\text{tr} {}^o\mathbf{N}^2)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Tak więc uzyskany na drodze powyższego przejścia układ równań konstytutywnych, opisujący materiał sprężysto/lepkoplastyczny przy odkształceniach nieskończenie małych, składa się z równań (3.12), (3.15), (3.16) i (3.30), przy czym muszą być spełnione nierówności (3.21) i (3.27). Związki te są słuszne dla przypadku, gdy materiał wykazuje wzmocnienie zarówno izotropowe jak i anizotropowe.

4. Przypadek izotropowego wzmocnienia materiału

Gdy materiał sprężysto/lepkoplastyczny wykazuje wzmocnienie tylko izotropowe, określona przez (3.22) funkcja f nie zależy od odkształcenia plastycznego. Przyjmując zatem w (3.22)

$$(4.1) \quad C = K = \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{K} = \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

otrzymujemy

$$(4.2) \quad f = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{T}) - D\Delta\vartheta + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{J}[\mathbf{T}]) - \frac{1}{2} N(\Delta\vartheta)^2 + \text{tr}(\mathbf{J}\mathbf{T})\Delta\vartheta.$$

Jednocześnie na podstawie (4.1) i (3.26) widzimy, że w tym przypadku równanie (3.25) przyjmuje postać

$$(4.3) \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{P}[\mathbf{T}] + \mathbf{S}[{}^p\tilde{E}].$$

Ponadto, jak postulowano w p. 2, i funkcja \mathbf{N} w równaniu (2.5) nie zależy teraz od ${}^i\tilde{E}$. Przyjmujemy zatem w zależności (3.20)

$$(4.4) \quad \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

Przy dodatkowym założeniu, że \mathbf{G} zależy tylko od $\text{tr}_D \mathbf{T}^2$, otrzymujemy w rezultacie

$$(4.5) \quad {}^o\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{H}\mathbf{1} + \mathbf{G}(\text{tr}_D \mathbf{T}^2) [\mathbf{T}]$$

i równanie konstytutywne (3.30) przyjmuje postać

$$(4.6) \quad {}^i\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi(\mathcal{F}) > {}^o\bar{\mathbf{N}}(\mathbf{T}).$$

Wprowadzając do (3.21) w miejsce ${}^o\mathbf{N}$ określoną przez (4.5) funkcję ${}^o\bar{\mathbf{N}}$ otrzymujemy nierówność

$$(4.7) \quad \mathbf{H} \text{tr} \mathbf{T} + \text{tr} \{ \mathbf{T}\mathbf{G}(\text{tr}_D \mathbf{T}^2) [\mathbf{T}] \} - \varrho_R \text{tr} \{ {}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{E}] (\mathbf{H}\mathbf{1} + \mathbf{G}(\text{tr}_D \mathbf{T}^2) [\mathbf{T}]) \} \geq 0,$$

która musi być spełniona dla każdego \mathbf{T} i ${}^i\tilde{E}$. Musi być zatem spełniona dla $-\mathbf{T}$ oraz ${}^i\tilde{E}$. Jeżeli więc zmienimy w (4.7) znak przy \mathbf{T} i otrzymaną nierówność dodamy do (4.7), to uzyskamy w rezultacie nierówność

$$\text{tr} \{ \mathbf{T}\mathbf{G}(\text{tr}_D \mathbf{T}^2) [\mathbf{T}] \} - \mathbf{H}\varrho_R \text{tr} ({}^i\mathbf{A}[{}^i\tilde{E}]\mathbf{1}) > 0,$$

jaka może być spełniona tylko wtedy, gdy drugi wyraz po jej lewej stronie znika, tzn. gdy

$$(4.8) \quad {}^i\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

co oznacza, że w tym przypadku energia swobodna (3.15) nie może zależeć od odkształcenia niesprężystego. Biorąc pod uwagę (4.8), otrzymujemy z (4.7) nierówność ograniczającą

$$(4.9) \quad H \operatorname{tr} \mathbf{T} + \operatorname{tr} \{ \mathbf{T} \mathbf{G}(\operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2) [\mathbf{T}] \} \geq 0,$$

jaką muszą spełniać występujące w zależności (4.5) współczynniki \mathbf{H} i \mathbf{G} . Zastępując jednocześnie funkcję ${}^\circ\mathbf{N}$ w (3.27) funkcją ${}^\circ\bar{\mathbf{N}}$ i uwzględniając (4.1) otrzymujemy nierówność

$$(4.10) \quad \operatorname{tr} \{ (\mathbf{P}[\mathbf{T}] + \mathbf{S}[\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}]) (\mathbf{H}\mathbf{I} + \mathbf{G}(\operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2) [\mathbf{T}]) \} > 0,$$

jaka ogranicza współczynniki \mathbf{P} i \mathbf{S} .

5. Warunek plastyczności z niestacjonarną powierzchnią płynięcia

Rozpatrzmy szczególny przypadek powyższej teorii. Mianowicie przyjmijmy w (3.22) warunki

$$(5.1) \quad \mathbf{J} = \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

oraz

$$(5.2) \quad \mathbf{N} > 0, \quad \mathbf{D}^2 < 4\kappa\mathbf{N}.$$

Z (3.22) i (3.23) wynika, że w tym przypadku można statycznemu warunkowi plastyczności nadać formę

$$(5.3) \quad f(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}}) = {}_n\kappa,$$

gdzie

$$(5.4) \quad f(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{T}) + \operatorname{tr}(\mathbf{C}^p\tilde{\mathbf{E}}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{T}\mathbf{J}[\mathbf{T}]) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^p\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{K}[\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}]) + \operatorname{tr}(\mathbf{T}\mathbf{M}[\mathbf{P}\tilde{\mathbf{E}}])$$

nie zależy od temperatury ϑ , natomiast

$$(5.5) \quad {}_n\kappa = \kappa(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) + \mathbf{D}\Delta\vartheta + \mathbf{N}(\Delta\vartheta)^2 > 0.$$

Zależność (5.3) jest szczególnym przypadkiem statycznego warunku plastyczności z niestacjonarną powierzchnią płynięcia (patrz [4]), uwzględniającym wzmocnienie tak izotropowe, jak i anizotropowe. Jednocześnie ze względu na (3.26) i (5.1), określona przez (3.25) funkcja \mathbf{M} przyjmuje postać (4.3), zaś funkcja statycznego uplastycznienia (3.29) — formę

$$(5.6) \quad \mathcal{F}(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) = \frac{f(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}})}{{}_n\kappa(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)} - 1.$$

Równanie konstytutywne (3.30) pozostaje bez zmiany, natomiast dynamiczny warunek plastyczności (3.31) uzyskuje postać

$$(5.7) \quad f(\mathbf{T}, {}^i\tilde{\mathbf{E}}) = {}_n\kappa(\mathbf{T}, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) \left[1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\operatorname{tr} {}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta} (\operatorname{tr} {}^\circ\mathbf{N}^2)^{-1/2} \right] \right],$$

przy czym muszą być spełnione nierówności ograniczające (3.21) i (3.27).

Dla uzyskania przypadku, gdy statyczny warunek plastyczności (5.3) opisuje wzmocnienie anizotropowe typu kinematycznego, wprowadzamy dalsze założenia, że dla $\alpha \geq 0$

$$(5.8) \quad C = -\alpha B, \quad K = \alpha^2 J, \quad M = -\alpha J$$

oraz

$$(5.9) \quad H = -G, \quad S = 0.$$

Dzięki założeniom (5.8), określona przez (5.4) funkcja f przyjmuje postać

$$(5.10) \quad f(T - \alpha^p \tilde{E}) = \text{tr}[B(T - \alpha^p \tilde{E})] + \frac{1}{2} \text{tr}\{(T - \alpha^p \tilde{E})J[T - \alpha^p \tilde{E}]\},$$

natomiast, ze względu na (5.9)₁, funkcja ${}^{\circ}N$ [patrz (2.20)] — formę

$$(5.11) \quad {}^{\circ}N(T - \alpha^i \tilde{E}) = H1 + G(\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T_D^i \tilde{E}, \text{tr}_D^i \tilde{E}^2) [T - \alpha^i \tilde{E}].$$

Ponadto zależności (3.26), (5.1) i (5.9) ograniczają daną przez (3.25) funkcję M do postaci

$$(5.12) \quad \bar{M} = P[T].$$

Jednocześnie związki (3.21) oraz (3.27) stają się teraz nierównościami

$$(5.13) \quad \text{tr}\{(T - \varrho_R^i A^i \tilde{E}) {}^{\circ}N(T - \alpha^i \tilde{E})\} \geq 0,$$

$$(5.14) \quad \text{tr}\{(P[T] + \alpha J[T - \alpha^p \tilde{E}] + \alpha B) {}^{\circ}N(T - \alpha^p \tilde{E})\} > 0.$$

6. Materiał izotropowy

Przedstawiona w poprzednich paragrafach teoria przy deformacjach nieskończenie małych słuszna jest dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego o dowolnej anizotropii początkowej. Rozważmy w dalszym ciągu materiał, charakteryzujący się izotropią początkową. W tym przypadku mamy⁸⁾

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{KL} = \alpha_1 \delta_{KL} \\ J_{KLMN} = \alpha_2 \delta_{KL} \delta_{MN} + \alpha_3 (\delta_{KM} \delta_{LN} + \delta_{KN} \delta_{LM}), \\ P_{KLMN} = \xi_1 \delta_{KL} \delta_{MN} + \xi_2 (\delta_{KM} \delta_{LN} + \delta_{KN} \delta_{LM}), \\ {}^i A_{KLMN} = \eta_1 \delta_{KL} \delta_{MN} + \eta_2 (\delta_{KM} \delta_{LN} + \delta_{KN} \delta_{LM}), \\ G_{KLMN} = \xi_1 (\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T_D^i \tilde{E}, \text{tr}_D^i \tilde{E}^2) \delta_{KL} \delta_{MN} + \\ \quad + \xi_2 (\text{tr}_D T^2, \text{tr}_D T_D^i \tilde{E}, \text{tr}_D^i \tilde{E}^2) (\delta_{KM} \delta_{LN} + \delta_{KN} \delta_{LM}). \end{array} \right.$$

Wykorzystując zależność (6.1)_{1,2} można, jak wynika z (5.5) i (5.10), nadać statycznemu warunkowi plastyczności postać

$$(6.2) \quad \alpha_3 \text{tr}_D (T - \alpha^p \tilde{E})^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{3} \alpha_3 \right) [\text{tr}(T - \alpha^p \tilde{E})]^2 + \alpha_1 \text{tr}(T - \alpha^p \tilde{E}) = {}_{\mathcal{N}}(T, {}^p \tilde{E}, \vartheta),$$

⁸⁾ Reprezentacje tensorów izotropowych (6.1) odpowiadają prostokątnemu układowi współrzędnych kartezyjskich.

zaś dzięki (6.1)₄ funkcji ${}^{\circ}\mathbf{N}$ [patrz (5.11)] — formę

$$(6.3) \quad {}^{\circ}\mathbf{N}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}}) = \mathbf{H}\mathbf{1} + \left(\xi_1 + \frac{2}{3} \xi_2 \right) \mathbf{1} \operatorname{tr}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}}) + 2\xi_2({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}).$$

Ponadto, ze względu na (6.1)₃, określona przez (5.12) funkcja $\bar{\mathbf{M}}$ staje się równa

$$(6.4) \quad \bar{\mathbf{M}} = \left(\xi_1 + \frac{2}{3} \xi_2 \right) \mathbf{1} \operatorname{tr} T + 2\xi_2 {}_D T,$$

a (6.1)₄ sprawia, że część niesprężysta energii swobodnej (3.15) jest

$$(6.5) \quad {}^i\psi = \frac{1}{2} \eta_1 (\operatorname{tr} {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2 + \eta_2 \operatorname{tr} {}^i\tilde{\mathbf{E}}^2.$$

Jednocześnie zależności (6.1)₄ oraz (6.3) nadają nierówności ograniczającej (5.13) postać

$$(6.6) \quad \operatorname{tr} \left\{ [T - \varrho_R (\eta_1 \mathbf{1} \operatorname{tr} {}^i\tilde{\mathbf{E}} + 2\eta_2 {}^i\tilde{\mathbf{E}})] \left[\mathbf{H}\mathbf{1} + \left(\xi_1 + \frac{2}{3} \xi_2 \right) \operatorname{tr}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}}) + 2\xi_2({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}) \right] \right\} \geq 0,$$

natomiast związki (6.1)_{1,2,3,5} przekształcają (5.14) w nierówność

$$(6.7) \quad \left\{ \left(\left(\xi_1 + \frac{2}{3} \xi_2 \right) \mathbf{1} \operatorname{tr} T + 2\xi_2 {}_D T + \alpha \left[\alpha_1 \mathbf{1} + \left(\alpha_2 + \frac{2}{3} \alpha_3 \right) \mathbf{1} \operatorname{tr}(T - \alpha {}^p\tilde{\mathbf{E}}) + 2\alpha_3({}_D T - \alpha {}_D {}^p\tilde{\mathbf{E}}) \right] \right) \left[\mathbf{H}\mathbf{1} + \left(\alpha_2 + \frac{2}{3} \alpha_3 \right) \mathbf{1} \operatorname{tr}(T - \alpha {}^p\tilde{\mathbf{E}}) + 2\alpha_3({}_D T - \alpha {}_D {}^p\tilde{\mathbf{E}}) \right] \right\} > 0.$$

Rozpatrzmy dwa szczególne przypadki.

P r z y p a d e k A. Gdy

$$(6.8) \quad \alpha_1 = 2a \sqrt{{}_n\kappa}, \quad \alpha_2 = - \left(2a^2 + \frac{1}{3} \right), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}.$$

Dla wyspecyfikowanych przez (6.8) mnożników α_1 , α_2 i α_3 warunek (6.2) staje się statycznym uogólnionym warunkiem plastyczności Misesa⁹⁾ (patrz [1])

$$(6.9) \quad f = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}_D T - \alpha {}_D {}^p\tilde{\mathbf{E}})^2 + a \operatorname{tr}(T - \alpha {}^p\tilde{\mathbf{E}})} = \sqrt{{}_n\kappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)}$$

i w tym przypadku możemy napisać statyczną funkcję uplastycznienia (5.6) jako

$$(6.10) \quad \mathcal{F}(T, {}^i\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}) + a \operatorname{tr}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}})}}{\sqrt{{}_n\kappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)}} - 1.$$

Niech ponadto funkcja ${}^{\circ}\mathbf{N}$ [patrz (5.11)] jest równa

$$(6.11) \quad {}^{\circ}\mathbf{N} = f_T(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}}),$$

⁹⁾ Warunek ten nazywany jest również warunkiem plastyczności Schleichera-Misesa.

gdzie f jest lewą stroną warunku (6.9) przy podstawionym ${}^i\tilde{\mathbf{E}}$ w miejsce ${}^p\tilde{\mathbf{E}}$, natomiast f_T oznacza gradient f względem T . Dokonując różniczkowania widzimy, że w tym przypadku

$$(6.12) \quad {}^\circ\mathbf{N}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}}) = a\mathbf{1} + \frac{{}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}}{2\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2}}.$$

Z (6.3) wynika, że przyjęcie funkcji ${}^\circ\mathbf{N}$ w postaci (6.12) jest równoważne wyspecyfikowaniu mnożników ξ przez związki

$$(6.13) \quad H = a, \quad \xi_1 = -\frac{2}{3}\xi_2, \quad \xi_2 = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2}}.$$

Tak więc w tym przypadku równanie konstytutywne (3.38) przyjmuje postać

$$(2.14) \quad {}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2} + a \operatorname{tr}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}})}{\sqrt{{}_n\kappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)}} - 1 \right) > \\ > \left(a\mathbf{1} + \frac{{}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}}}{2\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2}} \right),$$

zaś dynamiczny warunek plastyczności (3.31) — formę

$$(6.15) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}_D {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2} + a \operatorname{tr}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}}) = \\ = \sqrt{{}_n\kappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)} \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\operatorname{tr} {}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}})^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta} \left(3a^2 + \frac{1}{2} \right)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Równanie konstytutywne (6.14) wraz z dynamicznym warunkiem plastyczności (6.15) stanowią uogólnienie proponowanego w pracy [5] równania konstytutywnego dla sprężysto/lepkoplastycznego gruntu na przypadek wzmocnienia zarówno izotropowego jak i kinematycznego przy niestacjonarnej powierzchni uplastycznienia, gdzie niestacjonarność jest wywołana działaniem zmiennej w czasie temperatury.

Z (6.14) widać, że pierwszy niezmiennik tensora prędkości odkształcenia niesprężystego jest różny od zera i równy

$$\operatorname{tr} {}^i\dot{\tilde{\mathbf{E}}} = 3a[\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}})^2} + a \operatorname{tr}(T - \alpha {}^i\tilde{\mathbf{E}})}{\sqrt{{}_n\kappa(T, {}^p\tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)^2}} - 1 \right) >,$$

z czego wynika, iż odkształceniom niesprężystym towarzyszy zmiana objętości (przy $a \neq 0$), nazywana niesprężystą dylatacją gruntu. Zatem a jest stałą, która odpowiada za prędkość niesprężystej dylatacji gruntu.

Uwzględniając (6.13) w zależności (6.6) otrzymujemy nierówność

$$(6.16) \quad a \operatorname{tr} [T - \rho_R (3\eta_1 + 2\eta_2) {}^i\tilde{E}] + \frac{\operatorname{tr}_D T^2 - (2\rho_R \eta_2 + \alpha) \operatorname{tr} ({}_D T {}_D^i \tilde{E}) + 2\rho_R \eta_2 \alpha \operatorname{tr} {}_D^i \tilde{E}^2}{2 \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}_D T - \alpha {}_D^i \tilde{E})^2}} \geq 0,$$

która musi być słuszna dla każdej pary $(T, {}^i\tilde{E})$, jaka spełnia dynamiczny warunek plastyczności (6.15). Nie poszukując pełnego zbioru mnożników η_1 i η_2 , ograniczonych nierównością (6.16), można wykazać, że dla szczególnego ich wyboru, mianowicie

$$(6.17) \quad \eta_1 = 0 \quad \text{i} \quad \eta_2 = \frac{\alpha}{2\rho_R},$$

nierówność (6.16) jest spełniona zawsze. Podstawiając bowiem (6.17) do lewej strony nierówności (6.16) otrzymujemy lewą stronę dynamicznego warunku plastyczności (6.15), a ta, jak wynika z jego strony prawej, jest w czasie procesu deformacji niesprężystej zawsze dodatnia. Należy jednocześnie zauważyć, że wyspecyfikowanie η_1 i η_2 jak w (6.17) jest równoważne przyjęciu części niesprężystej energii swobodnej (6.5) w postaci

$$(6.18) \quad {}^i\psi = \frac{\alpha}{2\rho_R} \operatorname{tr} {}^i\tilde{E}^2.$$

Dla granicznego przypadku, gdy dana przez (3.28) funkcja $\mu(\vartheta) \rightarrow \infty$, równanie konstytutywne (3.30), z funkcją statycznego uplastycznienia w postaci (6.10) i daną przez (6.10) funkcją ${}^o\mathbf{N}$, przechodzi w równanie konstytutywne plastycznego płynięcia w postaci

$$(6.19) \quad {}^p\dot{E} = \lambda < \operatorname{tr} (f_T \dot{T}) - (D + N \Delta \vartheta) \dot{\vartheta} > f_T (T - \alpha {}^p\tilde{E}),$$

gdzie współczynnik λ spełnia zależność

$$(6.20) \quad \lambda \operatorname{tr} \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{{}^n\kappa}} \bar{\mathbf{M}} - f_{p\tilde{E}} \right) f_T \right] > 0.$$

Przyjmując jak w p.1 $\lambda > 0$, oraz spostrzegając z (6.9), że $f_{p\tilde{E}} = -\alpha f_T$, otrzymujemy z zależności (6.20) nierówność

$$(6.21) \quad \operatorname{tr} \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{{}^n\kappa}} \bar{\mathbf{M}} + \alpha f_T \right) \right] > 0,$$

do której podstawiamy (6.4) oraz (6.12) ze zmienionym wskaźnikiem i na p . Po dokonaniu przekształceń uzyskujemy warunek ograniczający

$$(6.22) \quad \frac{1}{2\sqrt{{}^n\kappa}} \left[3a \left(\zeta_1 + \frac{2}{3} \zeta_2 \right) \operatorname{tr} T + \zeta_2 \frac{\operatorname{tr}_D T^2 - \alpha \operatorname{tr} ({}_D T {}_D^p \tilde{E})}{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}_D T - \alpha {}_D^p \tilde{E})^2}} \right] + \alpha \left(3a^2 + \frac{1}{2} \right) > 0.$$

P r z y p a d e k B. Gdy w warunkach (6.8) $a = 0$, co oznacza nieściśliwość materiału w obszarze odkształcenia niesprężystego. Kładąc $a = 0$ w (6.9) otrzymujemy statyczny warunek plastyczności Hubera-Misesa

$$(6.23) \quad f = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}_D T - \alpha {}_D^p \tilde{E})^2} = \sqrt{{}^n\kappa} (T, {}^p\tilde{E}, \vartheta).$$

Przyjmując w (6.14) oraz (6.15) $a = 0$ otrzymujemy równanie konstytutywne w postaci

$$(6.24) \quad {}^i\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^i\dot{\tilde{E}})^2}}{\sqrt{{}_n \kappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)}} - 1 \right) > \\ > \frac{{}_D T - \alpha {}^i\dot{\tilde{E}}}{2\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^i\dot{\tilde{E}})^2}},$$

oraz dynamiczny warunek plastyczności w formie

$$(6.25) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^i\dot{\tilde{E}})^2} = \sqrt{{}_n \kappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)} \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(2 \operatorname{tr} {}^i\dot{\tilde{E}}^2)^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta} \right] \right\}.$$

Równanie (6.24) stanowi uogólnienie proponowanego w [11] równania konstytutywnego dla metali na przypadek wzmocnienia zarówno izotropowego, jak i kinematycznego.

Dla $a = 0$ nierówność (6.16) staje się nierównością

$$(6.26) \quad \operatorname{tr} {}_D T^2 - (2\varrho_R \eta_2 + \alpha) \operatorname{tr}({}_D T {}^i\dot{\tilde{E}}) + 2\varrho_R \eta_2 \alpha \operatorname{tr} {}^i\dot{\tilde{E}}^2 \geq 0,$$

która musi być spełniona dla każdej pary $(T, {}^i\dot{\tilde{E}})$, jaka spełnia dynamiczny warunek plastyczności (6.25). Nierówność (6.26) jest zawsze spełniona przy np.

$$(6.27) \quad \eta_1 - \text{dowolne} \quad \text{i} \quad \eta_2 = \frac{\alpha}{2\varrho_R},$$

dla tych bowiem wartości jej lewa strona jest równa $\operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^i\dot{\tilde{E}})^2$. W tym przypadku część niesprężysta energii swobodnej jest równa

$$(6.28) \quad {}^i\psi = \frac{1}{2} \eta_1 (\operatorname{tr} {}^i\tilde{E})^2 + \frac{\alpha}{2\varrho_R} \operatorname{tr} {}^i\tilde{E}^2.$$

Przyjmując $a = 0$ w (6.22) otrzymujemy warunek ograniczający

$$(6.29) \quad \frac{\xi_2}{2\sqrt{{}_n \kappa}} \frac{\operatorname{tr} {}_D T^2 - \alpha \operatorname{tr}({}_D T {}^p\tilde{E})}{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}_D T - \alpha {}^p\tilde{E})^2}} + \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Gdy materiał wykazuje wzmocnienie tylko izotropowe, $\alpha = 0$ i wówczas statyczny warunek plastyczności (6.9) przyjmuje postać

$$(6.30) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} {}_D T^2} + a \operatorname{tr} T = \sqrt{{}_n \kappa(T, {}^pE, \vartheta)},$$

równanie konstytutywne (6.14) — formę

$$(6.31) \quad {}^i\dot{\tilde{E}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0)\Delta\vartheta] < \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} {}_D T^2} + a \operatorname{tr} T}{\sqrt{{}_n \kappa(T, {}^p\tilde{E}, \vartheta)}} - 1 \right) > \\ > \left(a \mathbf{1} + \frac{{}_D T}{2\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} {}_D T^2}} \right),$$

natomiast dynamiczny warunek plastyczności (6.15) staje się warunkiem

$$(6.32) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2 + a \operatorname{tr} \mathbf{T}} = \sqrt{n \kappa(\mathbf{T}, {}^p \tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)} \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\operatorname{tr}^i \dot{\tilde{\mathbf{E}}})^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0) \Delta \vartheta} \left(3a^2 + \frac{1}{2} \right)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Tym razem, jak wynika z (6.31), prędkość niesprężystej dylatacji gruntu w procesie termodynamicznym jest równa

$$\operatorname{tr}^i \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = 3a[\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0) \Delta \vartheta] < \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2 + a \operatorname{tr} \mathbf{T}}}{\sqrt{n \kappa(\mathbf{T}, {}^p \tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)}} - 1 \right) >.$$

W tym przypadku musi zachodzić warunek (4.8), co jak widać z (6.1)₄ pociąga za sobą fakt, że musi być $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Zatem warunek (6.16) staje się nierównością

$$(6.33) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2 + a \operatorname{tr} \mathbf{T}} \geq 0,$$

która, jak wynika z (6.32), jest zawsze spełniona, przy czym znak równości zachodzi wtedy, gdy $\mathbf{T} = \mathbf{0}$.

Jednocześnie dla $\alpha = 0$ warunek (6.22) przyjmuje postać

$$(6.34) \quad \frac{1}{\sqrt{n \kappa}} \left[\frac{3}{2} a \left(\zeta_1 + \frac{2}{3} \zeta_2 \right) \operatorname{tr} \mathbf{T} + \zeta_2 \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2} \right] > 0,$$

która ogranicza mnożniki ζ_1 i ζ_2 . Przyjmując np.

$$(6.35) \quad \zeta_1 = 0 \quad \text{i} \quad \zeta_2 = m > 0,$$

gdzie m dowolna liczba, otrzymujemy po wykorzystaniu warunku (6.30) nierówność $m > 0$, jaka jest zawsze spełniona. Kładąc $\alpha = 0$ w (6.23)–(6.25) otrzymujemy statyczny warunek plastyczności

$$(6.36) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2} = \sqrt{n \kappa(\mathbf{T}, {}^p \tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)},$$

równanie konstytutywne

$$(6.37) \quad \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = [\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0) \Delta \vartheta] < \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2}}{\sqrt{n \kappa(\mathbf{T}, {}^p \tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)}} - 1 \right) > \frac{D \mathbf{T}}{2 \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2}}$$

oraz dynamiczny warunek plastyczności

$$(6.38) \quad \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}_D \mathbf{T}^2} = \sqrt{n \kappa(\mathbf{T}, {}^p \tilde{\mathbf{E}}, \vartheta)} \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(2 \operatorname{tr}_D \dot{\tilde{\mathbf{E}}})^{1/2}}{\mu(\vartheta_0) + \mu_1(\vartheta_0) \Delta \vartheta} \right] \right\}.$$

Równanie konstytutywne (6.37), wraz z dynamicznym warunkiem plastyczności (6.38), zostało sformułowane i przedyskutowane w pracy [11].

Dzięki temu, że $\eta_1 = \eta_2 = 0$, nierówność (6.26) staje się warunkiem

$$(6.39) \quad \text{tr}_D T^2 \geq 0,$$

który jest zawsze spełniony, przy czym znak równości zachodzi wtedy, gdy ${}_D T = 0$. Przy $\alpha = 0$ warunek (6.29) przyjmuje postać nierówności

$$(6.40) \quad \zeta_2 > 0,$$

zaś mnożnik ζ_1 może być dowolny.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. FREUNDENTHAL, H. GEIRINGER, *The Mathematical Theories of Inelastic Continuum*, Encyclopedia of Physics, vol. VI, *Elasticity and Plasticity*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958, 229-443.
2. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *A general theory of an elastic plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 251-281.
3. K. HOHENEMSER, W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Continua*, ZAMM **12** (1932), 216-226.
4. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition*, Eleventh International Congress of Applied Mechanics, München, August 30 to September 5, 1964, Proc. Springer 1966, Berlin, 545-553.
5. W. OLSZAK, P. PERZYNA, *On elastic/visco-plastic soil*, Proceedings of the Symposium on Rheology and Mechanics of Soils at Grenoble, April 1964.
6. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20** (1963), 321-332.
7. P. PERZYNA, *The study of the dynamical behaviour of rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 113-130; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **12** (1964), 207-216.
8. P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Probl., **4** (1963), 281-290; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **12** (1964), 199-206.
9. P. PERZYNA, *Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności*, Mech. Teoret. Stos., **15** (1963), 3-30.
10. P. PERZYNA, *Fundamental problems in viscoplasticity*, Adv. Appl. Mech., vol. IX, 1966, 243-377.
11. P. PERZYNA, T. WIERZBICKI, *Temperature dependent and strain sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 135-143; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **12** (1964), 225-232.
12. P. PERZYNA, W. WOJNO, *On the constitutive equations of elastic/viscoplastic materials at finite strain*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 85-100.
13. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966.
14. P. PERZYNA, W. WOJNO, *Thermodynamics of a rate sensitive plastic material*, Arch. Mech. Stos., **20** (1968), 499-511; Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., **17** (1969), 1-8; Prace IPPT PAN, 10/1968.
15. W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au delà du élastique*, Mémorial Sci., Math., **87**, Paris 1937.
16. W. PRAGER, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, Boston 1961.
17. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, in: Handbuch der Physik III/I (1960), Springer-Verlag, Berlin, 226-793.
18. В. Войно, *Термодинамическая теория упруго/вязко-пластических материалов*, Механика Сплошных Сред, Сборник материалов международной конференции по механике сплошных сред, Варна, Сентябрь 1966.
19. W. WOJNO, *Termodynamika materiałów sprężysto/lepkoplastycznych*, praca doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 1967.
20. W. WOJNO, *Thermodynamics of elastic/rheological materials*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969); *Termodynamika materiałów sprężysto/reologicznych*, Prace IPPT PAN, 9/1969.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЯ К ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГО/ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

До настоящего времени теории упруго/вязкопластических материалов для бесконечно малых и для конечных деформаций развивались независимо. Целью настоящей работы является вывод, с одновременным расширением на случай термодинамических процессов, инфинитезимальной теории непосредственно путем предельного перехода от термодинамической теории для больших деформаций. Этот предельный переход произведен при предположении, что градиенты перемещения и приращения температуры являются небольшими. При этих предположениях были получены уравнения общей теории совместно с ограничениями вытекающими из второго закона термодинамики. Затем рассмотрен случай изотропного упрочнения материалов, условия пластичности с нестационарной из за влияния температуры поверхностью пластического течения и случай изотропного материала.

Summary

NOTES ON THE INFINITESIMAL THEORY OF ELASTIC/VISCOPLASTIC MATERIALS

So far, both the infinitesimal and the finite deformation theories of elastic/viscoplastic materials have been developed independently. The aim of the paper is to obtain the infinitesimal theory as a limiting case of the thermodynamical theory at finite strains with the conditions that displacement gradients and temperature increments are small. As a result, both the generalized constitutive equations and the restrictions that are imposed on them by the second law of thermodynamics have been obtained. Finally, the particular cases, such as the isotropic work-hardening, the yield condition with a non-stationary yield surface and the isotropic materials, has been discussed.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 stycznia 1970 r.

TEORIA PRYZSTOSOWYWANIA SIĘ BELEK

LESZEK KONIECZNY (GDAŃSK)

1. Wstęp

«Dla procesów związanych z pojawieniem się odkształceń plastycznych przestaje obowiązywać jednoznaczność zależności, wiążących odkształcenia z naprężeniami... Wynika stąd wniosek, że w zagadnieniach teorii plastyczności podać należy nie tylko końcowy stan obciążenia (co było wystarczające dla rozwiązywania zagadnień teorii ciał sprężystych liniowych oraz nieliniowych), lecz również całą uprzednią „historię” rozpatrywanego procesu (jego „drogę”), poczynsz od pierwotnego stanu beznaprężeniowego i bezodkształceniowego... Należy jeszcze wyjaśnić, czy konieczność znajomości „historii”... nie ogranicza zbytnio naszych rozważań i możliwości ich praktycznych zastosowań. Innymi słowy, należy wyjaśnić, czy otrzymane rozwiązanie, znalezione przy pewnej ustalonej przez nas kolejności i sposobie wzrostu obciążenia... będzie istotnie tą nitką, za którą musimy zdążać do celu, jeśli konstrukcja lub element konstrukcyjny poddane będą w rzeczywistych warunkach pracy pewnym kolejnym następstwom obciążeń lub sposobowi ich narastania, które różnią się od tych, jakie wzięliśmy za podstawę naszych obliczeń.

Na pytanie to nie można dać dziś jeszcze w pełni pozytywnej odpowiedzi. Jednak duży krok naprzód stanowią twierdzenia o „dostosowywaniu się” konstrukcji czyli ich „adaptacji”... Zrezygnujemy w związku z tym z założenia przyjętego uprzednio, a dotyczącego kolejności następstw obciążeń; będziemy teraz uważali, że dana konstrukcja poddana jest działaniu takich obciążeń, iż z każdego z nich znamy tylko najmniejszą i największą możliwą jego wartość; przyjmujemy przy tym, że każde z tych obciążeń może się zmieniać dowolnie i niezależnie od drugich...»¹⁾

Z twierdzeń o plastycznym zniszczeniu wynika, że obciążenie graniczne jest niezależne od poprzedniej historii obciążania konstrukcji. Można więc mówić o zabezpieczeniu konstrukcji przed zniszczeniem plastycznym w dowolnym programie obciążania, jeżeli na każdym etapie programu mnożnik obciążeń ma wartość mniejszą od odpowiedniej wartości granicznej.

Istnieje też inne kryterium dla konstrukcji, będące również inwariantem względem historii obciążania. Jest nim ograniczoność całkowitej pracy odkształceń plastycznych, jaka może być rozproszona w konstrukcji przy nieograniczonym powtarzaniu dowolnego cyklu obciążania. Są podstawy, żeby się spodziewać, że spełnienie tego kryterium zapewnia w praktyce dostateczne ograniczenie trwałych odkształceń konstrukcji.

Z punktu widzenia tego kryterium zabezpieczenie konstrukcji przed zniszczeniem plastycznym w ogólnym przypadku nie wystarcza (ograniczoność całkowitej pracy odkształ-

¹⁾ Cytaty zaczerpnięto z [1], z rozdziału napisanego przez W. Olszaka.

ceń plastycznych można wówczas udowodnić tylko dla skończonych programów obciążania). W przypadku powtarzających się, dostatecznie złożonych cykli obciążeń, całkowita praca odkształceń plastycznych rośnie nieograniczenie. Typ zniszczenia konstrukcji, jaki wówczas występuje, jest nazywany ogólnie zniszczeniem w wyniku cyklicznych odkształceń plastycznych. Rozróżnia się wtedy dwa rodzaje zniszczenia. Pozostawiając na boku stronę fizyczną zjawiska można stwierdzić, że gdy obciążanie ma charakter przemienny powstaje zjawisko przemiennej plastyczności (*alternating plasticity*), co może doprowadzić do pęknięć po niewielkiej liczbie cykli.

Niech ekstremalne wartości obciążeń dadzą się opisać przez podanie jednego parametru p_0 . Gdy p_0 przekracza pewną krytyczną wartość $(p_0)_{kr}$, wówczas konstrukcja nie przystosuje się i podczas każdego cyklu obciążania powstają przyrosty obrotów w plastycznych przegubach. Ustala się stan stacjonarny, w którym przyrosty obrotów w każdym przegubie są takie same w każdym cyklu. Proces ten prowadzi do nadmiernych odkształceń plastycznych; mówimy, że konstrukcja uległa przyrostowemu zniszczeniu (*incremental collapse*).

2. Podstawowe hipotezy i definicje

Rozpatruje się konstrukcje prętowe poddane głównie zginaniu, dla których wpływ innych sił wewnętrznych (oprócz momentu zginającego) na proces uplastycznienia może być pominięty. Potrzebna teoria w zasadzie istnieje (monografia NEALA [2]), jakkolwiek jest ona obciążona poważnymi niedostatkami natury formalnej, które autor starał się w niniejszej pracy usunąć.²⁾ Istotną różnicą jest wprowadzenie tu innej matematycznej definicji przystosowania się konstrukcji w zbiorze obciążeń, co umożliwiło przeprowadzenie poprawnego wywodu warunków wystarczających przystosowania się (Twierdzenie 1). Przy przyjęciu tej definicji wywód warunków koniecznych nie jest trywialny i został również podany w niniejszej pracy (Twierdzenie 2).

Podstawowa hipoteza teorii dotyczy, jak wiadomo, charakteru zależności między momentem zginającym a krzywizną dla ustalonego przekroju belki (hipoteza o przegubach plastycznych). Dla belki znajdującej się początkowo w stanie naturalnym (bez naprężeń i odkształceń) postulowana zależność przedstawiona jest na rys. 1 (*OAB*), przy założeniu zgodności konwencji znaków dla momentu i krzywizny. Postuluje się, że gdy moment zginający M wzrasta i dąży do wartości momentu granicznego, krzywizna κ w rozpatrywanym przekroju rośnie nieograniczenie; odpowiada to przejściu w stan plastyczny całego przekroju belki. Jeżeli pręt znajdujący się początkowo w stanie naturalnym obciążany jest ujemnym momentem zginającym, postulowana zależność między momentem i krzywizną w ustalonym przekroju belki jest analogiczna (*OCD*).

Matematycznie, przyjęta hipoteza oznacza, że moment zginający w każdym przekroju pręta spełnia podwójną nierówność

$$(2.1) \quad -M_{gr} \leq M \leq M_{gr}$$

²⁾ Na nieścisłości istniejącej teorii adaptacji dla ośrodka ciągłego zwrócił uwagę J. Rychlewski w referacie: *O podstawowych twierdzeniach teorii przystosowywania się ciał sprężysto-plastycznych*, wygłoszonym na konferencji naukowej ZMOC IPPT PAN, Bielsko-Biała 1967.

oraz że przyrosty krzywizny są zawsze tego samego znaku co przyrosty momentu zginającego

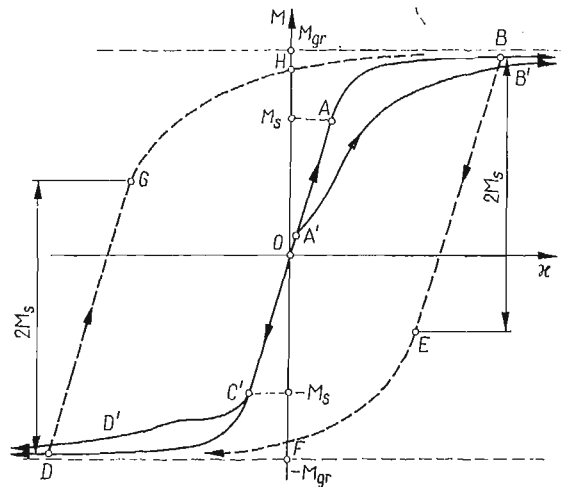
$$(2.2) \quad \frac{dM}{d\kappa} > 0.$$

Osiągnięcie momentu granicznego odpowiada nieograniczonej krzywiznie, a więc w przekroju obciążonym momentem granicznym mogą powstać skończone przyrosty kąta ugięcia na nieskończenie małym odcinku belki. Mogą więc wystąpić względne obroty θ obu części belki wokół przekroju obciążonego momentem granicznym, przy czym

$$(2.3) \quad M\delta\theta \cong 0.$$

Postulowaną zależność $M-\kappa$ można wyprowadzić przy przyjęciu materiału sprężysto-idealnie plastycznego i szeregu założeń przyjmowanych zazwyczaj w teorii belek [3].

Obecność naprężeń własnych w przekroju belki w stanie początkowym wpływa na zależność moment zginający-krzywizna. W ogólnym przypadku funkcja ta nie jest określona jednoznacznie i może być np. taka, jak $OA'B'$, $OC'D'$ na rys. 1. Podstawowe własności (2.1) — (2.3) pozostają jednak zawsze zachowane.

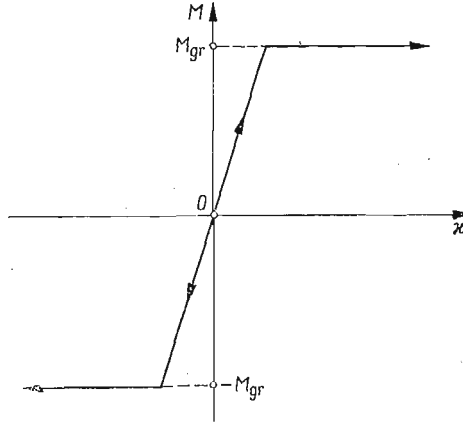


Rys. 1

Przy odciążaniu belki obciążonej poza granicę sprężystości zależność między momentem zginającym i krzywizną jest inna, niż przy obciążaniu. Jeżeli belka, znajdująca się początkowo w stanie naturalnym, jest obciążona momentem zginającym większym od momentu M_s (wywołującego uplastycznienie skrajnych włókien) i następnie moment maleje, to obowiązuje sprężysta zależność między zmianami krzywizny i momentu zginającego tak długo, dopóki nie nastąpi powtórne uplastycznienie, po czym — gdy moment zginający dąży do $-M_{gr}$ — krzywizna maleje nieograniczenie (rys. 1, BEF). Przy odciążaniu od ujemnego momentu zginającego obowiązuje analogiczne prawo (DGH). Postuluje się, że zakres sprężystej pracy belki jest niezależny od historii obciążania i równy $2M_s$ (podwojonemu zakresowi sprężystemu dla belki obciążanej od stanu naturalnego).

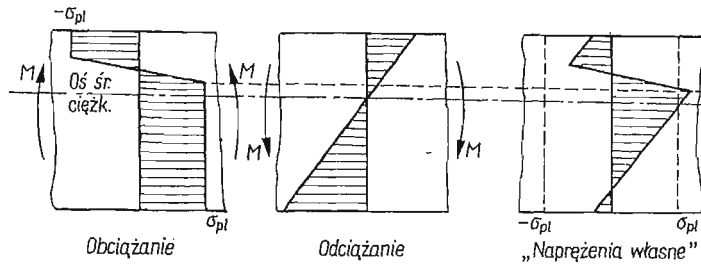
Dla belki o przekroju z dwiema osiami symetrii, znajdującej się początkowo w stanie naturalnym, można uzasadnić hipotezę o odciążaniu w oparciu o założenia wspomniane wyżej [3].

Dla belek o przekroju z jedną tylko osią symetrii, hipoteza o sprężystym odciążaniu nie jest słuszna w całym zakresie możliwych momentów zginających. Można to wykazać



Rys. 2

rozważając belkę, dla której oś dzieląca pole przekroju poprzecznego na połowy nie pokrywa się z osią przechodzącą przez środek ciężkości przekroju. Odciążając belkę od stanu, w którym obszar płynięcia przekroczył środek ciężkości przekroju zauważymy, że gdyby miało miejsce sprężyste odciążanie, to po jednej stronie osi środków ciężkości naprężenia



Rys. 3

zmniejszałyby się poniżej granicy plastyczności, natomiast po drugiej stronie naprężenia musiałyby wzrastać powyżej granicy plastyczności (w części przekroju między osią środków ciężkości i osią dzielącą przekrój na połowy), co jest niemożliwe dla materiału idealnie plastycznego.

Przy spełnieniu hipotezy płaskich przekrojów, nie można znaleźć takiego przyrostu naprężeń, który dawałby zerową siłę osiową oraz nie powodował przekroczenia granicy plastyczności w żadnym punkcie przekroju belki. W przypadku odciążania stan odkształceń belki z jedną osią symetrii nie zawsze więc może być opisany przez podanie krzywizny.

W dążeniu do maksymalnego uproszczenia przyjmuje się dalej tak zwaną idealną zależność między momentem zginającym i krzywizną (rys. 2). Postuluje się zachowanie sprężyste aż do chwili całkowitego uplastycznienia przekroju, kiedy przekrój nie może przenosić momentu większego od granicznego, a krzywizna jest równa odpowiedniej krzywiznie sprężystej, bądź nieskończona. Zależność taka jest spełniona dla hipotetycznego idealnego przekroju — dźwigara dwupasowego. Zakłada się również w tym przypadku słuszność hipotezy o sprężystym odciążaniu.

Podamy definicję szeregu pojęć używanych dalej.

Definicja 1. *Zniszczeniem plastycznym* nazywamy stan, w którym mogą powstać niezerowe przyrosty ugięć w konstrukcji przy zerowych przyrostach obciążeń zewnętrznych (przy równoczesnym spełnieniu warunków równowagi z obciążeniami zewnętrznymi). Odpowiednie obciążenia nazywamy obciążeniami granicznymi, a stan równowagi — równowagą graniczną [4].

Można udowodnić [2], że wszystkie możliwe położenia równowagi granicznej konstrukcji różnią się o przemieszczenia mechanizmu, zwanego mechanizmem zniszczenia plastycznego.

Definicja 2. *Statycznie dopuszczalny rozkład momentów* jest to taki rozkład momentów zginających w konstrukcji, że:

1°. Funkcja $M(x)$ określona jest z równania

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x)$$

z dokładnością do wielkości hiperstatycznych;

2°. Momenty nigdzie nie przekraczają momentu granicznego co do wartości bezwzględnej.

Definicja 3. *Bezpieczny statycznie możliwy rozkład momentów* określamy jak wyżej, wymagając ponadto, aby momenty zginające były wszędzie mniejsze od momentu granicznego co do bezwzględnej wartości.

Definicja 4. *Zbiór obciążeń ograniczony*. Niech będzie dany nieskończenie-parametrowy zbiór obciążeń Ω , który jest podzbiorem przestrzeni liniowej unormowanej (przestrzeń funkcyjna). Mówimy, że zbiór ten jest *ograniczony*, jeżeli norma każdego elementu $p \in \Omega$ spełnia nierówność

$$\bigvee_{N > 0} \bigwedge_{p \in \Omega} \|p\| \leq N.$$

Definicja 5. *Momenty zginające własne*. Momentem sprężystym $\mathcal{M}_{(x)}$ w przekroju x pręta nazywamy moment zginający obliczony dla dowolnego danego obciążenia przy założeniu, że cała konstrukcja znajduje się w zakresie sprężystym (materiał jest idealnie liniowo sprężysty). $\mathcal{M}_{(x)}^{\max}$ i $\mathcal{M}_{(x)}^{\min}$ są ekstremalnymi wartościami funkcjonału $\mathcal{M}_{(x)}$ w zbiorze Ω . Jeżeli oznaczyć przez $M_{(x)}$ rzeczywisty moment zginający jaki powstanie w przekroju x na dowolnym etapie programu obciążania, to moment *własny* $r_{(x)}$ w tym przekroju jest zdefiniowany następująco

$$(2.4) \quad r_{(x)} = M_{(x)} - \mathcal{M}_{(x)}.$$

Tak określony moment $r_{(x)}$ może być różny od momentu, jaki pozostanie w konstrukcji po usunięciu obciążeń zewnętrznych, ze względu na możliwość powstawania nowych odkształceń plastycznych podczas odciążania.

Definicja 6. Mówimy, że konstrukcja przystosowała się, jeżeli dla dowolnego nieskończonego programu obciążania całkowita praca plastyczna dysypowana w konstrukcji jest ograniczona, tzn.

$$\bigvee_{N>0} \bigwedge_{p, t \in \Omega} \int_0^{\infty} \int_L \dot{w}_p dx dt \leq N.$$

Przyjęte całkowite kryterium przystosowania się nie zabezpiecza przed lokalnym (występującym na zbiorze miary zero) zmęczeniem plastycznym. Jest ono równoważne kryterium lokalnemu, o ile występujące funkcje są wystarczająco regularne względem współrzędnych, a obszar ciała ograniczony.

3. Teoria dla idealnego profilu

Twierdzenie 1. Jeżeli istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $q(x)$, do którego można dodać ekstremalne momenty zginające (w ograniczonym zbiorze Ω) nie osiągając (z danym współczynnikiem zapasu $m > 1$) w żadnym przekroju momentu granicznego, to konstrukcja przystosuje się w każdym programie obciążania $p(t) \in \Omega$.

Daleko precyzyjniej można wypowiedzieć to twierdzenie używając zapisu logicznego:

$$\bigvee_{q \in R} \bigvee_{m > 1} \bigwedge_x \left\{ \begin{array}{l} q(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\max} \leq \frac{M_{gr}(x)}{m} \\ q(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\min} \geq -\frac{M_{gr}(x)}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \bigwedge_{p(t) \in \Omega} \int_0^{\infty} \dot{W}_p dt \leq \frac{m}{m-1} \int_L \frac{q^2}{2EJ} dx.$$

D o w ó d. Rozpatrzmy dowolny program obciążania. Wprowadzimy wielkość e określoną przez równanie

$$e = \int_L \frac{(r-q)^2}{2EJ} dx,$$

gdzie r oznacza rzeczywisty moment własny w przekroju x na dowolnym etapie programu obciążania (dla określonego t). Całkowanie rozciąga się na wszystkie pręty konstrukcji. Z definicji wynika, że e jest nieujemne; jest to miara różnicy między rzeczywistym i hipotetycznym rozkładem momentów własnych.

Zakładamy, że podczas nieskończonego małego przedziału czasu δt powstaną takie zmiany przykładanych obciążeń, że rzeczywisty moment zginający w dowolnym przekroju x zmieni się o $\delta M(x)$. Niech $\delta \mathcal{M}(x)$ i $\delta r(x)$ będą odpowiednio przyrostami momentów sprężystych i własnych.

W tym samym czasie przyrosty obrotów plastycznych przegubów wynoszą $\delta \theta_k$ ($k = 1, \dots, n$).

Przyrost e wynosi

$$\delta e = \int_L (r-q) \frac{\delta r}{EJ} dx.$$

Napiszemy równanie prac przygotowanych dla samorzównoważonego rozkładu momentów własnych $(r-\varrho)$. Zauważymy, że rzeczywiste przyrosty krzywizny $\delta M/EJ$ muszą spełniać warunki geometrycznej zgodności z rzeczywistymi przyrostami obrotów w przegubach plastycznych $\delta\theta_k$. Co więcej, przyrostom krzywizny $\frac{\delta M}{EJ}$ (które miałyby miejsce, gdyby cała konstrukcja zachowywała się w sposób czysto sprężysty) powinny odpowiadać zerowe przyrosty obrotów w plastycznych przegubach. Stąd wynika, że przyrosty krzywizny

$$\frac{\delta r}{EJ} = \frac{\delta M - \delta \mathcal{M}}{EJ}$$

muszą być zgodne z rzeczywistymi przyrostami $\delta\theta_k$ obrotów w plastycznych przegubach.

Z zasady prac przygotowanych wynika

$$\int_L (r-\varrho) \frac{\delta r}{EJ} dx + \sum_k (r_k - \varrho_k) \delta\theta_k = 0;$$

tutaj sumowanie obejmuje wszystkie przekroje k , w których występują obroty w plastycznych przegubach w rozpatrywanym, nieskończenie małym przedziale czasu δt . Otrzymujemy więc

$$(a) \quad \delta e = - \sum_k (r_k - \varrho_k) \delta\theta_k.$$

Rozpatrzmy teraz przekrój k taki, że

$$r_k - \varrho_k < 0.$$

Biorąc pod uwagę nierówność, tkwiącą w założeniu twierdzenia, otrzymamy

$$r_k + \mathcal{M}_k^{\max} < M_{gr,k}$$

lecz z definicji momentu własnego wynika, że

$$r_k + \mathcal{M}_k^{\max} = M_k^{\max},$$

gdzie M_k^{\max} jest rzeczywistym maksymalnym momentem zginającym, jaki mógłby powstać w przekroju k , gdyby moment własny był równy r_k . Tak więc

$$M_k^{\max} < M_{gr,k}.$$

Wynik ten wskazuje, że obroty w przegubie plastycznym w tym przekroju mogą wystąpić tylko w kierunku ujemnym $\delta_k\theta < 0$, ponieważ $\delta\theta_k$ mogłyby być tylko wtedy dodatnie, gdyby $M_k = M_{gr,k}$.

Stąd wynika, że

$$(r_k - \varrho_k) \delta\theta_k > 0.$$

W podobny sposób można pokazać, że gdy $r_k - \varrho_k > 0$, to $\delta\theta_k$ musi być dodatnie, tak że również w tym przypadku

$$(r_k - \varrho_k) \delta\theta_k > 0.$$

W konkluzji stwierdzamy, że

$$(r_k - \varrho_k) \delta\theta_k \geq 0.$$

Znak równości dotyczy przekrojów, w których na danym etapie obciążania $r_k = \varrho_k$. Z zależności (a) otrzymujemy więc $\delta e \leq 0$. Jeżeli w nieskończenie małym przedziale czasu δt nie ma obrotów w plastycznych przegubach, to oczywiście wtedy $\delta e = 0$.

Pokazaliśmy więc, że e maleje, gdy występują obroty w przegubach plastycznych i pozostaje stałe, gdy zachowanie jest czysto sprężyste. Ponieważ e jest oczywiście nieujemne, więc może albo osiągnąć zero, albo pewną wartość dodatnią.³⁾

Można pokazać, że całkowita praca odkształceń plastycznych jest ograniczona dla dowolnego nieskończonego programu. Biorąc pod uwagę poprzednie rozważania mamy

$$\left| \int_0^\infty \delta e \right| = |e(\infty) - e(0)| \leq e(0) \leq \int_L \frac{\varrho^2}{2EJ} dx.$$

Stąd

$$\int_L \frac{\varrho^2}{2EJ} dx \geq \int_0^\infty \sum_k (r_k - \varrho_k) \delta \theta_k = \int_0^\infty \sum_k |r_k - \varrho_k| \cdot |\delta \theta_k|.$$

Wykorzystano tutaj fakt, że $(r_k - \varrho_k) \delta \theta_k > 0$.

Wybermy taki przekrój k , w którym

$$\delta \theta_k < 0.$$

Wtedy w tym przekroju

$$r_k + \mathcal{M}_k = -M_{gr,k},$$

a ponieważ z założenia

$$-\frac{M_{gr,k}}{m} \leq \varrho_k + \mathcal{M}_k \leq \frac{M_{gr,k}}{m},$$

więc

$$|r_k - \varrho_k| = |-M_{gr,k} - \mathcal{M}_k - \varrho_k| = |-M_{gr,k} - (\varrho_k + \mathcal{M}_k)| \geq \left| -M_{gr,k} + \frac{M_{gr,k}}{m} \right| = \frac{m-1}{m} M_{gr,k}.$$

Podobnie w przekroju, w którym $\delta \theta_k > 0$ mamy

$$r_k + \mathcal{M}_k = M_{gr,k}$$

oraz

$$|r_k - \varrho_k| = |M_{gr,k} - \mathcal{M}_k - \varrho_k| = |M_{gr,k} - (\varrho_k + \mathcal{M}_k)| \geq \left| M_{gr,k} - \frac{M_{gr,k}}{m} \right| = \frac{m-1}{m} M_{gr,k}.$$

Otrzymujemy więc, że

$$\int_L \frac{\varrho^2}{2EJ} dx \geq \frac{m-1}{m} \int_0^\infty \left(\sum_k M_{gr,k} \cdot |\dot{\theta}_k| \right) \delta t = \frac{m-1}{m} \int_0^\infty \dot{W}_p \delta t.$$

³⁾ Z faktu tego (po upewnieniu się, że $e = \text{const}$ tylko wtedy, gdy brak jest przyrostów obrotów w przegubach plastycznych) NEAL [2] wyciąga zbyt daleko idący wniosek, że powstanie rozkład momentów własnych, umożliwiający przenoszenie dalszych zmian ograniczonych obciążeń w sposób czysto sprężysty

Ostatnia całka po prawej stronie jest całkowitą pracą plastyczną rozproszoną w konstrukcji dla belki o idealnym przekroju mamy bowiem

$$\dot{W}_p = \sum_k M_{gr,k} \cdot |\dot{\theta}_k|.$$

Uwzględniono przy tym, że w każdym przegubie plastycznym praca ta jest nieujemna, co wynika z podstawowej hipotezy. W konkluzji dowodu otrzymaliśmy więc, że dla każdego nieskończonego programu obciążania i współczynnika zapasu ze względu na przystosowanie $m > 1$ całkowita praca plastyczna jest ograniczona

$$\int_0^\infty \dot{W}_p \delta t \leq \frac{m}{m-1} \int_L \frac{\rho^2}{2EJ} dx,$$

co kończy dowód Twierdzenia 1.

Warunki podane w twierdzeniu są warunkami wystarczającymi dla przystosowania się konstrukcji z prętów o przekroju idealnym.

T w i e r d z e n i e 2. Jeżeli konstrukcja się przystosowała, to istnieje taki szczególnie rozkład momentów własnych $\rho(x)$ (niezależny od czasu), że wszystkie możliwe zmiany obciążeń, wewnątrz danych ograniczeń, są przenoszone bez naruszenia warunku uplastycznienia.

$$\bigvee_{N>0} \bigwedge_{p(t) \in \Omega} \int_0^\infty \dot{W}_p \delta t \leq N \Rightarrow \bigvee_{\rho \in R} \bigwedge_x \left\{ \begin{array}{l} \rho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\max} \leq M_{gr}(x) \\ \rho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\min} \geq -M_{gr}(x) \end{array} \right\}.$$

Istnienie hipotetycznego rozkładu momentów własnych $\rho(x)$ takiego, że dla każdego x

$$\begin{aligned} \rho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\max} &\leq M_{gr}(x), \\ \rho(x) + \mathcal{M}_{(x)}^{\min} &\geq -M_{gr}(x), \end{aligned}$$

jest więc warunkiem koniecznym dla przystosowania się konstrukcji.

D o w ó d. Niech nie istnieje taki rozkład momentów własnych $\rho(x)$, który spełniałby warunki podane w tezie. Rozważmy cykliczny program obciążania, przy czym realizacja każdego cyklu trwa skończony odcinek czasu Δt (czas odgrywa tutaj jedynie rolę parametru, charakteryzującego kolejność przykładania obciążeń).

W każdym z przekrojów k , w których występują przyrosty obrotów w przegubach plastycznych na różnych etapach tego samego cyklu, muszą być spełnione warunki

$$\begin{aligned} r_k + \mathcal{M}_k &= M_{gr,k} & \text{gdy} & \quad \delta\theta_k > 0, \\ r_k + \mathcal{M}_k &= -M_{gr,k} & \text{gdy} & \quad \delta\theta_k < 0. \end{aligned}$$

Niech całkowite przyrosty (za jeden cykl obciążania) momentów, krzywizn i kątów obrotu będą równe

$$\Delta M = \int_0^{\Delta t} \delta M; \quad \Delta \kappa = \int_0^{\Delta t} \delta \kappa; \quad \Delta \theta_k = \int_0^{\Delta t} \delta \theta_k.$$

Napiszmy równanie prac przygotowanych dla przyrostów $\Delta M(x)$, które spełniają warunki

równowagi z zerowymi przyrostami obciążeń zewnętrznych (obciążenia zewnętrzne na początku i na końcu każdego cyklu są takie same)

$$\int_L \Delta M \Delta x dx + \sum_k \Delta M_k \Delta \theta_k = 0$$

lub uwzględniając, że $\Delta \mathcal{M} \equiv 0$ mamy

$$(b) \quad \int_L \frac{(\Delta r)^2}{EJ} dx + \sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0.$$

Wskazujemy cykliczny program obciążania taki, że po każdym cyklu sumaryczne przyrosty $\Delta \theta_k$ obrotów w przegubach plastycznych spełniają warunek

$$\sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0.$$

Program taki nazywać będziemy *złożonym programem obciążania*.⁴⁾

Na podstawie (b) mamy wtedy $\Delta r \equiv 0$ (przy $\delta r \neq 0$), a więc na początku i na końcu każdego cyklu rozkład momentów własnych w konstrukcji jest identyczny, proces jest więc całkowicie powtarzalny. Oczywiście konstrukcja nie przystosuje się, gdyż przy powtarzaniu cykli obciążania praca plastyczna rośnie nieograniczenie. Gdy zachodzi teza twierdzenia, wówczas można pokazać (podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1), że $\delta \theta_k \rightarrow 0$,
a więc również $\Delta \theta_k \rightarrow 0$, co kończy dowód.

Definicja 7. Zbiór $\{\Delta \theta_k\}$, $k = 1, \dots, n$, przyrostów obrotów w przegubach plastycznych po jednym cyklu, dla którego spełniony jest warunek

$$(2.5) \quad \sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0,$$

nazywamy — *mechanizmem zniszczenia przyrostowego* — (*mechanism of incremental collapse*).

Zauważmy, że gdyby takie obroty wystąpiły równocześnie, to konstrukcja istotnie przekształciłaby się w mechanizm. Wynika stąd praktyczny sposób budowania takich mechanizmów dla danej konstrukcji.

Niech dany będzie dowolny zbiór obciążeń (skończony, przeliczalny lub nieprzeliczalny), ograniczony w taki sposób, że ograniczenia normy dane są przez podanie wartości jednego parametru $p_0 > 0$. Niech ponadto ekstremalne momenty sprężyste dla ustalonego przekroju (\mathcal{M}^{\max} , \mathcal{M}^{\min}) będą liniowymi funkcjami p_0 .

Definicja 8. Obciążeniem krytycznym $(p_0)_{kr}$ ze względu na przystosowywanie się w zbiorze obciążeń Ω nazywamy taką wartość parametru p_0 , że gdy $p_0 \leq \frac{(p_0)_{kr}}{m}$, to konstrukcja przystosuje się w każdym programie obciążania, którego elementy należą do Ω

⁴⁾ Przyjmujemy taki cykl obciążania, że po pewnej liczbie powtórzeń ustala się stan stacjonarny, w którym gdyby przyrosty obrotów w plastycznych przegubach wystąpiły równocześnie, to konstrukcja przekształciłaby się w mechanizm. Przykład takiego programu dla ramy podaje Neal [2].

i gdy $p_0 > (p_0)_{kr}$, to można znaleźć taki program obciążania, którego elementy należą do Ω , że konstrukcja nie przystosuje się ($m > 1$ jest współczynnikiem zapasu).

T w i e r d z e n i e 3 (twierdzenie statyczne o przystosowywaniu się). Jeżeli istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $\varrho(x)$, do którego można dodać ekstremalne momenty sprężyste, odpowiadające wartości p_0 bez naruszenia warunku uplastycznienia, to wartość $p_0 \leq (p_0)_{kr}$ i odwrotnie.

$$\bigvee_{\varrho(x) \in R} \bigwedge_x \left\{ \begin{array}{l} \varrho(x) + p_0 \overline{\mathcal{M}}_x^{\max} \leq M_{gr}(x) \\ \varrho(x) + p_0 \overline{\mathcal{M}}_x^{\min} \geq -M_{gr}(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow p_0 \leq (p_0)_{kr}.$$

D o w ó d. Zakładamy, że są spełnione założenia twierdzenia, jeżeli istnieje taki rozkład $\varrho(x)$ momentów własnych w konstrukcji, dla którego spełnione są nierówności podane w założeniach. Dzieliąc obie strony tych nierówności przez współczynnik zapasu $m > 1$ otrzymujemy

$$\frac{\varrho(x)}{m} + \frac{p_0}{m} \overline{\mathcal{M}}(x) \leq \frac{M_{gr}(x)}{m},$$

$$\frac{\varrho(x)}{m} + \frac{p_0}{m} \overline{\mathcal{M}}(x) \geq -\frac{M_{gr}(x)}{m}.$$

Dla wartości parametru p_0/m istnieje więc taki rozkład $\varrho(x)/m$ momentów własnych w konstrukcji, że spełnione są warunki wystarczające przystosowania się (Twierdzenie 1), a więc z definicji 8 wynika, że $p_0 \leq (p_0)_{kr}$.

Udowodnimy teraz, że gdy $p_0 = (p_0)_{kr}$, to spełnione są założenia twierdzenia. Założenia te są warunkami koniecznymi przystosowania się konstrukcji w zbiorze obciążeń (Twierdzenie 2), jeśli więc nie są spełnione, to $p_0 > (p_0)_{kr}$.

D e f i n i c j a 9. Mówimy, że wartość p_0 odpowiada danemu mechanizmowi zniszczenia przyrostowego (określone mu przez zbiór przyrostów obrotów $\{\theta_k\}$), gdy istnieje taki rozkład momentów własnych $r(x)$, że:

1°. W każdym przekroju k , w którym zdarzają się obroty w danym mechanizmie, spełniony jest jeden z dwóch warunków:

$$r_k + p_0 \overline{\mathcal{M}}_k^{\max} = (M_{gr})_k \quad \text{dla} \quad \theta_k > 0,$$

$$r_k + p_0 \overline{\mathcal{M}}_k^{\min} = -(M_{gr})_k \quad \text{dla} \quad \theta_k < 0.$$

2°. Równocześnie z równania prac przygotowanych dla danego mechanizmu musi wynikać równość

$$\sum_k r_k \theta_k = 0.$$

Zauważmy, że obydwa warunki określają jednoznacznie wartość p_0 — wystarczy dla każdego k określić r_k z warunku 1 i podstawić do warunku 2.

Twierdzenie 4 (twierdzenie kinematyczne o przystosowywaniu się). Wartość p_0 , odpowiadająca dowolnemu założonemu mechanizmowi przyrostowego zniszczenia, jest większa lub równa obciążeniu krytycznemu $(p_0)_{kr}$.

$$\bigvee_{\{\theta_k\}_{k=1, \dots, n}} \bigvee_{p_0} \sum_k r_k \theta_k = 0 \wedge \left\{ \begin{array}{l} r_k + p_0 \overline{\mathcal{M}}_k^{\max} = M_{gr,k} \quad \text{dla } \theta_k > 0 \\ r_k + p_0 \overline{\mathcal{M}}_k^{\min} = -M_{gr,k} \quad \text{dla } \theta_k < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p_0 \geq (p_0)_{kr}.$$

Dowód tego twierdzenia został podany przez NEALA [2].

Definicja 10. Rozwiązaniem zupełnym problemu przystosowywania się nazywamy określenie $(p_0)_{kr}$ dla danej konstrukcji i danego ograniczonego zbioru obciążeń.

4. Przypadki szczególne

Zajmijmy się teraz ważnymi przypadkami szczególnymi podanej teorii.

I. Niech $g(x) \equiv 0$; jest to oczywiście jeden z możliwych rozkładów momentów własnych. Warunki wystarczające przystosowania można wówczas zapisać w postaci

$$\bigvee_{m>1} \bigwedge_x \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{(x)}^{\max} \leq \frac{1}{m} M_{gr}(x) \\ \mathcal{M}_{(x)}^{\min} \geq -\frac{1}{m} M_{gr}(x) \end{array} \right\}.$$

Dla konstrukcji z prętów o przekroju idealnym odpowiada to osiągnięciu tzw. nośności sprężystej. Analiza konstrukcji oparta o model ciała sprężystego, sprowadza się więc do zapewnienia warunków wystarczających przystosowania. Otrzymane w ten sposób oszacowanie $(p_0)_{kr}$ od dołu jest na ogół bardzo mało ostre.

II. Rozpatrzmy program obciążenia tego rodzaju, że dowolny element $p(x) \in \Omega$ mnożymy przez liczbę λ , zależną od czasu t (tworzymy jednowymiarową podprzestrzeń unormowanej przestrzeni liniowej). Jest rzeczą oczywistą, że w takim przypadku mechanizm zniszczenia przyrostowego staje się mechanizmem zniszczenia plastycznego. Jeżeli bowiem w takim programie zdarzą się przyrosty obrotów w plastycznych przegubach $\Delta\theta_k$ spełniające warunek

$$\sum_k \Delta r_k \Delta \theta_k = 0,$$

to przyrosty te zachodzą równocześnie (na jednym i tym samym etapie programu obciążania). W omawianym przypadku $(p_0)_{kr} = (p_0)_{gr}$, a więc konstrukcja przystosuje się przy takich programach obciążania⁵⁾, gdy tylko $p_0 \leq \frac{(p_0)_{gr}}{m}$.

III. Można postawić pytanie o wyznaczanie $(p_0)_{gr}$ w dowolnym ograniczonym zbiorze obciążeń Ω , gdzie przez $(p_0)_{gr}$ w zbiorze obciążeń będziemy rozumieć minimalną wartość

⁵⁾ Można je nazwać *prostymi programami obciążania*.

$(p_0)_{gr}$ dla wszystkich elementów zbioru Ω . Z twierdzeń o zniszczeniu plastycznym [3, 4] wynika, że jeżeli istnieje taki szczególny rozkład momentów własnych $\varrho(x)$, że na każdym etapie dowolnego programu ze zbioru Ω nie jest naruszony warunek plastyczności, to $p_0 \leq (p_0)_{gr}$ w zbiorze Ω .

Poszukiwanym rozwiązaniem $(p_0)_{gr}$ w zbiorze obciążeń Ω jest największa wartość parametru p_0 , dla której istnieją jeszcze takie dwa szczególne rozkłady $\varrho_1(x)$ i $\varrho_2(x)$ momentów własnych w konstrukcji, że dla każdego x spełnione są nierówności

$$(c) \quad \begin{aligned} \varrho_1(x) + p_0 \overline{\mathcal{M}}_{(x)}^{\max} &\leq M_{gr}(x), \\ \varrho_2(x) + p_0 \overline{\mathcal{M}}_{(x)}^{\min} &\geq -M_{gr}(x), \end{aligned}$$

ponieważ dla ustalonego x ekstremalne w zbiorze Ω momenty sprężyste $\mathcal{M}_{(x)}^{\max}$ i $\mathcal{M}_{(x)}^{\min}$ na pewno nie powstają na tym samym etapie programu obciążenia.

Można uważać, że zagadnienie określenia $(p_0)_{gr}$ w zbiorze Ω jest szczególnym przypadkiem problemu przystosowywania się, gdy ograniczyć się tylko do programów prostych (z których każdy utworzony jest w ten sposób, że ustaloną funkcję $p(x) \in \Omega$ mnożymy przez liczbę zależną od czasu). Podane warunki (c) są słabsze niż warunki przystosowania się w ogólnym przypadku, więc $(p_0)_{kr} \leq (p_0)_{gr}$.

5. Ogólne twierdzenie o przystosowywaniu się belek

Do tego miejsca zakładaliśmy konsekwentnie, że obowiązuje tzw. idealna zależność między momentem zginającym i krzywizną belki (rys. 2). Dla profili rzeczywistych zakładamy bardziej ogólną zależność *moment-krzywizna* (rys. 1). Dla profili tych pewne plastyczne płynięcie może się zdarzyć w skrajnych włóknach belki, bez całkowitego uplastycznienia przekroju. Jakkolwiek nie wpływa to na przyrostowe zniszczenie konstrukcji, to jednak może doprowadzić do pęknięć wskutek przemiennej plastyczności. Warunki przystosowania się konstrukcji z prętów o idealnym przekroju nie wystarczają dla przekrojów rzeczywistych. Poniżej podamy warunki wystarczające do przystosowania się belki o takim przekroju, ostrzejsze niż dla profilu idealnego. Ponieważ nie potrafimy równocześnie podać odpowiednich nowych warunków koniecznych przystosowania się, to teoria traci swój charakter, w którym warunki konieczne i wystarczające wzajemnie się uzupełniały. Nie można więc dla przekrojów rzeczywistych podać rozwiązań zupełnego problemu przystosowywania się, można jedynie oszacować od góry i od dołu wartość $(p_0)_{kr}$.

T w i e r d z e n i e 5. Dla przystosowania się belki o dowolnym przekroju⁶⁾ w ograniczonym zbiorze obciążeń Ω , oprócz warunków podanych w Twierdzeniu 1, wystarczy spełnienie dla każdego x dodatkowego warunku

$$(5.1) \quad m[\mathcal{M}_{(x)}^{\max} - \mathcal{M}_{(x)}^{\min}] \leq \frac{2M_{gr}(x)}{\alpha(x)},$$

gdzie $\alpha > 1$ jest współczynnikiem zależnym od kształtu przekroju, $m > 1$ jest współczynnikiem zapasu.

⁶⁾ Zakładamy, że dla belki słuszna jest hipoteza o przegubach plastycznych, warunki obciążenia muszą być więc takie, aby występowało płaskie zginanie.

Współczynnik α zdefiniowany jest następująco:

$$\alpha = \frac{\frac{M_{gr}}{M_s}}{1 - \frac{M_{gr}}{M_s} + \frac{M^*}{M_s}},$$

gdzie M^* oznacza moment zginający, któremu (przy obciążaniu od stanu naturalnego) odpowiada taki rozkład naprężeń w przekroju belki, że granica strefy uplastycznienia osiąga właśnie środek ciężkości przekroju.

1°. Dla przekroju idealnego mamy $M^* = M_s = M_{gr}$ i stąd $\alpha = 1$. Dodatkowy warunek (5.1) ma wówczas postać

$$m[\mathcal{M}_{(x)}^{\max} - \mathcal{M}_{(x)}^{\min}] \leq 2M_{gr}(x).$$

Warunek ten jest nieistotny, gdyż jak łatwo sprawdzić, jest tożsamościowo spełniony, gdy tylko są spełnione założenia Twierdzenia 1.

2°. Dla przekroju rzeczywistego o dwóch osiach symetrii mamy $M^* = M_{gr} > M_s$ i stąd $\alpha = M_{gr}/M_s$. Dodatkowy warunek $m(\mathcal{M}_{(x)}^{\max} - \mathcal{M}_{(x)}^{\min}) = 2M_s$ jest znany [2, 3], ale przy $m = 1$.

D o w ó d T w i e r d z e n i a 5. Dowód przeprowadzimy dla jednowymiarowego stanu naprężeń, przy założeniu materiału sprężysto-idealnie plastycznego. Całkowite odkształcenia przedstawimy w postaci sumy odkształceń sprężystych i plastycznych

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon'';$$

wtedy

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}''.$$

Jeżeli σ i ε są rzeczywistymi naprężeniami i odkształceniami na danym etapie programu obciążania, to odpowiedni stan naprężeń własnych jest określony jako

$$\sigma^r = \sigma - \sigma^e,$$

gdzie σ^e jest odpowiednim naprężeniem dla materiału idealnie liniowo-sprężystego.

W pierwszej części dowodu wykażemy, że jeżeli można znaleźć taki ustalony rozkład $\bar{\sigma}^r$ naprężeń własnych w belce, że w każdym punkcie belki będzie spełniona nierówność (przy $m > 1$)

$$(d) \quad -\frac{\sigma_{pl}}{m} \leq \bar{\sigma}^r + \sigma^e \leq \frac{\sigma_{pl}}{m}$$

dla wszystkich σ^e , które mogą być osiągnięte przy danych warunkach obciążania, to belka przystosuje się, czyli przy dowolnym nieskończonym programie obciążania całkowita praca plastyczna będzie ograniczona.

Rozpatrujemy energię sprężystą odkształcenia dla naprężeń własnych ($\sigma^r - \bar{\sigma}^r$)

$$(e) \quad \mathcal{F} = \int_V \frac{1}{2E} (\sigma^r - \bar{\sigma}^r)^2 dV.$$

Pokażemy, że $\mathcal{F} = \text{const}$, gdy nie zachodzi plastyczne płynięcie i maleje, gdy prędkość odkształceń plastycznych jest różna od zera.

Różniczkując (e) względem czasu t otrzymujemy

$$\dot{\mathcal{F}} = \int_V \frac{\dot{\sigma}^r}{E} (\sigma^r - \bar{\sigma}^r) dV.$$

Uwzględniając, że

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}^r}{E} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\dot{\sigma}^e}{E} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}'' - \dot{\varepsilon}^e, \\ \sigma^r - \bar{\sigma}^r &= \sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e), \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$(f) \quad \dot{\mathcal{F}} = \int_V \{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e) [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] - \dot{\varepsilon}'' [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)]\} dV.$$

Należy podkreślić, że ε jest rzeczywistym odkształceniem, a ε^e jest odkształceniem, jakie mogłoby istnieć w tej samej konstrukcji, lecz wykonanej z materiału idealnie liniowo-sprężystego.

Oba pola odkształceń są więc związane z pewnymi polami przemieszczeń u i u^e ,

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon^e = \frac{\partial u^e}{\partial x},$$

stąd ich różnica jest również związana z pewnym polem przemieszczeń

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e = \frac{\partial}{\partial x} (u - u^e).$$

Całka z pierwszego składnika sumy w nawiasie klamrowym (f) jest równa pracy sił zewnętrznych, będących w równowadze z $[\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)]$, wykonanej na pochodnej czasowej pola przemieszczeń $(u - u^e)$. Ponieważ oba pola naprężeń: σ i $(\bar{\sigma}^r + \sigma^e)$ są w równowadze z takimi samymi obciążeniami zewnętrznymi, więc

$$\int_V (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e) [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] dV = 0;$$

stąd

$$\dot{\mathcal{F}} = - \int_V [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' dV.$$

Jeżeli $\dot{\varepsilon}'' > 0$ to $\sigma = \sigma_{pl}$. Korzystając z założenia (d), że

$$\bar{\sigma}^r + \sigma^e < \sigma_{pl},$$

otrzymujemy

$$[\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' > 0.$$

Analogicznie, gdy $\dot{\varepsilon}'' < 0$, to $\sigma = -\sigma_{pl} < \bar{\sigma}^r + \sigma^e$ i również w tym przypadku mamy

$$[\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' > 0.$$

Ostatnią możliwością jest $\dot{\varepsilon}'' = 0$. W każdym przypadku mamy więc

$$[\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\varepsilon}'' \geq 0,$$

skąd zawsze

$$\dot{\mathcal{F}} \leq 0.$$

\mathcal{F} maleje, gdy tylko zachodzi plastyczne płynięcie. Ponieważ \mathcal{F} jest oczywiście nieujemne, więc może albo osiągnąć zero, albo pewną wartość dodatnią⁷⁾.

Pokażemy, że całkowita praca odkształceń plastycznych jest ograniczona dla dowolnego nieskończonego programu obciążenia. Uwzględniając, że $\dot{\mathcal{F}} \leq 0$, mamy

$$\left| \int_0^{\infty} \dot{\mathcal{F}} \delta t \right| = |\mathcal{F}(\infty) - \mathcal{F}(0)| \leq \mathcal{F}(0) \leq \int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV$$

lub

$$\int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV \geq \int_0^{\infty} \int_V [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\epsilon}'' dV \delta t.$$

W ostatnim kroku uwzględniono, że zawsze

$$[\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\epsilon}'' \geq 0.$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\dot{\epsilon}'' > 0$. Wtedy

$$\sigma = \sigma_{pl} \quad \text{oraz} \quad [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] > 0.$$

Uwzględniając założenia (d), otrzymujemy

$$\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) = \sigma_{pl} - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) \geq \sigma_{pl} - \frac{1}{m} \sigma_{pl} = \frac{m-1}{m} \sigma_{pl}.$$

W przypadku, gdy $\dot{\epsilon}'' < 0$ mamy

$$\sigma = -\sigma_{pl} \quad \text{oraz} \quad [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] < 0.$$

Uwzględniając założenia (d) otrzymujemy

$$\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) = -\sigma_{pl} - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e) \leq -\sigma_{pl} + \frac{1}{m} \sigma_{pl} = -\frac{m-1}{m} \sigma_{pl}.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie, że w każdym przypadku

$$\int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV \geq \int_0^{\infty} \int_V [\sigma - (\bar{\sigma}^r + \sigma^e)] \dot{\epsilon}'' dV \delta t \leq \frac{m-1}{m} \int_0^{\infty} \int_V \sigma_{pl} \dot{\epsilon}'' dV \delta t.$$

Ostatnia całka po prawej stronie jest całkowitą pracą plastyczną dysypowaną w dowolnym, nieskończonym programie obciążania.

W konkluzji otrzymujemy więc, że gdy są spełnione założenia (d), to całkowita praca plastyczna dysypowana w dowolnym, nieskończonym programie obciążania, jest ograniczona

$$W_p = \int_0^{\infty} \int_V \sigma_{pl} \dot{\epsilon}'' dV \delta t \leq \frac{m}{m-1} \int_V \frac{(\bar{\sigma}^r)^2}{2EJ} dV,$$

co kończy pierwszą część dowodu twierdzenia.

⁷⁾ HODGE [3] na tym kończy pierwszą część dowodu stwierdzając, że w dowolnym programie obciążania nastąpi skończone plastyczne płynięcie.

W drugiej części dowodu pokażemy, że jeżeli są spełnione założenia twierdzenia, to dla każdego przekroju istnieje rozkład naprężeń własnych $\bar{\sigma}$ zapewniający przystosowanie się, a więc spełniający warunki (d).

Dowód przeprowadzimy dla belki o przekroju z jedną tylko płaszczyzną symetrii, będącą płaszczyzną zginania⁸⁾ (dla przekroju o dwóch płaszczyznach symetrii dowód został podany przez HODGE'A [3], dla takich przekrojów wystarczy przyjąć $\alpha = M_{gr}/M_s$). W przypadku przekroju o jednej osi symetrii, hipoteza o sprężystym odciążaniu obowiązuje, jak wiadomo, jedynie w pewnym ograniczonym zakresie. Rozpatrując cykl obciążania od stanu naturalnego stwierdziliśmy (na wstępie niniejszej pracy), że sprężyste odciążanie zachodzi jedynie od takich stanów naprężeń, w których strefa uplastycznienia nie przekroczyła jeszcze osi środków ciężkości przekrojów. Gdy przekrój jest odciążany od momentów co do bezwzględnej wartości większych, wywołujących uplastycznienie w punktach przekroju leżących między osią środków ciężkości a osią dzielącą przekrój poprzeczny na połowy, to w punktach tych może nastąpić wtórne plastyczne płynięcie przy odciążaniu (rys. 3). Z tego powodu istniało nawet przekonanie, że problemu przystosowywania się belek o przekroju z jedną osią symetrii wogóle nie można formułować w momentach lecz należy wprost rozpatrywać rozkłady naprężeń [2].

Okazuje się, że również w tym przypadku można podać pewne warunki wystarczające dla przystosowania się, wyrażone w momentach zginających. Zakładamy, że każdy przekrój belki został obciążony do największego co do bezwzględnej wartości momentu zginającego, pomnożonego przez współczynnik zapasu $m > 1$ i następnie odciążony do hipotetycznego momentu własnego ϱ , zapewniającego przystosowanie się, a więc takiego, że

$$(g) \quad \begin{aligned} \varrho + m\mathcal{M}^{\max} &\leq M_{gr}, \\ \varrho + m\mathcal{M}^{\min} &\geq -M_{gr}. \end{aligned}$$

Zakładamy, że belka znajdowała się początkowo w stanie naturalnym, można więc na każdym etapie aktywnego procesu podać jednoznaczny rozkład naprężeń. Dla ustalenia uwagi rozpatrzmy przekrój, w którym największym co do bezwzględnej wartości momentem jest \mathcal{M}^{\max} . Oznaczmy przez M^* moment, któremu (przy obciążaniu od stanu naturalnego) odpowiada taki rozkład naprężeń w przekroju belki, że granica strefy uplastycznienia osiągnęła właśnie oś środków ciężkości.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy

$$m\mathcal{M}^{\max} \leq M^*,$$

obowiązuje więc jeszcze hipoteza o sprężystym odciążaniu. Po odciążeniu do momentu ϱ można więc jednoznacznie wskazać rozkład $\bar{\sigma}$ naprężeń własnych w przekroju taki, że przekrój może być ponownie obciążony do momentu $m\mathcal{M}^{\max}$ w sposób sprężysty. Natomiast przy obciążaniu do momentu $m\mathcal{M}^{\min}$ również nie będzie odkształceń plastycznych, gdy tylko maksymalny zakres zmian momentów zginających nie przekroczy $2M_s$, ze współczynnikiem zapasu m . Wystarczy więc w założeniu twierdzenia (5.1) przyjąć w tym przypadku $\alpha = M_{gr}/M_s$.

⁸⁾ Dowód jest również słuszny w ogólniejszym przypadku przekroju bez płaszczyzn symetrii, gdy zachodzi płaskie zginanie.

Przejdziemy teraz do przypadku, gdy $m\mathcal{M}^{\max} > M^*$. Wprowadzimy oznaczenie $\Delta r = m\mathcal{M}^{\max} - M^*$.

Przyjmujemy, że przed obciążaniem istnieje w rozpatrywanym przekroju moment własny $r_0 = -\Delta r$, któremu odpowiada rozkład naprężeń własnych σ_0^r zmieniających się liniowo na wysokości belki

$$\sigma_0^r = -\frac{\Delta r}{J} z.$$

Gdy od takiego stanu będziemy obciążać przekrój do momentu $m\mathcal{M}^{\max}$, to sumaryczny moment zginający w przekroju będzie równy M^* . Po sprężystym odciążeniu do momentu własnego ρ , spełniającego warunki (g), jest określony jednoznacznie pewien rozkład naprężeń $\tilde{\sigma}^r$ odpowiadający temu momentowi własnemu.

Przekrój może być obciążony ponownie momentem $m\mathcal{M}^{\max}$ w sposób sprężysty, ponieważ odciążanie od tego samego momentu zginającego do ρ było sprężyste, a więc powtarzalne. Natomiast przy obciążaniu momentem przeciwnego znaku przekrój pozostanie w zakresie sprężystym, gdy będzie spełniony warunek (rys. 4)

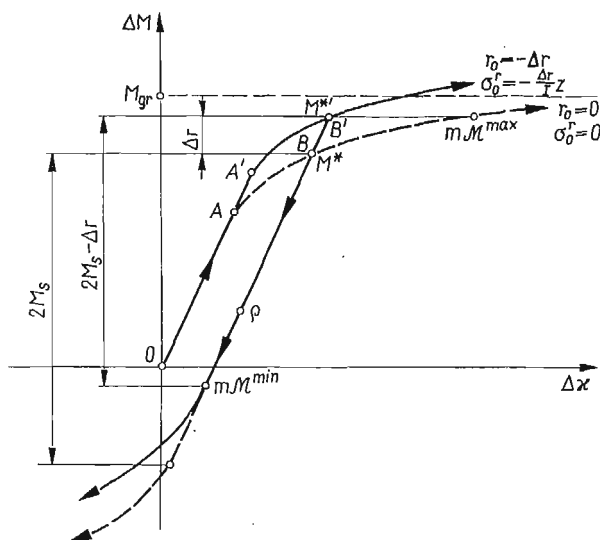
$$m\mathcal{M}^{\max} - m\mathcal{M}^{\min} \leq 2M_s - \Delta r^{\max},$$

przy czym oczywiście $\Delta r^{\max} = M_{gr} - M^*$.

Po przekształceniach otrzymujemy założenie (5.1), przy czym

$$\alpha = \frac{\frac{M_{gr}}{M_s}}{1 - \frac{M_{gr}}{M_s} + \frac{M^*}{M_s}}.$$

Współczynnik ten jest więc zależny od kształtu przekroju belki.



Rys. 4

Otrzymaliśmy więc wniosek, że gdy są spełnione założenia twierdzenia, to można wskazać takie pole naprężeń własnych w konstrukcji $\tilde{\sigma}^r = \frac{\bar{\sigma}^r}{m}$, że w każdym punkcie będzie spełniona nierówność

$$-\frac{\sigma_{pl}}{m} \leq \tilde{\sigma}^r + \sigma^e \leq \frac{\sigma_{pl}}{m}$$

dla wszystkich σ^e , które mogą być osiągnięte przy danych warunkach obciążania, co kończy dowód twierdzenia.

Literatura cytowana w tekście

1. Praca zbiorowa, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
2. B. G. NEAL, *The plastic methods of structural analysis*, Chapman and Hall Ltd., London 1963.
3. P. G. НОДGE, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1959.
4. В. Т. Койтер, *Общие теоремы теории упруго-пластических сред*, Изд. Ин. Лит., Москва 1961 (tłumaczenie z angielskiego).

Резюме

ТЕОРИЯ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ БАЛОК

В работе рассматриваются стержневые конструкции, подвергнутые изгибу. Считается, что пластическое состояние в сечении достигается под действием изгибающего момента (влиянием других внутренних усилий пренебрегаем). Предполагается справедливой гипотеза пластических шарниров. В основу первой части работы заложена идеальная зависимость изгибающий момент-кривизна.

Основное отличие данной работы от существующей теории приспособляемости балок заключается в другом математическом определении пластического приспособления конструкций во множестве нагрузок. Это дало возможность провести правильное доказательство достаточных условий приспособляемости. Доказательство необходимых условий не является тривиальным и также содержится в работе.

Вводится определение критической «нагрузки» с точки зрения приспособляемости в ограниченном множестве нагрузок и приводятся так называемые статические и кинематические теоремы о приспособляемости. В основу теории входят: обычный упругий анализ конструкции и метод предельных нагрузок.

В работе представлены достаточные условия приспособляемости балок с произвольным поперечным сечением выраженные как функции от изгибающих моментов.

Summary

SHAKE-DOWN THEORY OF BEAMS

The beam structures considered in the paper are subject mainly to bending moments, the influence of other stresses on the plastic yielding of the cross-section being neglected. The plastic hinges hypothesis is assumed to hold, and the first part of the paper is based upon the ideal *moment-curvature* relation.

The main difference between the presented approach and the earlier theories consists in the introduction of a different definition of plastic shake-down of structures in the set of loadings, what made it possible

to derive the sufficient conditions of shake-down. With the new definition, the derivation of the necessary condition becomes non-trivial; the corresponding proof is given in the paper.

The definition of *critical loadings* with respect to the shake-down phenomenon in a bounded set of loadings is also introduced, and the so-called statical and kinematical shakedown theorems are given. Particular cases of the presented theory are the conventional, elastic structural analysis and the limit analysis.

The sufficient conditions of shake-down for beams of arbitrary cross-section expressed in terms of bending moments have been given.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 stycznia 1970 r.

GEŚTE HEKSAGONALNE SIATKI SPRĘŻYSTE

PIOTR K L E M M (ŁÓDŹ), CZESŁAW W O Ź N I A K (WARSZAWA)

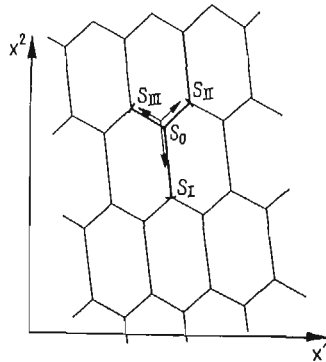
Modele ciągle gęstych i regularnych siatek sprężystych o doskonale sztywnych węzłach zostały określone dla różnych rodzajów siatek, [1, 2, 3]. Dotychczasowe opracowania, których przegląd zawiera książka [3], nie obejmują jednak ważnej w zastosowaniach technicznych siatki heksagonalnej. Schemat takiej siatki przedstawia rys. 1.

Celem tej pracy jest wyprowadzenie podstawowych równań modelu ciągłego takiej siatki. Modele ciągle różnych gęstych i regularnych siatek, utworzonych ze sprężystych prętów sztywno połączonych w węzłach, są opisywane równaniami anizotropowego ośrodka Cosseratów z pewną wewnętrzną «włóknistą» strukturą [1]. Modele ciągle poszczególnych siatek różnią się między sobą tylko budową tensorów sztywności sprężystej, występujących w związkach konstytutywnych. Tym samym rozważania tej pracy dotyczą w pierwszym rzędzie budowy potencjału sprężystego rozpatrywanych siatek, z którego wyprowadzamy związki konstytutywne oraz, przy wykorzystaniu podejścia wariacyjnego, także równania równowagi. Przyjmujemy, że wszystkie pręty są pryzmatyczne, a każde trzy pręty schodzące się w jednym węźle mają wspólną płaszczyznę symetrii sprężystej. Zakładamy ponadto, że odkształcenia są małe. Oba powyższe założenia prowadzą do rozdzielenia związków między stanem napięcia a odkształcenia na niezależne równania stanu «tarczowego» i «płytkowego». W związku z tym, w pierwszym punkcie pracy rozpatrujemy tarcze siatkowe, a w drugim — płyty siatkowe przyjmując, że siatka jest kształtowana na płaszczyźnie. Siatki heksagonalne kształtowane na dowolnej powierzchni omawiamy w trzecim punkcie pracy. Zakładamy jednocześnie, że są spełnione wszystkie założenia dotyczące stosowalności modelu ciągłego siatki [3].

1. Tarcze siatkowe

Każdą siatkę heksagonalną możemy traktować jako złożoną z wycinków w kształcie litery Y (rys. 1), połączonych ze sobą w punktach, które nazwijmy węzłami ograniczającymi (przekroje przy tych węzłach oznaczono na rys. 1 przez S_A , $A = I, II, III$). Oprócz węzłów ograniczających, siatka zawiera także po jednym węźle w obrębie każdego wycinka (węzeł S_0 na rys. 1); węzły te nazwijmy węzłami pośrednimi. Celem określenia, które węzły są ograniczające, a które pośrednie — wystarczy wyróżnić jeden «typowy» wycinek siatki,

co jest równoznaczne z podziałem całej siatki na rozłączne wycinki, powiązane węzłami ograniczającymi. Istnieją dwa sposoby podziału rozważanej siatki na wycinki (węzły ograniczające przy jednym podziale stają się węzłami pośrednimi przy drugim i odwrotnie); w dalszym ciągu przyjmujemy jako dany jeden z nich. Płaszczyznę π , na której jest kształtowana siatka, parametryzujemy prostokątnym układem współrzędnych kartezjańskich x^k ¹⁾. Rozpatrując najpierw tarcze siatkowe, płaszczyznę π traktujemy jako płaszczyznę



Rys. 1

obciążenia. Ponieważ jest to z założenia płaszczyzna symetrii sprężystej tarczy, przeto w ramach teorii I rzędu możemy przyjąć, że wszystkie węzły siatki doznają przesunięć i obrotów w płaszczyźnie π [3]. Traktując układ jako regularny [3], wprowadzimy różniczkowalne funkcje $u_K = u_K(x^1, x^2)$, $v = v(x^1, x^2)$, które:

1) w punktach płaszczyzny π odpowiadającym węzłom ograniczającym przyjmują wartości kolejno równe przesunięciom tych węzłów (w kierunku osi x^k) oraz ich kątom obrotu,

2) w każdym sześciokącie odpowiadającym jednemu «oczku» siatki możemy z wystarczającym przybliżeniem traktować jako liniowe.

Wprowadzimy następnie różniczkowalne funkcje $u_K^* = u_K^*(x^1, x^2)$, $v^* = v^*(x^1, x^2)$, które w analogiczny sposób opisują składowe wektora przesunięcia oraz obrót pośrednich węzłów siatki. Funkcje u_K^* i v^* wyrazimy przez funkcje u_K i v oraz ich pochodne. W tym celu rozpatrzmy typowy wycinek siatki (rys. 1). Składowe wektora przesunięcia i obroty $u_K(S_A)$, $v(S_A)$ przekrojów S_A przy węzłach ograniczających wycinek możemy przyjąć jako równe²⁾

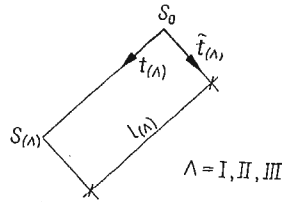
$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_K(S_A) &= u_K + t_{(A)}^L l_{(A)} u_{K,L}, \\ v(S_A) &= v + t_{(A)}^L l_{(A)} v_{,L}, \end{aligned}$$

przy czym $t_{(A)}^L$ są składowymi wektorów jednostkowych $t_{(A)}$ oraz $l_{(A)}$ są odległościami węzła ograniczającego od węzła pośredniego (rys. 2). Wartości funkcji u_K , v i ich pochodnych we wzorze (1.1) i dalej należy przyjmować w punkcie S_0 . Oznaczmy przez $N_{(A)}$, $Q_{(A)}$, $K_{(A)}$ kolejno siłę podłużną, siłę poprzeczną oraz moment zginający, działające w przekroju

¹⁾ Wskaźniki K, L, M przebiegają ciąg 1, 2 — obowiązuje dla tych wskaźników konwencja sumacyjna.

²⁾ Wskaźnik A przebiega ciąg I, II i III, pochodną cząstkową oznaczamy przecinkiem.

przy węźle pośrednim S_0 na ten węzeł. Oznaczmy następnie przez $E_{(A)}$ $A_{(A)}$ i $E_{(A)}$ $J_{(A)}$ kolejno sztywność podłużną i sztywność zginania pręta S_0-S_A . Z uwagi na regularność układu wszystkie te wielkości traktujemy jako różniczkowalne funkcje argumentów x^1, x^2 [3].



Rys. 2

Zakładając jednorodność i liniową sprężystość każdego pręta S_0-S_A mamy (porównaj rys. 2)

$$N_{(A)} = \frac{E_{(A)}A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K [u_K(S_{(A)}) - u_K^*],$$

$$Q_{(A)} = -\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[\frac{v(S_{(A)}) + \tilde{v}}{2} - \tilde{t}_{(A)}^K \frac{u_K(S_A) - u_K^*}{l_{(A)}} \right],$$

$$\check{K}_{(A)} = -\frac{2E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \left[v(S_A) + 2\tilde{v} - 3\tilde{t}_{(A)}^K \frac{u_K(S_A) - u_K^*}{l_{(A)}} \right], \quad \tilde{t}_{(A)}^K \equiv \varepsilon_L^K t_{(A)}^L,$$

co po uwzględnieniu (1.1) prowadzi do

$$N_{(A)} = E_{(A)}A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{E_{(A)}A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta u_K,$$

$$Q_{(A)} = \frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \varkappa_K -$$

$$(1.2) \quad -\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta v,$$

$$\hat{K}_{(A)} = -2E_{(A)}J_{(A)} t_{(A)}^K \varkappa_K + \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K -$$

$$-\frac{4E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v,$$

gdzie oznaczono

$$(1.3) \quad \gamma_{LK} \equiv u_{K,L} + \varepsilon_{KL} v,$$

$$\varkappa_K \equiv v_{,K}$$

oraz

$$(1.4) \quad \Delta u_K = u_K^* - u_K,$$

$$\Delta v = \tilde{v} - v.$$

Warunki równowagi węzła pośredniego S_0 mają postać

$$(1.5) \quad \sum_A (t_{(A)}^M N_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^M Q_{(A)}) + b_*^M = 0,$$

$$\sum_A \check{K}_{(A)} + h_* = 0,$$

w której b_*^M, h_* są zewnętrznymi siłami przyłożonymi do tego węzła. Podstawiając do (1.5) prawe strony wyrażeń (1.2), otrzymamy układ trzech równań dla trzech różnic (1.4)

$$(1.6) \quad \sum_A \left(\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K + \frac{E_{(A)}A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K \right) \Delta u_K + \sum_A \left(\frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \right) \Delta v =$$

$$= \sum_A t_{(A)}^L \left(E_{(A)}A_{(A)} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K \right) \gamma_{LK} - \sum_A \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \varkappa_K + b_*^M,$$

$$\sum_A \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K + \sum_A \frac{4E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v = - \sum_A 2E_{(A)}J_{(A)} t_{(A)}^K \varkappa_K +$$

$$+ \sum_A \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} + h_*.$$

Wprowadzimy symetryczną macierz 3×3 , podzieloną na cztery bloki

$$\begin{bmatrix} D_{KL}, & D_K \\ D_K, & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_2 \\ D_1 & D_2 & D \end{bmatrix}$$

oraz zdefiniowaną związkami

$$(1.7) \quad \begin{bmatrix} D_{KL}; & D_K \\ D_K; & D \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{l} \sum_A (12E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-3} \tilde{t}_{(A)}^K \tilde{t}_{(A)}^L + E_{(A)}A_{(A)}l_{(A)}^{-1} t_{(A)}^K t_{(A)}^L); \quad \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^K \\ \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^K \quad ; \quad \sum_A 4E_{(A)}J_{(A)}l_{(A)}^{-1} \end{array} \right]^{-1}.$$

Rozwiązanie układu równań (1.6) napiszemy teraz w postaci

$$(1.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta u_K \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{KL}; & D_K \\ D_K; & D \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \sum_A t_{(A)}^M (E_{(A)}A_{(A)} t_{(A)}^L t_{(A)}^N + 12E_{(A)}J_{(A)} l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^L \tilde{t}_{(A)}^N) \\ \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^N t_{(A)}^M \end{bmatrix} \gamma_{MN} - \begin{bmatrix} \sum_A 6E_{(A)}J_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^L t_{(A)}^M \\ \sum_A 2E_{(A)}J_{(A)} t_{(A)}^M \end{bmatrix} \varkappa_M + \begin{bmatrix} b_*^L \\ h_* \end{bmatrix} \right),$$

wyrażając tym samym Δu_K i Δv przez składowe stanu odkształcenia (1.3) oraz przez obciążenie węzłów pośrednich.

Oznaczmy przez $P_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$ kolejno siłę podłużną, siłę poprzeczną, moment zginający działające w płaszczyźnie $\pi(v)$ w przekroju połowiącym pręt $S_0 - S_A$ oraz zorientowanym dodatnim zwrotem wektora t_A . Mamy oczywiście $P_{(A)} = N_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)} = Q_{(A)}$ oraz $\check{M}_{(A)} = \check{K}_{(A)} - 0,5 Q_{(A)} l_{(A)}$, co zgodnie z (1.2) prowadzi do³⁾

$$(1.9) \quad \begin{aligned} P_{(A)} &= E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta u_K, \\ \tilde{P}_{(A)} &= \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \varkappa_K - \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta u_K - \\ &\quad - \frac{6 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta v, \\ \check{M}_{(A)} &= E_{(A)} J_{(A)} t_{(A)}^K \varkappa_K - \frac{E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v. \end{aligned}$$

Podstawiając do (1.9) wyrażenia dla Δu_K i Δv dane związkami (1.8) oraz oznaczając

$$(1.10) \quad \begin{aligned} R_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left[D_{SN} \sum_{d=I}^{III} t_{(d)}^K \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{12 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L \right) + D_S \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right], \\ R_{(A)}^K &\equiv \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left(D_{SL} \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K + D_S \sum_{d=I}^{III} 2 E_{(d)} J_{(d)} t_{(d)}^K \right), \\ P_{(A)}^* &\equiv - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{t_{(A)}} t_{(A)}^K (D_{KL} b_K^L + D_K h_K), \\ \check{R}_{(A)}^{KL} &\equiv \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \tilde{t}_{(A)}^L - \frac{12 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^S \left[D_{SN} \sum_{d=I}^{III} t_{(d)}^K \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{12 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L \right) + D_S \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right] - \\ &\quad - \frac{6 E_{(A)} J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[D_N \sum_{d=I}^{III} t_{(d)}^K \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L + \frac{12 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L \right) + \right. \\ &\quad \left. + D \sum_{d=I}^{III} \frac{6 E_{(d)} J_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right], \end{aligned}$$

³⁾ Gdy $\Delta u^K = 0$ i $\Delta v = 0$, to wyrażenie dla $\tilde{P}_{(A)}$ nie sprowadza się jednak do podanego w [3] [wzór (9.20)], gdyż w niniejszej pracy wartości składowych stanu przemieszczenia i odkształcenia należy obliczać dla współrzędnych punktu skrajnego pręta (S_0), a nie w jego połowie, jak w [3].

$$\begin{aligned}
\check{R}_{(A)}^K &\equiv -\frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \check{t}_{(A)}^S \left[D_{SL} \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K + \right. \\
&\quad \left. + D_S \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} 2E_{(\Delta)}^1 J_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K \right] - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[D_L \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K + \right. \\
&\quad \left. + D \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} 2E_{(\Delta)} J_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K \right], \\
\check{P}_{(A)}^* &\equiv -\frac{12E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^3} \check{t}_{(A)}^K (D_{KL} b_*^L + D_K h_*) - \frac{6E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}^2} (D_L b_*^L + D h_*), \\
(1.10) \quad \check{S}_{(A)}^K &\equiv E_{(A)} J_{(A)} t_{(A)}^K + \frac{E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \left(D_L \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K + D \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} 2E_{(\Delta)} J_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K \right), \\
\check{S}_{(A)}^{KL} &\equiv -\frac{E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} \left[D_N \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} t_{(\Delta)}^K \left(E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^L + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{12E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^N \check{t}_{(\Delta)}^L \right) + D \sum_{\Delta=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(\Delta)}J_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K \right], \\
M_{(A)}^* &\equiv -\frac{E_{(A)}J_{(A)}}{l_{(A)}} (D_L b_*^L + D h_*),
\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
(1.11) \quad P_{(A)} &= R_{(A)}^{KL} \gamma_{KL} + R_{(A)}^K \varkappa_K + P_{(A)}^*, \\
\check{P}_{(A)} &= \check{R}_{(A)}^{KL} \gamma_{KL} + \check{R}_{(A)}^K \varkappa_K + \check{P}_{(A)}^*, \\
\check{M}_{(A)} &= \check{S}_{(A)}^K \varkappa_K + \check{S}_{(A)}^{KL} \gamma_{KL} + \check{M}_{(A)}^*.
\end{aligned}$$

Oznaczmy przez σ' potencjał sprężysty tarczy siatkowej. Przyjmując, że tarcza siatkowa jest obciążona tylko w węzłach, dla potencjału sprężystego otrzymamy wyrażenie

$$\begin{aligned}
(1.12) \quad \sigma' &= \frac{1}{F} \sum_A \left(\int_{+0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{(\check{M}_{(A)} - x\check{P}_{(A)})^2}{2E_{(A)}J_{(A)}} dx + \int_{-0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{P_{(A)}^2}{2E_{(A)}A_{(A)}} dx \right) = \\
&= \frac{1}{F} \sum_A \left(\frac{\check{M}_{(A)}^2 l_{(A)}}{2E_{(A)}J_{(A)}} + \frac{\check{P}_{(A)}^2 l_{(A)}^3}{24E_{(A)}J_{(A)}} + \frac{P_{(A)}^2 l_{(A)}}{2E_{(A)}J_{(A)}} \right),
\end{aligned}$$

w którym F jest polem sześciokąta stanowiącego «oczko» siatki oraz w którym za $P_{(\Delta)}$, $\tilde{P}_{(\Delta)}$, $\check{M}_{(\Delta)}$, należy przyjąć wyrażenia (1.11). Po rozpisaniu prawej strony (1.12) zgodnie z (1.11) oraz po wprowadzeniu następujących tensorów sztywności sprężyste

$$\begin{aligned}
 A^{KLMN} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} \left(\frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \check{S}_{(\Delta)}^{KL} \check{S}_{(\Delta)}^{MN} + \frac{l_{(\Delta)}^3}{12 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \tilde{R}_{(\Delta)}^{KL} \tilde{R}_{(\Delta)}^{MN} + \frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} R_{(\Delta)}^{KL} R_{(\Delta)}^{MN} \right), \\
 (1.13) \quad C^{KL} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} \left(\frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \check{S}_{(\Delta)}^K \check{S}_{(\Delta)}^M + \frac{l_{(\Delta)}^3}{12 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \tilde{R}_{(\Delta)}^K \tilde{R}_{(\Delta)}^M + \frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} R_{(\Delta)}^K R_{(\Delta)}^M \right), \\
 'B^{KLM} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} \left(\frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \check{S}_{(\Delta)}^{KL} \check{S}_{(\Delta)}^M + \frac{l_{(\Delta)}^3}{12 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \tilde{R}_{(\Delta)}^{KL} \tilde{R}_{(\Delta)}^M + \frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} R_{(\Delta)}^{KL} R_{(\Delta)}^M \right),
 \end{aligned}$$

oraz poniższych wielkości charakteryzujących obciążenia węzłów pośrednich

$$\begin{aligned}
 p_*^{KL} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} \left(\frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \check{S}_{(\Delta)}^{KL} \check{M}_{(\Delta)}^* + \frac{l_{(\Delta)}^3}{12 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \tilde{R}_{(\Delta)}^{KL} \tilde{P}_{(\Delta)}^* + \frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} R_{(\Delta)}^{KL} P_{(\Delta)}^* \right), \\
 (1.14) \quad m_*^K &\equiv \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} \left(\frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \check{S}_{(\Delta)}^K \check{M}_{(\Delta)}^* + \frac{l_{(\Delta)}^3}{12 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} \tilde{R}_{(\Delta)}^K \tilde{P}_{(\Delta)}^* + \frac{l_{(\Delta)}}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} R_{(\Delta)}^K P_{(\Delta)}^* \right), \\
 \sigma'_* &\equiv \frac{1}{F} \sum_{\Delta=I}^{III} \left[\frac{l_{(\Delta)}}{2 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} (\check{M}_{(\Delta)}^*)^2 + \frac{l_{(\Delta)}^3}{24 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}} (\tilde{P}_{(\Delta)}^*)^2 + \frac{l_{(\Delta)}}{2 E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} (P_{(\Delta)}^*)^2 \right],
 \end{aligned}$$

otrzymamy dla potencjału sprężystego wyrażenie

$$(1.15) \quad \sigma' = \frac{1}{2} A_1^{KLMN} \gamma_{KL} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \gamma_{KL} \varkappa_M + \frac{1}{2} C^{KL} \varkappa_K \varkappa_L + p_*^{KL} \gamma_{KL} + m_*^K \varkappa_K + \sigma'_*.$$

Jeżeli węzły pośrednie nie są obciążone, wtedy

$$p_*^{KL} = 0, \quad m_*^K = 0, \quad \sigma'_* = 0.$$

Gdy składowe stanu napięcia p^{KL} , m^K określimy związkami

$$(1.16) \quad p^{KL} \equiv \frac{\partial \sigma'}{\partial \gamma_{KL}}, \quad m^K \equiv \frac{\partial \sigma'}{\partial \varkappa_K},$$

czyli

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad p^{KL} &= A^{KLMN} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \varkappa_M + p_*^{KL}, \\
 m^K &= C^{KL} \varkappa_L + 'B^{MNK} \gamma_{MN} + m_*^K,
 \end{aligned}$$

to warunki równowagi przyjmą postać (por. [3], część I)

$$(1.18) \quad \begin{aligned}
 p^{KL}{}_{,K} + b^L &= 0, \\
 m^K{}_{,K} + \varepsilon_{KLP}{}^{KL} + h &= 0,
 \end{aligned}$$

w której b^L oraz h są funkcjami charakteryzującymi obciążenie węzłów ograniczających.

Określmy teraz związki zachodzące między wprowadzonymi składowymi stanu napięcia p^{KL} , m^K a wielkościami $P_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$. Zgodnie z definicjami (1.16), oraz związkiem (1.12), po oznaczeniu

$$(1.19) \quad \tilde{l}_{(A)} \equiv \frac{F}{l_{(A)}},$$

mamy

$$(1.20) \quad p^{KL} = \sum_{A=I}^{III} \frac{1}{\tilde{l}_{(A)}} \left(\frac{\tilde{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} \tilde{P}_{(A)} + \frac{R_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} A_{(A)}} P_{(A)} + \frac{\check{S}_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} J_{(A)}} \check{M}_{(A)} \right),$$

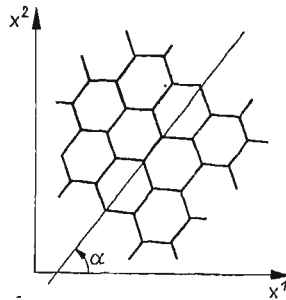
$$m^K = \sum_{A=I}^{III} \frac{1}{\tilde{l}_{(A)}} \left(\frac{\check{S}_{(A)}^K}{K_{(A)} J_{(A)}} \check{M}_{(A)} + \frac{\tilde{R}_{(A)}^K l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} \tilde{P}_{(A)} + \frac{R_{(A)}^K}{E_{(A)} A_{(A)}} P_{(A)} \right).$$

Należy zauważyć, że dla rozpatrywanych tu siatek składowe p^{KL} zależą także od $\check{M}_{(A)}$, a składowe m^K — od $P_{(A)}$ oraz $\tilde{P}_{(A)}$. Jeżeli obciążenia b_*^L i h^* przyłożone do węzłów pośrednich są takie, że $\Delta u_K = 0$ i $\Delta v = 0$, wtedy z (1.20), (1.9) i (1.11) wynika, że

$$\frac{\tilde{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} = \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L, \quad \frac{R_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} A_{(A)}} = t_{(A)}^K t_{(A)}^L, \quad \frac{\check{S}_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} J_{(A)}} = 0,$$

$$\frac{\check{S}_{(A)}^K}{E_{(A)} J_{(A)}} = t_{(A)}^K, \quad \frac{\tilde{R}_{(A)}^K l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} J_{(A)}} = -\frac{l_{(A)}}{2} t_{(A)}^K, \quad \frac{R_{(A)}^K}{E_{(A)} A_{(A)}} = 0,$$

co sprowadza wzory (1.20) do postaci podobnej jak w [3] [por. wzory (9.21) w cytowanej książce oraz ostatni odsyłacz].



Rys. 3

Równania równowagi (1.18), związki geometryczne (1.9) oraz związki między składowymi stanu napięcia i odkształcenia (1.17) tworzą podstawowy układ równań heksagonalnych tarcz siatkowych. Składowe tensorów sztywności sprężystej wyznaczamy na podstawie wzorów (1.13), (1.10) i (1.7). Układ równań dla rozpatrywanych siatek różni się formalnie od układów równań wyprowadzonych oraz omówionych w [3], tylko budową związków (1.17). Natomiast warunki brzegowe dla siatek heksagonalnych przyjmujemy w takiej samej postaci, jak dla siatek rozważanych w [3], w związku z czym nie będziemy ich tu omawiać.

Założmy teraz, że «oczka» siatki są sześciokątami foremnymi, oraz że sztywności wszystkich prętów są takie same. Wtedy

$$l_{(A)} = l, \quad E_{(A)}A_{(A)} = EA, \quad E_{(A)}J_{(A)} = EJ, \quad F = 1,5\sqrt{3}l^2.$$

Oznaczając $\Phi''(\alpha) \equiv \cos\alpha(3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$, $\Phi'(\alpha) \equiv \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$, $\Phi(\alpha) \equiv [\Phi'(\alpha)]^2 + [\Phi''(\alpha)]^2$, $\lambda' \equiv l^2AJ^{-1}$, po przeprowadzeniu rachunku zgodnie z wzorami (1.12), (1.10) i (1.7) otrzymamy

$$(1.21) \quad \begin{aligned} A^{1111} &= A^{2222} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[3(4+\lambda') - \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right], \\ A^{1122} &= A^{2211} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[\lambda' - 12 + \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right], \\ A^{1212} &= A^{2121} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[63 + \lambda' - \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right], \\ A^{2112} &= A^{1221} = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{EJ}{l^3} \left[9 + \lambda' - \frac{(12-\lambda')^2}{12+\lambda'} \Phi(\alpha) \right]; \\ A^{KLLL} &= A^{LKLL} = A^{LLKL} = A^{LLLL} = 0, \quad L \neq K; \\ C^{11} &= C^{22} = \frac{4\sqrt{3}EJ(\lambda'+3)}{3l(\lambda'+12)}, \quad C^{12} = C^{21} = 0; \\ 'B^{111} &= -'B^{122} = -'B^{212} = -'B^{221} = \frac{2\sqrt{3}EJ\lambda'}{l^2(12+\lambda')} \Phi'(\alpha) \\ 'B^{222} &= -'B^{112} = -'B^{121} = -'B^{211} = -\frac{2\sqrt{3}EJ\lambda'}{l^2(12+\lambda')} \Phi''(\alpha) \end{aligned}$$

Pokazany na rys. 3 kąt α można przyjąć jako równy zero. Powyższe zależności są prawdziwe tylko w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich.

2. Płyty siatkowe

Zgodnie z przyjętymi założeniami, w płytach siatkowych stan przemieszczenia węzłów ograniczających opisywać będziemy różniczkowalnymi funkcjami $u = u(x^1, x^2)$, $v_K = v_K(x^1, x^2)$, które: 1) w punktach płaszczyzny π odpowiadającym węzłom ograniczającym są kolejno równe przesunięciom tych węzłów (w kierunku normalnym do π) oraz składowym wektora małego obrotu (w płaszczyznach normalnych do π); 2) w każdym sześciokącie odpowiadającym jednemu «oczku» siatki możemy traktować jako liniowe.

Dla dowolnego typowego wycinka siatki (rys. 3) mamy teraz

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(S_A) &= u + t_{(A)}^L l_{(A)} u_{,L}, \\ v_K(S_A) &= v_K + t_{(A)}^L l_{(A)} v_{K,L}, \end{aligned}$$

gdzie wartości funkcji u , v_K oraz ich pochodnych należy przyjmować w punkcie S_0 . Przesunięcia i składowe wektora małego obrotu pośredniego węzła S_0 tego wycinka oznaczymy przez u^* , v_K^* (rys. 1). Oznaczmy następnie przez $K_{(A)}$, $\tilde{K}_{(A)}$, $\check{Q}_{(A)}$ kolejno moment skręcający, moment zginający i siłę poprzeczną w przekroju przy węźle pośrednim S_0 , działające na ten węzeł w przekroju przywęzłowym S_A . Oznaczając dalej przez $C_{(A)}$, $E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}$ kolejno sztywność skręcania i zginania pręta S_0-S_A , przy analogicznych założeniach, jak w poprzednim punkcie pracy, otrzymamy

$$K_{(A)} = C_{(A)} t_{(A)}^K \frac{v_K(S_A) - v_K^*}{l_{(A)}},$$

$$\tilde{K}_{(A)} = -\frac{2E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \left[\tilde{t}_{(A)}^K (v_K(S_A) + 2v_K^*) + 3 \frac{u(S_A) - u^*}{l_{(A)}} \right],$$

$$\check{Q}_{(A)} = \frac{12E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[\tilde{t}_{(A)}^K \frac{v_K(S_A) + v_K^*}{2} + \frac{u(S_A) - u^*}{l_{(A)}} \right].$$

Oznaczmy

$$(2.2) \quad \Delta v_K \equiv v_K^* - v_K, \quad \Delta u \equiv u^* - u,$$

oraz wprowadźmy składowe stanu odkształcenia płyty siatkowej [3]

$$(2.3) \quad \alpha_{KL} = v_{L,K},$$

$$\gamma_K = u_{,K} + \varepsilon_{KL} v^L.$$

Zgodnie z (2.1) otrzymamy wtedy

$$K_{(A)} = C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \alpha_{LK} - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta v_K,$$

$$(2.4) \quad \tilde{K}_{(A)} = -2E_{(A)}\tilde{J}_{(A)} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \alpha_{LK} - \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta u - \frac{4E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K,$$

$$\check{Q}_{(A)} = \frac{12E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \alpha_{LK} - \frac{12E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \Delta u + \frac{6E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K.$$

Oznaczając przez b_* , h_*^M obciążenie węzła pośredniego S_0 siłą (normalną do płaszczyzny π) oraz momentem (którego wektor jest styczny do π), warunki równowagi tego węzła napiszemy w postaci

$$(2.5) \quad \sum_{A=1}^{\text{III}} (t_{(A)}^M K_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{K}_{(A)}) + h_*^M = 0,$$

$$\sum_{A=1}^{\text{III}} \check{Q}_{(A)} + b_* = 0.$$

Podstawiając do (2.5) prawe strony wyrażeń (2.4), otrzymamy układ trzech równań dla trzech wielkości $\Delta v_K, \Delta u$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \Delta u + \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{4E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K \right) \Delta v_K = \\
 & = - \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \gamma_K - \sum_{A=1}^{\text{III}} (2E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K - C_{(A)} t_{(A)}^M t_{(A)}^K) t_{(A)}^L \varkappa_{LK} + h_*^M, \\
 (2.6) \quad & - \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K + \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \Delta u = \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \\
 & + \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} + b_*.
 \end{aligned}$$

Wprowadzimy symetryczną macierz 3×3 , utworzoną z bloków o wyrazach

$$\begin{bmatrix} H_{KL}, H_K \\ H_K, H \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} H_{11} & H_{12} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_2 \\ \hline H_1 & H_2 & H \end{array} \right]$$

oraz zdefiniowaną wzorem

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} H_{KL}, H_K \\ H_K, H \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{c|c} \sum_A (C_{(A)} l_{(A)}^{-1} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + 4E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K); & - \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^M \\ \hline - \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-2} \tilde{t}_{(A)}^M & \sum_A 12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-3} \end{array} \right]^{-1}.$$

Rozwiązanie układu równań (2.6) możemy wtedy napisać w postaci

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta v_K \\ \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{KL}, H_K \\ H_L, H \end{bmatrix} \left(- \begin{bmatrix} \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} t_{(A)}^L t_{(A)}^M \\ - \sum_A 12E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-2} t_{(A)}^M \end{bmatrix} \gamma_M - \begin{bmatrix} \sum_A (2E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^L \tilde{t}_{(A)}^K - C_{(A)} t_{(A)}^L t_{(A)}^K) t_{(A)}^M \\ - \sum_A 6E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} l_{(A)}^{-1} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^M \end{bmatrix} \varkappa_{MN} + \begin{bmatrix} h_*^L \\ b_* \end{bmatrix} \right).$$

Oznaczmy teraz przez $M_{(A)}, \tilde{M}_{(A)}, \tilde{P}_{(A)}$ kolejno moment skręcający, moment zginający i siłę poprzeczną (działające w płaszczyznach normalnych do π) w przekroju połowicznym

pręt $S_0 S_A$ oraz zorientowanym dodatnim zwrotem wektora $t_{(A)}$. Mamy tutaj $M_{(A)} = K_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)} = \tilde{K}_{(A)} + 0,5 l_{(A)} \check{Q}_{(A)}$, $\check{P}_{(A)} = \check{Q}_{(A)}$ co zgodnie z (2.4) prowadzi do⁴⁾

$$(2.9) \quad \begin{aligned} M_{(A)} &= C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta v_K, \\ \tilde{M}_{(A)} &= E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} - \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K, \\ \check{P}_{(A)} &= \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \varkappa_{LK} - \\ &\quad - \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \Delta u + \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K \Delta v_K. \end{aligned}$$

Podstawiając do (2.9) wyrażenia dla Δu i Δv_K określone związkami (2.8) oraz oznaczając

$$(2.10) \quad \begin{aligned} S_{(A)}^{KL} &\equiv C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L + \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left[H_{SN} \sum_{\Delta=I}^{III} t_{(\Delta)}^K (2E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)} \tilde{t}_{(\Delta)}^N \tilde{t}_{(\Delta)}^L - \right. \\ &\quad \left. - C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^L) - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K \right], \\ S_{(A)}^K &\equiv \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^S \left(H_{SL} \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{12E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K \right), \\ M_{(A)}^* &\equiv - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K (H_{KL} h_*^L + H_K b_*), \\ \tilde{S}_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} \tilde{J}_{(A)} t_{(A)}^K \tilde{t}_{(A)}^L + \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^S \left[H_{SN} \sum_{\Delta=I}^{III} t_{(\Delta)}^K (2E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)} \tilde{t}_{(\Delta)}^N \tilde{t}_{(\Delta)}^L - \right. \\ &\quad \left. - C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^L) - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K \right], \\ \tilde{S}_{(A)}^K &\equiv \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^S \left(H_{SL} \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K - H_S \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{12E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K \right), \\ \tilde{M}_{(A)}^* &\equiv - \frac{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K (H_{KL} h_*^L + H_K b_*), \\ \check{P}_{(A)}^K &\equiv \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K + \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \left(H_L \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{6E_{(\Delta)} \tilde{J}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^L t_{(\Delta)}^K - \right. \end{aligned}$$

⁴⁾ Gdy $\Delta u = 0$ i $\Delta v_K = 0$, to wyrażenia dla $M_{(A)}$ i $\tilde{M}_{(A)}$ sprowadzają się do podanych w [3], natomiast w wyrażeniu dla $\check{P}_{(A)}$ pozostaje składnik zależny od \varkappa_{LK} . Powód występowania takiego składnika wyjaśniono w poprzednim odsyłaczu.

$$\begin{aligned}
& -H \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{12 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}^2} t_{(d)}^K \Big) - \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}^2} \tilde{t}_{(d)}^S \left(H_{SL} \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - H_S \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{12 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}^2} t_{(d)}^K \right), \\
(2.10) \quad \check{R}_{(A)}^{KL} & \equiv \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^L t_{(A)}^K + \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \left[H_N \sum_{d=1}^{\text{III}} t_{(d)}^K (2 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - C_{(d)} t_{(d)}^L t_{(d)}^L) - H \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right] - \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^S \left[H_{SN} \sum_{d=1}^{\text{III}} (2 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)} \tilde{t}_{(d)}^N \tilde{t}_{(d)}^L - C_{(d)} t_{(d)}^N t_{(d)}^L) t_{(d)}^K - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - H_S \sum_{d=1}^{\text{III}} \frac{6 E_{(d)} \tilde{J}_{(d)}}{l_{(d)}} \tilde{t}_{(d)}^L t_{(d)}^K \right], \\
\check{P}_{(A)}^* & \equiv - \frac{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^3} (H_L h_*^L + H b_*) + \frac{6 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K (H_{KL} h_*^L + H_K b_*),
\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad M_{(A)} & = S_{(A)}^{KL} \varkappa_{KL} + S_{(A)}^K \gamma_K + M_{(A)}^*, \\
\tilde{M}_{(A)} & = \tilde{S}_{(A)}^{KL} \varkappa_{KL} + \tilde{S}_{(A)}^K \varkappa_K + \tilde{M}_{(A)}^*, \\
\check{P}_{(A)} & = \check{R}_{(A)}^K \gamma_K + \check{R}_{(A)}^{KL} \varkappa_{KL} + \check{P}_{(A)}^*.
\end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (2.11) możemy wyznaczyć potencjał sprężysty σ'' płyty siatkowej. Przyjmując, że obciążenia zewnętrzne płyty są zaczepione tylko w węzłach, otrzymamy

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \sigma'' & = \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\int_{-0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{(\tilde{M}_{(A)} + x\check{P}_{(A)})^2}{2E_{(A)}\tilde{J}_{(A)}} dx + \int_{-0,5l_{(A)}}^{0,5l_{(A)}} \frac{M_{(A)}^2}{2C_{(A)}} dx \right) = \\
& = \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{P}_{(A)}^2 l_{(A)}^3}{24 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{M}_{(A)}^2 l_{(A)}}{2 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{M_{(A)}^2 l_{(A)}}{2 C_{(A)}} \right),
\end{aligned}$$

przy czym za $\check{P}_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)}$ i $M_{(A)}$ należy tu podstawić wyrażenia (2.11). Po wprowadzeniu następujących tensorów sztywności sprężystej

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad C^{KLMN} & \equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^{KL} \check{R}_{(A)}^{MN} l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^{KL} \tilde{S}_{(A)}^{MN} l_{(A)}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{S_{(A)}^{KL} S_{(A)}^{MN} l_{(A)}}{C_{(A)}} \right), \\
A^{KL} & \equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^K \check{R}_{(A)}^L l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^K \tilde{S}_{(A)}^L l_{(A)}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{S_{(A)}^K S_{(A)}^L l_{(A)}}{C_{(A)}} \right), \\
{}''B^{KLM} & \equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^{KL} \check{R}_{(A)}^M l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^{KL} \tilde{S}_{(A)}^M l_{(A)}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} + \frac{S_{(A)}^{KL} S_{(A)}^M l_{(A)}}{C_{(A)}} \right),
\end{aligned}$$

oraz wielkości charakteryzujących obciążenie węzłów pośrednich

$$(2.14) \quad \begin{aligned} m_*^{KL} &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)}^* + \frac{\check{S}_{(A)}^{KL} l_{(A)}}{E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{M}_{(A)}^* + \frac{S_{(A)}^{KL} l_{(A)}}{C_{(A)}} M_{(A)}^* \right), \\ p_*^K &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^K l_{(A)}^3}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)}^* + \frac{\check{S}_{(A)}^K l_{(A)}}{E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{M}_{(A)}^* + \frac{S_{(A)}^K l_{(A)}}{C_{(A)}} M_{(A)}^* \right), \\ \sigma_*'' &\equiv \frac{1}{F} \sum_{A=1}^{\text{III}} \left[\frac{l_{(A)}^3}{24 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} (\check{P}_{(A)}^*)^2 + \frac{l_{(A)}}{E_{(A)} \check{J}_{(A)}} (\check{M}_{(A)}^*)^2 + \frac{l_{(A)}}{C_{(A)}} (M_{(A)}^*)^2 \right], \end{aligned}$$

dla potencjału sprężystego płyty siatkowej otrzymamy wyrażenie

$$(2.15) \quad \sigma'' = C^{KLMN} \varkappa_{KL} \varkappa_{MN} + {}''B^{KLM} \varkappa_{KL} \gamma_M + A^{KL} \gamma_K \gamma_L + m_*^{KL} \varkappa_{KL} + p_*^K \gamma_K + \sigma_*''.$$

Jeżeli wprowadzimy składowe stanu napięcia zdefiniowane związkami

$$(2.16) \quad m^{KL} \equiv \frac{\partial \sigma''}{\partial \varkappa_{KL}}, \quad p^K \equiv \frac{\partial \sigma''}{\partial \gamma_K},$$

to muszą one spełniać następujące warunki równowagi (por. [3], część I), w których h^L i b są funkcjami charakteryzującymi obciążenia węzłów ograniczających

$$(2.17) \quad \begin{aligned} m^{KL}{}_{,K} + \varepsilon^L{}_K p^K + h^L &= 0, \\ p^K{}_{,K} + b &= 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z (2.15) mamy jednocześnie

$$(2.18) \quad \begin{aligned} m^{KL} &= C^{KLMN} \varkappa_{MN} + {}''B^{KLM} \gamma_M + m_*^{KL}, \\ p^K &= A^{KL} \gamma_L + {}''B^{MKN} \varkappa_{MN} + p_*^K. \end{aligned}$$

Równania równowagi (2.17), związki (2.18) między składowymi stanu napięcia i odkształcenia oraz związki geometryczne (2.3) tworzą podstawowy układ równań teorii heksagonalnych płyt siatkowych (rozpatrywanych oczywiście przy stosowaniu ciągłego modelu tych płyt). Powyższy układ równań różni się od układu równań płyt siatkowych omawianych w [3] tylko inną budową tensorów sztywności C^{KLMN} , A^{KL} oraz występowaniem wielkości ${}''B^{KLM}$, m_*^{KL} , p_*^K . Warunki brzegowe mają natomiast taką samą postać jak w [3], w związku z czym nie będziemy ich tutaj omawiać.

Dla płyt siatkowych, omówionych w [3], między składowymi stanu napięcia, a wielkościami $M_{(A)}$, $\check{M}_{(A)}$, $\check{P}_{(A)}$, zachodzą związki

$$\begin{aligned} m^{KL} &= \sum_A (t_{(A)}^K t_{(A)}^L M_{(A)} + t_{(A)}^K \check{t}_{(A)}^L \check{M}_{(A)}) \check{I}_{(A)}^{-1}, \\ p^K &= \sum_A t_{(A)}^K \check{P}_{(A)} \check{I}_{(A)}^{-1}; \quad \check{I}_{(A)} \equiv \frac{F}{l_{(A)}}. \end{aligned}$$

Określmy teraz odpowiedniki tych związków dla płyt siatkowych heksagonalnych. Wynikają one z definicji (2.16) oraz wyrażenia (2.12) dla potencjału sprężystego. Przeprowa-

dzając różniczkowanie potencjału (2.12) podług \varkappa_{KL} i γ_K oraz korzystając z (2.11), otrzymamy

$$(2.19) \quad \begin{aligned} m^{KL} &= \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{S_{(A)}^{KL}}{C_{(A)}} M_{(A)} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^{KL}}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} \tilde{M}_{(A)} + \frac{\check{R}_{(A)}^{KL} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)} \right) \check{l}_{(A)}^{-1}, \\ p^K &= \sum_{A=I}^{III} \left(\frac{\check{R}_{(A)}^K l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{J}_{(A)}} \check{P}_{(A)} + \frac{S_{(A)}^K}{C_{(A)}} M_{(A)} + \frac{\tilde{S}_{(A)}^K}{E_{(A)} \tilde{J}_{(A)}} \tilde{M}_{(A)} \right) \check{l}_{(A)}^{-1}, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystano tu oznaczenie (1.19). Są to związki między składowymi stanu napięcia, formalnie zdefiniowanymi przez (2.16), a momentami $M_{(A)}$, $\tilde{M}_{(A)}$ oraz siłami $\check{P}_{(A)}$ w przekrojach połowiących pręty siatki. Dla $\Delta u = 0$ i $\Delta v_K = 0$, związki (2.19) stają się podobne do odpowiednich związków dla płyt siatkowych omówionych w [3], które powyżej przytoczyliśmy.

Na zakończenie tego punktu rozpatrzmy jeszcze ważny w zastosowaniach przypadek szczególny, w którym «oczka» siatki są foremnymi sześciokątami, a sztywności wszystkich prętów schodzących się w każdym węźle są takie same. Wtedy $F = 1,5\sqrt{3}l^2$, a po wprowadzeniu kąta α , jak na rys. 3, oraz oznaczeniu

$$(2.20) \quad \begin{aligned} C &= C_{(A)}, \quad E\check{J} = E_{(A)}\check{J}_{(A)}, \quad l = l_{(A)}, \quad \lambda \equiv \frac{C}{E\check{J}}, \\ \Phi'(\alpha) &\equiv \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ \Phi''(\alpha) &\equiv \cos\alpha(3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha), \\ \Phi(\alpha) &\equiv [\Phi'(\alpha)]^2 + [\Phi''(\alpha)]^2, \end{aligned}$$

i po przeprowadzeniu rachunków zgodnie z wzorami (2.13), (2.10) i (2.7), otrzymamy

$$(2.21) \quad \begin{aligned} C^{1111} &= C^{2222} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[4 + 3\lambda - \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right], \\ C^{1122} &= C^{2211} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[-4 + \lambda + \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right], \\ C^{1212} &= C^{2121} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[6 + \lambda - \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right], \\ C^{1221} &= C^{2112} = \frac{\sqrt{3}E\check{J}}{12l} \left[2 + \lambda - \frac{(2+\lambda)^2}{4+\lambda} \Phi(\alpha) \right]; \\ C_i^{KLLL} &= C_i^{LKLL} = C_i^{LLKL} = C_i^{LLLL} = 0, \quad K \neq L; \\ {}''B^{111} &= -{}''B^{122} = -{}''B^{212} = -{}''B^{221} = -\frac{2\sqrt{3}E\check{J}}{l^2} \frac{\Phi'(\alpha)}{4+\lambda}, \\ {}''B^{222} &= -{}''B^{112} = -{}''B^{121} = -{}''B^{211} = \frac{2\sqrt{3}E\check{J}}{l^2} \frac{\Phi''(\alpha)}{4+\lambda}; \\ A^{11} &= A^{22} = \frac{2\sqrt{3}E\check{J}}{3l^3} \left[6 - \frac{71\lambda}{2(4+\lambda)^2} \right], \quad A^{12} = A^{21} = 0. \end{aligned}$$

Rozpatrywana siatka ma trójkątną oś symetrii, bowiem

$$\Phi' \left(\alpha + \frac{2n\pi}{3} \right) = \Phi'(\alpha), \quad \Phi'' \left(\alpha + \frac{2n\pi}{3} \right) = \Phi''(\alpha), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Jeżeli siatka jest jednorodna, wtedy najdogodniej przyjąć układ współrzędnych w ten sposób, aby $\alpha = 0$.

3. Powłoki siatkowe

Gdy promienie krzywizny powierzchni, na której kształtujemy siatkę są wielokrotnie większe od długości poszczególnych prętów siatki, wtedy każdy wycinek siatki (wyodrębniony przekrojami S_I, S_{II}, S_{III} mający kształt litery Y) (por. rys. 1) możemy w przybliżeniu traktować tak, jak gdyby leżał on na płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie S_0 . Jeżeli płaszczyznę tę można ponadto uznać za płaszczyznę symetrii sprężystej wycinka, wtedy postać związków (1.17) oraz (2.18) nie ulega zmianie. Postępując podobnie, jak w [3], otrzymamy układ równań złożony z równań geometrycznych (kreska oznacza pochodną kowariantną, b_{KL} i e_{KL} są składowymi kowariantnymi drugiego tensora metrycznego powierzchni oraz dwuwektora Ricciego, w dowolnym układzie współrzędnych na powierzchni)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{KL} &= u_{L/K} - b_{LK}u + e_{LK}v, \\ \gamma_K &= u_{/K} + b_K^L u_L + e_{KL}v^L, \\ \varkappa_{KL} &= v_{L/K} - b_{LK}v, \\ \varkappa_K &= v_{/K} + b_K^L v_L, \end{aligned}$$

równań równowagi

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p^{KL}/_K - b_K^L p^K + b^L &= 0, \\ m^K/_K + e_{KL}p^{KL} + b_{KL}m^{KL} + h &= 0, \\ p^K/_K + b_{KL}p^{KL} + b &= 0, \\ m^{KL}/_K - b_K^L m^K + e^L{}_K p^K + h^L &= 0, \end{aligned}$$

oraz związków między składowymi stanu napięcia i odkształcenia

$$(3.3) \quad \begin{aligned} p^{KL} &= A^{KLMN} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \varkappa_M + p_*^{KL}, \\ m^K &= C^{KL} \varkappa_L + 'B^{MKN} \gamma_{MN} + m_*^K, \\ m^{KL} &= C^{KLMN} \varkappa_{MN} + ''B^{KLM} \gamma_M + m_*^{KL}, \\ p^K &= A^{KL} \gamma_K + ''B^{MKN} \varkappa_{MN} + p_*^K. \end{aligned}$$

Tensory sztywności sprężystej występujące w (3.3) wyznaczamy na podstawie wzorów (1.13), (1.10), (1.7) oraz (2.13), (2.10), (2.7). Przy wyznaczaniu wielkości p_*^{KL} , m_*^K , m_*^{KL} i p_*^K korzystamy z (1.14) i (2.14). Zagadnienia brzegowe dla powłok siatkowych heksagonalnych, a także dla takich tarcz i płyt formułujemy podobnie jak dla powłok siatkowych omówionych w [3], w związku z czym nie będziemy ich tu omawiać. Zauważmy także, że dla modelu ciągłego siatek heksagonalnych można napisać dwa równoważne układy równań w zależności od tego, które węzły przyjmiemy jako pośrednie, a które jako ograniczające (wektory $t_{(A)}$, $\tilde{t}_{(A)}$ różnią się wtedy znakiem). Zagadnienie to, a także przykłady zastosowania wyprowadzonych równań są tematem oddzielnego opracowania.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media II*, Arch. Mech. Stos., 6, 17 (1965), 777-799.
2. Cz. WOŹNIAK, *On the equations of lattice-type structures*, Arch. Mech. Stos., 6, 19 (1967).
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe. Podstawy teorii i przykłady obliczeń*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

ПЛОТНЫЕ ГЕКСАГОНАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ РЕШЕТКИ

В работе выведены уравнения сплошной модели регулярных плотных гексагональных упругих решеток (рис. 2). Предполагается, что все узлы решетки являются жесткими, а стержни линейно упругими и однородными, и что каждых три стержня сходящихся в одном узле можно рассматривать как обладающие общей плоскостью упругой симметрии. Так как сплошные модели различных упругих решеток с жесткими узлами (описываемые с помощью уравнений анизотропной среды Коссера с особой «волоконистой» структурой [3]) отличаются друг от друга лишь видом тензоров упругой жесткости, в настоящей работе обсуждаются прежде всего соотношения связывающие компоненты напряженного состояния и деформации. При принятых предложениях эти соотношения разделяются на независимые уравнения для «дисковой» и «плитовой» задач. В последней части работы представлены уравнения для гексагональных решеток сформированных на некоторой поверхности. Для плоских решеток рассмотрен также важный частный случай, когда все ячейки решетки являются правильными шестигранниками, а жесткости всех стержней одинаковы.

Summary

DENSE ELASTIC LATTICES OF HEXAGONAL TYPE

The equations of the continuous model are derived in the paper for the case of regular dense lattices of the hexagonal type (Fig. 1). It is assumed that all the nodes of the lattice are rigid, all the bars are linearly elastic and homogeneous, and that each three bars joined together in the same node can be treated as elements possessing a common plane of elastic symmetry. Since continuous models for various elastic lattices with rigid nodes (described by the equations of the anisotropic Cosserat medium with *fibrous* structure [3]) differ only in the form of elastic rigidity tensors, considerations presented in the paper contain, first of all, the relations between the corresponding components of stress and strain. Under the introduced assumptions, the above relations can be separated into independent «disc» and «plate» problems. The last section is devoted entirely to the equations for hexagonal lattices formed on a surface. For plane lattices, the important case of lattices built of regular hexagons with the same rigidities of the bars is discussed in detail.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA
INSTYTUT MECHANIKI
UNIwersytetu WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1970 r.

POMIAR ODKSZTAŁCENŃ PLASTYCZNYCH MEMBRANY KOŁOWEJ
OBCIĄŻONEJ IMPULSEM CIŚNIENIA

TADEUSZ BEDNARSKI (WARSZAWA)

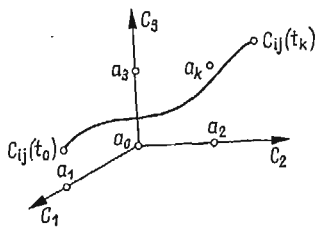
1. Wstęp

Pomiary przemieszczeń punktów materialnych lub skończonej deformacji ciała, występujących w procesach krótkotrwałych lub przebiegających z dużą prędkością w przestrzeni trójwymiarowej, sprowadzają się do eksperymentalnego wyznaczenia funkcji ruchu. Ponieważ na ogół pomiary dotyczą skończonej ilości punktów, więc dla uproszczenia zapisu ponumerujemy je za pomocą wskaźnika. Wtedy wyznaczone funkcje ruchu można zapisać w układzie kartezjańskim w postaci

$$(1.1) \quad c_{ij} = c_{ij}(t), \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

gdzie przez n oznaczono ilość punktów materialnych.

Układ odniesienia współrzędnych przestrzennych c_j dla $j = 1, 2, 3$ powinien być ustalony przez podanie współrzędnych punktów kontrolnych a_k dla $k = 0, 1, 2, \dots, A$, gdzie



Rys. 1

$A+1$ jest ilością punktów kontrolnych (rys. 1). Punkty kontrolne a_k pozwalają na każdorazowe odtworzenie założonego układu odniesienia w naturalnej skali z pomiarów zdjęć lub filmu.

Metodą wyznaczania funkcji ruchu (1.1) bezstykowo, a więc bez zakłócenia samego procesu, przy zapewnieniu bezpieczeństwa dla aparatury i osób obsługujących tę aparaturę, jest metoda fotografowania stereoskopowego przy użyciu szybkiej kamery filmowej wyposażonej w przystawkę stereoskopową. Metoda ta, łącznie z metodami fotogrametrii, tworzy opracowaną w przedstawionej pracy metodę stereofotogrametryczną pomiaru przemieszczeń w czasie trwania procesu. Ze względu na filmowanie kadrowe otrzymane

funkcje ruchu są ujęte w postaci macierzy, co jest wygodne przy dalszej obróbce tych wyników dla uzyskania interesujących nas informacji.

Metodę stereofotogrametryczną pomiaru przemieszczeń z użyciem szybkobieżnej kamery filmowej wykorzystano w pracy [9] przy badaniach procesu wybuchowego wypuklania membrany kołowej, lecz poza stereograficznym określeniem zmiany kształtu membrany w trakcie procesu innych wyników nie publikowano. W pracy [1, 2, 4] zastosowana została metoda stereogrametryczna z użyciem szybkobieżnej kamery filmowej do pomiarów i opracowania wyników pomiarowych przy badaniu procesu wybuchowego wypuklania stalowej membrany kołowej, co pozwoliło na określenie pola odkształceń i pola prędkości odkształceń całej membrany w trakcie procesu deformacji. W pracy [5] wspomina się o zastosowaniach tej metody do badań zjawiska kumulacji, lecz wyniki tych badań nie są autorowi znane. W sprawozdaniu [3] przedstawiono dalsze rozwinięcie metody stereofotogrametrycznej do pomiarów tego typu procesów. Opracowano metody wyznaczania elementów orientacji wewnętrznej szybkobieżnej kamery filmowej oraz elementów orientacji zewnętrznej układu stereoskopowego utworzonego przez szybkobieżną kamerę filmową i przystawkę stereoskopową. Wprowadzenie większej ilości punktów kontrolnych pozwoliło na zwiększenie dokładności pomiarów. Przedstawione w artykule wyniki pochodzą z pracy [3].

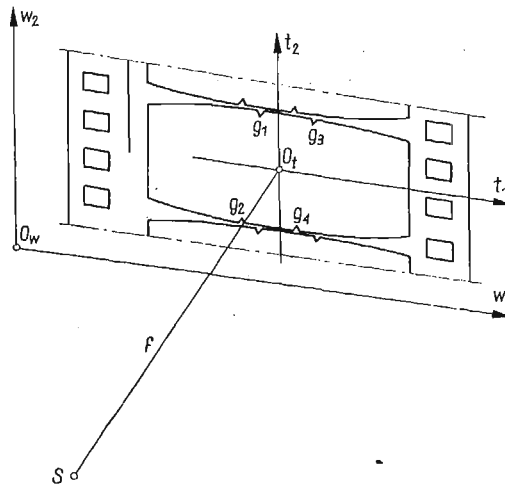
2. Stereofotogrametryczna metoda pomiaru

Podstawą pomiaru stereofotogrametrycznego przemieszczeń punktów materialnych krótkotrwałego procesu są pary zdjęć stereoskopowych otrzymane w czasie filmowania tego procesu za pomocą szybkobieżnej kamery filmowej, wyposażonej w przystawkę stereoskopową, ze stałą i znaną częstotliwością. Przystawka stereoskopowa dokonuje podziału klatki filmowej wzdłuż filmu na dwie części i za pomocą układu luster rzuca jednocześnie na każdą część klatki filmowej obraz badanego obiektu widziany z innego punktu przestrzeni. Jest to jednoznaczne z jednoczesnym fotografowaniem tego obiektu dwiema sprzężonymi kamerami filmowymi umiejscowionymi w różnych punktach, których odległość nazywamy bazą b , a kąt zbieżności osi optycznych symetrycznie ustawionych kamer filmowych nazywamy kątem konwergencji γ układu stereoskopowego widzenia (rys. 4). Zarówno bazę b , jak i kąt konwergencji γ nazywamy elementami orientacji zewnętrznej konwergentnego układu stereoskopowego; wielkości te powinny być znane lub wyznaczone w trakcie *justowania* układu optycznego.

Dla opracowania stereogramów musimy znać elementy orientacji wewnętrznej kamery filmowej, czyli zespół wielkości umożliwiających odtworzenie położenia środka rzutów S (rys. 2). Do elementów wewnętrznych zaliczamy odległość obrazu f oraz położenie punktu głównego 0_i , czyli spodka prostopadłej opuszczonej ze środka rzutów S na płaszczyznę filmu. Punkt główny stanowi początek układu współrzędnych tłowych t_i dla $i = 1, 2$ i jest określany przez podanie macierzy współrzędnych tłowych G_{ji} dla $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$, znaczków tłowych g_j dla $j = 1, 2, 3, 4$ (rys. 2). Wyznaczanie elementów orientacji wewnętrznej szybkobieżnych kamer filmowych, nie będących z przeznaczenia kamerami fo-

togrametrycznymi, dokonuje się zmodyfikowanymi metodami fotogrametrycznymi [3, 7, 8].

W wyniku stereoskopowego filmowania procesy szybkobieżną kamerą filmową o znanych elementach orientacji wewnętrznej i zewnętrznej, otrzymujemy stereoskopowe obrazy na filmie z wyróżnionymi na nich punktami będącymi przedmiotem pomiaru. Poszczególne pary obrazów, powstałe przez rozcięcie klatek wzdłuż filmu, są obserwowane na instrumencie fotogrametrycznym — stereokomparatorze, a wybrane punkty mierzone. W wyniku



Rys. 2

pomiarów otrzymuje się współrzędne x_1, y_2 oraz «paralakse» p_1 w kierunku y_1 i «paralakse» p_2 w kierunku x_2 dla znaczków tłowych g_i dla $i = 1, 2, 3, 4$, dla punktów kontrolnych a_i dla $i = 0, 1, 2, \dots, A$ oraz dla punktów obserwowanego procesu. Wyniki te zestawia się w postaci macierzy dla ułatwienia dalszych obliczeń. Pozostałe współrzędne (rys. 3) określa się z zależności [1, 3, 6]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_2 &= y_2 - p_2, \\ y_1 &= x_1 - p_1 \end{aligned}$$

dla każdego punktu obserwowanego na każdej parze obrazów filmowanych zawierających przebieg procesu.

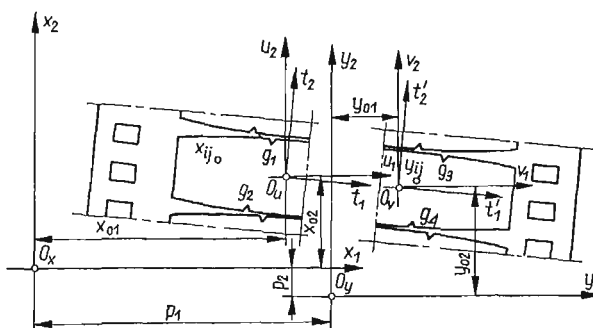
2.1. Współrzędne tłowe mierzonych punktów. W wyniku rozcięcia filmu na dwie części otrzymujemy dwa zdjęcia i na każdym z tych zdjęć należy odtworzyć położenie punktów głównych: 0_u na zdjęciu lewym i 0_v na zdjęciu prawym (rys. 3), będących odpowiednikiem punktu 0_f na zdjęciu nierozciętym (rys. 2). Punkty główne 0_u i 0_v są wyznaczone przez współrzędne tłowe t_i dla $i = 1, 2$ znaczków tłowych g_j dla $j = 1, 2$ dla zdjęcia lewego i $j = 3, 4$ dla zdjęcia prawego, a określonych przy wyznaczaniu elementów orientacji wewnętrznej kamery i współrzędne instrumentu znaczków tłowych g_j : x_{ji} dla $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, dla zdjęcia lewego oraz y_{ji} dla $i = 1, 2$, $j = 3, 4$, otrzymane przy pomiarze zdjęcia rozciętego na stereokomparatorze (rys. 3).

Przy założeniu, iż układy t_i , x_i , y_i są układami prostokątnymi, otrzymujemy z transformacji współrzędnych punktów tłych g_j z układu t_i do układów x_i i y_i (rys. 3) dwa układy równań:

$$(2.1.1) \quad x_{ji} = x_{0i} + \sum_{k=1}^2 Q_{ik} t_{jk}, \quad j = 1, 2,$$

$$(2.1.2) \quad y_{ji} = y_{0i} + \sum_{k=1}^2 R_{ik} t_{jk}, \quad j = 3, 4,$$

po 4 niewiadome w każdym. Po rozwiązaniu otrzymujemy macierze przekształcenia Q_{ik} i R_{ik} oraz wektory translacji x_{0i} i y_{0i} dla $i, k = 1, 2$. Wtedy współrzędne tłe u_i i v_i



Rys. 3

punktów obserwowanych (rys. 3) określone są translacją współrzędnych x_i i y_i odpowiednio do układów u_i i v_i dla $i = 1, 2$:

$$(2.1.3) \quad u_1 = x_1 - x_{01}, \quad u_2 = y_2 - p_2 - x_{02}, \quad v_1 = x_1 - p_1 - y_{01}.$$

2.2. Współrzędne fotogrametryczne obserwowanych punktów. Przestrzenne współrzędne fotogrametryczne z_i dowolnie obranego punktu procesu, bezpośrednio związane ze stereoskopowym układem optycznym kamery (rys. 4), dla konwergentnego układu stereoskopowego określają zależności [5, 6]

$$(2.2.1) \quad z_1 = Nu_1, \quad z_2 = Nf, \quad z_3 = Nu_2,$$

gdzie

$$(2.2.2) \quad N = b \frac{f \cos \frac{\gamma}{2} + v_1 \sin \frac{\gamma}{2}}{(f^2 + u_1 v_1) \sin \gamma + f(u_1 - v_1) \cos \gamma},$$

a stałe f , b , γ są elementami orientacji wewnętrznej i zewnętrznej stereoskopowego układu kamery filmowej.

2.3. Współrzędne kartezjańskie punktów mierzonych. Położenie obserwowanych punktów materialnych przedstawimy w kartezjańskim układzie współrzędnych c_i (rys. 4). W tym celu przeprowadzamy transformację współrzędnych układu fotogrametrycznego z_i do układu

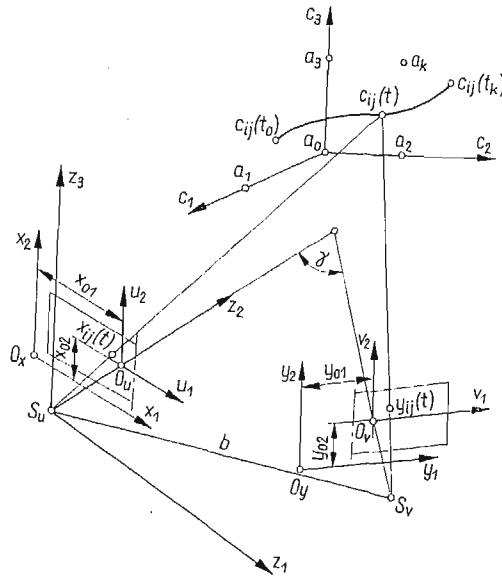
kartezjańskiego c_i . Przyjmując początek układu c_i w punkcie kontrolnym a_0 , zapisujemy transformację współrzędnych w postaci przyrostowej

$$(2.3.1) \quad c_i = \sum_{k=1}^3 B_{ik} \Delta z_k, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3,$$

przy czym dla dowolnego punktu

$$(2.3.2) \quad \Delta z_k = z_k - z_{a_0k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3.$$

Współrzędne z_{a_0k} punktu a_0 są obliczane na podstawie pomiaru filmu. Macierz B_{ik} jest macierzą przekształcenia.



Rys. 4

Rozpisując zależność (2.3.1) dla punktów kontrolnych a_l dla $l = 1, 2, \dots, A$, otrzymujemy układ $3A$ równań z 9 niewiadomymi

$$(2.3.3) \quad \sum_{m=1}^9 P_{nm} f_m = 0_n, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, 3A,$$

gdzie macierz P_{nm} jest dana z pomiarów współrzędnych fotogrametrycznych punktów kontrolnych a_l dla $l = 0, 1, 2, \dots, A$, a wektor 0_n — z pomiarów współrzędnych c_i tych punktów. Przy tym musi być spełniony warunek $A \geq 3$. Rozwiązując układ (2.3.3) otrzymujemy współczynniki macierzy przekształcenia

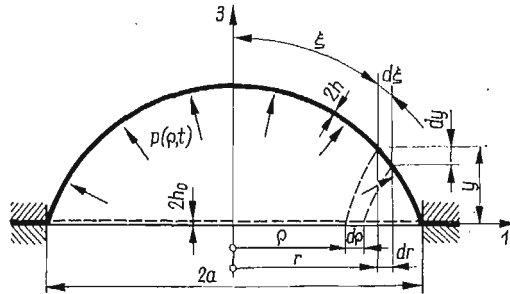
$$(2.3.4) \quad B_{ik} = f_{i+3(k-1)}, \quad \text{dla } i, k = 1, 2, 3,$$

określające transformację (2.3.1).

Dokonując obliczeń, według przedstawionego schematu, dla każdego kadru sfilmowanego procesu otrzymujemy funkcję ruchu (1.1) w postaci stabilizowanej pozwalającą na odtworzenie przebiegu procesu we współrzędnych przestrzennych c_i .

3. Zastosowanie stereofotogrametrycznej metody do pomiarów przemieszczeń w krótkotrwałych procesach

Jednym z przykładów zastosowania metody stereofotogrametrycznej pomiaru przemieszczeń w krótkotrwałych procesach jest pomiar przemieszczeń, prędkości przemieszczeń, odkształceń i prędkości odkształceń w procesie dynamicznego wypuklenia aluminiowej membrany kołowej utwierdzonej na obrzeżu, a obciążonej impulsowo ciśnieniem $p(\varrho, t)$ otrzymanym przez detonację ładunku wybuchowego w wodzie, schematycznie przedstawionej na rys. 5. W przedstawionym procesie przedmiotem pomiarów jest przebieg prze-



Rys. 5

mieszczeń punktów materialnych ϱ w czasie procesu dla całej, tworzącej się w trakcie deformacji membrany, powłoki. Ze względu na symetrię osiową procesy funkcję ruchu (1.1) określimy w współrzędnych walcowych $r(\varrho, t)$ i $y(\varrho, t)$. Przez różniczkowanie po czasie otrzymanych funkcji ruchu

$$(3.1) \quad \frac{dr(\varrho, t)}{dt} = \dot{r}(\varrho, t),$$

$$\frac{dy(\varrho, t)}{dt} = \dot{y}(\varrho, t),$$

otrzymujemy prędkość przemieszczenia punktów powłoki

$$(3.2) \quad v(\varrho, t) = \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{y}^2}.$$

Znajomość współrzędnych walcowych pozwala na określenie współczynników wydłużenia [1]

$$(3.3) \quad \lambda_1 = \frac{d\xi}{d\varrho}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{\varrho}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{h_0},$$

przy czym sens wprowadzonych oznaczeń pokazany jest na rys. 5. Wtedy składowe główne tensora odkształcenia w miarze logarytmicznej wyrażą się w postaci

$$(3.4) \quad \varepsilon_i = \ln \lambda_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3,$$

oraz intensywność odkształcenia

$$(3.5) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}.$$

Składowe główne tensora prędkości odkształcenia [1]

$$(3.6) \quad \dot{\epsilon}_i = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3,$$

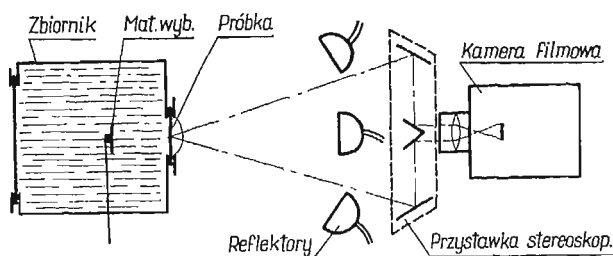
gdzie przez $\dot{\lambda}_i$ oznaczono pochodną czasową odpowiednich współczynników wydłużenia λ_i dla $i = 1, 2, 3$. Dla celów porównawczych obliczamy pierwiastek drugiego niezmiennika prędkości odkształcenia

$$(3.7) \quad J^{1/2} = \sqrt{\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2},$$

przy założeniu, że materiał jest nieściśliwy. Zdefiniowane wielkości fizyczne, charakteryzujące proces, można wyznaczyć metodą stereofotogrametryczną.

4. Stanowisko doświadczalne

Plastyczne wypuklenie aluminiowej membrany kołowej utwardzonej na obrzeżu zrealizowane zostało na stanowisku badawczym, przedstawionym schematycznie na rys. 6. Stanowi ono poziomy zbiornik o wymiarach $\varnothing 700 \times 800$ mm, w przednim dnie którego znajduje się otwór dla zamocowania w nim próbki przez dociśnięcie jej na obrzeżu pierścieniem za pomocą 12 śrub M18. Drugie dno stanowi przepona gumowa wstawiana każdorazowo przed próbą i dociskana do zbiornika pierścieniem tak, aby nie wyciekała woda

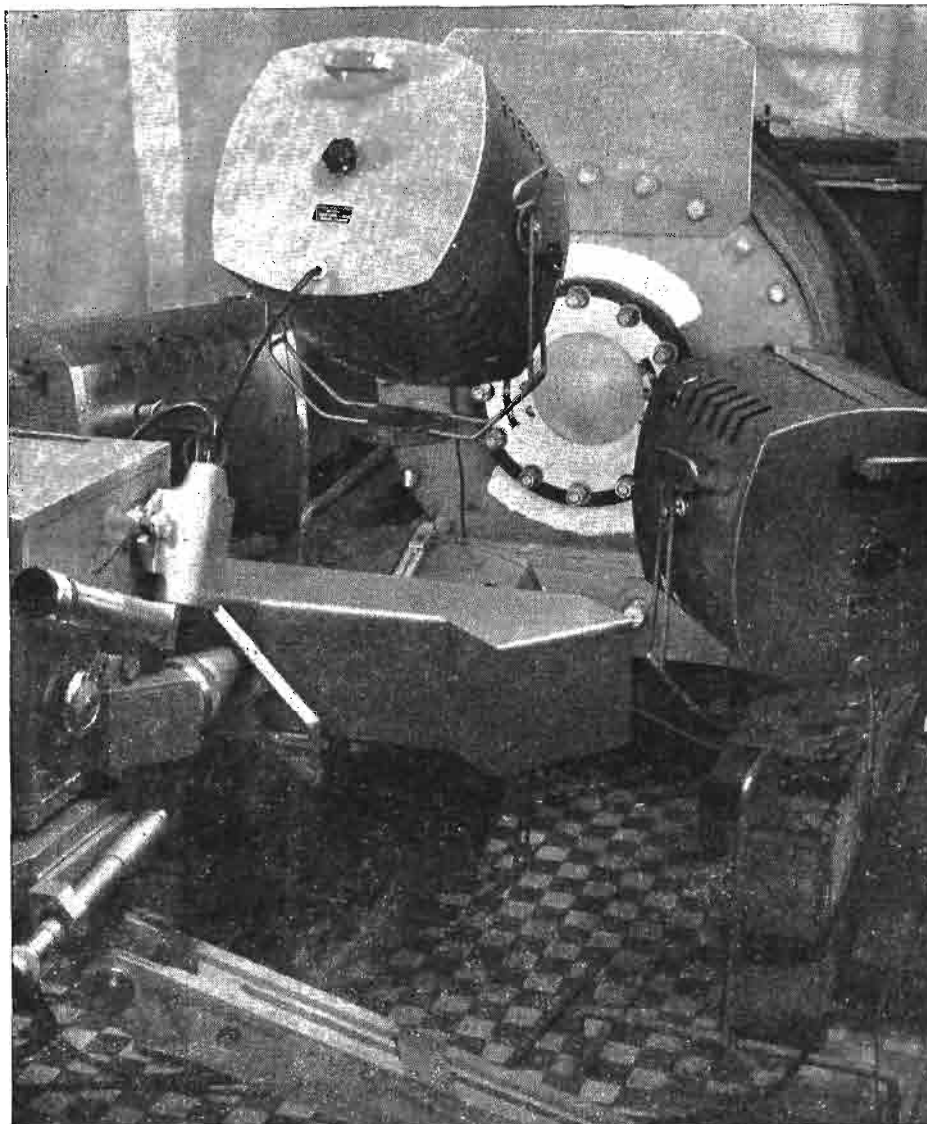


Rys. 6

wypełniająca zbiornik. Wewnątrz zbiornika zawieszono w odległości 310 mm ładunek wybuchowy w postaci zwiniętego spiralnie lontu sznurowego [1, 2, 3, 4] o długości 500 mm wraz z zapalnikiem elektrycznym. Ładunek ten jest równoważny 6 G pentrytu. Naprzeciwko próbki, w odległości 1500 mm, ustawiona była szybkobieżna kamera filmowa »Pentazet 35« wyposażona w przystawkę stereoskopową. Do filmowania próbkę oświetlono za pomocą 4 reflektorów ustawionych między kamerą a próbką badaną. Ogólny widok stanowiska przygotowanego do filmowania stereoskopowego procesu plastycznego wypuklenia przedstawiony jest na rys. 7.

Próbka badana miała kształt krążka o średnicy 310 mm wykonanego z miękkiej blachy aluminiowej o grubości 0,9 mm. Czynna średnica próbki wynosiła 200 mm. Do filmowania procesu wypuklenia powierzchnia próbki była zmatowiona. Na zmatowioną powierzchnię próbki наносzono metodą chemigraficzną siatkę w postaci czterech promieni poprzeczna-

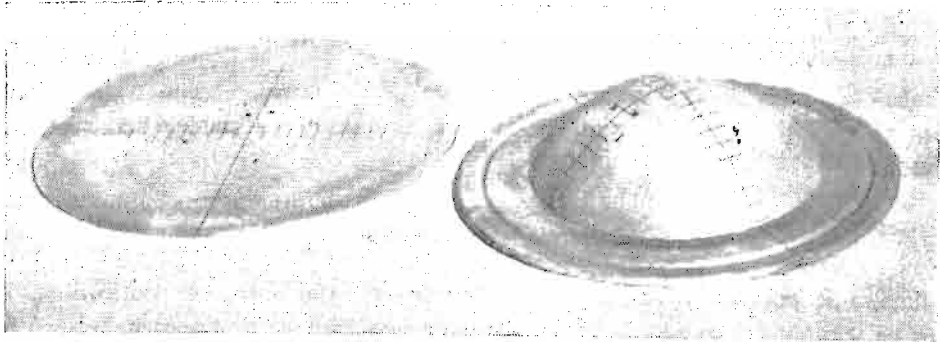
nych prostopadle liniami w odstępach około 10 mm, tworzącą w ten sposób punkty, których przemieszczenie było przedmiotem pomiarów. Grubość linii wynosiła 0,5 mm i 0,4 mm. Rozmieszczenie tych punktów było mierzone na mikroskopie warsztatowym, a otrzymane wyniki zestawiono w postaci macierzy $\varrho_{k,l}$, $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, K$, gdzie przez L



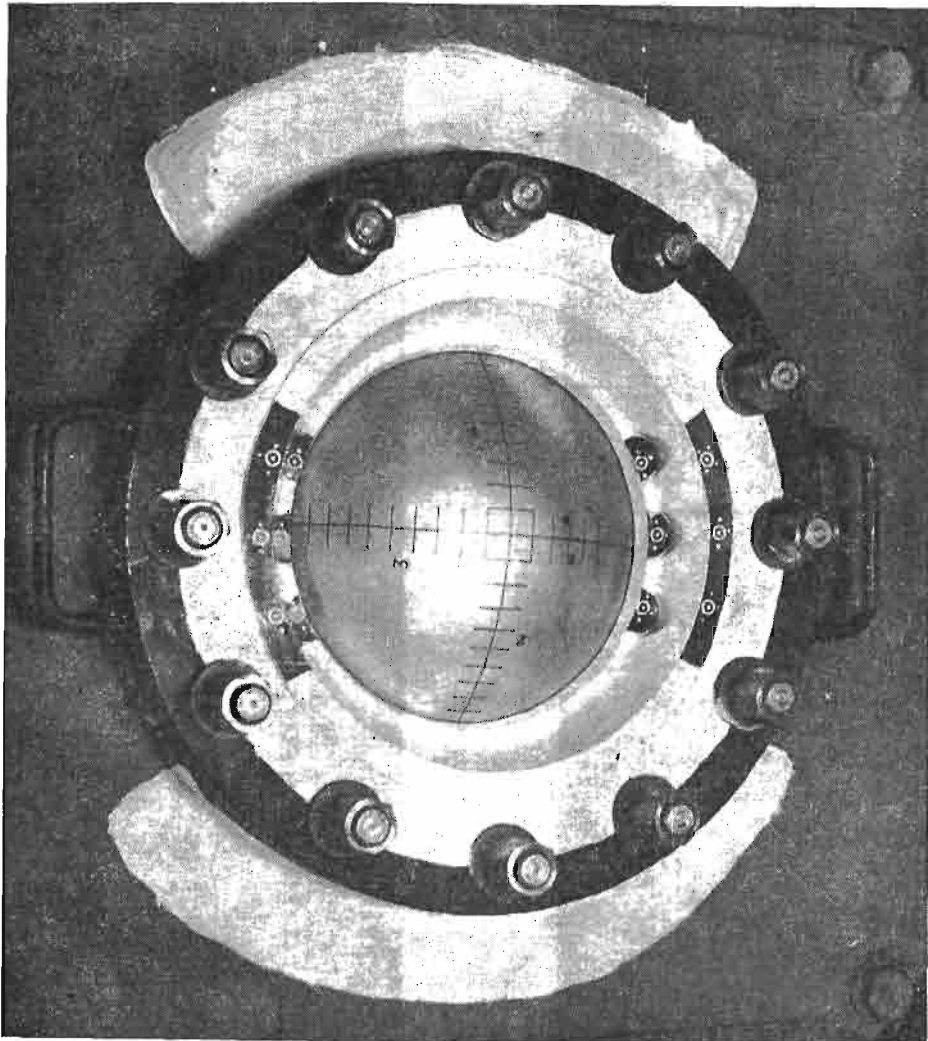
Rys. 7

oznaczono ilość punktów na promieniu, zaś K ilość promieni siatki na próbce. Ogólny widok próbki przed i po deformacji przedstawiony jest na rys. 8.

Pierścień dociskający próbkę do dna za pomocą śrub posiada naniesione na dwóch płaszczyznach znaczki kontrolne w postaci punktów z współśrodkowymi okręgami, któ-



Rys. 8

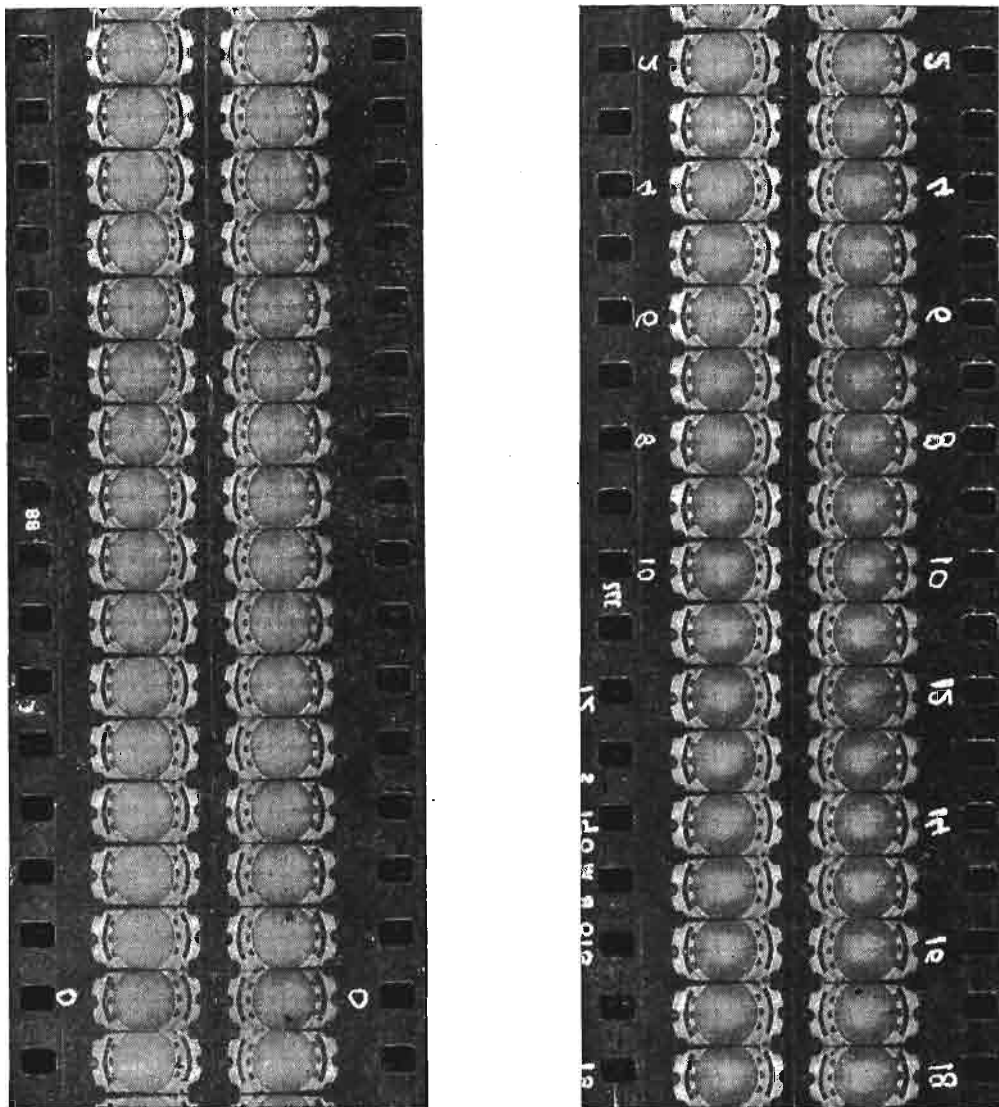


Rys. 9

rych położenie jest znane z dokładnością do $\pm 0,03$ mm. Punkty te, oznaczone w tekście symbolem a_k , służą do skalowania przestrzeni układu kartezjańskiego c , bezpośrednio z nimi związanego. Kształt i rozmieszczenie tych punktów na pierścieniu są pokazane na rys. 9.

5. Filmowanie procesu i pomiary filmu

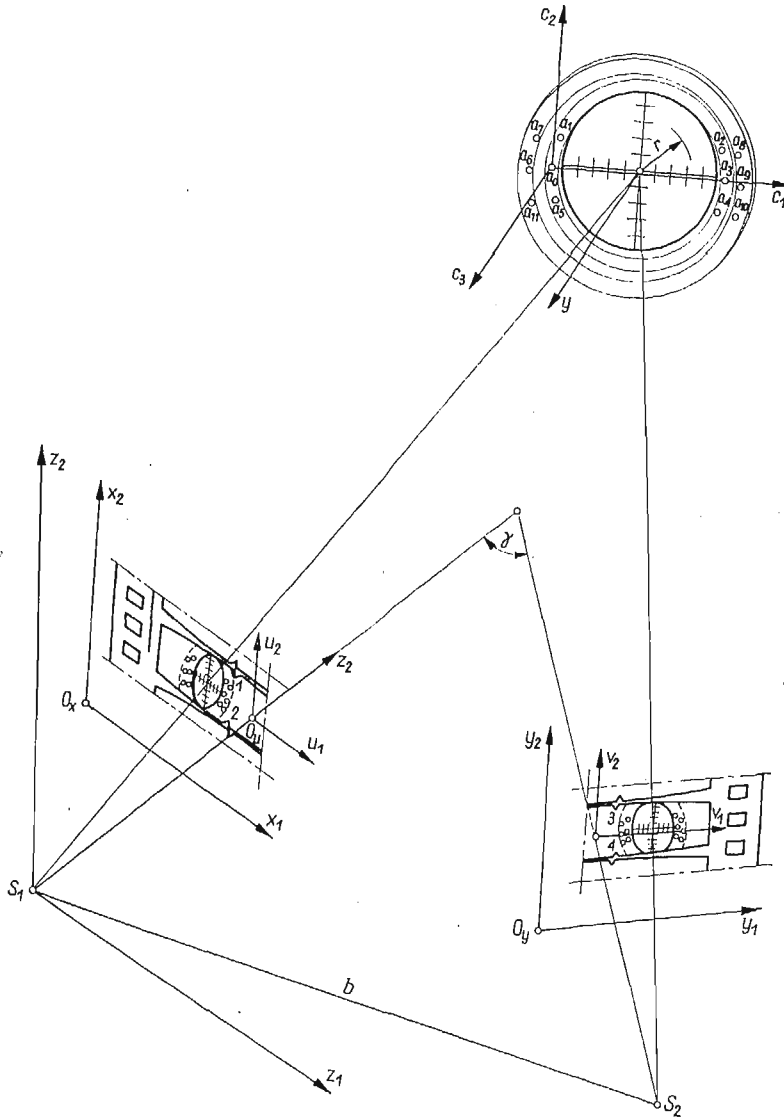
Filmowanie procesu deformacji membrany przeprowadzono z częstotliwością 7666 klatek na sekundę i w wyniku otrzymano negatywowo film stereoskopowy, którego fotokopia pozytykowa jest przedstawiona na rys. 10. Cały proces mieści się na 34 klatkach,



Rys. 10

które w następnym etapie były podstawą do pomiarów położenia punktów na każdym z pary zdjęć stereoskopowych.

Mierzony był bezpośrednio otrzymany negatywowi film stereoskopowy po jego rozcięciu wzdłuż taśmy (rys. 3). Pomiarów dokonywano na stereokomparatorze «Stecometer» z automatyczną rejestracją wyników na tabulogramie i taśmie 8-kanałowej. Przedmiotem



Rys. 11

pomiarów zdjęć stereoskopowych były współrzędne znaczków tłowych g_i , punktów kontrolnych a_i oraz współrzędne punktów siatki na powierzchni kształtowanej powłoki (rys. 11). »Stecometer« odczytuje współrzędne mierzonych punktów automatycznie w kolejności: x_1, y_2, p_1, p_2 , co pozwala na zestawienie macierzy wyników pomiarowych. W wyniku po-

miaru otrzymano macierze współrzędnych: $Vg_{h,i,j}$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ punktów tłowych, $V_{h,k,i,j}$ dla $k = 1, 2, \dots, K$, $i = 0, 1, 2, \dots, L$ punktów siatki powłoki, $Va_{h,i,j}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, A$ punktów kontrolnych, dla $j = 1, 2, 3, 4$, $h = 1, 2, 3, \dots, H$. Przez $A+1$ oznaczono ilość kontrolnych a_i , przez K — ilość promieni siatki na powierzchni próbki, a przez $L+1$ — ilość punktów na każdym z promieni. H jest ilością zdjęć, na których znajduje się cały przebieg procesu. Otrzymane wyniki pomiarów stanowią podstawę do dalszych obliczeń.

6. Stereofotogrametryczne opracowanie wyników pomiarowych

Obliczenia obejmujące opracowanie stereofotogrametryczne otrzymanych wyników pomiarowych przeprowadzono przy pomocy maszyny cyfrowej GIER. Przy czym obliczenia dokonywano według przedstawionego algorytmu.

Korzystając z zależności (2.1) obliczamy macierze współrzędnych instrumentu x_j i y_j dla znaczków tłowych g_i (rys. 11):

$$(6.1) \quad xg_{h,i,j} = \begin{cases} Vg_{h,i,j}, & \text{dla } j = 1, \quad i = 1, 2, \\ Vg_{h,i,j} - Vg_{h,i,j+2}, & \text{dla } j = 2, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

$$(6.2) \quad yg_{h,i,j} = \begin{cases} Vg_{h,i,j} - Vg_{h,i,j+2}, & \text{dla } j = 1, \quad i = 3, 4, \\ Vg_{h,i,j}, & \text{dla } j = 2, \quad i = 3, 4, \end{cases}$$

oraz dla $h = 1, 2, \dots, H$.

Znając z pomiarów elementów orientacji wewnętrznej kamery filmowej położenie punktu głównego w postaci macierzy współrzędnych tłowych t_{ij} dla $j = 1, 2$ oraz z pomiarów filmu macierze współrzędnych instrumentu (6.1) i (6.2) znaczków tłowych g_i dla $i = 1, 2, 3, 4$, możemy transformacje (2.1.1) i (2.1.2) sprowadzić do dwóch układów po cztery równania z czterema niewiadomymi dla każdego kadru filmu:

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^4 S_{h,i,j} d_{h,j} = D_{h,i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4, \quad h = 1, 2, \dots, H,$$

$$(6.4) \quad \sum_{j=1}^4 T_{h,i,j} e_{h,j} = E_{h,i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4, \quad h = 1, 2, \dots, H.$$

Macierze wyrazów wolnych obu układów równań wyrażają się w postaci:

$$(6.5) \quad D_{h,i} = \begin{cases} xg_{h,i,1}, & \text{dla } i = 1, 2, \quad h = 1, 2, \dots, H, \\ xg_{h,i-2,2}, & \text{dla } i = 3, 4, \quad h = 1, 2, \dots, H, \end{cases}$$

$$(6.6) \quad E_{h,i} = \begin{cases} yg_{h,i+2,1}, & \text{dla } i = 1, 2, \quad h = 1, 2, \dots, H, \\ yg_{h,i,2}, & \text{dla } i = 3, 4, \quad h = 1, 2, \dots, H. \end{cases}$$

Macierze współczynników w równaniach (6.3) i (6.4)

$$(6.7) \quad S_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{11} & t_{12} \\ 1 & 0 & t_{21} & t_{22} \\ 0 & 1 & t_{12} & -t_{11} \\ 0 & 1 & t_{22} & -t_{21} \end{bmatrix}, \quad T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{31} & t_{32} \\ 1 & 0 & t_{41} & t_{42} \\ 0 & 1 & t_{32} & -t_{31} \\ 0 & 1 & t_{42} & -t_{41} \end{bmatrix}$$

są stałe dla wszystkich zdjęć filmowanego procesu.

W wyniku rozwiązania układów (6.3) i (6.4) otrzymujemy macierze $d_{h,j}$ oraz $e_{h,j}$ dla $j = 1, 2, 3, 4$, $h = 1, 2, \dots, H$, które pozwalają na obliczenie macierzy przekształcenia $Q_{h,i,j}$ i $R_{h,i,j}$ oraz macierzy wektorów translacji $x0_{h,i}$ i $y0_{h,i}$ dla $i = 1, 2$, $h = 1, 2, \dots, H$, transformacji (2.1.1) i (2.1.2). Ponieważ z definicji dla punktu głównego $t_{0i} = 0$ dla $i = 1, 2$, tym samym dla punktów głównych 0_u i 0_v (rys. 3) współrzędne tłowe $u_{0i} = 0$ i $v_{0i} = 0$ dla $i = 1, 2$, więc otrzymujemy

$$(6.8) \quad \begin{aligned} x0_{h,i} &= d_{h,i}, & \text{dla } i = 1, 2, & \quad h = 1, 2, \dots, H, \\ y0_{h,i} &= e_{h,i}, & \text{dla } i = 1, 2, & \quad h = 1, 2, \dots, H. \end{aligned}$$

Obliczamy macierze współrzędnych tłowych punktów deformowanej powłoki

$$(6.9) \quad \begin{aligned} u1_{h,k,l} &= V_{h,k,l,1} - x0_{h,1}, \\ u2_{h,k,l} &= V_{h,k,l,2} - V_{h,k,l,4} - x0_{h,2}, \\ v1_{h,k,l} &= V_{h,k,l,1} - V_{h,k,l,3} - y0_{h,1}, \\ &\text{dla } l = 0, 1, \dots, L, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H, \end{aligned}$$

oraz dla punktów kontrolnych a_i

$$(6.10) \quad \begin{aligned} ua1_{h,i} &= Va_{h,i,1} - x0_{h,1}, \\ ua2_{h,i} &= Va_{h,i,2} - Va_{h,i,4} - x0_{h,2}, \\ va1_{h,i} &= Va_{h,i,1} - Va_{h,i,3} - y0_{h,1}, \\ &\text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, A, \quad h = 1, 2, \dots, H. \end{aligned}$$

Otrzymane współrzędne tłowe (6.9) i (6.10) pozwalają na obliczenie przestrzennych współrzędnych fotogrametrycznych (rys. 11), zgodnie z zależnościami (2.2.1) i (2.2.2). Dla $b = 755,6$ mm, $f = 46,086$ mm, $\gamma = 38^\circ 37' 30''$ obliczamy macierz współczynników (2.2.2) dla punktów powłoki

$$(6.11) \quad N_{h,k,l} = \frac{b \left(f \cos \frac{\gamma}{2} + v1_{h,k,l} \sin \frac{\gamma}{2} \right)}{(f^2 - u1_{h,k,l} v1_{h,k,l}) \sin \gamma + f(u1_{h,k,l} - v1_{h,k,l}) \cos \gamma}$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, K$, $h = 1, 2, \dots, H$,

oraz współrzędne fotogrametryczne [8]

$$(6.12) \quad z_{h,k,l,m} = \begin{cases} N_{h,k,l} u1_{h,k,l}, & \text{dla } m = 1, \\ N_{h,k,l} f, & \text{dla } m = 2, \\ N_{h,k,l} u2_{h,k,l}, & \text{dla } m = 3, \end{cases}$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, K$, $h = 1, 2, \dots, H$,

jak również dla punktów kontrolnych a_i współczynnik

$$(6.13) \quad Na_{h,i} = \frac{b \left(f \cos \frac{\gamma}{2} + va1_{h,i} \sin \frac{\gamma}{2} \right)}{(f^2 + ua1_{h,i} va1_{h,i}) \sin \gamma + f(ua1_{h,i} - va1_{h,i}) \cos \gamma}$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots, A$, $h = 1, 2, \dots, H$,

oraz współrzędne fotogrametryczne

$$(6.14) \quad za_{h,i,m} = \begin{cases} Na_{h,i}ua_{1h,i}, & \text{dla } m = 1, \\ Na_{h,i}f, & \text{dla } m = 2, \\ Na_{h,i}ua_{2h,i}, & \text{dla } m = 3, \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots, A$, $h = 1, 2, \dots, H$.

7. Interpretacja geometryczna wyników pomiarowych

Dla ułatwienia dalszej obróbki wyników pomiarowych, jak i ich interpretacji fizycznej współrzędne punktów powłoki przetransformujemy z układu fotogrametrycznego z_i do układu kartezjańskiego c_i bezpośrednio związanego z kształtowaną powłoką. Ten związek układu c_i z powłoką zapewnia nam umieszczenie punktów kontrolnych a_i na pierścieniu dociskającym i znajomość ich współrzędnych c_{ij} dla $j = 1, 2, 3$, $i = 0, 1, 2, \dots, A$. Rozmieszczenie punktów kontrolnych i sposób przyjęcia układu współrzędnych kartezjańskich pokazany jest na rys. 11.

Znajomość współrzędnych kartezjańskich c_{ij} , jak i współrzędnych fotogrametrycznych $z_{h,i,j}$ dla punktów kontrolnych a_i dla $j = 1, 2, 3$, $i = 0, 1, 2, \dots, A$, $h = 1, 2, \dots, H$, pozwala na określenie współczynników macierzy przekształcenia układu równań (2.3.1). W naszym przykładzie mamy H układów po $3A$ równań z 9 niewiadomymi

$$(7.1) \quad \sum_{j=1}^9 P_{h,i,j} f_{h,j} = 0_i,$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, 3A$, $h = 1, 2, \dots, H$.

Wektor wyrazów wolnych 0_i , stały dla całego procesu, określony jest przez macierz współrzędnych kartezjańskich $c_{k,j}$ punktów kontrolnych a_k dla $k = 1, 2, \dots, A$, następująco

$$(7.2) \quad 0_i = \begin{cases} c_{i,1}, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, A, \\ c_{i-A,2}, & \text{dla } i = A+1, \dots, 2A, \\ c_{i-2A,2}, & \text{dla } i = 2A+1, \dots, 3A. \end{cases}$$

Macierz współczynników układu równań (7.1) określona jest przez przyrosty współrzędnych fotogrametrycznych $za_{h,i,m}$ (2.3.2), mianowicie

$$(7.3) \quad za_{h,i,m} = za_{hi+1,m} - za_{h,0,m},$$

dla $m = 1, 2, 3$, $i = 0, 1, 2, \dots, A$, $h = 1, 2, \dots, H$,

następująco:

$$(7.4) \quad P_{h,i,j} = \begin{cases} A_{h,i,j}, & \text{dla } j = 1, 2, 3, & i = 1, 2, \dots, A, \\ 0, & \text{dla } j = 4, 5, \dots, 9, & i = 1, 2, \dots, A, \\ 0, & \text{dla } j = 1, 2, 3, & i = A+1, \dots, 2A, \\ A_{h,i-A,j}, & \text{dla } j = 4, 5, 6, & i = A+1, \dots, 2A, \\ 0, & \text{dla } j = 7, 8, 9, & i = A+1, \dots, 2A, \\ 0, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, 6, & i = 2A+1, \dots, 3A, \\ A_{h,i-2A,j}, & \text{dla } j = 7, 8, 9, & i = 2A+1, \dots, 3A, \\ & & \text{dla } h = 1, 2, \dots, H. \end{cases}$$

Stosując metodę najmniejszych kwadratów sprowadzamy układy (7.1) do H układów po 9 równań z 9 niewiadomymi w postaci

$$(7.5) \quad \sum_{k=1}^9 F_{h,j,k} f_{h,k} = A_{h,j},$$

dla $i = 1, 2, \dots, 9, \quad h = 1, 2, \dots, H,$

gdzie

$$(7.6) \quad A_{h,j} = \sum_{i=1}^{3A} O_i R_{h,i,j},$$

$$(7.7) \quad F_{h,j,k} = \sum_{i=1}^{3A} P_{h,i,j} P_{h,i,k},$$

dla $j, k = 1, 2, \dots, 9.$

Z rozwiązania układów równań (7.5) otrzymujemy macierz współczynników $f_{h,j}$ dla $j = 1, 2, \dots, 9, h = 1, 2, \dots, H,$ a stąd macierz przekształcenia (2.3.4)

$$(7.8) \quad B_{h,i,j} = f_{h,j+3(i-1)}, \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, \quad h = 1, 2, \dots, H,$$

która pozwoli na obliczenie współrzędnych kartezjańskich c_i punktów powłoki według transformacji (2.3.3) dla całego procesu

$$(7.9) \quad c_{h,k,l,i} = \sum_{j=1}^3 B_{h,i,j} (z_{h,k,l,j} - z_{a_{h,0,j}}),$$

dla $i, j = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H.$

Ze względu na symetrię osiową badanego procesu dalszą analizę przeprowadzimy we współrzędnych walcowych r, ϑ, y (rys. 11). Początek układu współrzędnych określamy wektorem cs_i dla $i = 1, 2, 3,$ który wynika z konstrukcji pierścienia dociskającego i usytuowania układu współrzędnych kartezjańskich c_i (rys. 11). Obliczamy współrzędne walcowe punktów powłoki

$$(7.10) \quad r_{h,k,l} = \sqrt{(c_{h,k,l,1} - cs_1)^2 + (c_{h,k,l,2} - cs_2)^2},$$

$$y_{h,k,l} = c_{h,k,l,3} - cs_3,$$

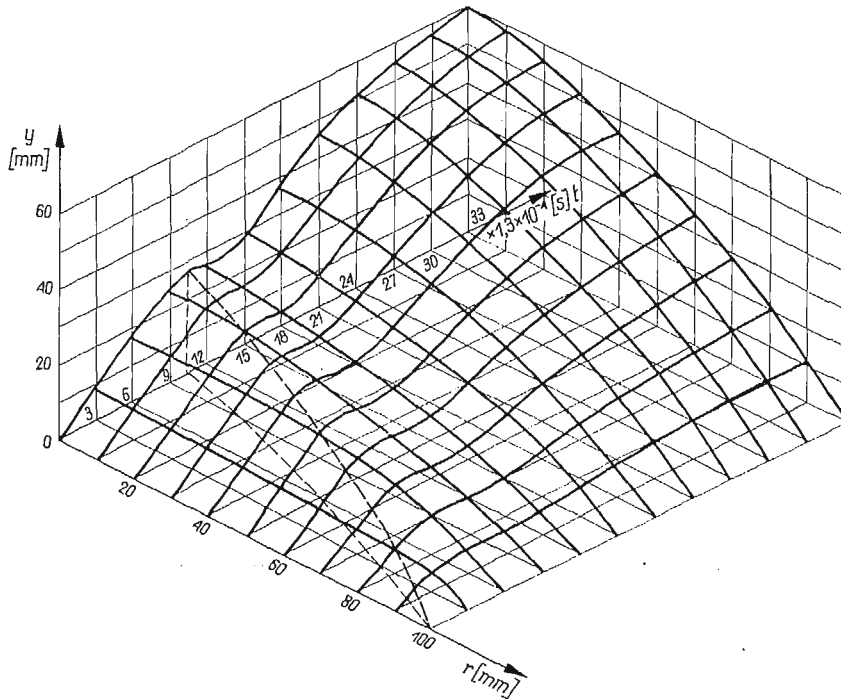
dla $l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H.$

Otrzymane wyniki uśredniamy

$$(7.11) \quad R_{h,l} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_{h,k,l}, \quad \text{dla } l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad h = 1, 2, \dots, H,$$

$$Y_{h,l} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y_{h,k,l}, \quad \text{dla } l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad h = 1, 2, \dots, H,$$

a po wygładzeniu wyniki przedstawione są w postaci graficznej na rys. 12 i pokazują zmianę kształtu membrany w trakcie procesu jej deformacji.



Rys. 12

8. Interpretacja fizyczna otrzymanych wyników

8.1. Pole prędkości przemieszczenia deformowanej powłoki. Otrzymane przy stałej częstotliwości filmowania t_0^{-1} macierze $R_{h,l}$ i $Y_{h,l}$ różniczkujemy wzdłuż kolumn (po czasie) przy pomocy pięciopunktowego wzoru Stirlinga:

$$(8.1.1) \quad \dot{R}_{h,l} = \frac{1}{12t_0} \begin{cases} -25R_{h,l} + 48R_{h+1,l} - 36R_{h+2,l} + 16R_{h+3,l} - 3R_{h+4,l}, & \text{dla } h = 1, \\ -3R_{h-1,l} - 10R_{h,l} + 18R_{h+1,l} - 6R_{h+2,l} + R_{h+3,l}, & \text{dla } h = 2, \\ R_{h-2,l} - 8R_{h-1,l} + 8R_{h+1,l} - R_{h+2,l}, & \text{dla } h = 3, 4, \dots, H-2, \\ -R_{h-3,l} - 6R_{h-2,l} - 18R_{h-1,l} + 10R_{h,l} + 3R_{h+1,l}, & \text{dla } h = H-1, \\ 3R_{h-4,l} - 16R_{h-3,l} + 36R_{h-2,l} - 48R_{h-1,l} + 25R_{h,l}, & \text{dla } h = H. \end{cases}$$

$$(8.1.2) \quad \dot{Y}_{h,l} = \frac{1}{12t_0} \begin{cases} -25Y_{h,l} + 48Y_{h+1,l} - 36Y_{h+2,l} + 16Y_{h+3,l} - 3Y_{h+4,l}, & \text{dla } h = 1, \\ -3Y_{h-1,l} - 10Y_{h,l} + 18Y_{h+1,l} - 6Y_{h+2,l} + Y_{h+3,l}, & \text{dla } h = 2, \\ Y_{h-2,l} - 8Y_{h-1,l} + 8Y_{h+1,l} - Y_{h+2,l}, & \text{dla } h = 3, 4, \dots, H-2, \\ -Y_{h-3,l} - 6Y_{h-2,l} - 18Y_{h-1,l} + 10Y_{h,l} + 3Y_{h+1,l}, & \text{dla } h = H-1, \\ 3Y_{h-4,l} - 16Y_{h-3,l} + 36Y_{h-2,l} - 48Y_{h-1,l} + 25Y_{h,l}, & \text{dla } h = H, \end{cases}$$

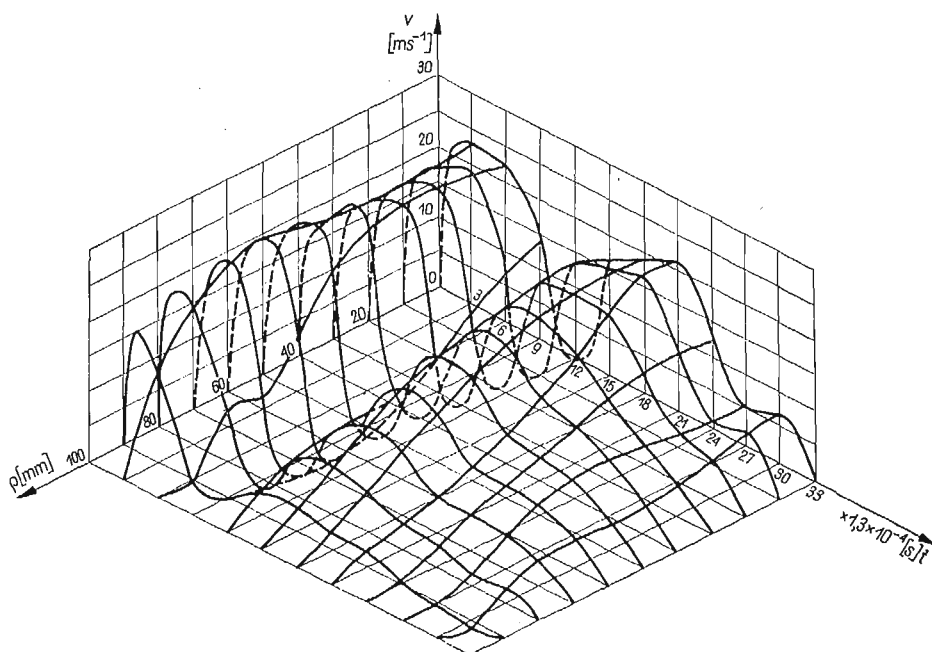
dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$.

Z otrzymanych macierzy składowych prędkości przemieszczenia obliczamy macierz wypadkowych prędkości przemieszczania punktów powłoki

$$(8.1.3) \quad V_{h,l} = (\sin \dot{Y}_{h,l}) \sqrt{(\dot{R}_{h,l})^2 + (\dot{Y}_{h,l})^2},$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad h = 1, 2, \dots, H.$

Po wygładzeniu otrzymanej macierzy prędkości przemieszczania wyniki pomiarów przedstawione są w postaci graficznej na rys. 13.



Rys. 13

8.2. Rozkład współczynników wydłużenia. Przy danym promieniu utwardzenia próbki «a» obliczamy zmianę promieni siatki współrzędnych naniesionej na próbkę i deformującej się razem z próbką

$$(8.2.1) \quad r'_{h,k,l} = \sqrt{(c_{h,k,l,1} - c_{h,k,0,1})^2 + (c_{h,k,l,2} - c_{h,k,0,2})^2},$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H,$

oraz ich przyrosty

$$(8.2.2) \quad \Delta r'_{h,k,l} = \begin{cases} r'_{h,k,l+1} - r'_{h,k,l}, & \text{dla } l = 0, 1, 2, \dots, L-1, \\ a - r'_{h,k,l}, & \text{dla } l = L, \end{cases}$$

dla $k = 1, 2, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H,$

jak również przyrosty współrzędnej y

$$(8.2.3) \quad \Delta y_{h,k,l} = \begin{cases} y_{h,k,l} - y_{h,k,l+1}, & \text{dla } l = 0, 1, 2, \dots, L-1, \\ y_{h,k,l}, & \text{dla } l = L, \end{cases}$$

dla $k = 1, 2, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H.$

Obliczamy przyrosty łuków

$$(8.2.4) \quad \Delta\xi_{h,k,l} = \sqrt{(\Delta r'_{h,k,l})^2 + (\Delta y_{h,k,l})^2},$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, K$, $h = 1, 2, \dots, H$.

Mając zadaną, z pomiarów siatki współrzędnych na próbce przed deformacją, macierz $\varrho_{k,l}$ dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, K$, oraz macierz przyrostów

$$(8.2.5) \quad \Delta\varrho_{h,l} = \begin{cases} \varrho_{k,l+1} - \varrho_{k,l}, & \text{dla } l = 0, 1, 2, \dots, L-1, \\ a - \varrho_{k,l}, & \text{dla } l = L, \end{cases}$$

dla $k = 1, 2, \dots, K$.

Obliczamy współczynniki wydłużenia w kierunkach głównych [1, 2]

$$(8.2.6) \quad \lambda_{1,h,k,l} = \begin{cases} \frac{\Delta\xi_{h,k,l}}{\Delta\varrho_{h,l}}, & \text{dla } l = 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\xi_{h,k,l}}{\Delta\varrho_{k,l}} + \frac{\Delta\xi_{h,k,l-1}}{\Delta\varrho_{k,l}} \right), & \text{dla } l = 1, 2, \dots, L-1, \\ \frac{\Delta\xi_{h,k,l-1}}{\Delta\varrho_{k,l-1}}, & \text{dla } l = L, \end{cases}$$

$$(8.2.7) \quad \lambda_{2,h,k,l} = \begin{cases} \lambda_{1,h,k,l}, & \text{dla } l = 0, \\ \frac{r'_{h,k,l}}{\varrho_{k,l}}, & \text{dla } l = 1, 2, \dots, L, \end{cases}$$

dla $k = 1, 2, \dots, K$, $h = 1, 2, \dots, H$.

Otrzymane wartości (8.2.6) i (8.2.7) uśredniamy

$$(8.2.8) \quad \lambda_{i,h,l} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \lambda_{i,h,k,l},$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $h = 1, 2, \dots, H$, $i = 1, 2$.

8.3. Pole odkształceń. Składowe główne tensora odkształcenia w mierze logarytmicznej [1, 2] obliczamy w postaci macierzy

$$(8.3.1) \quad \varepsilon_{i,h,l} = \ln \lambda_{i,h,l}, \quad \text{dla } i = 1, 2$$

oraz dla $i = 3$ z warunku nieściśliwości

$$(8.3.2) \quad \varepsilon_{3,h,l} = -\varepsilon_{1,h,l} - \varepsilon_{2,h,l},$$

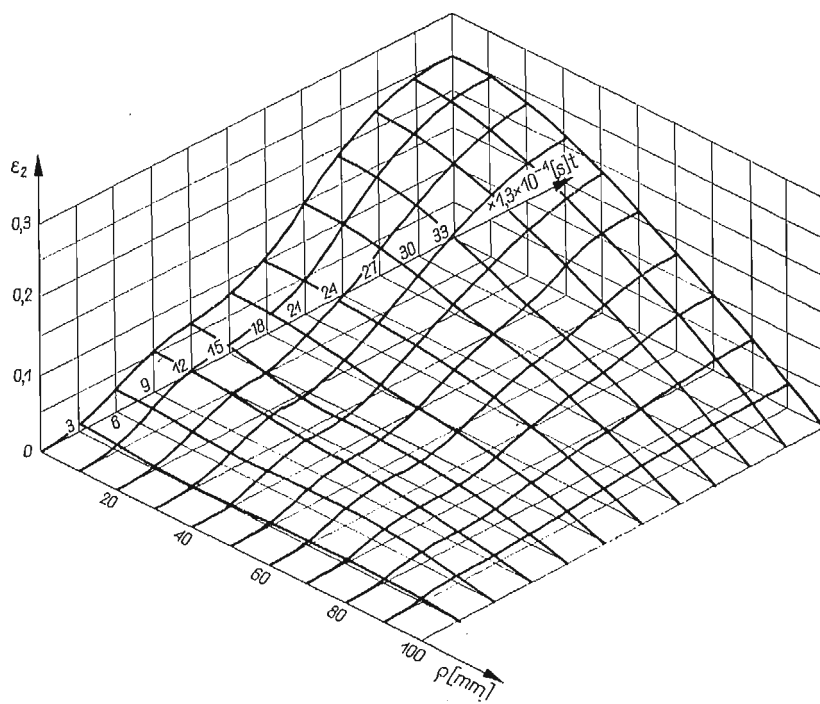
dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $h = 1, 2, \dots, H$.

Otrzymane wyniki przedstawione są na rys. 14, 15 i 16.

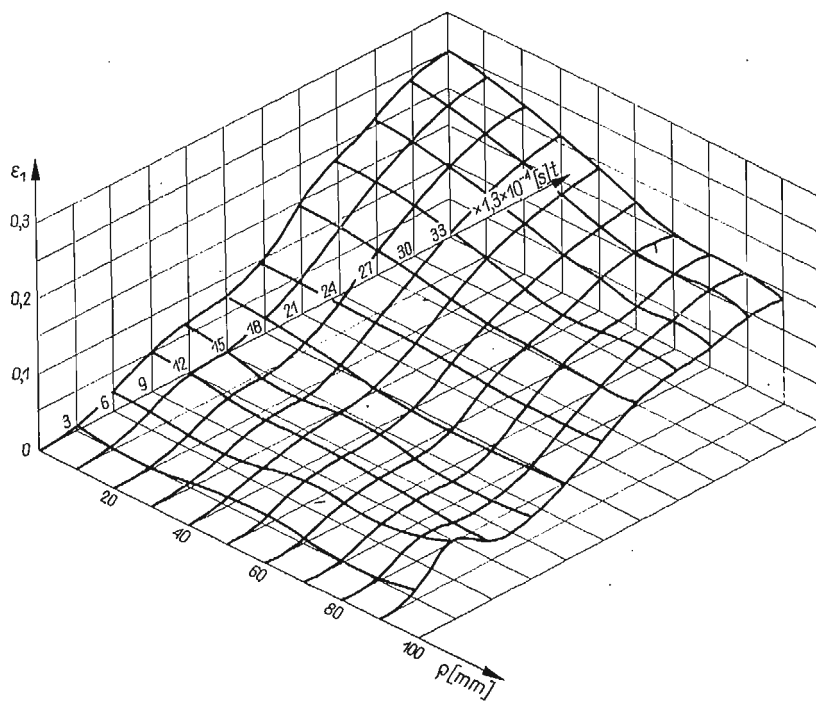
Pole intensywności odkształceń obliczamy ze znanej zależności

$$(8.3.3) \quad \varepsilon_{h,l} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{1,h,l})^2 + (\varepsilon_{2,h,l})^2 + \varepsilon_{1,h,l} \varepsilon_{2,h,l}},$$

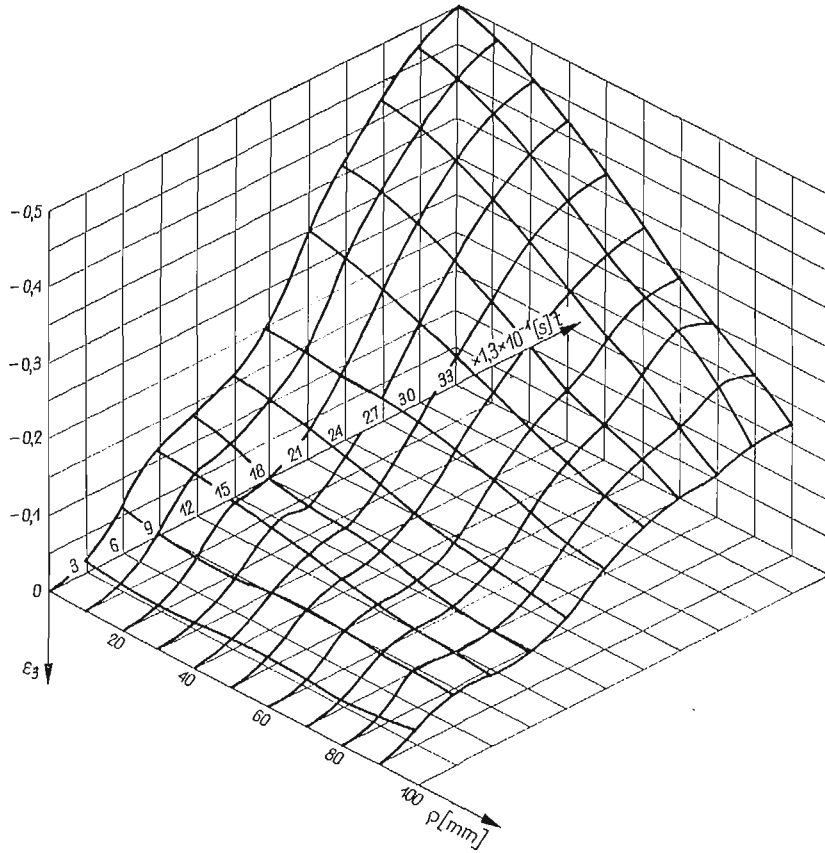
dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $h = 1, 2, \dots, H$,



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

a wyniki obliczeń po uprzednim wygładzeniu przedstawione są w postaci graficznej na rys. 17.

8.4. Pole prędkości odkształceń. Prędkości zmiany współczynników wydłużenia obliczamy różniczkując macierze (8.2.8) wzdłuż kolumn według schematu

$$(8.4.1) \quad \dot{\lambda}_{i,h,l} = \frac{1}{12t_0} \begin{cases} (-25\lambda_{i,h,l} + 48\lambda_{i,h+1,l} - 36\lambda_{i,h+2,l} + 16\lambda_{i,h+3,l} - 3\lambda_{i,h+4,l}), & \text{dla } h = L, \\ (-3\lambda_{i,h-1,l} - 10\lambda_{i,h,l} + 18\lambda_{i,h+1,l} - 6\lambda_{i,h+2,l} + \lambda_{h+3,l}), & \text{dla } h = 2, \\ (\lambda_{i,h-2,l} - 8\lambda_{i,h-1,l} + 8\lambda_{i,h+1,l} - \lambda_{i,h+2,l}), & \text{dla } h = 3, 4, \dots, H-2, \\ (-\lambda_{i,h-3,l} - 6\lambda_{i,h-2,l} - 18\lambda_{i,h-1,l} + 10\lambda_{i,h,l} + 3\lambda_{i,h+1,l}), & \text{dla } h = H-1, \\ (3\lambda_{i,h-4,l} - 16\lambda_{i,h-3,l} + 36\lambda_{i,h-2,l} - 48\lambda_{i,h-1,l} + 25\lambda_{i,h,l}), & \text{dla } h = H, \end{cases}$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad i = 1, 2.$

Obliczamy składowe główne tensora prędkości odkształcenia według zależności (3.6)

$$(8.4.2) \quad \dot{\varepsilon}_{i,h,l} = \frac{\dot{\lambda}_{i,h,l}}{\lambda_{i,h,l}},$$

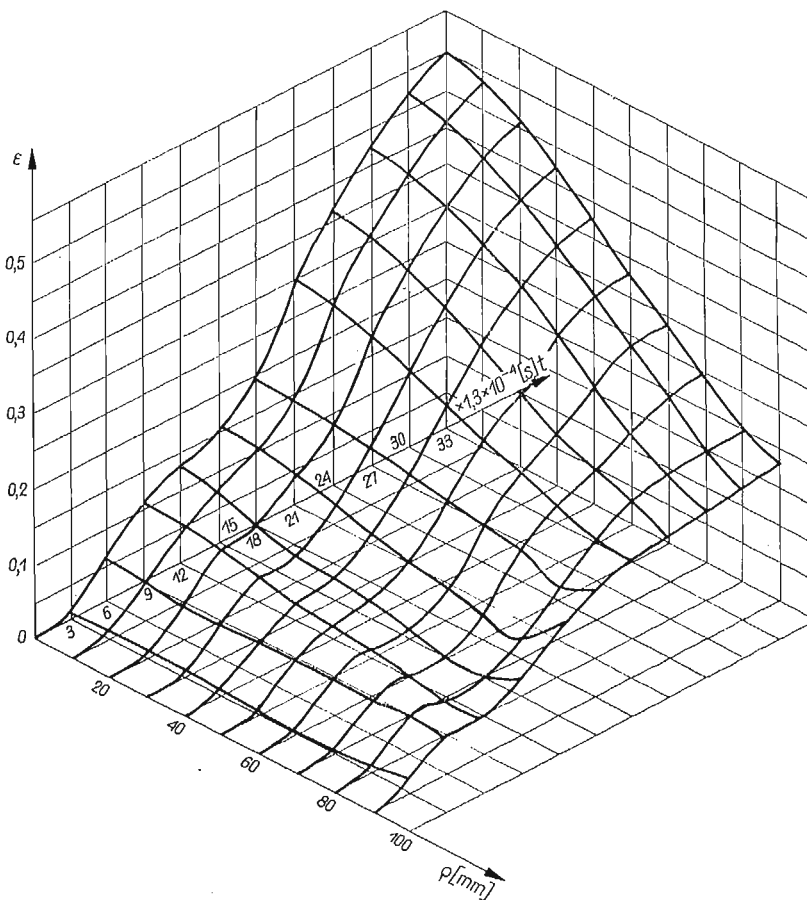
dla $l = 0, 1, 2, \dots, L, \quad h = 1, 2, \dots, H, \quad i = 1, 2,$

oraz pierwiastek drugiego niezmiennika tensora prędkości odkształcenia

$$(8.4.3) \quad J_{h,l}^{1/2} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{1,h,l}^2 + \dot{\epsilon}_{2,h,l}^2 + \dot{\epsilon}_{1,h,l}\dot{\epsilon}_{1,h,l}}$$

dla $l = 0, 1, 2, \dots, L$, $h = 1, 2, \dots, H$.

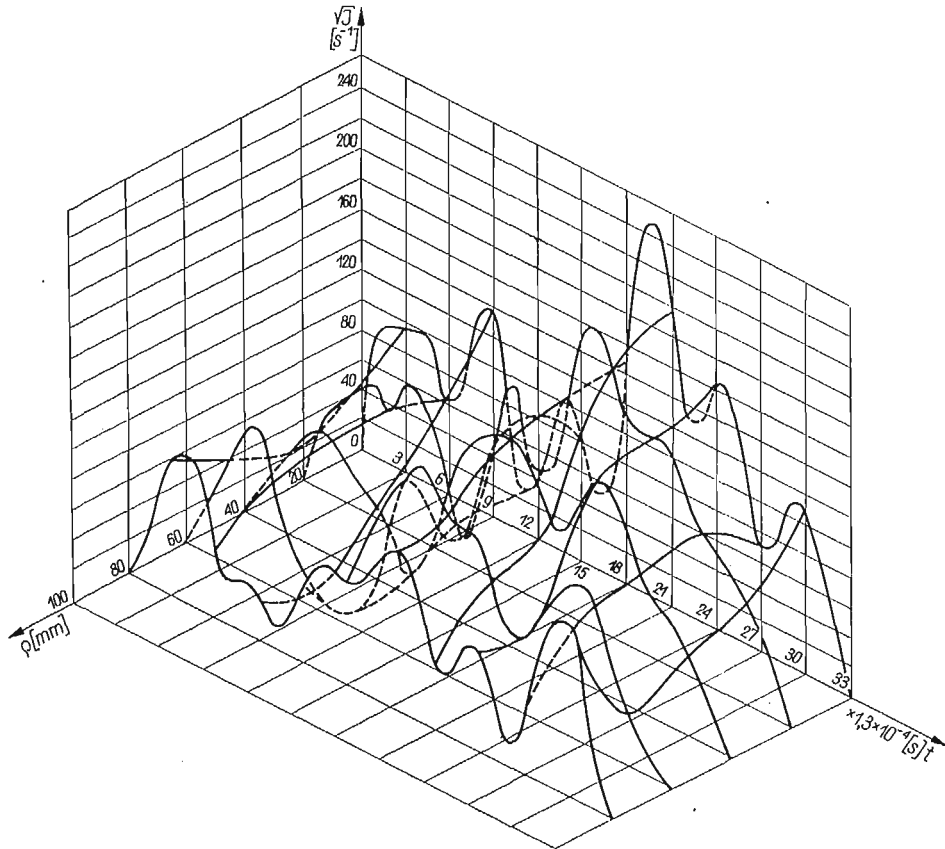
Wyniki tych obliczeń zestawione są na wykresie rys. 18.



Rys. 17

8.5. Dokładność pomiarów. Pomiar stereofotogrametryczny obarczony jest błędami wynikającymi z błędów zdjęcia fotograficznego, błędów pomiaru filmu i błędów określenia położenia punktów kontrolnych. W wyniku analizy [1] zależności (2.2.1) i (2.2.2) otrzymujemy błędy bezwzględne współrzędnych fotogrametrycznych z_i dla $i = 1, 2, 3$ (rys. 4 i 11) w granicach $\pm(0,5+0,67)$ mm. Błędy te maleją przy przechodzeniu do różnic tych współrzędnych przy określaniu kształtu powłoki w trakcie procesu jej deformacji. Wyniki obliczeń prędkości przemieszczenia, współczynników wydłużeń, składowych odkształceń i prędkości odkształceń są obarczone dodatkowo błędami wynikającymi ze stosowania przyrostowych metod obliczania numerycznego.

Otrzymane wyniki pomiarów metodą stereofotogrametryczną wykazują dużą zgodność z wynikami pomiaru kształtu powłoki i jej odkształceń zmierzonych po zakończeniu procesu metodami metrologicznymi, jak również z wynikami pomiaru przemieszczeń punktu środkowego metodą fotoelektryczną [1].



Rys. 18

9. Uwagi końcowe

Badany proces wypuklania cienkiej płyty kołowej jest szczególnym przypadkiem procesu obróbki plastycznej za pomocą materiałów wybuchowych (tłoczenie wybuchowe), elektrycznych wyładowań iskrowych w cieczy (tłoczenie elektrohydrodynamiczne) lub pola elektromagnetycznego (tłoczenie magnetyczne). Otrzymane wyniki pomiarów deformacji plastycznej cienkiej płyty kołowej obciążonej impulsowo ciśnieniem $p(\rho, t)$ dają wszechstronny obraz jej przebiegu. Pozwala to na wyjaśnienie przebiegu procesu badanego i umożliwia odtworzenie przebiegu podobnych geometrycznie procesów z zakresu metod dynamicznych obróbki plastycznej tłoczenia.

Przedstawiona metoda pomiaru może być z powodzeniem stosowana do pomiarów przemieszczeń skończonych w innych procesach krótkotrwałych, szczególnie w przypadkach, kiedy metody stykowych pomiarów są niewystarczające.

Literatura cytowana w tekście

1. T. BEDNARSKI, *Plastyczne wypuklanie cienkiej płyty kołowej obciążonej impulsem ciśnienia*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1967.
2. T. BEDNARSKI, *Plastyczne wypuklanie cienkiej płyty kołowej obciążonej impulsem ciśnienia*, Rozpr. Inżyn., **17**, 1 (1969).
3. T. BEDNARSKI, *Stereofotogrametryczna metoda pomiaru przemieszczeń i odkształceń przy pomocy szybkobieżnej kamery filmowej*, Sprawozdanie dla Instytutu Mechaniki Precyzyjnej, Politechnika Warszawska, Warszawa 1969.
4. T. BEDNARSKI, M. WAKALSKI, *Pomiar odkształceń w dynamicznych procesach kształtowania cienkich płyt*, Przegl. Mech., **6**, **28** (1969), 165–169.
5. А. С. ДУБОВИК, *Фотографическая регистрация быстропотекающих процессов*, Издательство Наука, Москва 1964.
6. K. S. KUNZ, *Numerical Analysis*, New York, Toronto, London 1957.
7. А. Н. ЛОБАНОВ, *Фототопография*, Издательство Недра, Москва 1968.
8. M. B. PIASECKI, *Fotogrametria naziemna i lotnicza*, Warszawa 1968.
9. J. S. RIENEHART, J. PEARSON, *Explosive working of metals*, New York 1963.
10. T. BEDNARSKI, *The dynamic deformation of a circular membrane*, Inter. J. Mech. Sci., **11**, 12 (1969), 949-959.

Резюме

ИЗМЕРЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРУГОВОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКЕ

Описывается стереофотограмметрический метод измерения перемещений материальных точек в трехмерном пространстве. Измерения проведены с помощью скоростной камеры со стереоскопической приставкой приспособленных к исследованию кратковременных и скоростных процессов. Приложение описываемого метода показано на примере измерения распределения перемещений, скоростей перемещений, деформации и скорости деформации в процессе пластического деформирования аллюминиевой круговой мембраны при импульсной нагрузке давлением от взрыва в воде. В результате измерений получены стереоскопические пары снимков заснятых через равные промежутки времени. Анализ снимков и расчеты проведенные на основе полученных данных дали возможность определить изменения формы мембраны, поле скоростей перемещений, поле деформации и скорости деформации. Результаты измерений представлены графически.

Summary

THE MEASUREMENT OF THE DYNAMIC PLASTIC DEFORMATION OF A CIRCULAR MEMBRANE

The stereophotogrammetric method of measuring the displacements in a three-dimensional space, by means of a high-speed film camera equipped with a stereoscopic attachment adapted for examination of instantaneous or very rapid processes, is presented in this article. The method is applied to the measuring

of displacements, displacement rates, strains, and strain rates in the course of plastic deformation of an aluminium circular membrane subjected to impact loading produced by a detonation of explosives in water. As a result, stereophoto frames taken at constant speed have been obtained. Measurement of the frames and suitable calculations which were carried out made it possible to estimate the membrane deformation displacement rate field, strain field as well as the strain rate field in the course of the deformation process. The results are shown in diagrams.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

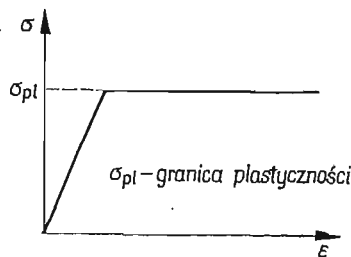
Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lutego 1970 r.

GRANICE OBSZARÓW PLASTYCZNYCH W ROZCIĄGANYCH ELEMENTACH
Z KARBEM LUB OTWOREM

JACEK K A P K O W Ś K I (WARSZAWA)

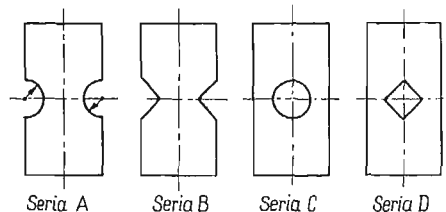
1. Wprowadzenie

W praktyce konstruktorskiej spotyka się wiele przypadków zastosowania rozciąganych prętów z karbami lub otworami o różnym kształcie. W sąsiedztwie tych nagłych zmian przekroju pojawiają się spiętrzenia naprężeń, które prowadzą do powstania stref uplastycznionych wskutek przekroczenia granicy plastyczności w tych obszarach. W miarę dalszego



Rys. 1

procesu wydłużania pręta te tzw. enklawy plastyczne rozszerzają się i w pewnym momencie dochodzi do uplastycznienia całego przekroju pręta. W technicznych zastosowaniach moment ten określa maksymalne obciążenie, jakie może przenieść pręt. Siłę wywołującą



Rys. 2

takie wydłużenie definiuje się jako nośność graniczną pręta. Odpowiada to przyjęciu modelu materiału sprężysto-plastycznego (rys. 1), to znaczy zaniedbaniu wzmocnienia materiału. W rzeczywistości pręt taki wskutek istnienia zjawiska wzmocnienia może prze-

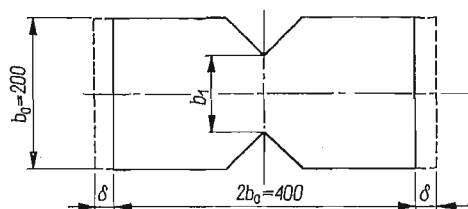
nosić siłę większą, ale związane z tym wydłużenia są tak duże, że praktycznie traci on wartość użytkową szczególnie w konstrukcjach maszynowych.

W niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia rozkładu naprężeń i wyznaczono granice obszarów plastycznych dla czterech serii próbek o kształtach pokazanych na rys. 2. W każdej z serii wzięto pod uwagę próbki o stosunku $b_1/b_0 = 0,25; 0,50; 0,75$.

Wyniki zawarte w niniejszej pracy stanowią kontynuację badań, których rezultaty otrzymane przy innych warunkach brzegowych przedstawione zostały w pracy [12].

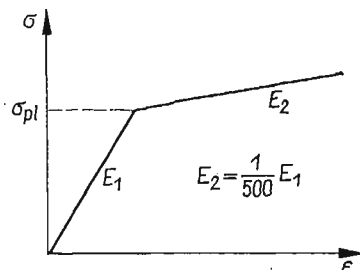
2. Podstawowe założenia

Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej UNIVAC-1107 przy użyciu metody elementów skończonych i przy założeniu płaskiego stanu naprężeń. Rozpatrywane próbki miały proporcje przedstawione na rys. 3.



Rys. 3

Warunkiem brzegowym było założenie równomiernego przemieszczenia δ na końcach próbki. Założono ponadto jednorodność i izotropowość materiału próbki, którego charakterystyka podana jest na rys. 4.



Rys. 4

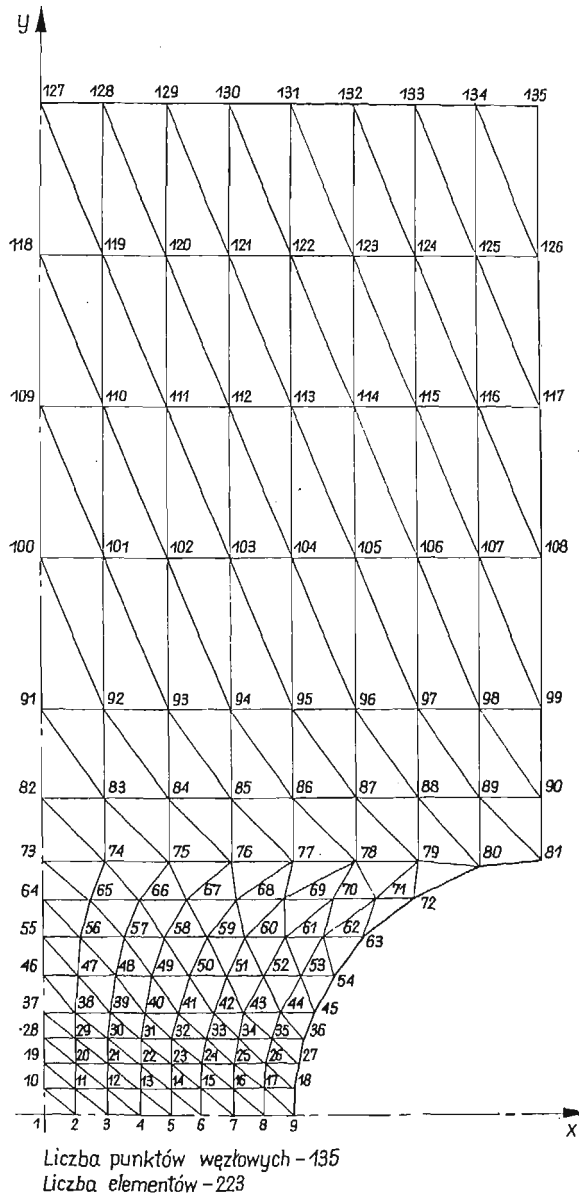
Założenie tego rodzaju charakterystyki z modułem $E_2 \neq 0$ podyktowane zostało specyfiką programu obliczeniowego, który przy $E_2 = 0$ prowadziłby do nieoznaczoności. Jednakże wydaje się, że przyjęcie $E_2 = 0,2\% E_1$ dostatecznie dokładnie odwzorowuje sprężysto-plastyczny model materiału.

Osiągnięcie stanu plastycznego zostało określone według hipotezy energii odkształcenia postaciowego Hubera-Misesa. W warunkach płaskiego stanu naprężenia kryterium z niej wynikające ma postać

$$(2.1) \quad \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_{pl}^2.$$

3. Metoda rozwiązania

Do rozwiązania postawionego problemu znalezienia rozkładu naprężeń zastosowano metodę elementów skończonych opisaną w [9] i [10].



Rys. 5

Ciągła płaska struktura zastąpiona została przez skończoną liczbę elementów trójkątnych połączonych w skończonej liczbie punktów węzłowych. Przykład takiego podziału pokazany jest na rys. 5. Liczba elementów i ich wymiary zawsze określone są przez wy-

maganą dokładność rachunku. W strefach gdzie spodziewany jest duży gradient naprężeń należy zakładać elementy odpowiednio mniejsze. Odształcenia ε_x , ε_y , γ_{xy} przy tym sposobie analizy zakładane są jako stałe w obrębie danego elementu. Przeto i naprężenia σ_x , σ_y , i τ_{xy} , które działają wzdłuż brzegów elementu są również stałe. Te naprężenia zastępowane są wypadkowymi działającymi w rogach elementu i nazywanymi *obciążeniami punktów węzłowych*.

Równowaga układu elementów może być wyrażona następującym równaniem macierzowym

$$(3.1) \quad [R] = [K][r],$$

gdzie $[R]$ jest macierzą obciążeń punktów węzłowych, $[K]$ — macierzą sztywności układu elementów, $[r]$ — macierzą przemieszczeń punktów węzłowych.

Macierz sztywności układu elementów zbudowana jest z podmacierzy opisujących sztywności poszczególnych elementów. Przyjęto następującą zależność macierzową pomiędzy naprężeniami i odształceniami dla elementu

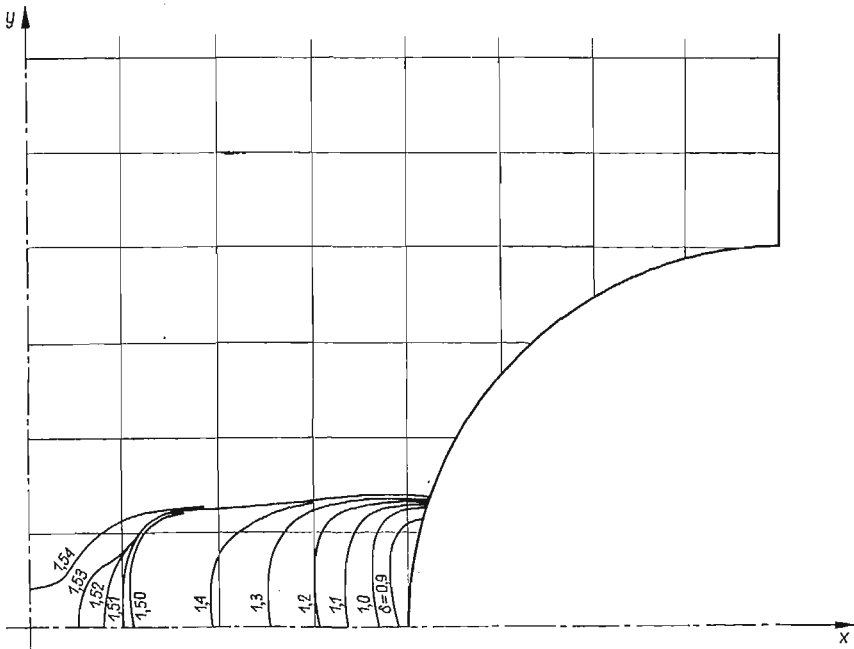
$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

W przypadku rozwiązania sprężystego potrzebne jest tylko jednokrotne rozwiązanie układu (3.1). Wartości naprężeń przy innych obciążeniach mogą być otrzymane drogą liniowej ekstrapolacji. Przy analizie stanów sprężysto-plastycznych stosuje się procedurę kolejnych rozwiązań przy niewielkich wzrostach obciążenia. Odpowiada to zastąpieniu analizy nieliniowej przez sumę rozwiązań liniowych.

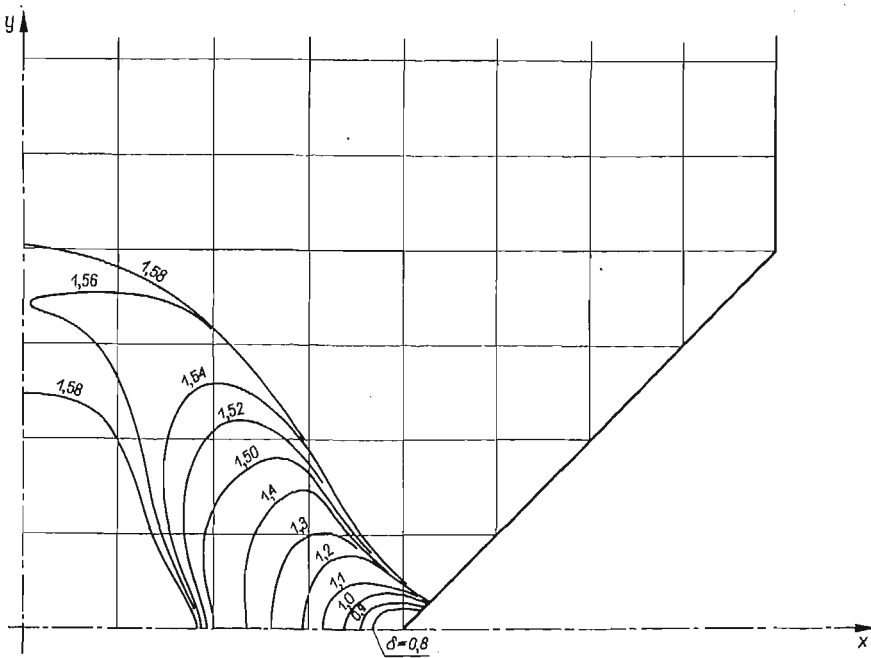
W niniejszej pracy obliczenia rozpoczynały się w zakresie sprężystym przy wstawieniu wartości E_1 i ν do macierzy sztywności. Procedura zawierała obliczenie naprężeń zredukowanych według (2.1) w każdym elemencie. Jeśli w jakimkolwiek elemencie naprężenie zredukowane osiągnęło wartość granicy plastyczności, wtedy w podmacierzy sztywności tego elementu wstawione zostało $E_2 = 1/500 E_1$ i $\nu = 0,5$ zamiast E_1 i ν . Ta czynność powtarzana była po każdym wzroście przemieszczenia δ . Obliczenie jednego przykładu zawarte było w 35–40 krokach. Dane wyjściowe podawały oprócz naprężeń i przemieszczeń dla każdego elementu i punktu węzłowego również naprężenia zredukowane, co pozwoliło wyznaczyć granice obszarów uplastycznionych. Zakończenie obliczeń następowało w chwili, gdy uplastyczniony został cały przekrój próbki i zwiększanie wydłużenia nie powodowało wzrostu naprężeń.

4. Wyniki obliczeń

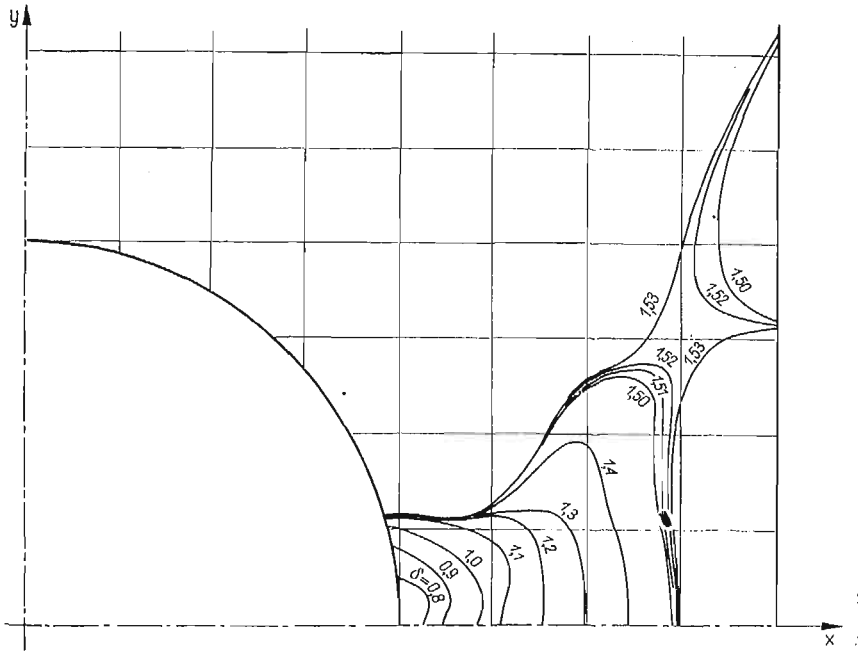
Na rysunkach 6–9 przedstawione są granice obszarów plastycznych przy danych wartościach przemieszczenia δ dla wybranych z każdej serii próbek o przewężeniu $b_1/b_0 = 0,5$.



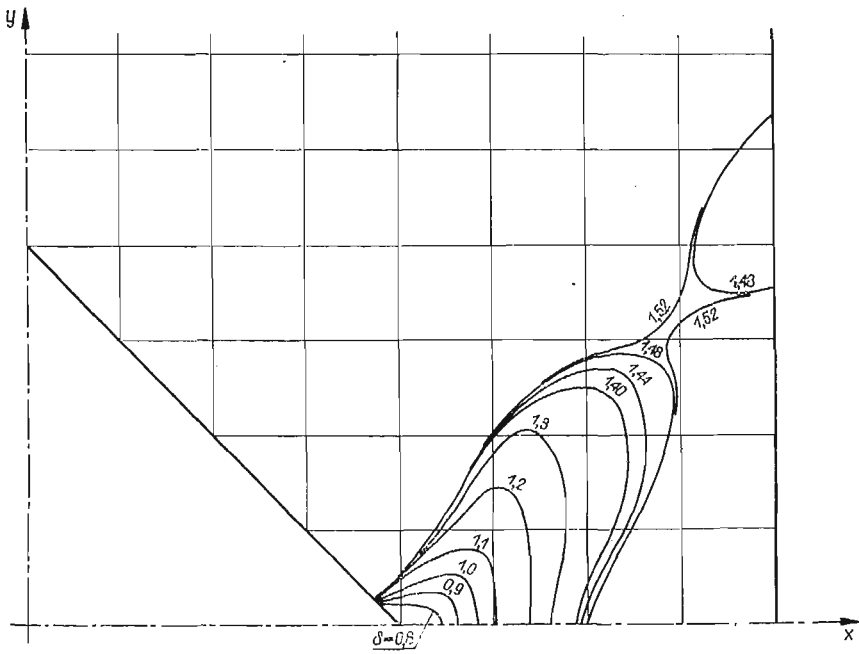
Rys. 6



Rys. 7

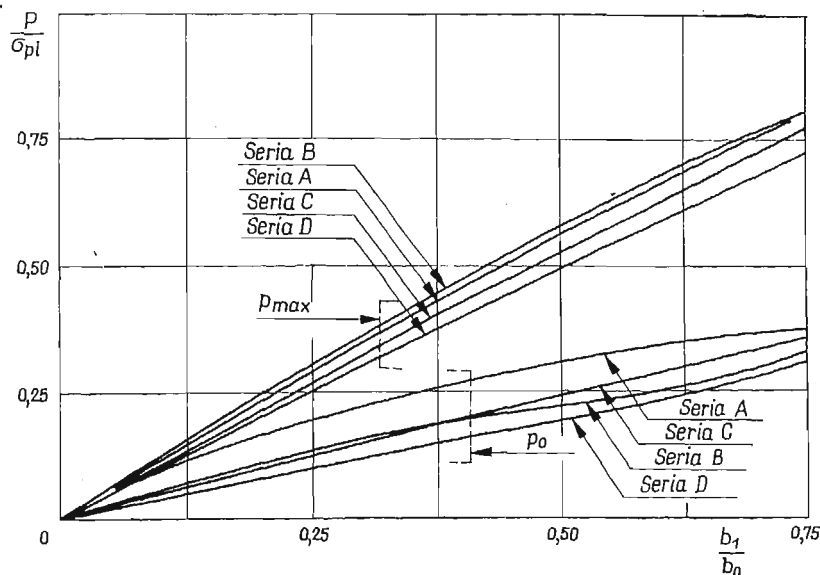


Rys. 8



Rys. 9

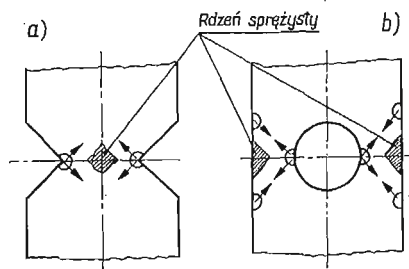
Na rysunku 10 wykreślono zależność obciążenia na końcu próbki powodującego pierwsze odkształcenia plastyczne (p_0) i obciążenia maksymalnego (p_{max}) od stosunku b_1/b_0 . Wielkości te wyznaczono przez planimetrywanie wykresu rozkładu naprężeń na końcach próbki i obliczenie wartości średniej odnoszonej potem do granicy plastyczności.



Rys. 10

5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wydaje się, że metoda elementów skończonych może być używana do rozwiązywania tego rodzaju problemów. Rozwiązanie polega na przeprowadzeniu odpowiedniego podziału na elementy oraz wprowadzeniu współrzędnych opisujących układ elementów i punktów węzłowych do programu. Ponadto do programu wprowadza się odpowiednie dane dotyczące warunków brzegowych. Jest zrozumia-



Rys. 11

łe, że dąży się zawsze do jak najmniejszych wymiarów elementów, jednakże należy pamiętać, że ich liczba ograniczona jest pojemnością pamięci maszyny liczącej.

Ujemną stroną metody jest względnie duży błąd otrzymywany przy wartościach naprężeń w punktach brzegowych. Tę trudność można przezwyciężyć przez rozpatrywanie naprężeń w elementach, a nie w punktach węzłowych. Jednak to znów wymaga zmniejszenia wymiarów elementów.

Przechodząc do omówienia wyników obliczeń należy zauważyć, że tylko w kilku przypadkach proces uplastycznienia przesuwają się wzdłuż osi najmniejszego przekroju. W próbkach serii *B* kierunek uplastycznienia odchyłony jest znacznie od tej linii. W sąsiedztwie geometrycznego środka próbki pozostaje rdzeń sprężysty, podczas gdy połączenie obszarów plastycznych następuje w znacznej odległości od tego punktu (rys. 11a). W próbkach serii *C* i *D* (z otworami) oprócz obszarów plastycznych powstających przy otworze, powstają inne na podłużnych brzegach próbki (rys. 11b). Po połączeniu się tych obszarów, w pobliżu osi symetrii na podłużnych brzegach pozostają obszary sprężyste.

Literatura cytowana w tekście

1. D. N. ALLEN, R. SOUTHWELL, *Plastic straining in two-dimensional stress systems*, Phil. Trans. Roy. Soc., No. 850, 1950.
2. P. V. MARCALL, I. D. KING, *Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method*, Int. J. Mech. Sci. 3, 9 (1967).
3. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problem of plastic flow notched bar under tension*, Phil. Mag., 41, 1950.
4. D. J. HAYES, P. V. MARCALL, *Determination of upper bounds for problems in plane stress using finite elements techniques*, Int. J. Mech. Sci., 5, 9 (1967).
5. P. S. THEOCARIS, *Experimental solution of elastic-plastic plane stress problems*, J. Appl. Mech., Dec. 1962.
6. P. S. THEOCARIS, E. MARKETOS, *Elastic-plastic strain and stress distribution in notched plates under plane stress*, J. Mech. Phys. Solids, July 1963.
7. R. T. AULT, J. W. SPRETNACK, *Initial yielding and fracture in notched sheet molybdenum*, Int. J. Mech. Sci., 1965.
8. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem*, Mech. Teoret. Stos., 3, 1965.
9. E. L. WILSON, *Finite element analysis of two-dimensional structures*, Structural Engineering Laboratory, University of California, Rep. No. 63-2, June 1963.
10. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, London 1967.
11. M. J. TURNER, H. C. MARTIN, R. C. WEIKEL, *Further development and applications of the stiffness method, agard, structures and material panel*, Paris 1962.
12. J. KAPKOWSKI, *Finite element study of elastic-plastic stress distribution, in notched specimens under tension*, Meddelelse Institutt for Skipsbygging II. Norges Tekniske Høgskole, Trondheim 1968.

Р е з ю м е

ГРАНИЦЫ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ В РАСТЯГИВАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ С НАДРЕЗОМ ИЛИ ОТВЕРСТИЕМ

Описан анализ упруго-пластического напряженного состояния в растягиваемых образцах с надрезом либо отверстием. Расчеты проделаны при предположении краевых условий в виде равномерного перемещения на концах образца. Рассматривались четыре серии образцов (рис. 2). Для

анализа был использован метод конечных элементов применительно к треугольным элементам в однородном напряженном состоянии. Для расчетов было принято условие пластичности Губера-Мизеса.

Результаты расчетов полученные с помощью цифровой машины показаны на графиках изображающих распространение пластических областей. Приводятся также графики указывающие начало пластической деформации и предельную нагрузку образцов для разных величин вырезов.

S u m m a r y

ELASTIC-PLASTIC BOUNDARIES IN NOTCHED SPECIMENS UNDER TENSION

The paper contains a description of an incremental elastic-plastic analysis of plane stresses in specimens with notches or holes subjected to tension. The calculations were made under the assumption of uniform displacements at the ends of the specimens. Four series of specimens were studied (Fig. 2). The finite element method of stress analysis with uniformly stressed triangular elements was used, the Huber-Mises yield condition being assumed.

The results of calculations, obtained by means of a Univac 1107-computer, are presented in diagrams showing the extension of the elastic-plastic boundary. Diagrams of the first plastic straining loads and maximum load carrying capacities are also shown for various types of notches.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lutego 1970 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

IV SYMPOZJON PTMTS POŚWIĘCONY REOLOGII

Kolejny, można powiedzieć już tradycyjny, IV sympozion poświęcony reologii odbył się we Wrocławiu w czasie od 27 do 29 listopada 1969 r. Organizatorem sympozjonu był Oddział Wrocławski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Obrady odbywały się w auli Politechniki Wrocławskiej.

Jak poprzednie, tak i ten sympozion cieszył się dużym zainteresowaniem, o czym świadczą liczby zgłoszonych 38 referatów i wygłoszonych 6 komunikatów. Referaty i komunikaty podzielono na cztery grupy problemowe, mianowicie: reologia metali i polimerów (17 referatów i 2 komunikaty), reologia konstrukcji (6 referatów i 2 komunikaty), reologia betonu (8 referatów) i reologia gruntów (7 referatów i 2 komunikaty).

Referaty zostały wydrukowane in extenso w publikacji pt. *IV Sympozion poświęcony reologii, referaty*, t. I i II, Wrocław, 1969, Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddział we Wrocławiu.*)

W sympozjonie wzięło udział 130 uczestników z wszystkich ośrodków naukowych kraju.

Referaty generalne i przebieg dyskusji przedstawione są w niniejszym Biuletynie.

PROGNOZY ROZWOJOWE Z DZIEDZINY MECHANIKI UKŁADÓW DYSKRETNÝCH

W ostatnich latach nastąpił w nauce światowej wybitny wzrost zainteresowań układami dyskretnymi. Jest to wynikiem zmiany metodyki prowadzenia prac badawczych w wielu dyscyplinach naukowych. Główny ciężar pracy naukowej w tych dyscyplinach został przesunięty na sformułowanie problemu, określenie celu pracy i doprowadzenie rozwiązania do takiego stanu, aby poprzez układ dyskretny końcowe rozwiązanie otrzymać przy pomocy maszyn analogowych i cyfrowych. W ten sposób zmniejsza się trudności związane z rozwiązaniem problemu i skraca czas od postawienia problemu do jego rozwiązania.

Również zapotrzebowanie społeczne na prace z mechaniki układów dyskretnych będzie coraz większe. Prace te znajdują zastosowanie w tak ważnych dziedzinach, jak dynamika maszyn i procesów, kompleksowa automatyzacja, wibrotechnika, technika raketowa, lotnictwo itd.

Uwzględniając potrzeby konieczne dla rozwoju tych dziedzin należy skoncentrować badania układów dyskretnych w latach 1971–1975 na następujących dyscyplinach:

1. Stateczność i optymalizacja układów dyskretnych ze szczególnym uwzględnieniem układów stochastycznych.

*) Oddział Wrocławski PTMTS dysponuje jeszcze pewną liczbę egzemplarzy wydawnictwa.

2. Metody syntezy optymalnej z uwzględnieniem algorytmów.

3. Modelowanie zjawisk fizycznych układami dyskretnymi.

4. Rozwiązanie wybranych zagadnień z mechaniki analitycznej w powiązaniu z problematyką określoną w punktach 1, 2, 3.

Problematyka powyższych dyscyplin jest bardzo szeroka i z tego względu omówimy główne kierunki badań, które powinny być intensywnie rozwijane.}

W związku z rozwojem teorii regulacji automatycznej i sterowania oraz teorii maszyn i mechanizmów należy się spodziewać nie tylko rozwoju ilościowego, ale przede wszystkim rozwoju jakościowego, który powinien doprowadzić do budowy maszyn adaptacyjnych opartych na programowaniu heurystycznym.

Rozwój automatyzacji wyraża się wzrostem niezawodności i szybkości przetwarzania informacji, a w efekcie wzrostem skuteczności funkcjonowania systemu człowiek-maszyna.

Wiążą się z tym badania dotyczące układów zdeterminowanych i stochastycznych w zakresie metod badania stateczności, przebiegu drgań oraz optymalizacji i stabilizacji. Podstawą tych badań jest teoria układów anholonomicznych. Należy więc rozwijać prace teoretyczne i doświadczalne z mechaniki teoretycznej.

Istotnymi zagadnieniami w tej dziedzinie są:

- drgania samowzбудne układów o wielu stopniach swobody ze słabymi i silnymi sprzężeniami,
- ruch układu o wielu stopniach swobody przy więzach nieholonomicznych dwustronnych i jednostronnych,

- stabilizacja układów niestabilnych z uwzględnieniem warunku optymalizującego.

Ze względu na unowocześnienie konstrukcji i technologii maszyn należy rozwijać prace badawcze dotyczące syntezy optymalnej układów zdeterminowanych i stochastycznych. Kryteria optymalizacji powinny być oparte na zasadach wariacyjnych wchodzących w zakres mechaniki teoretycznej. Metody syntezy optymalnej należy rozwijać w oparciu o równania Eulera-Lagrange'a i Hamiltona.

W zakresie budowy maszyn postęp w unowocześnieniu technologii posiada zasadnicze znaczenie. Wymaga on szerokiego rozwoju badań związanych z doskonaleniem procesów kształtowania elementów maszyn. W związku z tym na plan pierwszy wysuwają się badania mające na celu wierniejsze opisanie zachowania się ciał rzeczywistych przez wprowadzenie bardziej złożonych modeli odzwierciedlających własności reologiczne materiału. Wiążą się z tym kierunki badań nad modelowaniem zjawisk fizycznych układami dyskretnymi. Między innymi należy rozwijać prace badawcze w dziedzinach:

- równoważności modeli ciągłych i dyskretnych z zachowaniem wyróżnionych własności,
- zastępowanie modeli dyskretnych prostszymi ze względu na liczbę równań ruchu,
- modelowanie warunków brzegowych nieliniowych,
- modelowanie procesu tłumienia.

W pracach o powyższej tematyce należy brać pod uwagę układy zdeterminowane i stochastyczne.

Rozwój prac poznawczych w dziedzinie mechaniki układów dyskretnych jest uzależniony od rozwoju prac z mechaniki teoretycznej, a w szczególności z mechaniki analitycznej. Układy dyskretne posiadają interpretację fizyczną jako układy punktów materialnych i mogą być przedmiotem rozważań w różnych przestrzeniach topologicznych w oparciu o stale rozwijające się takie działy matematyki, jak równania różniczkowe i całkowe, algebra różności geometrycznych, rachunek macierzowy, rachunek wariacyjny, topologia, analiza funkcyjna, teoria procesów stochastycznych itd.

W związku z tym należy rozwijać zainteresowanie mechaniką teoretyczną szczególnie wśród młodej kadry naukowej.

W ostatnich latach dzięki szerokiej działalności Polskiej Akademii Nauk w powiązaniu z katedrami wyższych uczelni nastąpił wzrost zainteresowań mechaniką teoretyczną. Również w programach nauczania mechaniki w wyższych uczelniach większy nacisk kładzie się na mechanikę teoretyczną i analityczną. Należy w dalszym ciągu problematykę tych dyscyplin rozwijać przez prace doktorskie i habilitacyjne oraz seminaria i konferencje naukowe.

Władysław Bogusz, Kraków

KONFERENCJA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W WARNIE

W dniach 4-6 listopada 1969 r. odbyła się w Drużbie (koło Warny) konferencja zorganizowana przez Narodowy Komitet Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej przy Bułgarskiej Akademii Nauk. W obradach wzięło udział 174 uczestników, w tym 45 zagranicznych. Polskę reprezentowali profesorowie W. NOWACKI, W. OLSZAK i A. SAWCZUK oraz dr M. JANAS.

W otwierającym konferencję referacie G. BRANKOW omówił osiągnięcia mechaniki bułgarskiej. W ostatnich latach uwaga badaczy bułgarskich skupiała się szczególnie na mechanice polimerów, na mechanice sejsmicznej i na rozwoju metod matematycznych. Jako kierunki wymagające intensywnego rozwoju w przyszłości uznano: a) nieliniową mechanikę ośrodków ciągłych z uwzględnieniem sprzężeń termicznych i magneto-elektrycznych oraz efektów fizyko-chemicznych; b) biomechanikę ciała ludzkiego; c) mechanikę polimerów; d) analizę (nośność graniczną, drgania, stateczność) powłok przy dużych ugięciach; e) zastosowania w mechanice nowoczesnych metod obliczeniowych.

Spośród trzech referatów plenarnych oba referaty specjalistyczne wygłoszone były przez Polaków — W. NOWACKIEGO (*Naprężenia momentowe w termosprężystości*) i W. OLSZAKA (*Efekty reologiczne w nieliniowej teorii powłok*). W trzecim referacie A. ISZLIŃSKI zajął się ogólnymi aspektami rozwoju mechaniki radzieckiej. Nawiązując do przykładów zastosowań praktycznych rozwiązań uznawanych w chwili ich powstania na akademickie, podkreślił on konieczność wyprzedzania praktyki przez teorię i prowadzenia badań na możliwie szerokim froncie.

W czasie obrad wygłoszono 141 referatów, w tym 36 zagranicznych. O kierunkach zainteresowań uczestników konferencji może dać pojęcie podział referatów pomiędzy sekcje tematyczne: mechanika analityczna — 9 prac, teoria stateczności ruchu — 11, mechanika cieczy — 7, teoria sprężystości i powłok — 26, teoria plastyczności — 18, mechanika polimerów — 24, teoria konstrukcji — 19 i teoria maszyn — 24. Oprócz już wymienionych, uczestnicy polscy wygłoszili referaty: A. SAWCZUK *Teoria dużych ugięć powłok plastycznych* i M. JANAS *Sily membranowe i efekt tarczowy w płytach*. Z poloników wymienić też należałoby interesujące prace A. BAŁTOWA, K. JAMBOLEWA i A. RACZEWA, których ścisła współpraca z IPPT PAN pozwala zaliczyć do wychowanków tego Instytutu.

Konferencja zorganizowana była z dużym rozmachem. Ze względu na liczną obsadę i szeroki zakres prac nazwana została przez Prezesa BAN A. BAŁEWSKIEGO pierwszym kongresem mechaniki bułgarskiej.

Marek Janas, Warszawa

SYMPOZJON METODY STATYSTYCZNE W MECHANICE

Szczyrk, 17-23 lutego 1970 r.

W dniach od 17 do 23 lutego 1970 roku odbył się w Szczyрку sympozjon, zorganizowany przez Oddział Gliwicki PTMTS, poświęcony aktualnym problemom zastosowania różnych metod statystycznych w mechanice. Sympozjon zgromadził 79 uczestników, przedstawicieli uczelni i instytutów krajowych zainteresowanych powyższą tematyką. Na sympozjon zgłoszono 39 referatów, których obszernie streszczenia wydano drukiem w postaci specjalnego zeszytu w nakładzie 250 sztuk. Tytuły referatów podajemy poniżej:

1. BIERNATOWSKI, K., *Rachunek prawdopodobieństwa w mechanice gruntów.*
2. BOGUSZ, Wł., *Stateczność techniczna układów stochastycznych.*
3. BOGUSZ, Wł., *Związek między funkcją Lapunowa a gęstością prawdopodobieństwa.*
4. BRAMSKI, St., CZERKAS, M., WIKLIK, K., *Badania wpływu przypadkowych podmuchów wiatru na ruch śmigłowca z autostabilizatorem.*

5. CZOGAŁA, E., CHMIELNIAK, T., *Wpływ skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła na losowe charakterystyki rozkładu temperatur przy stochastycznych źródłach ciepła.*
6. CHMIELNIAK, T., CZOGAŁA, E. *Rozkład temperatury w przecie przy przypadkowych położeniach źródeł ciepła.*
7. CHMIELEWSKI, T., *Eksperymentalne badania drgań stochastycznego odpowiednika współczynnika dynamicznego.*
8. CHMIELEWSKI, W., KAMIŃSKI, E., *Wielokanałowe analizatory cyfrowe do badań statystycznych.*
9. CZUBASZEK, J., *Zdarzenia losowe w pomiarach wartości wytrzymałości doraźnej oraz granicznego odkształcenia ścinanych ośrodków sypkich.*
10. DIETRZYCH, M., KOPYT, T., OZIMOWSKI, Wł., *O statystycznym ujęciu obciążenia dynamicznego zębów kół zębatych.*
11. JAŻWIŃSKI, J., TOMASZEK, H., *O pewnej metodzie przybliżonej oceny niezawodności elementów mechanicznych.*
12. KAWULOK, St., *Zastosowanie metody korelacyjnej do analizy wyników badań obciążenia zbrojenia szybowego.*
13. KOLENDĄ, Z., *Uzgadnianie bilansów energii w procesach wymiany ciepła.*
14. KUBIK, J., *Problem ekstremalnych obciążeń losowych.*
15. LAMBER, T., WOJNAROWSKI, J., *Wpływ metod pomiaru na przedział ufności naprężeń własnych w drutach stalowych.*
16. MULLER, L., *Zastosowania przyrządów do przetwarzania danych pomiarowych.*
17. MURZEWSKI, J., WINIARZ, A., *Kumulacja losowych impulsów obciążenia konstrukcji.*
18. OPOLSKI, T., LEWANDOWSKI, S., GOŁĘBIOWSKA, M., *Statystyczna weryfikacja rozkładów wielkości ziarn stali.*
19. OSIŃSKI, Zb., *Problemy stochastyczne w drganiach nieliniowych.*
20. RUSEK, P., *Zastosowanie funkcji korelacyjnych do oceny jakości świdrów gryzowych.*
21. SKALMIERSKI, B., *Niektóre metody statystyczne w dynamice układów mechanicznych.*
22. SKALMIERSKI, B., CZOGAŁA, E., *O pewnym problemie ugięć powłoki cylindrycznej pod wpływem obciążeń stochastycznych.*
23. STRUPCZEWSKI, A., ŻYSZKOWSKI, W., *Zastosowanie metody statystycznej do wyznaczania współczynników gorącego miejsca w wysokostrumieniowym reaktorze badawczym.*
24. SZARANIEC, B., *Metoda numeryczna rozwiązania układu równań różniczkowych z funkcjami losowymi*
25. SZARGUT, J., *Zastosowania rachunku wyrównawczego w technice cieplnej.*
26. TYLIKOWSKI, A., CHMIELNIAK, T., *Przypadkowy rozkład temperatury w płycie o niejednakowych stałych materiałowych.*
27. TYLIKOWSKI, A., *Geometrycznie nieliniowe drgania przypadkowe płyty prostokątnej.*
28. TYLIKOWSKI, A., *Niestacjonarne drgania przypadkowe wywołane rozruchem pewnych układów transportowych.*
29. WICHER, J., *Identyfikacja nieliniowego układu mechanicznego o wielu stopniach swobody znajdującego się pod działaniem wymuszeń przypadkowych.*
30. WICHER, J., *O współczynnikach linearyzacji statystycznej w metodzie E. D. Zajdenberga.*
31. ZABAWA, M., *Pewna probabilistyczna metoda doboru parametrów układów mechanicznych.*

32. ŻÓŁTOWSKI, J., ZIEMBA, S., *Studia nad specyfiką niezawodności automatycznych linii obrabiarkowych*.
33. POMIERSKI, R., KASPRZAK, W., ŁYSIK, B., *Szacowanie błędów wielkości wyznaczonych z badań doświadczalnych przy pomiarach pośrednich*.

Podczas trwania sympozjonu wygłoszono 26 referatów, natomiast 7 z przyczyn obiektywnych nie mogło być zrealizowanych.

Obrady otworzył prof. dr inż. TADEUSZ KOCHMAŃSKI przewodniczący Zarządu Oddziału Gliwickiego PTMTS. Zebrania naukowe odbywały się codziennie w godzinach popołudniowych. W poszczególnych dniach obradom przewodniczyli: doc. dr inż. BOGDAN SKALMIERSKI, prof. dr inż. ZBIGNIEW OSIŃSKI, prof. dr inż. KAZIMIERZ PI SZCZEK, prof. dr inż. OKTAWIAN POPOWICZ, prof. dr inż. TADEUSZ OPOLSKI i prof. dr inż. JAN SZARGUT. Uczestnicy sympozjonu wykazali duże zainteresowanie problemami poruszonymi w referatach, a liczba dyskutantów wyniosła 59 osób. Ogólnie referaty pod względem tematycznym dzieliły się na kilka grup. Najliczniejsza odnosiła się do procesów stochastycznych, a w szczególności analizy procesów drugiego rzędu. Tak więc metody korelacyjne, spektralne oraz linearyzacji stochastycznej wysunęły się na plan pierwszy ze względu na prostotę i stosunkowo dobre przybliżenie rzeczywistości. Poza tą grupą były referowane prace z zastosowania różnych metod statystycznych do zagadnień technicznych, w tym do problemu niezawodności, problemu współczynnika bezpieczeństwa, zagadnień identyfikacji obiektów itd.

Stosunkowo nieliczna grupa referatów była poświęcona wykorzystaniu równań kinetycznych Fokkera-Plancka do zagadnień nieliniowych. Odrębną grupę, nie mniej ważną, stanowiły referaty przedstawiające metody laboratoryjne pozwalające na bezpośrednią analizę procesów stochastycznych. Dotyczyły one zarówno konstrukcji, jak i eksploatacji nowoczesnej aparatury do przetwarzania danych pomiarowych. W pozostałych referatach wysuwały się na plan pierwszy metody badawcze z uwzględnieniem przypadkowości procesów. Liczba zgłoszonych referatów, ich ciekawa tematyka, szeroki zasięg instytucji naukowych biorących udział w sympozjonie oraz wypowiedzi dyskutantów wskazywały na aktualność tematyki sympozjonu. Obrady odbywały się w «Zagroniu» w pięknej scenerii górskiej. Uczestnicy sympozjonu otrzymali wraz z programem streszczenia referatów zawierające adresy referentów. Do dyspozycji referentów zostały oddane nowoczesne środki audiowizualne, które umożliwiły sprawne zrealizowanie napiętego programu obrad. Na zakończenie obrad w dyskusji ogólnej, której przewodniczył prof. dr inż. T. KOCHMAŃSKI, podkreślono duże zainteresowanie tematyką tego sympozjonu i zgłoszono projekt zorganizowania przyszłorocznego sympozjonu pod hasłem «procesy stochastyczne w technice». W czasie wolnym od obrad uczestnicy korzystali ze sportu, spacerów, a wieczorem były wyświetlane filmy o tematyce techniczno-naukowej i wygłaszane prelekcje z przeżyciami.

J. Antoniak, B. Skalmierski, Gliwice

II SYMPOZJUM TECHNIKI WIBRACYJNEJ

W dniach 6 i 7 marca 1970 r. w Auli Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie odbyło się II Ogólnopolskie Sympozjum Techniki Wibracyjnej organizowane przez Krakowski Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Zakład Układów Mechanicznych IPPT PAN w Warszawie oraz Zakłady Dynamiki Maszyn i Automatycznej Regulacji i Mechaniki Technicznej Instytutu Podstaw Budowy Maszyn AGH.

W Sympozjum wzięło udział 106 osób z różnych ośrodków naukowych w kraju, instytutów przemysłowych oraz zakładów pracy. Otwarcia Sympozjum dokonał J. M. Rektor AGH prof. JAN ANIOŁA. Wygłoszonych zostało 22 referaty oraz 5 komunikatów.

W referacie pt. *Technika wibracyjna w Polsce* prof. St. ZIEMBY i doc. Z. ENGLA zostały przedstawione

uczestnikom Sympozjum perspektywy oraz prognozy rozwoju tej dyscypliny nauki w Polsce. Zastosowanie drgań w procesach technologicznych oraz polepszenie realizacji innych procesów przez wprowadzenie wibracji. Stwierdzono, że w okresie od ostatniego Sympozjum szczególnie rozwinęły się polskie urządzenia wibruderzeniowe. Prof. W. BOGUSZ w referacie pt. *Optymalizacja urządzeń wibracyjnych* przedstawił zagadnienie optymalizacji konstrukcji maszyn wibracyjnych omawiając różne warunki optymalizujące w odniesieniu do urządzeń transportowych i silnie udarowych. Warunki te zostały określone w oparciu o równania Eulera-Lagrange'a, Hamiltona i zasadę maksimum Pontriagina.

Ruch okresowy układu dwu mas, z których jedna jest przymocowana do sprężyny, druga swobodna, przy czym ruch mas jest ograniczony z jednej strony dwoma ścianami o współczynniku restytucji $R_0 = 1$, a z drugiej wzajemnym zderzeniem się mas, był omówiony w pracy prof. E. KARAŚKIEWICZA pt. *Drgania wymuszone układu dwumasowego*.

Analizę układu wibrudarowego przeprowadzili w referacie pt. *Analiza pewnego układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody z wymuszeniem impulsowym* doc. Z. ENGEL i dr St. KASPRZYK. W pracy przeprowadzono analizę tego układu pod kątem określenia amplitudy i częstości siły wymuszającej przy ustalonych pozostałych parametrach tak, aby zderzenie masy uderzającej z podłożem następowało z możliwie maksymalną prędkością. Przeanalizowano również wpływ uderzeń na stateczność ruchu układu.

Prof. K. PISZCZEK w swoim referacie pt. *Wpływ drgań mechanicznych na organizm ludzki w ujęciu probabilistycznym* przedstawił szkodliwy wpływ drgań na organizm ludzki oraz podał pewne wskazówki na podstawie których ten ujemny wpływ może być zmniejszony.

W zastępstwie nieobecnego dyr. B. KOSSOWSKIEGO, mgr inż. KOLENDA wygłosił referat pt. *Maszyny wibracyjne produkowane przez ZREMB*, w którym przedstawiono osiągnięcia ZREMB-u w zakresie budowy nowoczesnych konstrukcji wibracyjnych maszyn budowlanych.

W referacie pt. *Niektóre aspekty ruchu warstwy nosiwa na rynnicy przenośnika wibracyjnego* doc. A. CZUBAK wyprowadził równanie różniczkowe opisujące własności tej warstwy oraz zależność na czynnik korygujący do wzoru na średnią prędkość transportowania. Stosując ten skorygowany wzór trzeba wziąć pod uwagę grubość warstwy nosiwa oraz kąt pochylenia rynnicy przenośnika.

Zagadnienie wpływu drgań na proces ciągnięcia drutu przedstawił w pracy pt. *Wpływ wibracji na parametry siłowe w procesie ciągnięcia* doc. J. BAZAN i dr A. PASIERB. Stwierdzili doświadczalnie zjawisko zmniejszania sił ciągnięcia w procesie ciągnięcia drutu Al i Cu na skutek drgań obrotowych wokół osi ciągniętego drutu.

Doc. M. ZABAWA w referacie *O pewnej metodzie syntezy układów drgających zapewniającej dostatecznie dużą amplitudę drgań w przypadku obciążeń losowych* przedstawił warunek, jaki musi spełniać wartość przeciętna i wariancja współrzędnej jeżeli funkcja rozkładu jest nie znana. Natomiast jeśli funkcja rozkładu jest znana, to z innego warunku można dobrać jej parametry tak, aby były spełnione założenia stawiane układowi drgającemu.

Niektóre aspekty wibracyjnego brykietowania wiórów metalowych to tytuł referatu wygłoszonego przez doc. Z. DRZYMAŁĘ. Autor porównuje własności mechaniczne brykietów metalowych brykietowanych metodą tradycyjną tzn. przy obciążeniu statycznym z własnościami brykietów produkowanych z udziałem drgań. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono dużą przydatność wibracyjnego brykietowania wiórów w porównaniu z tradycyjnym procesem brykietowania.

W pracy dra C. CEMPLA pt. *Drgania uderzeniowe prętów* rozpatrzono drgania swobodne uderzeniowe prętów prostych przy założeniu braku strat energii podczas zderzeń pręta ze sztywnym ogranicznikiem. Stosując metodę zszywania rozwiązań otrzymano związki między parametrami uderzeniowymi pręta a jego częstością drgań. Określono także postacie drgań przemieszczenia i prędkości.

Zagadnienie doboru warunków brzegowych w układach ciągłych i dyskretnych przedstawił dr J. GIEGIEL w pracy pt. *Tarcie konstrukcyjne w dyskretnych i ciągłych układach mechanicznych*. Autor stwierdza, że rodzaj zamocowania ma duży wpływ na drgania oraz, że należy i trzeba w rozważaniach teoretycznych uwzględnić w warunkach brzegowych straty na tarcie konstrukcyjne.

W referacie pt. *Analiza teoretyczna i doświadczalna ruchu wibromłota o dwóch stopniach swobody* dr RANISZEWSKI wyprowadził warunki stateczności ruchu wibromłota w oparciu o warunki dopasowania i twierdzenie Szura. Obok analizy teoretycznej przeprowadzona została analiza doświadczalna na modelu wibromłota.

Mgr J. ADAMCZYK, doc. A. BĘBEN, dr St. KASPRZYK w pracy pt. *Wpływ sił udarowych na drgania pewnego układu mechanicznego* przeprowadzili analizę teoretyczną pracy młotka mechanicznego określając niektóre parametry zabezpieczające prawidłowy proces urabiania skały. Wyniki analizy teoretycznej zostały potwierdzone przez badania doświadczalne.

Dr St. BEDNARZ w referacie pt. *Analiza czynników wpływających na częstość drgań normalnych* przeprowadził syntezę układu mającego własności automatycznego uciekania z przedziałów częstości zbliżonych do rezonansowych. Jest to możliwe wtedy, gdy istnieje sprzężenie zwrotne między wymuszeniem dynamicznym oraz źródłem energii włączonym w strukturę układu. Rozważany układ może osiągnąć swój stan graniczny uwarunkowany własnościami ergodycznymi, a w szczególności jego stabilnością.

Analizę teoretyczną i doświadczalną pracy przesiewaczy wibracyjnych przeprowadzili dr T. BANASZEWSKI, mgr J. BLASCHKE, mgr W. CIEŚLIK w pracy pt. *Badania trajektorii rzeszoł przesiewaczy wibracyjnych typu WK-2*. Ustalono przyczyny niezadowolającej pracy tego typu przesiewaczy w warunkach eksploatacyjnych.

Referat mgra inż. T. PIECHA pt. *Wibrometr do pomiaru parametrów drgań o niskich i bardzo niskich częstotliwościach* omawia zasadę działania oraz zalety nowej konstrukcji wibrometru ze «sprężyną» magnetyczną. Przeprowadzono porównanie zakresu stosowalności pomiarów drgań takiego wibrometru z wibrometrem posiadającym astatyczną sprężynę.

W referacie pt. *Analiza pewnego układu wibracyjnego do zagęszczania gruntu* mgr J. ADAMKIEWICZ i mgr S. CZAREŃSKI przeprowadzili analizę teoretyczną zagęszczarki. Na podstawie badań teoretycznych wyprowadzili wzory na pewne parametry zagęszczarki przy narzuconych z góry bądź założonych innych parametrach.

Prawidłowy dobór wymiarów wibromotów w urządzeniach wibro-udcrzeniowych przedstawił w pracy pt. *Wpływ parametrów geometrycznych wibratora bezwładnościowego na zmianę prędkości kątowej* mgr A. ŁOPATA. Autor wyprowadził wzory określające wielkość mimośrodów i masę wibratora, przy których jest najmniejszy skok prędkości kątowej.

W referacie pt. *Dynamiczne tłumienie drgań płyty o dwóch stopniach swobody* mgr J. WAPIENNIK podał przykład stosowania pewnego rodzaju tłumików dynamicznych do tłumienia drgań. Na podstawie analizy teoretycznej określono parametry geometryczne tych tłumików w przypadku drgań płyty o dwóch i jednym stopniu swobody.

Mgr M. HOPP w referacie pt. *Wibracyjne oczyszczanie stożkowych sit szczelinowych OSO* przedstawił proces odwadniania nadalży z układem wibracyjnym i bez niego. Na podstawie obserwacji stwierdzono pozytywny wpływ wibracji na proces oczyszczania szczelin w sitach szczelinowych OSO.

Po wygłoszeniu tych referatów wygłoszono jeszcze 5 komunikatów, z których komunikat mgra L. GŁUCHA pt. *Badania okresowości rozwiązań prawie liniowego równania różniczkowego pewnego typu* zasługuje na uwagę. Autor bada okresowość rozwiązań prawie liniowego równania różniczkowego metodą stroboskopową.

Po referatach wywiązała się ożywiona dyskusja, w której brało udział 41 osób. W toku wzajemnego zrozumienia dyskutanci wymienili swoje doświadczenia i uwagi odnośnie wygłoszonych referatów. Dużą uwagę zwracano na stosowanie rachunku dystrybucyjnego jako nieodzownej metody rozwiązywania rzeczywistych układów wibrouderzeniowych. Również szkodliwy wpływ drgań na organizm człowieka był szeroko dyskutowany, tutaj postulowano współpracę mechaników z lekarzami celem ustalenia kryterium wytrzymałościowego organizmu na drgania. Obok tych problemów komentowano wyniki badań doświadczalnych, o których była mowa w niektórych pracach; szczególne zainteresowanie wywołało zastosowanie wibracji do ciągnięcia drutu. Referaty oraz dyskusja wykazały, że nastąpił rozwój prac poświęconych układom wibro-udarowym i to zarówno prac teoretycznych jak i doświadczalnych. Prowadzone są również prace dotyczące transportu wibracyjnego oraz przesiewania wibracyjnego. Natomiast polski dorobek w dziedzinie czynnego stosowania drgań do innych procesów technologicznych jest skromny. Mało jest prac poświęconych opracowaniu podstaw techniki wibracyjnej.

Zebrani stwierdzali konieczność organizowania okresowych seminariów z wibrotechniki. Stwierdzono również potrzebę zorganizowania za dwa lata następnego ogólnokrajowego sympozjum.

Z. Engel, J. Wapiennik, Kraków

XIII MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Komunikat wstępny

XIII Kongres będzie obradował w Moskwie (ZSRR), w dniach od poniedziałku 21 sierpnia do soboty 26 sierpnia 1972. Posiedzenia i wykłady będą odbywały się na terenie Państwowego Uniwersytetu Moskiewskiego. Zakwaterowanie uczestników przewiduje się w hotelach miejskich, a dla ograniczonej liczby w hotelach Uniwersytetu.

XIII Kongres obejmuje szerokie dziedziny mechaniki analitycznej, mechaniki ciał odkształcalnych, mechaniki cieczy i gazów oraz ich zastosowania. Nie przewiduje się metod obliczeniowych jako takich. Pewna liczba ogólnych wykładów i wykładów w sekcjach zostanie wygłoszona przez naukowców zaproszonych przez Międzynarodowy Komitet Programowy; ponadto zostanie wygłoszonych 200-250 referatów.

Uczestnicy, którzy pragną przedstawić prace, są proszeni o nadesłanie streszczeń zawierających ok. 500 słów do 15 marca 1972; Komitet Programowy dokona na podstawie streszczeń selekcji prac.

Bardziej szczegółowe dane na temat XIII Kongresu ukażą się w roku 1971. Osoby, które interesują się udziałem w Kongresie, mogą uzyskać dalsze informacje zgłaszając się do Sekretarza Generalnego Komitetu Organizacyjnego pod adresem:

*Professor K. G. MIKHAILOV,
Leningradskii Prospekt 7
Moscow A-40.*

REOLOGIA METALI I POLIMERÓW

JERZY ZAWADZKI (WROCLAW)

W pierwszej części mego referatu generalnego na temat reologii metali i polimerów — wygłoszonego na III sympozjum poświęconym reologii we Wrocławiu w 1966 roku¹⁾ — omówiłem niezależny rozwój i wzajemne splatanie się dwu zasadniczych kierunków prac naukowo-badawczych w dziedzinie reologii, podobnie zresztą jak i w innych teoriach fizycznych zajmujących się zjawiskami zachodzącymi w makroskopowych ciałach fizycznych, mianowicie: fenomenologicznego i statystycznego. Okres trzech lat potwierdził przewidywane fazy rozwoju prac nad reologią metali i polimerów w tych dwu kierunkach.

Przedstawione na obecnym sympozjum prace są również tego najlepszym dowodem. Aczkolwiek brak wśród autorów referatów, przedstawicieli dwu aktywnych ośrodków — krakowskiego i poznańskiego — to jednak można postawić tezę, że — posługując się sformułowaniami z rachunku prawdopodobieństwa i testów badań statystycznych — przysłane na sympozjum prace reprezentują «na wysokim poziomie ufności» rozwijane u nas w kraju kierunki prac teoretyczno-doświadczalnych w dziedzinie reologii metali i polimerów.

W podziale na dziedziny zagadnienia, rozwinięte i omówione w pracach autorów, przedstawiają się następująco:

pełzanie przy zmiennych parametrach stanu i struktury	— 5
zagadnienia wibropełzania	— 2
reologiczne aspekty teorii plastyczności	— 2
fizyko-strukturalne badania polimerów	— 5
zagadnienia zmęczenia mechanicznego	— 4
metody optyczne w świetle spolaryzowanym	— 2
zagadnienia reostateczności przepływów	— 1
zagadnienia stabilizacji polimerów	— 2

Niektóre z siedemnastu referatów obejmują dwa z wydzielonych zagadnień.

Przechodząc do omówienia zakresu, zasadniczych tez i wniosków przedstawionych prac, pragnę z góry przeprosić autorów za skrótowe ujęcia. Myślę jednak, że w miarę możliwości udało mi się zachować oryginalne cechy ujęcia poszczególnych referatów oraz wyeksponować najistotniejsze ich fragmenty oraz zasadnicze tezy i wnioski.

L. BRUNARSKI i W. CIOŁEK w pracy pt. *Odkształcenia reologiczne stali przy liniowo zmieniającym się naprężeniu* podjęli próbę analitycznego ujęcia zjawiska pełzania stali przy zmiennym w czasie naprężeniu w oparciu o hipotezę wzmocnienia. Dla opracowania odpowiednich wzorów empirycznych przeprowadzono 10 serii badań (po trzy próby) na pełzanie stali do konstrukcji sprężonych na 10 poziomach stałych naprężeń (80–140 kG/mm²) przy temperaturze 18°C. W opisie równań pełzania $\epsilon_c = f(\sigma, t)$ wprowadzili autorzy zmodyfikowany wzór Baileya–Nortona. Wstawienie w cytowany wzór zmiennego liniowo w czasie naprężenia $\sigma(t) = \sigma_0 \pm vt$ oraz wyznaczenie metodami przybliżonymi parametru τ (przy tym samym programie $\sigma(t)$) umożliwiło opracowanie odpowiednich równań empirycznych. Obliczenia numeryczne przeprowadzono

¹⁾ Mechanika Teoret. i Stos., 4, 5 (1967), 495-498.

dla dwu wybranych programów $\sigma(t)$, przy czym stwierdzono zadowalającą zgodność z wynikami doświadczeń nad pełzaniem stali przy tych samych programach $\sigma(t)$.

W pracy pt. *Parametry uogólnionego prawa pełzania Baileya–Nortona dla stali budowlanej ST37S* L. BRUNARSKI i W. ŁUKASIAK oparli się na cytowanym w tytule pracy wzorze Baileya–Nortona, wyprowadzonym według założeń hipotezy wzmocnienia przy jednoosiowym pełzaniu. Próby uogólnienia, choćby już przez R. W. BAILEYA, F. H. NORTONA, a później m. in. przez F. K. ODQUISTA, A. E. JOHNSONA i in., opierające się na podstawowych założeniach teorii plastyczności: prostym obciążaniu, nieściśliwości, równości tensorów–dewiatorów kierunku i podobieństwa, początkowej izotropii itp., wymagają jednak jeszcze i dziś dalszych badań. Autorzy referatu przeprowadzili badania przy jednoosiowym rozciąganiu stali ST37S dla pięciu serii (po trzy próby) na pięciu poziomach stałych naprężeń (od 8 do 12 kG/mm²) w temperaturze 500°C. Następnie zastosowali metodę graficzną Hulta dla wyznaczenia współczynników formuły empirycznej w zakresie ustalonego i nieustalonego pełzania. Otrzymane parametry wprowadzili autorzy do uogólnionej na złożony stan naprężenia formuły Baileya–Nortona.

Przedstawiona przez A. JAKOWŁUKA praca pt. *Wyniki badań wpływu częstotliwości siły wymuszającej na proces wibropelzania* obejmuje kolejny etap badań autora nad zagadnieniem wibropelzania w metalach i ich stopach. W poprzednich pracach nad wibropelzaniem stopu Al–Mg–Si(PA4) przeanalizował on wpływ tzw. współczynnika amplitudy naprężenia i poziomu naprężenia. Analiza wyników cytowanych badań skłoniła autora do przebadania wpływu częstotliwości na proces wibropelzania w zakresie 0,0033–37 Hz. Program badań nad reologicznie nieliniowym stopem PA4 w temperaturze 296°C i $\sigma_m = 288,6 \text{ MNm}^{-2}$ obejmował próby przy dwu współczynnikach $A_\sigma = \sigma_a/\sigma_m = 0,050$ wzgl. 0,0066 na tle $A_\sigma = 0$ (pełzanie statyczne). Stwierdzono, jak należało przypuszczać, że ze zmniejszaniem się częstotliwości przy $A_\sigma = \text{const}$ krzywe pełzania przesuwają się od krzywej $\sigma = \sigma_m$, $A_\sigma = 0$ do $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$, $A_\sigma = 0$, a nawet w pewnych przypadkach wyżej. Szczególnie jednak interesujące są wnioski z analizy krzywych izochronicznych dla prędkości pełzania w funkcji częstotliwości oraz próba interpretacji zjawiska w oparciu o wpływ impulsu dodatniego na umocnienie w początkowym okresie pełzania względnie impulsów dodatnio–ujemnych jako *aktywatorów* rozluźniania skupisk dyslokacji.

E. KAMIŃSKI i K. A. KUNERT, w oparciu o podstawy tzw. teorii blokowej Fujino–Ogawa–Kawai, przedstawili w pracy *Rozwinięcie teorii blokowej mieszanin dwufazowych Fujino–Ogawa–Kawai do obliczania składowych zespolonego modułu dynamicznego mieszanek PCW/CPE oraz oznaczania typu ich struktury* własne koncepcje stosując w miejsce nieokreślonych mechanicznie składowych bloków dwuparametrowe liniowe modele Maxwella względnie Kelvina–Voigta. Zaletą metody F–O–K jest możliwość przewidywania własności lepkosprężystych mieszanin dwufazowych polimerów o dowolnym stosunku wagowym składników na podstawie znajomości funkcji rozkładu λ jednego ze składników dla jednego składu mieszaniny. W opracowaniu teoretycznym i badaniach oparli się autorzy na pomiarach z zastosowaniem wahadła skrętnego (stan stały) względnie reogoniometru Weissenberga (mieszaniny stopione) dla wyznaczenia zespolonego modułu dynamicznego mieszanin dwufazowych o dowolnym składzie. Przeprowadzone badania potwierdziły zadowalającą zgodność z opracowaniem teoretycznym, a także możliwość zastosowania metody w różnych stanach skupienia mieszaniny.

Z. KOWAL w pracy pt. *O reologicznym modelu plastycznego płynięcia metali* przedstawił własne koncepcje zjawiska wymienionego w tytule. Jest ona klasycznym przykładem zastosowania metody fenomenologicznej przy wprowadzeniu w teorię statystycznej prostych założeń strukturalnych dla wyjaśnienia tak podstawowych procesów fizycznych w metalach, jak pełzanie, umocnienie i zniszczenie ciał polikrystalicznych. Za podstawę rozważań fenomenologicznych i ich analizy przyjął autor zmodyfikowany model Kelvina–Voigta o zmiennych parametrach E_p oraz $\eta(1-p)$; gdzie p to *prawdopodobieństwo zachowania cech sprężystych*. Polemizując z niektórymi zbyt uproszczonymi względnie nieściślymi rozważaniami autora na temat sił kohezji i energii wiązań metalicznych oraz mechanizmu pełzania, umocnienia i zniszczenia, należy jednak zwrócić uwagę na pewne powiązania przedstawionej koncepcji z teorią dyslokacji (np. E. OROWAN, A. NOWICK, A. COTTRELL i in.) oraz statystycznymi hipotezami wyteżenia i zniszczenia materiałów (np. W. WEIBULL, J. FRENKIEL, J. MURZEWSKI, S. WOŁKOW i in.). Autor pomija w swych rozważaniach efekty termiczne i termokinetyczne towarzyszące odkształcaniu układu.

Praca K. A. KUNERTA *Mieszaniny dwufazowe. Widma relaksacji i opóźnienia sprężystego stopionych mieszanin polimerów poli(chloroku winylu) i poli[–3,3 bis(chlorometylo) oksetanu]* zawiera interesujący przy-

czynek do badań nad wyznaczaniem widm relaksacji $H(\tau)$ oraz opóźnienia sprężystego $L(\tau)$ stopionych mieszanin polimerów PCW/CPE. W części doświadczalnej przebadał autor w temperaturze 190°C na reogoniometrze Weissenberga dwanaście mieszanin o różnych stosunkach udziałów wagowych obu składników. W części teoretycznej — stosując wzory Weissenberga — wyznaczył według danych z doświadczeń umowne modelowe moduły sprężystości i lepkości badanych mieszanin. W oparciu o wyznaczone w funkcji częstości i naprężeń względnie odkształceń moduły autor przeprowadził — z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów według postulatu Gaussa — aproksymację funkcji G' , G'' , J' oraz J'' wielomianami potęgowymi n -tego stopnia. W ostatnim etapie pracy — w oparciu o metodę Schwarzla-Stavermana — wyznaczono widma czasów relaksacji i opóźnienia sprężystego badanych stopionych mieszanin dwufazowych oraz przeprowadzono częściową analizę wpływu struktury i udziału składników na własności reologiczne i fizykochemiczne mieszanin.

W. ŁASKAWSKI i T. SKOWROŃSKI przedstawili kolejny etap własnych badań nad *Wpływem składu i parametrów prasowania twardego polichloroku winylu na jego własności termomechaniczne* poniżej temperatury zeszklenia T_g i w strefie przejściowej. Przebadano wpływ stabilizacji związkami cynoorganicznymi Advastab 17M i 17MO oraz sodą na tle własności produktu niestabilizowanego. Autorzy przeprowadzili próby ściskania (prasowania) próbek walcowych w konsystometrze Höpplera pod stałym obciążeniem 12 kG (należy tu zwrócić uwagę na zmienność naprężenia ściskającego w czasie trwania próby) w zakresie czasów 0–25 minut i kolejne odciążenia. W oparciu o wyniki pomiarów opracowano graficznie krzywe pełzania i nawrotu po odkształceniu dla różnych temperatur badania oraz zależności zgniotu od temperatury dla różnych czasów działania obciążenia. Badania uzupełniające obejmowały próbę Vicata. Wykazano zgodność i korelację zastosowanych trzech metod badań własności termomechanicznych, stwierdzono jednak, że kolejność wyników nie pokrywa się ze wzrostem stabilizacji termicznej wyznaczonej ogólnie stosowanymi metodami, co m. in. uzasadnia celowość dalszych badań dla wyjaśnienia strukturalnych i chemicznych podstaw wpływu stabilizatorów.

M. NOWAK przedstawił w pracy *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu stabilizowanego w oleju* wyniki kolejnego etapu szeroko zaplanowanych i systematycznie realizowanych badań nad wpływem parametrów stabilizacji termiczno-ciśnieniowej w oleju poliamidu 6-tarlonu XB — na jego wytrzymałość zmęczeniową. W badaniach uwzględniono również efekty czteromiesięcznego naturalnego starzenia w atmosferze otoczenia oraz w wodzie destylowanej. Stosując różne korelacje parametrów stabilizacji termiczno-ciśnieniowej, przeanalizował autor — w oparciu o wyniki badań zmęczeniowych na zmęczeniowce 12-wrzecionowej — ich wpływ na żywotność tworzywa. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż zarówno stabilizację, jak i badania zmęczeniowe, przeprowadził autor na aparaturze zbudowanej według własnych koncepcji. Część doświadczalna obejmowała również analizę rentgenograficzną zmian struktury i stopnia krystaliczności stosowanego tworzywa. Przedstawione wnioski wykazują istotny wpływ wartości parametrów stabilizacji, a w szczególności ich wzajemnej korelacji, na podwyższenie odporności tworzywa na zmęczenie mechaniczne — nawet o 1600 razy. Potwierdzają one też celowość prowadzenia dalszych badań z punktu widzenia zastosowań konstrukcyjnych poliamidów.

Z. ORŁOŚ i K. SZULBORSKI przeprowadzają w swej pracy pt. *Niektóre zagadnienia reologiczne materiałów do badań modelowych* rozważania na temat możliwości rozszerzenia zastosowań metody badań modelowych w świetle spolaryzowanym. Autorzy przedstawiają jeden z etapów ich badań własnych nad oceną własności reologicznych mechanicznych i optycznych wytypowanej żywicy epoksydowej Epidian 2 z utwardzaczem — bezwodnikiem kwasu ftalowego (25 ÷ 30/100). Po wyznaczeniu podstawowych doraźnych własności mechanicznych materiału modelu, przeprowadzili autorzy badania na polaryskopie optycznym typu JP-2 w temperaturach: otoczenia, 40, 80 i 100°C nad pełzaniem mechanicznym przy stałym obciążeniu, wyznaczając równocześnie zmiany dwójłomności wymuszonej (pełzanie optyczne). W oparciu o wyniki badań opracowano wykresy odkształceń wzdłużnych i poprzecznych oraz zmian rzędu izochromy w funkcji czasu dla trzech poziomów naprężeń: 50, 100 i 170 kG/cm² w trzech wymienionych poprzednio temperaturach. Wykazano m. in. przydatność wytypowanej żywicy do badań elastoptycznych przy obciążeniach doraźnych. Podobieństwo krzywych pełzania mechanicznego i optycznego oraz występowanie w obu przypadkach charakterystycznych okresów pełzania w pełni predysponuje materiał do reologicznych badań modelowych z zastosowaniem metody optycznej w świetle spolaryzowanym.

Systematyczne badania nad reometrią mieszanin polimerów prowadzone od kilku lat w Instytucie Tworzyw Sztucznych w Warszawie przy aktywnym udziale autorów pracy *Wstępne badania nad reometrią poliolefin*, A. PŁOCHOCKIEGO i J. BARANÓWNEJ, objęły w szczególności reometrię krajowych polietylenów «Politen» i mieszanin liniowego polietylenu. Treścią cytowanej pracy jest próba podsumowania tych badań wstępnych pod kątem niezbędnej standaryzacji oznaczenia cech sprężystości i lepkości nominalnych, krzywych płynięcia stopów oraz możliwości zastosowań statystycznej analizy wyników. W badaniach zastosowano dwie aparaty pomiarowe, mianowicie reometr kapilarny Merza–Colwella oraz reogoniometr Weissenberga–Freemana–Robertsa. Na przykładzie dwu stopionych (Politen I 020 GO oraz Politen II 003 GO) polietylenów o zbliżonych charakterystykach reometrycznych, a różniących się łatwością przetwarzania, wykazano znaczenie bezpośrednich pomiarów cech sprężystych (G') stopionego polietylenu dla określenia jego własności reologicznych. Równolegle przeanalizowano wyniki badań reometrycznych nad mieszaninami izotaktycznego polipropylenu z liniowym polietylenem. W analizie statystycznej zastosowali autorzy dla oceny istotności różnic wyników badań test Fishera na poziomie ufności 0,95. Wykazali oni również istotność korelacji liniowej logarytmów naprężeń i prędkości odkształceń, zaś dla oceny istotności różnic pomiędzy nominalnymi lepkościami mieszanin zastosowali test rozstępu Duncana. Pełne zestawienie licznych interesujących wniosków wykracza niestety poza objętość referatu generalnego.

Oryginalne i interesujące rozważania przedstawił S. ZAHORSKI w pracy pt. *Wpływ sprężystych własności cieczy na niestateczność płaskich ustalonych przepływów ścinających*. Analizując zjawiska pozornych anomalii towarzyszących przepływowi roztworów polimerów jako cieczy nienewtonowskich lepko-sprężystych, jak na przykład tzw. efekt Tomsa, występowanie cienkiej warstwy przyściennej o niższej lepkości lub sprężystości, itp. — przedstawił autor wyniki własnych rozważań dla modelu cieczy z konwekcyjną sprężystością, pod kątem wyjaśnienia przyczyn niestateczności płaskich ustalonych przepływów ścinających. Opierając się na wynikach prac własnych oraz innych autorów, przedstawił w drugiej części referatu rozważania nad niestatecznością cieczy spływającej po nachylonej płaszczyźnie dla ustalonych przepływów ścinających jedno- i dwuwarstwowych. Autor wykazał m. in., że dla przepływu jednorodnego własności sprężyste cieczy wywierają w zasadzie efekt destabilizujący, a o łącznym wpływie własności lepko-sprężystych decyduje zmiana lepkości, określona charakterystycznym parametrem M . Efekt stabilizujący może wystąpić dla silnie spłaszczonych profili prędkości oraz w wyniku poślizgu cieczy na ściankach. Natomiast dla przepływu dwuwarstwowego stwierdza się stabilizujący wpływ różnych własności sprężystych w przypadku, gdy górna warstwa posiada dłuższy tzw. czas charakterystyczny. Łączny wpływ własności lepko-sprężystych na niestateczność przepływu zależy od parametru m , charakteryzującego stosunek lepkości warstwy dolnej i górnej.

Praca A. WŁOCHOWICZA i M. NOWAKA pt. *Badania strukturalne poliamidu stabilizowanego w oleju*, stanowiąc odrębną całość, wiąże się jednak ściśle z omawianą poprzednio pracą M. NOWAKA nad wpływem stabilizacji termiczno-ciśnieniowej poliamidu 6-tarlonu XB na jego żywotność przy obciążeniach zmęczeniowych. W pierwszej części omawiają autorzy technologię obróbki cieplnej materiału oraz charakterystykę zastosowanych metod pomiarowych, jak oznaczania zawartości fazy krystalicznej metodą Hermansa–Weidingera, pomiarów poprzecznych wymiarów krystalitów, oznaczania gęstości metodą gradientową oraz opis programu i wyniki badań zmęczeniowych. Zestawienie wyników pomiarów w oparciu o badania rentgenograficzne próbek surowych i stabilizowanych oraz dziewiczych i zużonych podali autorzy w przejrzystej formie tabelarycznej i wykresowej. W obszernych wnioskach przedstawiają autorzy własną interesującą interpretację fizyko-strukturalną przyczyn zaobserwowanych w badaniach zmian stopnia krystaliczności oraz wymiarów krystalitów w wyniku stabilizacji i zużycia poliamidu w trakcie zmęczenia mechanicznego. Na szczególne podkreślenie (przede wszystkim pod kątem zastosowań konstrukcyjnych badanego poliamidu) zasługuje określenie optymalnych parametrów wtórnej obróbki cieplnej.

W pracy *Termokinetyczna ocena reoefektów «mikrorelaksacji» w polikrystalicznym chlorku srebra przedstawią J. ZAWADZKI i H. DĄBROWSKI* — w oparciu o termokinetyczną hipotezę wyciężenia przedstawią przez jednego z współautorów — własną koncepcję jakościowego i ilościowego opisu etapu rozwoju procesu dekohezji w zakresie odkształceń plastycznych ciał polikrystalicznych. W części teoretycznej omawiają podstawy termokinetyczne metody oraz jej powiązania z badaniami reowyciężenia próbki z krystalicznego chloru srebra w świetle spolaryzowanym. W opracowaniu wyników badań i ich analizie zastosowano powiązanie obserwacji w czasie (metodą optyczną w świetle spolaryzowanym) zjawiska *mikrorelaksacji* w obszarach zia-

ren grubokrystalicznego chlorku srebra na tle zjawisk *makro* w całej próbce — z oceną zmian energii wewnętrznej i entropii układu w trakcie rozwoju procesu dekohezji. Badania przeprowadzono przy trzech stałych *makro-odkształceniach* wstępnych (0,078%, 0,156% oraz 0,78%) i trzech temperaturach; 303, 333 i 363°K. Wykazano m. in. wewnętrzne poślizgi w ziarnach, zmiany orientacji osi krystalicznych poszczególnych ziaren, możliwości występowania stopniowego procesu relaksacji, zjawisk rekrytalizacji dla odpowiednich stopni odkształceń plastycznych i wyższych temperatur, *wędrowanie źródeł koncentracji* rozwoju dekohezji itp.

Referat J. ZAWADZKIEGO i E. GROZIKA pt. *Badania podstawowe do studium nad anizotermicznym pelzaniem tworzyw termoplastycznych* obejmuje drugi etap kompleksowej pracy naukowo-badawczej nad modyfikacją zasady dziedziczności Boltzmanna i kryterium żywotności zużonego polimeru według Bailly'ego w przypadku występowania programowanych bodźców termicznych. W części teoretycznej przedstawiają autorzy koncepcję opisu analitycznego z wprowadzeniem tzw. względnych anizotermicznych jąder pelzania dla pojedynczego bodźca termicznego o stałym poziomie T_1 w przedziale czasu Δt oraz dla kilku bodźców względnie dla bodźca termicznego ciągłego $T(t)$ w określonym przedziale czasu. W części doświadczalnej omówiono wyznaczenie podstawowych charakterystyk mechanicznych badanych materiałów (polistyren-Edistir RB i poliamid-tarlon XB) oraz prawidłowe cechowanie, wykonanej według własnego projektu, półautomatycznej aparatury. Przykładowo przedstawiono wybrane wyniki badań nad pelzaniem poliamidu w temperaturze 308°K przy działaniu dwu trójkątnych 15°-wych bodźców termicznych, wykazując reofekty ich «lokalizacji w czasie», kumulacji itp.

W pracy *Wstęp do badań nad znużeniem wybranych tworzyw sztucznych przy okresowo zmiennych wymuszeniach kinematycznych o stałej amplitudzie* przedstawiają J. ZAWADZKI i J. KAŁWAK jeden z etapów, opracowanych statystycznie tabelarycznie i wykreślnie badań na zmęczenie wysokoudarowego polistyrenu — styropolu KA według ustalonego programu: pięć poziomów naprężeń średnich $\sigma_{m_0} = 0 - 160$ kG/cm² oraz sześć poziomów amplitud naprężeń $\sigma_{a_0} = 26 - 137$ kG/cm² w temperaturze 393°K i częstotliwości 7 Hz. Zestawienie wykreślnie wyników badań ilustrują opracowane wykresy Wöhlera. W referacie przedstawiono też ogólne rozważania na temat reowytężenia i żywotności materiałów znużonych oraz opis aparatury (wykonanej według własnego projektu) i metod pomiarowych zastosowanych w badaniach. Wstępna analiza wyników badań wskazuje na wyraźny wpływ asymetrii cyklu, przy czym wpływ ten maleje ze wzrostem amplitudy naprężeń σ_{a_0} . W badaniach zwrócono szczególną uwagę na pomiar *relaksacji naprężeń* w obszarach tworzących się w trakcie rozwoju procesu dekohezji zmęczeniowej i znużenia próbki *węzłów plastycznych*.

J. ZAWADZKI i A. KANIA przedstawili w pracy *Ocena wstępna wibropelzania w tworzywach termoplastycznych* pierwszy etap badań nad wpływem częstotliwości wymuszeń typu dynamicznego i kinematycznego przy różnych temperaturach i określonych amplitudach wymuszenia. Badania przeprowadzono na próbkach wzornikowych o stałej wytrzymałości z wysokoudarowego polistyrenu-styropolu KA w temperaturach 295 i 303°K oraz częstotliwościach: $\nu = 0$ (pelzanie statyczne); 10, 23, 8 i 50 Hz. W części doświadczalnej omówiono szczegółowo badania wstępne oraz zastosowaną aparaturę (według własnego projektu) i metody pomiarowe. W części teoretycznej, nawiązując do kryterium Bailly'ego o żywotności materiału (obiektu) oraz hipotezy wytężenia (jednego ze współautorów), przedstawili autorzy koncepcję ujednoczenia wzorów na czasy retardacji względnie relaksacji i związane z nimi przesunięcia widm $\ln a_T$ oraz $\ln F_T$ (np. według zasady temperaturowo-czasowej superpozycji Leadermana względnie Wiliamsa-Landela-Ferry'ego dla $T > T_g$) w zakresie temperatur powyżej i poniżej temperatury przemian drugiego rzędu T_g . Przedstawione przykładowo wyniki badań wstępnych wskazują na wyraźny wpływ temperatury i częstotliwości na przemieszczanie się krzywych pelzania w górę ze wzrostem temperatury, względnie w dół ze wzrostem częstotliwości (badania przeprowadzono powyżej częstotliwości rezonansowych belki).

W pracy *Badanie wpływu dwustopniowego widma naprężeń zmęczeniowych na znużenie poliamidu i polistyrenu* przedstawiają J. ZAWADZKI i M. NOWAK w pierwszej części — na tle ogólnych rozważań na temat żywotności materiałów znużonych przy złożonych widmach obciążeń zmęczeniowych — własne koncepcje oparte na metodach matematycznej teorii niezawodnościowych obiektów technicznych. W tej koncepcji niesprawność powstanie przy osiągnięciu pewnego dopuszczalnego poziomu $\sigma_d(t)$ (z określonym prawdopodobieństwem zaistnienia zjawiska), którego wartość maleje monotonicznie i przypadkowo pod wpływem pewnego procesu stochastycznego — procesu reologicznego, spowodowanego kumulowaniem się elementarnych bodźców relaksacyjnych. W drugiej części pracy omawiają autorzy obszernie fragmenty

wyników badań własnych nad zmęczeniem obrotowo-giętnym polistyrenu niskoudarowego SO i poliamidu-tarlónu XB w temperaturze otoczenia. Dla scharakteryzowania wpływu przerwi w obciążaniu względnie różnych poziomów, dwustopniowego widma naprężeń zmęczeniowych wprowadzili autorzy tzw. współczynnik wykorzystania obciążenia k . Wykazano — przewidywany przez autorów wpływ efektów reotermokinetycznych i wzrostu tzw. temperatury samowzbudnej (zależnych od współczynnika k oraz $\Delta\sigma_a$) na funkcję parametru prognozującego $\Delta\sigma_d(t)$, a tym samym na żywotność materiału. Wyniki badań potwierdzają m. in. opracowaną przez jednego ze współautorów propozycję nowej *termicznej* definicji wytrzymałości zmęczeniowej tworzyw sztucznych — polimerów.

W zakończeniu pragnę złożyć podziękowania wszystkim autorom za ich twórczy wkład w zorganizowany przez wrocławski ośrodek sympozjon w postaci przedstawionych przez nich, a omówionych w niniejszym referacie generalnym prac z dziedziny reologii metali i polimerów. Pragnę także wyrazić życzenia owocnych obrad i dyskusji.

Dyskusja

Drugą część pierwszego dnia obrad sympozjonu, poświęconą dyskusji, komunikatom i wystąpieniom autorów, otworzył przewodniczący posiedzenia prof. dr. inż. J. ZAWADZKI. W ramach tej części obrad występowało 7 osób. M. CZECH przedstawił komunikat A. JAKOWLUKA, M. CZECHA i J. KOŁYBKII na temat *Wyznaczenie parametrów pewnego nieliniowego modelu reologicznego*. A. JAKOWLUK wygłosił komunikat pt. *Wpływ naprężenia średniego na proces kumulacji uszkodzeń i kumulacji pelzania w metalach*. W nawiązaniu do komunikatów i głosu w dyskusji A. JAKOWLUKA, — J. ZAWADZKI przedstawił swoje uwagi na temat ograniczenia stosowalności kryteriów żywotności, a w szczególności np. kryterium Bailey'a, oraz metod i możliwości ich modyfikacji. Z kolei — w odpowiedzi na pytania A. CHWIAŁKOWSKIEGO — J. ZAWADZKI omówił (na tle przedstawionych przez siebie i współpracowników referatów) kierunki i metody prac naukowo-badawczych Zakładu Reologii i Wytężenia Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej oraz zagadnienia współpracy z przemysłem i instytutami podległymi przemysłowi. S. ZAHORSKI przedstawił w pierwszej części swego wystąpienia cztery komunikaty treści ogólnej dotyczące, m. in. publikacji prac, w szczególności eksperymentalnych, w kraju i zagranicą, międzynarodowego sympozjonu na temat reologii polimerów w Moskwie w 1970 roku itp., zaś w drugiej części krótkie omówienie i rozszerzenie rozważań i wniosków swego referatu. A. JAKOWLUK — na tle wyników własnych prac nad wibropelzaniem metali — zgłosił kilka pytań do J. ZAWADZKIEGO i A. KANI, autorów referatu *Ocena wstępna wibropelzania w tworzywach termoplastycznych*. W odpowiedzi obaj autorzy przedstawili swe uwagi i odpowiednie wyjaśnienia, związane z pytaniami dyskutanta. Z. KOWAL, w związku z zastrzeżeniami, wysuniętymi w referacie generalnym odnośnie jego referatu na temat *O reologicznym modelu plastycznego pływnięcia metali*, przedstawił w swym wystąpieniu próbę uzasadnienia przyjętych założeń strukturalnych oraz rozważań i wniosków. W odpowiedzi referent generalny J. ZAWADZKI, doceniając zamierzenia i wkład własny autora, przedstawił jednak pewne uwagi krytyczne, uzasadniając je nie tylko w oparciu o własny punkt widzenia ale też popierając je rozważaniami i wynikami badań uznanych autorytetów fizyki ciała stałego, teorii dyslokacji i teorii plastyczności.

Kończąc sesję pierwszego dnia sympozjonu poświęconą reologii metali i polimerów, J. ZAWADZKI podsumował wyniki dyskusji, podziękował referentom, dyskutantom oraz wszystkim uczestnikom, a następnie ogłosił zamknięcie obrad.

REOLOGIA KONSTRUKCJI

OTTON DĄBROWSKI (WROCLAW)

Do działu «reologia konstrukcji» zakwalifikowano sześć prac. Jest to stosunkowo mała liczba, szczególnie jeżeli weźmie się pod uwagę wielorakość tematów, które czekają na rozwiązanie. W porównaniu jednak z jednym referatem tego rodzaju na III sympozjonie zgłoszonych 6 prac stanowi pewien postęp.

Omawiane prace zamieszczone są w t. II opublikowanych referatów IV Sympozjonu poświęconego reologii (ss. 13–74).

Dwie prace dotyczą reologii układów prętowych, a cztery reologii dźwigarów powierzchniowych. Dwa z przedstawionych tutaj referatów mówią o ogólnych zagadnieniach pełzania i relaksacji. Pozostałe zajmują się pewnymi zadaniami szczególnymi i stawiają sobie za cel rozwiązanie konkretnych tematów konstrukcyjnych.

L. BRUNARSKI i S. STAŃCZYK z Warszawy przedstawiają pracę pt. *Zastosowanie metod wariacyjnych i analogii nieliniowo sprężystej do obliczania pełzania kratownicy*. Na podstawie metod wariacyjnych i przy wykorzystaniu hipotezy pełzania Baileya–Nortona wyprowadzono wzory służące do wyznaczenia sił w prętach oraz prędkości przemieszczeń dowolnego węzła kratownicy. Dla przykładu wyznaczono siły wewnętrzne w kratownicy stalowej o pasach równoległych, dwuprzekątniowej, a wyniki zestawiono tabelarycznie i skonfrontowano wielkości sił obliczonych w stanie sprężystym i w stanie pełzania ustalonego. Okazało się, że w tym przykładzie różnice sił w obu stanach są niewielkie i nie mają znaczenia dla praktyki.

E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI i St. ŻUKOWSKI z Wrocławia zgłosili pracę pt. *Przykład analizy relaksacji i pełzania płaskiego prętowego układu przegubowego*. Autorzy korzystając z rachunku macierzowego wyznaczają współrzędne węzłów i siły osiowe jako funkcje czasu wywołane obciążeniem układu. Macierz sztywności uwzględniającą pełzanie wyznaczają autorzy na drodze kinematycznej. Autorzy podają wzory na siły wewnętrzne w pręcie oraz na przemieszczenia węzłów. Przebieg rachunku przedstawiono na przykładzie układu kratowego. W przypadkach bardziej złożonych układów rachunek musi być wykonywany w sposób dyskretny za pomocą EMC.

Br. OKOŁÓW z Wrocławia referuje pracę pt. *Nieliniowe pełzanie konstrukcji*. Odształcenia sprężyste w wielu zagadnieniach pełzania konstrukcji są rzędu odształceń pełzania i w obliczeniach nie mogą być pominięte, należy zatem konsekwentnie uwzględniać prawo opisujące pierwsze stadium pełzania. Na ogół proste jest rozwiązanie przypadków statycznie wyznaczalnych stanów naprężenia, sprawa komplikuje się w przypadkach statycznie niewyznaczalnych stanów naprężenia, albowiem rozkład naprężeń zmienia się w czasie na skutek pełzania nawet w zakresie geometrycznie liniowym. Dodatkową trudność stanowi nieliniowość pełzania.

Praktyka obliczeń pokazuje, że najbardziej efektywnymi, a w wielu przypadkach jedynie możliwymi metodami obliczeń w zakresie pełzania nieustalonego, są metody numeryczne. Zagadnieniu temu poświęcona jest praca autora, w której podano ogólne ujęcie problemu geometrycznie liniowego, nawiązując do metody dyskretyzacji obliczanego obiektu w ujęciu rozwiniętym przez Argyrisa. Widoczna jest dzięki temu możliwość zastosowania systemu interpretacyjnego do obliczeń macierzowych na EMC.

Problem sprowadza się do wyznaczania przyrostów sił hiperstatycznych w małych przedziałach czasu, co wymaga rozwiązania na każdym etapie odpowiedniego problemu sprężystego z uwzględnieniem wstępnych odształceń.

L. BRUNARSKI, M. CHWIAŁKOWSKI i J. HOLNICKI-SZULC z Warszawy przedstawiają pracę pt. *Pełzanie ustalone płyt kołowo symetrycznych*. W pracy wykorzystano sformułowanie zadania podane przez Rabortnowa, związki pełzania przyjęto według Baileya–Nortona. W celu rozwiązania zadania wypisano równanie konstytutywne, warunek nierozdzielności i równanie równowagi. Równania powyższe opisujące matematycznie zadanie pełzania ustalonego płyty kołowo-symetrycznej są trudne do rozwiązania. Autorzy otrzymali rozwiązanie numeryczne dwoma sposobami przybliżonymi, mianowicie sposobom graficzno-analitycznym aproksymacji równań oraz po sprowadzeniu układu równań do jednego równania i sposobem aproksymacji łukami okręgów. Wyniki rozwiązań, przedstawiające przebieg momentów radialnych i tangencjalnych, przedstawiono w postaci wykresów. Porównano wyniki otrzymane za pomocą wymienionych sposobów z wynikami rozwiązania w obszarze sprężystym.

H. KOPECKI z Rzeszowa zgłosił pracę pt. *Duże ugięcia malowyniosłej powłoki o konturze prostokątnym z materiału o własnościach reologicznych*. Zadanie rozwiązywane jest w stanie błonowym pracy powłoki malowyniosłej o konturze prostokątnym. Równanie konstytutywne opisujące właściwości fizyczne materiału powłoki przyjęto w postaci nieliniowej opierając się na teorii nieliniowej lepkości sprężystości. Powłoka podparta jest na brzegach swobodnie. Związki geometryczne między składowymi stanu odkształcenia i przemieszczenia uwzględniają fakt, że przemieszczenie prostopadle do powierzchni środkowej powłoki jest rzędu grubości powłoki (geometryczna nieliniowość). W równaniu konstytutywnym przyjęto

funkcję pełzania iloczynu dwóch funkcji w postaci $\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] = \Phi_c[s(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} c(t-\tau)$, gdzie $c(t-\tau)$ jest współczynnikiem pełzania, zaś Φ_c — współczynnikiem zwiększającym. Stan naprężenia opisuje funkcja naprężeń Puchera. Zadania opisano matematycznie dwoma równaniami różniczkowymi na funkcję naprężeń i funkcję przemieszczeń.

Rozwiązanie uzyskał autor rozpatrując przypadek czystego pełzania oraz wykorzystując podaną przez Bychawskiego analogię fizykalno-geometryczną polegającą na rozdzieleniu zmiennych w równaniach podstawowych. Współczynnik pełzania przyjmuje autor według równania $c(t-\tau) = c_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$. Funkcję naprężeń oraz funkcję przemieszczeń przedstawiono jako iloczyn dwu funkcji, według metody Fouriera. Autor zakłada, że znane jest rozwiązanie dla stanu nieliniowo sprężystego, które to rozwiązanie jest składnikiem rozwiązania w zakresie pełzania powłoki. Dla otrzymania rozwiązania nieliniowo sprężystego autor proponuje sposób energetyczny podany przez Wallina.

L. BRUNARSKI i J. GIERLIŃSKI z Warszawy przedstawiają pracę pt. *Zjawiska reologiczne w grubościennych powłokach cylindrycznej pod ciśnieniem wewnętrznym przy zmiennym polu temperatury*. Przedstawione zadanie ma już długą tradycję, początek któremu dało tzw. zadanie Lamégo. Autorzy postawili sobie za cel analizę stanu naprężenia w grubościennych powłokach cylindrycznej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu, gdy temperatura wewnątrz wykazuje fluktuację (jest harmonicznie zmienną) i jest różna na obu powierzchniach zewnętrznych. Autorzy przyjmują prawo pełzania wg Rabortnowa i Baileya–Nortona. Przyjmując intensywność naprężenia według hipotezy H–M–H otrzymują z równania równowagi wzór na naprężenia σ_r .

Dla ilustracji rozwiązane zadanie przedstawiono przykład liczbowy wykazujący potrzebę analizy naprężeń w obszarze pełzania. Na rysunku przedstawili autorzy wykresy naprężeń normalnych obwodowych. Dla porównania podano na tym rysunku 5 krzywych, które odpowiednio odnoszą się do następujących przypadków:

- 1) referowane rozwiązanie,
- 2) ustalone niejednorodne pole temperatury,
- 3) ustalone jednorodne pole temperatury,
- 4) ustalone pełzanie, ustalone jednorodne pole temperatury,
- 5) stan sprężysty.

Cechą charakterystyczną przedstawionych tutaj prac, jeżeli chodzi o efektywne rozwiązania postawionych w nich zadań, jest sprowadzenie rachunków do takiej postaci, aby można było korzystać z elektronicznej techniki obliczeniowej. Nie ma się co temu dziwić, bo zarówno trudności przeprowadzenia efektywnego rachunku, jak również coraz szerzej stojące do dyspozycji elektroniczne maszyny skłaniają do takiego ustawienia obliczeń.

Sprawą, która wymaga, moim zdaniem, szerszej dyskusji, jest powiązanie proponowanych rozwiązań z konkretnymi materiałami konstrukcyjnymi. Innymi słowy chodzi tutaj o przyjęcie właściwej hipotezy

określającej równania konstytutywne. Można bowiem zauważyć, że te przyjmuje się w zależności od możliwości rachunkowych, nie oglądając się na sens fizyczny zadania.

Dyskusja

Po referacie przedstawiono dwa komunikaty:

1. Z. J. PIEKARSKI i G. SZEFER (Politechnika Krakowska) pt. *Pełzanie pasma przy mieszanych warunkach brzegowych*. W pracy rozpatrzono dwa przypadki pełzania warstwy bez uwzględnienia sił masowych. Własności fizyczne warstwy dane są równaniami

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E(t)} \left\{ [\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} s] + \int_{t_0}^t [\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} s] K_2(t, \tau) d\tau \right\},$$

w których za jądro $K_2(t, \tau)$ można podstawić dowolne funkcje (np. Arutuniana). Mieszane warunki brzegowe dane są na zmiennych w czasie odcinkach:

a) $x_2 = h$, x_1 dowolne, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = \sigma_0(x_1, t)$;
 $x_2 = 0$, x_1 dowolne, $\sigma_{12} = 0$,
 $\mu_2 = 0$ dla $(x_1) \geq a(t)$, $\sigma_{22} = -p(t, x_1)$ dla $(x_1) < a(t)$.

b) $x_2 = h$, x_1 dowolne, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22}(x_1, t)$;
 $x_2 = 0$, x_1 dowolne, $\sigma_{12} = 0$,
 $\mu_2 = 0$ dla $(x_1) \geq a(t)$, $(x_1) \leq b(t)$ oraz $\sigma_{22} = -p(x_1, t)$ dla $(x_1) < a(t)$.

Posługując się funkcją naprężeń Airy'ego i stosując transformację całkową Fouriera sprowadzono problem brzegowy do dualnych równań całkowych, które sprowadzono do równania całkowego Fredholma pierwszego rodzaju z jądrem słabo osobliwym. Za pomocą tego równania otrzymano przemieszczenia $v(x_1, t)$ na odcinkach $(x_1) < a(t)$ i $b(t) < x_1 < a(t)$, dla obu przypadków $v(x_1, t)$ jest iloczynem rozwiązania problemu sprężystego oraz miary pełzania (gdzie $\sigma_{22} = -p = \text{const}$). Mając $v(x_1, t)$ można wyznaczyć przemieszczenia i naprężenia w dowolnych punktach warstwy. Przyjmując $h \rightarrow \infty$ otrzymuje się rozwiązanie dla półprzestrzeni ze starzeniem.

J. KASPERKIEWICZ (IPPT Warszawa) zapytał się o możliwość zastosowania przedstawionego rozwiązania.

G. SZEFER — wyjaśnił, że otrzymane rezultaty mogą być wykorzystane w mechanice górotworu w tzw. problemie filara oraz w teorii szczelin. Siły masowe można uwzględnić superponując poszczególne rozwiązania.

2. K. FRANKIEWICZ i St. STANKOWSKI (Katedra Fizyki Politechniki Krakowskiej) pt. *Propagacja szczeliny w materiałach lepkosprężystych*. Badano doświadczalnie propagację szczeliny w próbkach z gumy prasowanej. Mierzono zależność długości i kształtu szczeliny od czasu, przy słabym natężeniu. Do pewnej wartości naprężenia wykres zależności był liniowy. Dla tego zakresu na podstawie doświadczeń dało się wyróżnić trzy etapy propagacji szczeliny: 1) bardzo nieznaczny przyrost długości przy rozwieraniu się szczeliny w kierunku działania obciążenia, 2) powolnego ruchu szczeliny, 3) szybkiego ruchu szczeliny kończącego się zniszczeniem. Zaobserwowano występowanie minimalnej wartości naprężenia, poniżej której szczelina zachowuje stałą długość w ciągu długiego czasu. Stwierdzono zadowalającą zgodność wyników doświadczeń z rezultatami teoretycznej pracy M. P. WNUKA pt. *Energy criterion for initiation and spread of fracture in viscoelastic solids* — z 1968 r.

I. KISIEL zabrał głos w sprawie równań konstytutywnych. Wyraził on pogląd, że w rozwiązaniach teoretycznych nie można stosować bezkrytycznie równań konstytutywnych. W zależności od właściwości materiału należy dobrać takie równanie, które możliwie najlepiej odpowiada danemu materiałowi. Dla rozwiązania konkretnych zagadnień praktycznych należy poszukiwać na drodze doświadczalnej związków empirycznych, które mogą być wykorzystane w obliczeniach numerycznych. Nawiązując do komunikatu Z. PIEKARSKIEGO i G. SZEFERA — J. KISIEL miał wątpliwości co do możliwości uwzględnienia sił masowych przez superpozycję.

Z. BRUNARSKI sformułował swoje uwagi do referatu generalnego. Prace, zamieszczone w materiałach sympozjonu, których współautorem jest Z. BRUNARSKI bazują na prawie Baileya-Nortona. Prawo to

było przyjęte nie ze względu na uproszczenie rachunku, lecz dlatego, że może być stosowane w rozpatrywanych zagadnieniach. W referacie *Zastosowanie metod wariacyjnych i analogii nieliniowo sprężystej do obliczania pełzania kratownicy* — nie wyznaczono ugięć węzłów, ale mając przytoczone wyrażenia prędkości odkształceń, można je stosunkowo łatwo wyznaczyć znając czas pracy konstrukcji i wiedząc, czy prawo Baileya–Nortona obowiązuje w tym czasie.

I. KISIEL podkreślił, że prawo to może być stosowane tylko w pewnym określonym czasie.

Z. BRUNARSKI uzupełnił swoją wypowiedź wyjaśniając, że prawo Baileya–Nortona dotyczy tylko metali i ustalonej temperatury (wysokiej).

Z. ORŁÓŚ (WAT) zapytał o szczegóły badań przedstawionych w komunikacie K. FRANKIEWICZA i S. STANKOWSKIEGO. Chodziło o to, czy zdjęcia były robione w świetle spolaryzowanym. Równocześnie sugerował autorom przeprowadzenie elastooptycznych badań tego zagadnicia, w czym mogłyby być wykorzystane pewne doświadczenia WAT.

K. FRANKIEWICZ wyjaśnił, że użyta do badań guma była nieprzeźroczysta i nie prowadzono badań elastooptycznych.

J. KASPERKIEWICZ (IPPT) sugerował pewną interpretację efektu występującego przy rozrywaniu próbki gumowej.

G. SZEFER w odpowiedzi na uwagę J. KISIELA wyjaśnił, że stosowanie superpozycji w zagadnieniach sił masowych warstwy nie budzi zastrzeżeń, bo modele obliczeniowe są tu liniowe. Na gruncie mechaniki liniowej takie rozwiązanie jest ściśle. Także w rozwiązaniu nieliniowym uwzględnienie sił masowych nie sprawia trudności.

A. JAKOWŁUK wypowiedział swoje uwagi na temat referatu Z. BRUNARSKIEGO. Prawo Baileya–Nortona można stosować tylko w pewnym przedziale, a jeżeli chodzi o kratownicę będącą przedmiotem zainteresowania, to nie występują tam takie temperatury, w których prawo Baileya–Nortona byłoby uzasadnione.

REOLOGIA BETONU

ADAM MITZEL (WROCLAW)

Przedmiotem referatu jest omówienie prac zgrupowanych w t. II materiałów sympozjonu pod wspólną nazwą *Reologia betonu*. Z ośmiu prac zamieszczonych w tym tomie (ss. 79–162)*, tylko siedem zaliczyć można do zagadnień związanych z reologią betonu. Jedna praca dotyczy bowiem tworzywa z żywicy epoksydowej z domieszką piasku, tj. tworzywa, w którym pęczanie wywołane jest materiałem, a nie typem zaczynu cementowego.

Ponieważ z tak małej liczby referatów trudno wyodrębnić grupy tematyczne, ograniczę się tylko do omówienia referatów. Przed tym, jeszcze kilka uwag natury ogólnej.

W okresie od ostatniego sympozjonu wrocławskiego (1966 r.) do dziś ukazały się drukiem liczne prace z dziedziny reologii betonu. W Polsce coraz więcej ośrodków badawczych podejmuje badania dotyczące reologii betonu, o charakterze eksperymentalnym i teoretycznym. Obecny sympozjon nie jest pełnym odzwierciedleniem wszystkich prac polskich poświęconych reologii betonu, wiele prac opublikowano bowiem w innych czasopismach, względnie zreferowano na innych konferencjach.

Analizując stan obecny reologii betonu na tle nowych dociekań i badań opracowanych w ostatnich trzech latach można stwierdzić, że przeważająca większość powstała na gruncie teorii reologicznych o charakterze fenomenologicznym. Można w ramach tych teorii zaobserwować pewne elementy nowe, jakkolwiek niektóre problemy o podstawowym znaczeniu dla każdej z obecnie stosowanych teorii reologicznych betonu pozostają nadal nie wyjaśnione.

a) Do elementów nowych należy fakt podważania najbardziej rozpowszechnionej teorii pęczania betonu, tzw. teorii starzenia w ujęciu F. DISCHINGERA, stosowanej w szerokim zakresie przez grupę autorów niemieckich (H. TROST, W. ZERNA). Odrzucając zasadę równoległości krzywych pęczania Whitneya dochodzą oni do wniosku, że teoria ta, aczkolwiek przydatna do zagadnień pęczania betonu przy naprężeniach stałych, nie nadaje się do problemów relaksacyjnych i do stanów przy zmieniających się obciążeniach, ponadto nie uwzględnia starzenia betonu.

b) Ukazał się szereg prac zmierzających do polepszenia ujęcia analitycznego funkcji pęczania wchodzącej w skład teorii pęczania betonu, która w postaci zaproponowanej przez N. ARUTUNIANA nie jest zgodna z wynikami eksperymentalnymi dla młodego betonu.

c) Istnieją już niektóre wyniki badań naświetlające zagadnienie współczynnika Poissona jako funkcji dwóch zmiennych, tj. wieku betonu w chwili obciążenia i czasu obserwacji odkształcenia. Jest to funkcja, bez której rozwiązanie problemów dwuwymiarowych (tarcz, płyt, powłok) nosić będzie tylko charakter przybliżony. Na całkowite wyjaśnienie tego problemu trzeba będzie jednak jeszcze poczekać.

d) Z powyższym problemem wiąże się sprawa pęczania betonu przy złożonych stanach naprężenia. Istnieją co prawda już pewne wyniki eksperymentalne, których interpretacja utrudniona jest jednak brakiem jednoznaczności problemu superpozycji skurczu i pęczania lub też brakiem ściślejszych danych dotyczących wyżej wspomnianej funkcji Poissona o dwóch zmiennych.

e) Nadal nie rozwiązane jest zagadnienie dotyczące superpozycji skurczu i pęczania betonu, które ma zasadnicze znaczenie, nie tylko dla jednoosiowego, a przede wszystkim dla dwuosowego stanu naprężenia.

*) Cytowane w dalszym ciągu strony i rysunki dotyczą t. II.

Wyjaśnienie tego zagadnienia rzutuje bezpośrednio na jedną z podstawowych przesłanek teorii pełzania betonu, tj. przyjęcie równości odkształceń pełzania przy rozciąganiu i ściskaniu.

Na tle powyższego, krótkiego przeglądu stanu badań w dziedzinie reologii betonu można już przeanalizować omawiane poniżej prace, przedstawione w dzisiejszym dniu.

W pracy pt. *Redystrybucja naprężeń i odkształceń w ustroju sprężonym* (L. BRUNARSKI, W. CIOŁEK, s. 79) autorzy stawiają sobie zadanie wyznaczenia odkształceń i naprężeń w betonie i stali pod wpływem zmniejszającej się siły i z uwzględnieniem odkształceń reologicznych stali. Na ogół bowiem, w tego rodzaju obliczeniach pomijano odkształcenia reologiczne stali. Rozważania dotyczą elementów prętowych sprężonych kablami, osiowo i mimośrodowo. Do betonu autorzy stosują teorię Arutuniana, do stali teorię wzmocnienia odkształceniowego. W obu przypadkach — sprężenia osiowego i mimośrodowego — autorzy uzyskują układ czterech równań dla wyznaczenia odkształceń betonu i stali. Liczba równań może być zredukowana do dwóch w postaci (11) i (12) lub (17) i (18). W dalszych rozważaniach zostaje także uwzględniony skurcz betonu. Rozwiązanie otrzymanych układów równań całkowych jest w tej postaci niemożliwe, nieznaną funkcję trzeba wyliczyć metodami przybliżonymi. W związku z tym powstaje pytanie, czy wobec dość znacznych różnic odkształceń reologicznych stali i betonu uwzględnic pełzania stali (po 2 do 3 latach) będzie w tych obliczeniach istotne i drugie pytanie: jak zapisuje się warunek zgodności odkształceń betonu i stali w przypadku betonu sprężonego, funkcjonującego na zasadzie przyczepności betonu do stali (strunobetonu)?

W pracy pt. *Określenie czasu relaksacji i opóźnienia ceramiki i gipsu nieniszczącymi metodami akustycznymi* (L. BRUNARSKI, J. HASTERMAN, s. 87) autorzy przedstawiają sposób wyznaczenia czasu relaksacji i retardacji wymienionych dwóch materiałów, przyjmując model reologiczny w postaci równania (1). Model ten został zaproponowany 20 lat temu przez A. R. RZANICYŃNĄ jako model reologiczny betonu. Jest to model złożony z modelu Voigta i jednego elementu sprężystego. Wiadomo, że model Voigta reprezentuje nierelaksujące ciało stałe z opóźnioną sprężystością (retardacją). Dla betonu model ten nadaje się tylko w zakresie obciążenia, jest natomiast zupełnie niezgodny z doświadczeniem przy odciążeniu i naprężeniach zmiennych. W związku z tym uważam metody stosowane przez autorów dla wyznaczenia wymienionych własności reologicznych obu materiałów za słuszne, pod warunkiem, że przyjęty model reologiczny jest zgodny z wynikami empirycznymi dla danego materiału.

Autorzy pracy pt. *O obliczaniu długotrwałych ugięć płyt żelbetowych* (L. BRUNARSKI, W. OBRĘBSKI, s. 95) podają sposób wyznaczenia ugięć prostokątnych płyt żelbetowych pod obciążeniem długotrwałym. Dla wyprowadzenia odpowiednich wzorów autorzy posługują się równaniami teorii starzenia w jej najprostszej postaci, wykorzystując dla wyznaczenia sztywności teorię płyt ortotropowych. Równanie ugięcia płyty przedstawiono w postaci znanych podwójnych szeregów trygonometrycznych Naviera.

Otrzymane wzory ilustruje podany na stronach 100-102 przykład liczbowy dla płyt o różnych stosunkach boków i różnych grubościach. Wyniki pokazane na rys. 3 w postaci wykresów są ciekawe i mogą być wykorzystane do obliczeń. Warto byłoby uzupełnić rozważania i uwzględnić skurcz betonu, wpływ jego na ugięcie elementów żelbetowych jest bowiem nie bez znaczenia.

Praca pt. *Pełzanie betonu przy wysokich naprężeniach* (M. KŁAPOC, s. 105) dotyczy zachowania się betonu pod długotrwałym ściskaniem osiowym, przy różnych wielkościach naprężeń i różnych wiekach betonu w chwili obciążenia. W pracy widzę nową i oryginalną interpretację niektórych zjawisk związanych z pełzaniem betonu.

Analizując zagadnienie granicy między zakresem liniowego i nieliniowego pełzania betonu autor dochodzi na podstawie badań do wniosku, że graniczne naprężenia wahają się w dość szerokim przedziale i są przede wszystkim zależne od wieku betonu w momencie obciążenia; im starszy jest beton w chwili obciążenia, tym zakres pełzania *liniowego* jest większy. Ponadto autor precyzuje wytrzymałość *długotrwałą* betonu na ściskanie podając własne wzory na naprężenia graniczne $\sigma_n < R_r$, które powodują zniszczenie elementu w czasie $t = \infty$ oraz na czas trwania obciążenia do chwili zniszczenia. Ciekawym pomysłem jest propozycja autora polegająca na wyznaczeniu wykresu pełzania betonu tylko na podstawie badań doświadczeniowych. Dla uzyskania pełnego obrazu, np. w sprawie superpozycji skurczu i pełzania, wskazane byłoby otrzymane wyniki uzupełnić odpowiednimi badaniami przy rozciąganiu.

Referat pt. *Uwzględnianie pełzania betonu przy obliczaniu naprężeń w zaporze w oparciu o pomiary tensometryczne* (J. KWAŚNIEWSKI, L. BARAN, J. SOBIERAJ, I. SULIKOWSKA, s. 117) jest fragmentem obszernej pracy eksperymentalnej.

W pracy podano sposób obliczenia odkształceń doraźnych wzorem (4) oraz odkształceń wywołanych pełzaniem wzorem (7). Porównanie obliczonych i uzyskanych z pomiarów odkształceń ilustruje przykładowo rys. 4(s. 125). Pomiaru dotyczą zapory w Solinie, a rys. 5(s. 126) mostu na rzece Bon Regreg według pracy K. THIELA.

Nasuują się następujące uwagi i pytania: a) wzór (4) s. 118 jest oryginalny, bo uwzględnia wiek betonu w chwili obciążenia; dotyczy on obciążenia doraźnego, b) wzór (7) nie jest szczególnym przypadkiem wzoru Arutuniana, jak twierdzą autorzy pracy, c) jak się zachowują czujniki elektrooporowe przy tego rodzaju pomiarach? Chodzi o wpływ płynięcia czujników i wilgotności na otrzymane wyniki.

Następne dwa referaty dotyczą badań reologicznych przeprowadzonych dla przemysłu. Pierwszy pt. *Badania odkształceń reologicznych betonów komórkowych* (A. MITZEL, St. DOMINAS, M. RYBIAŃSKI, J. SZCZEŚNIAK, s. 129) dotyczy autoklawizowanych gazobetonów. Z przeprowadzonych badań wynika, że a) współczynnik sprężystości betonów komórkowych jest praktycznie niezależny od wieku betonu, b) prawie wszystkie odmiany badanych betonów komórkowych wykazują pęcznienie zamiast skurczu, c) szybkość narastania odkształceń pelzania jest w początkowym okresie mniejsze niż w betonach ciężkich, stabilizacja ich natomiast następuje znacznie później.

Drugi referat pt. *Straty reologiczne cienkościemnych elementów sprężonych* (ci sami autorzy jak w poprzednim referacie s. 139) jest drugim etapem badań dotyczących wyznaczenia strat w stali sprężającej, wywołanych pełzaniem i skurczem betonu. Pierwszy etap został przedstawiony w roku 1968 na III Sesji Naukowej Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej. Badaniu poddano strunobetonowe elementy o przekroju otwartym, trapezowym i łukowym o długości 4 m (rys. 1). Pomiar odkształceń rejestrowano, dla elementu trapezowego przez 260 dni od chwili sprężenia, dla elementu łukowego przez 160 dni. Dla porównania wyników eksperymentalnych z wynikami obliczonymi według obowiązującej normy, zastosowano obie podane w normie metody. Wyniki zestawione na s. 147 wykazują, że straty reologiczne wyznaczone na podstawie badań są na ogół mniejsze niż straty obliczone wg normy.

Ostatni referat pt. *Próba ujęcia analitycznego wpływu napelnacza piaskowego na pełzanie przy ściskaniu tworzywa klejowego* (St. OCHELSKI, M. RYBAK, s. 149) dotyczy wyników badań tworzywa klejowego otrzymanego z mieszania żywicy epoksydowej E 51 z piaskiem. Jest to zagadnienie ważne, występujące przy naprawie uszkodzonych elementów betonowych i żelbetowych. Uzyskane zależności między naprężeniami, odkształceniami i czasem wykazały, że badane tworzywo ma własności nieliniowego ciała lepko-sprężysto-plastycznego, a więc własności zupełnie niepodobne do własności reologicznych betonu.

Dyskusja

J. KASPERKIEWICZ. Pytania dotyczyły superpozycji zjawisk zachodzących w próbce wilgotnej i suchej oraz definicji skurczu podanej przez M. KŁAPOCIA w przedstawionej przez niego pracy.

L. BRUNARSKI rozszerzył tezy zawarte w swoich referatach w nawiązaniu do teorii Arutuniana, modeli reologicznych i zastosowanych metod badawczych, odpowiedział też na pytanie A. MITZELA, dotyczące sformułowania tytułu jednej z prac, odbiegającego od zasadniczej jej treści.

J. KWAŚNIEWSKI podał kilka uzupełnień do przedstawionego referatu będących omówieniem zagadnienia pelzania betonu, przy obliczeniu naprężeń w zaporze w oparciu o pomiary tensometryczne i odpowiedział na pytanie J. KASPERKIEWICZA odnośnie sposobu ustawienia czujników, obliczania naprężeń głównych i metody określenia błędów pomiarów. Odpowiedział na pytania A. MITZELA. Zaznaczył ponadto, że przyjęcie do obliczeń jednoosiowego stanu naprężeń jest dużym przybliżeniem koniecznym jednak w celu jednoznacznego rozwiązania zagadnienia pelzania betonu w zaporach. Ze względu na brak opracowania możliwie dokładnej metodyki badań dotyczących omawianego problemu, autorzy zastosowali szereg innych uproszczeń dających jednak zadowalające wyniki dla celów praktycznych.

I. KISIEL, w nawiązaniu do referatów L. BRUNARSKIEGO, poruszył kwestię dynamicznego modułu sprężystości betonu, zagadnienia, którego właściwe rozwiązanie zdaniem dyskutanta wymaga ujęcia termodynamicznego, problemu modeli reologicznego betonu i konieczności urealnienia badań pod kątem praktycznego ich zastosowania.

S. DOMINAS podał kilka uwag na temat badań reologicznych betonów komórkowych będących uzupełnieniem przedstawionego na sympozjone artykułu i uzasadnieniem podjęcia omówionego w nim zagadnienia, podkreślając duże znaczenie dla budownictwa przeprowadzonych badań i ich aktualność w okresie coraz szerszego zastosowania betonów komórkowych.

W. CIÓLEK podał genezę powstania swojej pracy i omówił jej założenia, ze zwróceniem szczególnej uwagi na naprężenia panujące w stali, nieuwzględnienie długości belki oraz wpływ iniekcji kabli na wielkość naprężeń — trudny do uchwycenia.

REOLOGIA GRUNTÓW

IGOR KISIEL (WROCLAW)

Dziwnym zbiegiem okoliczności tegoroczny, VII Kongres Międzynarodowy Mechaniki Gruntów i Fundamentowania w Meksyku nie był obsadzony przez żadnego geotechnika polskiego. Bardziej jeszcze dziwne, że jedyna dotąd legalna organizacja polska, reprezentująca nasz kraj w Towarzystwie Międzynarodowym Mechaniki Gruntów i Fundamentowania — Polski Komitet Geotechniki przy NOT — został w bieżącym roku w sposób dość zagadkowy unieruchomiony w swym działaniu (a może rozwiązany?). W ten sposób pozbyliśmy się za jednym zamachem dwu kłopotów: potrzeby reprezentowania nas na świecie i potrzeby organizacji krajowej. Zaoszczędziło to nam na pewno paruset dolarów i kilku zebrań rocznie.

Nie mając więc dostępu do materiałów tego kongresu, nie mogę w sposób właściwy przedstawić dzisiejszych tendencji rozwojowych reologii gruntów. To więc, co sędzę na ten temat, jest po trosze wynikiem przypadkowej znajomości nielicznych materiałów, po części zaś — ogólnej orientacji w przypuszczalnych tendencjach rozwojowych.

Wybuch naukowej działalności, jaki dziś przeżywamy we wszystkich dziedzinach wiedzy, nie ominął i reologii gruntów. Najważniejsze tendencje dziś są chyba następujące:

A. Powiązanie fizyki — w szczególności termodynamiki — z teorią zachowania się gruntów pod obciążeniem. Sięga się dziś już do mikrostruktury, do probabilistycznych praw Arrheniusa-Boltzmanna prawdopodobieństwa zachodzenia zjawisk łączenia i rozdzielania się agregatów ilowych, i na mocy tych praw próbuje się uzasadnić z powodzeniem istotę reologicznego oporu ścinania gruntów. Na tej samej podstawie szuka się własności reologicznych skał i gruntów i ich poprawnego opisu (ROSCOE, RESÉNDIZ, u nas częściowo LITWINISZYN).

B. Szybki rozwój metod stanu granicznego w zastosowaniu do praktycznie ważnych przypadków i w powiązaniu z kinematyką tego stanu. Za dobrym przykładem de JOSSELYN de JONGA liczba prac w tym kierunku wzrasta (STROGANOW, u nas DEMBICKI). Równocześnie czynione są próby modyfikacji klasycznego warunku stanu granicznego; przyjemnie jest zaznaczyć, że pochodzą one z Wrocławia (LYSIK). Mimo że na obecnym etapie pewne ich aspekty wzbudzają jeszcze kontrowersje, których wyjaśnienie może nastąpić dopiero po odpowiednich doświadczeniach (jak na razie nie wiadomo w jaki sposób je postawić), widoczne są już i cenne dwa efekty wprowadzenia ciężaru własnego do warunku stanu granicznego: pozbycie się fizycznie nieuzasadnionych nieciągłości przy infinytezymalnych przejściach granicznych w warunkach brzegowych, z równoczesnym znakomitym uproszczeniem samego rachunku; możliwość wzięcia pod uwagę faktu odkształcalności konstrukcji ogradzającej ośrodek sypki w stanie granicznym (mur podporowy ścianki zbiornika).

C. Konieczność uwzględniania reologicznych własności szkieletu gruntowego, a zatem pomiar i badanie tych cech.

D. Zastosowanie w zagadnieniach praktycznych reologii skał i gruntów metod numerycznych i wprowadzenie w związku z tym jedynej, jak na razie, uniwersalnej metody, pozwalającej w prosty sposób obliczać zarówno sprężyste, jak i plastyczne i reologiczne modele materiału, jak statyczne i dynamiczne problemy brzegowe, jak wreszcie zagadnienia filtracji, konsolidacji, termosprężystości itd., zarówno ośrodki izotropowe jak i anizotropowe, ciągłe i nieciągłe, ze szczelinami, kawernami itp. Jest to metoda ZIENKIEWICZA

Elementów skończonych. Przykłady jej zastosowania znalazłem ostatnio w materiałach *Ludwig Föppl Symposium* w Wiedniu, 1968, poświęconego mechanice skał i budowie tuneli.

Na tym tle chcę omówić przedstawione dziś referaty.

Zaden z nich nie dotyczy grupy pierwszej zagadnień. Na pograniczu grup pierwszej i trzeciej znajduje się referat KIDYBIŃSKIEGO (GIG Katowice). Autor przyjmuje do rozważań model reologiczny Burgersa (w referacie błąd maszynowy: ma być, oczywiście, szeregowe połączenie modeli K i M). Na bazie tego poszukuje Autor rozkładu dostarczonej do ciała z zewnątrz energii na energię sprężystą odkształcenia, odwracalną energię opóźnioną i energię rozproszoną.

Autor mierzy ciepło wywiązujące się w procesie odkształcenia w czasie jednoosiowego ściskania próbek węgla sapropelowego i piaskowca Darley Dale. Stosowano stałą prędkość wzrostu obciążenia i mierzono ciepło wydzielone, które w procesie odciążania zamieniało się w części (odpowiadającej odkształceniom opóźnionym) z powrotem na pracę. Wyrazem tej zamiany jest szybki spadek temperatury w początku procesu odciążania a następnie powolny, krzywoliniowy — w procesie rozpraszania energii. Stwierdzono, że w zakresie naprężeń od zera do granicy wytrzymałości jednoosiowej próbki rozprasza się węgla 2,9%, a w piaskowcu — 4,1% całkowitej energii odkształcenia, rozumie się, w warunkach prowadzonych doświadczeń. Chciałbym podkreślić oryginalność pomysłu badań i precyzję pomiarów (co prawda, robione były one w Anglii).

Do grupy trzeciej odniósłbym pracę KWIATKA i współautorów (GIG) o badaniach własności reologicznych gruntów w aparacie do ścinania obrotowego o dużych rozmiarach. Trzeba podkreślić, że moda na takie duże aparaty coraz bardziej się nasila. Oglądałem w lecie u BISHOPA (Imperial College, Londyn) zarówno edometry, jak i aparaty trójosiowego ściskania o wymiarach mierzonych w stopach. Aparaty takie są z pewnością lepsze dla badania gruntów niejednorodnych o zawartości ziaren grubych, wymieszanych z ilowymi. W aparacie autorów próbka poddawana była osiowemu ciśnieniu, a następnie skręcana. Stosowano burgersowski schemat badania (obciążenie, a następnie odciążenie). Interpretację wyników badania gliny zwalowej piaszczystej i piasku średnioziarnistego oparto o model reologiczny M/V. Stwierdzono, że w glinie występuje granica plastyczności równa w przybliżeniu połowie wytrzymałości na ścinanie. W piasku nie stwierdzono granicy plastyczności. Podano tylko wstępne wyniki badań. Autorzy słusznie podkreślają brak standardowej metody badania. Pewne moje propozycje [Archiwum Hydrotechniki, nr 2(1968)] nie rozwiązują bynajmniej zagadnienia i prace w tym kierunku muszą być nadal prowadzone. Jako curiosum wspomnę, że jak dotąd nie ma standardowej metody badania gruntów dla celów przemysłowych w zwykłym aparacie trójosiowego ściskania, a tylko kilka krajów znormalizowało badania na ścinanie w zwykłym aparacie skrzynkowym, których to norm, z uwagi na niedoskonałości i samej metody badania i jej wyników nie mogę zalecić do stosowania u nas.

PARZONKA i współautorzy (WSR Wrocław) zajmują się również badaniem własności reologicznych. Badają oni osady poflotacyjne zakładów wzbogacania rud żelaznych. Osady te w większych koncentracjach zachowują się jak ciecz nienewtonowska, a w mniejszych — jak newtonowska. Przy znacznych prędkościach transportu następuje rozwarstwienie cieczy: na dno wypadają cząstki większe, w warstwie dennej ciecz przestaje być newtonowska, lepkość jej gwałtownie rośnie i występuje zamulanie rurociągów. Z drugiej strony, małe koncentracje i duże prędkości powodują wzrost kosztu transportu rurociągami.

Celem pracy jest zagadnienie optymalnego doboru koncentracji i prędkości, a przedmiotem — zbadanie własności reologicznych zawiesiny. W wyniku badań w wiskozymetrach rurowych nie udało się uzyskać koncentracji większych od granicznej. Właściwym do badań okazał się wiskozymetr Couette'a. Wykonano dwie serie badań na aparatach produkcji niemieckiej i francuskiej, stwierdzono zależność cech reologicznych od metody flotacji i składu mineralnego osadu, a także duży wpływ na własności osadu zawartych w nim związków chemicznych. Określono koncentrację graniczną i optymalny model reologiczny cieczy, którym okazał się model Bingham'a. Praca ma duże znaczenie techniczne.

Pozostałe cztery prace można by odnieść do grupy czwartej. Nieco na uboczu znajduje się praca SZWAJA (Ursus), który proponuje dla lepszego ujęcia zagadnień związanych z oporem skrawania gruntów (narzędzia rolnicze, koparki) mechaniczny model M/V zmodyfikowany poprzez umieszczenie go w naczyniu o pochylonych ściankach, podając zarówno płaski, jak i przestrzenny model takiego typu, weryfikację swego pomysłu przeprowadził autor na badaniu procesu dość szybkiego ścięcia gruntu w aparacie trójosiowego ściskania, zmodyfikowanym w celu uzyskania prędkości do 0,6 m/sek i otrzymał niezłą zgodność wyników

badania i interpretacji. Należałoby w tym miejscu wyrazić obawę, że opis rzeczywistych procesów za pomocą skomplikowanych modeli mechanicznych może okazać się tak trudny, że komplikacje te przestaną być opłacalne. Model może ilustrować równanie stanu, ale n i g d y nie może go zastępować. A tylko równanie stanu pozwala na możliwość opisu zjawisk w naturze — o ile obrano je w sposób właściwy.

WOJCIECHOWSKI (COBPGO, Wrocław) przedstawia opis reologiczny zjawiska pełzania słabej warstwy w podłożu zwałowiska, obserwowanego często w naturze w kopalniach odkrywkowych. Autor zakłada, że warstwa słaba rozciąga się na nieznacznej głębokości, że jest cieczą Newtona o znacznej lepkości, że jest cienka, nieco nachylona do poziomu i leży na nieodkształcalnym spągu. Materiał zwałowiska spoczywającego na tej warstwie jest słabo-spoisty i podlega prawu Coulomba, opór więc ścinania zwałowiska nie zależy od prędkości. Siły bezwładności pominięto. Prędkość pozioma ruchu warstwy słabej jest znacznie większa od pionowej. Wychodząc z powyższych danych Autor określił pole prędkości chwilowych w warstwie, obciążenia na jej stropie (w oparciu o klasyczne rozwiązanie W. W. SOKOŁOWSKIEGO) i pole prędkości chwilowych w zwałowisku. Wskazano na niedokładności i wady rozwiązania, równocześnie jednak stwierdzono, że nadaje się ono do zastosowania w praktyce górniczej.

Zdaniem referenta pracę należy uzupełnić próbą opisu tą metodą ruchu zwałowiska rzeczywistego i porównaniem wyników takiego opisu z pomiarami w terenie. Rozbieżność w granicach 10% można by uznać za duży sukces Autora pracy, a równocześnie świadectwo pełnej przydatności metody do celów przykładowych.

KWIATEK i współautorzy (GIG) zajęli się — w oparciu o model M/V podłoża — zbadaniem, jak zmienia się nacisk pod sztywnym fundamentem (stemplem) w przypadku, gdy podłoże gruntowe ulega deformacjom wywołanym przez wpływy eksploatacji górniczej. Autorzy ustalili najpierw poprawny rozkład naprężeń w podłożu pod sztywnym stemplem (w pracy KISIELA i KIDYBIŃSKIEGO, III sympozjon, rok 1966, znaleziono kilka błędów arytmetycznych), a następnie ustalili zmiany tego rozkładu pod wpływem tzw. krzywizny podłoża na zbroczu niecki osiadania wywołanego uszkodzonymi górnictwem; wreszcie — rozwój stref plastycznych w poszczególnych przypadkach deformacji podłoża. Zadanie potraktowano jako płaskie. Praca może mieć istotne znaczenie przy projektowaniu ochrony budowli na terenach górniczych.

Ostatnia wreszcie praca KISIELA i HALINY TYC przedstawia próbę zastosowania metody elementów skończonych Zienkiewicza dla obliczenia rozkładu naprężeń w podłożu pod działaniem zagłębionego w nim na znacznie większą głębokość fundamentu i przemieszczeń zarówno fundamentu jak i podłoża w otoczeniu. Zadanie potraktowano jako osiowo-symetryczne. Wyniki zestawiono tabelarycznie i pokazano na dwu rysunkach: a) przemieszczenia punktów ośrodka, b) naprężenia występujące w fundamencie i w ośrodku. Zarówno fundament, jak i podłoże potraktowano jako ciała reologiczne Zenera. Wyniki dla tego ciała uzyskano z przeliczenia poprzez analogię Alfrey'a. Praca stanowi bazę dla dalszych badań nad rozkładem naprężeń w gruncie w otoczeniu pola. Na przeszkodzie dalszym badaniom stoi niemożność korzystania z maszyny matematycznej o klasie wyższej, niż ODRA 1003, na której wykonano przedstawione obliczenia.

Jak wspomniano w zagajeniu, w materiałach sympozjonu brak jest prac dwu ośrodków: poznańskiego (Politechnika) i Gdańskiego (Politechnika i IBW). Oba te ośrodki przedstawiły na poprzednim sympozjonie szereg cennych prac. Należy spodziewać się, że następny sympozjon odbędzie się przy ich czynnym udziale.

Dyskusja

Po referacie przedstawiono dwa komunikaty: 1) G. SZEFER i B. LECHOWICZ (Politechnika Kraków) *Konsolidacja półplaszczyny z uwzględnieniem pełzania*, 2) Z. SOB CZYŃSKA, (Politechnika Poznań) *Działanie ruchomego źródła cieczy w ośrodku konsolidującym*, po czym odbyła się dyskusja nad pracami przedstawionymi w referacie generalnym i wymienionymi wyżej komunikatami.

Z. SOB CZYŃSKA (Poznań) zwróciła uwagę, że z rozwiązań zadania o konsolidacji nie można uzyskać odkształceń natychmiastowych, a jeśli się je uzyskuje, oznacza to, że popełniono błąd. Podaje też, że sama w swoim czasie błąd taki popełniła.

I. KISIEL (Wrocław) uważa, że aby można było rachunkowo wyznaczyć odkształcenia początkowe, funkcja obciążenia musi mieć postać funkcji Heaviside'a. Ale wówczas nie można jej traktować jako przyłożonej statycznie. Ta sama okoliczność uniemożliwia uzyskanie potwierdzenia doświadczalnego faktu istnienia odkształceń natychmiastowych przy próbach statycznych.

PARZONKA (Wrocław) w odniesieniu do referatu WOJCIECHOWSKIEGO uważa, że lepiej by było przyjąć, w podłożu zwałowiska warstwę słabą opisywaną nie poprzez ciecz Newtona, ale ciało Bingham (z granicą plastyczności). W sprawie referatu KWIATKA i współautorów uważa, że ich przyjęcie modelu ciała prowadzi do cieczy Newtona, a należało raczej przyjąć ciecz nieliniową.

CIOŁEK (Arkady, Warszawa) zgłasza uwagę do referatu KWIATKA, co do kształtu krzywych opisujących rozwój stref plastycznych pod stemplem i co do współczynnika δ wyznaczonego w pracy. Stawia też pytanie SOBECZYŃSKIEJ.

KWIATEK (GIG) udzielił wyjaśnień PARZONCE i CIOŁKOWI, wyjaśniając sposób obliczenia δ i stwierdzając, że różnica zdań co do modelu gruntu wynika z różnic w interpretacji zjawiska.

BIERNATOWSKI (Wrocław) zapytuje KWIATKA o metodę uwzględniania krzywizny podłoża i jej wpływu na kształt stref poślizgu.

BRUNARSKI (Warszawa) jest zdania, że należałoby uporządkować symbole dotyczące oznaczania modeli plastyczności. Rysuje kilka ze stosowanych modeli i stwierdza m. in., że propozycja KISIELA wydaje się być myląca. Należałoby zrobić z tym porządek.

Autorzy referatów udzielili w końcu odpowiedzi na pytania i uwagi. Należy podkreślić zarówno żywość, jak i bardzo wysoki poziom poszczególnych wypowiedzi dyskusyjnych.

**SPRAWOZDANIE
Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA ROK 1969**

I. ROZWIJANIE DZIAŁALNOŚCI W DZIEDZINIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych w poszczególnych Oddziałach ilustruje poniżej zamieszczona tabela:

Oddział	Liczba zebrań					Liczba referatów	Liczba uczestników	Liczba dyskutantów
	I kw. 69	II kw. 69	III kw. 69	IV kw. 69	Razem			
Częstochowa	—	3	—	2	5	5	71	18
Gdańsk	1	4	—	1	6	6	100	31
Gliwice	—	1	—	1	2	2	64	25
Kraków	2	1	—	3	6	21	120	66
Łódź	1	2	—	2	5	5	71	27
Poznań	2	2	—	—	4	4	73	25
Szczecin	3	2	—	3	8	8	107	44
Warszawa	1	2	—	2	5	6	118	42
Wrocław	2	4	—	2	8	8	117	46
Razem	12	21	—	16	49	65	841	324

Tematyka referatów wygłoszonych na zebraniach naukowych znajduje się w załączonym do niniejszego sprawozdania wykazie.

2. Organizowanie sympozjów i konferencji naukowych dotyczących wybranych działów specjalnych

1) Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach 17 do 23 lutego 1969 r. Sympozjum na temat *Modelowanie w mechanice*. W imprezie tej uczestniczyły 83 osoby reprezentujące uczelnie techniczne oraz instytuty naukowo-badawcze z całej Polski. Wygłoszono 23 referaty spośród 26 zgłoszonych. Obszerne streszczenia prac zostały wydrukowane w postaci specjalnego zeszytu Politechniki Śląskiej (124 strony). W dyskusji nad referatami zabierało głos 71 dyskutantów. Tematy wygłoszonych referatów znajdują się w osobnym wykazie.

2) Oddział w Gdańsku zorganizował w dniach 21 i 22 listopada 1969 r. III Sympozjum na temat *Filtracji*. W imprezie tej wzięło udział około 130 osób, przedstawiciele placówek naukowych, biur projektów, przedsiębiorstw wykonawczych i eksploatacyjnych. Wśród uczestników znaleźli się goście z Jugosławii, reprezentujący Instytut Gospodarki Wodnej w Belgradzie, Viceprezes PAN — prof. dr W. Nowacki, prorektor Politechniki Gdańskiej—doc. dr T. Umiński, dyrektor naukowy IBW PAN—prof. R. Molisz, przedstawiciele prasy i telewizji. W dyskusji nad wygłoszonymi referatami zabrało głos 20 osób.

Około 60 uczestników sympozjum zwiedziło Halę Laboratoryjną IBW PAN oraz Pracownię Filtracji. Pracownicy Zakładu Hydrauliki Wód Śródlądowych przedstawili tematykę i zakres prowadzonych obecnie

badań i omówili pracujące aktualnie modele, na których w ostatnim czasie zostały zakończone pomiary. Tematy referatów wygłoszonych podczas Sympozjum znajdują się w osobnym wykazie.

3) Oddział we Wrocławiu zorganizował w dniach 27—29 listopada 1969 r. IV Sympozjon poświęcony reologii.

Liczba uczestników wyniosła 156 osób, dyskutantów 35. Podczas obrad wygłoszono 39 referatów i 6 komunikatów. Referaty generalne i ważniejsze wypowiedzi dyskusji są opublikowane w niniejszym zeszycie.

Poza przeprowadzonymi sympozjami Oddział w Gliwicach zorganizował dwie kursokonferencje naukowe:

1) W dniu 8 grudnia 1969 r. na temat *Metody zwęzkowe pomiaru strumieni heterogenicznych*. W konferencji wzięły udział 23 osoby. Wygłoszono 5 referatów, których tematyka znajduje się w osobnym wykazie.

2) W dniu 13 grudnia 1969 r. na temat *Pneumatyczne elementy techniki cyfrowej*. Referat wygłaszał inż. Vladimir Chudy z Politechniki w Bratysławie (CSRR). W konferencji wzięło udział 15 osób.

3. Konkursy naukowe

1) Oddział w Łodzi przeprowadził konkurs na najlepszą pracę naukową w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej (z wyłączeniem prac natury czysto doświadczalnej).

Pierwszej nagrody nie przyznano.

II nagrodę w wysokości zł. 8 000. — przyznano doc. dr Mirosławowi Roszkowskiemu, trzy równorzędne III nagrody po zł. 5.000. każda — przyznano: drowi inż. Tadeuszowi Gałkiewiczowi, mgr inż. Karolowi Grudzińskiemu i mgr inż. Januszowi Lorkiewiczowi oraz drowi Jackowi Kapkowskiemu.

Ponadto nagrodzono wyróżnieniem pracę mgr inż. Karola Grudzińskiego.

Jednocześnie Sąd Konkursowy wyraził żal, że wartościowa praca dra Zbigniewa Cywińskiego pt. *Statyka i dynamika skręcanego cienkościennego dwuteownika o zmiennym bisymetrycznym przekroju poprzecznym* mimo dużych walorów naukowych nie mogła być nagrodzona z uwagi na wcześniejsze jej opublikowanie i niespełnienie tym samym formalnych warunków konkursu. Tematyka nagrodzonych prac — w osobnym wykazie.

2) Oddział we Wrocławiu przeprowadził ogólnopolski konkurs na prace naukowe doświadczalne z dziedziny mechaniki.

I nagrodę w wysokości zł. 10.000. — przyznano mgr inż. Tadeuszowi Bednarskiemu,

II nagrodę w wysokości zł. 7.000. — przyznano drowi Januszowi Klepaczko,

dwie III nagrody po zł. 4.000 każda — przyznano Marianowi Lurskiemu oraz Wiesławowi Zapalowiczowi i Bolesławowi Horakowskiemu.

4. Finansowanie prac naukowych

W okresie sprawozdawczym nie finansowano prac naukowych ze względu na skromne fundusze Towarzystwa, jak i zarządzenia Sekretarza Naukowego PAN nie zezwalające na prowadzenie tego rodzaju akcji przez towarzystwa naukowe.

5. Udział w konferencjach i kongresach krajowych i zagranicznych

Członkowie PTMTS brali czynny udział w konferencjach i kongresach naukowych krajowych i zagranicznych, wygłaszając na nich referaty z prac własnych. Sprawozdania z kongresów i konferencji, w których uczestniczyli członkowie Towarzystwa publikowane są w organie wydawniczym PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA.

6. Organizowanie wymiany naukowej z zagranicą

W ramach wymiany naukowej z zagranicą, poszczególne Oddziały organizowały zebrania naukowe, sympozja, konferencje i spotkania, na których referaty wygłaszali prelegenci zagraniczni. Na przykład w Oddziale Gdańskim — E. E. Sakkov z Estonii, w Oddziale Krakowskim — prof. W. E. Jahsmann z USA (na zebraniach naukowych), inż. Vladimir Chudy (z CSSR) — (na konferencji naukowej).

II. ROZPOWSZECHNIANIE «MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ»

1. Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej Towarzystwa

W roku 1969 organ PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA ukazywał się nadal w formie kwartalnika. Wydano 4 zeszyty: Tom 7, Zeszyt 1 o objętości 8 arkuszy wydawniczych, Tom 7, Zeszyt 2 — 11 arkuszy, Tom 7, Zeszyt 3 — 12 arkuszy oraz Tom 7, Zeszyt 4 — 11,5 arkusza. Łączna objętość wynosiła 42,5 arkuszy wydawniczych, a plan przewidywał — 40. Na przekroczenie to uzyskaliśmy zgodę PWN, a dodatkowy koszt pokryty został z rezerw Towarzystwa.

Tematyka zeszytów wydawanych w roku 1969 zawierała, zgodnie z założeniami programowymi: artykuły przeglądowe z różnych gałęzi mechaniki, prace oryginalne, prace doświadczalne, biuletyn PTMTS, sprawozdania z sympozjów naukowych PTMTS, konferencji itp.

2. Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów

a) Kursy

Oddział w Gdańsku w I kwartale 1969 r. przeprowadził kurs na temat: *Materiały sprężyste*. Dwugodzinne wykłady odbywały się raz na tydzień. Prowadził je dr Wojciech Pietraszkiewicz. W II kwartale również przeprowadzono kurs na temat *Materiałów sprężystych*.

Oddział w Gliwicach w II kwartale przeprowadził pierwszą część kursu na temat *Podstawy mechaniki ośrodków odkształcalnych*. W IV kwartale zakończono pierwszą część kursu, który ma trwać 2 lata. Liczba uczestników wyniosła 32 osoby. Wykłady odbywały się raz w tygodniu.

b) Seminaria

Oddział w Gdańsku w I kwartale zorganizował tygodniowe seminarium na temat *Rachunku tensorowego*. W II kwartale również przeprowadzono seminarium na temat *Rachunku tensorowego*. W IV kwartale przeprowadzono seminarium na temat — *Ogólna mechanika ośrodka ciągłego*.

c) Sesje wyjazdowe

Oddział w Krakowie zorganizował w II kwartale sesję wyjazdową do Kielc, gdzie zorganizowano zebranie naukowe wspólnie z Kielecko-Radomską Wyższą Szkołą Inżynierską i Oddziałem Kieleckim Stowarzyszenia Inżynierów i Techników Mechaników Polskich. Na zebraniu tym wygłoszono 5 referatów (tematy tych referatów znajdują się w załączonym wykazie, w wyszczególnieniu zebrań naukowych Oddziału Krakowskiego pozycje 21 do 25).

Również Oddział w Krakowie zorganizował wspólnie z Wydziałem Nauk Technicznych Rzeszowskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk — Sesję Wyjazdową do Rzeszowa. W ramach sesji wygłoszono 5 referatów (tematyka ich znajduje się w załączonym wykazie — pozycje od 30 do 34).

d) *Dążenie do zwiększenia liczby członków PTMTS* ilustruje następująca tabela.

Oddział	IV kw. 68 r.	Okres sprawozdawczy 1969				Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym	
		I kw.	II kw.	III kw.	IV kw.	liczba	%
Częstochowa	—	—	16	16	17	+17	+100
Gdańsk	39	39	39	40	38	- 1	- 2,5
Gliwice	58	61	53*)	52	54	- 4	- 6,9
Kraków	74	78	77	77	81	+ 7	+ 9,4
Łódź	31	35	34	35	35	+ 4	+12,9
Poznań	50	51	51	50	50	—	—
Szczecin	28	29	29	29	29	+ 1	+3,5
Warszawa	142	142	142	142	156	+13	+9,0
Wrocław	59	58	58	58	59	—	—
	482	493	499	499	519	+37	+7,6

*) Liczba członków Oddziału Gliwickiego zmalała na skutek przeniesienia części osób do nowo utworzonego Oddziału w Częstochowie.

Członkowie zagraniczni

Zgodnie z propozycjami zgłoszonymi przez prof. prof. W. Nowackiego i W. Olszaka oraz nadesłanymi przez Oddziały, Zarząd Główny wytypował, a Zjazd Delegatów w dniu 17 maja 1969 r. powołał 32 członków zagranicznych w osobach: prof. Mikołaj Iwanowicz Mushelishvili (Tbilisi), prof. Aleksiej Wasilewicz Łykov (Mińsk), prof. dr Angel Tonczew Balewski (Sofia), prof. Jurij Mikołajewicz Sawin (Kijów), prof. I. Artobolewski (Moskwa), prof. dr Georgij Brankow (Sofia), prof. dr Jaroslav Kožešnik (Praga), prof. dr Alois Myslivec (Praga), prof. dr Zdenek Sobotka (Praga), prof. dr Helmut Heinrich (Drezno), prof. dr Georg Backhaus (Drezno), prof. dr Horst Matzke (Weimar), prof. dr Heinz Parkus (Wiedeń), prof. dr Gerhard Heinrich (Wiedeń), prof. dr Erich Schmid (Wiedeń), prof. dr Arvo Ylinen (Helsinki), prof. dr Warner T. Koiter (Delft), prof. dr Luigi Sobrero (Triest), prof. dr P. Csonka (Budapest), prof. dr Károlyi Széchy (Budapest), prof. dr Dorde Lazarević (Beograd), prof. Caius Jacob (Bukareszt), prof. dr Elie Carafoli (Bukareszt), prof. dr Jacob P. Den Hartog (Concord USA), prof. Ian N. Sneddon (Glasgow Szkocja), prof. Warren M. Rohsenow (Cambridge USA), prof. Maurice Roy (Paryż), prof. Pierre Germain (Paryż), prof. Luc Gauthier (Seine — Francja), prof. Paul Brousse (Seine — Francja), prof. dr Julien Kravtchenko (Grenoble), prof. I. N. Vekua (Tbilisi).

Opracowane zostały życiorysy wszystkich wyżej wymienionych członków zagranicznych, które znajdują się do wglądu w Sekretariacie Zarządu Głównego. Wydrukowano również i wysłano wszystkim wybranym odpowiednie dyplomy.

III. RÓŻNE

1. Zebrania organizacyjne

Liczba zebrań organizacyjnych w okresie sprawozdawczym przedstawia się następująco:

Zjazd Delegatów	1
Zebrań Zarządu Głównego (plenum)	2
„ Prezydium Zarządu Głównego	7
„ Główniej Komisji Rewizyjnej	1
Walnych Zgromadzeń Oddziałów	8
Zebrań organizacyjnych Oddziałów	1

Zebrań Zarządów Oddziałów:

Częstochowa	7	
Gdańsk	7	
Gliwice	8	
Kraków	7	
Łódź	7	
Poznań	6	
Szczecin	5	
Warszawa	6	
Wrocław	8	61
Innych zebrań organizacyjnych w Oddziałach		5
Razem zebrań organizacyjnych		86

2. Powstanie Oddziału PTMTS w Częstochowie

Na plenarnym zebraniu Zarządu Głównego w dniu 25 lutego 1969 r. podjęto uchwałę o utworzeniu Oddziału PTMTS w Częstochowie.

Zgodnie z tym w dniu 12 marca 1969 r. odbyło się zebranie Członków Założycieli Oddziału, na którym wybrano jego władze. Przewodniczącym został prof. dr Jerzy Kołakowski. Następnie Oddział zarejestrował się w miejscowej Radzie Narodowej, a po tym otworzył konto w PKO, na które Zarząd Główny przekazał dotację. Po załatwieniu tych formalności Oddział przystąpił do prowadzenia działalności rzeczowej, której wyniki znalazły oddźwięk w niniejszym sprawozdaniu.

3. Kontrole

W Zarządzie Głównym przeprowadzono w okresie sprawozdawczym dwie kontrole: 1) dnia 5 września — Zakład Ubezpieczeń Społecznych skontrolował prawidłowość potrącania i odprowadzania składek ubezpieczeniowych; 2) dnia 12 grudnia 1969 r. Wydział Finansowy Dzielnicowej Rady Narodowej dokonał kontroli potrącania i odprowadzania podatku od wynagrodzeń z tytułu wypłat zarówno z funduszu osobowego, jak i bezosobowego.

Przy obu kontrolach żadnych uchybień nie stwierdzono.

W Oddziale w Krakowie w dniu 24 grudnia 1969 r. Zakład Ubezpieczeń Społecznych przeprowadził kontrolę prawidłowości liczenia składek ubezpieczeniowych. Żadnych usterek nie stwierdzono i w związku z tym nie wydano zarządzeń pokontrolnych.

IV. ANALITYCZNE PODSUMOWANIE DZIAŁALNOŚCI TOWARZYSTWA

W ciągu roku 1969 powołano nowy Oddział Towarzystwa w Częstochowie, tak że obecnie liczba Oddziałów wynosi 9.

W roku sprawozdawczym liczba członków Towarzystwa wzrosła o 37 osób, co stanowi 7,6% (w roku 1967 wzrost ten wynosił 6 osób, 1,3%, a w roku 1968 — 9 osób — 1,9%). Jak wynika z tych liczb, akcja popularyzacji działalności Towarzystwa i zwiększenia liczby jego członków, przeprowadzona zgodnie z zaleceniami Zjazdu Delegatów, dała rezultaty.

Zebrań organizacyjnych odbyło się 86. Liczba zebrań naukowych wyniosła 49, a liczba wygłoszonych na nich referatów — 65. W zebraniach tych wzięło udział 841 osób, a 324 zabrały głos w dyskusji.

Ponadto w ramach działalności rzeczowej zorganizowano: 3 sympozja, 2 konferencje naukowe, 3 konkursy naukowe, 3 kursy, 3 seminaria, 2 sesje naukowe.

Akcja wydawnicza objęła 2 pozycje, w tym stały organ wydawniczy PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA oraz jedno wydawnictwo konferencyjne.

Tematyka organizowanych imprez naukowych dotyczyła zagadnień stereomechaniki, hydromechaniki, aeromechaniki, termodynamiki.

Podział prac według ich przeznaczenia technicznego przedstawiał się następująco:

1. Prace o charakterze ogólnym nie związane wyraźnie z żadnym działem przemysłu.
2. Prace związane z konstrukcjami maszyn, samochodów, okrętów.
3. Prace dotyczące górnictwa i hutnictwa.
4. Prace związane z budownictwem lądowym i wodnym.
5. Prace związane z energetyką.
6. Prace dotyczące techniki nuklearnej.

W liczbie wygłoszonych referatów nadal ogromną przewagę miały tematy z mechaniki stosowanej, a stosunkowo nieliczne dotyczyły mechaniki teoretycznej.

V. SPRAWY FINANSOWE

Dla pełniejszego obrazu pracy Towarzystwa w okresie sprawozdawczym podane zostają zasadnicze dane dotyczące spraw finansowych.

A. Dochody

1. Składki członkowskie	
planowano	zł. 25.000.—
wplynęło	zł. 26.525.—
wskaźnik wykonania wynosi 108%	
2. Sprzedaż zeszytów MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ	
planowano	zł. 25.000.—
wplynęło	zł. 28.446.—
wskaźnik wykonania — 113,8%	
3. Wpływy związane z uczestnictwem w Sympozjach	
planowano	zł. 5.000.—
wplynęło	zł. 26.750.—
wskaźnik wykonania wynosi — 535%	
4. Dotacja Polskiej Akademii Nauk	
na działalność wydawniczą, popularyzację wiedzy i administrację	
planowano	zł. 542.000.—
wplynęło	zł. 542.000.—
wskaźnik wykonania — 100%	
Na przejściowe dodatki mieszkaniowe	
planowano	zł. 1.830.—
wplynęło	zł. 1.824.—
wskaźnik wykonania — 99,7% tj. do wysokości rzeczywiście wypłaconych dodatków	
Ogółem:	
planowane dochody	zł. 598.830.—
osiągnięto	zł. 625.545.—
wskaźnik wykonania wynosi — 104,5%	

B. Koszty

Ogólne wykonanie budżetu w tym zakresie przedstawia się następująco:

Rodzaj	Plan	Wykonanie	Wskaźnik wykonania
1. Działalność wydawnicza	zł 341.000.—	zł 261.164,95	76,9%
2. Popularyzacja wiedzy	zł 200.400.—	zł 141.361,83	70,7%
3. Administracja	zł 182.700.—	zł 140.038,48	76,7%
R a z e m	zł 742.100.—	zł 542.715,26	

w tym:

koszty osobowe (łącznie z nagrodami)	
planowano	zł. 370.170,—
wykonano	zł. 314.357,65
wskaźnik wykonania wynosi — 84,9%	
przy czym największą oszczędność, sięgającą około 44 tys. zł. osiągnięto w bezosobowym funduszu płac	
Na koszty rzeczowe	
planowano	zł. 353.930,—
wykonano	zł. 228.357,61
wskaźnik wykonania wynosi — 64,5%	

Poważniejsze oszczędności osiągnięto w wydatkach na: materiały, koszty podróży służbowych (około 10 tys. zł.) oraz usługi materialne — około 64 tys. zł., w tym na administrację przypada około 18 tys. zł., a na wydawnictwo 45 tys. zł.

Powyższe dane nie obejmują przejściowego dodatku mieszkaniowego.

Koszty wydawnictwa kształtują się następująco:

osobowe:	
plan	zł. 134.800,—
wykonanie	zł. 106.087,80
wskaźnik wykonania — 78,7%	
druk: plan	zł. 200.000,—
wykonanie	zł. 154.548,65
wskaźnik wykonania — 77,3%	
drobne koszty rzeczowe:	
plan	zł. 6.200,—
wykonanie	zł. 628,50

W okresie sprawozdawczym wydano 4 zeszyty MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ. Przeciętny koszt jednego zeszytu wyniósł ponad 65 tys. zł.

Działalności gospodarczej Towarzystwo nie prowadziło. Pełnienie funkcji w organach PTMTS było bezpłatne, referaty wygłaszane były honorowo.

Finansowanie działalności Towarzystwa przebiegało zgodnie z obowiązującymi przepisami. Wydatki znajdowały pokrycie w działalności finansowej.

WYKAZ
REFERATÓW WYGŁOSZONYCH W POLSKIM TOWARZYSTWIE MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W ROKU 1969

I. Zebrania naukowe

L.p.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
1	2	3	4	5	6

Oddział w Częstochowie

1	30.04.69	R. Janiczek	Zagadnienie projektowania konstrukcji w/g kryterium minimum materiału	13	3
2	28.05.69	T. Opolski	Szczególne przypadki zmian napięć w układach ciągnowych	19	3
3	25.06.69	J. Porochnicki	Problemy konstrukcji turbin wielkich mocy	14	3
4	09.11.69	J. Kolakowski	Niektóre zagadnienia nadplastyczności	9	4
5	19.12.69	M. Gierzyńska	Tarcie w warunkach wysokich nacisków	16	5

Oddział w Gdańsku

6	28.09.69	W. Pietraszkiewicz	Termodynamiczne równania konstytutywne materiału sprężystego	15	7
7	09.06.69	W. Pietraszkiewicz	O pochodnych czasowych pól tensorowych w mechanice	10	4
8	24.06.69	R. Ganowicz	Problemy budownictwa i szkolnictwa wyższego w Sudanie	25	12
9	27.06.69	J. Kruszewski	Zastosowanie sztywnych elementów skończonych w obliczeniach drgań układów liniowych. Cz. I — Podstawy teoretyczne	20	8
10	28.06.69	J. Kruszewski	Zastosowanie sztywnych elementów skończonych w obliczeniach drgań układów liniowych. Cz. II — Zastosowanie praktyczne i dokładność metody	15	6
11	24.10.69	E. E. Sakkov St. Wykładowca Uniwersytetu w Tartu (Estońska SRR)	Stany pokrytyczne sprężysto-plastycznych płyt powłok	15	4

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Oddział w Gliwicach

12	09.06.69	B. Skalmierski	Niektóre metody statystyczne w dynamice układów mechanicznych	29	5
13	20.11.69	L. Müller	Wskazania doboru korekcji zazębienia ze względów wytrzymałościowych	35	20

Oddział w Krakowie

14	01.02.69	Zebranie Zespołu Techniki Wibracyjnej R. Orłowski	Niektóre zagadnienia współczesnej techniki transportu wibracyjnego	38	24
15		Z. Drzymała	Badania wibracyjnego brykietowania drobnoziarnistych koncentratów miedzi		
16		Z. Żurowski	Zagadnienia drgań w teorii formierek — wstrząsarek		
17		W. Zapałowicz	Badania doświadczalne łoczenia wibracyjnego		
18	12.03.69	B. Olszowski	Kształtowanie dynamiczne elementów konstrukcji	17	10
19	12.03.69	W. Lenkiewicz	Dynamika procesów tarcia		
20	12.03.69	A. Czubak	Metoda dynamiczna pomiarów współczynnika tarcia między taśmą, a bębniem napędowym		

W ramach sesji wyjazdowej do Kielc:

21	08.05.69	M. Życzkowski	Problemy optymalnego kształtowania wytrzymałościowego	26	7
22	08.05.69	J. Murzewski	Stochastyczna mechanika ośrodka mikroniejednorodnego		
23	08.05.69	Z. Engel	Stosowanie drgań do realizacji procesów technologicznych		
24	08.05.69	S. Czareński	Wybrane zagadnienia tarcia w technice wibracyjnej		
25	08.05.69	M. Bojczuk	Metody numeryczne rozwiązywania równań Poissona w zastosowaniu do teorii sprężystości		
26	06.11.69	M. Życzkowski	Sprawozdanie z Kongresu na temat niestateczności ośrodków ciągłych (Karlsruhe)	16	10
27	06.11.69	Z. Engel	Sprawozdanie z Międzynarodowego Kongresu Teorii Mechanizmów i Maszyn (Zakopane)		
28	06.11.69	G. Szefer	Sprawozdanie z Konferencji ZMOC IPPT (Jaszowiec)		
29	20.11.69	W. E. Jahsman (Denver USA)	A Mathematical Examination of the Kolsky Technique for Dynamic Material Behaviour Measurement	8	3

1	2	3	4	5	6
W ramach sesji wyjazdowej do Rzeszowa zorganizowanej wspólnie z Wydziałem Nauk Technicznych Rzeszowskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk					
30	16.12.69	W. Bogusz	Techniczne zagadnienie stateczności w dynamice maszyn	15	12
31	16.12.69	R. Ciesielski	Współczesne kierunki badań doświadczalnych w mechanice budowlanej		
32	16.12.69	A. Świder	Uderzenie poprzeczne o belkę jako zagadnienie probabilistyczne		
33	16.12.69	W. Żyński	Wpływ modelu sprężysto-plastycznego ciała dyskretnego na przebieg drgań własnych		
34	16.12.69	Z. Stojek	Kierunki badań Zespołu Mechaniki Technicznej w latach 1970—1975		
Oddział w Łodzi					
35	06.03.69	S. Furmańczyk	Zginanie wielowarstwowych pasm płytowych	10	8
36	08.05.69	M. Golubiewski	Zginanie wielowarstwowe płyt	17	9
37	19.06.69	M. Roszkowski	Sily dynamiczne w łożysku częściowym	11	7
38	27.11.69	St. Zieliński	Podstawowe równania ośrodków z naprężeniami wyższego rzędu	16	1
39	18.12.69	T. Gałkiewicz	Zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu	17	2
Oddział w Poznaniu					
40	15.02.69	J. Stefaniak	Obciążenia skupione jako sily masowe	15	8
41	27.03.69	E. Bielewicz (z Gdańska)	O pewnej metodzie rozwiązywania powłok sprężystych i lepko-sprężystych	18	5
42	15.05.69	E. Karaśkiewicz	Drgania wibrouderzeniowe	30	8
43	28.06.69	Cz. Woźniak	Ciała sprężyste z wieloma inkluzjami	10	4
Oddział w Szczecinie					
44	22.01.69	W. Olszak	Próba teoretycznego uzasadnienia celowości stosowania nierównomiernej podziałki ostrzy frezów	12	5
45	28.02.69	J. Dorobczyński i H. Ostapiuk	Badania współpracy stalowych dźwigarów wiaduktu drogowego	27	7
46	21.03.69	T. Iglantowicz	Badania procesów dynamicznych przy pracy rozwiertakiem sztyw- no mocowanym	12	5
47	25.04.69	H. Karpińska	Drgania prętów obciążonych ciężarami sztywnymi o skończonych wymiarach	13	5

1	2	3	4	5	6
48	30.05.69	Z. Cywiński (z Gdańska)	Problemy wybożenia skrętnego prętów dwuetowych o zmiennej sztywności	12	8
49	10.10.69	J. Haurykiewicz	Wyrunki ścięcia materiału w płaszczynie osłabienia w zagadnieniu płaskim	8	4
50	07.11.69	J. Otremba	Przepływ cieczy w szczelinach pomp wielotłokowych-osiowych. Analiza teoretyczna	12	5
51	25.11.69	J. Otremba	Badania doświadczalne strat energii w szczelinach między tłoczkiem i korpusem pomp wielotłokowych-osiowych	11	5

Oddział w Warszawie

52	03.03.69	H. Frąckiewicz, A. Legat, J. Lewiński (praca nagrodzona I nagrodą konkursu)	Geometryczna zmienność wielosegmentowych niegładkich konstrukcji powierzchniowych	25	9
53	14.04.69	W. Nowacki	Pewne zagadnienia niesymetrycznej sprężystości	45	10
54	28.04.69	J. Klepaczko	Wrażliwość metali na prędkość odkształcenia	24	8
55	27.10.69	J. Klepaczko	Fizyczne koncepcje równań konstytutywnych i termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne w metalach	8	8
56	24.11.69	Z. Smalko, St. Ziemia	Proces badania maszyn i urządzeń mechanicznych jako uregulowany i sterowany proces operacji badawczych i dociekań naukowych	16	7
57	24.11.69	W. Gasparski, W. Nadolski, S. Ziemia	Teoria konstrukcji maszyn — zadania badawcze w świetle prognoz rozwoju gospodarczego w latach 1970—1985		

Oddział we Wrocławiu

58	20.01.69	P. Próchnik, St. Frelkiewicz	Badania własności mechanicznych skał Zagłębia Lubińskiego	11	4
59	17.03.69	B. Lysik	Równanie stanu organicznego w przypadku potencjalnego pola sił objętościowych	11	7
60	04.04.69	L. Wiśniewki	Miejscowa utrata stateczności środowiska metalowego pręta bismetrycznego	14	5
61	05.05.69	R. Jankowiak	Badania doświadczalne belek żelbetowych (część I)	10	4
62	26.05.69	R. Jankowiak	Badania doświadczalne deformacji belek żelbetowych (część II)	11	6

1	2	3	4	5	6
63	16.06.69	I. Kisiel	Rozwój reologii w ośrodku Wrocławskim w XXV-leciu PRL	17	8
64	20.10.69	J. Langer	O dynamicznych efektach serii impulsów	21	7
65	17.11.69	A. Mitzel, J. Włodarczyk	Reologia żelbetowych elementów zginanych	22	5
				841	324

II. Sympozja

1. *Symposium Oddziału Gliwickiego nt. modelowania w mechanice*

66/1.	L. Müller	Zastosowanie analizy wymiarowej
67/2.	Z. Dyląg, Z. Orłoś	Podobieństwo modelowe w zagadnieniach doświadczalnej analizy naprężeń na przykładzie badań modeli silnika
68/3.	W. Bogusz	Modelowanie maszyn układami dyskretnymi
69/4.	J. Hanczarenko	Zastosowanie analogii elektromechanicznej do badania własności dynamicznych napędu głównego obrabiarki
70/5.	T. Kolendowicz	Problem spełnienia warunków podobieństwa w modelowaniu układów prętowych przestrzennych
71/6.	E. Bielewicz i J. Filipkowi	Modelowanie konstrukcji powłokowych przy użyciu plexiglasu
72/7.	K. Lenik i Z. Wusatowski	Próby modelowego walcowania przy nierównych średnicach wałców
73/8.	J. Wandrasz	Badania modelowe ustalonego pola temperatury za pomocą wanny elektrolitycznej
74/9.	A. Strupczewski	Ocena błędów popełnianych przy modelowaniu problemów cieplnych przy pomocy oporowych układów analogowych
75/10.	A. Szymanik	Wykorzystanie metody modelowania analogowego do określania parametrów termodynamicznych obiegu porównawczego dwuprzepływowych silników odrzutowych
76/11.	A. Muszyńska	O pewnych modelach wału wirującego
77/12.	A. Lesikiewicz i St. Wiśniewski	Modelowanie procesów spalania
78/13.	J. Wandrasz	Modelowanie przepływu dmuchu i spalin w nagrzewnicy wielopięcowej
79/14.	St. Mierzwiński	Modelowanie wentylacji pomieszczeń
80/15.	M. Lurski	Modelowanie w zagadnieniach reologicznych
81/16.	R. Kozubowski i E. Gałka	Modelowanie w badaniach aerodynamicznych turbin osiowych
82/17.	A. Wszelaczyński	Podobieństwo geometryczne w modelowych badaniach wentylatorów
83/18.	J. Krzyżanowski	Niektóre problemy modelowania przepływu w ostatnich stopniach turbin parowych
84/19.	J. Święch	Modelowanie zjawiska wirującego oderwania w pierścieniach palisadach sprzężających
85/20.	Z. Szczepaniak	Badania modelowe niektórych obudów murowych, żelbetowych i stalowych stosowanych w wyrobiskach górniczych
86/21.	R. Puzyrewski, S. Krzeczowski, A. Gardzilewicz	Kryteria podobieństw w procesach rozdrabniania cieczy

- 87/22. R. Kapala, W. Kasprzak, Sprzężone modele fizyczno-matematyczne w zastosowaniu do
S. Lysik badań wytrzymałościowych konstrukcji mechanicznych
- 88/23. H. Łukaszczyk, A. Majdanik, Próby stosowania siatek fotograficznych do przedstawiania
Z. Wusatowski odkształceń plastycznych

2. III Symposium Oddziału Gdańskiego na temat filtracji

- 89/1. B. Kordas Granice stosowalności prawa Darcy
- 90/2. B. Kordas, M. Maciejewski, Zastosowanie metody A.E.H.D. do prognozowania wpływu
P. Jeż piętrzenia rzeki na poziom wód gruntowych w jej sąsiedztwie
- 91/3. T. Piwecki Uwagi o numerycznym rozwiązywaniu równania Boussinesqa
- 92/4. B. Jacenków Zastosowanie metody obliczeń otworów spływowo-chłonnych
- 93/5. Z. Sokólski Optymalne procedury rozwiązywania filtracji ustalonej w oś-
rodkach niejednorodnych
- 94/6. W. Kraj Probabilistyczny model zjawisk towarzyszących przepływowi
zawiesiny przez ośrodek porowaty
- 95/7. Z. Białas, Obliczanie parametrów krzywej uziarnienia oraz współczyn-
T. Zwierzewicz ników filtracji na maszynie cyfrowej
- 96/8. J. Dąbrowski Przegląd metod oznaczania współczynnika filtracji K gruntów
rodzinych
- 97/9. K. Rzegocki Dokładność określania współczynnika przepuszczalności grun-
B. Wolski tów na podstawie próbnego pompowania
- 98/10. B. Katkowska Określanie czasu pojawienia się przecieku na odpowietrznej
skarpie wału przeciwpowodziowego
- 99/11. H. Zaradny Wyznaczenie przewodności gruntów o niepełnym nasyceniu
- 100/12. R. Dzieciela Działanie źródeł cieczy w ośrodku konsolidującym
- 101/13. Z. Sobczyńska Działanie ruchomego punktu chwilowego źródła cieczy w oś-
rodku konsolidującym
- 102/14. Z. Kończak Osiadanie półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem siły
skupionej
- 103/15. B. Jacenkow Zastosowanie metody oporów hydraulicznych w badaniach
modelowych
- 104/16. B. Dembski Wykorzystanie metod rachunku wariacyjnego do badania
filtracji ze swobodnym zwierciadłem
- 105/17. P. Jeż, M. Maciejewski Zastosowanie analogii elektrycznej do określania wydajności
infiltracyjnego ujęcia wody założonego pod dnem rzeki
- 106/18. J. Makowski Dobór radioizotopów i ich aktywności do terenowych po-
miarów filtracji na podstawie badań modelowych
- 107/19. H. Wielicka Określenie uprzywilejowanych dróg filtracji wody w zaporze
ziemnej przy pomocy trasera chemicznego
- 108/20. J. Kowalski Obliczenie prędkości filtracji w warunkach ruchu burzliwego
- 109/21. St. Pisarczyk Badanie wodoprzepuszczalności gruntów gruboklasycznych
w aparacie wielkowymiarowym

3. IV Symponjon Oddziału Wrocławskiego poświęcony reologii

- 110/1. L. Brunarski, W. Ciołek Odkształcenia reologiczne stali przy liniowo zmieniającym się
naprężeniu
- 111/2. L. Brunarski, Parametry uogólnionego prawa pełzania Bailey-Nortona
W. Łukasiuk dla stali budowlanej
- 112/3. A. Jakowluk Wyniki badań wpływu częstotliwości siły wymuszającej na
proces wibropełzania

- 113/4. E. Kamiński,
K. A. Kunert Rozwinięcie teorii blokowej mieszanin dwufazowych Fujino, Ogawa Kawai do obliczania składowych zespolonych modułu dynamicznego mieszanej PCW/CPE oraz oznaczania typu ich struktury
- 114/5. Z. Kowal O reologicznym modelu plastycznego płynięcia metali
- 115/6. A. K. Kunert Mieszanie dwufazowe. Widma relaksacji i opóźnienia sprężystego stopionych mieszanin polimerów polichlorku winylu i poli- 3,3 bis (chlorometylu) oksetanu.
- 116/7. W. Łaskawski,
T. Skowroński Wpływ składu i parametrów prasowania twardego polichlorku winylu na jego własności termomechaniczne
- 117/8. M. Nowak Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu stabilizowanego w oleju
- 118/9. Z. Orłoś, K. Szulborski Niektóre zagadnienia reologiczne materiałów do badań modelowych
- 119/10. A. Płochocki, J. Baranówna Wstępne badania nad reometrią poliolefin
- 120/11. S. Zahorski Wpływ sprężystych własności cieczy na niestateczność płaskich ustalonych przepływów ścinających
- 121/12. A. Włochowicz, M. Nowak Badania strukturalne poliamidu stabilizowanego w oleju
- 122/13. J. Zawadzki, H. Dąbrowski Tarmokinetyczna ocena reoeftów mikrorelaksacji w polikrystalicznym chlorku srebra
- 123/14. J. Zawadzki, E. Grozik Badania podstawowe do studium nad anizotermicznym pelzaniem tworzyw termoplastycznych
- 124/15. J. Zawadzki
J. Kałwiak Wstęp do badań nad znużeniem wybranych tworzyw sztucznych przy okresowo zmiennych wymuszeniach kinematycznych o stałej amplitudzie
- 125/16. J. Zawadzki,
A. Kania Ocena wstępna wibropelzania w tworzywach termoplastycznych
- 126/17. J. Zawadzki, M. Nowak Badania wpływu dwustopniowego widma naprężeń zmęczeniowych na znużenie poliamidu i polistyrenu.
- 127/18. L. Brunarski,
M. Chwałkowski,
J. Cholnicki-Szule Pelzanie ustalone płyt kołowo-symetrycznych
- 128/19. L. Brunarski, J. Gerliński Zjawisko reologiczne w grubościennnej powłoce cylindrycznej pod ciśnieniem wewnętrznym przy zmiennym polu temperatury
- 129/20. L. Brunarski, S. Stanczyk. Zastosowanie metod wariacyjnych i analogii nieliniowo-sprężystej do obliczenia pelzania kratownicy
- 130/21. E. Gawrych-Żukowski,
S. Żukowski Przykład analizy relaksacji i pelzania płaskiego prętowego układu przegubowego
- 131/22. H. Kopecki Duże ugięcia małowyniosłej powłoki o konturze prostokątnym z materiału o własnościach reologicznych
- 132/23. B. Okołów Nieliniowe pelzanie konstrukcji
- 133/24. L. Brunarski, W. Ciołek Redystrybucja naprężeń i odkształceń w ustroju sprężonym
- 134/25. L. Brunarski, J. Hasterman Określenie czasu relaksacji i opóźnienie ceramiki i gipsu nieniszczącymi metodami akustycznymi
- 135/26. L. Brunarski, W. Obrębski O obliczaniu długotrwałych ugięć płyt żelbetowych
- 136/27. M. Kłapoć Pelzanie betonu przy wysokich naprężeniach
- 137/28. J. Kwaśniewski,
L. Baran, J. Sobieraj,
I. Sulikowska Uwzględnienie pelzania betonu przy obliczaniu naprężeń w zaporze w oparciu o pomiary tensometryczne
- 138/29. A. Mitzel, S. Dominas,
M. Rybiański, J. Szczęśniak Badania odkształceń reologicznych betonów komórkowych
- 139/30. A. Mitzel, J. Szczęśniak,
M. Rybiański, S. Dominas Straty reologiczne cienkościennych elementów sprężonych

140/31.	S. Ochylski, M. Rybak	Próba ujęcia analitycznego
141/32.	S. Ochylski, M. Rybak	Próba ujęcia analitycznego wpływu napelnacza piaskowego na pelzanie przy sciskaniu tworzywa klejowego
142/33.	A. Kidybiński	Doświadczalne podstawy termodynamiki odkształcenia skał
143/34.	I. Kisiel, H. Tyc	Przemieszczenia i naprężenia pod fundamentem zagłębionym
144/35.	J. Kwiatek, H. Glinko	Badania reologicznych własności w aparacie do obrotowego ścinania
145/36.	J. Kwiatek, A. Kowalczyk i J. Zawora	Rozwój stref plastycznych w podłożu górniczym
146/37.	W. Parzonka, A. Omelański, Z. Wolański	Reologiczna charakterystyka osadu poflotacyjnego rud miedzi dla potrzeb hydrotransportu rurowego
147/38.	S. Sz waj	Reologiczny model przestrzenny na przykładzie ośrodka gruntowego
148/39.	J. Wojciechowski	Pelzanie słabej warstwy w podłożu zwałowiska

III. Konkursy naukowe

1) Oddział w Łodzi: Ogólnopolski konkurs na najlepszą pracę w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej z wyłączeniem prac natury czysto doświadczalnej.

Tematy nagrodzonych prac:

149/1.	M. Roszkowski	Dynamika płaskiego ruchu czopa w łożysku z panewką częściową
150/2.	T. Gałkiewicz	Zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu
151/3.	K. Grudziński, J. Larkiewicz	Badania wytrzymałości złącza klejonego walcowego
152/4.	J. Kapkowski	Granice obszarów plastycznych w rozciąganych elementach z korbem lub otworem
153/5.	K. Grudziński	Podstawy obliczania nośności trwałej połączeń wciskowych

2) Oddział we Wrocławiu: Ogólnopolski konkurs na prace naukowe doświadczalne z dziedziny mechaniki.

Tematy nagrodzonych prac:

154/1.	T. Bednarski	Pomiar odkształceń plastycznych membrany kołowej obciążonej impulsem ciśnienia
155/2.	J. Klepaczek	The strain rate behavior of iron pure shear
156/3.	M. Lurski	Pelzanie przy ścinaniu połączenia klejowego metali
157/4.	W. Zapałowicz, B. Horakowski	Dynamika jazdy mostu suwnicy skrzynkowej

IV. Konferencje naukowe Oddziału Gliwickiego

	1) Metody zwężkowe pomiaru strumieni heterogenicznych	
158/1.	Cz. Graczyk	Zwężkowe metody pomiaru strumieni heterogenicznych
159/2.	Teisseyere	Zastosowanie kryzy mierniczej do pomiaru strumienia pyłu węglowego
160/3.	J. Łapa	Analiza liczby przepływu solidusu zwężki trój sygnałowej
161/4.	A. Obtulowicz	Zastosowanie zwężki trój sygnałowej w rurociągu dużej średnicy

- 162/5. Cz. Świerczyński Koncepcja zastosowania przeliczników do zwężkowej metody pomiaru strumienia pyłu węglowego
- 2) Pneumatyczne elementy techniki cyfrowej
- 163/1. Wladimir Chudy (CSSR) Pneumatyczne elementy techniki cyfrowej

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane piśmem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony; strony z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. J.1, 1.2, 1.3 itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście na marginesie należy podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich, np. ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1., 2. itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja „Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej”, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- K. SOBCZYK, Stochastyczna stabilność ruchu
Стохастическая устойчивость движения
Stochastic stability of motion
- R. STANISZEWSKI, Problemy optymalizacyjne w syntezie układów mechanicznych
Вопросы оптимизации при синтезе механических систем
Optimization problems in synthesis of mechanical systems
- R. IZWICKI, O stateczności nasypów i skarp w stanie równowagi granicznej
Об устойчивости насыпей и откосов в состоянии предельного равновесия
On the stability of the embankments and slopes in the state of limit equilibrium
- W. GAWROŃSKI, O pewnej możliwości dowodu twierdzeń o stabilności i niestabilności ruchu okresowego
Об одной возможности доказательства теорем об устойчивости и неустойчивости периодических движений
On a certain possibility of proving the periodic motion stability and instability theorems
- L. KALINOWSKI, J. LINKOWSKI, Wyrażna granica plastyczności metali w ujęciu teorii atmosfer Cottrella
Предел текучести металлов в теории атмосфер Коттрелла
Yield point phenomenon in the light of Cottrell atmospheres theory
- A. DRESCHER, Zastosowanie modelowych materiałów czułych optycznie do analizy stanu naprężenia w ośrodkach sypkich
Применение модельных оптически чувствительных материалов для исследования напряженного состояния сыпучих сред
Application of optically sensible model materials in stress analysis of granular media
- S. ZANORSKI, O profilach prędkości przy laminarnych przepływach polimerów
О профилях скорости при ламинарных течениях полимеров
On velocity profiles in laminar flows of polymers

Cena zł 30.—

KE-3/70 '4

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 8, z. 3, s. 203—271, Warszawa 1970, Indeks 36712