

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 8 • ZESZYT 2



WARSZAWA 1970

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

<p>J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, Aproksymacja powierzchni nośności granicznej przekroju rurociągu grubościennego przy obciążeniach złożonych Аппроксимация предельной поверхности для поперечного сечения толстостенного трубопровода при сложных нагрузках On approximation of the yield surface of a thick-walled pipe-line under combined loadings</p>	107
<p>A. MŁOTKOWSKI, Przybliżone obliczanie płyty kołowej, uźebrowanej jednostronnie, obciążonej antysymetrycznie Приближенное решение подвергнутой антисимметричному изгибу круговой пластинки подкрепленной односторонними радиальными ребрами Approximate solution of a circular plate with one-sided ribs subjected to antisymmetric bending</p>	127
<p>J. MARYNIAK, M. LOSTAN, Wpływ odkształcalności giętej skrzydła na stateczność podłużną szybowca Влияние изгибной деформируемости крыльев на продольную устойчивость планера Effect of flexural deformability of wings on the longitudinal stability of a glider</p>	137
<p>J. A. KÖNIG, Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie Основные теоремы теории приспособляемости упруго-пластических конструкций к изменяющимся во времени нагрузкам Basic theorems on shakedown of elastic-plastic structures under time-dependent loadings</p>	149
<p>A. GAJEWSKI, Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna Некоторые вопросы выбора оптимальной формы стержня сжимаемого полярно направленной силой Certain problems of optimum design of a rod compressed by a polar force</p>	159
<p>R. KRZYWIEC, Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie dwuwskaznikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju Механико-стереомеханическая аналогия уравнений Лагранжа второго порядка с двумя индексами Mechanical-elastic analogy in the class of two-index Lagrange equations of second kind</p>	175
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	193

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 8 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 7 0

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИОННЫЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER-IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, BARBARA SKARŻYŃSKA, MAREK SOKOŁOWSKI,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI, STEFAN ZAHORSKI
— REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 730 (606+124) egz. Arkuszy wydawn. 6,5. Arkuszy drukarskich 6,0. Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składania 22.I.1970 r. Druk ukończono w czerwcu 1970 r. Zam. 123/69 K-59 Cena zł 30.--

Druk. im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

APROKSYMACJA POWIERZCHNI NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PRZEKROJU RUROCIĄGU GRUBOŚCIENNEGO PRZY OBCIĄŻENIACH ZŁOŻONYCH

JACEK SKRZYPEK, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

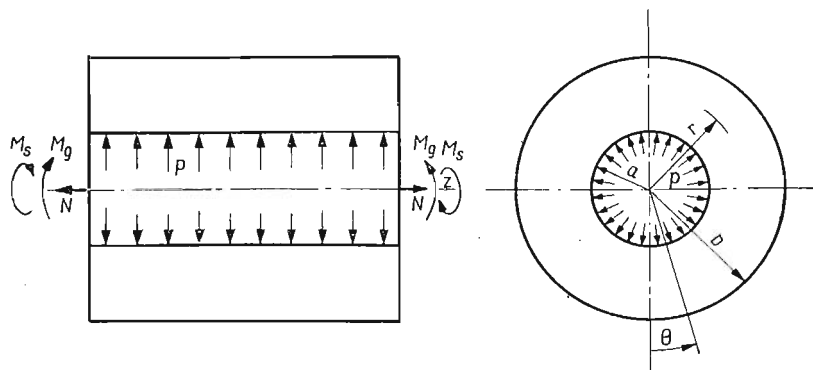
Analiza nośności granicznej rur grubościennych przy różnych kombinacjach obciążeń zajmuje w literaturze technicznej sporo miejsca. Szczególnie ważne, z punktu widzenia zastosowań, są jednak takie problemy, które nie wykazują we współrzędnych walcowych kołowej symetrii.

PIECHNIK i ŻYCZKOWSKI [2, 3] stosując metodę małego parametru uzyskali rozwiązania dla łącznego obciążenia momentami zginającymi i skręcającymi. W innej pracy ŻYCZKOWSKI [9] wyprowadził równania dla potrójnie złożonego obciążenia rury: ciśnieniem, momentem zginającym i siłą osiową, oraz podał rozwiązania dla fragmentu powierzchni granicznej w okolicy czystego ciśnienia. SKRZYPEK [4] uogólnił powyższe rozważania wprowadzając dodatkowo czwarte obciążenie — moment skręcający. Otrzymany w tej pracy układ trzech sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych rozwiązano przy założeniu niewielkiego wpływu zginania, skręcania i rozciągania na nośność rury poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego. W innej pracy tego samego autora [5] uzyskano proste, statycznie dopuszczalne rozwiązanie omawianego układu równań przy pewnych założeniach upraszczających, zakładając mianowicie nierozciągliwą oś rury i pomijając skręcanie. W niedawno opublikowanej pracy STOKEY, PETERSON i WUNDER [7] przedstawili przy zastosowaniu warunku plastyczności Treski przybliżone, statycznie dopuszczalne rozwiązanie w początkowo złożonym przypadku obciążenia (ciśnienie, zginanie, skręcanie, rozciąganie).

Głównym zamierzeniem obecnej pracy jest wyprowadzenie równania aproksymacyjnego (typu Hermite'a) powierzchni granicznej w czterowymiarowej przestrzeni sił uogólnionych: ciśnienia wewnętrznego, momentu zginającego, momentu skręcającego i siły osiowej. Najpierw podamy rozwiązanie podstawowego układu równań różniczkowych rządzących tym problemem (wyprowadzonego w cytowanej wyżej pracy [4]) przy założeniu niewielkiego wpływu ciśnienia, zginania i rozciągania na stan graniczny rurociągu skręcanego, które wraz z rozwiązaniem uzyskanym w pracy [4] i niektórymi innymi prostszymi rozwiązaniami zostanie wykorzystane przy konstruowaniu równania powierzchni granicznej.

2. Założenia i równania wyjściowe

1. Rozważamy zjawiska zachodzące w przekroju grubościennego rurociągu cylindrycznego poddanego jednoczesnemu działaniu ciśnienia wewnętrznego, siły osiowej oraz momentów: zginającego i skręcającego. Analizę prowadzimy we współrzędnych walcowych r, θ, z pamiętając, że w omawianym przypadku obciążenia stan naprężenia i odkształcenia jest niezależny od zmiennej z .



Rys. 1

2. Stosujemy teorię plastyczności Hencky'ego–Iliuszyna, względnie Levy'ego–Misesa (przy formalnym zastąpieniu odkształceń prędkościami odkształceń).

3. Rurociąg wykonany jest z materiału idealnie plastycznego, nieściśliwego, izotropowego i podlegającego warunkowi plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego.

4. Ograniczamy się do analizy wyłącznie stanu plastycznego. Dyskusję tego problemu przytoczono w pracy [4].

Przy powyższych założeniach w pracy jednego z autorów [4] przeprowadzono redukcję pełnego układu szesnastu równań teorii plastyczności do trzech sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych, cząstkowych, rzędu drugiego i czwartego, dzięki wprowadzeniu funkcji naprężeń i bezwymiarowego modułu plastycznego:

$$\left\{ \left(\Phi'' - \frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right)^2 + 4 \left[\left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right)^2 + (\Psi')^2 + \left(\frac{1}{\varrho} \Psi' \right)^2 \right] - 1 \right\} H^2 +$$

$$+ 3(\kappa^2 \varrho^2 \cos^2 \theta + 2\kappa \lambda \varrho \cos \theta + \lambda^2) = 0,$$

$$(2.1) \quad \left(\varrho^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + 3\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[\left(\Phi'' - \frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right) H \right] +$$

$$+ 4 \left(\varrho \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[\left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right) H \right] = 0,$$

$$\left(1 + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) [H \Psi'] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[H \frac{1}{\varrho} \Psi' \right] + \vartheta \varrho = 0.$$

Dla ułatwienia korzystania z tych wzorów zachowujemy przyjęte tam oznaczenia: $\kappa, \lambda, \vartheta$ oznaczają parametry proporcjonalne odpowiednio do krzywizny, wydłużenia i kąta

skręcenia (lub ich prędkości); $\varrho = \frac{r}{b}$ — bezwymiarowy promień; Φ, Ψ — bezwymiarowe funkcje naprężeń określone następującymi wzorami:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\varrho} \Phi' + \frac{1}{\varrho^2} \Phi'' \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \Phi'', \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \varepsilon_z + \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\varrho} \Phi'' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi' \right), \quad \tau_{rz} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{\varrho} \Psi', \quad \tau_{\theta z} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \Psi'; \end{aligned}$$

H — bezwymiarowy moduł plastyczny:

$$(2.3) \quad H = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \varphi;$$

σ_0 — granica plastyczności dla jednoosiowego rozciągania; φ — moduł w prawie fizycznym $D_\varepsilon = \varphi D_\sigma$. Różniczkowanie względem bezwymiarowego promienia ϱ oznaczono primami, a względem kąta θ — kropkami.

3. Rozwiązanie dla przypadku dużego momentu skręcającego

Przejdźmy obecnie do rozwiązania podstawowego układu równań (2.1) w obszarze dużego skręcania, a więc zakładając niewielki wpływ ciśnienia wewnętrznego, momentu zginającego i siły osiowej na nośność graniczną rurociągu skręcane. Zastosowanie metody małego parametru pozwala tu na rozprzężenie układu równań nieliniowych, tak że na poszczególne poprawki poszukiwanych funkcji będziemy otrzymywać łatwe do rozwiązania równanie liniowe typu Eulera. Zastosowanie praktyczne rozpatrywanego zakresu jest raczej niewielkie, jednak uzyskane wyniki wykorzystamy przy konstruowaniu ogólnych wzorów aproksymacyjnych.

Rozwiązanie będziemy przyjmować w postaci szeregów potęgowych następujących parametrów: κ — proporcjonalnego do krzywizny, λ — do jednostkowego wydłużenia oraz ξ — do ciśnienia wewnętrznego (lub do ich odpowiednich prędkości). Parametry te niekoniecznie muszą być małe. Otrzymywać jednak będziemy wyłącznie szeregi parametrów κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ , gdzie ϑ jest proporcjonalne do jednostkowego kąta skręcenia i w omawianym przypadku jest także duże. W efekcie więc κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ mogą być uważane za małe.

Przyjmijmy rozwiązanie w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \\ H &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \\ \Psi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{ijk}(\varrho, \theta) \kappa^i \lambda^j \xi^k, \end{aligned}$$

przy czym dla czystego skręcania odpowiednie wartości wynoszą

$$(3.2) \quad \Phi_{000} = 0; \quad H_{000} = \vartheta \varrho; \quad \Psi_{000} = -\frac{1}{2} \varrho.$$

Rozwiązanie układu podstawowego rozpoczynamy od drugiego spośród równań (2.1). Uwzględniając (3.2) możemy stąd obliczać kolejno Φ_{ijk} jako funkcje $H_{i-1,j,k}$, $H_{i,j-1,k}$ oraz $H_{i,j,k-1}$. Dla poszczególnych poprawek funkcji Φ otrzymujemy w ten sposób liniowe równania różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu o postaci

$$(3.3) \quad \Phi_{ijk}'''' + \frac{4}{\varrho} \Phi_{ijk}'''' + \frac{2}{\varrho^2} \Phi_{ijk}'''' + \frac{1}{\varrho^4} \Phi_{ijk}'''' + \frac{1}{\varrho^4} \Phi_{ijk}'''' = f_{ijk}(\varrho, \theta).$$

Całkę ogólną równania (3.3) przyjmujemy w formie szeregu Fouriera

$$(3.4) \quad \Phi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varrho) \cos(n\theta) + \bar{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

gdzie $\bar{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta)$ oznacza rozwiązania szczególne równań niejednorodnych (3.3). Dzięki temu, że w równaniach tych występują tylko parzyste pochodne względem kąta θ , dla funkcji $f_n(\varrho)$ będziemy otrzymywać wyłącznie równania typu Eulera (identyczne dla wszystkich i, j, k)

$$(3.5) \quad f_n'''' + \frac{4}{\varrho} f_n'''' - \frac{2n^2}{\varrho^2} f_n'' - \frac{n^2}{\varrho^4} (1 - n^2) f_n = 0,$$

skąd

$$(3.6) \quad f_n(\varrho) = C \varrho^m.$$

Rozwiązania ogólne przyjmują zatem ostatecznie postać

$$(3.7) \quad \Phi_{ijk} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{n1} \varrho^{m_{n1}} + C_{n2} \varrho^{m_{n2}} + C_{n3} \varrho^{m_{n3}} + C_{n4} \varrho^{m_{n4}}) \cos(n\theta) + \bar{\Phi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

przy czym m_{n1}, \dots, m_{n4} obliczamy jako pierwiastki równań charakterystycznych dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(3.8) \quad m^4 - 2m^3 - m^2(1 + 2n^2) + 2m(1 + n^2) - n^2(1 - n^2) = 0.$$

Obliczanie poprawek funkcji Ψ jest znacznie prostsze. W tym celu wykorzystamy pierwsze równanie z układu (2.1). Pamiętając o (3.2) wyliczamy stąd kolejno Ψ_{ijk} w funkcji $H_{i-1,j,k}$, $H_{i,j-1,k}$ i $H_{i,j,k-1}$ posługując się równaniami pierwszego rzędu typu

$$(3.9) \quad \Psi'_{ijk} = f_{ijk}(\varrho, \theta)$$

o rozwiązaniach

$$(3.10) \quad \Psi_{ijk} = C(\theta) + \bar{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

gdzie $\bar{\Psi}_{ijk}(\varrho, \theta)$ oznacza całki szczególne równania niejednorodnego (3.9).

Równie łatwo oblicza się poprawki funkcji H , stosując ostatnie z równań (2.1). H_{ijk} wyznaczamy stąd kolejno jako funkcje $\Psi_{i-1,j,k}$, $\Psi_{i,j-1,k}$, $\Psi_{i,j,k-1}$ stosując równania rzędu pierwszego postaci

$$(3.11) \quad H'_{ijk} + \frac{1}{\varrho} H_{ijk} = f_{ijk}(\varrho, \theta).$$

Rozwiązanie ogólne równań (3.11) ma zatem kształt

$$(3.12) \quad H_{ijk} = \frac{C(\theta)}{\varrho} + \bar{H}_{ijk}(\varrho, \theta),$$

przy czym przez $\overline{H}_{ijk}(\varrho, \theta)$ oznaczono całki szczególne równania niejednorodnego (3.11).

Wyrażenia (3.7), (3.10) i (3.12) określają w omawianym zadaniu stan naprężenia i odkształcenia. Należy do nich jeszcze zastosować warunki brzegowe, mianowicie na brzegu zewnętrznym, dla $\varrho = 1$

$$(3.13) \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0,$$

oraz na brzegu wewnętrznym, dla $\varrho = \beta = a/b$

$$(3.14) \quad \sigma_r = -p; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0.$$

Spośród sześciu warunków (3.13) i (3.14) pięć może być spełnionych w sposób ścisły, mianowicie wszystkie warunki dla naprężeń σ_r i $\tau_{r\theta}$ oraz jeden z warunków dla naprężenia τ_{rz} . Pozostały, szósty warunek musi być postawiony inaczej np. w formie całkowej

$$(3.15) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{rz} d\theta = 0.$$

W pracy [4] przedyskutowano inne możliwości spełnienia warunków brzegowych dla podobnego problemu nośności granicznej w otoczeniu czystego ciśnienia¹⁾.

Ze względu na to, że wymienione warunki nie zawsze są niezależne, zachodzi często konieczność korzystania z dodatkowych warunków typu przemieszczeniowego. Tak więc dla poprawek nie uwzględniających zginania można stosować warunek kołowej symetrii

$$(3.16) \quad \varepsilon_{\theta r} - u_r = 0,$$

gdyż

$$(3.17) \quad u_{\theta} = \int (\varepsilon_{\theta r} - u_r) d\theta + C_0 = u_{\theta}(r);$$

jeśli natomiast kołowa symetria nie zachodzi — warunek zgodności przemieszczeń, który musi być spełniony tożsamościowo

$$(3.18) \quad \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \gamma_{r\theta} = 2\varphi\tau_{r\theta}.$$

Korzystając ze wzorów (3.7), (3.10) i (3.12) oraz uwzględniając warunki brzegowe i warunki zgodności (3.13)–(3.18), możemy obliczyć kolejne poprawki funkcji Φ , Ψ oraz H . Ograniczając się do niezerowych poprawek, do stopnia trzeciego włącznie, otrzymujemy w ten sposób:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \Phi_{001} &= \left(\frac{2}{\varrho} + \varrho^2 \right) \frac{1}{\vartheta}, \\ \Phi_{003} &= 12 \left[\frac{2(1-\beta^9) + \varrho^3(1-\beta^6)}{2\beta^6(1-\beta^3)\varrho} - \frac{1}{7\varrho^7} \right] \frac{1}{\vartheta^3}, \\ \Phi_{111} &= \left\{ \frac{36 \ln \beta}{\beta \frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta \frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left[\frac{\varrho \frac{1+\sqrt{17}}{2}}{1+\sqrt{17}} + \frac{\varrho \frac{1-\sqrt{17}}{2}}{1-\sqrt{17}} \right] + \frac{2(1+3 \ln \varrho)}{\varrho^2} \right\} \frac{\cos \theta}{\vartheta^3}, \\ \Phi_{201} &= \left[C_{21}\varrho^{m_{11}} + C_{22}\varrho^{m_{22}} + C_{23}\varrho^{m_{23}} + C_{24}\varrho^{m_{24}} + \frac{3}{2} \left(\frac{7}{\varrho^2} - \frac{3}{\varrho} \right) \right] \frac{\cos 2\theta}{\vartheta^3}. \end{aligned}$$

¹⁾ np. stosując metodę Trefftza lub obliczając kres dolny rozwiązania.

Wykładniki m_{21} , m_{22} , m_{23} i m_{24} są rzeczywistymi pierwiastkami równania algebraicznego (3.8) dla $n = 2$, czyli

$$(3.20) \quad m^4 - 2m^3 - 9m^2 + 10m + 12 = 0,$$

natomiast stałe C_{21} , C_{22} , C_{23} i C_{24} mogą być obliczone z warunków brzegowych dla funkcji Φ_{201} (3.13) i (3.14). Nie mają one jednak żadnego wpływu na analizę obciążeń i obliczenie nośności granicznej.

Poprawki pozostałych funkcji wynoszą:

$$(3.21) \quad \Psi_{200} = -\frac{3}{4}(1-\varrho)\frac{\cos^2\theta}{\vartheta^2}; \quad \Psi_{020} = -\frac{3}{4\varrho}\frac{1}{\vartheta^2};$$

$$\Psi_{002} = -\frac{9}{5\varrho^5}\frac{1}{\vartheta^2}; \quad \Psi_{110} = \frac{3}{2}\ln\varrho\cos\theta\frac{1}{\vartheta^2}$$

oraz

$$(3.22) \quad H_{200} = \left[\frac{3\varrho}{4} + 3\left(1 - \frac{\varrho}{4}\right)\cos 2\theta \right] \frac{1}{\vartheta^2};$$

$$H_{002} = \frac{18}{\varrho^5}\frac{1}{\vartheta^2}; \quad H_{110} = 3(2 - \ln\varrho)\frac{1}{\vartheta^2}.$$

W oparciu o (3.19), (3.21) i (3.22) i pamiętając o (2.2) możemy obliczyć składowe stanu naprężenia

$$(3.23) \quad \sigma_r = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ 2\left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right)\frac{\xi}{\vartheta} + 12\left[\frac{1-\beta^9}{\beta^6(1-\beta^3)}\left(\frac{1-\beta^6}{1-\beta^9} - \frac{1}{\varrho^3}\right) + \frac{1}{\varrho^9}\right]\frac{\xi^3}{\vartheta^3} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{18\ln\beta}{\beta\frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta\frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left(\varrho^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} - \varrho^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) - \frac{18\ln\varrho}{\varrho^4} \right] \cos\theta \frac{\varkappa\lambda\xi}{\vartheta^3} + \right.$$

$$\left. + \left[(m_{21}-4)C_{21}\varrho^{m_{21}-2} + \dots + \frac{9}{2}\left(\frac{5}{\varrho^3} - \frac{14}{\varrho^4}\right) \right] \cos 2\theta \frac{\varkappa^2\xi}{\vartheta^3} + \dots \right\},$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ 2\left(1 + \frac{2}{\varrho^3}\right)\frac{\xi}{\vartheta} + 12\left[\frac{1-\beta^9}{\beta^6(1-\beta^3)}\left(\frac{1-\beta^6}{1-\beta^9} + \frac{2}{\varrho^3}\right) - \frac{8}{\varrho^9}\right]\frac{\xi^3}{\vartheta^3} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{9\ln\beta}{\beta\frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta\frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left((1+\sqrt{17})\varrho^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}} + (-1+\sqrt{17})\varrho^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{18(2\ln\varrho-1)}{\varrho^4} \right] \cos\theta \frac{\varkappa\lambda\xi}{\vartheta^3} + \left[m_{21}(m_{21}-1)C_{21}\varrho^{m_{21}-2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{2}\left(-\frac{2}{\varrho^3} + \frac{14}{\varrho^4}\right) \right] \cos 2\theta \frac{\varkappa^2\xi}{\vartheta^3} + \dots \left. \right\},$$

$$\begin{aligned}
 (3.23) \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{2\varrho^3} \right) \frac{\xi}{\vartheta} + \frac{3}{2} \cos \theta \frac{\kappa}{\vartheta} + \frac{3}{2\varrho} \frac{\lambda}{\vartheta} - \right. \\
 [c.d.] & - \frac{9}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{4-\varrho}{2\varrho} \cos 2\theta \right] \cos \theta \frac{\kappa^3}{\vartheta^3} + 12 \left[\frac{1-\beta^9}{\beta^6(1-\beta^3)} \left(\frac{1-\beta^6}{1-\beta^9} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2\varrho^3} \right) - \frac{7}{2\varrho^9} \right] \frac{\xi^3}{\vartheta^3} - \frac{27}{\varrho^6} \cos \theta \frac{\kappa \xi^2}{\vartheta^3} - \frac{18}{\varrho^7} \frac{\lambda \xi^2}{\vartheta^3} - \\
 & - \frac{9(2-\ln \varrho)}{2\varrho^2} \cos \theta \frac{\kappa \lambda^2}{\vartheta^3} - \frac{9}{4\varrho} \left[\ln \varrho - \frac{3}{2} + \left(\frac{2+\ln \varrho}{\varrho} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{5}{2} \right) \cos(2\theta) \right] \frac{\kappa^2 \lambda}{\vartheta^3} + \left[\frac{9 \ln \beta}{\beta \frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta \frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \varrho^{-\frac{3+\sqrt{17}}{2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \varrho^{-\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) + \frac{9(\ln \varrho - 1)}{\varrho^4} \right] \cos \theta \frac{\kappa \lambda \xi}{\vartheta^3} + \\
 & \left. + \left[\frac{1}{2} (m_{21}^2 - m_{21} - 4) C_{21} \varrho^{m_{21}-2} + \dots + \frac{27}{4\varrho^3} \right] \cos 2\theta \frac{\kappa^2 \xi}{\vartheta^3} + \dots \right\};
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left\{ \left[\frac{18 \ln \beta}{\beta \frac{5+\sqrt{17}}{2} - \beta \frac{5-\sqrt{17}}{2}} \left(\varrho^{-\frac{3+\sqrt{17}}{2}} - \varrho^{-\frac{-3-\sqrt{17}}{2}} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{18 \ln \varrho}{\varrho^4} \right] \sin \theta \frac{\kappa \lambda \xi}{\vartheta^3} + \left[2(1-m_{21}) C_{21} \varrho^{m_{21}-2} - \dots + \right. \right. \\
 (3.24) & \left. \left. + 6 \left(\frac{7}{\varrho^4} - \frac{2}{\varrho^3} \right) \right] \sin 2\theta \frac{\kappa^2 \xi}{\vartheta^3} + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta z} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{\varrho^6} \frac{\xi^2}{\vartheta^2} + \frac{3}{8} (1 + \cos 2\theta) \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} - \frac{3}{2\varrho^3} \frac{\lambda^2}{\vartheta^2} - \frac{3}{\varrho} \cos \theta \frac{\kappa \lambda}{\vartheta^2} + \dots \right], \\
 \tau_{rz} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{3}{4} (1 - \varrho) \sin 2\theta \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} + \frac{3}{\varrho} \sin \theta \frac{\kappa \lambda}{\vartheta^2} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Parametry κ , λ , ξ we wzorach (3.23) i (3.24) występują jak widać zawsze w formie stosunków κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ , przy czym ϑ oznacza jednostkowy kąt skrzywienia. Posługując się wyrażeniami (3.19), (3.21) i (3.22) można także uzyskać wzory na odkształcenia (względnie prędkości odkształceń).

Na rys. 2 przedstawiono graficznie wykresy naprężeń dla trzech przekrojów rury o stosunku promieni $\beta = 1/2$ ($\theta = 45^\circ$, $\theta = 180^\circ$, $\theta = 270^\circ$), uzyskane w oparciu o wzory (3.23) i (3.24) z wykorzystaniem poprawek rzędu drugiego włącznie. Obliczenia wykonano dla wartości parametrów $\xi/\vartheta = 0,01$, $\kappa/\vartheta = \lambda/\vartheta = 0,1^2$.

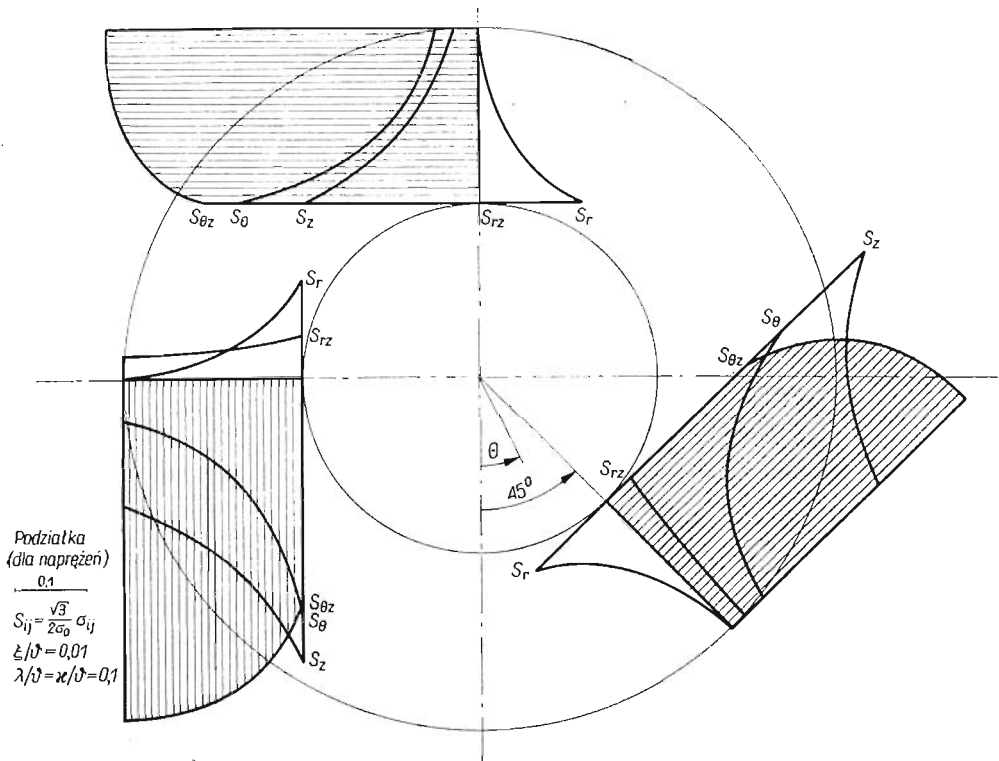
²⁾ Przyjęta tu wartość parametru $\xi/\vartheta = 0,01$ wynosi około $1/5 (\xi/\vartheta)_{\max}$ [por. (3.32)].

Przejdźmy obecnie do wyznaczenia obciążeń wywołujących stan plastyczny rury. Siłę osiową możemy obliczyć ze wzoru

$$(3.25) \quad N = \iint_F \sigma_z dF = b^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\beta}^1 \sigma_z \varrho d\varrho,$$

a po uwzględnieniu (3.23), wykonaniu całkowania i przejściu do zapisu bezwymiarowego mamy

$$(3.26) \quad n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\sigma_0 b^2} N = 3(1-\beta) \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{2(1-\beta^3)}{\beta} \frac{\xi}{\vartheta} - \frac{54(1-\beta^5)}{5\beta^5} \frac{\lambda\xi^2}{\vartheta^3} - \\ - \frac{9}{2} \left[\beta \ln \frac{1}{\beta} - \frac{5}{2}(1-\beta) \right] \frac{\kappa^2 \lambda}{\vartheta^3} + \dots$$



Rys. 2

Moment zginający obliczamy ze wzoru

$$(3.27) \quad M_\theta = \iint_F r \sigma_z \cos \theta dF = b^3 \int_{\beta}^1 \varrho^2 d\varrho \int_0^{2\pi} \sigma_z \cos \theta d\theta,$$

a po wykonaniu całkowania i stosując jak poprzednio zapis bezwymiarowy uzyskujemy

$$(3.28) \quad m_\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\sigma_0 b^3} M_\theta = 2(1-\beta^3) \frac{\kappa}{\vartheta} - \frac{9}{2} \left[\frac{1-\beta^3}{6} + 1-\beta^2 \right] \frac{\kappa^3}{\vartheta^3} - \\ - 18 \left[3(1-\beta) - \beta \ln \frac{1}{\beta} \right] \frac{\kappa\lambda^2}{\vartheta^3} - \frac{36(1-\beta^3)}{\beta^3} \frac{\kappa\xi^2}{\vartheta^3} + \dots$$

Wreszcie moment skręcający otrzymujemy przez całkowanie naprężenia $\tau_{\theta z}$ (3.24), mianowicie

$$(3.29) \quad M_s = \iint_F \tau_{\theta z} r dF = 2\pi b^3 \int_\beta^1 \tau_{\theta z} \varrho^2 d\varrho$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(3.30) \quad m_s = \frac{\sqrt{3}}{W_0 \sigma_0} M_s = \frac{4}{1-\beta^4} \left[\frac{1-\beta^3}{3} - \frac{1-\beta^4}{4} \frac{\kappa^2}{\vartheta^2} - \right. \\ \left. - \frac{3(1-\beta)}{2} \frac{\lambda^2}{\vartheta^2} - \frac{6(1-\beta^3)}{3} \frac{\xi^2}{\vartheta^2} + \dots \right],$$

gdzie W_0 oznacza sprężysty wskaźnik skręcania

$$(3.31) \quad W_0 = \frac{\pi b^3 (1-\beta^4)}{2}.$$

Ciśnienie wewnętrzne obliczamy z pierwszego z warunków brzegowych (3.14), co po wprowadzeniu zapisu bezwymiarowego daje

$$(3.32) \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} p = -\frac{2(1-\beta^3)}{\beta^3} \frac{\xi}{\vartheta}.$$

Równania (3.26), (3.28), (3.30) i (3.32) opisują w formie parametrycznej rozpatrywany fragment powierzchni granicznej z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia; parametrami są κ/ϑ , λ/ϑ , ξ/ϑ i dodatkowo stosunek promieni β .

Przy konstruowaniu równania aproksymacyjnego wygodniej będzie się posługiwać wzorem w postaci jawnej

$$(3.33) \quad m_s = m_s(m_\theta, n, q),$$

które uzyskujemy przez eliminację parametrów κ/ϑ , λ/ϑ i ξ/ϑ z układu równań parametrycznych (3.26), (3.28), (3.30) i (3.32). Po przekształceniach otrzymujemy w ten sposób ostatecznie

$$(3.34) \quad m_s = \frac{4}{1-\beta^4} \left[\frac{1-\beta^3}{3} - \frac{9\beta^3 + \beta^4(1+\beta+\beta^2)}{8(1-\beta^3)} q^2 - \frac{1}{6(1-\beta)} n^2 + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{2\sqrt{3}(1-\beta)} qn - \frac{1}{16(1-\beta^3)} m_\theta^2 + \dots \right].$$

Równanie powyższe jest poszukiwanym równaniem (w postaci jawnej) fragmentu powierzchni granicznej w otoczeniu czystego skręcania.

4. Uwagi odnośnie innych rozwiązań

Obecnie przedyskutujemy możliwości rozwiązania podstawowego układu równań (2.1) przy innych, nie rozważanych dotąd sposobach obciążenia, mianowicie w otoczeniu czystego rozciągania i czystego zginania.

Zajmijmy się na początek analizą wpływu ciśnienia, momentu zginającego i momentu skręcającego na nośność graniczną rurociągu rozciąganego. Ten typ obciążenia, podobnie jak w przypadku omówionym w p. 3, nie posiada większego znaczenia praktycznego. Zastosowanie metody małego parametru napotyka tu na pewne trudności, bowiem punkt odpowiadający czystemu rozciąganiu ($p = 0$, $m_s = 0$) jest punktem osobliwym z uwagi na wpływ zginania. Problem ten był badany szczegółowo przez ŻYCZKOWSKIEGO w [8], gdzie dla rury grubościennej uzyskano uogólnione szeregi potęgowe o wykładnikach 1, 5/3, 7/3, ... itd. Przedstawimy zatem rozwiązanie uwzględniające tylko obciążenia kolo-symetryczne, a więc bez zginania.

Będziemy poszukiwać funkcji naprężeń i modułu plastycznego w postaci szeregów

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{ij}(\varrho) \xi^i \vartheta^j, \\ \Psi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{ij}(\varrho) \xi^i \vartheta^j, \\ H &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} H_{ij}(\varrho) \xi^i \vartheta^j, \end{aligned}$$

przy czym zerowe aproksymacje wynoszą odpowiednio

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Phi_{00} &= \Psi_{00} = 0, \\ H_{00} &= \pm \sqrt{3} \lambda; \end{aligned}$$

ξ , ϑ , λ oznaczają, podobnie jak poprzednio, parametry proporcjonalne do ciśnienia, jednostkowego kąta skręcenia i jednostkowego wydłużenia. Na kolejne poprawki modułu H uzyskujemy, w oparciu o (2.1) i po wprowadzeniu (4.2), równania algebraiczne. Poprawki funkcji naprężeń Φ wyznaczamy z równań Eulera czwartego rzędu typu

$$(4.3) \quad \Phi_{ij}'''' + \frac{2}{\varrho} \Phi_{ij}''' - \frac{1}{\varrho^2} \Phi_{ij}'' + \frac{1}{\varrho^3} \Phi_{ij}' = f_{ij}(\varrho),$$

których rozwiązanie ogólne ma postać

$$(4.4) \quad \Phi_{ij} = C_1 + C_2 \varrho^2 + C_3 \ln \varrho + C_4 \varrho^2 \ln \varrho + \bar{\Phi}_{ij}(\varrho).$$

Dla poprawek drugiej funkcji naprężeń Ψ otrzymujemy jeszcze prostsze równania Eulera drugiego rzędu

$$(4.5) \quad \Psi_{ij}'' + \frac{1}{\varrho} \Psi_{ij}' = f_{ij}(\varrho)$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$(4.6) \quad \Psi_{ij} = C_1 + C_2 \varrho^2 + \bar{\Psi}_{ij}(\varrho).$$

$\bar{\Phi}_{ij}(\varrho)$ i $\bar{\Psi}_{ij}(\varrho)$ oznaczają odpowiednio całki szczególne równań niejednorodnych (4.3) i (4.5).

Stosując do (4.4) i (4.6) warunki brzegowe (3.13), (3.14) oraz pamiętając o (2.2) wyznaczamy składowe stanu naprężenia w funkcji parametrów ξ/λ i ϑ/λ

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\beta^2(1-\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} \frac{\xi}{\lambda} + \frac{2\beta^2}{3(1-\beta^2)^3} \left[\frac{(1-\beta^6)(1-\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} - \frac{\beta^4(1-\varrho^6)}{\varrho^6} \right] \frac{\xi^3}{\lambda^3} + \dots \right\}, \\
 \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ -\frac{\beta^2(1+\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} \frac{\xi}{\lambda} + \frac{2\beta^2}{3(1-\beta^2)^3} \left[-\frac{(1-\beta^6)(1+\varrho^2)}{(1-\beta^2)\varrho^2} + \frac{\beta^4(5+\varrho^6)}{\varrho^6} \right] \frac{\xi^3}{\lambda^3} + \dots \right\}, \\
 \sigma_z &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\xi}{\lambda} - \frac{\sqrt{3}\beta^4}{(1-\beta^2)^2\varrho^4} \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \frac{\sqrt{3}\varrho^2}{12} \frac{\vartheta^2}{\lambda^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\beta^2}{3(1-\beta^2)^3} \left[-\frac{1-\beta^6}{1-\beta^2} + \frac{\beta^4(2+\varrho^6)}{\varrho^6} \right] \frac{\xi^3}{\lambda^3} + \dots \right\}, \\
 \tau_{\theta z} &= \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\varrho}{2\sqrt{3}} \frac{\vartheta}{\lambda} - \frac{\varrho^3}{12\sqrt{3}} \frac{\vartheta^3}{\lambda^3} + \dots \right], \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{rz} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Wykorzystując uzyskany rozkład naprężeń i posługując się wzorami (3.25), (3.29) i (3.32) otrzymujemy następujące wyrażenia na obciążenia wyczerpujące nośność graniczną rurociągu:

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} p = -\frac{\xi}{\lambda},
 \tag{4.8}$$

$$m_s = \frac{\sqrt{3}}{W_0\sigma_0} M_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\vartheta}{\lambda} - \frac{1-\beta^6}{9\sqrt{3}(1-\beta^4)} \frac{\vartheta^3}{\lambda^3} + \dots,
 \tag{4.9}$$

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi b^2\sigma_0} N = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2} - \beta^2 \frac{\xi}{\lambda} - \frac{\beta^2\sqrt{3}}{1-\beta^2} \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{24} \frac{\vartheta^2}{\lambda^2} + \dots
 \tag{4.10}$$

lub po dokonaniu deparametryzacji układu równań (4.8)–(4.10)

$$n = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2} + \beta^2 q - \frac{\sqrt{3}\beta^2}{1-\beta^2} q^2 - \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{8} m_s^2 + \dots.
 \tag{4.11}$$

Otrzymany układ równań (4.8)–(4.10) opisuje, w omawianym przypadku obciążenia, fragment powierzchni granicznej w sposób parametryczny, natomiast równanie (4.11) — w sposób jawny³⁾. Wzory te nie uwzględniają oczywiście wpływu zginania. Celem uzyska-

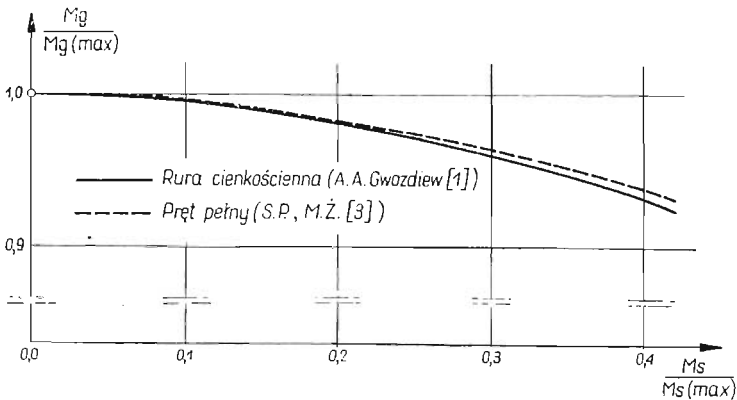
³⁾ Wzory te można również uzyskać stosując rozwinięcia na szeregi potęgowe wzorów podanych we wspólnej pracy obu autorów [6].

nia kompletnego rozwiązania (potrzebnego do budowy równania aproksymacyjnego powierzchni granicznej) poprawki uwzględniające wpływ zginania zaczerpnijemy z pracy jednego z autorów [8] uzyskując ostatecznie

$$(4.12) \quad n = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2} \left[1 + \frac{2\beta^2}{\sqrt{3}(1-\beta^2)} q - \frac{2\beta^2}{(1-\beta^2)^2} q^2 - \frac{1+\beta^2}{4} m_s^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}(1-\beta^2)} m_g - \frac{3^{5/6}\pi^{2/3}}{80(1-\beta^2)} m_g^{5/3} + \dots \right].$$

Równanie (4.12) jest pełnym równaniem części powierzchni granicznej w otoczeniu dużego rozciągania. Nie uwzględnia ono jedynie ewentualnych wyrazów pochodzących od łącznego działania ciśnienia i momentu zginającego (q , m_g) oraz obu momentów (m_s , m_g); uzasadnione jest jednak przypuszczenie, że są to wyrazy wyższych rzędów.

Przejdźmy obecnie do dyskusji wpływu ciśnienia, siły osiowej i momentu skręcającego na stan graniczny rurociągu zginanego. Przyjęcie jako zerowej aproksymacji czystego zginania wprowadza do rozwiązania jeszcze większe trudności niż omówione poprzednio. Taki stan wyjściowy posiada bowiem linię nieciągłości i do rozwiązania należałoby zastosować zmodyfikowaną metodę małego parametru (metodę P-L-K), co z uwagi na wysoki rząd równań różniczkowych jest bardzo skomplikowane. Również przyjęcie jako punktu wyjścia łącznego obciążenia siłą osiową i momentem zginającym napotyka trudności tego



Rys. 3

samego rodzaju. Przy konstruowaniu równania aproksymacyjnego będziemy się zatem posługiwać wzorami uzyskanymi w oparciu o pewne rozwiązanie statycznie dopuszczalne wyprowadzone przez jednego z autorów w pracy [5]. Rozwiązanie to wyprowadzone dla rurociągu poddanego działaniu ciśnienia, momentu zginającego i siły osiowej przy założeniu nierozciągliwej osi określa wprawdzie tylko kres dolny, jednak jest dość dokładne, gdyż równania kinematyczne są w nim spełnione wszędzie z wyjątkiem linii nieciągłości naprężeń (wzdłuż której rozwiązanie jest zatem kinematycznie niedopuszczalne)⁴⁾.

⁴⁾ Szczegółową dyskusję tego problemu i ocenę dokładności cytowanych rozwiązań znaleźć można w pracy [5].

Poprawki uwzględniające wpływ siły osiowej zaczerpnęliśmy wprost z pracy [8]. Więcej kłopotu nastęrcza uwzględnienie wpływu momentu skręcającego. PIECHNIK i ŻYCZKOWSKI [3] analizowali wpływ skręcania na nośność graniczną pełnych prętów zginanych; GWOZDIEW [1] natomiast badał to samo dla rur cienkościennych (przy zastosowaniu wariacyjnych metod teorii plastyczności). Porównanie numeryczne obu tych rozwiązań (po sprowadzeniu do dogodnej postaci bezwymiarowej) — rys. 3, wskazuje na bardzo małe różnice w dużym zakresie obciążeń. Pozwala to przypuszczać, że odpowiednie rozwiązanie dla rury grubościennej, zawarte z pewnością pomiędzy obu rozważanymi przypadkami (dla pręta i rury cienkościennej) również nieznacznie tylko od nich się różni. Dla naszego problemu (rura grubościenna) zastosujemy poprawkę na skręcanie dla pręta pełnego zaczerpniętą wprost z pracy [3], gdyż jak sądzimy przypadek ten bardziej odpowiada warunkom naszego zadania. Należy jednak pamiętać, że otrzymane w ten sposób ostatecznie równanie fragmentu powierzchni granicznej w otoczeniu dużego zginania jest wzorem niezupełnie ścisłym, tak z uwagi na zastosowane podejście statyczne, jak również na omówione wyżej przybliżenia

$$(4.13) \quad m_{\theta} = \frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{2} \left[\frac{16(1+\beta+\beta^2)}{3\pi(1+\beta)(1+\beta^2)} - \frac{2\pi}{3(1-\beta)(1-\beta^4)} n^2 - \frac{32\beta^3}{\pi(1+\beta)(1+\beta^2)(1-\beta^2)^2} q^2 - \frac{3(1-\beta^4)}{\pi} 0,4036 m_s^2 + \dots \right].$$

Dla opisu powierzchni granicznej w okolicy dużego ciśnienia będziemy przyjmować następujące rozwiązanie wyprowadzone przez SKRZYPKA w cytowanej we wstępie pracy [4]⁵.

$$(4.14) \quad q = \ln \frac{1}{\beta} - \frac{1}{8(1-\beta^6)} m_g^2 - \frac{2}{3(1-\beta^4)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{3(1-\beta^4)^2}{16(1-\beta^6)} m_s^2 - \frac{8\beta^2}{9(1-\beta^4)^2} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right)^3 - \frac{\beta^2}{2(1-\beta^4)(1-\beta^6)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right) m_g^2 - \frac{\beta^2(1-\beta^4)}{4(1-\beta^6)} \left(n - \beta^2 \ln \frac{1}{\beta} \right) m_s^2 - \dots$$

Wzory (3.34), (4.12), (4.13) i (4.14) opisują fragmenty powierzchni granicznej w czterowymiarowej przestrzeni sił uogólnionych przy omówionych czterech sposobach obciążania.

5. Aproksymacyjne równanie powierzchni nośności granicznej

Korzystając z wyprowadzonych powyżej i zestawionych w p. 4 wzorów, podamy obecnie konstrukcję pewnych wzorów aproksymacyjnych opisujących całą powierzchnię graniczną w czterowymiarowej przestrzeni obciążeń: ciśnieniem wewnętrznym, siłą osiową,

⁵ Cytowane tu rozwiązanie uzyskano w [4] przy zastosowaniu pewnych *uśrednionych* warunków brzegowych. Autor podał tam również inne możliwości spełnienia warunków brzegowych.

momentem skręcającym i momentem zginającym. Zastosujemy uogólnioną aproksymację typu Hermite'a. Różni się ona od klasycznej aproksymacji interpolacyjnej Hermite'a uwikłaną postacią równania

$$(5.1) \quad f(q, n, m_s, m_g) = 0$$

i wykorzystaniem warunków zgodności różnych pochodnych cząstkowych liczonych w punktach odpowiadających obciążeniom czystym (pojedynczym) wzorami na pochodne funkcji uwikłanych. Wykorzystamy mianowicie wyprowadzone wyżej rozwiązania ściśle dla dużego skręcania (3.34), rozciągania (4.12) i ciśnienia (4.14) oraz rozwiązanie przybliżone w otoczeniu czystego zginania (4.13).

5.1. Warunki zgodności. W omawianym zadaniu dysponujemy warunkami zgodności wartości funkcji oraz pierwszych i drugich pochodnych cząstkowych (czystych i mieszanych) w punktach odpowiadających czystym stanom obciążenia. Dla wygody zastosujemy oznaczenia pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego $A_{i,j}$ oraz drugiego $A_{i,jk}$, gdzie indeks i oznacza jedno z obciążeń q, n, m_s, m_g [z zachowaniem kolejności według wzoru (5.1)], natomiast indeksy j oraz k — zmienne, względem których wykonujemy różniczkowanie.

Oto zestaw posiadanych warunków:

czyste ciśnienie wewnętrzne ($n = m_s = m_g = 0$):

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \bar{q} &= \ln \frac{1}{\beta} - \frac{2\beta^4}{3(1-\beta^4)} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \frac{8\beta^8}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial q}{\partial m_s} &= \frac{\partial q}{\partial m_g} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial n} &= A_{1,2} = \frac{4\beta^2}{3(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} - \frac{8\beta^6}{3(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} &= A_{1,22} = \frac{4}{3(1-\beta^4)} + \frac{16\beta^4}{3(1-\beta^4)^2} \ln \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial m_s^2} &= A_{1,33} = -\frac{3(1-\beta^4)^2}{8(1-\beta^6)} + \frac{\beta^2(1-\beta^4)}{2(1-\beta^6)} \ln \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial m_g^2} &= A_{1,44} = -\frac{1}{4(1-\beta^6)} + \frac{\beta^4}{(1-\beta^4)(1-\beta^6)} \ln \frac{1}{\beta} + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial n \partial m_s} &= \frac{\partial^2 q}{\partial n \partial m_g} = \frac{\partial^2 q}{\partial m_s \partial m_g} = 0; \end{aligned}$$

czyste rozciąganie ($q = m_s = m_g = 0$):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\sqrt{3}(1-\beta^2)}{2}, \\ \frac{\partial n}{\partial q} &= A_{2,1} = \beta^2, \quad \frac{\partial n}{\partial m_g} = A_{2,4} = \mp \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial n}{\partial m_s} = A_{2,3} = 0, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial q} &= A_{2,11} = -\frac{2\sqrt{3}\beta^2}{1-\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial m_s^2} = A_{2,33} = -\frac{\sqrt{3}(1-\beta^4)}{4}, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial m_g^2} &= A_{2,44} = \infty, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial q \partial m_s} = \frac{\partial^2 n}{\partial m_s \partial m_g} = 0; \end{aligned}$$

czyste skręcanie ($q = n = m_g = 0$):

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_s &= \frac{4(1-\beta^3)}{3(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial m_s}{\partial q} &= \frac{\partial m_s}{\partial n} = \frac{\partial m_s}{\partial m_g} = 0, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial q^2} &= A_{3,11} = -\frac{9\beta^3 + \beta^4(1+\beta+\beta^2)}{(1-\beta^3)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial n^2} &= A_{3,22} = -\frac{4}{3(1-\beta)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial m_g^2} &= A_{3,44} = -\frac{1}{2(1-\beta^3)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial q \partial n} &= A_{3,12} = \frac{2\beta^2}{\sqrt{3}(1-\beta)(1-\beta^4)}, \\
 \frac{\partial^2 m_s}{\partial q \partial m_g} &= \frac{\partial^2 m_s}{\partial n \partial m_g} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

czyste zginanie ($q = n = m_s = 0$):

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_g &= \frac{8(1-\beta^3)}{\pi\sqrt{3}}, \\
 \frac{\partial m_g}{\partial q} &= \frac{\partial m_g}{\partial n} = \frac{\partial m_g}{\partial m_s} = 0, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial q^2} &= A_{4,11} = -\frac{32\sqrt{3}\beta^2}{\pi(1+\beta)(1-\beta^2)}, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial n^2} &= A_{4,22} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}(1-\beta)}, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial m_s^2} &= A_{4,33} = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi}0,4036(1-\beta^4)^2, \\
 \frac{\partial^2 m_g}{\partial q \partial m_s} &= \frac{\partial^2 m_g}{\partial n \partial m_s} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Wartości pozostałych dwóch pochodnych cząstkowych, mianowicie $\frac{\partial^2 n}{\partial q \partial m_g}$ (dla $n = \bar{n}$)

oraz $\frac{\partial^2 m_g}{\partial q \partial n}$ (dla $m_g = \bar{m}_g$) nie są znane.

5.2. Pełna aproksymacja wielomianem czwartego stopnia. Przyjmijmy równanie aproksymacyjne w postaci osiemnastoparametrowego wielomianu określającego powierzchnię graniczną w sposób uwikłany:

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad &\alpha_1 q^2 + \alpha_2 n^2 + \alpha_3 qn + \alpha_4 q^2 n^2 + \alpha_5 m_s^2 + \alpha_6 m_g^2 + \alpha_7 |m_g|n^2 + \\
 &+ \alpha_8 q^4 + \alpha_9 n^4 + \alpha_{10} m_s^4 + \alpha_{11} m_g^4 + \alpha_{12} m_s^2 m_g^2 + \alpha_{13} q^2 m_s^2 + \alpha_{14} q^2 m_g^2 + \\
 &+ \alpha_{15} n^2 m_s^2 + \alpha_{16} n^2 m_g^2 + \alpha_{17} q^3 n + \alpha_{18} qn^3 = 1.
 \end{aligned}$$

Taka forma poszukiwanego równania wynika ze znanych w literaturze rozwiązań dla przekrojów powierzchni granicznej, odpowiadającej mniej złożonym stanom obciążenia. Współczynniki α_i wyznaczamy wykorzystując warunki (5.2)–(5.5). Warunków tych jest oczywiście znacznie więcej niż liczba parametrów w równaniu (5.6). Wszystkie zerowe warunki spełnione są jednak tożsamościowo dzięki przyjętej postaci równania (5.6). Z pozostałych dwudziestu niezerowych warunków może być spełnionych osiemnaście. Tak na przykład odrzucając warunki na dwie pochodne $A_{2,11}$ i $A_{2,44}$ otrzymujemy układ osiemnastu równań, z którego można obliczyć wszystkie współczynniki α_i równania aproksymacyjnego (5.6)⁶.

Ostatecznie na współczynniki α_i otrzymujemy następujące wyrażenia (częściowo rekurencyjne, wyrażające się poprzez α_8):

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{\bar{q}^2} - \alpha_8 \bar{q}^2, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{\bar{n}^2} - \alpha_9 \bar{n}^2, \\
 \alpha_3 &= -2A_{3,12} \left(\frac{1}{\bar{m}_s} + \alpha_{10} \bar{m}_s^3 \right), \\
 \alpha_4 &= -\frac{A_{1,22}}{\bar{q}} (\alpha_1 + 2\alpha_8 \bar{q}^2) - \frac{\alpha_2}{\bar{q}^2} - \frac{(\alpha_1 + 6\alpha_8 \bar{q}^2)(\alpha_3 + \alpha_{17} \bar{q}^2)^2}{4\bar{q}^2(\alpha_1 + 2\alpha_8 \bar{q}^2)^2}, \\
 \alpha_5 &= \frac{1}{\bar{m}_s^2} - \alpha_{10} \bar{m}_s^2, \\
 \alpha_6 &= \frac{1}{\bar{m}_g^2} - \alpha_{11} \bar{m}_g^2, \\
 \alpha_7 &= \mp 2A_{2,4} \left(\alpha_9 \bar{n} + \frac{1}{\bar{n}^3} \right), \\
 \alpha_8 &= \left\{ \frac{A_{1,33} \bar{m}_s^2}{\bar{q}^3} - \frac{A_{3,11}}{\bar{m}_s} - \frac{1}{\bar{m}_s + A_{3,44} \bar{m}_g^2} \left[\frac{A_{4,33}}{\bar{m}_g} - \frac{A_{3,44} \bar{m}_g^2}{\bar{m}_s^3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\left(A_{4,33} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{m}_s^2} \right) (A_{1,44} \bar{m}_g^3 - A_{4,11} \bar{q}^3)}{\left(A_{4,11} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{q}^2} \right) \bar{q}^3 \bar{m}_g} \right] \right\} \left[\frac{\left(A_{4,33} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{m}_s^2} \right) (A_{1,44} \bar{q} \bar{m}_g^2 + \bar{q}^2)}{(A_{3,44} \bar{m}_g^2 + \bar{m}_s) \left(A_{4,11} + \frac{\bar{m}_g}{\bar{q}^2} \right)} - \frac{A_{1,33} \bar{q} \bar{m}_s^2 + \bar{q}^2}{A_{3,11} \bar{m}_s^2 + \frac{\bar{m}_s^3}{\bar{q}^2}} \right]^{-1},
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

⁶ Dokonany tu wybór osiemnastu, spośród dwudziestu, warunków, które należy spełnić jest podyktowany możliwością łatwego rozwiązania otrzymanego układu równań.

$$\begin{aligned}
 (5.7) \quad & \text{[c.d.]} \quad \alpha_9 = \frac{\bar{m}_s^2}{\bar{n}^3(A_{2,33}\bar{m}_s^2 + \bar{n})} \left[\alpha_{10}\bar{m}_s^2 + A_{3,22}\frac{\bar{n}^2}{\bar{m}_s} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^2} + \alpha_{10}\bar{m}_s^2 \right) - A_{2,33}\frac{1}{\bar{n}} \right], \\
 & \alpha_{10} = \frac{\bar{q}}{\bar{m}_s^3(A_{3,11}\bar{q}^2 + \bar{m}_s)} \left[\alpha_8\bar{q}^2 + A_{1,33}\frac{\bar{m}_s^2}{\bar{q}} \left(\frac{1}{\bar{q}^2} + \alpha_8\bar{q}^2 \right) - A_{3,11}\frac{1}{\bar{m}_s} \right], \\
 & \alpha_{11} = \frac{\bar{q}^2}{\bar{m}_g^3(A_{4,11}\bar{q}^2 + \bar{m}_g)} \left[\alpha_8\bar{q}^2 + A_{1,44}\frac{\bar{m}_g^2}{\bar{q}} \left(\frac{1}{\bar{q}^2} + \alpha_8\bar{q}^2 \right) - A_{4,11}\frac{1}{\bar{m}_g} \right], \\
 & \alpha_{12} = -A_{3,44} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^3} + \alpha_{10}\bar{m}_s \right) - \frac{1}{\bar{m}_s^2} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^2} - \alpha_{11}\bar{m}_g^2 \right), \\
 & \alpha_{13} = -A_{1,33} \left(\frac{1}{\bar{q}^3} + \alpha_8\bar{q} \right) - \frac{1}{\bar{q}^2} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^2} - \alpha_{10}\bar{m}_s^2 \right), \\
 & \alpha_{14} = -A_{1,44} \left(\frac{1}{\bar{q}^3} + \alpha_8\bar{q} \right) - \frac{1}{\bar{q}^2} \left(\frac{1}{\bar{m}_g^2} - \alpha_{11}\bar{m}_g^2 \right), \\
 & \alpha_{15} = -A_{3,22} \left(\frac{1}{\bar{m}_s^3} + \alpha_{10}\bar{m}_s \right) - \frac{1}{\bar{m}_s^2} \left(\frac{1}{\bar{n}^2} - \alpha_9\bar{n}^2 \right), \\
 & \alpha_{16} = \frac{1}{\bar{m}_g^2} [-\alpha_2 - \alpha_7|\bar{m}_g| - A_{4,22}\bar{m}_g(\alpha_6 + 2\alpha_{11}\bar{m}_g^2)], \\
 & \alpha_{17} = \frac{1}{\bar{q}^2} [-\alpha_3 - 2A_{1,2}(\alpha_1 + 2\alpha_8\bar{q}^2)], \\
 & \alpha_{18} = \frac{1}{\bar{n}^2} [-2A_{2,1}\alpha_2 - \alpha_3 - 4A_{2,1}\alpha_9\bar{n}^2].
 \end{aligned}$$

Równanie (5.6) po podstawieniu za współczynniki α_i wyrażeń (5.7) jest pełnym aproksymacyjnym równaniem powierzchni granicznej z zachowaniem wszystkich warunków zgodności wartości funkcji, pierwszych pochodnych oraz niemal wszystkich drugich pochodnych.

5.3. Aproksymacja uproszczona. Korzystanie z równania (5.6) jest dość kłopotliwe z uwagi na złożone współczynniki α_i . Zaproponujemy obecnie uproszczenie równania (5.6) do postaci siedmioparametrowej

$$(5.8) \quad \beta_1 q^2 + \beta_2 n^2 + \beta_3 qn + \beta_4 m_s^2 + \beta_5 m_g^2 + \beta_6 |m_g| n^2 + \beta_7 q^4 = 1.$$

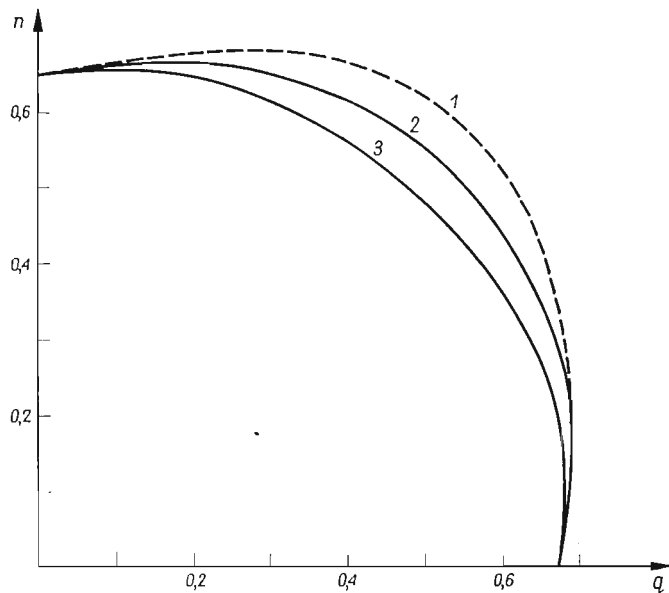
Równanie to pozwala, mimo bardzo prostej budowy, uwzględnić wszystkie warunki zgodności wartości oraz pierwszych pochodnych w punktach odpowiadających stanom czystym.

Po rozwiązaniu układu równań dla współczynników β_i otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad & \frac{2}{\ln^2 \frac{1}{\beta}} \left[1 - \frac{3(1-\beta^2) - 8\beta^4}{6(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} - \frac{4\beta^8 + 9\beta^4(1-\beta^4)}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots \right] q^2 + \\
 & + \frac{4}{3(1-\beta^2)^2} n^2 - \frac{8\beta^2}{3(1-\beta^2)^2} qn + \frac{9(1-\beta^4)^2}{16(1-\beta^3)^2} m_s^2 +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{3\pi^2}{64(1-\beta^3)^2} m_g^2 - \frac{4\sqrt{3}}{9(1-\beta^2)^3} |m_g| n^2 - \frac{1}{\ln^4 \frac{1}{\beta}} \left[1 - \frac{3(1-\beta^4) - 8\beta^4}{3(1-\beta^4)} \ln \frac{1}{\beta} + \frac{2\beta^4(-15+19\beta^4)}{9(1-\beta^4)^2} \ln^2 \frac{1}{\beta} + \dots \right] q^4 = 1.$$

5.5. Przykłady. Obecnie podamy przykłady praktycznego zastosowania wyprowadzonych równań (5.6) oraz (5.9). Obliczenia numeryczne wykonamy dla stosunku promieni rury $\beta = 1/2$.



1—rozwiązanie ścisłe, 2—(5.10), 3—(5.11)

Rys. 4

Z równania (5.6) po uwzględnieniu (5.7) oraz (5.2)-(5.5) otrzymamy wówczas

$$(5.10) \quad \begin{aligned} &4,420285 q^2 + 4,7390759 n^2 - 0,0001376 qn - \\ &\quad - 9,474986 q^2 n^2 + 1,291364 m_s^2 + 1,2083156 m_g^2 + \\ &\quad + 0,00128549 |m_g| n^2 - 4,871365 q^4 - 5,6147095 n^4 - \\ &\quad - 0,4169054 m_s^4 - 0,3650067 m_g^4 - 0,7801980 m_s^2 m_g^2 - \\ &\quad - 2,850218 q^2 m_s^2 - 2,666694 q^2 m_g^2 - 3,059943 m_s^2 n^2 - \\ &\quad - 2,864565 m_g^2 n^2 - 0,00582368 q^3 n - 0,0016529 qn^3 = 1, \end{aligned}$$

natomiast z równania (5.9)

$$(5.11) \quad \begin{aligned} &2,834 q^2 + 2,370 n^2 - 1,185 qn + 0,6457 m_s^2 + \\ &\quad + 0,6043 m_g^2 - 1,825 |m_g| n^2 - 1,362 q^4 = 1. \end{aligned}$$

Przykład jednego z przekrojów powierzchni granicznej, mianowicie krzywą w płaszczyźnie (q, n) , (której równanie ścisłe jest znane) oraz jej aproksymacje wynikające z równań (5.10) i (5.11) pokazano na rys. 4. W niektórych przekrojach stosowanie rozszerzonej

aproksymacji (5.10) nie jest celowe, gdyż uzyskujemy w ten sposób wyniki nieco lepsze niż z równania (5.11) [np. w przekrojach (n, m_s) czy (m_s, m_g)]. Wynika to stąd, że odpowiednie pochodne $A_{2,33}, A_{3,22}, \dots$ obliczane ze wzoru (5.11) mają tu wartości zbliżone do ścisłych (5.2)–(5.5); uwzględnienie więc dodatkowych warunków zgodności nie wprowadza bardziej istotnych zmian.

6. Wnioski końcowe

Zajmijmy się na koniec oceną przydatności wyprowadzonych równań aproksymacyjnych (5.6)–(5.7) oraz (5.8).

Pierwsze z nich otrzymano przy założeniu większej ilości warunków zgodności pochodnych niż drugie. W tych przekrojach, w których udało się uwzględnić zgodność pochodnych drugiego rzędu uzyskano nieco lepszą dokładność niż przy równaniu uproszczonym (5.8). Ponieważ jednak ilość swobodnych parametrów jest mniejsza od ilości przyjętych warunków (w założonej osiemnastoparametrowej postaci równania (5.6)), niektóre spośród warunków (5.2)–(5.5) pozostają niespełnione. W rezultacie w pewnych przekrojach lepsze wyniki daje wzór (5.8) (np. w przekroju n, m_g).

Przy posługiwaniu się wzorami (5.6)–(5.7) wymagana jest ponadto duża dokładność numeryczna, z uwagi na wielokrotne odejmowanie liczb nieznacznie różniących się od siebie, co z uwagi na złożone wyrażenia na współczynniki α_i może nastęrczać pewne trudności.

Do bezpośrednich zastosowań inżynierskich polecamy więc stosowanie aproksymacji uproszczonej (5.8). Wzorami (5.6)–(5.7) można się posługiwać celem ewentualnej kontroli uzyskanych tą drogą wyników, ale raczej tylko w tych przekrojach, w których zapewniono zgodność wszystkich pochodnych do rzędu drugiego włącznie.

Obydwie aproksymacje (5.6)–(5.7) oraz (5.8) mogą być używane wprost do określania nośności granicznej rurociągów izostatycznych, natomiast w przypadku rurociągów hiperstatycznych do znajdowania możliwych plastycznych schematów zniszczenia.

Literatura cytowana w tekście

1. A. A. ГВОЗДЕВ, *Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Строй издат 1969.
2. S. PIECHNIK, *The influence of bending on the limit state of circular bar subjected to torsion*, Arch. Mech. Stos., 1, 13 (1961), 77–106.
3. S. PIECHNIK, M. ŻYCZKOWSKI, *On the plastic interaction curve for bending and torsion of a circular bar*, Arch. Mech. Stos., 5, 13 (1961), 669–692.
4. J. SKRZYPEK, *On the limit carrying capacity of the pipe-line cross-section*, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 4 (1968) 1203–1219.
5. J. SKRZYPEK, *Dolne oszacowanie nośności granicznej nierozciągliwego grubościennego rurociągu*, Arch. Bud. Masz., 1, 16 (1969), 81–91.
6. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Stan graniczny rury grubościennej przy jednoczesnym skręcaniu, rozciąganiu i różnicy ciśnień*. Rozpr. Inż., 2, 13 (1965), 281–296; streszcz. w jęz. ang. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn. 13 (1965), 285–294.
7. W. P. STOKEY, D. B. PETERSON, R. A. WUNDER, *Limit loads for tubes under internal pressure, bending moment, axial force and torsion*, Nuclear Engng. and Design, 2, 4 (1966), 193–201.

8. M. ŻYCZKOWSKI, *Plastic interaction curves for combined bending and tension of beams with arbitrary cross-section*, Arch. Mech. Stos., 2, 17 (1965), 307–330.
9. M. ŻYCZKOWSKI, *Limit state of a thick-walled tube under internal pressure and bending*, Arch. Mech. Stos., 3, 20 (1968), 313–325.

Р е з ю м е

АППРОКСИМАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ СЛОЖНЫХ НАГРУЗКАХ

Выведено приближенное уравнение предельной поверхности, при использовании условий совместности по Эрмиту, для поперечного сечения толстостенного трубопровода, нагруженного одновременно внутренним давлением, изгибающим моментом, крутящим моментом и осевой силой.

Исходной точкой является выведенная в работе Скужипка [4] система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (2.1) описывающих рассматриваемую задачу при предположении закона пластического течения Генки-Ильюшина или Леви-Мизеса и идеально пластичного несжимаемого изотропного материала подчиняющегося условию пластичности Губера-Мизеса-Генки. Приводятся решения системы (2.1) для случая малого влияния давления, изгиба и растяжения на несущую способность трубопровода при кругении (3.34).

Для других областей предельной поверхности, а именно: в окрестности чистого изгиба и чистого растяжения даются некоторые приближенные решения. Для построения приближенного решения использовано также, полученное одним из авторов решение для большого внутреннего давления.

Приближенное уравнение записано в виде (5.7). Оно может быть непосредственно использовано для определения несущей способности изостатических трубопроводов, и для определения возможных вариантов пластических схем разрушения для случая гиперстатических трубопроводов.

S u m m a r y

ON APPROXIMATION OF THE YIELD SURFACE OF A THICK-WALLED PIPE-LINE UNDER COMBINED LOADINGS

Using the Hermite's compatibility conditions derived is an approximate equation for the yield surface of the section of a pipe-line loaded simultaneously by internal pressure, bending and twisting moments and an axial force.

The governing system of equations (2.1) for that problem was derived in previous paper [4] assuming the Hencky-Iliushin or Lévy-Mises theories, and the ideally plastic, incompressible, isotropic material obeying the Huber-Mises-Hencky yield criterion. Presented is the solution (3.34) of the system (2.1) under assumption that the influence of internal pressure, bending and tension on the bearing capacity of the twisted pipe-line is small.

For other parts of the yield surface, namely the vicinity of pure bending and pure tension certain approximate solutions are given (4.12), (4.13).

Constructing the approximate formula the previous solution of one of the authors for the case of large internal pressure is used (4.14).

The approximating equation is written in the form (5.7). It may be used directly for calculation of the bearing capacity of isostatic pipe-lines. For the hiperstatic pipe-lines, however, it may be used for finding the possible modes of plastic collapse.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 marca 1969 r.; po raz drugi 30 października 1969 r.

PRZYBLIŻONE OBLICZANIE PŁYTY KOŁOWEJ, UŻEBROWANEJ JEDNOSTRONNIE,
OBCIĄŻONEJ ANTYSYMETRYCZNIE

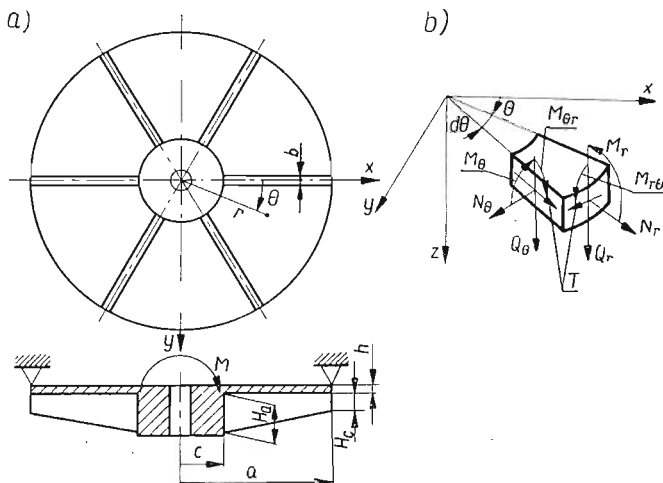
ANDRZEJ M Ł O T K O W S K I (ŁÓDŹ)

Oznaczenia

$A_{1(k)} - A_{3(k)}$	stałe,
a	promień zewnętrzny płyty,
$B_{1(k)} - B_{2(k)}$	stałe,
$b(k)$	grubość żebra,
c	promień wewnętrzny płyty,
$D_{0(k)}$	sztywność obwodowa płyty,
$D_{r(k)}$	sztywność promieniowa płyty,
E	moduł Younga,
F	powierzchnia przekroju poprzecznego żebra,
$F_{1(k)}$	współczynnik,
G	moduł sprężystości postaciowej,
$H(k)$	wysokość żebra,
H_a	wysokość żebra na promieniu zewnętrznym,
H_c	wysokość żebra na promieniu wewnętrznym,
$h(k)$	grubość płyty,
$I(k)$	moment bezwładności przekroju żebra przypadający na jednostkę obwodu płyty,
k	indeks określający wielkości dotyczące kolejnej płyty pierścieniowej,
M	moment obciążający,
$M_{r(k)}$	moment gnący promieniowy przypadający na jednostkę obwodu płyty,
$M_{\theta(k)}$	moment gnący obwodowy przypadający na jednostkę promienia,
$M_{r\theta(k)}$	moment skręcający,
m	liczba płyt pierścieniowych,
$N_{r(k)}$	siła promieniowa przypadająca na jednostkę obwodu płyty,
$N_{\theta(k)}$	siła obwodowa przypadająca na jednostkę promienia,
n	liczba żeber,
Q_r, Q_{θ}	siły tnące — promieniowe i obwodowe,
r	promień biegnący płyty,
$S(k)$	iloczyn modułu Younga i momentu statycznego żebra względem płaszczyzny środkowej przypadający na jednostkę obwodu płyty,
$T(k)$	siła styczna (położona w płaszczyźnie środkowej płyty),
$u(k)$	przemieszczenie promieniowe,
$u_{\theta(k)}$	przemieszczenie promieniowe płaszczyzny środkowej płyty,
$v(k)$	przemieszczenie obwodowe,
$v_{\theta(k)}$	przemieszczenie obwodowe płaszczyzny środkowej płyty,

$w^{(k)}$	ugięcie płyty,
z	współrzędna określająca odległość rozpatrywanego punktu od płaszczyzny środkowej,
$\alpha_{1(k)} - \alpha_{8(k)}$	stałe,
$\beta^{(k)}$	współczynnik,
θ	współrzędna kątowa rozpatrywanego punktu,
ν	liczba Poissona,
$\varrho = \frac{r}{a}$	promień bezwymiarowy,
σ_r	naprężenia promieniowe w płycie,
$\bar{\sigma}_r$	naprężenia w żebrze,
σ_θ	naprężenia obwodowe w płycie,
$\tau_{r\theta}$	naprężenia styczne w płycie.

Poniższe rozważania są rozszerzeniem pracy [1], w której omówiono sposób obliczenia płyt kołowych wzmocnionych żebrami po jednej stronie płaszczyzny środkowej i obciążonej antysymetrycznie parą sił przyłożoną w środku. Kształt żeber był jednak tak dobrany, by promieniowa sztywność zginania oraz inne współczynniki, występujące w układzie równań różniczkowych płyty uźebrowanej, były stałe.



Rys. 1

W praktyce, płyty wzmocniane są żebrami promieniowymi o kształtach, które powodują, że wyżej wspomniane wielkości są funkcjami promienia.

Płyta o zmiennej sztywności zginania może być w przybliżeniu przedstawiona jako szereg połączonych ze sobą ortotropowych płyt pierścieniowych o stałych sztywnościach zginania. Na przykład dla płyty przedstawionej na rys. 1 sztywność zginania można przedstawić, jak na rys. 2.

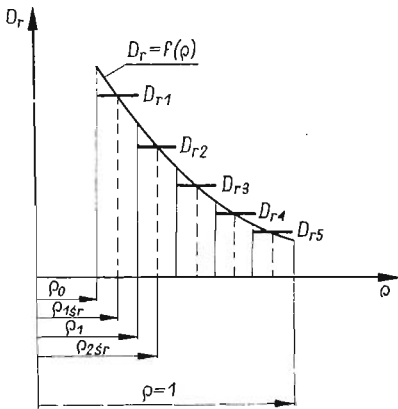
Można przyjąć sztywności poszczególnych pierścieni równe sztywnościom w ich środkach. Podobnie można przedstawić wielkości S i F_1 (oraz ewentualnie D_0 jeśli grubość płyty jest zmienna). Odpowiada to jakby zmianie kształtu żeber według rys. 3.

Jeśli płytę podzielić na dostatecznie dużą liczbę pierścieni, wówczas «stopnie» na żebrach będą praktycznie bez znaczenia dla dokładności obliczeń.

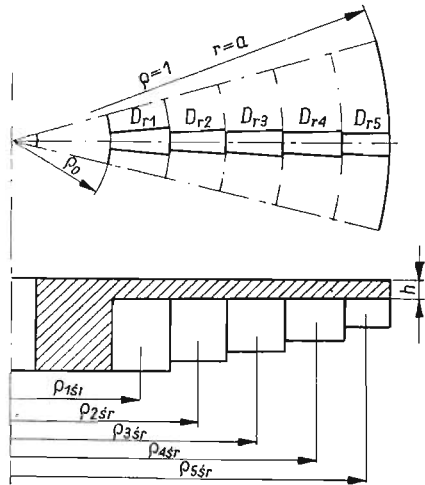
Na styku dwóch kolejnych pierścieni muszą być spełnione warunki ciągłości dotyczące odkształceń i sił wewnętrznych. Ugięcia, kąty ugięcia, przemieszczenia promieniowe i obwodowe, momenty promieniowe, siły normalne, styczne oraz zastępcze siły poprzeczne muszą być na liniach styku płyt pierścieniowych odpowiednio sobie równe.

$$(1) \quad \begin{aligned} w_{(k)} &= w_{(k+1)}, & M_{r(k)} &= M_{r(k+1)}, \\ \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \varrho} &= \frac{\partial w_{(k+1)}}{\partial \varrho}, & N_{r(k)} &= N_{r(k+1)}, \\ u_{(k)} &= u_{(k+1)}, & T_{(k)} &= T_{(k+1)}, \\ v_{(k)} &= v_{(k+1)} \\ Q_{r(k)} - \frac{M_{r\theta(k)}}{r \cdot \partial \theta} &= Q_{r(k+1)} - \frac{M_{r\theta(k+1)}}{r \cdot \partial \theta}. \end{aligned}$$

gdzie k oznacza numer kolejny pierścienia.



Rys. 2



Rys. 3

Obliczenia wykonane tą metodą przy podziale płyty na pięć pierścieni dały większą dokładność niż przy zastosowaniu metody różnic skończonych ze względu na wysoki rząd pochodnych w równaniach równowagi (2.14) w pracy [1].

Jak wykazano w cytowanej pracy, przemieszczenia poszczególnych punktów powierzchni środkowej k -tego pierścienia płyty można wyrazić w następującej postaci

$$(2) \quad \begin{aligned} w_{(k)} &= [A_{1(k)}\varrho + A_{2(k)}\ln\varrho + \sum_{i=5}^8 A_{i(k)}\varrho^{a_{i(k)+1}}] \cos\theta, \\ u_{0(k)} &= [B_{1(k)} + B_{2(k)}\ln\varrho + \sum_{i=5}^8 P_{i(k)}A_{i(k)}\varrho^{a_{i(k)}}] \cos\theta, \\ v_{0(k)} &= \left[-B_{1(k)} - \left(\frac{1+\nu}{3-\nu} + \ln\varrho \right) B_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 P_{i(k)}Q_{i(k)}A_{i(k)}\varrho^{a_{i(k)}} \right] \sin\theta, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 D_{0(k)} &= \frac{Eh_{(k)}^3}{12(1-\nu^2)}, \\
 D_{r(k)} &= D_{0(k)} + EI_{(k)} = D_{0(k)} + E \left[\frac{b_{(k)}H_{(k)}^3}{12} + b_{(k)}H_{(k)} \left(\frac{H_{(k)} + h_{(k)}}{2} \right)^2 \right] \frac{n}{2\pi a \varrho_{sr(k)}}, \\
 (3) \quad S_{(k)} &= Eb_{(k)}H_{(k)} \left(\frac{H_{(k)} + h_{(k)}}{2} \right) \frac{n}{2\pi a \varrho_{sr(k)}}, \\
 F_{1(k)} &= \frac{Eh_{(k)}}{1-\nu^2} + EF_{(k)} = \frac{Eh_{(k)}}{1-\nu^2} + Eb_{(k)}H_{(k)} \frac{n}{2\pi a \varrho_{sr(k)}}, \\
 \beta_{(k)} &= \frac{Eh_{(k)}}{2(1-\nu^2)}, \\
 p_{i(k)} &= \frac{D_{r(k)}(\alpha_{i(k)}^2 - 1) - 3D_{0(k)}}{S_{(k)}a(\alpha_{i(k)} - 1)}, \\
 q_{i(k)} &= \frac{(1+\nu)\alpha_{i(k)} + (3-\nu)}{(1-\nu)\alpha_{i(k)}^2 - (3-\nu)}.
 \end{aligned}$$

Współczynniki $\alpha_{5(k)} \div \alpha_{8(k)}$ znajdujemy z równania dwukwadratowego

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &(1-\nu)(S_{(k)}^2 - F_{1(k)}D_{r(k)})\alpha_{(k)}^4 + [(1-\nu)(F_{1(k)}D_{r(k)} + 3D_{0(k)}F_{1(k)}) - \\
 &\quad - (3-\nu)(1-\nu)\beta_{(k)}D_{r(k)} - (1+\nu)^2\beta_{(k)}D_{r(k)} + (3-\nu)F_{1(k)}D_{r(k)} - \\
 &\quad - 2(2-\nu)S_{(k)}^2\alpha_{(k)}^2] - [(3-\nu)(1-\nu) - (1+\nu)^2(\beta_{(k)}D_{r(k)} + 3\beta_{(k)}D_{0(k)}) - \\
 &\quad - (3-\nu)(F_{1(k)}D_{r(k)} + 3F_{1(k)}D_{0(k)} - S_{(k)}^2)] = 0.
 \end{aligned}$$

Stałe $A_{1(k)}$, $A_{2(k)}$, $B_{1(k)}$, $B_{2(k)}$, $A_{5(k)} \div A_{8(k)}$ można wyznaczyć z warunków brzegowych oraz warunków ciągłości (1).

Siły wewnętrzne określone są wzorami

$$\begin{aligned}
 M_{r(k)} &= -\frac{1}{a^2} \left(D_{r(k)} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \varrho^2} + \frac{D_{0(k)}\nu}{\varrho} \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \varrho} + \frac{D_{0(k)}\nu}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \theta^2} + S_{(k)} \frac{1}{a} \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \varrho} \right), \\
 M_{\theta(k)} &= -\frac{1}{a^2} D_{0(k)} \left(\nu \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \theta^2} \right), \\
 M_{r\theta(k)} &= -(1-\nu)D_{0(k)} \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \varrho \partial \theta} \right), \\
 (5) \quad N_{r(k)} &= 2\beta_{(k)} \frac{\nu}{a\varrho} \left(u_{0(k)} + \frac{\partial v_{0(k)}}{\partial \theta} \right) + F_1 \frac{1}{a} \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \varrho} - S_{(k)} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \varrho^2}, \\
 N_{\theta(k)} &= \frac{2\beta}{a} \left(\frac{u_{0(k)}}{\varrho} + \nu \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v_{0(k)}}{\partial \theta} \right), \\
 T_{(k)} &= (1-\nu) \frac{\beta_{(k)}}{a} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \theta} - \frac{v_{0(k)}}{\varrho} + \frac{\partial v_{0(k)}}{\partial \varrho} \right), \\
 Q_{r(k)} &= \frac{1}{a\varrho} \left(M_{r(k)} - M_{\theta(k)} + \varrho \frac{dM_{r(k)}}{d\varrho} - \frac{dM_{r\theta(k)}}{d\theta} \right) \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu (2) do (5) i wykorzystując (1) otrzymano układy równań dla linii styku kolejnych dwóch pierścieni

$$\begin{aligned}
 & \varrho A_{1(k)} + \varrho \ln \varrho A_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 \varrho^{\alpha_{i(k)}+1} A_{i(k)} - A_{1(k+1)} - \varrho \ln \varrho A_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 \varrho^{\alpha_{i(k+1)}+1} A_{i(k+1)} = 0, \\
 & A_{1(k)} + (1 + \ln \varrho) A_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 (\alpha_{i(k)} + 1) \varrho^{\alpha_{i(k)}} A_{i(k)} - \\
 & \quad - A_{1(k+1)} - (1 + \ln \varrho) A_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 (\alpha_{i(k+1)} + 1) \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0, \\
 & B_{1(k)} + \ln \varrho B_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 p_{i(k)} \varrho^{\alpha_{i(k)}} A_{i(k)} - \\
 & \quad - B_{1(k+1)} - \ln \varrho B_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 p_{i(k+1)} \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0, \\
 & -B_{1(k)} - \left(\frac{1+\nu}{3-\nu} + \ln \varrho \right) B_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 p_{i(k)} q_{i(k)} \varrho^{\alpha_{i(k)}} A_{i(k)} + \\
 & \quad + B_{1(k+1)} + \left(\frac{1+\nu}{3-\nu} + \ln \varrho \right) B_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 p_{i(k+1)} q_{i(k+1)} \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0, \\
 (6) \quad & (D_r + D_0 \nu)_{(k)} A_{2(k)} - S_{(k)} a B_{2(k)} + \\
 & \quad + \sum_{i=5}^8 [D_{r(k)} \alpha_{i(k)}^2 + (D_{r(k)} + D_0 \nu - S_{(k)} a p_{i(k)}) \alpha_{1(k)}] A_{i(k)} \varrho^{\alpha_{i(k)}} - \\
 & \quad - (D_r + D_0 \nu)_{(k+1)} A_{2(k+1)} + S_{(k+1)} a B_{2(k+1)} - \\
 & \quad - \sum_{i=5}^8 [D_{r(k+1)} \alpha_{i(k+1)}^2 + (D_{r(k+1)} + D_0 \nu - S_{(k+1)} a p_{i(k+1)}) \alpha_{i(k+1)}] \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0, \\
 & \quad - \frac{S_{(k)}}{a} A_{2(k)} + \left(F_{1(k)} - 2\beta \nu \frac{1+\nu}{3-\nu} \right) B_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 \left\{ 2\beta \nu p_{i(k)} [1 + q_{i(k)}] + \right. \\
 & \quad \left. + \left[F_{1(k)} p_{i(k)} - \frac{S_{(k)}}{a} (\alpha_{i(k)} + 1) \right] \alpha_{i(k)} \right\} \varrho^{\alpha_{i(k)}} A_{i(k)} + \\
 & \quad + \frac{S_{(k+1)}}{a} A_{2(k+1)} - \left(F_{1(k+1)} - 2\beta \nu \frac{1+\nu}{3-\nu} \right) B_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 \left\{ 2\beta \nu p_{i(k+1)} [1 + q_{i(k+1)}] + \right. \\
 & \quad \left. + \left[F_{1(k+1)} p_{i(k+1)} - \frac{S_{(k+1)}}{a} (\alpha_{i(k+1)} + 1) \right] \alpha_{i(k+1)} \right\} \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(1-\nu)}{3-\nu}B_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 p_{i(k)} \left\{ -[1+q_{i(k)}] + q_{i(k)}\alpha_{i(k)} \right\} \varrho^{\alpha_{i(k)}} A_{i(k)} + \\
(6) \quad & + \frac{2(1-\nu)}{3-\nu}B_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 p_{i(k+1)} \left\{ -[1+q_{i(k+1)}] + q_{i(k+1)}\alpha_{i(k+1)} \right\} \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0, \\
\text{[c.d.]} \quad & (3-\nu)D_0A_{2(k)} + \sum_{i=5}^8 \left\{ -D_{r(k)}\alpha_i^2(k)[\alpha_{i(k)} + 1] + (3-\nu)D_0\alpha_{i(k)} + \right. \\
& + S_{(k)}ap_{i(k)}\alpha_i^2(k)\left. \right\} \varrho^{\alpha_{i(k)}} A_{i(k)} - (3-\nu)D_0A_{2(k+1)} - \sum_{i=5}^8 \left\{ -D_{r(k+1)}\alpha_i^2(k+1)[\alpha_{i(k+1)} + 1] + \right. \\
& \left. + (3-\nu)D_0\alpha_{i(k+1)} + S_{(k+1)}ap_{i(k+1)}\alpha_i^2(k+1) \right\} \varrho^{\alpha_{i(k+1)}} A_{i(k+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Powyższe równania wraz z warunkami brzegowymi dla zewnętrznego i wewnętrznego brzegu płyty stanowią układ równań, z którego można wyznaczyć wszystkie stałe dowolne. Liczba stałych dowolnych równa jest liczbie przedziałów pomnożonej przez osiem.

Warunki brzegowe dla płyty podpartej na obwodzie zewnętrznym i mającej sztywną piastę w środku są następujące:

a) dla obwodu zewnętrznego ($\varrho = 1, k = m$)

$$\begin{aligned}
(7)_1 \quad & w_{(k)} = 0, \quad M_{r(k)} = 0, \quad N_{r(k)} = 0, \quad T_{(k)} = 0, \\
& a \int_{-\pi}^{+\pi} M_{r\theta(k)} \sin\theta d\theta - a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} Q_{r(k)} \cos\theta d\theta = M;
\end{aligned}$$

ponadto, jak udowodniono w [1], stała $B_{1(k)} = 0$;

b) dla obwodu wewnętrznego ($\varrho = \varrho_0 = c/a, k = 1$)

$$\begin{aligned}
(7)_2 \quad & w_{(k)} = \varrho_0 \frac{dw_{(k)}}{d\varrho}, \\
& u_{(k)} \sin\theta = -v_{(k)} \cos\theta.
\end{aligned}$$

W podobny sposób można otrzymać warunki brzegowe dla płyty utwierdzonej na obwodzie zewnętrznym i mającej sztywną piastę w środku:

a) dla obwodu zewnętrznego ($\varrho = 1, k = m$)

$$\begin{aligned}
(8) \quad & w_{(k)} = 0, \quad \frac{dw_{(k)}}{d\varrho} = 0, \quad u_{(k)} = 0, \quad v_{(k)} = 0, \\
& a \int_{-\pi}^{+\pi} M_{r(k)} \cos\theta d\theta + a \int_{-\pi}^{+\pi} M_{r\theta(k)} \sin\theta d\theta - a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} Q_{r(k)} \cos\theta d\theta = M, \\
& \int_{-\pi}^{+\pi} N_{r(k)} \cos\theta d\theta - \int_{-\pi}^{+\pi} T_{(k)} \sin\theta d\theta = 0;
\end{aligned}$$

b) dla obwodu wewnętrznego warunki pozostaną bez zmiany.

Naprężenia promieniowe w płycie i żebrach oraz naprężenia obwodowe i styczne w płycie obliczyć można ze wzorów ([1])

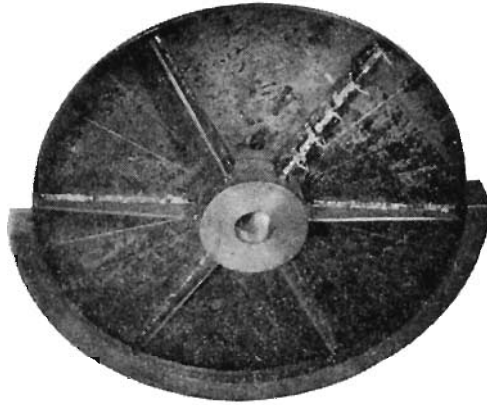
$$\sigma_{r(k)} = \frac{E}{(1-\nu^2)a} \left[\nu \frac{u_{0(k)}}{\rho} + \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \rho} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial v_{0(k)}}{\partial \theta} - \frac{z}{a} \left(\frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\nu}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$\bar{\sigma}_{r(k)} = \frac{E}{a} \left(\frac{u_{0(k)}}{\rho} - \frac{z}{a} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \rho^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta(k)} = \frac{E}{(1-\nu^2)a} \left[\frac{u_{0(k)}}{\rho} + \nu \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_{0(k)}}{\partial \theta} - \frac{z}{a} \left(\nu \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$\tau_{r\theta(k)} = G\gamma_{r\theta} = 2G \frac{z}{a} \left(\frac{1}{a\rho^2} \frac{\partial w_{(k)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w_{(k)}}{\partial \rho \partial \theta} \right) + \frac{G}{a} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{0(k)}}{\partial \theta} - \frac{v_{0(k)}}{\rho} + \frac{\partial v_{0(k)}}{\partial \rho} \right).$$

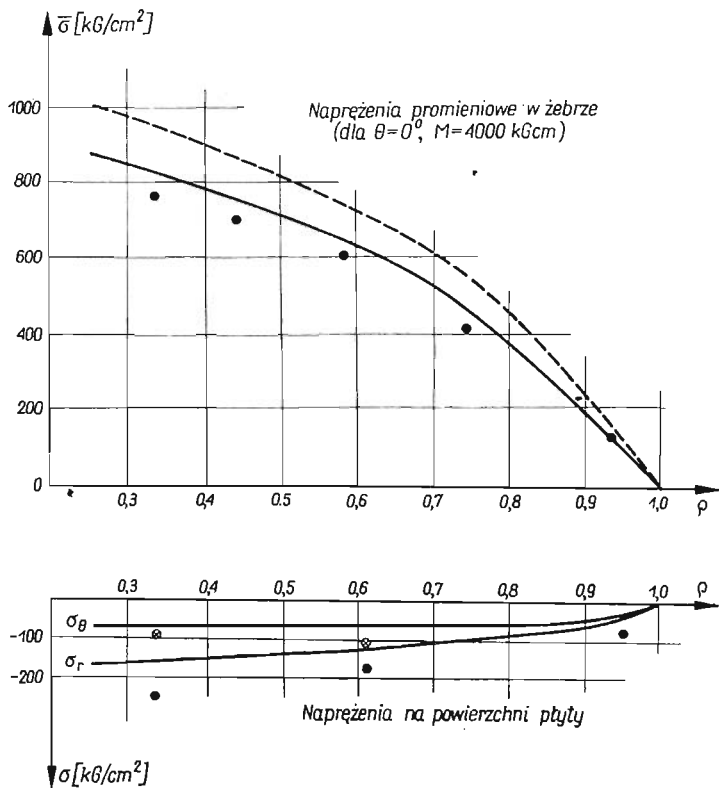
P r z y k ł a d. Obliczenie naprężeń i przemieszczeń płyty kołowej wzmocnionej żebrami według rys. 1 i 4. Płyta podparta jest przegubowo na obwodzie zewnętrznym. Dane: $a = 22$ cm, $c = 5,5$ cm, $H_a = 1,5$ cm, $H_c = 3,0$ cm, $b = 0,3$ cm, $n = 6$.



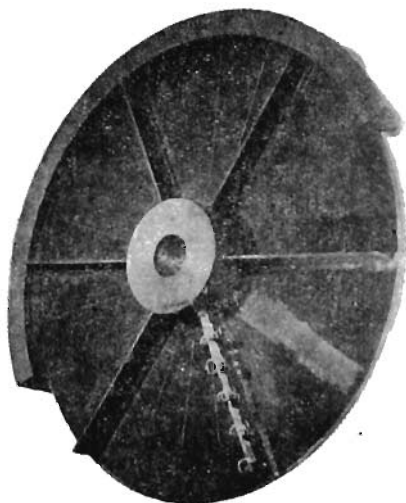
Rys. 4

Płytę podzielono na $m = 5$ pierścieni o jednakowej szerokości. Dla średniego promienia każdego z pierścieni obliczono wielkości D_r , S , F_1 według wzorów (3) podstawiając za $b_{(k)}$, $H_{(k)}$ i $\rho_{sr(k)}$ wartości grubości, wysokości żebra i promienia w środku pierścienia. Następnie dla każdego pierścienia rozwiązano równanie (4) uzyskując wartości $\alpha_{l(k)}$. Obliczone wielkości podstawiono do wzorów (7) na warunki brzegowe po uwzględnieniu (2) i (5) oraz do wzorów (6). Ponieważ równania (6) muszą być spełnione na liniach styku kolejnych dwóch pierścieni, to przy podziale na 5 pierścieni otrzymano układ 40 liniowych równań algebraicznych umożliwiających obliczenie stałych $A_{1(k)} - A_{8(k)}$ dla każdego pierścienia. Następnie z wzorów (2) obliczono przemieszczenie poszczególnych pierścieni. Obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej ZAM-2 Beta.

Powyższa metoda podziału płyty na pierścienie nie zapewnia ciągłości naprężeń na styku pierścieni. W związku z tym najbardziej miarodajne są naprężenia obliczone dla środków pierścieni według wzorów (9). Na wykresie rys. 5 pokazano naprężenia w żebrach



Rys. 5 Naprężenia w płycie wzmocnionej $n = 6$ żebrami o zmiennej wysokości, podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym. Naprężenia teoretyczne na krawędzi żebra — linia przerywana, a na wysokości naklejenia tensometrów — linia ciągła. Wyniki pomiarów naprężeń promiennych (\bullet) i obwodowych (\otimes)



Rys. 6

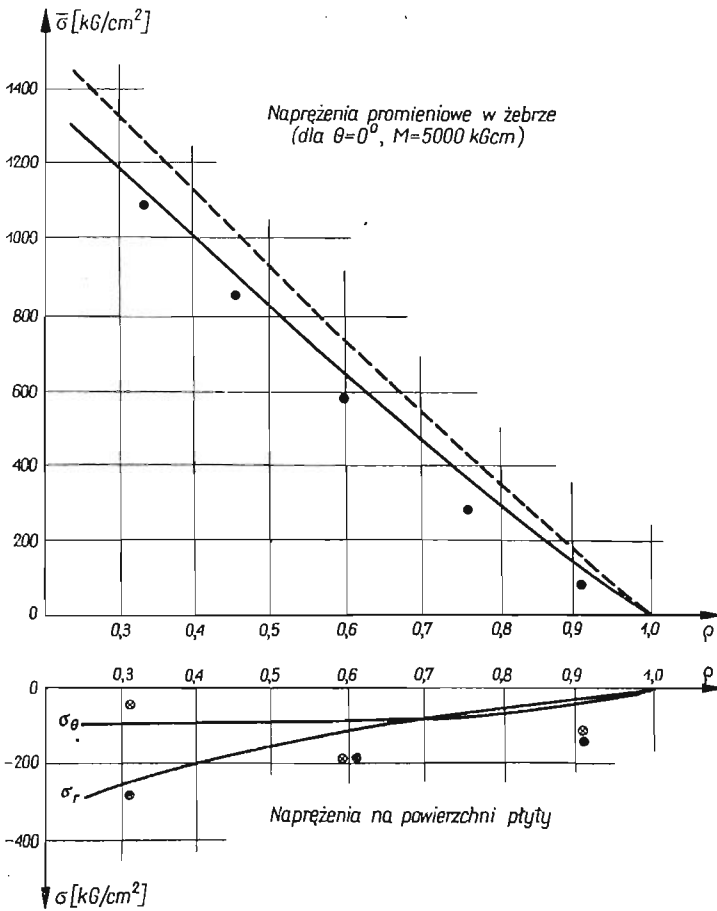
w płycie przedstawionej na rys. 1 i 4, dla kąta $\theta = 0^\circ$ (płaszczyzna działania momentu M); krzywe poprowadzono przez punkty odpowiadające środkom pierścieni.

Płyta poddana została ponadto badaniom tensometrycznym na specjalnym stanowisku umożliwiającym realizację warunków brzegowych oraz obciążenia. Wyniki pomiarów naniesiono na rys. 5.

Podobnie wykonano obliczenia i pomiary dla płyty przedstawionej na rys. 6 (wzmocnionej sześcioma żebrami o jednakowej wysokości i grubości). Wyniki przedstawiono na rys. 7.

Przeprowadzone badania tensometryczne wykazują dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi.

Należy podkreślić, że doświadczenia i obliczenia zostały przeprowadzone dla małej liczby żeber, co jest często spotykane w konstrukcjach maszynowych.



Rys. 7. Naprężenia w płycie wzmocnionej $n = 6$ żebrami o stałej wysokości i grubości, podpartej przegubowo na obwodzie zewnętrznym. Naprężenia teoretyczne na krawędzi żebra — linia przerywana, na wysokości naklejenia tensometrów — linia ciągła. Wyniki pomiarów naprężeń promieniowych (●) i obwodowych (⊗)

Literatura cytowana w tekście

1. A. MŁOTKOWSKI, *Wytrzymałość płyty kolowej jednostronnie uźebrowanej poddanej antysymetrycznemu zginaniu*, Mech. Teor. i Stos., 4, 6 (1968).
2. S. TIMOSHENKO, S. WOYNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, 1962.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПОДВЕРГНУТОЙ АНТИСИММЕТРИЧНОМУ ИЗГИБУ
КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОДНОСТОРОННИМИ
РАДИАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ

Приближенным методом решена задача о напряжениях и деформации в круговой пластине подкрепленной радиальными ребрами любой формы, расположенными осесимметрично по одну сторону от срединной поверхности.

Решение находится путем разделения пластинки на несколько ортотропных кольцевых пластинок постоянной жесткости при соблюдении условий непрерывности деформации и внутренних сил. Рассмотрены случаи шарнирно и жестко закрепленных краев пластинки. Произведены расчеты и тензомерические измерения для пластинок с 6-ю ребрами переменного и постоянного сечений.

Summary

APPROXIMATE SOLUTION OF A CIRCULAR PLATE WITH ONE-SIDED RIBS SUBJECTED
TO ANTISYMMETRIC BENDING

An approximate method of determination of the state of strain and stress in circular elastic plate reinforced by radial ribs of arbitrary shape, eccentric with respect to the middle surface, has been discussed. The plate is loaded by a skew-symmetric bending couple acting on the hub. In order to establish the state of stress and strain, the plate was divided into several orthotropic rings of constant flexural rigidity. Continuity conditions (6) at the lines of contact between the rings have to be satisfied, the outside edge of the plate being either simply supported or clamped. Numerical example comparing the theoretical and experimental results are given.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 maja 1969 r.

WPLYW ODKSZTAŁCALNOŚCI GIĘTNEJ SKRZYDŁA NA STATECZNOŚĆ PODŁUŻNĄ SZYBOWCA

JERZY MARYNIAK, MARWAN LOSTAN (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu odkształcalności giętej skrzydeł na stateczność podłużną szybowca.

W pracy [5], przy rozpatrywaniu wpływu odkształcalności giętej skrzydeł na stateczność podłużną szybowca, założono, że prędkość w kierunku osi podłużnej związanej z szybowcem nie ulega zmianie. Powyższe założenie nie pozwoliło na zbadanie wpływu odkształcalności giętej na wahania fugoidalne i ograniczono się do badań oscylacji szybkich.

W niniejszej pracy do badania stateczności zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Wyznaczono współczynniki równania charakterystycznego szóstego stopnia, zastosowano kryteria stateczności Routha-Hurwitza, jak również obliczono pierwiastki równania charakterystycznego metodą Bairstowa [9]. W pracy uwzględniono tylko odkształcalność giętą skrzydła, bowiem częstości odpowiadające I postaci giętej skrzydeł szybowców są rzędu 1,5–3,5 Hz i są najbliższe częstości oscylacji szybkich szybowca; podczas gdy I skrętna postać skrzydła występuje przy częstości 20–28 Hz [4, 8]. Jako odkształcenia przyjęto postacie własne, otrzymane doświadczalnie na drodze badań rezonansowych szybowców [4, 8, 10].

Zagadnienie rozwiązano metodą przyjętą przy rozważaniu stateczności aparatów latających [2, 3, 6, 11]. Pozwoliło to przeprowadzić konfrontację wyników otrzymanych dla szybowca odkształcalnego i sztywnego.

Otrzymane wyniki wskazują, że odkształcalność gięta skrzydeł ma wpływ na oscylacje szybkie, jak również silnie wpływa na wahania fugoidalne szybowca.

Na podstawie obliczeń numerycznych, wykonanych na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER, na przykładzie produkowanego w kraju szybowca wyczynowego zbadano wpływ zmian: sztywności, zapasu stateczności statycznej, prędkości na częstość oscylacji i tłumienie szybowca odkształcalnego i sztywnego.

2. Równania ruchu

Równania ruchu szybowca wyprowadzono w układzie współrzędnych związanych ze środkiem masy szybowca. Rozpatrzono małe zakłócenia od ustalonego lotu prostoliniowego zachodzącego w płaszczyźnie pionowej zgodnej z układem osi (x, y) .

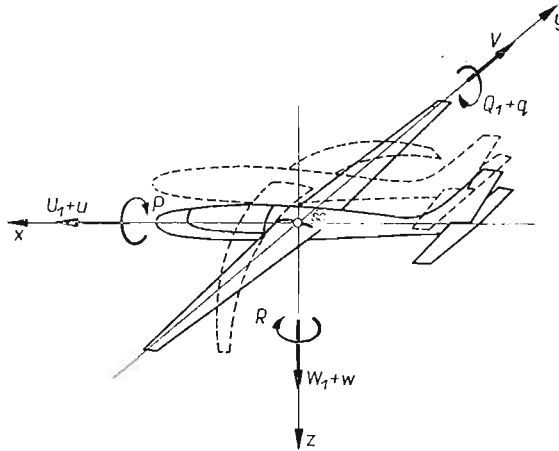
Małe zakłócenia oznaczono następująco:

u — zmiana prędkości U_1 w kierunku osi x związanej z szybowcem,

w — zmiana prędkości W_1 w kierunku osi z związanej z szybowcem,

ϑ — zmiana kąta pochylenia szybowca θ_1 , obrót w płaszczyźnie x, z względem osi y ,

q — zmiana prędkości kątowej pochylenia.



Rys. 1. Przyjęty układ współrzędnych związanych z szybowcem i odpowiednie prędkości liniowe i kątowe

Równania ruchu szybowca sztywnego względem układu osi związanych z szybowcem (rys. 1) zostały wyprowadzone w pracach [2, 3, 11]. Po wprowadzeniu do nich sił X_e , Z_e i momentów aerodynamicznych M_e pochodzących od zginania skrzydła otrzymano

$$\begin{aligned}
 m(\dot{u} + W_1 q) &= X_u u + X_w w + X_q q - mg \vartheta \cos \theta_1 + X_e, \\
 m(\dot{w} - U_1 q) &= Z_u u + Z_w w + Z_q q - mg \vartheta \sin \theta_1 + Z_e, \\
 J_y \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_q q + M_w \dot{w} + M_e, \\
 q &= \dot{\vartheta}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Uwzględnienie zginania skrzydeł wprowadza stopnie swobody wynikające z odkształceń, które prowadzą do dodatkowych równań ruchu. Przyjęto, że ugięcie skrzydła w każdym jego przekroju, przy założeniu, że drga ono ruchem harmonicznym $\zeta_j(t) = a \cos \omega_j t$, określone jest funkcją

$$z_j(y, t) = \Phi_j(y) \zeta_j(t), \tag{2.2}$$

gdzie

$\Phi_j(y)$ — postać własna ugięcia skrzydła odpowiadająca j -tej postaci,

ω_j — częstość drgań odpowiadająca j -tej postaci.

Stosując równania Lagrange'a II rodzaju otrzymano dodatkowe równania ruchu sztywnowca wynikające z odkształceń giętnych skrzydła

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n E_j \ddot{\xi}_j(t) + \sum_{j=1}^n E_j \omega_j^2 \xi_j(t) = F_j,$$

gdzie

$$(2.4) \quad E_j = 2 \int_0^{b/2} m(y) \Phi_j^2(y) dy + m_k \Phi_j^2(0);$$

E_j — masa uogólniona odpowiadająca j -tej postaci własnej skrzydła,

$$(2.5) \quad F_j = 2 \int_0^{b/2} F_z(y, t) \Phi_j(y) dy,$$

F_j — siła uogólniona odpowiadająca j -tej postaci, wynikająca z obciążenia skrzydła siłą wymuszającą $F_z(y, t)$ przy wyłącznym uwzględnieniu jego zginania,

$m(y)$ — funkcja rozkładu masy wzdłuż rozpiętości skrzydła,

m_k — masa kadłuba wraz z usterzeniem traktowana jako masa skupiona w płaszczyźnie symetrii skrzydła.

Wzory na pochodne aerodynamiczne $X_u, X_w, X_q, Z_u, Z_w, Z_q, M_u, M_w, M_q$ i M_w występujące w układzie równań (2.1) są wyprowadzone w pracy [3] i omówione w pracach [2, 3, 11]. Poniżej wyznaczono siły i momenty aerodynamiczne X_e, Z_e i M_e występujące w układzie równań (2.1) wywołane drganiami giętnymi skrzydła.

Zmiana kąta natarcia elementu skrzydła w dowolnym przekroju wywołana drganiami giętnymi jest następująca:

$$(2.6) \quad \Delta \alpha_e = \frac{\dot{z}}{U_1} = \frac{\Phi_j(y) \dot{\xi}(t)}{U_1},$$

wtedy zmiana siły nośnej na skrzydle wywołana odkształceniem giętym będzie

$$(2.7) \quad Z_e = 2 \int_0^{b/2} Z_{ae}(y) \Delta \alpha_e dy = \left[-\rho U_1 \frac{dC_z}{d\alpha} \int_0^{b/2} l(y) \Phi_j(y) dy \right] \dot{\xi}(t).$$

Po wprowadzeniu pochodnej aerodynamicznej $Z_{j\dot{\xi}}$ otrzymano

$$(2.8) \quad Z_e = Z_{j\dot{\xi}} \dot{\xi},$$

gdzie

$$(2.9) \quad Z_{j\dot{\xi}} = -\rho U_1 \frac{dC_z}{d\alpha} \int_0^{b/2} l(y) \Phi_j(y) dy.$$

Analogicznie wyprowadzono $X_{j\dot{\xi}}, M_{j\dot{\xi}}$

$$(2.10) \quad X_{j\dot{\xi}} = -\rho U_1 \frac{dC_x}{d\alpha} \int_0^{b/2} l(y) \Phi_j(y) dy,$$

$$(2.11) \quad M_{j\dot{\xi}} = \rho U_1 \frac{dC_{ms}}{d\alpha} \int_0^{b/2} l^2(y) \Phi_j(y) dy.$$

Siła wymuszająca $F_z(y, t)$ występująca w wyrażeniu (2.5) na siłę uogólnioną F_j ma postać

$$(2.12) \quad F_z(y, t) = \frac{1}{2} \rho U_1^2 l(y) \frac{dC_z}{d\alpha} (\alpha + \Delta\alpha_e) = \frac{1}{2} \rho U_1^2 l(y) \frac{dC_z}{d\alpha} \alpha - \frac{1}{2} \rho U_1 l(y) \frac{dC_z}{d\alpha} \Phi_j(y) \dot{\zeta},$$

przy czym

$$\alpha = \frac{w}{U_1}.$$

Po podstawieniu (2.12) do (2.5) i przekształceniach otrzymano

$$(2.13) \quad F_j = E_{jw} w + E_{j\dot{\zeta}} \dot{\zeta},$$

gdzie

$$(2.14) \quad E_{jw} = \rho U_1 \frac{dC_z}{d\alpha} \int_0^{b/2} l(y) \Phi_j(y) dy,$$

$$(2.15) \quad E_{j\dot{\zeta}} = \rho U_1 \frac{dC_z}{d\alpha} \int_0^{b/2} l(y) \Phi_j^2(y) dy.$$

Zakładając, że przed zakłóceniem $W_1 = 0$ i uwzględniając (2.15), (2.14), (2.13), (2.11), (2.10) i (2.9) po podstawieniu do (2.3) i (2.1) otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami

$$(2.16) \quad \begin{aligned} m\dot{u} - X_u u - X_w w + X_\vartheta \dot{\vartheta} - X_q \dot{\vartheta} - \sum_{j=1}^n X_{j\dot{\zeta}} \dot{\zeta} &= 0, \\ -Z_u u + m\dot{w} - Z_w w + Z_\vartheta \dot{\vartheta} - mU_1 \dot{\vartheta} - Z_q \dot{\vartheta} - \sum_{j=1}^n Z_{j\dot{\zeta}} \dot{\zeta} &= 0, \\ -M_u u - M_w \dot{w} - M_w w + J_y \ddot{\vartheta} - M_q \dot{\vartheta} - \sum_{j=1}^n M_{j\dot{\zeta}} \dot{\zeta} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n (E_j \ddot{\zeta} + E_{j\dot{\zeta}} \dot{\zeta} + E_j \omega_j^2 \zeta - E_{jw} w) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $X_\vartheta = mg \cos \theta_1$, $Z_\vartheta = X_\vartheta \operatorname{tg} \theta_1$.

3. Rozwiązanie równań ruchu i badanie stateczności

W dalszych rozważaniach uwzględniono stopień swobody wynikający z odkształcalności giętej skrzydeł — I postać giętej skrzydeł szybowca. Układ równań (2.16) przekształcono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho U_1^2 S$, równania momentów przez $\rho U_1^2 S l_H$ oraz wprowadzając oznaczenia przyjęte w lotnictwie [2, 3, 6, 11]:

\hat{t} — czas aerodynamiczny,

μ_1 — względna gęstość szybowca,

\bar{t} — czas bezwymiarowy,

j_y — bezwymiarowy moment bezwładności,

\bar{u}, \bar{w} — bezwymiarowe prędkości liniowe.

Otrzymano następujący układ równań w postaci bezwymiarowej:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{u}} - x_u \bar{u} - x_w \bar{w} - \frac{x_q}{\mu_1} \dot{\bar{\vartheta}} + x_g \bar{\vartheta} + x_{1\zeta} \dot{\bar{\zeta}} &= 0, \\ -z_u \bar{u} + \dot{\bar{w}} - z_w \bar{w} - \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1}\right) \dot{\bar{\vartheta}} + z_g \bar{\vartheta} + z_{1\zeta} \dot{\bar{\zeta}} &= 0, \\ \bar{m}_u \bar{u} + \bar{m}_w \dot{\bar{w}} + \bar{m}_w \bar{w} + \ddot{\bar{\vartheta}} + \bar{m}_q \dot{\bar{\vartheta}} + \bar{m}_{1\zeta} \dot{\bar{\zeta}} &= 0, \\ \bar{e}_{1w} \bar{w} + \ddot{\bar{\zeta}} + \bar{e}_{1\zeta} \dot{\bar{\zeta}} + \bar{e}_{1\zeta} \bar{\zeta} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x_{1\zeta} &= -\frac{X_{1\zeta}}{\rho U_1 S} \frac{1}{\mu_1}, & \bar{e}_{1w} &= -\frac{\mu_1}{e_1} \frac{E_{1w}}{\rho U_1 S}, \\ z_{1\zeta} &= -\frac{1}{\mu_1} \frac{Z_{1\zeta}}{\rho U_1 S}, & \bar{e}_{1\zeta} &= \frac{1}{e_1} \frac{E_{1\zeta}}{\rho U_1 S}, \\ \bar{m}_{1\zeta} &= -\frac{1}{j_y} \frac{M_{1\zeta}}{\rho U_1 S l_H}, & \bar{e}_{1\zeta} &= (2\pi\nu_{1g} \hat{t})^2, \end{aligned}$$

przy czym

$$e_1 = \frac{E_1}{m}, \quad \mu_1 = \frac{m}{\rho S l_H}, \quad \hat{t} = \frac{m}{\rho S U_1}, \quad j_y = \frac{J_y}{m l_H^2}.$$

Rozwiązując układ równań jednorodnych (3.1) otrzymano równanie charakterystyczne szóstego stopnia w postaci

$$(3.3) \quad \bar{\lambda}^6 + (B^1 + B_1^e) \bar{\lambda}^5 + (C_1 + C_1^e) \bar{\lambda}^4 + (D_1 + D_1^e) \bar{\lambda}^3 + (E^1 + E_1^e) \bar{\lambda}^2 + F_1^e \bar{\lambda} + G_1^e = 0,$$

gdzie współczynniki B_1 , C_1 , D_1 i E_1 są współczynnikami równania charakterystycznego czwartego stopnia otrzymanego z równań ruchu szybowca sztywnego [3]. Natomiast współczynniki B_1^e , C_1^e , D_1^e , E_1^e , F_1^e i G_1^e są zmianami współczynników wywołanymi uwzględnieniem odkształceń giętnych skrzydeł i mają postać:

$$B_1^e = \bar{e}_{1\zeta},$$

$$C_1^e = B_1 \bar{e}_{1\zeta} + \bar{e}_{1\zeta} - z_{1\zeta} \bar{e}_{1w},$$

$$D_1^e = C_1 \bar{e}_{1\zeta} + B_1 \bar{e}_{1\zeta} + \left[(x_u - \bar{m}_q) z_{1\zeta} - \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1}\right) \bar{m}_{1\zeta} - z_u x_{1\zeta} \right] \bar{e}_{1w},$$

$$E_1^e = D_1 \bar{e}_{1\zeta} + C_1 \bar{e}_{1\zeta} + \left[(x_u z_{1\zeta} - z_u x_{1\zeta}) \bar{m}_q - (z_u \bar{m}_{1\zeta} + \bar{m}_u z_{1\zeta}) \frac{x_q}{\mu_1} + \right. \\ \left. + z_g \bar{m}_{1\zeta} + (x_u \bar{m}_{1\zeta} + \bar{m}_u x_{1\zeta}) \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1}\right) \right] \bar{e}_{1w},$$

$$F_1^e = E_1 \bar{e}_{1\zeta} + D_1 \bar{e}_{1\zeta} + [x_g (z_u \bar{m}_{1\zeta} + \bar{m}_u z_{1\zeta}) - z_g (x_u \bar{m}_{1\zeta} + \bar{m}_u x_{1\zeta})] \bar{e}_{1w},$$

$$G_1^e = E_1 \bar{e}_{1\zeta}.$$

W wyniku rozwiązania równania charakterystycznego (3.3) otrzymano pierwiastki zespolone sprzężone w postaci

$$(3.4) \quad \bar{\lambda}_k^e = \bar{\xi}_k^e \pm i\bar{\eta}_k^e,$$

gdzie

$\bar{\xi}_k^e = \xi_k^e \hat{t}$ — bezwymiarowy współczynnik tłumienia,

$\bar{\eta}_k^e = \eta_k^e \hat{t}$ — bezwymiarowa częstość oscylacji.

Dla szybowca statecznego wszystkie współczynniki tłumienia muszą być $\bar{\xi}_k^e < 0$, tzn. ruch jest tłumiony i szybowiec jest stateczny dynamicznie. Aby stwierdzić czy szybowiec jest stateczny, nie trzeba rozwiązywać równania charakterystycznego (3.3), wystarczy jedynie sprawdzić kryteria Routha–Hurwitza (dla równania charakterystycznego szóstego stopnia są one podane w pracy [6]).

4. Przykład liczbowy i wnioski

Przykładowe obliczenia numeryczne wykonano dla krajowego szybowca wyczynowego według danych projektu wstępnego.

Korzystając z [4] wyznaczono funkcję rozkładu mas wzdłuż rozpiętości skrzydła w postaci

$$m(y) = 1,928 - 0,356y + 0,163y^2.$$

Funkcję ugięcia skrzydła odpowiadającą I postaci giętej wyznaczono na podstawie prób rezonansowych [10] wykonanych zgodnie z [4, 8] i otrzymano w postaci

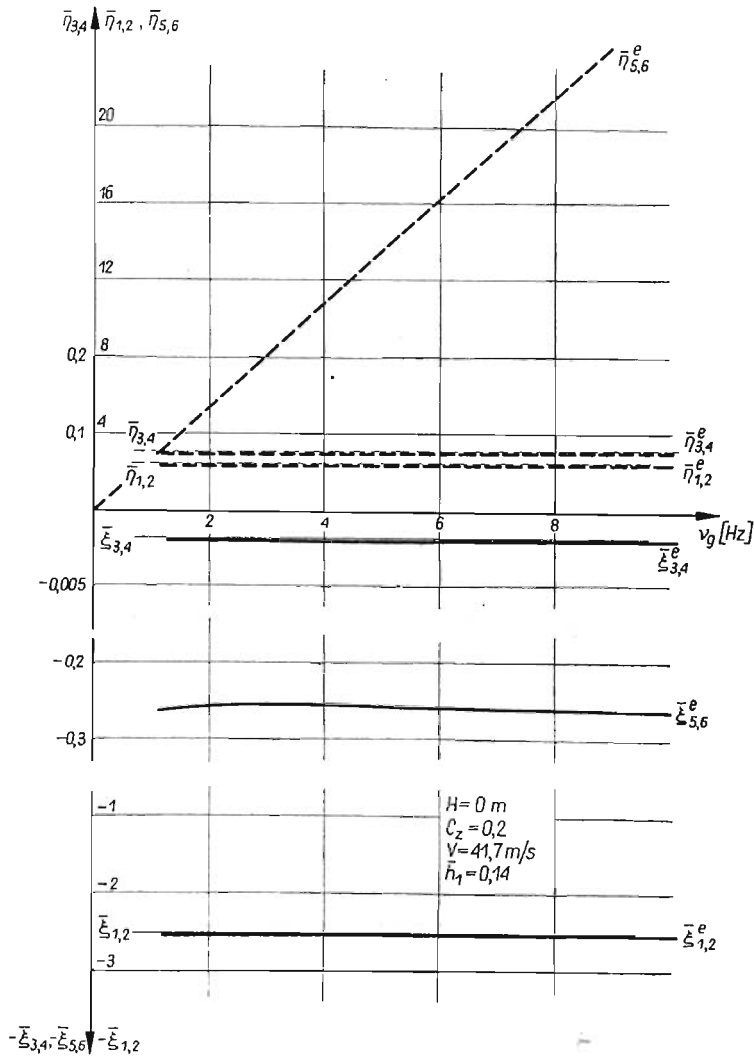
$$\Phi_1(y) = -0,217 + 0,0268y^2 - 0,0000981y^4.$$

W obliczeniach zmieniano kolejno: częstość drgań własnych, zapas stateczności statycznej, prędkość i wysokość lotu. Pozwoliło to znaleźć wpływ powyższych czynników na stateczność podłużną szybowca. Jednocześnie przeprowadzono obliczenia stateczności szybowca sztywnego i porównano je z wynikami obliczeń dla szybowca odkształcalnego. Po numerycznym rozwiązaniu metodą Bairstowa równania charakterystycznego (3.3) otrzymano pierwiastki w postaci (3.4), sześć pierwiastków $\bar{\lambda}_k^e$ dla szybowca odkształcalnego i cztery pierwiastki $\bar{\lambda}_k$ dla szybowca sztywnego. Dla szybowca sztywnego współczynniki $B_1^e = C_1^e = D_1^e = E_1^e = F_1^e = G_1^e = 0$. Pierwiastki $\bar{\lambda}_k^e$ i $\bar{\lambda}_k$ z jednakowymi indeksami k , odpowiadają tym samym przypadkom ruchu szybowca odkształcalnego i sztywnego. Otrzymano trzy pary pierwiastków zespolonych sprzężonych $\bar{\lambda}_{1,2}^e$, $\bar{\lambda}_{3,4}^e$ i $\bar{\lambda}_{5,6}^e$, które charakteryzują ruchy okresowe szybowca odkształcalnego oraz dwie pary pierwiastków zespolonych $\bar{\lambda}_{1,2}$ i $\bar{\lambda}_{3,4}$ dla szybowca sztywnego.

Pierwiastki $\bar{\lambda}_{1,2}^e$ i $\bar{\lambda}_{1,2}$ odpowiadają głównie szybkim silnie tłumionym oscylacjom pochylającym zachodzącym wokół osi poprzecznej y . Pierwiastki $\bar{\lambda}_{3,4}^e$ i $\bar{\lambda}_{3,4}$ charakteryzują okresowe ruchy fugoidalne [2, 3] słabo tłumione, zachodzące na kierunku osi podłużnej x . Trzecia para pierwiastków $\bar{\lambda}_{5,6}^e$ odpowiada pionowym, okresowym przemieszczeniom szybowca wywołanym odkształcalnością giętą skrzydeł.

Na rysunkach 2-4 liniami grubymi naniesiono zmianę parametrów odnoszących się do szybowca odkształcalnego, a linie cienkie dotyczą szybowca sztywnego. Linie ciągłe przedstawiają zmiany współczynników tłumienia ($\bar{\xi}$) w postaci bezwymiarowej, a linie przerywane, zmiany bezwymiarowych częstości oscylacji ($\bar{\eta}$).

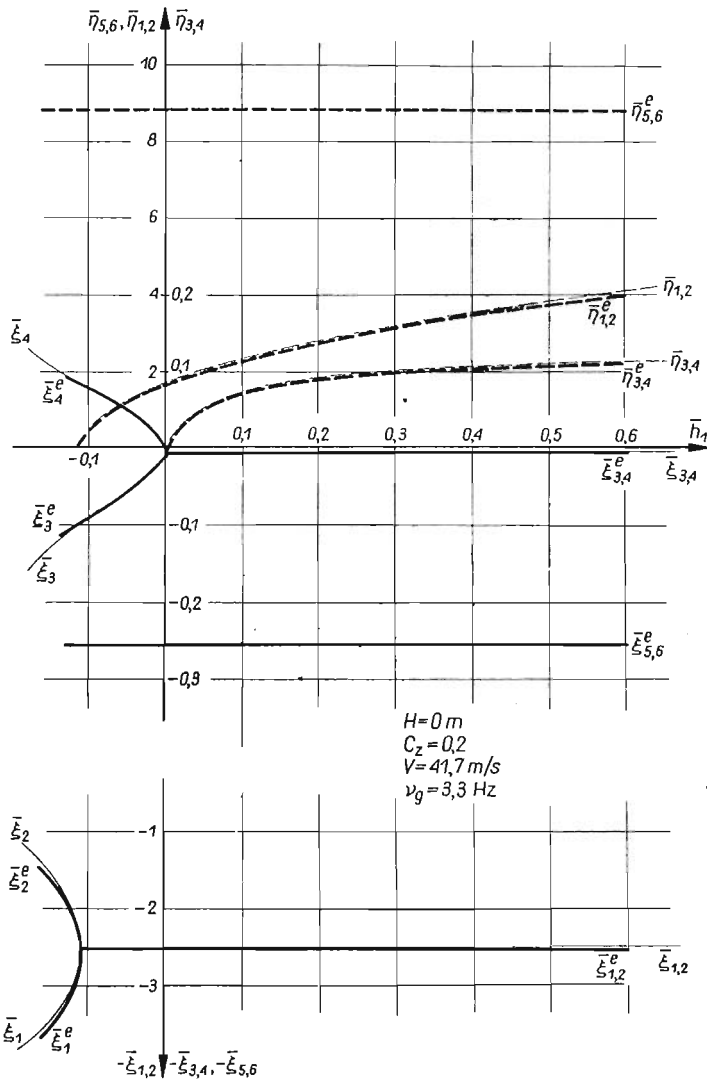
Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono wpływ parametrów konstrukcyjnych na częstości oscylacji i współczynniki tłumienia. Zmiana v_g charakteryzuje wzrost sztywności giętej skrzydeł przy nie zmieniających się własnościach geometrycznych, aerodynamicznych i tym samym rozkładzie mas (rys. 2). Na rys. 3 przedstawiono wpływ zmiany zapasu stateczności statycznej przy założeniu niezmiennej sztywności i rozkładu mas. Na zapas



Rys. 2. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji szybowca w funkcji częstości i postaci giętej skrzydła dla wysokości $H = 0 \text{ m}$

stateczności statycznej [2, 3] mają wpływ parametry geometryczne i charakterystyka aerodynamiczna szybowca. Wpływ zmian prędkości lotu na częstości oscylacji i tłumienie przy stałej sztywności i rozkładzie mas przedstawiono na rys. 4.

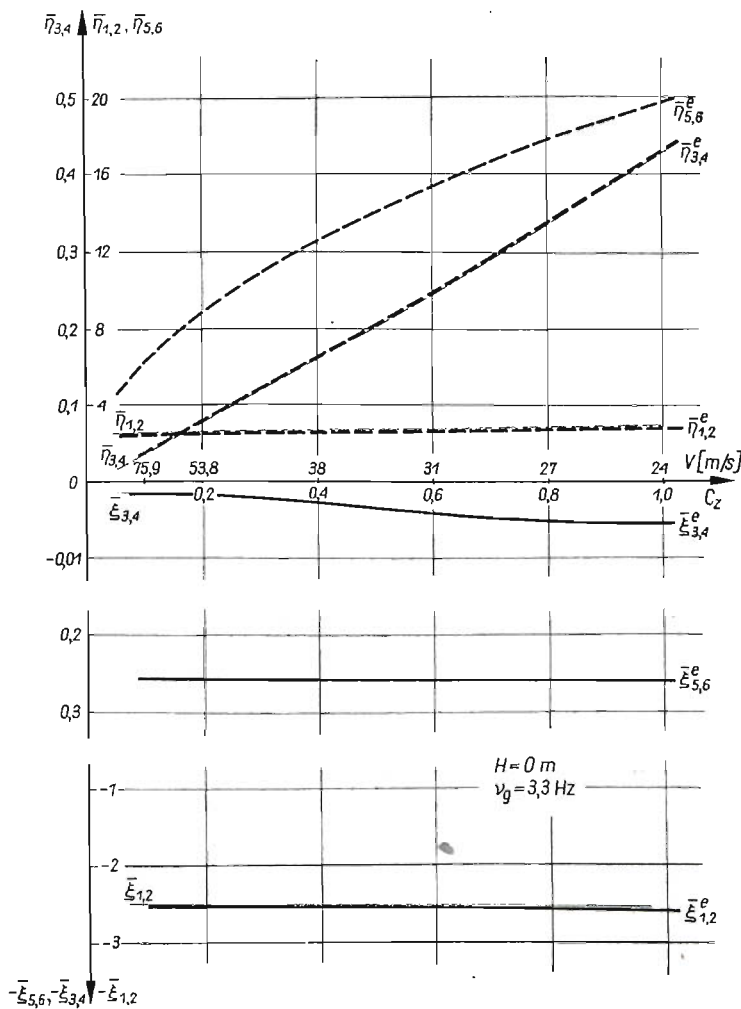
Wnioski wynikające z obliczeń numerycznych są słuszne dla danego szybowca i nie wszystkie mogą być uogólnione. Szersze uogólnienie wniosków wymagałoby obliczeń numerycznych dla szeregu szybowców. Przyjęcie do obliczeń tylko pierwszej postaci giętej jest daleko idącym uproszczeniem, jednak pozwala zbadać wpływ odkształcalności giętej skrzydeł na stateczność szybowca. Należałoby rozpatrzyć większą ilość stopni swobody wynikających z odkształcalności: skrzydeł, usterzenia i kadłuba. Nie-



Rys. 3. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji szybowca w funkcji zapasu stateczności statycznej dla wysokości $H = 0\text{ m}$

wątpliwie skomplikuje to analizę, a tym bardziej porównanie z wynikami otrzymanymi dla szybowca sztywnego.

Z wykonanych obliczeń i wyników przedstawionych na rysunkach 2–4 można wyciągnąć wnioski o charakterze ogólnym, konstrukcyjnym i pilotażowym.



Rys. 4. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji szybowca w funkcji prędkości lotu na wysokości $H = 0$ m

Wnioski ogólne

— Wyniki oscylacji szybkich i wahań fugoidalnych otrzymane dla szybowca odkształcalnego są zgodne z wynikami dotyczącymi szybowca sztywnego (rysunki 2–4);

— odkształcalność giętna skrzydeł powoduje dodatkowe harmoniczne przemieszczenia pionowe szybowca (tłumione w przypadku szybowca rozpatrywanego) (rysunki 2–4).

Wnioski konstrukcyjne

— Zwiększenie sztywności giętnej skrzydeł powoduje wzrost częstości drgań giętnych, natomiast nie ma wpływu na ich tłumienie (rys. 2);

— wzrost sztywności giętnej skrzydeł nie wpływa na częstości i tłumienie oscylacji szybkich i wahań fugoidalnych szybowca (rys. 2);

— wzrost zapasu stateczności statycznej (zmiany geometrii i charakterystyki aerodynamicznej szybowca) nie ma wpływu na tłumienie drgań giętnych i ich częstości, jak również nie daje różnic między częstościami i tłumieniem oscylacji szybkich i wahań fugoidalnych szybowca odkształcalnego i sztywnego (rys. 3).

Wnioski pilotażowe

— Zmiany prędkości nie powodują różnic w częstości i tłumieniu oscylacji szybkich i wahań fugoidalnych szybowca sztywnego i odkształcalnego (rys. 4);

— zmiany prędkości wpływają na bezwymiarową częstość drgań giętnych natomiast nie mają wpływu na bezwymiarowe współczynniki tłumienia tych drgań (rys. 4).

Przedstawiona praca wskazuje, że konieczne jest szersze zbadanie wpływu i charakteru odkształceń na stateczność aparatów latających. Szczególnie wydaje się to konieczne dla szybowców, które charakteryzuje duża odkształcalność i niskie częstości drgań poszczególnych elementów konstrukcji. Wprawdzie, jak wynika z wyżej przeprowadzonych obliczeń, częstość najniższej postaci giętnej skrzydła jest najbliższa częstości oscylacji szybkich szybowca i mimo to nie wpływa w widoczny sposób na te oscylacje.

Uwzględnienie większej ilości stopni swobody, wynikających z odkształcalności konstrukcji i sprzężeń między nimi, sprowadzi rozpatrywanie stateczności szybowca do zagadnienia zbadania możliwości pojawienia się drgań samowzbudnych, czyli zjawiska flatteru.

Ważniejsze oznaczenia nie wyjaśnione w tekście

b	[m]	rozpiętość skrzydeł szybowca,
C_{ms}		bezwymiarowy współczynnik momentu pochylającego skrzydeł,
C_x		bezwymiarowy współczynnik oporu aerodynamicznego,
C_z		bezwymiarowy współczynnik siły nośnej,
g	[m/s ²]	przyspieszenie ziemskie,
l_{II}	[m]	odległość środka ciężkości szybowca od zawiasów steru wysokości,
$l(y)$	[m]	funkcja zmiany ciężkości skrzydła z rozpiętością,
m	[kG s ² /m]	masa szybowca,
S	[m ²]	powierzchnia nośna skrzydeł,
$U_1 = V$	[m/s]	prędkość lotu,
α	[rad]	kąt natarcia,
ρ	[kG s ² /m ³]	gęstość powietrza,
ν_{1g}	[Hz]	częstość I postaci drgań giętnych skrzydeł.

Literatura cytowana w tekście

1. R. L. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, R. L. HALFMAN, *Aeroelasticity*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge 1955.
2. B. ETKIN, *Dynamics of Flight*, New York-London 1959.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. II, PWN, Warszawa 1961.
4. W. ŁANECKA-MAKARUK, J. MARYNIAK, *Zagadnienia flatteru skrzydeł szybowców*, Technika Lotnicza, nr 10-11, 1964.
5. W. ŁANECKA-MAKARUK, *Metoda obliczenia stateczności dynamicznej szybowców oraz obciążenia ustalenia wysokości podczas brutalnego sterowania z uwzględnieniem elastyczności skrzydła*, Technika Lotnicza i Astronautyczna, nr 2, 1966.
6. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym*, Mech. Teor. i Stos. nr 1, 1967, (również Reports NASA-TT-F-11760, Jun. 1968).
7. R. SCANLAN, R. ROSENBAUM, *Drgania i flatter samolotów*, PWN, Warszawa 1964.
8. W. SZEMPLIŃSKA, R. ALEKSANDROWICZ, J. MARYNIAK, *Próby rezonansowe szybowców*, Technika Lotnicza, nr 6, 1958, (również Aero-Review, nr 4, 1959).
9. *Nowoczesne metody numeryczne*. Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington, Midsex, PWN — Warszawa 1965.
10. *Próby rezonansowe szybowca SZD-24 «Foka 4»*. Sprawozdanie nr 53 Katedry Mechaniki Wydz. MEiL Politechniki Warszawskiej, 1964 (nie publikowane).
11. И. В. Остославский, И. В. СТРАЖЕВА, *Динамика полета — устойчивость и управляемость летательных аппаратов*, Издательство Машиностроение, Москва 1965.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ КРЫЛЬЕВ
НА ПРОДОЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАНЕРА

В работе рассмотрено влияние изгибной деформируемости крыльев планера на его продольную устойчивость. Учтены три степени свободы соответствующие движению планера в вертикальной плоскости и добавочные степени учитывающие влияние изгибной деформируемости. Уравнения движения получены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

На примере прототипа одного из польских планеров проделаны расчеты учитывающие первую форму изгиба крыльев и три степени свободы жесткого планера. Результаты этих расчетов послужили для получения некоторых общих выводов относительно конструкции и пилотажа, а также некоторых выводов относительно возможной необходимости изменения принятых предположений.

Summary

EFFECT OF FLEXURAL DEFORMABILITY OF WINGS ON THE LONGITUDINAL STABILITY
OF A GLIDER

The influence of flexural deformability of wings of a glider on its longitudinal stability is discussed in the paper. Three degrees of freedom resulting from glider motions in the vertical plane, and additional degrees connected with flexural deformability of wings are equally taken into consideration. Equations

of notion have been obtained in the form of a system of ordinary, second order differential equations with constant coefficients.

As an example, numerical calculations taking into account the first flexural mode of wings and three additional degrees of rigid glider are presented for one prototype of domestic gliders. From the results of calculations the definite conclusions of general, constructional and pilotage character are drawn as well as those concerning necessity of eventual modifications of previously accepted assumptions.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 maja 1969 r.

PODSTAWOWE TWIERDZENIA Z ZAKRESU TEORII DOSTOSOWYWANIA SIĘ KONSTRUKCJI
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH DO OBCIĄŻEŃ ZMIENNYCH W CZASIE

JAN A. K Ö N I G (WARSZAWA)

1. Wstęp

W projektowaniu i obliczaniu konstrukcji od szeregu lat uwzględniane są odkształcenia plastyczne. W szczególności teoria nośności granicznej znalazła już dosyć szerokie zastosowanie praktyczne. Jednakże już w końcu lat dwudziestych GRÜNING [1] i BLEICH [2] zwrócili uwagę na niebezpieczeństwo w postaci możliwości zniszczenia konstrukcji pod działaniem obciążeń cyklicznych, czy to w wyniku stopniowo narastających (choć ograniczonych na każdym cyklu) przyrostów odkształceń plastycznych, czy też wskutek zmęczenia plastycznego przy kolejno występujących odkształceniach plastycznych przeciwnych znaków, pomimo że stan graniczny nie został jeszcze osiągnięty.

MELAN [3] (1938) i KOITER [5, 6] (1956) podali twierdzenia podstawowe dotyczące możliwości zniszczenia powyższego typu przed osiągnięciem stanu granicznego. PRAGER [7] i ROZENBLUM [8, 9] uogólnili te twierdzenia na przypadek obciążeń termicznych. W pracy [17] rozpatrzono twierdzenie Melana, w przypadku gdy zarówno warunek plastyczności, jak i moduły sprężystości materiału są zależne od temperatury. Pojęcie dostosowywania się, tj. powstawania w ciele samonapreżeń pozwalających mu reagować na następne cykle obciążeń już w sposób czysto sprężysty, ma sens również dla ciał sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem. Dowód odpowiednio zmodyfikowanego twierdzenia podał MELAN [4] dla wzmocnienia translacyjnego. Bardziej ogólne typy wzmocnienia były badane, ze stanowiska teorii dostosowania, w pracy [19].

Bezpośrednie wykorzystanie twierdzeń o dostosowaniu do bardziej złożonych problemów napotyka w praktyce znaczne trudności matematyczne, podobnie jak w przypadku trójwymiarowych problemów teorii sprężystości i plastyczności. Dla konstrukcji, których jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu z pozostałymi (pręty, powłoki), buduje się teorie spełniające podstawowe zależności ośrodka ciągłego w sposób przybliżony. Pozwala to znacznie uprościć rozpatrywane problemy kosztem stosunkowo niewielkich niedokładności.

W takich przybliżonych teoriach operujących wielkościami uogólnionymi rozpatrujemy konstrukcję nie jako zbiór punktów, lecz jako układ jej podzbiorów nazywanych przekrojami. Za siły uogólnione bierze się przy tym siły i momenty wzajemnego oddziaływania tych przekrojów lub też wielkości do nich proporcjonalne.

W pracy [16] pokazano, jak można stosować klasyczne twierdzenie MELANA [3] o dostosowaniu, w przypadku gdy teoria opisująca stan sił wewnętrznych i deformacji rozpatrywanej konstrukcji wyrażona jest w uogólnionych siłach i uogólnionych odkształceniach, które to wielkości określone są nie dla punktów, lecz dla przekrojów konstrukcji. Zastosowanie ogólnych wyników pracy [16] do konstrukcji ramowych, łukowych oraz dla płyt przedstawiono w pracach [18 i 20].

Pojęcia uogólnionych odkształceń, tj. wielkości q_r wprowadza się w ten sposób, że w ramach ścisłości rozpatrywanej teorii zachodzi równość

$$(1.1) \quad \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_a \sum_{r=1}^m Q_r q_r da,$$

gdzie V oznacza objętość rozpatrywanej konstrukcji, σ_{ij} — tensor naprężenia, ε_{ij} — tensor odkształcenia, Q_r — siły uogólnione, m — ich liczbę, a — pole wszystkich przekrojów danej konstrukcji.

Istnieje naturalnie (por. [16]) jednoznacznie określone przekształcenie pola naprężeń $\sigma_{ij}(x)$, $x \in \xi$, gdzie $\xi \in a$ jest rozpatrywanym przekrojem konstrukcji, w siły uogólnione

$$(1.2) \quad Q_r(\xi) = \Phi_r[\sigma_{ij}(x)], \quad x \in \xi; \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

Operatory Φ_r są liniowe

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Phi_r(\sigma_{ij} + \tau_{ij}) &= \Phi_r(\sigma_{ij}) + \Phi_r(\tau_{ij}), \\ \Phi_r(\lambda \sigma_{ij}) &= \lambda \Phi_r(\sigma_{ij}), \end{aligned}$$

gdzie λ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Przekształcenie odwrotne nie jest, w ogólności, jednoznaczne, jednakże w obrębie znanych teorii operujących wielkościami uogólnionymi (pręty zginane, płyty, powłoki) otrzymuje się jednoznaczne odwrócenie związku (1.2) dla przypadku czysto sprężystego zachowania się materiału przekroju. Wynika to z założeń kinematycznych odnośnie możliwych deformacji przekroju. Zatem

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}^e(x) = \sum_{r=1}^m Q_r(\xi) a_{ij}^r(x), \quad x \in \xi,$$

gdzie $a_{ij}^r(x)$ jest sprężystym rozkładem naprężeń w przekroju, wywołanym jednostkową siłą uogólnioną $Q_r = 1$, podczas gdy pozostałe siły uogólnione równe są zeru, zaś σ_{ij}^e oznacza sprężystą część tensora naprężenia. Wobec tego, stan naprężenia w dowolnym punkcie przekroju może być przedstawiony w postaci

$$(1.5) \quad \sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^e(x) + s_{ij}(x) = \sum_{r=1}^m Q_r a_{ij}^r + s_{ij},$$

gdzie $\Phi_r(s_{ij}) = 0$, $r = 1, 2, \dots, m$. Jeżeli dla danego typu konstrukcji użyta teoria w wielkościach uogólnionych jest wystarczająco dokładna, to w ramach jej ścisłości zbiór dowolnie wziętych pól naprężeń $s_{ij}(x)$ dla poszczególnych przekrojów ξ może być uważany za pole naprężeń reszkowych, tj. naprężeń spełniających warunki równowagi wewnętrznej i pozostających w równowadze z zerowymi obciążeniami zewnętrznymi.

Wykonując operację (1.2) na równaniach równowagi (lub wprost rozpatrując warunki równowagi przekrojów), otrzymujemy równania równowagi zapisane w siłach uogólnionych

$$(1.6) \quad \sum_{r=1}^m \mathcal{L}_{kr} Q_r + N_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie \mathcal{L}_{kr} są liniowymi operatorami różniczkowymi, a N_k pewnymi wielkościami określonymi przez zewnętrzne siły powierzchniowe i masowe.

Każde pole $Q_r^0(\xi)$, $\xi \in \alpha$ spełniające równania (1.6) dla $N_k = 0$ będziemy, przez analogię, nazywać reszkowym polem sił uogólnionych.

W pracy [16] wprowadzono, dla danego przekroju, pojęcie powierzchni sprężystej jako brzegu obszaru w przestrzeni sił uogólnionych, w obrębie którego żaden punkt przekroju nie doznaje uplastycznienia.

Oznacza to, że powierzchnia sprężysta dla materiału sprężysto-plastycznego określona jest, wobec (1.5), warunkiem

$$(1.7) \quad \varphi \left[\sum_{r=1}^m Q_r a_{ij}^r(x) + s_{ij}(x) \right] = k$$

w pewnym punkcie przekroju, a w pozostałych $\varphi < k$, przy czym $\varphi(\sigma_{ij}) = k$ jest warunkiem plastyczności, o którym zakłada się na ogół, że w przestrzeni stanów naprężenia ogranicza obszar wypukły, przy czym $\varphi = k$ tylko na brzegu. Z tego faktu wypukłości wypływa szereg ważnych własności powierzchni sprężystych.

Ze wzoru (1.7) widać, że powierzchnia sprężysta określona jest jednoznacznie przez podanie związanych z nią naprężeń $s_{ij}(x)$. Powierzchnię sprężystą dla $s_{ij}(x) = 0$, $x \in \xi$ nazywać będziemy dalej początkową powierzchnią sprężystą.

Wypukłość warunku plastyczności można analitycznie zapisać w sposób następujący, jeżeli $\varphi(\sigma_{ij}) < k$ i $\varphi(\tau_{ij}) \leq k$, to

$$(1.8a) \quad \varphi[(\lambda\sigma_{ij} + (1-\lambda)\tau_{ij})] < k \quad \text{dla } 0 < \lambda \leq 1$$

oraz, jeżeli $\varphi(\sigma_{ij}) \leq k$ i $\varphi(\tau_{ij}) < k$, to

$$(1.8b) \quad \varphi[\lambda\sigma_{ij} + (1-\lambda)\tau_{ij}] \leq k \quad \text{dla } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Pojęcie przekroju, sił uogólnionych i powierzchni sprężystej może być stosowane w przedstawionej wyżej postaci również w dwóch następujących skrajnych przypadkach:

A) Gdy przekrojami są wprost punkty konstrukcji; wtedy siłami uogólnionymi będą naprężenia, a powierzchnia sprężysta (jedyna) pokrywa się z warunkiem plastyczności $\varphi(\sigma_{ij}) = k$.

B) Za jedyny przekrój wziąć można całą konstrukcję. Wtedy, jeżeli obciążenia zewnętrzne dane są w postaci

$$(1.9) \quad \begin{aligned} T_i(x, t) &= \sum_{r=1}^m p_r(t) T_i^r(x), \\ F_i(x, t) &= \sum_{r=1}^m p_r(t) F_i^r(x), \end{aligned}$$

to jako siły uogólnione wziąć można parametry p_1, p_2, \dots, p_m (por. [11]), przy czym T_i oznaczają siły powierzchniowe, F_i — objętościowe.

2. Twierdzenia o dostosowaniu wyrażone w wielkościach uogólnionych

Podstawowymi twierdzeniami w teorii dostosowywania się ośrodka idealnie sprężysto-plastycznego do obciążeń zmieniających się dowolnie w danych granicach są twierdzenia Melana i Koitera (por. np. [6]) przytoczone poniżej. Twierdzenia te słuszne są ogólnie pod warunkiem, że funkcje opisujące stan naprężenia i odkształcenia nie zawierają osobliwości oraz że objętość rozpatrywanej konstrukcji jest skończona. Zatem przypadki koncentracji naprężeń, naroża lub lokalne plastyczne płynięcie muszą być wykluczone.

Twierdzenie Melana (1938). Dla dostosowania ciała potrzeba i wystarcza, aby istniało niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych $\varrho_{ij}(x)$ takie, by dla dowolnych zmian obciążeń w danych granicach zachodziła nierówność

$$(2.1) \quad \varphi[\sigma_{ij}^e(x, t) + \varrho_{ij}(x)] < k,$$

przy czym $\sigma_{ij}^e(x, t)$ oznacza naprężenia w identycznym geometrycznie ciele idealnie sprężystym pod takimi samymi obciążeniami.

Twierdzenie Koitera (1956). Dla zaistnienia niebezpieczeństwa zniszczenia konstrukcji wskutek niedostosowania potrzeba i wystarcza, aby istniał taki cykl tzw. kinematycznie dopuszczalnych odkształceń plastycznych $\varepsilon_{ij}(x, t)$, aby zachodziła nierówność

$$(2.2) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \int_V D_e dV dt \geq \int_{t_0}^{t_0+T} \int_V D(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV dt,$$

gdzie D_e jest szybkością pracy sił zewnętrznych, D — dysypacją mocy odkształceń plastycznych, przy czym przez cykl kinematycznie dopuszczalnych odkształceń plastycznych rozumie się cykl taki, że

$$(2.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}); \quad \Delta u_i = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{u}_i dt$$

oraz że pole przemieszczeń u_i spełnia wymagane warunki brzegowe. Wyrażenie tego twierdzenia w wielkościach uogólnionych jest natychmiastowe.

Twierdzenie Koitera (dla konstrukcji). Dla zaistnienia niebezpieczeństwa zniszczenia przez niedostosowanie potrzeba i wystarcza, aby istniał cykl kinematycznie dopuszczalnych odkształceń uogólnionych $q_r(\xi, t)$ w przedziale czasu (t_0, t_0+T) , taki, aby zachodziła nierówność

$$(2.4) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \int_a D_e da dt \geq \int_{t_0}^{t_0+T} \int_a Q_r \dot{q}_r da dt.$$

Dla dowodu wystarczy wziąć pod uwagę definicję odkształceń uogólnionych daną wzorem (1.1).

Zastosowanie tak uogólnionego twierdzenia Koitera znaleźć można w pracach [13, 14].

Natomiast przy formułowaniu uogólnienia twierdzenia Melana skorzystamy z wprowadzonej definicji powierzchni sprężystych.

Twierdzenie Melana (dla konstrukcji). Dla dostosowania danej konstrukcji potrzeba i wystarcza, aby istniały stałe w czasie: pole resztkowych sił uogólnionych $Q_r^0(\xi)$ oraz dla

każdego przekroju ξ konstrukcji, odpowiednia powierzchnia sprężysta S_ξ , takie że dla obciążeń zewnętrznych zmieniających się w przepisanych granicach pole sił wewnętrznych

$$(2.5) \quad Q_r^e(\xi, t) + Q_r^o(\xi)$$

mieściło się dla każdego przekroju ξ w odpowiedniej powierzchni sprężystej S_ξ . Tutaj Q_r^e oznacza pole sił uogólnionych w identycznej geometrycznie lecz idealnie sprężystej konstrukcji.

Dowodziemy, że w granicach ścisłości teorii operującej wielkościami uogólnionymi twierdzenie to jest równoważne twierdzeniu Melana.

D o w ó d: a) Jeżeli zachodzi twierdzenie Melana, to istnieje rozkład naprężeń resztkowych $\varrho_{ij}(x)$ taki, że spełnione jest (2.1). Te naprężenia resztkowe możemy przedstawić w postaci

$$(2.6) \quad \varrho_{ij}(x) = \varrho_{ij}^0(x) + \bar{\varrho}_{ij}(x), \quad x \in \xi,$$

gdzie $\Phi_r(\bar{\varrho}_{ij}(x)) = 0$. A zatem według (1.7) rozkład $\bar{\varrho}_{ij}(x)$ definiuje pewną powierzchnię sprężystą S_ξ . Pole sił uogólnionych

$$Q_r^0(x) = \Phi_r(\varrho_{ij}(x)) = \Phi_r(\varrho_{ij}^0(x))$$

spełnia warunki równowagi (1.6) dla $N_k = 0$, jest zatem resztkowym polem sił uogólnionych. Nierówność (2.1) stwierdza, że [wobec (1.7)] stan $Q_r^e + Q_r^o$, gdzie $Q_r^e = \Phi_r(\sigma_{ij}^e)$, znajduje się wewnątrz powierzchni sprężystej S_ξ , jak to jest wymagane przez uogólnione twierdzenie Melana.

b) Jeżeli prawdziwe jest twierdzenie uogólnione, to istnieje [wobec (1.7)] pewien stan $s_{ij}(x)$ taki, że

$$(2.7) \quad \Phi \left[\sum_{r=1}^m (Q_r^e + Q_r^o) a_{ij}^r + s_{ij} \right] \leq k$$

dla każdego $x \in \xi$ i dla każdego przekroju $\xi \in \alpha$, przy czym $\Phi_r(s_{ij}) = 0$. W ramach dokładności teorii w wielkościach uogólnionych pole $s_{ij}(x)$ jest polem naprężeń resztkowych,

zaś $\varrho_{ij}^0 = \sum_{r=1}^m Q_r^o a_{ij}^r$ stanowi pole również resztkowe, gdyż spełnia ono równania (1.6).

Zatem suma $s_{ij} + \varrho_{ij}^0$ stanowi stan naprężeń resztkowych, jak tego wymaga twierdzenie Melana.

Teraz jasny staje się sposób stosowania tak uogólnionego twierdzenia Melana. Mianowicie zamiast poszukiwania pola samonaprężeń $\varrho_{ij} = \varrho_{ij}^0 + \bar{\varrho}_{ij}$ wymaganego wzorem (2.1), szukamy pola resztkowych sił uogólnionych Q_r^0 dla otrzymania członu ϱ_{ij}^0 (co odpowiada poszukiwaniu rozwiązania równania (1.6) dla $N_k = 0$) oraz dobieramy odpowiednie powierzchnie sprężyste (co odpowiada dobieraniu odpowiedniego członu $\bar{\varrho}_{ij}$). Zawieranie się sumy (2.5) w powierzchni sprężystej S_ξ dla każdego przekroju ξ daje nam wtedy spełnienie warunku (2.1) wymaganego przez twierdzenie Melana.

Metody poszukiwania resztkowych sił uogólnionych zależeć będą od formy równań równowagi w konkretnym rozpatrywanym problemie i trudno tu o jakieś uogólnienia.

Natomiast wypukłość warunku plastyczności oraz ewentualnie jego symetria względem znaku naprężeń pozwalają wysnuć pewne ogólne własności powierzchni sprężystych,

które mogą być pomocne przy rozwiązywaniu problemów szczegółowych. Odpowiednie twierdzenia podano w rozdziale 3, a ich zastosowania do obliczeń praktycznych znaleźć można w pracach [18, 20].

3. Twierdzenia dotyczące powierzchni sprężystych

Powierzchnie sprężyste posiadają szereg własności, znajomość których jest pomocna przy rozwiązywaniu zagadnień szczegółowych. Niektóre z nich przedstawione zostaną poniżej.

Twierdzenie 1. Powierzchnia sprężysta ogranicza obszar wypukły.

D o w ó d: niech $P_1 = (Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_m^1)$; $P_2 = (Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_m^2)$ oznaczają dwa punkty na brzegu tego obszaru. Wtedy, w myśl (1.7)

$$\varphi \left[\sum_{r=1}^m Q_r^1 a_{ij}^r + \varrho_{ij} \right] \leq k \quad \text{i} \quad \varphi \left[\sum_{r=1}^m Q_r^2 a_{ij}^r + \varrho_{ij} \right] \leq k.$$

Wobec tego na podstawie (1.8) otrzymujemy

$$\varphi \left[\lambda \sum_{r=1}^m Q_r^1 a_{ij}^r + (1-\lambda) \sum_{r=1}^m Q_r^2 a_{ij}^r + \varrho_{ij} \right] \leq k, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

To zaś oznacza, że dowolny punkt należący do odcinka prostoliniowego o końcach P_1 i P_2 leży wewnątrz tej samej powierzchni sprężystej, co stwierdza wypukłość obszaru ograniczonego przez tę powierzchnię. Dowód tej własności (również dla materiału ze wzmocnieniem) przedstawił uprzednio MRÓZ [12].

Twierdzenie 2. Jeżeli $s_{ij}^1(x), s_{ij}^2(x)$, $x \in \xi$ określają dwie odpowiednie powierzchnie sprężyste S_1 i S_2 , to obszar S_λ określony jako zbiór wszystkich punktów P^λ kształtu

$$P^\lambda = \lambda P^1 + (1-\lambda) P^2,$$

gdzie $P^1 \in S_1$, $P^2 \in S_2$, zaś $0 < \lambda < 1$ oznacza stałą, jest zawarty w powierzchni sprężystej S_3 określonej przez rozkład naprężeń

$$s_{ij}^3(x) = \lambda s_{ij}^1 + (1-\lambda) s_{ij}^2.$$

D o w ó d: z założeń

$$\varphi \left[\sum_{r=1}^m P_r^1 a_{ij}^r + s_{ij}^1 \right] \leq k, \quad \varphi \left[\sum_{r=1}^m P_r^2 a_{ij}^r + s_{ij}^2 \right] \leq k;$$

stąd

$$\varphi \left[\lambda \sum_{r=1}^m P_r^1 a_{ij}^r + (1-\lambda) \sum_{r=1}^m P_r^2 a_{ij}^r + \lambda s_{ij}^1 + (1-\lambda) s_{ij}^2 \right] = \varphi \left[\sum_{r=1}^m P_r^\lambda a_{ij}^r + s_{ij}^3 \right] \leq k.$$

Twierdzenie 3. Niech obszary A_1 , A_2 leżą odpowiednio wewnątrz powierzchni sprężystych S_1 , S_2 i niech A_1 przystaje do A_2 poprzez ruch sztywny bez obrotu. Wtedy obszar $A = \lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$, gdzie $0 < \lambda < 1$ jest stałą, przystający w ten sam sposób do A_1 i A_2 i położony między nimi, leży wewnątrz pewnej powierzchni sprężystej S .

Dowód wynika z twierdzenia 2, jeżeli położyć $P^1 \in A_1$, $P^2 \in A_2$. Wtedy obszar S_λ pokrywa się z obszarem A .

Twierdzenie 4. Jeżeli warunek plastyczności $\varphi(\sigma_{ij}) = k$ spełnia (1.8) oraz funkcja $\varphi(\sigma_{ij})$ jest parzysta względem naprężeń

$$(3.1) \quad \varphi(-\sigma_{ij}) = \varphi(\sigma_{ij}),$$

to wtedy dowolna powierzchnia sprężysta może być przez odpowiedni ruch sztywny bez obrotu zawarta w początkowej powierzchni sprężystej.

D o w ó d: niech $P^1 = (Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_m^1)$; $P^2 = (Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_m^2)$ oznaczają dwa punkty początkowej powierzchni sprężystej leżące na tej samej prostej przechodzącej przez początek układu. Wtedy wobec (3.1) musi być $Q_r^2 = -Q_r^1$, $r = 1, 2, \dots, m$.

W każdym punkcie rozważanego przekroju $x \in \xi$ mamy

$$(3.2) \quad \varphi\left[\sum_{r=1}^m Q_r^1 a_{ij}^r\right] = \varphi\left[\sum_{r=1}^m Q_r^2 a_{ij}^r\right] \leq k,$$

przy czym istnieje punkt $x_0 \in \xi$, dla którego zachodzi równość.

Rozpatrzmy teraz taki sam obszar przesunięty o wektor Q_r^0 i niech $s_{ij}(x)$ oznacza pole naprężeń określające według (1.7) jakąś dowolną powierzchnię sprężystą. Niech $R^1 = Q_r^1 + Q_r^0$, $R^2 = Q_r^2 + Q_r^0$. Jeżeli co najmniej jeden z tych punktów R^1, R^2 , powiedzmy R^1 , leży wewnątrz tej powierzchni sprężystej, a drugi wewnątrz niej lub na brzegu, to wtedy dla każdego $x \in \xi$ musi, wobec (1.8), zachodzić

$$(3.3) \quad \varphi\left[\sum_{r=1}^m (Q_r^1 + Q_r^0) a_{ij}^r(x) + s_{ij}(x)\right] < k; \quad \varphi\left[\sum_{r=1}^m (Q_r^2 + Q_r^0) a_{ij}^r(x) + s_{ij}(x)\right] \leq k.$$

Ale wobec (3.2) możemy napisać

$$(3.4) \quad \varphi(\sigma_{ij}) = \varphi(-\sigma_{ij}) = k, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_{ij} = \sum_{r=1}^m Q_r^1 a_{ij}^r(x).$$

Warunki (3.3) oznaczają, że

$$(3.5) \quad \varphi(\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) < k, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m Q_r^0 a_{ij}^r(x_0) + s_{ij}(x_0),$$

$$\varphi(-\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) \leq k, \quad \text{tj.} \quad \varphi(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \leq k.$$

Z dwóch warunków (3.5) wynika dla $\lambda = 1/2$, że

$$\varphi\left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \alpha_{ij}) + \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})\right] = \varphi(\sigma_{ij}) < k,$$

co wraz z (3.4) stanowi sprzeczność. Zatem oba punkty R^1, R^2 muszą leżeć na brzegu lub na zewnątrz tej samej powierzchni sprężystej, a to dowodzi już twierdzenia.

Twierdzenie 5. Jeżeli program obciążenia określony jest przez układ nierówności

$$(3.6) \quad -\alpha_i p_i^s < p_i < p_i^s, \quad p_i^s > 0, \quad \alpha_i \geq -1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie p_i oznaczają współczynniki obciążenia jak we wzorach (1.9), to wtedy obszar dostosowania w przestrzeni współczynników p_i^s jest wypukły.

D o w ó d: jeżeli punkty $P^1 = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_m^s)$; $P^2 = (p_1^{s'}, p_2^{s'}, \dots, p_m^{s'})$ należą do obszaru dostosowania, tzn. dana konstrukcja dostosowuje się do programu

$$-\alpha_i p_i^s < p_i < p_i^s$$

oraz do programu

$$-\alpha_i p_i^{s'} < p_i < p_i^{s'},$$

to wtedy według twierdzenia Melana istnieją dwa pola naprężeń resztkowych $\varrho_{ij}^1(x)$, $\varrho_{ij}^2(x)$ takie, że dla każdego punktu tej konstrukcji zachodzi

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \varphi \left[\sum_{r=1}^m \beta_r p_r^s \sigma_{ij}^r(x) + \varrho_{ij}^1(x) \right] &\leq k, \\ \varphi \left[\sum_{r=1}^m \beta_r p_r^{s'} \sigma_{ij}^r(x) + \varrho_{ij}^2(x) \right] &\leq k, \end{aligned}$$

gdzie σ_{ij}^r oznaczają naprężenia sprężyste w konstrukcji dla $p_1 = p_2 = \dots = p_{r-1} = p_{r+1} = 0$, $p_r = 1$, zaś $\beta_r = 1$ lub $\beta_r = -\alpha_r$.

Warunki (3.7) zachodzą dla dowolnej kombinacji współczynników β_r . Wobec (1.8) otrzymujemy

$$\varphi \left[\sum_{r=1}^m \beta_r (\lambda p_r^s + (1-\lambda) p_r^{s'}) \sigma_{ij}^r + \lambda \varrho_{ij}^1 + (1-\lambda) \varrho_{ij}^2 \right] \leq k,$$

to zaś wskazuje, że punkt $P = \lambda P^1 + (1-\lambda) P^2$ należy do obszaru dostosowania.

Twierdzenie to wynika też jako wniosek z twierdzenia 1, jeżeli całą konstrukcję potraktować jako przekrój, jednakże autor sądzi, że czytelnika może zainteresować dowód nie korzystający z pojęcia powierzchni sprężystej.

Przykłady wykorzystania przytoczonych twierdzeń do efektywnego obliczania obszarów dostosowywania się płyt i ram znaleźć można w pracach [18, 20].

4. Powierzchnie sprężyste w przestrzeniach o mniejszej liczbie wymiarów

Powierzchnie graniczne, dla przypadku gdy niektóre z uogólnionych sił lub uogólnionych odkształceń znikają, były badane w pracy [10]. Stwierdzono tam, w oparciu o stowarzyszone prawo płynięcia, że:

1) jeżeli jedna z sił uogólnionych zeruje się, np. $Q_1 = 0$, to wtedy odpowiednią powierzchnią graniczną w podprzestrzeni $m-1$ wymiarowej otrzymuje się przez przecięcie oryginalnej powierzchni granicznej płaszczyzną $Q_1 = 0$;

2) jeżeli zeruje się jedno z odkształceń uogólnionych, np. $q_1 = 0$, wtedy $m-1$ wymiarowa powierzchnia graniczna jest rzutem powierzchni m -wymiarowej na płaszczyznę $Q_1 = 0$.

W przypadku powierzchni sprężystych w obu wypadkach nową $m-1$ wymiarową powierzchnią sprężystą otrzymuje się przez przecięcie płaszczyzną $Q_1 = 0$ w przypadku 1), zaś płaszczyzną $B_{ij} Q_j = 0$ w przypadku 2), pierwotnej m -wymiarowej powierzchni sprężystej. Związek $q_i = B_{ij} Q_j$ jest wyrażeniem prawa Hooke'a w wielkościach uogólnionych.

W rezultacie tej różnicy, dla pewnych przypadków otrzymać można sytuację, że pewna powierzchnia sprężysta w m -wymiarowej przestrzeni sił uogólnionych ma punkty wspólne z powierzchnią graniczną, nie będzie ich natomiast miała po przejściu do $m-1$ wymiarowej podprzestrzeni.

Literatura cytowana w tekście

1. M. GRÜNING, *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmten Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Springer, Berlin 1926.
2. H. BLEICH, *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes*, Bauingenieur **13**, (1932), 261.
3. E. MELAN, *Die Spannungszustand eines Mises-Henkyscher Kontinuums bei verädlicher Belastung*, Sitz.-Ber. Ak. Wiss., Wien, Abt. IIa, **147**, (1938), 73.
4. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ing. Archiv, **9**, (1938), 116–126.
5. W. T. KOITER, *A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures*, Proc. Kon. Nederl. Ak. Wet. B, **59**, (1956), 24–34.
6. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, North Holland, Amsterdam 1960.
7. W. PRAGER, *Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature*, Mem. Symp. Plast. Sci. Constr., Varenna 1956, 239–244.
8. В.И. РОЗЕНБЛЮМ, *О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, Изв. АН. СССР, ОТН, Мех. Маш., 1957, № 7, 136–138.
9. В.И. РОЗЕНБЛЮМ, *К анализу приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел*, ПМТФ, № 5, 1965, 98–101.
10. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, AMS 1, **12**, (1960), 29–53.
11. P. G. HODGE, JR, CHANG-KUEI SUN, *General properties of yield-point load surfaces*, J. Appl. Mech., March 1968, 107–110.
12. Z. MRÓZ, *On forms of constitutive laws*, AMS 1, **18**, (1966).
13. A. SAWCZUK, *On incremental collapse of shells under cyclic loading*, Proc. IUTAM Symp. Theory of Thin Shells (Copenhagen 1967) Springer, Berlin 1969, 328–340.
14. A. SAWCZUK, *Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells*, J. Mech. Phys. Solids, No 4, (1969).
15. P. G. HODGE JR, A. J. KALINOWSKI, *Shakedown interaction curve for a circular arch*, DOMITT Rep. No 1–36, August 1967.
16. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, AMS 2, **18**, (1966), 227–238.
17. J. A. KÖNIG, *A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli*, Bull. Ac. Pol., Ser. Sci. Techn., **17**, 3 (1969), 161–165.
18. J. A. KÖNIG, *Shakedown theory of plates*, AMS, 5, **21**, (1969), 623–637.
19. J. A. KÖNIG, *Shakedown of strainhardening structures*, ZAMP (w druku).
20. J. A. KÖNIG, *Shakedown of frames and arches with arbitrary cross-sections*, (w przygotowaniu).

Резюме

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИСПОСОБЛИВАЕМОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ К ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ НАГРУЗКАМ

В работе [18] продемонстрирован метод, по возможности наиболее точного, применения теоремы Мелана о приспособляемости, в тех случаях, когда теория рассматриваемой конструкции выражается через обобщенные величины, и введено понятие упругой поверхности, с помощью кото-

рого теорема формулировалась соответствующим образом обобщенном виде. В настоящей работе сведены те свойства выше упомянутых поверхностей, которые могут найти прикладное применение.

S u m m a r y

BASIC THEOREMS ON SHAKEDOWN OF ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES
UNDER TIME-DEPENDENT LOADINGS

Paper [18] presented how to apply the Melan theorem when the theory of structures considered is formulated in terms of generalized stresses and generalized strains. There the notation of elastic locus has been introduced to express the appropriate generalized theorem. Some essential properties of these elastic loci which may be useful in applications to particular groups of structures are collected in the present paper.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1969 r.

PEWNE PROBLEMY OPTIMALNEGO KSZTAŁTOWANIA PRĘTA ŚCISKANEGO SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Niniejsza praca zawiera rozwiązania dwóch zagadnień: 1) optymalnego parametrycznego kształtowania prętów sprężystych (o określonym sposobie zmiany przekroju poprzecznego) ściskanych siłą skierowaną do bieguna, 2) optymalnego wariacyjnego kształtowania prętów ściskanych siłą skierowaną do bieguna, w przypadku gdy znajdują się one w sprężysto-plastycznym zakresie pracy.

Stosowanie optymalizacji parametrycznej może być podyktowane względami technologicznymi (łatwością wykonania). Poszukujemy tu takiej wartości pewnego parametru (na przykład kąta wierzchołkowego stożka), wyróżniającego kształt pręta spośród pewnej klasy prętów tak, aby otrzymać największy zysk na ciężarze (objętości), wynikający z zastąpienia pręta przyrządkowego — optymalnym, przenoszącym tę samą siłę krytyczną. Kształt optymalnego pręta stożkowego, ściskanego osiowo, został podany przez ŻYCKOWSKIEGO [10] dla zakresu sprężystego i sprężysto-plastycznego, a niekonserwatywne zagadnienie optymalizacji prętów stożkowych ściskanych siłą podśledzącą jest rozwiązane w pracy GAJEWSKIEGO [2]. Sama metoda kształtowania parametrycznego, w zastosowaniu do różnych problemów, omówiona jest szerzej w pracach KRZYSIA i ŻYCKOWSKIEGO [5, 6], a absolutnie optymalne (w sensie rachunku wariacyjnego) kształty prętów sprężystych, jednorodnych i niejednorodnych, ściskanych siłą skierowaną do bieguna, podano w pracy GAJEWSKIEGO i ŻYCKOWSKIEGO [3]. W pracy tej omówiono szerzej literaturę odnoszącą się do problemów optymalizacji prętów ściskanych.

Drugi problem należy do zagadnień optymalizacji absolutnej, przeprowadzanej metodami rachunku wariacyjnego, a polegającej na poszukiwaniu pręta o najmniejszej objętości, przenoszącego daną siłę krytyczną. Poszukujemy tu zatem minimum funkcjonu — objętości pręta, przy dodatkowym warunku w postaci równania różniczkowego ugiętej osi pręta ściskanego. Taki sposób postępowania zastosowano w pracach CZENCOWA [1], GAJEWSKIEGO i ŻYCKOWSKIEGO [3] i innych — do optymalizacji kształtu prętów sprężystych, a także w pracy KRZYSIA [6] do optymalizacji utwierdzonego pręta cienkościennego o profilu zamkniętym, w sprężysto-plastycznym zakresie pracy.

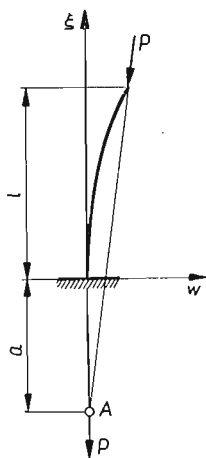
Do rozwiązania powyższych zagadnień wystarczające jest stosowanie statycznego kryterium stateczności.

2. Optymalne kształtowanie parametryczne

2.1. Sformułowanie zagadnienia. Wspornikowy pręt przedstawiony na rys. 1 jest obciążony siłą P , o kierunku zmieniającym się podczas wybočenja, lecz skierowaną do stałego punktu A — bieguna. Punkt ten jest położony na osi nieodkształconego pręta w odległości a od punktu utwierdzenia, przy czym odległość ta jest liczona jako dodatnia, gdy A znajduje się poniżej utwierdzenia. W tej części pracy zakładamy, że pręt jest sprężysty i jednorodny, o module Younga E_0 , a moment bezwładności jego przekroju poprzecznego zmienia się według wzoru

$$(2.1) \quad J(x) = J_0(1 - \varepsilon x)^n = J_0 g(x), \quad g(x) = (1 - \varepsilon x)^n.$$

J_0 jest momentem bezwładności przekroju utwierdzonego (dla $x = 0$), ε jest parametrem charakteryzującym zbieżność pręta, $x = \xi/l$ jest zmienną bezwymiarową. Dowolny parametr ε może się zmieniać w przedziale $(-\infty, +1)$. Zadaniem naszym jest znalezienie



Rys. 1

takiej wartości parametru ε , dla której objętość pręta jest najmniejsza przy danej sile krytycznej powodującej utratę stateczności. Następuje tu utrata stateczności przez wybočenje i statyczne kryterium stateczności jest wystarczające do rozwiązania zagadnienia.

Skorzystamy zatem ze znanego równania linii ugięcia badanego pręta

$$(2.2) \quad [(1 - \varepsilon x)^n y'''] + \beta y'' = 0,$$

w którym przyjęto oznaczenia: $y = w/l$, $\beta = Pl^2/EJ_0$, gdzie w jest ugięciem pręta w odległości ξ od początku układu współrzędnych. Równania (2.2) należy uzupełnić warunkami brzegowymi [3]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y(0) &= 0, & g(1)y''(1) &= 0, \\ y'(0) &= 0, & \left[(gy'')' + \beta \left(y' - \frac{y}{1 + \alpha} \right) \right]_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzony tu bezwymiarowy parametr

$$(2.4) \quad \alpha = \frac{a}{l}$$

określa położenie bieguna, do którego zwrócona jest siła. Całkując dwukrotnie równanie różniczkowe (2.2) otrzymujemy

$$(2.5) \quad (1 - \varepsilon x)^n y'' + \beta y = C_1 + C_2 x,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi całkowania. Wprowadzamy następnie nową zmienną zależną

$$(2.6) \quad v(x) = y(x) - \frac{C_1}{\beta} - \frac{C_2}{\beta} x.$$

Z równania (2.5) i z warunków brzegowych (2.3) otrzymujemy

$$(2.7) \quad (1 - \varepsilon x)^n v'' + \beta v = 0,$$

$$(2.8) \quad v(1) = 0, \quad v(0) - \alpha v'(0) = 0.$$

Całka ogólna równania (2.7) jest znana dla dowolnych wartości wykładnika n i wyraża się przez funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, rzędu ν , J_ν i Y_ν ,

$$(2.9) \quad v(x) = (1 - \varepsilon x)^{1/2} Z_\nu \left[\frac{2}{2-n} \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon} (1 - \varepsilon x)^{\frac{2-n}{n}} \right],$$

$$Z_\nu(x) = A_1 J_\nu + A_2 Y_\nu, \quad \nu = \frac{1}{2-n}, \quad n \neq 2.$$

Dla $n = 2$ i $n = 4$ rozwiązania równania (2.7) wyrażają się przez funkcje elementarne i są podane dalej. Stałe całkowania A_1 i A_2 należy wyznaczyć korzystając z warunków brzegowych (2.8). Podstawiając (2.9) do (2.8) otrzymujemy układ dwóch jednorodnych równań liniowych na stałe A_1 i A_2 , który ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy wyznacznik tego układu jest równy zeru. Warunek ten pozwala obliczyć siłę krytyczną β w zależności od parametrów ε i α z następującego równania uwikłanego

$$(2.10) \quad F(\beta, \varepsilon, \alpha) = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \varepsilon \right) [J_\nu(0)Y_\nu(1) - J_\nu(1)Y_\nu(0)] -$$

$$-\alpha [J'_\nu(0)Y_\nu(1) - J_\nu(1)Y'_\nu(0)] = 0.$$

W równaniu tym

$$Z'_\nu(1) = \frac{dZ_\nu}{dx} \Big|_{x=1}, \quad Z_\nu(1) = Z_\nu \left[\frac{2}{2-n} \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon} (1 - \varepsilon)^{\frac{2-n}{n}} \right];$$

podobnie dla $x = 0$.

2.2. Optimalizacja parametryczna. Obliczenia przebiegają tu analogicznie do przedstawionych w pracy [2]; przyjmujemy, że powierzchnia przekroju poprzecznego jest związana z momentem bezwładności wzorem

$$(2.11) \quad A(x) = A_0 g^*(x),$$

w którym A_0 oznacza pole powierzchni przekroju utwierdzonego, a wykładnik κ charakteryzuje kształt pręta i sposób wyoboczenia. Gdy $\kappa = 1$, pręt jest płasko-zbieżny i wyoboczenie następuje z płaszczyzny zbieżności, gdy $\kappa = 0,5$ — pręt jest wszechstronnie równomiernie zbieżny (ostrosłup lub stożek), wreszcie gdy $\kappa = 1/3$ — pręt jest płasko-zbieżny, lecz wyoboczenie zachodzi w płaszczyźnie zbieżności. Obliczamy objętość pręta

$$(2.12) \quad V = \frac{1}{\kappa n + 1} A_0 l \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon}$$

oraz znajdujemy stosunek objętości (2.12) i objętości pręta pryzmatycznego $V^{(0)}$ o długości l i powierzchni przekroju $A^{(0)}$

$$(2.13) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1}{\kappa n + 1} \frac{A_0}{A^{(0)}} \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon}.$$

Żądamy teraz, aby badany pręt (o zbieżności ε) przenosił tę samą siłę krytyczną, co pręt pryzmatyczny. Otrzymujemy stąd

$$(2.14) \quad \beta \frac{EJ_0}{\rho^2} = \beta^{(0)} \frac{EJ^{(0)}}{\rho^2}$$

lub

$$(2.15) \quad \frac{A_0}{A^{(0)}} = \left(\frac{J_0}{J^{(0)}} \right)^\kappa = \left(\frac{\beta^{(0)}}{\beta} \right)^\kappa.$$

Po podstawieniu (2.15) do (2.13) mamy

$$(2.16) \quad \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{1}{\kappa n + 1} \left(\frac{\beta^{(0)}}{\beta} \right)^\kappa \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon}.$$

Wynika stąd, że dla ustalonej wartości parametru α , stosunek objętości zależy tylko od zbieżności pręta ε i należy się spodziewać, że dla pewnej wartości $\varepsilon = \varepsilon_{\text{opt}}$ będzie on najmniejszy. Zysk na materiale jest największy gdy

$$(2.17) \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V}{V^{(0)}} \right) = 0.$$

Ponieważ występująca we wzorze (2.16) siła krytyczna $\beta^{(0)}$ jest tylko funkcją α i nie zależy od ε , a siła krytyczna β jest określona równaniem przestępnym (2.10), więc po wykonaniu różniczkowania w (2.17) i wyrażeniu pochodnej $\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon}$ przez pochodne cząstkowe funkcji $F(\beta, \varepsilon, \alpha)$ (2.10) otrzymujemy

$$(2.18) \quad \kappa \frac{1 - (1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1}}{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{(1 - \varepsilon)^{\kappa n + 1} + (\kappa n + 1)\varepsilon(1 - \varepsilon)^{\kappa n} - 1}{\varepsilon^2} \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

$$F(\alpha, \beta, \varepsilon) = 0.$$

Jest to układ dwóch równań przestępnych dla poszukiwanego parametru zbieżności pręta ε_{opt} i siły krytycznej β w zależności od współczynnika α . Jego rozwiązanie dla dowolnych wartości wykładnika n jest bez użycia maszyn cyfrowych praktycznie niewykonalne. Jednak przy pewnych wartościach n funkcje Bessela przechodzą w funkcje elemen-

tarne i ugięcie pręta $v(x)$ wyraża się prostszym wzorem. W dalszym ciągu zajmujemy się tylko takimi przypadkami; jeden z nich posiada szczególne znaczenie praktyczne, bowiem prowadzi do optymalizacji w klasie prętów stożkowych.

2.3. Przypadek szczególny $n = 2$. Gdy $n = 2$, rozwiązaniem równania (2.7) jest funkcja

$$(2.19) \quad v(x) = (1 - \varepsilon x)^{1/2} \{ A_1 \sin[\gamma \ln(1 - \varepsilon x)] + A_2 \cos[\gamma \ln(1 - \varepsilon x)] \},$$

w której wprowadzono oznaczenie

$$(2.20) \quad \gamma = \left(\frac{\beta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \right)^{1/2}.$$

Wykorzystanie warunków brzegowych (2.8) oraz obliczenie wyznacznika otrzymanych równań liniowych i jednorodnych na stałe A_1 i A_2 prowadzi do równania

$$(2.21) \quad F_1(\alpha, \beta, \varepsilon) = \operatorname{tg}[\gamma \ln(1 - \varepsilon)] - \frac{2\alpha\gamma\varepsilon}{2 + \alpha\varepsilon} = 0.$$

W szczególnych przypadkach równanie to przechodzi w znane rozwiązania uzyskane wcześniej; na przykład gdy $\alpha \rightarrow \pm \infty$ (siła eulerowska ściskająca pręt wspornikowy niepryzmatyczny), siłę krytyczną wyznaczmy z równania przestępnego [9]

$$(2.22) \quad \operatorname{tg}[\gamma \ln(1 - \varepsilon)] - 2\gamma = 0,$$

a gdy $\varepsilon = 0$ (pręt pryzmatyczny) otrzymujemy [9]

$$(2.23) \quad \operatorname{tg} \sqrt{\beta^{(0)}} + \alpha \sqrt{\beta^{(0)}} = 0.$$

Optymalną wartość parametru ε dla pręta równomiernie wszechstronnie zbieżnego ($\kappa = 0,5$), a więc pręta o liniowo zmieniającej się powierzchni przekroju, obliczymy na podstawie (2.18) i (2.21) z układu równań

$$(2.24) \quad \begin{aligned} (2 - \varepsilon) \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} - 2\beta \frac{\partial F_1}{\partial \beta} &= 0, \\ F_1(\alpha, \beta, \varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań nie będziemy się dalej zajmowali, natomiast zbadamy szczegółowo przypadek ważniejszy z praktycznego punktu widzenia, mianowicie optymalizację prętów stożkowych.

2.4. Optymalizacja prętów stożkowych, $n = 4$, $\kappa = 0,5$. Przyjmując $\kappa = 0,5$ i $n = 4$, a więc pręt równomiernie zbieżny o liniowo zmieniającej się długości boku lub średnicy, otrzymujemy z równania (2.7)

$$(2.25) \quad v(x) = A_1(1 - \varepsilon x) \sin \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon(1 - \varepsilon x)} + A_2(1 - \varepsilon x) \cos \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon(1 - \varepsilon x)}.$$

Podstawiając (2.25) do warunków brzegowych (2.8) oraz przyrównując wyznacznik główny układu równań na A_1 i A_2 do zera, dostajemy

$$(2.26) \quad F_2(\alpha, \beta, \varepsilon) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1 - \varepsilon} + \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\alpha} \sqrt{\beta} = 0.$$

Gdy $\alpha \rightarrow \pm \infty$, (2.26) przechodzi w znane równanie [9]

$$(2.27) \quad \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\varepsilon} + \frac{\sqrt{\beta}}{\varepsilon} = 0.$$

Gdy $\alpha = 0$ (siła eulerowska ściskająca pręt dwuprzegubowy), siła krytyczna jest równa $\beta = (1-\varepsilon)^2 \pi^2$, a gdy $\varepsilon = 0$ — otrzymujemy (2.23).

Dobór parametru ε_{opt} , przy którym stosunek objętości pręta stożkowego do objętości pręta przyrmatycznego jest ekstremalny, przeprowadzamy na podstawie równań (2.18), w których przyjmujemy $\kappa = 0,5$, $n = 4$, $F(\alpha, \beta, \varepsilon) = F_2(\alpha, \beta, \varepsilon)$

$$(2.28) \quad (3-3\varepsilon+\varepsilon^2) \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} + 2(2\varepsilon-3)\beta \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{1+\varepsilon\alpha} \sqrt{\beta} = 0.$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych $\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon}$ i $\frac{\partial F_2}{\partial \beta}$ układ (2.28) możemy zapisać w postaci

$$(2.29) \quad \beta = \frac{\alpha^2(3-6\varepsilon+2\varepsilon^2) + \alpha(3-8\varepsilon+3\varepsilon^2) - \varepsilon(2-\varepsilon)}{\varepsilon(2-\varepsilon)^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{1+\varepsilon\alpha} \sqrt{\beta} = 0.$$

Układ powyższych równań rozwiązywano metodą graficzną; zakładano wartość parametru α i obliczano z pierwszego równania (2.29) funkcję $\beta = \beta(\varepsilon)$. Funkcję tę wstawiano do drugiego równania (2.29), otrzymując w ten sposób jedno równanie przestępne o niewiadomej ε .

Gdy $\alpha = 0$ i $\alpha \rightarrow -1$, rozwiązania uzyskano na drodze rozwinięcia wielkości α , β , ε w odpowiednie szeregi potęgowe. Tak więc dla $\alpha \rightarrow 0$ można parametr ε rozwinąć w szereg potęgowy względem α . Z równań (2.29) i (2.23) otrzymujemy

$$(2.30) \quad \varepsilon = \frac{3}{2}\alpha - \frac{27}{8}\alpha^2 + \dots,$$

$$\beta = \pi^2(1-5\alpha+21\alpha^2 + \dots),$$

$$\sqrt{\beta^{(0)}} = \pi(1-\alpha+\alpha^2 + \dots).$$

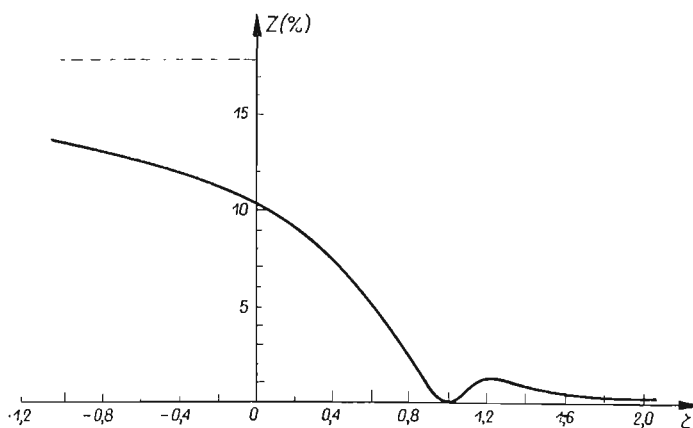
Zysk na materiale, obliczony za pomocą wzoru (2.16), jest wobec tego równy

$$(2.31) \quad Z = 1 - \frac{V}{V^{(0)}} = \frac{3}{4}\alpha^2 + \dots, \quad \text{gdy } \alpha \rightarrow 0.$$

W przypadku, gdy α dąży do -1 przez wartości mniejsze od -1 okazuje się, że siła krytyczna dąży do zera. Rozwijamy tu parametry α i ε na szeregi potęgowe względem β

$$(2.32) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \dots, \quad \alpha = -1 + \alpha_1\beta + \dots,$$

które wstawione do równań (2.29) pozwalają wyznaczyć wartości $\varepsilon_0 = 0,56574$ oraz $\frac{V}{V^{(0)}} = \frac{3-3\varepsilon_0+\varepsilon_0^2}{3\sqrt{1-\varepsilon_0}} = 0,82087$, a tym samym zysk na materiale $Z = 17,913\%$



Rys. 2

Wyniki liczbowe przedstawiono w tablicy 1 i na rys. 2.

Tablica 1

ζ	α	ε_{opt}	β_{opt}	$\beta^{(0)}$	$Z(\%)$
$-\infty$	-1,000	0,56574	0,000	0,000	17,91
-20,000	-1,050	0,557	0,062	0,141	17,50
-10,000	-1,100	0,545	0,120	0,268	17,23
-5,000	-1,200	0,533	0,217	0,483	16,27
-2,000	-1,500	0,506	0,433	0,935	14,86
-1,000	-2,000	0,481	0,645	1,357	13,51
-0,500	-3,000	0,459	0,852	1,753	12,31
0,000	$\mp\infty$	0,4204	1,252	2,467	10,36
0,3333	2,000	0,374	1,809	3,367	8,21
0,4000	1,500	0,361	1,980	3,637	7,45
0,5000	1,000	0,337	2,31	4,120	6,38
0,6667	0,500	0,280	3,18	5,240	4,24
0,8333	0,200	0,185	4,97	7,044	1,61
0,9091	0,100	0,117	6,53	8,197	0,55
1,0000	0,000	0,000	π^2	π^2	0,00
1,1111	-0,100	-0,156	16,58	12,08	0,62
1,2500	-0,200	-0,187	21,12	14,36	1,18
1,4285	-0,300	-0,144	21,69	16,16	0,63
2,0000	-0,500	-0,0718	21,12	18,27	0,17
3,3333	-0,700	-0,0317	20,63	19,34	0,07
$+\infty$	-1,000	0,0000	20,1906	20,1906	0,00

Ponieważ funkcje $\varepsilon_{opt}(\alpha)$, $\beta_{opt}(\alpha)$, $\beta^{(0)}(\alpha)$ i $Z(\alpha)$ mają punkt nieciągłości dla $\alpha = -1$, więc przedstawiono je w zależności od parametru $\zeta = 1/(1+\alpha)$. Jak widać z wykresu, największy zysk na materiale otrzymujemy wtedy, gdy siła jest skierowana do bieguna położonego na przedłużeniu osi pręta, w niedużej odległości od jego swobodnego końca (dla $\alpha < -1$). Wynosi on prawie 18% wobec 10% zysku dla siły eulerowskiej ($\alpha \rightarrow \pm\infty$).

3. Optymalne kształtowanie prętów ściskanych w zakresie sprężysto-plastycznym

3.1. Rozwiązanie ogólne. Obecnie znajdziemy optymalny kształt pręta jednostronnie utwierdzonego, ściskanego siłą skierowaną do bieguna w przypadku, gdy siła krytyczna powoduje w całym pręcie naprężenia większe od granicy proporcjonalności. Dalsze rozważania oprzemy na prostej teorii wyboczenia sprężysto-plastycznego podanej przez SHANLEYA [8]. W odniesieniu do stateczności prętów ściskanych teoria ta sprowadza się do zastąpienia modułu Younga E w równaniu linii ugięcia dla zakresu sprężystego przez moduł styczny $\bar{E} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$.

Równanie linii ugięcia pręta obciążonego w sposób przedstawiony na rys. 1 jest więc następujące:

$$(3.1) \quad (\bar{E}Jw'')'' + Pw'' = 0, \quad \left(w' = \frac{dw}{d\xi} \right).$$

Jeśli w dalszym ciągu wprowadzimy oznaczenia:

$$(3.2) \quad y = \frac{w}{l}, \quad x = \frac{\xi}{l}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{EJ_0}, \quad g(x) = \frac{J(x)}{J_0}, \quad \varphi(x) = \frac{A(x)}{A_0} = g^z$$

$$f(x) = \frac{\bar{E}(x)}{E},$$

w których A_0, J_0, E oznaczają odpowiednio powierzchnię przekroju, moment bezwładności przekroju i moduł Younga w pewnym, na ogół dowolnie wybranym punkcie pręta $x = x_0$, to równanie (3.1) możemy zapisać w postaci

$$(3.3) \quad [f(x)g(x)y'']'' + \beta y'' = 0, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

Całkując (3.3) dwukrotnie i wprowadzając nową zmienną zależną $v(x)$ określoną wzorem (2.6), otrzymujemy

$$(3.4) \quad f(x)g(x)v'' + \beta v = 0,$$

lub

$$(3.5) \quad G(\varphi) + \frac{v}{\varphi''} = 0,$$

gdzie funkcję $G(\varphi)$ zdefiniowano następująco:

$$(3.6) \quad G(\varphi) = \frac{1}{\beta} f_1(\varphi)g(\varphi) = \frac{1}{\beta} \varphi^{1/z} f_1(\varphi).$$

W funkcji $G(\varphi)$ zawarta jest zależność od zmiennej x poprzez zależność od funkcji $\varphi(x)$ charakteryzującej powierzchnię przekroju poprzecznego pręta. W sposób istotny zależy ona od przyjętego prawa fizycznego $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, a więc mnożnika $f_1(\varphi)$ w równaniu (3.6). Problem optymalizacji polega w tym przypadku na znalezieniu takiej funkcji $g(x)$ lub $\varphi(x)$, aby objętość pręta

$$(3.7) \quad V = A_0 l \int_0^1 \varphi(x) dx = A_0 l \int_0^1 g^* dx$$

była minimalna.

Mamy tu zatem zagadnienie wariacyjne polegające na poszukiwaniu ekstremum funkcjonału (3.7) z warunkiem pobocznym w postaci równania różniczkowego (3.4) lub (3.5). Z równania (3.5) wyznaczamy funkcję φ w zależności od argumentu $(-v/v'')$ i wstawiamy do (3.7)

$$(3.8) \quad V = A_0 l \int_0^1 \psi \left(-\frac{v}{v''} \right) dx,$$

gdzie ψ jest funkcją odwrotną do $G(\varphi)$.

Opierając się na metodzie CZENCOWA [1] przedstawionej również w pracy [3] otrzymujemy (po rozpisaniu równania Eulera-Lagrange'a)

$$(3.9) \quad \begin{aligned} vt' - v't &= C, \\ t &= \dot{\psi} \frac{v}{v''^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{d\left(-\frac{v}{v''}\right)}, \end{aligned}$$

gdzie C jest pewną stałą.

Równanie (3.9) jest rzędu czwartego i dwa warunki brzegowe (2.8) nie pozwalają na wyznaczenie wszystkich stałych całkowania. Ponieważ jedna ze stałych może być dowolna, więc pozostaje do wyznaczenia tylko jedna stała. Odpowiada to zagadnieniu wariacyjnemu o jednym stopniu swobody na jednym końcu przedziału. Odpowiedni w naszym przypadku warunek optimum (wobec $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$) przybiera postać [7, 11]

$$(3.10) \quad - \left[\left(\psi_{v''} - \frac{d}{dx} \psi_{v'''} \right)_0 \delta v_0 + (\psi_{v''})_0 \delta v'_0 \right] + \left[\left(\psi_{v''} - \frac{d}{dx} \psi_{v'''} \right)_1 \delta v_1 + (\psi_{v''})_1 \delta v'_1 \right] = 0.$$

Wskaźniki 0 i 1 we wzorze (3.10) odnoszą się do wartości funkcji lub wariacji dla $x = 0$ i $x = 1$. Obliczając odpowiednie pochodne cząstkowe $\left(\psi_{v''} = 0, \quad \psi_{v'''} = \dot{\psi} \frac{v}{v''^2} = t \right)$ i korzystając z równania (3.9) dostajemy równanie

$$(3.11) \quad (C + v'_0 t_0) \frac{\delta v_0}{v_0} - (C + v'_1 t_1) \frac{\delta v_1}{v_1} - t_0 \delta v'_0 + t_1 \delta v'_1 = 0,$$

które pozwala obliczyć nieokreśloną dotychczas stałą C . Z uwagi na dowolność stałego mnożnika w funkcji $v(x)$ możemy przyjąć $v(0) = 1$, czyli $\delta v_0 = 0$, a z warunków brzegowych (2.8) wynika ponadto $\delta v'_0 = 0$ i $\delta v_1 = 0$. Iloraz $\delta v_1/v_1$ musimy zastąpić przez $\delta v'_1/v'_1$

(stosując regułę de l'Hospitala) ponieważ zarówno $\delta v_1 = 0$, jak i $v_1 = 0$. Jak więc wynika z równania (3.11), stała C musi być równa zero, gdy siła ściskająca jest skierowana do bieguna. Dowód jest ważny dla dowolnego, dostatecznie regularnego prawa fizycznego $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Wiedząc, że stała C jest równa zero możemy scałkować równanie (3.9) i napisać je w postaci

$$(3.12) \quad v'^2 = C_1 \dot{\psi}, \quad C_1 \text{ — dowolna stała}$$

lub też, w ślad za KRZYSIEM [6], wyrazić rozwiązanie w postaci funkcji odwrotnej $x = x(\varphi)$, w zależności od parametru określającego przekrój poprzeczny oraz przekształcić równania (3.12) i (3.5) do postaci

$$(3.13) \quad x_\varphi'' + \frac{3GG''^2 - 2GG'G'''}{2(GG'' - 2G'^2)G'} x_\varphi' + \frac{2G'}{GG'' - 2G'^2} x_\varphi'^3 = 0.$$

Oczywiście charakterystyka materiału wpływa na efektywność rozwiązania równania (3.12) lub (3.13); spełniając postulat prostoty przyjmiemy za KRZYSIEM [6] taki model ciała, dla którego funkcja $G(\varphi)$ jest liniowa (a tym samym funkcja odwrotna ψ jest również liniowa)

$$(3.14) \quad G(\varphi) = \frac{1}{\beta}(M + N\varphi), \quad \psi\left(-\frac{v}{v''}\right) = -\frac{M}{N} + \frac{\beta}{N}\left(-\frac{v}{v''}\right),$$

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{N} = \text{const.}$$

Tutaj M, N — pewne stałe.

Porównując (3.6) i (3.14) otrzymujemy następujący charakter zmienności modułu Younga:

$$(3.15) \quad f_1(\varphi) = \frac{M + N\varphi}{\varphi^{1/\kappa}},$$

a rozwiązując równanie (3.12) i korzystając z warunków brzegowych (2.8) znajdujemy funkcję linii ugięcia pręta

$$(3.16) \quad v(x) = C_2 \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}x - x^2 \right), \quad C_2 \text{ — dowolna stała.}$$

Bezwymiarowa powierzchnia przekroju poprzecznego jest tu równa

$$(3.17) \quad \varphi(x) = \frac{\beta}{N} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}x - x^2 \right) - \frac{M}{\beta} \right].$$

Przyjmując, że powierzchnia przekroju utwierdzonego jest równa A_0 , czyli że $\varphi(0) = 1$, otrzymujemy z (3.17) równanie określające siłę krytyczną β w zależności od położenia bieguna oraz stałych M i N (które również zależą od β)

$$(3.18) \quad \beta \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} - (M + N) = 0.$$

Przejdziemy obecnie do przedstawienia rozwiązań szczegółowych w trzech przypadkach: $\kappa = 1$, $\kappa = 1/2$ i $\kappa = 1/3$.

3.2. Pręt płasko-zbieżny, $\kappa = 1$. Sposób zmiany modułu Younga jest tu następujący

$$(3.19) \quad f_1(\varphi) = \frac{M + N\varphi}{\varphi};$$

jest to zależność od powierzchni przekroju φ . Jak łatwo sprawdzić, wzór ten otrzymujemy, gdy zależność \bar{E} od σ jest liniowa

$$(3.20) \quad \bar{E} = E \frac{Q - \sigma}{Q - S};$$

S oznacza tu granicę proporcjonalności, Q — granicę plastyczności, E — moduł Younga.

Wzór (3.20) prowadzi do następującej zależności σ od ε

$$(3.21) \quad \sigma = Q - (Q - S) \exp \left(- \frac{E}{Q - S} \varepsilon + \frac{S}{Q - S} \right).$$

Podstawiając w (3.20), $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0 \varphi}$ oraz $P = \beta \frac{E J_0}{l^2}$, mamy

$$(3.22) \quad f_1(\varphi) = \frac{\varphi - \beta \delta}{\varphi} \delta_1, \quad \text{gdzie } \delta = \frac{E J_0}{Q A_0 l^2}, \quad \delta_1 = \frac{Q}{Q - S}.$$

Z porównania (3.22) i (3.19) obliczamy stałe M i N ,

$$(3.23) \quad M = -\beta \delta \delta_1, \quad N = \delta_1,$$

a ze wzoru (3.18) wyznaczamy siłę krytyczną

$$(3.24) \quad P_k = \frac{2\delta_1}{2\delta\delta_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}} \frac{E J_0}{l^2}.$$

Kształt pręta jest wobec tego opisany równaniem

$$(3.25) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{1}{\alpha + 2(1 + \alpha)\delta\delta_1} x - \frac{1 + \alpha}{\alpha + 2(1 + \alpha)\delta\delta_1} x^2.$$

Przykład 1. Siła eulerowska dla pręta jednostronnie utwierdzonego, $\alpha \rightarrow \pm\infty$;

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{1 + 2\delta\delta_1} x^2, \quad \beta_k = \frac{2\delta_1}{1 + 2\delta\delta_1}, \quad v(x) = C_2(1 - x^2).$$

Przykład 2. Siła eulerowska dla pręta dwuprzegubowego, $\alpha = 0$;

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2\delta\delta_1} x - \frac{1}{2\delta\delta_1} x^2, \quad \beta_k = \frac{1}{\delta}, \quad v(x) = C_2 x(1 - x).$$

Wzory powyższe nie są słuszne dla $-1 \leq \alpha < 0$, gdy biegun do którego zwrócona jest siła leży w obrębie pręta. Linia ugięcia musiałaby się tu składać z dwóch odcinków parabol o przeciwnych krzywiznach (podobnie jak w pracy [3]). Poza tym zakres ważności rozwiązań jest ograniczony warunkiem, aby cały pręt znajdował się w stanie sprężysto-plastycznym, a więc aby naprężenia ściskające wszędzie były większe od S . Proste obli-

czenia prowadzą do wniosku, że przekrój maksymalny w przypadku gdy $0 \leq \alpha < \infty$ jest równy

$$(3.26) \quad A_{\max} = A_0 \beta \left[\delta + \frac{1}{\delta_1} \frac{(2\alpha + 1)^2}{8(1 + \alpha)^2} \right].$$

Z warunku $\frac{P_k}{A_{\max}} \geq S$ otrzymujemy

$$(3.27) \quad \frac{h_0}{l} \geq \frac{1 + 2\alpha}{2(1 + \alpha)} \sqrt{\frac{6S}{E}},$$

gdzie h_0 oznacza wysokość przekroju poprzecznego w miejscu utwierdzenia. Natomiast, gdy siła działa w stronę bieguna, którego położenie jest wyznaczone przez nierówność: $-\infty < \alpha < -1$, otrzymujemy

$$(3.28) \quad \frac{h_0}{l} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{6S}{E}}.$$

3.3. Pręt wszechstronnie-równomiernie zbieżny, $\kappa = 0,5$. W tym niewątpliwie najważniejszym praktycznie przypadku okazuje się, że wzór Johnsona-Ostenfelda linearyzuje funkcję $G(\varphi)$. Łatwo się można o tym przekonać przyjmując $\sigma = P/A$, $P = \beta EJ_0/l^2$

$$(3.29) \quad \bar{E} = E \frac{(Q - \sigma)\sigma}{(Q - S)S} = E \frac{(QA_0\varphi - P)P}{A_0^2\varphi^2(Q - S)S} = E \frac{\varphi - \beta\delta}{\varphi^2} \beta\delta_1,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(3.30) \quad \delta = \frac{EJ_0}{QA_0l^2}, \quad \delta_1 = \frac{EJ_0}{SA_0 \left(1 + \frac{S}{Q}\right) l^2}.$$

Porównując (3.29) i (3.15) znajdziemy stałe M i N

$$(3.31) \quad M = -\beta^2 \delta \delta_1, \quad N = \beta \delta_1,$$

a z równania (3.18) wyznaczamy siłę krytyczną

$$(3.32) \quad \beta_k = \frac{2(1 + \alpha)\delta_1 - \alpha}{2(1 + \alpha)\delta\delta_1}.$$

Kształt pręta opisany jest tu wzorem

$$(3.33) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2(1 + \alpha)\delta_1} x - \frac{1}{2\delta_1} x^2.$$

Przykład 1. Siła eulerowska dla pręta jednostronnie utwierdzonego, $\alpha \rightarrow \pm\infty$;

$$\varphi = 1 - \frac{1}{2\delta_1} x^2, \quad \beta_k = \frac{2\delta_1 - 1}{2\delta\delta_1}, \quad v(x) = C_2(1 - x^2).$$

Przykład 2. Siła eulerowska dla pręta dwuprzegubowego, $\alpha = 0$;

$$\varphi = \frac{1}{\delta_1} \left(\delta_1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right), \quad \beta_k = \frac{1}{\delta}, \quad v(x) = C_2 x(1 - x).$$

Przykład 3. Siła skierowana do bieguna, $\alpha = 1/3$. Przyjmujemy pręt o długości $l = 100$ cm i powierzchni kwadratowego przekroju utwierdzonego $A_0 = 25$ cm², wykonany z materiału dla którego $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $S = 1600$ kG/cm², $Q = 2400$ kG/cm². Dla powyższych danych otrzymujemy

$$\delta = 0,1885, \quad \delta_1 = 0,821, \quad \varphi = 1 + 0,456x - 0,608x^2,$$

$$\beta_k = 4,65, \quad v(x) = C_2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - x^2 \right).$$

Kształt pręta jest bardzo zbliżony do pryzmatycznego.

Podobnie jak w p. 3.2, otrzymane wzory nie są ważne dla $-1 \leq \alpha < 0$, a ponadto zakres ich ważności jest ograniczony przez warunki

$$(3.34) \quad \frac{A_0}{l^2} \geq \frac{S \left[\frac{S}{Q} + 4\alpha(1+\alpha) \right]}{8\gamma(1+\alpha)^2 E} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \alpha < \infty,$$

albo

$$\frac{A_0}{l^2} \geq \frac{1}{2(1+\alpha)} \frac{S}{\gamma E} \quad \text{dla} \quad -\infty < \alpha < -1,$$

w których γ charakteryzuje kształt przekroju; dla kwadratu $\gamma = \frac{1}{12}$, a dla koła $\gamma = \frac{1}{4\pi}$ ($J_0 = \gamma A_0^2$).

3.4. Pręt płasko-zbieżny, $\kappa = 1/3$. Funkcja $G(\varphi)$ jest w tym przypadku liniowa, gdy prawo zmiany modułu Younga jest następujące:

$$(3.35) \quad \bar{E} = E \frac{(Q-\sigma)\sigma^2}{(Q-S)S^2} = E \frac{\varphi - \beta\delta}{\varphi^3} \beta^2 \delta_1^2,$$

gdzie

$$(3.36) \quad \delta = \frac{EJ_0}{QA_0 l^2}, \quad \delta_1 = \frac{EJ_0}{SA_0 l^2 \sqrt{1 - \frac{S}{Q}}}.$$

Podobnie jak poprzednio obliczamy stałe M i N ,

$$(3.37) \quad M = -\beta^3 \delta \delta_1^2, \quad N = \beta^2 \delta_1^2,$$

siłę krytyczną

$$(3.38) \quad \beta_k = \frac{1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\delta}{\delta_1^2} \frac{\alpha}{1+\alpha}}}{2\delta}$$

oraz kształt pręta

$$(3.39) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{\delta}{(1+\alpha)\delta_1^2 \left(1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\delta}{\delta_1^2} \frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)} x - \frac{\delta}{\delta_1^2 \left(1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\delta}{\delta_1^2} \frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)} x^2.$$

Zakres ważności powyższych wzorów jest określony przez warunki, zapewniające istnienie naprężeń większych od granicy sprężystości S w całym przecie,

$$(3.40) \quad \frac{h_0}{l} \geq \frac{\left[\frac{S}{Q} + 4\alpha(1+\alpha) \right]}{1+\alpha} \sqrt{\frac{3S}{2E[1+4\alpha(1+\alpha)]}} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \alpha < \infty,$$

albo

$$\frac{h_0}{l} \geq \sqrt{\frac{6S}{E} \frac{\alpha}{1+\alpha}} \quad \text{dla} \quad -\infty < \alpha < -1.$$

Rozwiązania nie są również ważne w przedziale $-1 \leq \alpha < 0$.

Otrzymane w drugiej części pracy rozwiązania mają bardzo prostą postać dzięki odpowiedniemu przyjęciu charakterystyk materiału $\sigma(\varepsilon)$; w p. 3.3 jest to prawo Johnsona-Ostenfelda, w p. 3.2 i 3.4 są to inne prawa, które jednak (jak to wykazał KRZYŚ [6]) w wielu przypadkach mogą dobrze aproksymować wykresy materiałów rzeczywistych. Wadą uzyskanych rozwiązań jest to, iż są one ważne tylko wtedy, gdy cały pręt znajduje się w stanie sprężysto-plastycznym, czyli naprężenia przekraczają granicę proporcjonalności S . Niestety, otrzymanie rozwiązań opisujących optymalny kształt pręta znajdującego się częściowo w stanie sprężysto-plastycznym, a częściowo w stanie sprężystym, napotyka niemałe trudności, głównie z uwagi na dużą liczbę warunków zszycia na granicy zakresów.

Na zakończenie składam podziękowanie prof. dr inż. MICHAŁOWI ŻYCZKOWSKIEMU za pomoc w wykonaniu tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Г. ЧЕНЦОВ, *Стойки наименьшего веса*, Труды ЦАГИ, 265, 1936.
2. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności*. Prace Komisji Mechaniki, Oddz. Krak. PAN (w druku).
3. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż. 2, 17 (1969), 299-329.
4. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego*, Rozpr. Inż. 4, 11 (1963), 643-666.
5. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego*, Czas. Techn., 2, 68 (1963), 1-3.
6. W. KRZYŚ, *Optymalne kształtowanie z uwagi na stateczność ściskanych słupów cienkościennych o profilu zamkniętym*, Mechanika, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, nr 4, 1967.
7. M. ŁAWRENTIEW, L. LUSTERNIK, *Rachunek wariacyjny*, Warszawa 1954.
8. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aeron. Sci. 12, 13 (1946), 678.
9. S. P. TIMOSZENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
10. M. ŻYCZKOWSKI, *W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych*, Rozpr. Inż. 4, 4 (1956), 441-456.
11. M. ŻYCZKOWSKI, A. GAJEWSKI, *Optimal structural design in non-conservative problems of elastic stability*, Proc. IUTAM Symposium on Instability of Continuous Systems, Herrenalb/Karlsruhe 1969 (w druku).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ СТЕРЖНЯ
СЖИМАЕМОГО ПОЛЯРНО НАПРАВЛЕННОЙ СИЛОЙ

В работе дается решение двух задач: 1) выбора оптимальной формы упругих стержней с определенным образом изменяющимся поперечным сечением сжимаемых силой направленной к неподвижному полюсу, 2) выбора оптимальной формы сжимаемых, направленной к полюсу силой, стержней работающих в упруго-пластической области. В первой части работы основное внимание уделяется оптимизации конических стержней, рассчитан параметр определяющий оптимальный раствор конуса в функции положения полюса, приводится соответствующий ему выитрыш на материале. Во второй части работы найдены абсолютно оптимальные (в смысле вариационного исчисления) формы стержней сжимаемых в упруго-пластической области. Благодаря соответствующим образом выбранной характеристике материала $\sigma(\epsilon)$, полученные решения отличаются простотой. В случае всесторонне равномерно сходящихся стержней, формула сводится к формуле Джонсона-Остенфельда.

Summary

CERTAIN PROBLEMS OF OPTIMUM DESIGN OF A ROD COMPRESSED BY A POLAR FORCE

Two problems are solved in the paper: 1) — optimum design of elastic rods compressed by a force directed toward a fixed point, the general law of variation of the cross-section of the rod being prescribed; 2) — optimum design of a similar rod working in elastic-plastic range.

In the first part of the paper main attention is paid to the optimization of conical rods; optimum convergence of the cone is expressed as a function of position of the pole, and the corresponding material gain is given. In the second part of the paper absolute optimum (based on the variational calculus) shapes of elastic-plastic rods under compression are found. The solutions have a rather simple form owing to the appropriate assumption of the stress-strain law. In the case of uniformly converging rods the problem reduces to Johnson-Ostenfeld formula.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1969 r.

ANALOGIA MECHANICZNO-STEREOMECHANICZNA W KLASIE DWUWSKAŹNIKOWYCH
RÓWNAŃ LAGRANGE'A DRUGIEGO RODZAJU

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Dzięki użyciu ciągów wielowskaźnikowych [1] można badać struktury różnych wielkich systemów, jak też w możliwie ogólny sposób formalizować pojęcie układu. Powstaje przy tym możliwość konstruowania analogii różnorodnych zjawisk w klasie pewnych przekształceń i modelowania za ich pomocą wielu odrębnych zjawisk.

Rozważmy wielki system stereomechaniczny nazwany oscylatorem stereomechanicznym wielowskaźnikowym, który rozpatrzono w pracy [2]. Wskazano tam na analogię mechaniczno-stereomechaniczną w klasie wielowskaźnikowego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego, zwanego równaniem oscylatora harmonicznego (*matematycznego*), lub krótko — oscylatorem matematycznym.

Okazuje się, że można tę analogię uzasadnić bądź też rozciągnąć na równania Lagrange'a drugiego rodzaju. W związku z tym należy otrzymać te równania w terminologii stereomechanicznej.

Przypominamy, że o analogii między teoriami (naukami) ${}_1T$ i ${}_2T$ mówimy wtedy, gdy potrafimy podać pewną równoważność

$${}_1T \rightleftharpoons {}_2T$$

wynikającą z równoważności

$$\bar{C}({}_1T) \rightleftharpoons \bar{C}({}_2T)$$

ciągów rozważań logicznych obu nauk.

Istnieje ciąg rozważań logicznych w mechanice, który umożliwia otrzymanie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju [3].

Wyprowadzimy je obecnie w terminologii stereomechanicznej z użyciem ciągów dwuwskaźnikowych i tym samym uzasadnimy analogię mechaniczno-stereomechaniczną w klasie tych równań dwuwskaźnikowych.

Praca [4] przedstawia tę samą analogię w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a. Uogólnienia polegają na użyciu ciągów o wyższych walencjach.

Analogii mechaniczno-stereomechanicznej w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju poświęcona jest oddzielna praca.

Wszelkie rozważania dotyczące uzasadnienia omawianej analogii prowadzone są bez użycia rachunku wariacyjnego. Zastosowana algebra ciągów wielowskaźnikowych nie wymaga znajomości rachunku tensorowego.

2. Ruch dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego. Więzy

Będziemy rozważali przestrzeń ciągów dwuwskaźnikowych

$$(2.1) \quad {}^2\bar{y} = [y_{j_1 j_2}(x)], \quad j_1 = j_2 = 1, 2, \dots, n; \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle,$$

czyli

$$\begin{bmatrix} y_{11}(x), \dots, y_{1n}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n1}(x), \dots, y_{nn}(x) \end{bmatrix} = [\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)],$$

utworzoną z rozwiązań różniczkowych zwyczajnych rzędu 2 dwuwskaźnikowych, przy czym w przypadku ogólnym mogą one być rzędu n

$${}^2\bar{y}^{(n)} = {}^2\bar{y}^{(n)}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}),$$

$$(2.2) \quad {}^2\bar{y}^{(n)} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_n^{(n)} \end{bmatrix} = \frac{d^n}{dx^n} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_n \end{bmatrix},$$

których strony prawe są funkcjami ciągłymi i posiadającymi ciągle pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej, przy czym funkcja $y(x)$ może na przykład mieć charakter ugięcia pręta w przekroju x .

Definicja 1. Ruchem (jednoparametrowym) układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego ${}^2\bar{y}$ nazywa się każdą funkcję (2.1) lub w postaci uwikłanej

$$(2.3) \quad {}^2\bar{U}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0},$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1(x, {}^2\bar{y}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{U}_n(x, {}^2\bar{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przykładem takiego n^2 -elementowego układu dwuwskaźnikowego może być n odcinków równoległych jednej płaszczyzny, do których zamocowano prostopadle jednym końcem po n prętów sprężystych. Końce tych prętów są połączone sprężystością każdy z każdym [2]. Każdy pręt jest obciążony jedną siłą powodującą wyboczenie.

Definicja 2. Prędkością ${}^2\bar{y}^{(k)}(x)$ rzędu k , $k = 1, 2, \dots, n$ nazywa się k -tą pochodną funkcji (2.1), to jest

$$(2.4) \quad {}^2\bar{y}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} {}^2\bar{y}(x) = \frac{d^k}{dx^k} [\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)].$$

Definicja 3. Równanie (2.2) lub w postaci uwikłanej

$$(2.5) \quad {}^2\bar{G}(x, {}^2\bar{y}', {}^2\bar{y}'', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}, {}^2\bar{y}^{(n)}) = {}^2\bar{0},$$

czy też po rozpisaniu w postaci

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_1(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', {}^2\bar{y}'', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}, {}^2\bar{y}^{(n)}) \\ \vdots \\ \bar{G}_n(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', {}^2\bar{y}'', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}, {}^2\bar{y}^{(n)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

nazywa się równaniem (stanu) ruchu układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego.

Definicja 4. Wiązami ruchu nazywamy niezależne od siebie związki

$$(2.6) \quad \begin{aligned} {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}) &= {}^2\bar{0}, \\ {}^2\bar{H} &= [H_{k_1 k_2}], \quad k_1 = k_2 = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

czyli po rozpisaniu

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

posiadające ciągle pierwsze pochodne cząstkowe w rozważanym otoczeniu zmiennych $x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}', \dots, {}^2\bar{y}^{(n-1)}$.

Przyjmujemy, że badane zjawisko może podlegać pewnym ograniczeniom.

P o s t u l a t I. Istnieje absolutna zmienna niezależna x .

P o s t u l a t II. Istnieje inercjalny układ odniesienia.

P o s t u l a t III. Słuszne są prawa Newtona z tym, że czas absolutny t jest zastąpiony absolutną zmienną niezależną x .

U w a g a. Jeśli ograniczymy się do przykładu wybożenia sprężystego pręta pryzmatycznego o długości skończonej, to $y(x)$ jest jego ugięciem w przekroju opisanym odcietą x .

W przypadku $n = 2$ otrzymujemy z (2.2) równania ruchu układu stereomechanicznego

$$(2.7) \quad {}^2\bar{y}'' = {}^2\bar{f}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}')$$

analogicznie do newtonowskich równań ruchu [3]

$${}^2\bar{r}'' = {}^2\bar{f}(t, {}^2\bar{r}, {}^2\bar{r}').$$

Wynika to stąd, że zamiast proporcji

$$\frac{d^2}{dt^2} {}^2\bar{r}(t) \approx {}^2\bar{r}(t)$$

stotnej w przypadku oscylatora mechanicznego dwuwskaznikowego sluszna jest proporcja

$$\frac{d^2}{dx^2} {}^2\bar{y}(x) \approx {}^2\bar{y}(x),$$

ktora otrzymujemy z uwzglednienia dwuwskaznikowej linii ugięcia.

Wtedy więzy stereomechaniczne, przez analogię do więzów mechanicznych, mogą przyjmować postać

$$(2.8) \quad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') = {}^2\bar{0} \text{ — nieholonomiczne (różniczkowe lub kinematyczne),}$$

$$(2.9) \quad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0} \text{ — holonomiczne reonomiczne,}$$

$$(2.10) \quad {}^2\bar{H}({}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0} \text{ — holonomiczne skleronomiczne.}$$

Dla stereomechanicznych równań ruchu stawiamy zagadnienie Cauchy'ego.

Definicja 5. Siłą stereomechaniczną przez analogię do siły newtonowskiej

$$\bar{F} = m\bar{a},$$

m — masa, \bar{a} — przyspieszenie, nazywamy funkcję liniową przedstawioną p -iloczynem¹⁾

$${}^2\bar{F} = \bar{E}J//{}^2\bar{y}'' = [(\bar{E}J)_1\bar{y}'_1, \dots, (\bar{E}J)_n\bar{y}'_n],$$

$$(2.11) \quad \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}J_{11}y'_{11}, \dots, E_{1n}J_{1n}y'_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{n1}J_{n1}y'_{n1}, \dots, E_{nn}J_{nn}y'_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie

$${}^2\bar{E}J = [(EJ)_{j_1, j_2}], \quad j_1 = j_2 = 1, \dots, n$$

jest ciągiem dwuwskaznikowym sztywności układu, przy czym

$${}^2\bar{F} = {}^2\bar{F}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}'),$$

$$(2.12) \quad \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{F}_n(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') \end{bmatrix},$$

jeśli

$$F = EJy''$$

w przypadku wyboczenia jednego pręta.

Definicja 6. Związki (2.1), (2.12) nazywamy równaniami ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego dwuwskaznikowego.

Definicja 6.1. Dynamiczne układy stereomechaniczne spełniające równania więzów nazywamy układami nieswobodnymi.

¹⁾ Symbol // oznacza mnożenie dwóch ciągów wielowskaznikowych w sensie p -iloczynu [1].

Prawa ruchu dynamicznych układów stereomechanicznych dwuwskaznikowych są uogólnieniem praw ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego zerowskazanikowego.

$$EJy'' = f(x, y, y'),$$

gdzie EJ jest sztywnością pręta pryzmatycznego o długości skończonej. Wymagają one kilku dalszych pewników zgodnych z doświadczeniem.

P o s t u l a t IV. Z istnienia więzów i ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego dwuwskazanikowego po nich (ruchu zgodnego z więzami) wynika istnienie sił działania (reakcji) więzów ${}^2\bar{R}$ na układ i odwrotnie.

P o s t u l a t V. Pod wpływem sił ${}^2\bar{F}$ nieswobodny dynamiczny układ stereomechaniczny dwuwskazanikowy ${}^2\bar{y}$ porusza się jak układ dynamiczny dwuwskazanikowy swobodny pod działaniem sił danych i oddziaływań więzów, czyli w inercjalnym układzie odniesienia spełnione są równania ruchu

$${}^2\bar{E}\bar{J} // {}^2\bar{y}'' = {}^2\bar{F} + {}^2\bar{R},$$

przy czym współrzędne ciągu ${}^2\bar{y}$ spełniają odpowiednie równania więzów.

U w a g a. Siły, które nie są spowodowane działaniem więzów nazywamy siłami czynnymi.

Będziemy rozważali tylko takie więzy różniczkowe, które są spełnione liniowo przez prędkości (2.4) dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskazanikowego, to znaczy dane równością przedstawiającą ciąg sum m -iloczynu²⁾

$${}^4\bar{I} \supset \supset {}^2\bar{y}' + {}^2\bar{D} = {}^2\bar{0},$$

czyli

$${}^2\bar{I}_{11}\bar{y}'_1 + \dots + {}^2\bar{I}_{1n}\bar{y}'_n + \bar{D}_1 = \bar{0},$$

.

.

$${}^2\bar{I}_{d1}\bar{y}'_1 + \dots + {}^2\bar{I}_{dn}\bar{y}'_n + \bar{D}_d = \bar{0},$$

wynikające z ogólnej definicji więzów

$${}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') = {}^2\bar{0},$$

przy czym ${}^2\bar{I}$ oraz ${}^2\bar{D}$ są funkcjami x , ${}^2\bar{y}$ i nie wszystkie ${}^2\bar{I}_{j_1}$, $j_1 = 1, \dots, n$ są równe zeru.

Mamy tutaj

$${}^2\bar{y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}, \quad {}^2\bar{D} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{D}_d \end{bmatrix}, \quad {}^4\bar{I} = \begin{bmatrix} {}^2\bar{I}_{11} & \dots & {}^2\bar{I}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{I}_{d1} & \dots & {}^2\bar{I}_{dn} \end{bmatrix}.$$

²⁾ Symbol $\supset \supset$ oznacza mnożenie w sensie m -iloczynu dwóch ciągów wielowskazanikowych, a $\supset \supset$ przedstawia ciąg sum m -iloczynu [1].

3. Przemieszczenia możliwe. Przemieszczenia przygotowane

Niech dany dynamiczny układ stereomechaniczny dwuwskaznikowy ${}^2\bar{y}$ spełnia więzy skończone

$$(3.1) \quad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0},$$

które zastępujemy wynikającymi z nich więzami różniczkowymi³⁾

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial^2 \bar{y}} \underline{\underline{}} {}^2\bar{y}' + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x} = {}^2\bar{0},$$

czyli

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{11}}{\partial y_{11}} y'_{11} + \dots + \frac{\partial H_{11}}{\partial y_{nn}} y''_{nn} + \frac{\partial H_{11}}{\partial x} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial H_{mm}}{\partial y_{11}} y'_{11} + \dots + \frac{\partial H_{mm}}{\partial y_{nn}} y'_{nn} + \frac{\partial H_{mm}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

i więzy różniczkowe, o których zakładamy, że są liniowe, to jest

$$(3.3) \quad \bar{I} \supseteq {}^2\bar{y}' + {}^2\bar{D} = {}^2\bar{0}.$$

Definicja 7. Prędkość ${}^2\bar{y}'(x)$ dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaznikowego znajdującego się w położeniu

$${}^2\bar{y} = {}^2\bar{A}$$

nazywamy prędkością możliwą (zgodną z więzami) w tym położeniu, jeśli układ może ją posiadać w miejscu x , co zachodzi wtedy, gdy ta prędkość spełnia równania liniowe więzów (3.2) i (3.3).

Definicja 8. Przez analogię do układu

$$d\bar{r} = \bar{r}' dt,$$

gdzie r — wektor-promień punktu materialnego, układ nieskończenie małych przemieszczeń

$$d^2\bar{y} = {}^2\bar{y}' dx,$$

gdzie ${}^2\bar{y}'(x)$ jest prędkością możliwą dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaznikowego, nazywamy nieskończenie małym przemieszczeniem⁴⁾ możliwym tego układu.

Przemieszczenia możliwe spełniają równania

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial^2 \bar{y}} \underline{\underline{}} d^2\bar{y} + \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x} dx = {}^2\bar{0}$$

³⁾ Symbol $\underline{\underline{}}$ oznacza tu ciąg sum p -iloczynu tensorowego różniczkowego rzędu pierwszego funkcji wielowskaznikowej argumentu wielowskaznikowego [1].

⁴⁾ Mamy tu na myśli przemieszczenie uogólnione $d^2\bar{y}$ jako iloczyn dx oraz prędkości ${}^2\bar{y}'$, charakteryzującej zjawisko stereomechaniczne w układzie stereomechanicznym dwuwskaznikowym.

oraz

$$(3.5) \quad {}^4\bar{I} \supset \subset d^2\bar{y} + {}^2\bar{D}dx = {}^2\bar{0},$$

które otrzymujemy mnożąc obustronnie równania (3.2) i (3.3) przez dx .

Weźmy dwa przemieszczenia możliwe

$$(3.6) \quad d^2\bar{y} = {}^2\bar{y}' dx,$$

$$(3.7) \quad d^2_1\bar{y} = {}^2_1\bar{y}' dx,$$

odpowiadające przekrojowi x oraz temu samemu stanowi (położeniu) dynamicznego układu stereomechanicznego.

Spełniają one równania (3.4) i (3.5), natomiast ich różnica

$$(3.8) \quad \delta^2\bar{y} = d^2_1\bar{y}' - d^2\bar{y}$$

spełnia związki jednorodne

$$(3.9) \quad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial^2 \bar{y}} \ll \delta^2 \bar{y} = {}^2\bar{0}$$

oraz

$$(3.10) \quad {}^4\bar{I} \supset \subset \delta^2 \bar{y} = {}^2\bar{0}.$$

Definicja 9. Różnicę (3.8) nazywamy przemieszczeniem przygotowanym (wirtualnym) dynamicznego układu stereomechanicznego dwuwskaźnikowego ${}^2\bar{y}$ w miejscu x dla pewnego położenia możliwego.

4. Podstawowe zagadnienia dynamiki układu n^2 -krotnego. Więzy idealne

Oznaczmy wymiary n^2 -ciągu ${}^2\bar{y}$, d^2 -ciągu ${}^2_1\bar{H}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}') = {}^2\bar{0}$, oraz h^2 -ciągu ${}^2_2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0}$ przez

$$(4.1) \quad \text{Dim } {}^2\bar{y} = n^2,$$

$$(4.2) \quad \text{Dim } {}^2_1\bar{H} = d^2,$$

$$(4.3) \quad \text{Dim } {}^2_2\bar{H} = h^2.$$

Równania (3.9) i (3.10) zawierają n^2 niewiadomych współrzędnych ciągu dwuwskaźnikowego $\delta^2\bar{y}$.

Jeśli równania te są niezależne, to wśród współrzędnych

$$\delta y_{j_2} = \delta y_{j_1 j_2}$$

istnieje

$$(4.4) \quad k^2 = n^2 - d^2 - h^2$$

współrzędnych niezależnych.

Definicja 10. Liczbę k^2 współrzędnych niezależnych ciągu $\delta^2\bar{y}$ nazywa się liczbą stopni swobody danego dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego.

Mówiąc o układzie k^2 -krotnym będziemy mieli na myśli układ n^2 -krotny o k^2 stopniach swobody.

Podstawowe zagadnienie dynamiki nieswobodnego układu stereomechanicznego o k^2 stopniach swobody można sformułować następująco.

Należy określić ruch

$$(4.5) \quad {}^2\bar{y} = {}^2\bar{y}(x), \quad x_1 < x < x_2$$

układu ${}^2\bar{y}$ oraz oddziaływania więzów

$$(4.6) \quad {}^2\bar{R} = {}^2\bar{R}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}')$$

przy danych siłach czynnych

$$(4.7) \quad {}^2\bar{F} = {}^2\bar{F}(x, {}^2\bar{y}, {}^2\bar{y}')$$

i zgodnych z więzami jego położeniach początkowych

$$(4.8) \quad {}^2\bar{y} = {}^2\bar{y}'(x)|_{x=0}$$

oraz prędkościach początkowych

$$(4.9) \quad {}^2\bar{y}' = {}^2\bar{y}'(x)|_{x=0}.$$

Jeśli nie jest znany charakter więzów, to nie są wiadome oddziaływania ${}^2\bar{R}$ i zagadnienie jest nieokreślone, ponieważ liczba niewiadomych ${}^2\bar{y}$, ${}^2\bar{R}$ jest większa od liczby równań

$$n^2 + n^2 > n^2 + d^2 + h^2.$$

Podstawowe zagadnienie dynamiki układu stereomechanicznego staje się określone, jeśli mamy

$$2n^2 - (n^2 + d^2 + h^2) = n^2 - d^2 - h^2 = k^2$$

dotychczasowych niezależnych związków między szukanymi wielkościami $\delta y_{\bar{j}}$. Związki te otrzymujemy postulując istnienie klasy więzów idealnych.

P o s t u l a t VI. Wyrażenie⁵⁾ ${}^2\bar{R} // \delta^2\bar{y}$, jako praca sił oddziaływania więzów na dowolnych (zgodnych z więzami) przemieszczeniach przygotowanych zeruje się, gdy nie występują siły rozpraszające, albo włączamy je do sił danych, to znaczy

$$(4.10) \quad {}^2\bar{R} // \delta^2\bar{y} = 0,$$

czyli

$${}^1\bar{R}_1 \delta y_{11} + \dots + {}^1\bar{R}_n \delta y_{n1} = R_{11} \delta y_{11} + \dots + R_{nn} \delta y_{nn} = 0.$$

Definicja 11. Więzy stereomechaniczne nazywamy idealnymi, jeżeli siły oddziaływania ${}^2\bar{R}$ na punkty dynamicznego układu stereomechanicznego spełniają związek (4.10).

5. Ogólne równanie dynamiki

Rozważmy dynamiczny układ stereomechaniczny n -krotny nieswobodny. Jego równanie ruchu ma postać

$$(5.1) \quad {}^2\bar{E}J // {}^2\bar{y}'' = {}^2\bar{F} + {}^2\bar{R}.$$

⁵⁾ Symbol ${}^2\bar{R} //$ oznacza sumę dwukrotną p -iloczynu [1].

Jeśli więzy są idealne, to w każdym położeniu układu dowolne przemieszczenia przygotowane spełniają równanie (4.10)

$${}_2\bar{R} // \delta^2\bar{y} = 0.$$

Z układu tych dwóch związków wynika równość

$$(5.2) \quad {}_2\bar{R} - {}_2\bar{E}J // {}_2\bar{y}'' \delta^2\bar{y} = 0,$$

która nosi nazwę ogólnego równania dynamiki układu stereomechanicznego.

Podczas ruchu układu w dowolnym miejscu x (przekroju) suma prac sił czynnych i stereomechanicznych sił bezwładności⁶⁾ na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zero.

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ruch układu dynamicznego stereomechanicznego zgodny z więzami odpowiadał danemu układowi sił czynnych ${}^2\bar{F}$, jest spełnienie ogólnego równania dynamiki.

6. Zasada przemieszczeń przygotowanych. Zasada d'Alemberta

Definicja 12. Położeniem równowagi ${}^2_0\bar{y}$ dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego nazywa się takie jego położenie, w którym układ znajduje się w sposób ciągły, jeśli w miejscu początkowym był on w tym położeniu i prędkości ${}^2\bar{y}'$ wszystkich jego punktów były równe zero.

Położenie układu ${}^2_0\bar{y}$ jest wtedy i tylko wtedy położeniem równowagi, gdy ruch

$$(6.1) \quad {}^2\bar{y}(x) = {}^2_0\bar{y}$$

spełnia ogólne równanie dynamiki, to jest jeżeli w tym położeniu

$$(6.2) \quad {}_2\bar{F} // \delta^2\bar{y} = 0.$$

Równość ta jest treścią zasady przemieszczeń przygotowanych.

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby pewne (zgodne z więzami) położenie dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego było położeniem równowagi, jest równa zero w tym położeniu suma prac sił czynnych ${}^2\bar{F}$ na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych $\delta^2\bar{y}$.

Równość (6.2) wyrażająca zasadę przemieszczeń przygotowanych jest przypadkiem szczególnym ogólnego równania dynamiki (5.2).

Potraktujmy równanie dynamiki jako zasadę przemieszczeń możliwych, charakteryzującą położenie równowagi dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego, które powstaje z dodania sił bezwładności do sił czynnych. Stąd wynika zasada d'Alemberta. Podczas ruchu dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego można dowolne

⁶⁾ Stereomechanicznymi siłami bezwładności ${}^2\bar{B}$ nazywamy wyrażenie ${}^2\bar{B} = -{}^2\bar{E}J // {}^2\bar{y}''$.

jego położenia traktować jako położenia równowagi dodając siły bezwładności ${}^2\bar{B}$ do sił czynnych ${}^2\bar{F}$ w danym położeniu

$$(6.3) \quad {}^2\bar{F} + {}^2\bar{B} = {}^2\bar{0}.$$

Dzięki tej zasadzie metody statyki przenoszą się na zagadnienia dynamiki.

7. Współrzędne niezależne (uogólnione) układów stereomechanicznych uogólnionych. Siły uogólnione

Niech będzie dany dynamiczny układ stereomechaniczny ${}^2\bar{y}$ holonomiczny n^2 -krotny spełniający więzy

$$(7.1) \quad {}^2\bar{H}(x, {}^2\bar{y}) = {}^2\bar{0}.$$

Przyjmujemy, że funkcje ${}^2\bar{H}$ w ilości h^2 są niezależne, przy czym x jest parametrem, natomiast zmiennych y_j jest n^2 . Wobec powyższego można z równań więzów wyrazić h^2 współrzędnych (czyli ciąg dwuwskaznikowy współrzędnych) przez funkcje $n^2 - h^2$ pozostałych współrzędnych oraz zmiennej x i rozpatrywać te współrzędne w liczbie

$$(7.2) \quad k^2 = n^2 - h^2$$

jako wielkości niezależne określające położenia dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego w miejscu x . Takimi współrzędnymi nie koniecznie muszą być współrzędne kartezjańskie. Także współrzędne kartezjańskie ciągu ${}^2\bar{y}$ (w liczbie n^2) można wyrazić jako funkcje ciągłe i różniczkowalne k^2 -elementowego ciągu dwuwskaznikowego parametrów niezależnych

$$(7.3) \quad {}^2\bar{q} = [{}^1\bar{q}_1, \dots, {}^1\bar{q}_k]$$

i zmiennej x , mianowicie

$$(7.4) \quad {}^2\bar{y} = {}^2\bar{y}(x, {}^2\bar{q}),$$

przy czym

$$(7.5) \quad \text{Dim } {}^2\bar{q} = k^2.$$

Funkcje te spełniają tożsamościowo równania więzów podane wyżej.

Zakładamy ponadto, że dowolne (zgodne z więzami) położenia dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego w miejscu x można przy pewnych wartościach ${}^2\bar{q}$ otrzymać z równań (7.4).

Definicja 13. Wielkości ${}^2\bar{q}$ występujące w równości (7.4) nazywamy współrzędnymi uogólnionymi niezależnymi dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego n^2 -krotnego.

Każdej współrzędnej uogólnionej ${}^2\bar{q}$ jako ciągowi k^2 -elementowemu (dwuwskaźnikowemu) odpowiada siła uogólniona ${}^2\bar{Q}$. Wprowadza się ją następująco.

Niech będzie dana praca δL sił czynnych ${}^2\bar{F}$ jako iloczyn

$$(7.6) \quad \delta L = {}_2\langle {}^2\bar{F} // \delta^2\bar{y} \rangle.$$

Przemieszczenie przygotowane

$$(7.7) \quad \delta^2\bar{y} = \frac{\partial^2\bar{y}}{\partial^2\bar{q}} \llcorner \delta^2\bar{q},$$

czyli

$$\begin{aligned} \delta y_{11} &= \frac{\partial y_{11}}{\partial q_{11}} \delta q_{11} + \dots + \frac{\partial y_{11}}{\partial q_{kk}} \delta q_{kk}, \\ &\vdots \\ \delta y_{nn} &= \frac{\partial y_{nn}}{\partial q_{11}} \delta q_{11} + \dots + \frac{\partial y_{nn}}{\partial q_{kk}} \delta q_{kk} \end{aligned}$$

jest różniczką przygotowaną funkcji ${}^2\bar{y}(x, {}^2\bar{q})$ przy ustalonym x .

Podstawienie związku (7.7) do (7.6) prowadzi do wyrażenia pracy elementarnej sił czynnych ${}^2\bar{F}$ przez dowolne przyrosty $\delta^2\bar{q}$ współrzędnych uogólnionych ${}^2\bar{q}$

$$(7.8) \quad \delta L = {}^2\bar{F} \parallel \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \parallel \delta^2 \bar{q} \right]}_{2| \underline{{}^2\bar{Q}} \parallel \delta^2 \bar{q} |} = 2| \underline{{}^2\bar{Q}} \parallel \delta^2 \bar{q} |.$$

Definicja 14. Współczynnik ${}^2\bar{Q}$ (ciąg dwuwskaznikowy) przy $\delta^2\bar{q}$ wyrażający się wzorem

$$(7.9) \quad {}^2\bar{Q} = {}^2\bar{F} \parallel \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T,$$

gdzie T — symbol ciągu transponowanego, nazywamy siłą uogólnioną.

8. Dwuwskaznikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju we współrzędnych niezależnych dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego

Równanie to wyprowadzimy z równania ogólnego dynamiki

$$2| \underline{({}^2\bar{F} - {}^2\bar{E}J \parallel {}^2\bar{y}'')} \parallel \delta^2 \bar{y} | = 0.$$

Praca δL sił czynnych w układzie kartezjańskim

$$\delta L = 2| \underline{{}^2\bar{F} \parallel \delta^2 \bar{y}} |$$

we współrzędnych niezależnych ${}^2\bar{q}$ przyjmuje postać

$$\delta L = 2| \underline{{}^2\bar{Q} \parallel \delta^2 \bar{q}} |,$$

gdzie według (7.9)

$${}^2\bar{Q} = {}^2\bar{F} \parallel \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T.$$

Analogiczną postać ma praca $\delta_B L$ sił bezwładności

$$(8.1) \quad \delta_B L = -2| \underline{{}^2\bar{B} \parallel \delta^2 \bar{q}} |,$$

gdzie we współrzędnych niezależnych

$$(8.2) \quad \begin{aligned} {}^2\bar{B} &= ({}^2\bar{E}J \parallel {}^2\bar{y}'') \parallel \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ ({}^2\bar{E}J \parallel {}^2\bar{y}') \parallel \left[\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \right]^T \right\} - ({}^2\bar{E}J \parallel {}^2\bar{y}') \parallel \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}}. \end{aligned}$$

Ponadto stwierdzamy, że prędkość

$$(8.3) \quad {}^2\bar{y}' = \frac{d}{dx} {}^2\bar{y}(x, {}^2\bar{q}) = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \underline{\underline{\ll}} {}^2\bar{q}' + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x}$$

jest funkcją liniową ${}^2\bar{q}'$. Wobec tego

$$(8.4) \quad \frac{\partial^2 \bar{y}'}{\partial^2 \bar{q}'} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}}.$$

Dodatkowo z (8.3) mamy

$$(8.5) \quad \frac{\partial^2 \bar{y}'}{\partial^2 \bar{q}'} = \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}}.$$

Jeśli bowiem

$${}^2\bar{y} = {}^2\bar{y}(x, {}^2\bar{q}),$$

to

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} = {}^2\bar{p}(x, {}^2\bar{q}),$$

czyli

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} = [\bar{p}_1(x, {}^2\bar{q}), \dots, \bar{p}_n(x, {}^2\bar{q})]$$

i wtedy, analogicznie do (8.3), mamy

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial^2 \bar{q}} \underline{\underline{\ll}} {}^2\bar{q}' + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial^2 \bar{q}} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}} \underline{\underline{\ll}} {}^2\bar{q}' + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial^2 \bar{q}}.$$

Wobec powyższego po uwzględnieniu związków (8.4) i (8.5) równość (8.2) przyjmie postać

$$(8.6) \quad {}^2\bar{B} = \frac{d}{dx} \left\{ ({}^2\bar{E}J \underline{\underline{\ll}} {}^2\bar{y}') \underline{\underline{\ll}} \left[\frac{\partial^2 \bar{y}'}{\partial^2 \bar{q}'} \right]^T \right\} - ({}^2\bar{E}J \underline{\underline{\ll}} {}^2\bar{y}') \underline{\underline{\ll}} \frac{\partial^2 \bar{y}'}{\partial^2 \bar{q}'} = \\ = \frac{d}{dx} \frac{\partial_2 {}^2\bar{T}}{\partial^2 \bar{q}'} - \frac{\partial_2 {}^2\bar{T}}{\partial^2 \bar{q}} = \frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial^2 \bar{q}'} - \frac{\partial T}{\partial^2 \bar{q}},$$

gdzie T jest energią kinetyczną

$$(8.7) \quad T = \frac{1}{2} {}^2\bar{E}J \underline{\underline{\ll}} ({}^2\bar{y}')^2 = \frac{1}{2} {}^2\bar{T}$$

dynamicznego układu stereomechanicznego, natomiast

$${}^2\bar{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{11}(y'_{11})^2, \dots, E_{1n}(y'_{1n})^2 \\ \cdot \\ E_{n1}(y'_{n1})^2, \dots, E_{nn}(y'_{nn})^2 \end{bmatrix}$$

przedstawia ciąg dwuwskaznikowy energii kinetycznych tego układu.

Z równania ogólnego dynamiki mamy

$$(8.8) \quad \delta L + \delta_B L = 0,$$

lub po wykorzystaniu wyrażań na prace

$$(8.9) \quad {}_2 \langle \delta \bar{Q} - {}^2 \bar{B} \rangle // \delta^2 \bar{q} = 0.$$

Równość ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy $\delta^2 \bar{q}$ są równe zeru⁷⁾. Zatem związek (8.9) jest równoważny równości

$${}^2 \bar{B} = {}^2 \bar{Q},$$

która zgodnie z (8.6) może być zapisana w postaci

$$(8.10) \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial^2 \bar{q}'} - \frac{\partial T}{\partial^2 \bar{q}} = {}^2 \bar{Q}.$$

Ostatnia równość nosi nazwę równań Lagrange'a drugiego rodzaju lub równań Lagrange'a we współrzędnych niezależnych (uogólnionych) dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego.

P r z y k ł a d. Wyprowadzić metodą Lagrange'a równania ruchu drgań swobodnych układu stereomechanicznego o n^2 stopniach swobody.

Przedstawimy przykład ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego dwuwskaznikowego otrzymanego za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju wyprowadzonych w tej pracy.

Rozważmy jeden pręt sprężysty o sztywności

$$EJ = a_1 = \text{const}$$

poddany wybozczeniu siłą

$$P = a_2 = \text{const}.$$

W tym przypadku zerowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$a_1 y'' + a_2 y = 0$$

zwaną oscylatorem stereomechanicznym zerowskaźnikowym. Otrzymujemy je z zerowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

gdzie T jest energią kinetyczną pręta.

Rozważmy następnie ciąg n prętów sprężystych [2] usytuowanych na jednym odcinku i na przykład utwierdzonych sztywno jednym końcem. Swobodne końce są połączone sprężystością. Każdy pręt jest poddany wybozczeniu jedną siłą.

⁷⁾ Wynika to stąd, że współrzędne niezależne ciągu dwuwskaznikowego ${}^2 \bar{q}$ mają zupełnie dowolne przyrosty $\delta^2 \bar{q}$.

Jednowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$${}^2\bar{a}\bar{y}'' + {}^2\bar{a}\bar{y} = \bar{0},$$

czyli

$$\begin{aligned} {}_1a_{11}y'' + \dots + {}_1a_{1n}y_n'' + {}_2a_{11}y_1 + \dots + {}_2a_{1n}y_n &= 0, \\ {}_1a_{n1}y_1'' + \dots + {}_1a_{nn}y_n'' + {}_2a_{n1}y_1 + \dots + {}_2a_{nn}y_n &= 0, \end{aligned}$$

którą nazywamy oscylatorem stereomechanicznym jednowskaźnikowym.

Otrzymujemy je z jednowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}'} - \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \bar{0}.$$

Oscylator stereomechaniczny dwuwskaźnikowy przedstawia równanie

$${}^4\bar{E}J{}^2\bar{y}'' + {}^4\bar{P}{}^2\bar{y} = {}^2\bar{0},$$

lub

$${}^4\bar{a}{}^2\bar{y}'' + {}^4\bar{a}{}^2\bar{y} = \bar{0},$$

gdzie

$${}^4\bar{E}J = \begin{bmatrix} {}^2\bar{E}J_{11}, & \dots, & {}^2\bar{E}J_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{E}J_{n1}, & \dots, & {}^2\bar{E}J_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11}J_{11} & \dots & E_{1n}J_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1}J_{n1} & \dots & E_{nn}J_{nn} \end{bmatrix}_{11}, & \dots, & \begin{bmatrix} E_{11}J_{11} & \dots & E_{1n}J_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1}J_{n1} & \dots & E_{nn}J_{nn} \end{bmatrix}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{bmatrix} E_{11}J_{11} & \dots & E_{1n}J_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1}J_{n1} & \dots & E_{nn}J_{nn} \end{bmatrix}_{n1}, & \dots, & \begin{bmatrix} E_{11}J_{11} & \dots & E_{1n}J_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1}J_{n1} & \dots & E_{nn}J_{nn} \end{bmatrix}_{nn} \end{bmatrix},$$

$${}^4\bar{a} = {}^4\bar{E}J = [(EJ)_{j_1 j_2 j_3 j_4}],$$

$j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \dots, n$ — ciąg czterowskaźnikowy współczynników sztywności (stałych),

${}^4\bar{a} = {}^4\bar{P} = [P_{j_1 j_2 j_3 j_4}]$ — ciąg czterowskaźnikowy sił obciążających (stałych).

Energia kinetyczna ${}_1T$ układu n^2 -krotnego

$${}^2\bar{y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

wyraża się równością

$$T_1 = T_1[({}^2\bar{y}')^2] = \frac{1}{2} [{}^4\bar{E}J({}^2\bar{y}')^2],$$

gdzie

$$({}^2\bar{y}')^2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{11}y'_{11} & \dots & y'_{11}y'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y'_{11}y'_{n1} & \dots & y'_{11}y'_{nn} \end{bmatrix}, & \dots, & \begin{bmatrix} y'_{1n}y'_{11} & \dots & y'_{1n}y'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y'_{1n}y'_{n1} & \dots & y'_{1n}y'_{nn} \end{bmatrix} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{bmatrix} y'_{n1}y'_{11} & \dots & y'_{n1}y'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y'_{n1}y'_{n1} & \dots & y'_{n1}y'_{nn} \end{bmatrix}, & \dots, & \begin{bmatrix} y'_{nn}y'_{11} & \dots & y'_{nn}y'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y'_{nn}y'_{n1} & \dots & y'_{nn}y'_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^2\bar{y}'_{11})^2 & \dots & ({}^2\bar{y}'_{1n})^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ({}^2\bar{y}'_{n1})^2 & \dots & ({}^2\bar{y}'_{nn})^2 \end{bmatrix},$$

natomiast

$$\begin{aligned} \underline{{}_4^1 \bar{a} ({}^2 \bar{y}')^2} &= \underline{{}_2^1 \bar{a}_{11} ({}^2 \bar{y}'_{11})^2} + \dots + \underline{{}_2^1 \bar{a}_{nn} ({}^2 \bar{y}'_{nn})^2} = \\ &= {}_1 a_{11_{11}} y'_{11} y'_{11} + \dots + {}_1 a_{nn_{11}} y'_{11} y'_{nn} + \dots + {}_1 a_{11_{nn}} y'_{nn} y'_{11} + \dots + {}_1 a_{nn_{nn}} y'_{nn} y'_{nn}, \end{aligned}$$

przy czym $\underline{{}_4^1 \bar{a} ({}^2 \bar{y}')^2}$ jest odpowiednio zbudowanym ciągiem czterowskaźnikowym energii kinetycznej dynamicznego układu stereomechanicznego n^2 -krotnego.

Umawiamy się, że energię kinetyczną ${}_1 T$ zapiszemy w postaci

$${}^2 \bar{T} = \begin{bmatrix} {}_1 T_{11} & \dots & {}_1 T_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}_1 T_{n1} & \dots & {}_1 T_{nn} \end{bmatrix}$$

ze względu na formalne podobieństwo do przekształcenia liniowego. W tym wzorze

$$\begin{aligned} 2 {}_1 T_{11} &= {}_1 a_{11_{11}} y'_{11} y'_{11} + \dots + {}_1 a_{1n_{11}} y'_{11} y'_{1n} + \dots + {}_1 a_{11_{1n}} y'_{11} y'_{n1} + \dots + {}_1 a_{1n_{1n}} y'_{11} y'_{nn}, \\ &\vdots \\ 2 {}_1 T_{nn} &= {}_1 a_{n1_{nn}} y'_{nn} y'_{11} + \dots + {}_1 a_{nn_{nn}} y'_{nn} y'_{1n} + \dots + {}_1 a_{n1_{nn}} y'_{nn} y'_{n1} + \dots + {}_1 a_{nn_{nn}} y'_{nn} y'_{nn}. \end{aligned}$$

Mamy wtedy

$${}^2 \bar{T} = \frac{1}{2} \left[\underline{{}_2^1 \bar{a} ({}^2 \bar{y}')^2} \right].$$

Podobnie zapisujemy energię potencjalną układu

$${}^2 \bar{T} = \frac{1}{2} \left[\underline{{}_2^1 \bar{P} ({}^2 \bar{y})^2} \right] = - \frac{1}{2} \left[\underline{{}_2^1 \bar{a} ({}^2 \bar{y})^2} \right].$$

Energia całkowita układu jest sumą

$${}^2 \bar{T} = {}^2 \bar{T} + {}^2 \bar{T},$$

przy czym

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 \bar{y}'} = \left[\underline{{}_2^1 \bar{a} ({}^2 \bar{y}')^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 \bar{y}} = - \left[\underline{{}_2^1 \bar{a} ({}^2 \bar{y})^2} \right].$$

Ze względu na drgania swobodne ${}^2 \bar{Q} = {}^2 \bar{0}$.

Równania Lagrange'a (8.10) stanowią ciąg dwuwskaźnikowy — układ układów równań⁸⁾. Wynikają one z odpowiedniego różniczkowania funkcji T względem kolejnych zmiennych.

⁸⁾ Są one słuszne również — jak wiadomo — w przypadku działania na układ sił posiadających potencjał, czyli przy uwzględnieniu energii potencjalnej.

Ten sam wynik otrzymamy wprowadzając pojęcie ciągu energii ${}^2\bar{T}$. Wtedy każda jego współrzędna przedstawia tylko tę energię układu, której pochodna względem odpowiednich współrzędnych nie jest równa zeru.

Pochodne pozostałych wskaźników są równe zeru.

Zauważmy, że ten sam wynik uzyska się po zdefiniowaniu pochodnej przekształcenia kwadratowego

$$\frac{\partial}{\partial y'_{11}} \left[\frac{1}{2} {}_1a_{11,11} y'_{11} y'_{11} + {}_1a_{1n,11} y'_{11} y'_{1n} + \dots + {}_1a_{11,n1} y'_{11} y'_{n1} + \dots + {}_1a_{1n,n1} y'_{11} y'_{nn} \right],$$

⋮

$$\frac{\partial}{\partial y'_{nn}} \left[{}_1a_{n1,n1} y'_{nn} y'_{11} + \dots + {}_1a_{nn,n1} y'_{nn} y'_{1n} + \dots + {}_1a_{n1,nn} y'_{nn} y'_{n1} + \dots + \frac{1}{2} {}_1a_{nn,nn} y'_{nn} y'_{nn} \right],$$

skąd

$$\frac{\partial}{\partial y'_{11}} {}_1T_{11} = {}_1a_{11,11} y'_{11} + \dots + {}_1a_{1n,11} y'_{1n} + \dots + {}_1a_{11,n1} y'_{n1} + \dots + {}_1a_{1n,n1} y'_{nn},$$

⋮

$$\frac{\partial}{\partial y'_{nn}} {}_1T_{nn} = {}_1a_{11,n1} y'_{11} + \dots + {}_1a_{nn,n1} y'_{1n} + \dots + {}_1a_{n1,nn} y'_{n1} + {}_1a_{nn,nn} y'_{nn}.$$

W ten sposób otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial {}^2\bar{y}'} \left[\frac{1}{2} {}_2\underline{{}^4\bar{a}} ({}^2\bar{y}')^2 \right] = \left[{}_2\underline{{}^4\bar{a}} {}^2\bar{y}' \right],$$

jeśli oznaczymy

$$\frac{\partial}{\partial {}^2\bar{y}'} \left[\frac{1}{2} {}_2\underline{{}^4\bar{a}} ({}^2\bar{y}')^2 \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} {}_1a_{11,11} y'_{11} y'_{11} + \dots + {}_1a_{1n,11} y'_{11} y'_{1n}; \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots; {}_1a_{n1,n1} y'_{nn} y'_{11} + \dots + \frac{1}{2} {}_1a_{nn,nn} y'_{nn} y'_{nn} \end{array} \right].$$

Będziemy pisali

$$\frac{\partial}{\partial {}^2\bar{y}'} \left[\frac{1}{2} {}_2\underline{{}^4\bar{a}} ({}^2\bar{y}')^2 \right] = \left[{}_2\underline{{}^4\bar{a}} {}^2\bar{y}' \right].$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial {}^2\bar{y}'} \left[\frac{1}{2} {}_2\underline{{}^4\bar{a}} ({}^2\bar{y}')^2 \right] &= \left[{}_2\underline{{}^4\bar{a}} {}^2\bar{y}'' \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c} {}_1a_{11,11} y''_{11} + \dots + {}_1a_{1n,n1} y''_{nn}; \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots; {}_1a_{n1,n1} y'_{11} + \dots + {}_1a_{nn,nn} y''_{nn} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 \bar{y}} = \left[{}_2^1 \bar{a}^2 \bar{y}'' \right] = \begin{bmatrix} {}_1 a_{11,11} \frac{d}{dx} y'_{11} + \dots + {}_1 a_{1n,1n} \frac{d}{dx} y'_{nn}; \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots; {}_1 a_{n1,n1} \frac{d}{dx} y'_{11} + \dots + {}_1 a_{nn,nn} \frac{d}{dx} y'_{nn} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 \bar{y}} = - \left[{}_2^2 \bar{P}^2 \bar{y} \right] = \begin{bmatrix} -P_{11,11} y_{11} + \dots + (-P_{1n,1n}) y_{nn}; \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots; -P_{n1,n1} y_{11} + \dots + (-P_{nn,nn}) y_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wobec powyższego z równości (8.10), danej ciągiem dwuwskaźnikowym, czyli układem

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 \bar{y}'} - \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial^2 \bar{y}} = {}_2^2 \bar{Q}$$

wynika układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} {}_1 a_{11,11} y''_{11} + \dots + {}_1 a_{1n,1n} y''_{nn} + {}_2 a_{11,11} y_{11} + \dots + {}_2 a_{1n,1n} y_{nn} &= 0, \\ &\vdots \\ {}_1 a_{n1,n1} y''_{11} + \dots + {}_1 a_{nn,nn} y''_{nn} + {}_2 a_{n1,n1} y_{11} + \dots + {}_2 a_{nn,nn} y_{nn} &= 0, \end{aligned}$$

który zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} {}_1^2 \bar{a}_{11} \bar{y}'_1 + \dots + {}_1^2 \bar{a}_{1n} \bar{y}'_n + {}_2^2 \bar{a}_{11} \bar{y}_1 + \dots + {}_2^2 \bar{a}_{1n} \bar{y}_n &= \bar{0}, \\ &\vdots \\ {}_1^2 \bar{a}_{n1} \bar{y}'_1 + \dots + {}_1^2 \bar{a}_{nn} \bar{y}'_n + {}_2^2 \bar{a}_{n1} \bar{y}_1 + \dots + {}_2^2 \bar{a}_{nn} \bar{y}_n &= \bar{0} \end{aligned}$$

lub

$${}_1^4 \bar{a}^2 \bar{y}'' + {}_2^4 \bar{a}^2 \bar{y} = {}_2^2 \bar{0}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe, Zagadn. Drgań Nielin.* (w druku).
2. R. KRZYWIEC, *Wyboczenie wielkiego systemu-układu wielowskaźnikowego prętów sprężystych jako ruchu przez analogię*, Arch. Bud. Masz. (w druku).
3. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako wielkich systemów*, Zagadn. Drgań Nielin. (w druku).
4. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-steromechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mat. II Konf. Dynamiki Maszyn, Rzeszów 1969 (w druku).

Резюме

МЕХАНИКО-СТЕРЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ УРАВНЕНИЙ
ЛАГРАНЖА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ИНДЕКСАМИ

В работе дается обоснование механико-стереомеханической аналогии второго рода уравнений Лагранжа с двумя индексами, выведенных на языке стереомеханики без использования вариационного и тензорного исчисления.

Теоретические рассуждения подитожены их применением для вывода уравнений стереомеханического осциллятора. Таким образом указана также механико-стереомеханическая аналогия уравнений гармонического (математического) осциллятора. При рассмотрении вопроса были использованы последовательности с двумя и четырьмя индексами.

Summary

MECHANICAL-ELASTIC ANALOGY IN THE CLASS OF TWO-INDEX LAGRANGE
EQUATIONS OF SECOND KIND

The analogy has been derived without using the variational and tensor calculus.

Theoretical considerations are illustrated by their application to the derivation of the equations of a two-index elastic oscillator. This proves the mechanical-elastic analogy in the class of harmonic (mathematical) oscillator equations.

Multi-index series (2-index and 4-index in particular) have been used in the paper.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1969 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA RILEM, BUKARESZT, WRZESIEŃ 1969

W dniach 9–11 września 1969 r. odbyła się w Bukareszcie Międzynarodowa Konferencja RILEM (Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions). Tematem konferencji była «Metodologia i technika badań konstrukcji w wymiarach naturalnych i na modelach pod działaniem obciążeń statycznych i dynamicznych». Dała ona ogólny pogląd na światowy stan badań w zakresie tej tematyki oraz na dalsze perspektywy rozwoju. Na ogólną liczbę 92 referatów z 19 krajów: 36 zgłosiła Rumunia, 12 — ZSRR, 6 — Czechosłowacja, po 5 — Francja oraz Niemcy Demokratyczne i Federalne, po 3 — Belgia, Polska¹⁾, Węgry i Wielka Brytania, po 2 — Portugalia i USA, oraz po 1 — Australia, Austria, Bułgaria, Japonia, Jugosławia, Kanada, i Włochy.

Wszystkie prace zostały podzielone na 3 zasadnicze grupy tematyczne:

I. Modele małe realizowane za pomocą innych materiałów aniżeli materiał obiektu (29 prac);

II. Modele duże realizowane za pomocą materiałów o własnościach podobnych do własności materiałów obiektu (35 prac);

III. Badania na elementach i konstrukcjach o wymiarach naturalnych (28 prac).

Komitet Organizacyjny Konferencji dostarczył uczestnikom pełne teksty wszystkich zgłoszonych prac indywidualnych oraz trzech referatów generalnych²⁾ (dotyczących wymienionych 3 grup tematycznych) opracowanych i wygłoszonych przez wybitnych uczonych. Przedstawili oni syntetyczne ujęcie tematyki konferencji.

Prace pierwszej grupy z zakresu małych modeli zreferował prof. dr OLIVIU RUSU, z Bukaresztu. Na podstawie prac tej grupy stwierdził on, że nowoczesne metody modelowe dają coraz większe możliwości zrozumienia nieznanych do niedawna szczegółów zachowania się konstrukcji (np. praca E. NICOLAU). Korzystając z tych metod można ustalić, w coraz bardziej skomplikowanych warunkach obciążenia, rozkład naprężeń i odkształceń w konstrukcjach obciążonych statycznie lub dynamicznie. Można również ocenić wytrzymałość konstrukcji w pewnych stanach granicznych (np. w stanie zniszczenia lub wystąpienia drugiej fazy pracy w konstrukcjach żelazobetonowych — prace M. ARCANA, T. MARKOWA, M. ROCHA).

Obecnie modelowanie stanowi pomoc (często niezbędną, a zawsze istotną) w obliczeniach konstrukcji statycznych i dynamicznych (np. M. de LEIRIS). Modelowanie jest szczególnie przydatne do rozwiązywania problemów, w których warunki obciążania i brzegowe nie mogą być łatwo opisane metodami analitycznymi. Metody modelowe mogą umożliwić sformułowanie wyrażeń obliczeniowych i mogą być również wykorzystane do weryfikacji niektórych teorii i hipotez naukowych. Dotychczasowy rozwój modelowych badań konstrukcji dodaje odwagi naukowcom do doskonalenia metod pracy przez zastosowanie nowoczesnych środków technicznych, a przede wszystkim unikanie rutyny i zwiększenie dokładności. Metody badań wzbogacają się dzięki wprowadzaniu sposobów technicznych stosowanych z powodzeniem w innych dziedzinach (np. zastosowanie lasera gazowego He-Ne do elastooptyki — w pracy F. de LAMOTTE). Również badania teoretyczne z fizyki otwierają perspektywy rozwoju nowych metod badawczych (prace St. BALANA, P. NOVAKA, i E. NICOLAU). Zwraca się też dużą uwagę na znalezienie nowych materiałów umożliwiają-

¹⁾ 1 — R. S. Doroszkiewicz, 2 — S. Kajfasza i R. Wielocha, 3 — Z. Orłosia i Z. Dyląga.

²⁾ 9 prac nadesłanych z opóźnieniem (opublikowanych w dodatkowym tomie czwartym) nie zostało objętych referatami generalnymi.

cych lepsze zmodelowanie pracy konstrukcji (np. prace A. CONSTANTINESCU i A. HEITNER oraz R. DOROSZKIEWICZA).

Ostatecznym kryterium postępu w omawianej dziedzinie jest liczba wybitnych budowli lub konstrukcji specjalnych badanych na modelach.

Pierwszeństwo oddawane przez eksperymentatorów elastooptyce wynika z liczby (50%) i tematyki prac. Okazało się, że do elastooptyki będącej metodą klasyczną, można wciąż wprowadzać liczne udoskonalenia (np. prace R. S. DOROSZKIEWICZA, H. D. GERLACHA, F. de LAMOTTE'A, A. PIRARDA). Czyni to ją użyteczną do rozwiązywania złożonych problemów występujących, np. przy opracowywaniu projektów konstrukcyjnych.

W znacznej większości referatów przedstawiono badanie naprężeń w płaskim stanie naprężenia (lub trójwymiarowym, ale dającym się sprowadzić do płaskiego), co umożliwia najszybsze wyznaczenie składowych stanu naprężenia. Jednym z takich problemów jest zachowanie się budowli wielopiętrowych obciążonych siłami pionowymi oraz poziomym parciem wiatru (np. prace M. ARCANA i A. BRATESCU oraz B. P. VOLPSONA).

W szeregu prac autorzy omawiają badania rozkładu naprężeń w budowlach hydrotechnicznych, a w szczególności w zaporach (np. B. KOUNOVSKY, H. FESSLER i I. TOMA). Niektórzy z nich uwzględniają wpływ odkształcalności podłoża (R. S. DOROSZKIEWICZ, B. KOUNOVSKY), trójwymiarowy stan naprężenia (M. ALLISON, T. ZAHAROVA) lub modelują działanie ciężaru własnego (M. ALLISON i R. S. DOROSZKIEWICZ).

Zastosowaniem maszyn liczących do interpretacji wyników badań elastooptycznych zajmuje się H. D. GERLACH. Podobnie K. R. MUELLER omawia aparaturę do automatycznego opracowania wyników badań tensometrycznych.

Kilka prac ma na celu zmniejszenie ogromnego nakładu pracy (jakiego wymaga całkowanie różniczkowych równań równowagi) i znalezienie techniki bezpośredniego wyznaczania izopach (G. PELZER-BAWIN, B. P. VOLPSON).

W paru pracach przedstawia się lub wspomina o nowych materiałach elastooptycznych, które wykorzystuje się do modelowania obiektów niejednorodnych skokowo (prace A. CONSTANTINESCU i A. HEITNER oraz R. S. DOROSZKIEWICZA).

Natomiast w referatach swych: a) A. PIRARD prowadzi rozważania ogólne na temat zastosowania elastooptyki do wyznaczania zachowania się konstrukcji hiperstatycznych; b) St. BALAN przedstawia technikę badań umożliwiającą analizę pracy konstrukcji w obszarze sprężysto-plastycznym stosując na modele materiał chromoplastyczny; c) B. P. VOLPSON oraz T. MARKOW — badania zachowania się reologicznego modeli; d) P. NOVAK sugeruje stosowanie do badania odkształceń metody stereofotogrametrycznej, z której można korzystać również w przypadku obciążeń dynamicznych; e) E. NICOLAU jest zwolennikiem stosowania micro-betonu wzmocnionego polimerami do modelowania konstrukcji żelbetowych, f) paru autorów korzystało z metody pomnażania izochrom (np. A. ROBERT).

W kilku pracach tematem badań są modele budowli (np. prace R. K. MUELLERA i I. TOMA). Referaty, te przedstawiają badania modelowe ważnych obiektów, z których wyciąga się daleko idące wnioski odnośnie metodologii badań i uzyskuje się interesujące dane co do rozkładu naprężeń i odkształceń w konstrukcji.

Paru eksperymentatorów bada: 1) powłoki (cylindryczne z zastosowaniem maszyn liczących — H. de LEIRIS, oraz kuliste — T. MARKOW); 2) R. KRAPPENBAUER — modele paru konstrukcji specjalnych w tunelu aerodynamicznym na odkształcenia wywołane wiatrem (dwa pawilony i dwie wieże), T. JAVOR — mosty w łuku na belkach ciągłych.

Analiza treści prac pierwszej grupy tematycznej pozwala stwierdzić ciągły i szybki postęp w tym zakresie. Na podkreślenie zasługuje duża wartość prac z elastooptyki i z badań modelowych budowli. Natomiast trudno jest znaleźć zadawalające wytłumaczenie braku prac z zakresu metody Moiré'a. Tym bardziej, że trudności techniczne napotymane przy rozwiązywaniu zagadnień płaskich (np. nanoszenie siatek dostatecznie gęstych i cienkich) zostały już pokonane; interpretacja wyników nie stanowi już problemu; analiza automatyczna i interpretacja za pomocą maszyn liczących nie stawia innych problemów w porównaniu z już rozwiązanymi i przedstawionymi dla elastooptyki. A przecież w badaniach tarcz metoda Moiré'a ma bezsporną dziedzinę zastosowań. Sporadyczne występowanie analogii reoelektrycznej wydaje się łat-

wiejsze do wytłumaczenia, gdyż technika ta jest bliższa obliczeniom analogowym aniżeli modelom fizycznym i obiektom konstrukcji.

Jednakże zasygnalizowane luki w tematyce nie umniejszają wartości konferencji; można by nawet powiedzieć, że same tylko prace I grupy tematycznej wystarczyłyby, aby nadać odpowiednią rangę obradom.

Prace drugiej grupy na temat modeli dużych z materiałów o własnościach podobnych do własności materiałów konstrukcji omówił w swym referacie generalnym J. L. SERAFIN, z Lizbony. Takie modele stosuje się zwykle do badania problemów konstrukcyjnych. Typowymi przypadkami są modele z betonu o drobnziarnistym kruszywie, zaprawy zbrojowej, betonu sprężonego, aluminium i stali konstrukcyjnych. W przypadku konstrukcji budowlanych i mostów, skala modeli z reguły wynosi od 1:3 do 1:20, a w dużych zaporach betonowych — od 1:50 do 1:200. Podobieństwo modelowe może być wymagane jednocześnie: modułu Younga, współczynnika Poissona, wykresów naprężenie-odkształcenie, wytrzymałości doraźne, (granicznej) czy obwiedni kół Mohra (warunek plastyczności), granicznych odkształceń, krzywych pełzania i relaksacji, stałych termicznych (współczynnika rozszerzalności i przewodności cieplnej itd.). Te modele są szczególnie pożyteczne jeśli rozpatruje się zerwanie, pęknięcie lub własności niesprężyste. Na modelach tych przeprowadza się często badania zachowania się konstrukcji pod działaniem obciążeń przypadkowych lub zmiennych, a specjalnie — trzęsień ziemi. Korzystając z modelowej techniki badań i pomiarów można badać modele pojedynczych elementów konstrukcji takich, jak połączenia, fundamenty, zakotwienia, płyty, belki, ściany murowane — w skali do 1:1. Można również badać modele nie odnoszące się do żadnej konkretnej konstrukcji, których celem jest sprawdzenie metod analitycznych (np. praca KAJDUKOWA dotycząca modeli betonowych zbrojonych).

Prace grupy drugiej można by podzielić na następujące podgrupy:

1. Badania statyczne modeli (z mikrobetonu i zaprawy) elementów żelazobetonowych — prace F. PAULA (NRD), M. POMMERETA (Francja), F. S. ROSTASY'EGO (NRF).

2. Badania statyczne modeli (z mikrobetonu i zaprawy) elementów i konstrukcji betonowych sprężonych — prace P. LAUNAY'A i G. MORANCAY'A (Francja), U. ROSSETTI'EGO (Włochy), C. AVRAMA (Rumunia).

3. Badania statyczne modeli (z zaprawy i mikrobetonu) powłok betonowych — prace M. MINHAILESCU i I. UNGUREANU (Rumunia), J. V. SZENKOWA, J. GOHBERGA i B. S. WASILKOWA (ZSRR).

4. Badania statyczne modeli elementów konstrukcji betonowych i stalowych — prace T. HISADY'A (Japonia), M. MINHAILESCU, A. MIHULA, Al. NEGOITA i M. SIMONICI'EGO (Rumunia), J. GOHBERGA i A. B. ZLOCZEWSKIEGO (ZSRR).

5. Badania statyczne modeli konstrukcji metalowych — prace L. BOLEANTU, D. MATEESCU i I. UNGUREANU (Rumunia).

6. Badania dynamiczne modeli konstrukcji sprężonych i stalowych — prace F. D. BERESFORDA (Australia), L. STRATA (Rumunia), M. M. KOBRINA (ZSRR), E. P. POPOVA (USA).

7. Badania odporności (wytrzymałości) na trzęsienie ziemi modeli konstrukcji ramowych, płyt i ich połączeń — prace D. D. NICULESCU i G. SERBANESCU (Rumunia), S. V. POLJAKOWA (ZSRR).

8. Materiały, technika i aparatura do dynamicznych oraz sejsmicznych badań modelowych — prace M. A. WARDA (Kanada), J. PEREIRA (Portugalia), J. E. TJABLIKOWA (ZSRR).

Prace trzeciej grupy dotyczącej badań elementów i konstrukcji o wymiarach naturalnych zreferował J. HAJEK, z Bratisławy. Badania takie są na ogół dość kosztowne. Dlatego też przystępuje się do nich jedynie po poważnym rozważeniu czy wyniki jakich się oczekuje będą odpowiadały poniesionym kosztom badań. Jest prawdą, że często nie można wyrazić efektów badań w liczbach. Istnieje wiele zagadnień zachowania się konstrukcji pod obciążeniami statycznymi i dynamicznymi, które można rozwiązać jedynie za pomocą badań elementów i konstrukcji o wymiarach naturalnych. Na metody takich badań wpływa wiele czynników, a przede wszystkim: a) cel badań, b) typ konstrukcji lub elementu, c) miejsce budowy elementu lub konstrukcji w czasie badań, d) sposób obciążenia, e) czas działania obciążenia, f) materiał, z którego element lub konstrukcją jest wykonana, g) zdatność użytkowa elementu lub konstrukcji po badaniu, h) kryteria na podstawie których decyduje się czy element lub konstrukcja nadaje się do pracy w danym celu.

Prace trzeciej grupy tematycznej Konferencji RILEM stanowią wkład o dużej wartości z punktu widzenia metodologii i techniki badań elementów i konstrukcji o wymiarach naturalnych. Obok badań po-

jedynczych elementów można stwierdzić tendencję do badania całych konstrukcji i ich części, o ile możliwości w warunkach laboratoryjnych. Tam można łatwiej korzystać z automatyzacji prac pomiarowych i tamże jest zapewniona znacznie wyższa dokładność wyników pomiaru. Pomimo tego wydaje się, że trzeba będzie rozwijać nadal metody badań obiektów zrealizowanych. Chociaż liczba prac zrealizowanych jest już dość znaczna daleko jeszcze do wyczerpania wszystkich zagadnień odnoszących się do metod badań elementów i konstrukcji o wymiarach naturalnych.

Wiele z prac grupy trzeciej zajmuje się metodami badań elementów i konstrukcji betonowych, mniej — konstrukcjami metalowymi i jedynie mały procent — konstrukcjami wykonanymi z innych materiałów. Najczęściej występującymi w tych pracach konstrukcjami betonowymi są ustroje zbrojone (sprężone i zwykłe). Należałoby je uzupełnić badaniami konstrukcji nie zbrojonych i z betonu lekkiego. Poza tym wydaje się, że dość mało uwagi poświęcono badaniom pod obciążeniami długotrwałymi.

Odnosnie typów konstrukcji zauważyć można, że brakowało prac dotyczących badań normowych (kwalifikacyjnych) konstrukcji mostów.

W oparciu o prace omawianej grupy tematycznej można stwierdzić, że przekłada się nad innymi badaniami możliwie wielkich zespołów aż do zniszczenia (zerwania). J. HAJEK uważa, że przedstawione w różnych pracach możliwości rekonstrukcji systemów zabudowy miast nie są dostatecznie wykorzystywane. W tych przypadkach zdarza się często, że trzeba niszczyć obiekty które stanowią przeszkody w rozwoju projektów rekonstrukcji. Czasem są to budynki, ale nicraz również i mosty. Przed ich rozbiórką byłoby pożyteczne poddać je badaniom, które można by doprowadzić aż do zniszczenia.

Można stwierdzić, że technika pomiaru osiągnęła znaczny postęp. Liczba punktów pomiaru, przede wszystkim jeśli chodzi o pomiary dokonywane w laboratorium, jest bardzo wielka. Dzisiaj nie ma żadnego problemu z zarejestrowaniem na przykład linii ugięcia belki z możliwością wykrycia nawet miejscowego pęknięcia. Pomimo tego, musimy jeszcze poczekać zanim będzie możliwe obserwowanie z daleka, w ciągu okresów stosunkowo długich, zmiany pewnych wielkości statycznych i dynamicznych w obiektach wykonanych. Dotychczasowe wysiłki rozbijają się tu o problem rejestracji telemetrycznej obciążeń. Jednakże wydaje się, że nawet pomiar odkształceń na odległość w pewnych wielkich obiektach poddawanych wpływom, których charakteru nie znaliśmy w pełni w czasie obliczania, byłby bardzo pożyteczny. Mógłby on dostarczyć z jednej strony danych dla kontroli bezpieczeństwa pracy obiektu, a z drugiej strony — pogłębić dane służące za podstawę do projektów i obliczeń.

R. S. Doroszkiewicz, Warszawa

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS NA PRACE DOŚWIADCZALNE Z MECHANIKI

Gliwicki Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS w Warszawie organizuje w 1970 roku Ogólnokrajowy Konkurs na prace z zakresu badań doświadczalnych w mechanice.

Prace konkursowe — zawierające elementy nowości w stosunku do obecnego stanu wiedzy — należy przysyłać do sekretariatu Oddziału Gliwickiego PTMTS w Gliwicach ul. Katowicka 2, pok. 835, Wydział Górniczy Politechniki Śląskiej, Katedra Geodezji i Ochrony Powierzchni w terminie do dnia 30 października 1970 r.

Objętość pracy nie powinna przekraczać w zasadzie 20 stron maszynopisu, prosimy o przesłanie prac w trzech egzemplarzach, w formie nadającej się do druku, podpisane imieniem i nazwiskiem z podaniem adresu.

Prace nie mogą być przed tym terminem opublikowane ani złożone do druku poza kwartalnikiem MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA. Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału.

Łączna wysokość nagród wynosi 25 000 zł. Konkurs jest ograniczony, dostępny tylko dla członków PTMTS.

Nagrodzone prace zostaną opublikowane w czasopiśmie MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA.

Sekretarz

Oddziału Gliwickiego PTMTS

(—) Doc. dr hab. inż. J. Antoniak

Przewodniczący

Oddziału Gliwickiego PTMTS

(—) prof. dr inż. T. Kochmański

KONKURS

Zarząd Oddziału Warszawskiego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej ogłasza ogólnokrajowy konkurs na najlepszą pracę teoretyczną z mechaniki, w zakresie zastosowań inżynierskich.

Konkurs jest ograniczony i mogą brać w nim udział tylko członkowie PTMTS.

Na konkurs należy zgłaszać prace oryginalne, nie publikowane dotąd (ewentualnie opublikowane w roku 1970) i nie zgłoszone na żaden inny konkurs.

Prace o objętości nie przekraczającej w zasadzie 20 stron maszynopisu, w trzech egzemplarzach, w formie nadającej się do druku, podpisane nazwiskiem z podaniem adresu, należy przesyłać w terminie do dnia 1 października 1970 r., pod adresem Sekretariatu Oddziału Warszawskiego PTMTS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, pokój nr 1724.

Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału.

Przewiduje się następujące nagrody:

- I — zł. 12 000.—
- II — zł. 8 000.—
- III — zł. 5 000.—

Zarząd Oddziału zastrzega sobie prawo nieprzyznawania lub innego podziału nagród.

Organ Towarzystwa MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA będzie miał pierwszeństwo w opublikowaniu prac nagrodzonych i wyróżnionych na konkursie.

Sekretarz
Oddziału Warszawskiego PTMTS
(—) *doc. dr Przemysław Jastrzębski*

Przewodniczący
Oddziału Warszawskiego PTMTS
(—) *prof. dr Zbigniew Olesiak*

ZAGADNIENIA PLASTYCZNOŚCI
MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM Z PODSTAW PLASTYCZNOŚCI
Warszawa, wrzesień 1972

Komunikat wstępny

CEL: Analiza koncepcji plastyczności na podstawie najnowszych osiągnięć mechaniki kontinuum, termodynamiki i związanych gałęzi fizyki.

MIĘDZYNARODOWY KOMITET NAUKOWY: J. M. ALEKSANDER, D. C. DRUCKER, L. FINZI, A. E. GREEN, P. G. HODGE, H. C. HOPKINS, A. A. ILJUSZYN, W. T. KOJTER, J. MANDEL, P. M. NAGHDI, W. NOWACKI, F. K. G. ODQVIST, W. OLSZAK, E. T. ONAT, W. PRAGER, JU. N. RABOTNOW, L. I. SIEDOW, W. W. SOKOŁOWSKI, T. Y. THOMAS, C. TRUESDELL, H. ZIEGLER.

ZAKRES: Teoretyczne i doświadczalne badania równań konstytutywnych plastyczności i ich zastosowania do rozwiązywania technicznie ważnych zagadnień brzegowych. W szczególności przewiduje się zagadnienia następujące:

- a) podstawy fizyczne plastyczności (np. submikroskopowe aspekty deformacji plastycznych),
- b) podstawy termodynamiczne plastyczności i lepkoplastyczności,
- c) teorie równań konstytutywnych plastyczności (np. aksjomatyka, koncepcje matematyczne, wybór zmiennych itp.),
- d) doświadczalne podstawy teorii (weryfikacja nowych koncepcji, plastyczność przy wysokich temperaturach i dużych szybkościach deformacji, nadplastyczność itp.),
- e) metody rozwiązań i rozwiązania technicznie ważnych zagadnień z uwzględnieniem nowych technik obliczeniowych.

PRACE: Selekcja prac zostanie przeprowadzona z udziałem Międzynarodowego Komitetu Naukowego Sympozjum. Decyzja włączenia do programu będzie podjęta na podstawie pełnego tekstu pracy. Główne prace zostaną opublikowane w formie książkowej; książka będzie dostępna przed otwarciem Sympozjum.

INFORMACJE: Streszczenia prac należy nadsyłać do 30 listopada 1970 r. Ostateczny tekst pracy nie przekraczający 20 stron maszynopisu powinien być nadesłany do końca sierpnia 1971 r. Dalsze informacje będą dostarczane zainteresowanym osobom za pośrednictwem Biuletynów Sympozjum.

ADRES dla korespondencji i zapytań: prof. dr A. SAWCZUK, Polska Akademia Nauk, IPPT, Warszawa 1, Świętokrzyska 21.

SYMPOZJA PTMTS W DRUGIM PÓŁROCZU 1970 R.

K o m u n i k a t

Oddział w Gliwicach zamierza zorganizować w dniach 24—27 października 1970 r. sympozjum na temat «Problemy tarcia i zużycia w urządzeniach transportu górniczego» z udziałem 40 osób.

Oddział w Poznaniu planuje zorganizowanie w październiku 1970 r. ogólnopolskiej konferencji na temat «Drgania nieliniowe» z udziałem 100 osób.

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane piśmem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronice z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3 itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

9. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

10. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

11. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

12. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

13. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

14. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZKEJ I STOSOWANEJ, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

STANISŁAW OCHEŃDUSZKO — Wspomnienie pośmiertne

- M. JANAS, A. SAWCZUK, Zagadnienia plastycznej analizy powłok (kierunki badań w Polsce w dzie-
sięcioleciu 1960–1969)
Вопросы анализа пластических оболочек (направления польских исследований 1960–
1969)
Problems in plastic analysis of shells (research trends in Poland for the decade 1960–1969)
- B. DUSZCZYK, Ograniczenia na funkcję energii sprężystej wynikające z warunku silnej eliptyczności
Ограничения накладываемые условием сильной эллиптичности на функцию упругой
энергии
Limitations implied on the elastic energy function by the strong-ellipticity condition
- W. WOJNO, Uwagi o infinitesimalnej teorii materiałów sprężysto/lepkoplastycznych
Замечания к инфинитезимальной теории упруго-вязкопластических материалов
Notes on the infinitesimal theory of elastic/viscoplastic materials
- L. KONIECZNY, Teoria przystosowywania się belek
Теория приспособляемости балок
Shake-down theory of beams
- P. KLEMM, CZ. WOŹNIAK, Gęste heksagonalne siatki sprężyste
Плотные гексагональные упругие решетки
Dense elastic lattices of hexagonal type
- T. WEDNARSKI, Pomiar odkształceń plastycznych membrany kolowej obciążonej impulsem ciśnienia
Измерения пластической деформации круговой мембраны при импульсной нагрузке
The measurement of the dynamic plastic deformation of a circular membrane
- J. KARKOWSKI, Granice obszarów plastycznych w rozciąganych elementach z karbem lub otworem
Границы пластических областей в растягиваемых элементах с надрезом или отвер-
стием
Elastic-plastic boundaries in notched specimens under tension

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauk, piętro 17, pokój 1724)
