

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 8 • ZESZYT 1



WARSZAWA 1970

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

<p>G. N. SAWIŃ, A. N. GUŻ, A. S. KOSMODAMIANSKI, Zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych dla obszarów niekanonicznych (Przegląd prac radzieckich)          Задачи механики сплошных сред для неканонических областей (Обзор советских статей)          Problems of mechanics of continuous media for non-canonical regions (Survey of Soviet papers)</p>	3
<p>A. LITEWKA, Modelowanie płaskich sprężystoplastycznych zagadnień metodą fotoplastyczności          Моделирование плоских упруго-пластических задач методом фотопластичности          The modeling of the plane elasto-plastic problems by means of the photoplastic method</p>	19
<p>W. TOMCZAK, L. BULZAK-MROZOWSKA, Wyznaczenie pola temperatury i pola strumienia ciepłego w przegrodzie wielowarstwowej przy harmonicznym zmiennym przepływie ciepła          Определение температурного поля и поля теплового потока в многослойной стенке при изменяющемся по гармоническому закону тепловом потоке          Determination of the temperature and heat flux field in a multi-layer diaphragm at harmonic heat flow</p>	27
<p>S. KALISKI, O przybliżonym integralnym oszacowaniu kumulacji plazmy poddanej działaniu koncentrycznego impulsu ciśnienia          О приближенной интегральной оценке кумуляции плазмы подвергнутой действию концентрического импульса давления          On an approximate, integral determination of cumulation of the plasma under the action of the concentric pressure impulse</p>	37
<p>W. GAWROŃSKI, Analiza pewnego układu nieliniowego przy wymuszeniu stochastycznym          Анализ одного класса нелинейной системы со случайным возмущением          Analysis of one class nonlinear system to stochastic excitation</p>	45
<p>S. BORKOWSKI, Naprężenia kontaktowe w półpłaszczyźnie sprężystej o wzmocnionym brzegu          Контактные напряжения в упругой полуплоскости с подкрепленным краем          Contact stresses in elastic half-plane with stiffened boundary</p>	55
<p>Z. J. PIĘKARSKI, G. SZEFER, O pewnym przypadku pełzania półpłaszczyzny z nieciągłymi warunkami brzegowymi          Об одном случае ползучести полуплоскости с разрывными краевыми условиями          On a certain case of creep of a half-plane with discontinuous boundary conditions</p>	63
<p>J. KŁEPACZKO, Uogólnione warunki stateczności w próbie rozciągania          Обобщенные условия устойчивости при испытаниях на растяжение          Discussion of the generalized conditions for stability in the tension test</p>	75
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	93

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 8 • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 7 0

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, BARBARA  
SKARŻYŃSKA, MAREK SOKOŁOWSKI,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI, STEFAN ZAHORSKI  
— REDAKTOR NACZELNY

## РЕДАКЦИЯ

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 730 (605+125) egz. Arkuszy wydawn. 7,75. Arkuszy drukarskich 6,5. Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składania 22.X.1969 r. Druk ukończono w lutym 1970 r. Zam. 1955/69. P-81. Cena zł 30.—

Druk. im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

ZAGADNIENIA MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
DLA OBSZARÓW NIEKANONICZNYCH

PRZEGLĄD PRAC RADZIECKICH

G. N. SAWIN, A. N. GUŻ, A. S. KOSMODAMIANSKIJ  
(KIJÓW, DONIECK)

Ostatnio w pracach autorów niniejszego przeglądu, ich współpracowników i kontynuatorów rozpatrywane były poszczególne klasy zagadnień mechaniki ośrodka ciągłego dla niekanonicznych (tj. nie dających możliwości otrzymania rozwiązania metodą bezpośredniego rozdzielenia zmiennych) obszarów jednoczłonowych i wieloczłonowych. Są to zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w powłokach, płaskie zagadnienia momentowej teorii sprężystości, płaskie zagadnienia dynamicznej teorii sprężystości, dwuwymiarowe zagadnienia fizycznie nieliniowej teorii, zagadnienia aerohydrodynamicznej teorii sprężystości dla cieczy ściśliwej i nieściśliwej, problemy zginania płyt z punktu widzenia różnych uściślonych teorii, zagadnienia zginania płyt na podłożu sprężystym, zagadnienia opływu przez strumień cieczy, płaskie zagadnienia dla ośrodków wieloczłonowych i inne.

Przy rozwiązywaniu tych zagadnień stosuje się pewne jednolite podejście oparte na zastosowaniu metod teorii perturbacji i konstruowaniu nieskończonych quasi-regularnych układów algebraicznych, do rozwiązania których sprowadzają się wymienione zagadnienia. Zastosowanie tych metod w innych, zbliżonych dziedzinach również daje możliwość rozpatrzenia obszernych klas zagadnień.

Niniejsza praca poświęcona jest krótkiemu przeglądowi wspomnianego kręgu zagadnień.

### 1. Obszary jednoczłonowe

Gdy rozwiązania problemów dają się przedstawić w postaci funkcji harmonicznych, rozwiązanie zagadnień brzegowych dla obszarów jednoczłonowych upraszcza się znacznie, w tym sensie, że zmienne w równaniu Laplace'a dają się rozdzielić praktycznie dla wszystkich stosowanych układów współrzędnych. Dla wielu zagadnień rozwiązania ogólne wyrażone są przez rozwiązania równań Helmholtza, co znacznie zawęża krąg zagadnień, które można rozwiązać za pomocą rozdzielenia zmiennych.

Zastosowanie metody perturbacji kształtu granicy, związanej z parametrem charakteryzującym odchylenie od obszaru kanonicznego, pozwala w każdym z przybliżeń na sprowadzenie zagadnienia brzegowego do zagadnienia brzegowego dla obszaru kanonicznego.

Trudność znalezienia rozwiązań szczególnych dla krzywoliniowych układów współrzędnych komplikuje zastosowanie metody perturbacji kształtu granicy do praktycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych.

W celu pokonania wskazanych trudności zaproponowano pewien wariant metody perturbacji kształtu granicy, sprowadzający problem w każdym przybliżeniu do rozwiązania jednorodnych równań różniczkowych. W celu spełnienia warunków granicznych wyznaczono operatory różniczkowe, konieczne przy rozwiązywaniu zagadnień w zerowym, pierwszym i drugim przybliżeniu. Postać tych operatorów określona jest głównie nie przez samą postać warunków granicznych, a przez kształt obszaru. Wspomniane uproszczenia zostały osiągnięte dzięki temu, że rozwiązania równań podstawowych rozważane były w współrzędnych związanych z kształtem, w określonym sensie bliskiego obszaru kanonicznego, a przejście do współrzędnych związanych z kształtem obszaru niekanonicznego dokonywane było przy spełnieniu warunków brzegowych. Pierwszą pracą, w której podano taki wariant metody perturbacji kształtu granicy dla niektórych obszarów w zastosowaniu do zagadnień koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w powłokach, w sformułowaniu G. N. SAWINA, była praca A. N. GUZIA [27]. W pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [131] zaproponowano zastosowanie tego wariantu metody perturbacji kształtu granicy do badania zagadnień koncentracji naprężeń w powłokach w pobliżu dowolnych krzywoliniowych otworów o gładkim profilu, przy czym, w charakterze obszaru kanonicznego przyjęto obszar nieskończony z otworem kołowym. Do chwili obecnej brak ścisłego dowodu zbieżności metody perturbacji kształtu granicy w postaci [27] i [131], jednak przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień wykazano jej praktyczną zbieżność. Przy pomocy tej metody zostały rozwiązane rozpatrzone poniżej klasy zagadnień.

Za pomocą tej metody rozwiązano liczne zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu krzywoliniowych otworów w powłokach. Tak więc w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [133] metodę tę zastosowano w zagadnieniach koncentracji naprężeń w pobliżu otworów w powłokach, których brzegi wzmocnione były za pomocą cienkich żeber sprężystych; zbadano także rozkład naprężeń w pobliżu eliptycznego wzmocnionego otworu w powłoce sferycznej. Przypadek swobodnego otworu eliptycznego w powłoce sferycznej rozpatrzony jest w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [130], zaś przypadek kwadratowego i równobocznego trójkątnego otworu z zaokrąglonymi narożami w pracach A. N. GUZIA [32] i [37]. Stan naprężenia w pobliżu otworów analogicznego kształtu w powłoce sferycznej, zakrytych idealnie sztywnymi pokrywami, zbadany był w pracy K. I. SZNERIENKO [152]. Przypadek złącza powłoki sferycznej z pochyłym krótkim cylindrem rozpatrywany był przez B. A. KUDRIAWCEWA [116].

Rozkład naprężeń w pobliżu małych otworów: eliptycznego oraz w kształcie kwadratu i trójkąta równobocznego z zaokrąglonymi narożami w obrotowej powłoce walcowej, przy różnych obciążeniach, zbadany został w pracach G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [131], A. N. GUZIA [29, 30, 34, 36, 47], A. N. GUZIA i S. A. GOŁOBORODKO [49] i S. A. GOŁOBORODKO [18].

Metoda przedstawiona w pracach [27] i [131] została zastosowana w pracach W. D. KUBIENKO [111—115] do zbadania płaskich zagadnień dyfrakcji fal sprężystych na walcach krzywoliniowych. Zbadano dynamiczne zagadnienia koncentracji naprężeń w pobliżu otworu eliptycznego i kwadratowego z zaokrąglonymi narożami pod działaniem fal po-

przecznym i podłużnym, jak również pod działaniem oscylującego ciśnienia. Zauważono, że przy określonych długościach fal maksymalny współczynnik koncentracji osiągniany jest w pewnej odległości od brzegu.

W monografii G. N. SAWINA [137] rozpatrzono płaskie zagadnienia momentowej teorii sprężystości dla dwu wariantów sformułowania zagadnień, przytoczono podstawowe relacje metody perturbacji kształtu granicy w postaci [27] i [131], niezbędne przy rozwiązywaniu zagadnień dla otworów krzywoliniowych, zbadano również rozkład naprężeń na brzegu otworu eliptycznego. W pracach J. N. NIEMISZA [126—128] za pomocą powyższej metody zbadano rozkład naprężeń dla otworów eliptycznych, kwadratowych z zaokrąglonymi narożnikami, a także otworów innych kształtów przy różnego rodzaju obciążeniach; rozpatrzono wpływ sztywności pierścieni wzmacniających i określono rolę naprężeń momentowych. W pracach tych wyjaśniono zagadnienie maksymalnego wpływu naprężeń momentowych na wielkość koncentracji naprężeń przy różnego rodzaju obciążeniach i różnych promieniach zaokrąglenia naroży.

Zagadnienie określenia oporu ciał o nieopływowych kształtach, przy zlinearyzowanym sformułowaniu, sprowadza się do rozwiązania równań Naviera—Stokesa zlinearyzowanych według Oseena. W pracach E. W. BRUNIACKIEGO [5] i [6] metoda perturbacji kształtu brzegu w postaci [27] i [131] została zastosowana do badania oporu walców o krzywoliniowym konturze przekroju poprzecznego. Rozpatrzono, przy różnych kątach natarcia, walce eliptyczne, jak również walce o przekroju w postaci kwadratu i trójkąta równobocznego z zaokrąglonymi narożnikami. Otrzymano rozwiązania uwzględniające zerowe, pierwsze i drugie przybliżenie i porównano je z danymi doświadczalnymi.

Obszerny program badań poświęcono dwuwymiarowym zagadnieniom fizycznie nieliniowego ciała, dla którego podstawowe zależności przyjęto w postaci Kauderera. Pierwszą pracą poświęconą krzywoliniowym otworom była praca G. N. SAWINA, A. N. GUZIA i I. A. CURPAŁA [132], w której zaproponowano metodę rozwiązywania płaskich, fizycznie nieliniowych zagadnień teorii sprężystości dla nieskończonej płaszczyzny osłabionej przez krzywoliniowy otwór. Została tu w sposób istotny wykorzystana metoda perturbacji kształtu granicy w postaci [27] i [131]. W tej samej pracy zbadano rozkład naprężeń w pobliżu otworu eliptycznego przy wszechstronnym rozciąganiu. Wypadek kwadratowego otworu z zaokrąglonymi narożnikami rozpatrzony jest w pracy I. A. CURPAŁA [139]. Szereg zagadnień dotyczących krzywoliniowych otworów, tak swobodnych jak i wzmocnionych, przy różnego rodzaju obciążeniach zbadano w pracach I. A. CURPAŁA [140, 144, 145, 147]. Analogiczne zagadnienia dotyczące koncentracji naprężeń termicznych w fizycznie nieliniowej płycie rozpatrzone były w pracy I. A. CURPAŁA [141], a w pracy I. A. CURPAŁA i N. A. SZULGI [138] metoda ta została rozszerzona na przypadek wyznaczania koncentracji naprężeń w pobliżu otworów krzywoliniowych w powłokach, przy fizycznie nieliniowym prawie sprężystości.

W pracach N. A. SZULGI [154—156] rozpatrzono było wyznaczanie stanu naprężenia w pobliżu otworu eliptycznego oraz kwadratowego i trójkątnego z zaokrąglonymi narożnikami, przy zginaniu cienkiej, fizycznie nieliniowej płyty sprężystej.

We wszystkich tych pracach otrzymano liczne wyniki liczbowe ilustrujące wpływ fizycznej nieliniowości materiału na wartość współczynnika koncentracji naprężeń. Przegląd tych wyników zawarty jest w pracy G. N. SAWINA, A. N. GUZIA i I. A. CURPAŁA [136].

Dla przypadku podstawowych zależności innych niż sformułowane przez Kauderera, koncentracja naprężeń w pobliżu otworów krzywoliniowych w płycie rozpatrzona została w pracach I. A. CURPAŁA [142] i [146].

## 2. Obszary wielospójne

Przy badaniu wielu zagadnień dla obszarów wielospójnych o kołowych, krzywoliniowych brzegach, wskutek występowania w rozwiązaniu ogólnym funkcji spełniających równanie Helmholtza komplikuje się znacznie proces wyznaczania rozwiązania. W tym przypadku, już nawet we współrzędnych dwubiegunowych, zmienne nie dają się rozdzielić. Dla rozwiązywania takich zagadnień zaproponowano metodę będącą kombinacją metody perturbacji kształtu granicy w postaci [27, 131] i metody Schwarza. Rozwiązanie przyjmuje się w postaci sumy rozwiązań zupełnych dla odpowiednich wewnętrznych i zewnętrznych obszarów w biegunowym układzie współrzędnych. W charakterze małego parametru wybiera się największy z parametrów charakteryzujących odchylenie kształtu każdego z obszarów jednospojnych od kształtu kołowego. Stosuje się metodykę opracowaną w pracy [131] w wyniku czego, w każdym z przybliżeń, otrzymuje się zagadnienie brzegowe dla obszaru o odpowiednim stopniu spójności, jednakże ograniczonego już teraz okręgami. Takie podejście zostało urzeczywistnione w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZIA [134] oraz w pracy A. N. GUZIA [49], gdzie skonstruowane zostały operatory dla zerowego, pierwszego i drugiego przybliżenia przy dowolnych kształtach granicy bez załomów.

Przy rozwiązywaniu zagadnień dla obszarów wielospójnych ograniczonych okręgami stosuje się rozkłady funkcji harmonicznych od jednego bieguna do drugiego [134] i wykorzystuje się wnioski wynikające z twierdzenia o dodawaniu dla funkcji walcowych. Wnioski te, dla zagadnienia zewnętrznego i zagadnienia wewnętrznego, przytoczone były w pracy A. N. GUZIA [44]. Wykorzystuje się zamianę nieznanymi stałymi i przy określonej gładkości prawych stron warunków granicznych udaje się wykazać, że w przypadku obszaru o skończonej spójności otrzymane nieskończone układy mają wyznacznik typu normalnego, co uzasadnia możliwość zastosowania metod przybliżonych. Jeżeli odpowiednie zagadnienie brzegowe posiada jednoznaczne rozwiązanie, to okazuje się, że odpowiedni nieskończony układ równań algebraicznych ma jednoznaczne zbieżne rozwiązanie. Analogiczna metoda została niezależnie zaproponowana dla zagadnień dyfrakcji fal elektromagnetycznych na walcach w przestrzeni nieskończonej w pracach J. A. IWANOWA (tylko dla zagadnienia zewnętrznego)<sup>1)</sup>.

W pracy W. T. GOŁOWCZANA [25] rozwinięta została, oparta na zastosowaniu związków Lommela, metoda badania układów nieskończonych dla zagadnień periodycznych.

Rozpatrzona powyżej metoda zastosowana była do szeregu zagadnień ośrodka mechanicznie ciągłego dla obszarów wielospójnych o brzegach kołowych. Zatrzymamy się na niektórych spośród nich.

W pracach A. N. GUZIA [35, 48] została zaproponowana metoda rozwiązywania zagadnień równowagi powłok walcowej i sferycznej osłabionych przez skończoną liczbę

<sup>1)</sup> J. A. Iwanow, *Dyfrakcja elektromagnitnych wołn na dwuch tielach*, Izd-wo „Nauka i Tiejchnika”, Minsk 1968.



otworów kołowych, a w pracach [38, 39, 48] wyniki te zostały uogólnione na przypadek zagadnień okresowych i podwójnie okresowych. Badanie układów nieskończonych dla powłoki sferycznej, tak w przypadku skończonej liczby otworów, jak i w przypadku zagadnienia okresowego, było przeprowadzone w pracach A. N. GUZIA [40], A. N. GUZIA i K. I. SZNIERIENKO [52], i W. T. GOŁOWCZANA i K. I. SZNIERIENKO [21], rozwiązaniom konkretnych zagadnień poświęcone są prace [41, 50, 153].

W pracy B. L. PIELECHA [129] metodę opisaną w pracach [134] i [48] zastosowano do rozwiązania zagadnień zginania płyt dla obszarów wielospójnych w teorii płyt typu Timoszenki. Okazało się, że można tu przenieść wszystkie wyniki otrzymane dla powłok i dla płaskiego zagadnienia momentowej teorii sprężystości.

Praca A. N. GUZIA i S. F. SZYSZKANOWEJ [53] poświęcona jest badaniu zagadnień zginania płyt na podłożu sprężystym, dla przypadku obszarów wielospójnych ograniczonych za pomocą okręgów. W przypadku określonej gładkości prawych członów warunków brzegowych, udało się udowodnić quasi-regularność nieskończonych układów i jednoznaczność rozwiązań.

G. N. SAWIN i A. N. GUZ [134, 135] zaproponowali metodę rozwiązywania płaskich zagadnień momentowej teorii sprężystości dla obszarów wielospójnych, ograniczonych przez gładkie brzegi bez załomów. W pracach tych podano operatory dla zerowego, pierwszego i drugiego przybliżenia dla dowolnych otworów, jak również podstawowe nierówności służące do badania nieskończonych układów dla obszaru o dowolnej spójności. W charakterze przykładu rozpatrzono rozwiązanie zagadnienia dla nieskończonej płaszczyzny osłabionej przez dwa jednakowe kołowe otwory. Materiał zawarty w pracach [134, 135] stanowi podstawę rozwiązań obszernej klasy zagadnień odnoszących się do wyjaśnienia wpływu asymetrii tensora naprężenia na koncentrację naprężeń w obszarach wielospójnych.

W pracach A. N. GUZIA i I. A. CURPAŁA [55, 56] rozpatrywaną metodę uogólniono na rozwiązanie płaskich, fizycznie nieliniowych problemów teorii sprężystości dla obszarów wielospójnych, ograniczonych za pomocą okręgów (korzystając z podstawowych związków w postaci Kauderera.) Dla znalezienia rozwiązań szczególnych, prawe strony rozkładano w szeregi zbieżne w kole, którego promień równy był odległości od środka najbliższego otworu. Rozpatrzono przykład liczbowy dla nieskończonej płyty osłabionej przez dwa otwory kołowe i określono wpływ nieliniowości materiału.

W szeregu prac metoda rozwinięta w pracach [134, 48] stosowana była do badania zjawisk dynamicznych w układzie składającym się z pewnej liczby niekoncentrycznych powłok walcowych z przepływającą pomiędzy nimi cieczą ściśliwą i nieściśliwą. Skonstatowano szereg zjawisk powstających na skutek wzajemnego oddziaływania pomiędzy powłokami. Do tego cyklu należy zaliczyć prace W. N. BUJWOŁA i W. T. NOWACKIEGO [8], W. N. BUJWOŁA i A. N. GUZIA [10—13].

W pracach W. T. GOŁOWCZANA [22—26], W. T. GOŁOWCZANA i A. N. GUZIA [20, 54] i A. N. GUZIA [42, 44] zbadano płaskie dynamiczne zagadnienia teorii sprężystości dla skończonego i nieskończonego obszaru o skończonej spójności, oraz zagadnienia okresowe i podwójnie okresowe, przy czym te ostatnie rozpatrywano również i dla ciała lepkosprężystego. W pracach tych przeanalizowano układy nieskończone, oceniono rząd niewiadomych

i rozpatrzono konkretne zadania. Skonstatowano szereg ciekawych zjawisk charakterystycznych dla dynamiki i zbudowano krzywe rezonansowe.

### 3. Wykorzystanie teorii funkcji zmiennej zespolonej dla izotropowych ciał wielospójnych

W pierwszych dwu rozdziałach rozpatrywano metody pozwalające na skuteczne pokonywanie trudności powstających przy badaniu stanu naprężeń ośrodków w tych przypadkach, gdy zmienne nie dają się rozdzielić w sposób naturalny. Przy rozwiązywaniu wspomnianych zagadnień stosowano zmienne rzeczywiste.

Przy korzystaniu w szeregu zagadnień ze zmiennych zespolonych dają się zaobserwować analogiczne zjawiska. Podczas gdy dla jednospójnych płaskich ciał izotropowych, ograniczonych gładkimi brzegami, w warunkach brzegowych zawsze możliwe jest rozdzielenie zmiennych w sposób naturalny, to dla ciał wielospójnych takie rozdzielenie nie daje się przeprowadzić.

Należy zauważyć, że autorzy przeglądu podchodzą w sposób jednolity do rozwiązania zagadnień dla ciał wielospójnych przy zastosowaniu tak zmiennych zespolonych, jak i rzeczywistych. Ogólność tego podejścia polega na zbudowaniu metod przewidujących, przy rozpatrywaniu ciał wielospójnych, branie za podstawę kolejno jednego z brzegów obszaru, uwzględniając przy tym wpływ sąsiednich brzegów na stan naprężenia ośrodka. Wpływ ten uwzględnia się poprzez rozkład poszukiwanych funkcji w szeregi zbieżne na danym brzegu. Szeregi te buduje się w różny sposób w zależności od badanego zagadnienia. Podejście takie pozwala na sprowadzenie zagadnienia do rozwiązania nieskończonego układu algebraicznego, który, jak się okazuje, jest quasi-regularny przy dowolnym zbliżeniu brzegów ciała wielospójnego.

Ten ostatni fakt pozwala na otrzymanie metodą redukcji rozwiązania nieskończonego układu algebraicznego w dowolnym przybliżeniu.

Metoda ta przy wykorzystaniu zmiennych zespolonych dla izotropowych i anizotropowych ciał wielospójnych opracowana została w szeregu prac A. S. KOSMODAMIANSKIEGO.

Należy zauważyć, że częstokroć celowe jest otrzymanie od razu obciążonego, skończonego układu algebraicznego bez uprzedniego wyznaczenia układu nieskończonego. Pozwala to w sposób najprostszy i dostatecznie dokładny na przeprowadzenie odpowiedniej analizy stanu naprężeń badanego ciała.

Do najprostszych tego typu zagadnień należy zaliczyć skręcanie i zginanie siłą poprzeczną prętów wielospójnych. Zagadnienia takie zostały zbadane przez A. S. KOSMODAMIANSKIEGO w pracach [66—68, 100].

Zauważmy, że przy skręcaniu i zginaniu prętów anizotropowych nie powstają żadne nowe zasadnicze trudności, ponieważ wszystkie te zagadnienia sprowadzają się do całkowania przy różnych warunkach brzegowych równania harmonicznego z prawą stroną [69].

Badanie stanu naprężenia płaskich izotropowych ciał wielospójnych najprościej jest przeprowadzić w przypadku granic kołowych. Takie rozwiązania zamieszczone są w pracach [59, 70—80, 103, 104, 117].

Analogicznie konstruuje się rozwiązania zagadnień zginania wielospójnych izotropowych cienkich płyt [60, 81—84].

Dla wszystkich tych zagadnień efektywne wyniki otrzymuje się przez badanie rozkładu poszczególnych funkcji w szeregi według małego parametru związanego z odległościami pomiędzy brzegami otworów.

Przy rozważaniu ciał wielospójnych ograniczonych brzegami o kształcie eliptycznym, pojawiają się istotne trudności w tych przypadkach, gdy odległości pomiędzy konturami są małe. Tutaj rozkład w szereg według małego parametru staje się nieefektywny. W tych przypadkach celowo jest przeprowadzać wspomniany rozkład według wielomianów Fabera. Takie podejście opisane jest w pracach [4, 57, 58, 86].

Dla ciał izotropowych osłabionych przez krzywoliniowe otwory różne od eliptycznych (kołowych), otrzymanie nieskończonego układu algebraicznego nie przedstawia istotnych trudności [87]. Jednakże efektywność otrzymywania wyników liczbowych zmniejsza się w sposób istotny, co szczególnie daje się zauważyć dla otworów położonych blisko siebie. Powstałe trudności można zredukować przez zastosowanie metod przybliżonych opracowanych w pracach A. S. KOSMODAMIANSKIEGO, J. W. MYSOWSKIEGO i R. M. MYSOWSKIEJ [88—91, 109].

Należy zauważyć, że płaskie zagadnienia dla płyt z otworem o wolnych brzegach i z otworami o brzegach wzmacnianych za pomocą doskonale sztywnych pierścieni dobrze jest rozwiązywać jednocześnie, ponieważ w toku rozwiązania daje się zauważyć różnica jedynie w pewnych stałych.

Fizycznie nieliniowe zagadnienia teorii sprężystości dla ciał wielospójnych z zastosowaniem zmiennych zespolonych rozpatrzone były przez A. S. KOSMODAMIANSKIEGO i I. A. CURPAŁA w pracach [92, 110].

#### 4. Zastosowanie teorii funkcji zmiennych zespolonych dla ośrodków anizotropowych

Dla anizotropowych ciał płaskich zmienne rozdzielają się jedynie w tym przypadku, gdy w obszarze jednospójnym brzeg da się przedstawić za pomocą równania drugiego stopnia (brzeg eliptyczny lub paraboliczny).

Dla przypadku, gdy ciało osłabione jest przez otwór krzywoliniowy różny od eliptycznego (kołowego), A. S. KOSMODAMIANSKIJ opracował przybliżoną metodę pozwalającą na wyrażenie jednych zmiennych przez drugie [93]. Mamy tu do czynienia z jednym z wariantów metody perturbacji kształtu granicy. Metoda ta ma tę cechę wspólną z metodą opisaną w rozdziale 1, że obie one spełniają warunki brzegowe z pewnym błędem, który można kontrolować w toku rozwiązania utrzymując go w granicach dowolnego przybliżenia.

Dla wielospójnych ciał anizotropowych nie udaje się rozdzielić zmiennych dla żadnego przypadku. Jednakże, jeżeli ciało anizotropowe ograniczone jest przez brzegi eliptyczne, można zawsze zastosować te metody, które zostały opracowane dla ciał izotropowych.

Badanie stanu naprężenia płyty anizotropowej osłabionej różną ilością otworów eliptycznych przeprowadzone było w pracach A. S. KOSMODAMIANSKIEGO i W. W. MIEGLINSKIEGO [94—98, 108].

Bardziej skomplikowane przypadki otworów wzmocnionych za pomocą sprężystych pierścieni bądź wkładek rozpatrzył W. A. SZWIECOW [148—151].

Zginanie skończonych płyt anizotropowych osłabionych otworami eliptycznymi zbadali W. W. MIENGLINSKI i G. M. IWANOW [61, 122—125].

Zagadnienia stanu naprężenia półpłaszczyzny anizotropowej osłabionej eliptycznym otworem zostały rozwiązane w pracach S. A. KAŁOJEROWA i A. S. KOSMODAMIANSKIEGO [65, 99]. Przy rozwiązaniu tych zagadnień warunki brzegowe na prostoliniowym brzegu są spełnione ściśle, a spełnienie warunków brzegowych na brzegu otworu prowadzi do nieskończonego układu algebraicznego, który pozostaje quasi-regularny przy dowolnym zbliżeniu otworu do brzegu prostoliniowego.

Przypadek, gdy do otworu wklejona jest wkładka sprężysta, a także gdy półpłaszczyzna osłabiona jest wieloma otworami eliptycznymi, zbadany został przez S. A. KAŁOJEROWA [62—64].

Jeżeli anizotropia ośrodka jest silna, to, jak pokazał A. S. KOSMODAMIANSKIJ [101], zagadnienie jego stanu naprężenia sprowadza się do szeregu zagadnień brzegowych dla równań harmonicznym z prawymi stronami. Podejście takie znacznie upraszcza rozwiązania, zwłaszcza przy wykorzystaniu elektronicznych maszyn cyfrowych. Dla wielospójnej płyty osłabionej przez szereg otworów nieeliptycznych (niekołowych) celowe jest wykorzystanie jednocześnie obydwu metod: metody perturbacji kształtu granicy i metody konstruowania nieskończonych układów algebraicznych przez wykorzystanie rozkładu poszukiwanych funkcji w szeregi wielomianów Fabera kolejno na każdym brzegu [102]. Analogiczne połączenie obu metod przy wykorzystaniu zmiennych rzeczywistych opisane było w rozdziale 2 przy rozpatrywaniu ciał izotropowych z krzywoliniowymi otworami.

##### 5. Zagadnienia stanu naprężenia płyt izotropowych z otworami w ujęciu przestrzennym

Badanie przestrzennego stanu naprężenia płyt z otworami prowadzi często do rozwiązania tych samych zagadnień, które rozpatrzone zostały w pierwszych czterech rozdziałach.

Jak ustalił A. I. ŁURIE [121], zagadnienie przestrzennego stanu naprężenia płyty izotropowej może być sprowadzone do wyznaczenia funkcji biharmonicznej i przeliczalnej ilości funkcji metaharmonicznych. Przy tym w równaniach metaharmonicznych występuje mały parametr przy najwyższej pochodnej. Metoda całkowania takich równań w naturalnym układzie współrzędnych została zaproponowana w pracy M. I. WISZYKA i Ł. A. LUSTERNIKA [15].

Przy rozwiązywaniu wspomnianych zagadnień powstaje problem rozdzielenia warunków brzegowych, danych w naprężeniach lub przemieszczeniach dla każdego biharmonicznego i metaharmonicznego równania. Jedną z metod prowadzących do podobnego rozdzielenia warunków brzegowych zrealizowana została w pracach I. I. WOROWICZA, O. K. AKSENTIANA i O. S. MAŁKINY [1—3, 16, 17]. Wykorzystano w tym celu zasady wariacyjne i rozkład wszystkich funkcji w szeregi według małego parametru, który zależał od grubości płyty. Autorzy przeprowadzili przy tym szczegółowe badania stanu naprężenia płyty osłabionej przez otwór kołowy.

Inne podejście prowadzące do rozdzielenia warunków brzegowych zaproponowane zostało przez A. S. KOSMODAMIANSKIEGO, W. N. ŁOŻKINA i J. W. MYSOWSKIEGO w pracach

[105—107]. Rozdzielenie realizowano przy wykorzystaniu podstawowych idei metody Bubnowa—Galerkina.

Taka droga pozwala na sprowadzenie zagadnienia przestrzennego do rozwiązania szeregu równań biharmonicznych przy coraz bardziej komplikujących się warunkach brzegowych, jak również do rozwiązania pewnego układu nieskończonego, którego macierz nie zależy od geometrii płyty, ani też od jej stałych sprężystych. Dzięki temu można macierz tę odwrócić i następnie w sposób elementarny otrzymywać rozwiązania zależne od prawych stron układu nieskończonego.

Przy całkowaniu równań biharmonicznych A. S. KOSMODAMIANSKIJ, W. N. ŁOŻKIN, i J. W. MYSOWSKIJ ustalili związek pomiędzy naturalnymi i zespolonymi zmiennymi. Pozwoliło to na wykorzystanie silnego aparatu teorii funkcji zmiennej zespolonej przy rozpatrywaniu p tytu osłabionej przez otwory krzywoliniowe.

Efektywne badanie wielospójnych płyt w ujęciu przestrzennym stało się możliwe po ustaleniu przez autorów faktu, że wzajemny wpływ otworów na stan naprężenia płyty w pobliżu każdego z nich realizuje się wyłącznie za pośrednictwem biharmonicznej części rozwiązania, jeżeli tylko odległość pomiędzy otworami przewyższa grubość płyty.

Obecnie A. S. KOSMODAMIANSKIJ i W. A. SZALDYRWAN są w trakcie opracowywania metody przewidującej jednoczesne wykorzystanie zarówno zmiennych zespolonych jak i rzeczywistych. Oczekuje się, że metoda ta pozwoli na uwolnienie się od ograniczeń odnośnie odległości pomiędzy otworami w tych przypadkach, gdy otwory osłabiające płytę są kołowe, lub mało się różnią od kołowych.

Przy konstruowaniu rozwiązań zagadnień przestrzennych dla płyt wygodnie jest, jak pokazał to A. I. ŁURIE [121], rozpatrywać oddzielnie zginanie płyty i symetryczne obciążanie płyty w stosunku do jej płaszczyzny środkowej.

Szczegółowe badania stanu naprężenia płyty z eliptycznymi i innymi krzywoliniowymi otworami przy jej zginaniu przeprowadził W. N. ŁOŻKIN [118—120]. Siły zginające przedstawione były w postaci rozkładu potęgowego po grubości płyty. Wyjaśniono, że wyniki technicznej teorii zginania płyt opartej na wykorzystaniu hipotez Kirchhoffa prowadzą do istotnych błędów przy zwiększaniu grubości płyty, jak również zwiększaniu krzywizny brzegu otworu w płycie na jego krawędziach.

Jeżeli siły, przyłożone do brzegu otworu, zmieniają się po grubości płyty w sposób silnie różniący się od liniowego, błąd teorii technicznej staje się istotny nawet dla bardzo cienkich płyt.

Analogiczne prawidłowości wykryte były przez J. W. MYSOWSKIEGO dla zagadnień symetrycznego obciążania płyty osłabionej otworem krzywoliniowym.

Obliczenia numeryczne dla płyt osłabionych przez dwa i nieskończony rząd otworów kołowych przeprowadzone były w pracach [105—107].

Stwierdzono, że w miarę zbliżania się otworów poprawki do wyników teorii technicznej stają się coraz istotniejsze.

Podsumowując przegląd autorzy uważają za swój obowiązek zwrócić uwagę czytelników na fakt, że niekiedy można za pomocą stosunkowo prostych metod (w porównaniu choćby z metodą równań całkowych) otrzymać rozwiązania skomplikowanych problemów dla obszarów niekanonicznych.

## Literatura cytowana w tekście

1. Аксентян, О. К., *О концентрации напряжений в толстых плитах*, Прикл. Мат. Мех., **30**, в. 5, 1966.
2. Аксентян, О. К., Ворович, И. И., *Напряженное состояние плиты малой толщины*, Прикл. Мат. Мех., **27**, в. 6, 1963.
3. Аксентян, О. К., Ворович, И. И., *Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории*, Прикл. Мат. Мех., **28**, в. 3, 1964.
4. Ботова, Л. В., Кириوخина, Н. М., Меглинский, В. В., *Действие сосредоточенных сил в изотропной пластинке, ослабленной двумя эллиптическими отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
5. Бруцкий, Е. В., *Приближенный метод решения краевой задачи. Озена для цилиндра произвольной формы*, Прикл. Мех., в. 106, 1966.
6. Бруцкий, Е. В., *Исследование сопротивления плохо обтекаемых тел при малых числах Рейнольдса*, Автореферат канд. дисс., Киев 1967.
7. Буйвол, В. Н., *Колебания и устойчивость двух неравных цилиндрических оболочек в потоке сжимаемой жидкости*, Прикл. Мех., в. 6, 1967.
8. Буйвол, В. Н., Новацкий, В. Т., *Устойчивость циклически—симметричной системы цилиндрических оболочек в потоке вязкой жидкости*, Прикл. Мех., в. 8, 1969.
9. Буйвол, В. Н., *Излучение двух параллельно расположенных цилиндров в вязкой среде*, Прикл. Мех., в. 10, 1969.
10. Буйвол, В. Н., Гузь, А. Н., *Колебания и устойчивость системы цилиндрических оболочек в потоке вязкой сжимаемой жидкости*, Теория оболочек и пластин, Баку 1966.
11. Буйвол, В. М., Гузь, О. М., *Про колебания двух цилиндрических эксцентрично расположенных оболочек в потоке вязкой жидкости*, Допов. АН УРСР, № 11, 1966.
12. Буйвол, В. Н., Гузь, А. Н., *Обтекание сверхзвуковым потоком сжимаемого газа двух цилиндрических оболочек*, Сб. «Гидромеханика больших скоростей», в. 3, 1966.
13. Буйвол, В. М., Гузь, О. М., *Два цилиндрических отверстия в потоке вязкой сжимаемой жидкости*, Допов. АН УРСР, № 4, 1966.
14. Буйвол, В. Н., Гузь, А. Н., Палько, Л. С., *О динамических процессах в системе упругих оболочек в жидкости*, III Всесоюзный съезд по теорет. и прикл. мех., Аннот. докл., М., 1968.
15. Вишик, М. И., Люстерник, Л. А., *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Усп. Мат. Наук, **12**, в. 5 (77), 1957.
16. Ворович, И. И., Малкина, О. С., *Напряженное состояние толстой плиты*, Прикл. Мат. Мех., **31**, в. 2, 1967.
17. Ворович, И. И., Малкина, О. С., *О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты*, Инж. журнал «Механика твердого тела», **15**, 1967.
18. Головородько, С. А., *Исследование концентрации усилий около квадратного отверстия с закругленными углами в цилиндрической оболочке*, Прикл. Мех., № 10, 1965.
19. Головородько, С. О., Гузь, О. М., *Про напряжений стан цилиндричної оболонки, послабленої декількома круговими отворами*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 9, 1968.
20. Головчан, В. Т., Гузь, А. Н., *О решении двумерных периодических и двоякопериодических задач теории установившихся колебаний упругих и упруго-вязких тел*, IV Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упруго-пластических волн, Кишинев 1968, Тез. докл., Кишинев 1968.
21. Головчан, В. Т., Шнеренко, К. И., *Об исследовании бесконечных систем алгебраических уравнений периодических задач для сферической оболочки*, Прикл. Мех., № 6, 1969.
22. Головчан В. Т., *О решении граничных задач установившихся колебаний для конечной многосвязной области*, Прикл. Мех., в. 3, 1967.
23. Головчан, В. Т., *О концентрации динамических напряжений в пластинке с двумя круговыми отверстиями*, Прикл. Мех., в. 11, 1967.

24. Головчан, В. Т., *О распределении динамических напряжений между отверстиями в бесконечной пластинке*, Прикл. Мех., в. 4, 1968.
25. Головчан, В. Т., *Плоские динамические задачи теории упругости и вязко-упругости для многосвязных областей*, Автореферат канд. дисс., Киев 1968.
26. Головчан, В. Т., *Плоские колебания эксцентричного цилиндра*, Прикл. Мех., в. 3, 1969.
27. Гузь, О. М., *Про приближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках*, Прикл. Мех., в. 6, 1962.
28. Гузь, О. М., *Про приближені розв'язки задач теорії пластин і пологих оболонок для деяких двозв'язних областей*, Прикл. Мех., в. 1, 1962.
29. Гузь, О. М., *Концентрація напружень біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом в циліндричній оболонці*, Допов. АН УРСР, № 10, 1963.
30. Гузь, О. М., *Кручення циліндричної оболонки, ослабленої квадратним отвором з закругленими кутами*, Допов. АН УРСР, № 4, 1964.
31. Гузь, А. Н., *Приближенные решения некоторых задач о концентрации напряжений около отверстий в изотропных и ортотропных оболочках*, Теория пластин и оболочек, Ереван 1964.
32. Гузь, О. М., *Концентрація напружень навколо квадратного отвору в сферичній оболонці*, Допов. АН УРСР, № 9, 1964.
33. Гузь, О. М., *Плоска задача теорії пружності циліндрично-ортотропного тіла для некругових областей*, Прикл. Мех., в. 3, 1964.
34. Гузь, А. Н., *Концентрація напружень около криволинейных отверстий на боковой поверхности кругового цилиндра*, Инж. журнал, в. 2, 1964.
35. Гузь, А. Н., *О решении задач для пологой сферической оболочки в случае многосвязных областей*, ДАН СССР, 158, в. 6, 1964.
36. Гузь, О. М., *Кручення циліндричної оболонки, ослабленої рівностороннім трикутним отвором з закругленими кутами*, Допов. АН УРСР, № 1, 1965.
37. Гузь, А. Н., *Равновесие сферической оболочки, ослабленной равносторонним треугольным отверстием*, Прикл. Мех., в. 3, 1965.
38. Гузь, А. Н., *Периодические задачи для тонких упругих оболочек, ослабленных отверстиями*, НТО Судпром, Ленинград, в. 66, 1965.
39. Гузь, О. М., *Про напружений стан оболонок, ослаблених рядом отворів*, Допов. АН УРСР, № 4, 1965.
40. Гузь, А. Н., *О квазирегулярности бесконечных систем для сферической оболочки, ослабленной несколькими отверстиями*, Прикл. Мех., в. 3, 1966.
41. Гузь, А. Н., *Исследование напряженного состояния сферических оболочек в случае многосвязных областей*, Сб. «Концентрация напряжений», в. 1, Киев 1965.
42. Гузь, А. Н., *О решении второй плоской динамической задачи теории упругости для многосвязных областей*, Прикл. Мех., в. 8, 1966.
43. Гузь, А. Н., *О решении динамических задач о нескольких параллельных цилиндрических полостях*, Проблемы механики горных пород, Алма—Ата 1966.
44. Гузь, О. М., *Про застосування теореми додавання циліндричних функцій до розв'язування лінійних задач механіки для скінченої багатозв'язної області*, Допов. АН УРСР, № 8, 1966.
45. Гузь, О. М., *Задача Діріхле для рівняння Гельмгольца для ексцентричного кільця*, Допов. АН УРСР, № 10, 1966.
46. Гузь, А. Н., *О циклически-симметричных задачах для сферической оболочки, ослабленной отверстиями*, Прикл. Мех., в. 1, 1968.
47. Гузь, А. Н., *Исследование напряженного состояния около отверстий в тонких упругих оболочках*, НТО Судпром, в. 75, Ленинград 1966.
48. Гузь, А. Н., *Тонкие упругие оболочки, ослабленные отверстиями*, Доктор. дисс., Киев 1965.
49. Гузь, О. М., Головородько, С. О., *Про напружений стан біля квадратного отвору з закругленими углами в циліндричній оболонці*, Прикл. Мех., в. 6, 1964.

50. Гузь, А. Н., Рындюк, М. А., Черней, Л. А., *О влиянии жесткости подкрепляющих колец на напряженное состояние сферической оболочки, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями*, Прикл. Мех., в. 10, 1965.
51. Гузь, А. Н., Шнеренко, К. И., *Равновесие сферической оболочки в виде эксцентричного кольца*, Прикл. Мех., в. 6, 1966.
52. Гузь, А. Н., Шнеренко, К. И., *Исследование бесконечных систем для конечных многосвязных областей в оболочках*, Теория оболочек и пластин, Баку 1966.
53. Гузь, О. М., Шишканова, С. Ф., *Про розв'язування задач згину пластин на пружинній основі в випадку багатозв'язних областей*, Допов. АН УРСР, № 2, 1967.
54. Гузь, А. Н., Головчан, В. Т., *О решении основных граничных задач теории установившихся колебаний для бесконечной плоскости с несколько круговыми отверстиями*, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, в. 2, 1968.
55. Гузь, О. М., Цурпал, І. А., *Концентрація напружень біля двох рівних кругових отворів в фізично-нелінійній пружинній пластині*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 6, 1967.
56. Гузь, А. Н., Цурпал, І. А., *О решении плоских физических нелинейных задач теории упругости для многосвязных областей*, Прикл. Мех., № 11, 1968.
57. Гурьянов, В. М., Космодамианский, А. С., *Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
58. Гурьянов, В. М., Космодамианский, А. С., *К вопросу о растяжении изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
59. Житняя, В. Г., Космодамианский, А. С., *Действие сосредоточенной силы, приложенной к контуру кругового отверстия, ослабляющего полуплоскость*, Сб. «Концентрация напряжений», Киев, в. 2, 1968.
60. Иванов, Г. М., *Изгиб круглой кольцевой изотропной плиты сосредоточенными силами и сосредоточенными моментами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
61. Иванов, Г. М., Меглинский, В. В., *Чистый изгиб анизотропной эллиптической плиты с отверстием*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
62. Калоеров, С. А., *Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий*, Прикл. Мех., в. 10, 1966.
63. Калоеров, С. А., *Распределение напряжений в анизотропной полуплоскости с эллиптическим упругим ядром*, Изв. АН Армянской ССР, Механика, № 3, 1967.
64. Калоеров, С. А., *Концентрация напряжений в анизотропной полуплоскости с двумя эллиптическими отверстиями*, Прикл. Мех., в. 7, 1968.
65. Калоеров, С. А., Космодамианский А. С., *Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием близко расположенным от границы*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
66. Космодамианский, А. С., *Изгиб эллиптической балки с двумя круговыми полостями*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Машин., № 3, 1960.
67. Космодамианский, А. С., *Кручение эллиптического стержня с двумя круговыми полостями*, Инж. Сбор., 1, 1961.
68. Космодамианский, А. С., *Кручение и изгиб круглого стержня с круговыми полостями*, Изв. высших учеб. зав., Строительство и Архитектура, Новосибирск 1961.
69. Космодамианский, А. С., *Кручение и изгиб поперечной силой ортотропных стержней с полостями*, Изв. Арм. ССР, 15, в. 3, 1962.
70. Космодамианский, А. С., *Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., № 2, 1960.



71. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии упругого изотропного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения*, Сб. трудов по исследованию горного давления, **42**, Л., 1961.
72. Космодамианский, О. С., *Про напруженій стан ізотропної пластинки, ослабленої скінченим числом нескінчених рядів кругових отворів*, ДАН УРСР, № 11, 1961.
73. Космодамианский, А. С., *Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых выработок*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Маш., в. 4, 196 .
74. Космодамианский, А. С., *Приближенные методы определения напряженного состояния упругого горного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения*, Труды по вопросам горного давления, **45**, Л., 1962.
75. Космодамианский, О. С., *Термопружна задача для цилиндра с порожнинами*, Прикл. Мех., **8**, в. 6, 1962.
76. Космодамианский, О. С., *Про регулярність нескінчених систем, одержуваних при розгляді напруженого стану пружистих середовищ з круговими отворами*, ДАН УРСР, № 9, 1964.
77. Космодамианский, А. С., *Упругое равновесие изотропной пластинки с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий, заполненных упругими ядрами или подкрепленных упругими кольцами*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
78. Космодамианский, А. С., *Действие сосредоточенных сил в многосвязных областях*, Тр. Симпоз. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, К., 1965.
79. Космодамианский, А. С., *К вопросу о регулярности бесконечных систем, получаемых при определении напряженного состояния упругих сред с круговыми отверстиями*, Изв. АН СССР, Мех., в. 5, 1965.
80. Космодамианський О. С., *Виділення головної частини в розв'язанні задачі про розтяг ізотропної пластинки з двома круговими отворами*, Допов. АН УРСР, № 9, 1966.
81. Космодамианский, А. С., *Изгиб упругой тонкой плиты, опертой на эластиче колонны*, Труды 2-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Киев 1962.
82. Космодамианский, А. С., *Изгиб упругой тонкой плиты, подкрепленной эластичими колоннами*, Труды 4-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван 1964.
83. Космодамианский, А. С., *Изгиб упругой тонкой плиты, защемленной на эластичих колоннах*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
84. Космодамианский, А. С., *Изгиб круглой плиты с двумя круговыми отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
85. Космодамианский, А. С., *К вопросу изгиба многосвязной плиты при действии сосредоточенных нагрузок*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
86. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий*, Изв. АН СССР, Мех., в. 4, 1965.
87. Космодамианский, А. С., *О квазирегулярности бесконечных систем в задаче о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий*, Прикл. Мех., **1**, в. 1, 1965.
88. Космодамианський О. С., *Пружна рівновага ізотропної пластинки, ослабленої скінченим числом криволінійних отворів*, Прикл. Мех., **7**, в. 6, 1961.
89. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии горного массива, ослабленного большим количеством выработок квадратного сечения*, Труды по вопросам горного давления, **45**, Л., 1962.
90. Космодамианский, А. С., *Растяжение изотропной пластинки с двумя неодинаковыми криволинейными отверстиями*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
91. Космодамианский, А. С., *К вопросу определения напряженного состояния упругой среды с криволинейными отверстиями*, Прикл. Мех., **2**, в. 8, 1966.
92. Космодамианский, А. С., *Некоторые физически нелинейные задачи теории упругости для многосвязных областей*, Сб. «Математическая физика», Киев, в. 5, 1968.

93. Космодамианский, А. С., *Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластинке с криволинейным отверстием*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
94. Космодамианский, А. С., *Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропного массива с двумя одинаковыми эллиптическими выработками*, Сб. по исследованию горного давления, М., Госгортехиздат, 1960.
95. Космодамианский, А. С., *Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий*, Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, **13**, в. 6, 1960.
96. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя неодинаковыми отверстиями*, Изв. АН СССР, Мех. Маш., в. 1, 1961.
97. Космодамианский, А. С., *О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя бесконечными рядами эллиптических отверстий*, Инж. журнал, **2**, в. 3, 1962.
98. Космодамианский, А. С., *Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями*, Прикл. Мех., **1**, в. 10, 1965.
99. Космодамианский, А. С., *Упругое равновесие анизотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием*, Тр. Грузинского политехн. инст., **8** (93) 1963.
100. Космодамианский, А. С., *Про регулярність нескінченних систем одержуваних в задачах кручення стержнів з позов'язаними порожнинами*, Допов. АН УРСР, № 7, 1964.
101. Космодамианский, А. С., *Определение напряженного состояния пластинки, обладающей сильной анизотропией, с двумя эллиптическими отверстиями*, Прикл. Мех., **2**, в. 1, 1966.
102. Космодамианский, А. С., *Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропной пластинки с двумя одинаковыми криволинейными отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
103. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Некоторые случаи упругого равновесия изотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями*, Сб. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
104. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Определение напряженного состояния изотропной пластинки с тремя круговыми отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
105. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Об уточнении прикладной теории в задаче концентрации напряжений при изгибе плиты с отверстиями*, Сб. «Математическая физика», в. 5, 1968.
106. Космодамианский, А. С., Ложкин, В. Н., *Применение асимптотического метода при изгибе плиты с двумя одинаковыми круговыми отверстиями*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
107. Космодамианский, А. С., Мысовский, Ю. В., *Концентрация напряжений в толстой пластинке, ослабленной рядом круговых отверстий*, Инж. журнал «Механика твердого тела», № 3, 1968.
108. Космодамианский, А. С., Меглинский, В. В., *Растяжение анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
109. Космодамианский, А. С., Мысовский, Ю. В., Мысовская, Р. М., *К вопросу о концентрации напряжений в изотропной среде, ослабленной криволинейными отверстиями*, Сб. «Концентрация напряжений», Киев, в. 2, 1968.
110. Космодамианский, А. С., Цурпал, И. А., *Фізично-нелінійні задачі для пластинки, послабленої двома круговими отворами*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 5, 1967.
111. Кубенко, В. Д., *Напряжения около эллиптического отверстия, подверженного осциллирующему давлению*, Прикл. Мех., в. 5, 1965.
112. Кубенко, В. Д., *Динамическая концентрация напряжений около квадратного отверстия при установившихся волновых движениях*, Прикл. Мех., в. 12, 1966.
113. Кубенко, В. Д., *Динамічна концентрація напружень біля еліптичного отвору*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 1, 1967.
114. Кубенко, В. Д., *О распространении плоской гармонической волны сдвига в пластине с квадратным отверстием*, Прикл. Мех., в. 2, 1968.

115. Кубенко, В. Д., *Некоторые динамические задачи концентрации напряжений около отверстий*, Автореферат канд. дисс., Киев 1965.
116. Кудрявцев, Б. А., *О напряженном состоянии сферической оболочки с наклонным патрубком*, Прикл. Мех., в. 5, 1966.
117. Ложкин, В. Н., *Растяжение изотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1964.
118. Ложкин, В. Н., *Концентрация напряжений при изгибе плиты средней толщины с эллиптическим отверстием*, Прикл. Мех., 4, в. 3, 1968.
119. Ложкин, В. Н., *Применение теории функций комплексного переменного в асимптотическом методе при изгибе плиты с криволинейным отверстием*, Сб. тр. Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 4, 1968.
120. Ложкин, В. Н., *Изгиб плиты с криволинейным отверстием*, Сб. «Концентрация напряжений», Киев, в. 2, 1968.
121. Лурье, А. И., *К теории толстых плит*, Прикл. Мат. Мех., 6, в. 2—3, 1942.
122. Меглинский, В. В., *Изгиб анизотропной эллиптической плиты с эллиптическим отверстием, подкрепленным жестким кольцом*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 1, 1964.
123. Меглинский, В. В., *Некоторые задачи изгиба двусвязной ортотропной плиты*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
124. Меглинский, В. В., *Изгиб анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями*, Прикл. мех., 1, в. 4, 1965.
125. Меглинский, В. В., *Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
126. Немиш, Ю. Н., *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости*, Прикл. мех., в. 4, 1966.
127. Немиш, Ю. Н., *О напряженном состоянии среды Коссера, ослабленной криволинейным отверстием*, Прикл. Мех., в. 9, 1968.
128. Немиш, Ю. М., *Влия несимметричности тензора напряжений на разбег напряжений біля підкріплених криволинійних отворів*, Допов. АН УРСР, сер. А, № 9, 1968.
129. Пелех, Б. Л., *О решении задач изгиба пластины для многосвязных областей*, Прикл. Мех., в. 9, 1969.
130. Савин Г. М., Гузь, О. М., *Концентрація напружень біля еліптичного отвору в сферичній оболонці*, Допов. АН УРСР, № 1, 1964.
131. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках*, Изв. АН СССР, Мех. Маш., № 6, 1964.
132. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., Цурпал, И. А., *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физическо-нелинейной упругой пластинке*, Arch. Mech. Stos., 4, 16, 1964.
133. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *О напряженном состоянии около криволинейных подкрепленных отверстий в оболочках*, Инж. журнал, в. 1, 1965.
134. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *Об одном способе решения плоских задач моментной теории упругости для многосвязных областей*, Прикл. Мех., в. 1, 1966.
135. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., *Плоская задача моментной теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной конечным числом круговых отверстий*, Прикл. Мат. Мех., № 5, 1966.
136. Савин, Г. Н., Гузь, А. Н., Цурпал, И. А., *Физически нелинейные задачи пластин и оболочек, ослабленных отверстиями*, Труды школы по нелинейным задачам, Тарту 1966.
137. Савин, Г. Н., *Распределение напряжений около отверстий*, Изд. «Наукова думка», Киев 1968.
138. Цурпал, И. А., Шульга, *Исследование напряженного состояния около криволинейных отверстий в оболочках при нелинейном законе упругости*, Прикл. Мех., в. 8, 1966.
139. Цурпал, И. А., *Концентрация напряжений около квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке*, Изв. АН СССР, Мех., № 6, 1965.

140. Цурпал, И. А., *Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия в физически нелинейной упругой пластине*, Сб. «Прочность корпуса судна», в. 67, Л., 1965.
141. Цурпал, И. А., *Концентрация термонапряжений возле произвольных отверстий для нелинейно-упругих материалов*, Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», в. 8, К, 1968.
142. Цурпал, И. А., *Об одном варианте задач о концентрации напряжений в нелинейной постановке*, Прикл. Мех., в. 10, 1968.
143. Цурпал, И. А., *Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий с учетом физической нелинейности материала*, Автореферат доктор. дисс., Киев 1968.
144. Цурпал, И. А., *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинках при нелинейном законе упругости*, Труды I Респ. мат. конф. молодых ученых, Киев 1965.
145. Цурпал, И. А., *Физически нелинейные упругие пластины, ослабленные произвольными отверстиями*, Сб. «Концентрация напряжений», в. 1, Киев 1965.
146. Цурпал, И. А., *Задачи концентрации напряжений для высокопластичных материалов*, Сб. «Строительная механика корабля», в. 3, Л., 1968.
147. Цурпал, И. А., *Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий и полостей с учетом физической нелинейности материала*, Сб. «Концентрация напряжений», в. 2, 1968.
148. Швецов, В. А., *Распределение напряжений в пластинке с эллиптическими отверстиями, заполненными упругими ядрами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 2, 1965.
149. Швецов, В. А., *Распределение напряжений в упругой анизотропной среде с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими кольцами*, Прикл. Мех., 2, в. 8, 1966.
150. Швецов, В. А., *Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий, подкрепленных упругими кольцами*, Прикл. Мех., 2, в. 2, 1966.
151. Швецов, В. А., *О напряженном состоянии анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий, заполненных упругими ядрами*, Сб. трудов Саратовского унив. по проблеме концентрации напряжений, в. 3, 1967.
152. Шнеренко, К. И., *Распределение напряжений в сферической оболочке вокруг подкрепленных криволинейных отверстий*, Прикл. Мех., в. 2, 1966.
153. Шнеренко, К. И., *Влияние внешнего края на напряженное состояние сферической оболочки с отверстием*, Прикл. Мех., в. 2, 1966.
154. Шульга, Н. А., *Напряженное состояние возле отверстия в тонкой физически нелинейной плите*, Прикл. Мех., в. 12, 1967.
155. Шульга, Н. А., *Изгиб тонкой плиты, ослабленной криволинейным отверстием, при нелинейном законе упругости*, Прикл. Мех., в. 4, 1966.
156. Шульга, Н. А., *Изгиб тонкой плиты с треугольным отверстием при нелинейном законе упругости*, Труды 2-ой конф. молодых ученых Украины, Киев 1966.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 sierpnia 1969 r.*

## MODELOWANIE PŁASKICH SPRĘŻYSTOPLASTYCZNYCH ZAGADNIĘŃ METODĄ FOTOPLASTYCZNOŚCI

ANDRZEJ LITEWKA (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

W ostatnim czasie dużo uwagi poświęca się zarówno teoretycznej, jak i doświadczalnej analizie sprężystoplastycznych stanów naprężenia. Teoretyczna analiza takich zagadnień, z uwagi na złożoność problemu, dotyczy na ogół tylko materiałów idealnie plastycznych. Rozwiązania teoretyczne z praktycznego punktu widzenia mają więc ograniczoną przydatność, gdyż wykresy rozciągania dla większości materiałów konstrukcyjnych odbiegają od wykresu rozciągania materiału idealnie plastycznego. Wyznaczenie na drodze teoretycznej stanu naprężenia i odkształcenia w ciałach o dowolnym wykresie rozciągania, aproksymowanym za pomocą pewnych funkcji, napotyka szereg trudności. Istniejące rozwiązania teoretyczne podane przez NEUBERA [8] i PANFEROWA [9] wymagają przeprowadzenia pracochłonnych obliczeń oraz są rozwiązaniami przybliżonymi.

Z tego względu dużego znaczenia nabierają w analizie sprężystoplastycznych stanów naprężenia metody doświadczalne, a szczególnie metoda fotoplastyczności. W niniejszej pracy, na przykładzie osiowo rozciąganego pręta z obustronnymi półkolistymi wycięciami, omówiono zastosowanie metody fotoplastyczności do modelowania płaskich sprężystoplastycznych stanów naprężenia.

### 2. Warunki podobieństwa modelowego

Przy przenoszeniu wyników badań modelowych na prototyp wykonany z innego materiału aniżeli model konieczne jest spełnienie warunków podobieństwa modelowego. W przypadku płaskiego sprężystego stanu naprężenia zachodzi na ogół konieczność spełnienia tylko dwóch warunków, a mianowicie warunku podobieństwa geometrycznego oraz podobieństwa obciążenia. Problem modelowania płaskich zagadnień sprężystoplastycznych przy zastosowaniu metody fotoplastyczności jest bardziej złożony. Poza wyżej wymienionymi warunkami, które dotyczą kształtu modeli oraz sposobu ich obciążenia muszą być spełnione jeszcze warunki dotyczące własności użytego do badań materiału

modelowego. Warunki te zostały podane przez FROCHTA i THOMSONA [1]. Przedstawiają się one następująco:

- a) krzywe rozciągania materiału modelowego oraz materiału, z którego wykonany jest prototyp muszą być podobne,
- b) współczynniki Poissona w obszarze plastycznym dla obu materiałów muszą być równe lub zbliżone,
- c) zachowanie obu materiałów w obszarze plastycznym powinno być opisywane tym samym warunkiem uplastycznienia.

Śród materiałów konstrukcyjnych, które wykazują własności plastyczne, największe znaczenie mają stal oraz aluminium. Ażeby istniała możliwość modelowania sprężysto-plastycznych stanów naprężenia dla elementów konstrukcyjnych wykonanych z tych materiałów konieczne jest w metodzie fotoplastyczności dobranie takiego materiału modelowego, którego właściwości odpowiadałyby postawionym powyżej wymaganiom. Badania przeprowadzone przez MÖNCHA i JIRE [2] oraz FROCHTA i THOMSONA [1] wykazały, że wymagania te najlepiej spełnia celuloid. Jednakże przedstawione powyżej warunki podobieństwa modelowego w stosunku do celulojdu oraz metali spełnione są tylko w przybliżeniu. W związku z tym należy oczekiwać pewnych błędów przy przenoszeniu na prototyp wyników badań przeprowadzonych metodą fotoplastyczności.

Pierwszą próbę oszacowania błędów popełnianych przy przenoszeniu na prototyp wyników uzyskanych metodą fotoplastyczności przeprowadzili MÖNCH i LORECK w pracy [3]. Wnioski wynikające z ich badań nie są jednak pełne, gdyż dotyczą tylko naprężeń występujących na nieobciążonych krawędziach modelu. Wynikało to stąd, że zastosowana przez nich metoda fotoplastyczności umożliwiała wyznaczenie naprężeń jedynie na swobodnych krawędziach modelu.

W niniejszej pracy podjęto próbę oszacowania błędów popełnianych przy przenoszeniu na prototyp wartości naprężeń w punktach leżących nie tylko na krawędziach, lecz również wewnątrz konturu modelu. Posłużono się w tym celu metodą fotoplastyczności przedstawioną w pracy [4] oraz wynikami badań omówionymi przez KOPYTOWA [5].

### 3. Określenie błędów modelowania

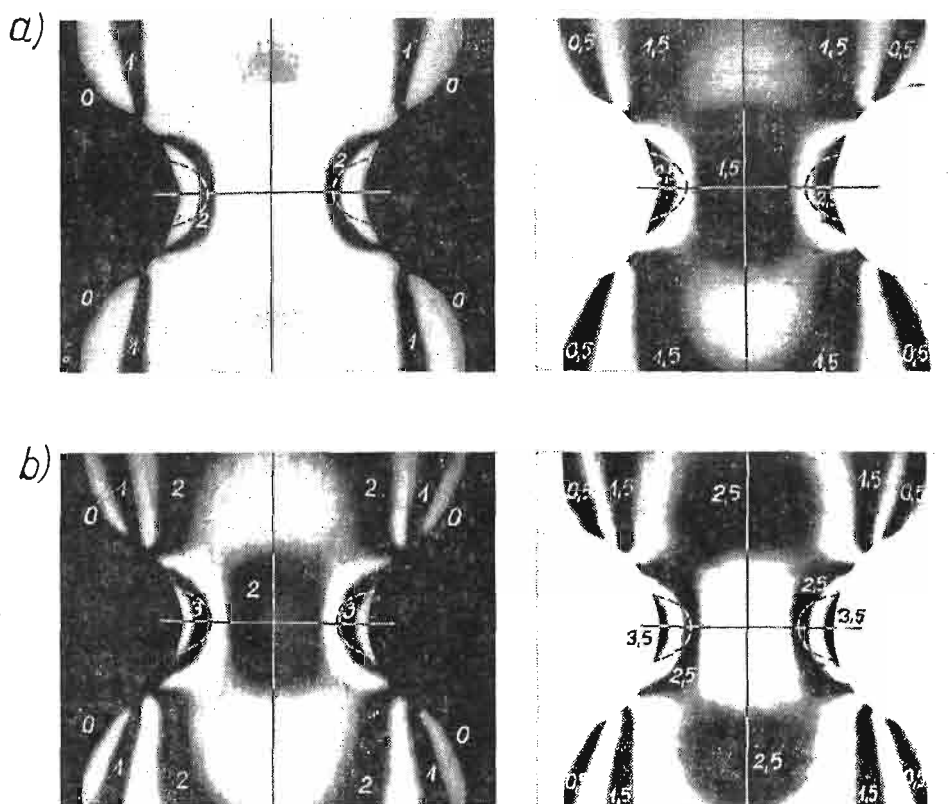
**3.1. Wyznaczenie naprężeń w modelu.** Badania rozkładu naprężeń w modelu przeprowadzono na przykładzie pręta osiowo rozciąganego z obustronnymi półkolistymi wycięciami. Jak już wspomniano, do obliczenia naprężeń zastosowano metodę fotoplastyczności omówioną w pracy [4]. Metoda ta polega na wyznaczeniu w trakcie badań czterech wielkości: rzędów izochrom  $m_1$  i  $m_2$  dla dwóch monochromatycznych źródeł światła o długości fali, odpowiednio  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , dyspersji dwójłomności  $D$  oraz parametru izoklin  $\theta$ . Trzy pierwsze wielkości służą do obliczenia różnicy i sumy naprężeń głównych z zależności

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \varphi(m), \\ \sigma_1 + \sigma_2 &= \pm \{4[\sigma_0 + f(D)]^2 - 3(\sigma_1 - \sigma_2)^2\}^{1/2},\end{aligned}$$

gdzie  $\sigma_0$  — granica plastyczności,  $\varphi(m)$ ,  $f(D)$  — funkcje, których kształt wyznacza się doświadczalnie przy użyciu próbek osiowo rozciąganych.

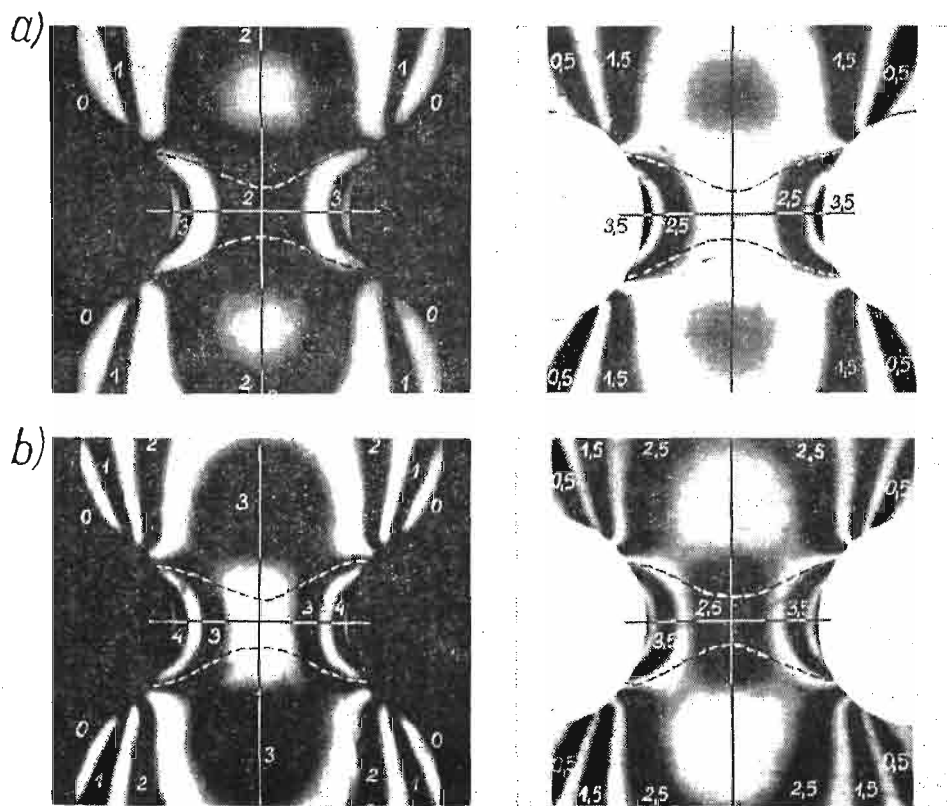
Brakujący do pełnego wyznaczenia stanu naprężenia kąt nachylenia kierunków głównych określony jest w całym modelu poprzez obraz izoklin. Granicę pomiędzy obszarem sprężystym a plastycznym można wyznaczyć w oparciu o zdjęcia izochrom wykonane dla dwóch monochromatycznych źródeł światła jako miejsce geometryczne punktów zerowej dyspersji dwójłomności.

Do badań użyto modeli celuloidowych o następujących wymiarach: długość całkowita 260 mm, długość pomiędzy uchwytami 150 mm, szerokość 60 mm, grubość 3 mm, promień

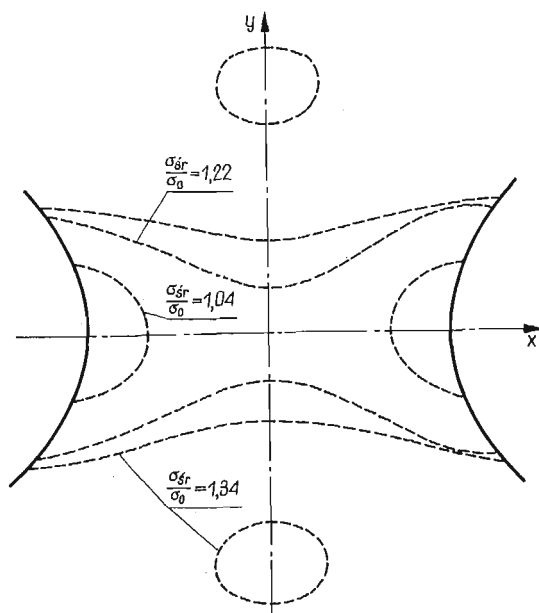


Rys. 1. Izochromy na ciemnym i jasnym tle w przecie rozciągany z obustronnymi półkolistymi wycięciami ( $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$ ): a) światło żółte, b) światło niebieskie

wycięć 15 mm, minimalna szerokość  $b = 30$  mm. Badania przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążenia, przy których stosunek naprężenia średniego w minimalnym przekroju  $\sigma_{sr}$  do naprężenia odpowiadającego granicy plastyczności wynosił  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$  i 1,22. Zdjęcia izochrom otrzymane przy żółtym i niebieskim świetle monochromatycznym przedstawione zostały na rys. 1 i 2. Na zdjęciach tych przerywanymi liniami zaznaczono zasięg strefy uplastycznionej. Porównanie rozmiarów obszarów uplastycznionych dla  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$  i 1,22 przedstawiono na rys. 3. Dodatkowo naniesiono również na tym rysunku granicę obszaru plastyczności dla obciążenia wyrażonego stosunkiem  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,34$ , otrzymaną przez MÖNCHA i LORECKA [3].

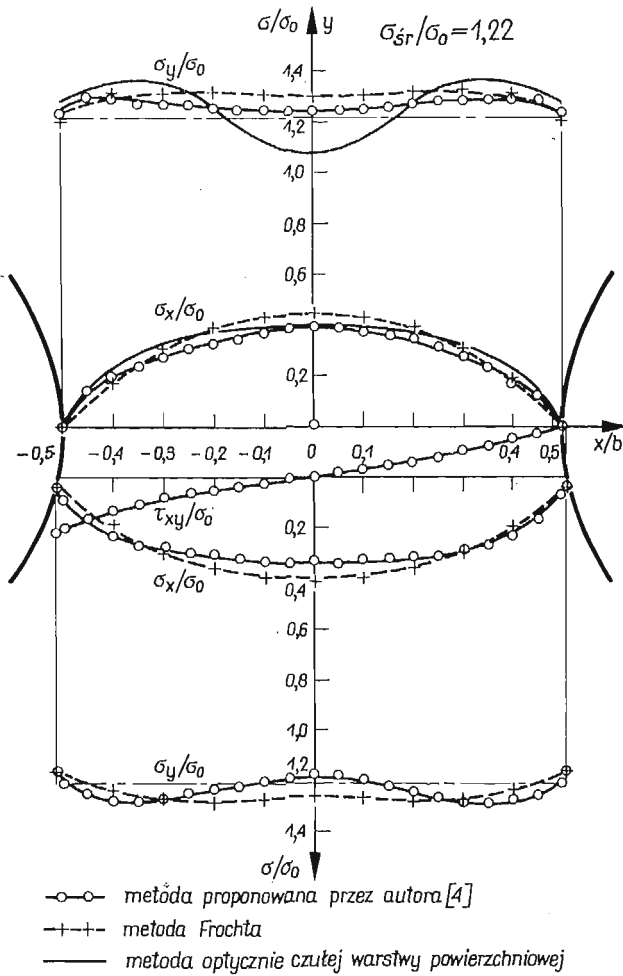
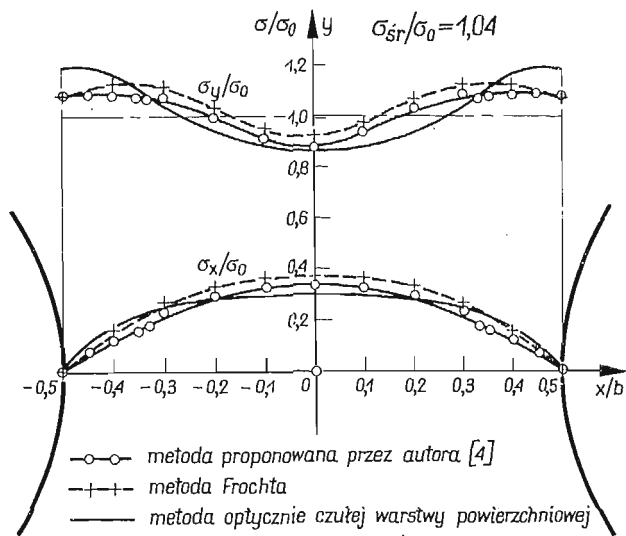


Rys. 2. Isochromy na ciemnym i jasnym tle w pręcie rozciągany z obustronnymi półkolistymi wycięciami ( $\sigma_{sr}^0/\sigma_0 = 1,22$ ): a) światło żółte, b) światło niebieskie



Rys. 3. Wpływ obciążenia na kształtowanie się obszarów plastycznych w osiowo rozciągany pręcie z obustronnymi półkolistymi wycięciami

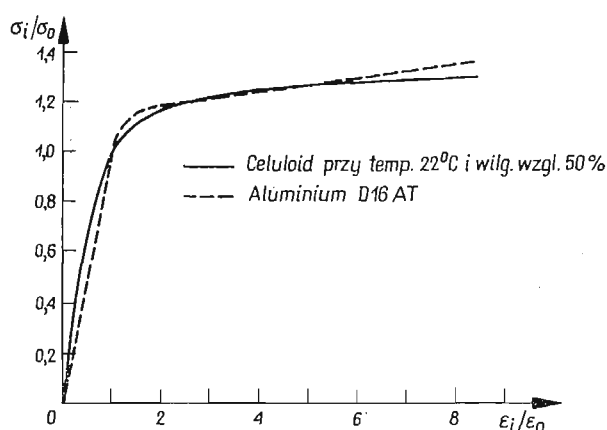




Rys. 4. Wykresy naprężeń w przekrojach pręta osiowo rozciąganego z obustronnymi półkolistymi wycięciami przy obciążeniu: a)  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$ ; b)  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,22$

Posługując się metodą zaproponowaną w pracy [4] wyznaczono naprężenia w charakterystycznych przekrojach modelu. W przypadku  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,04$  wyznaczono naprężenia tylko w przekroju najbardziej osłabionym, natomiast w przypadku  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,22$  wyznaczono jeszcze dodatkowo wartości naprężeń w przekroju równoległym do przekroju minimalnego i oddalonym od niego o  $0,1 b$ . Obydwa przekroje przy  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,22$  leżały całkowicie w obszarze plastycznym. Dla porównania obliczono w tych samych przekrojach modeli naprężenia posługując się metodą Frochta. Otrzymane obu metodami bezwymiarowe wykresy naprężeń wyrażonych stosunkiem  $\sigma/\sigma_0$ , przedstawiono na rys. 4. Na tym samym rysunku naniesiono również rozkłady naprężeń dla modeli aluminiowych wyznaczone przez KOPYTOWA [5].

3.2. *Podobieństwo modeli celuloidowych i aluminiowych.* KOPYTOW przeprowadził swe badania metodą optycznie czułej warstwy powierzchniowej posługując się modelami o następujących wymiarach: długość 350 mm, szerokość 80 mm, grubość 2,4 mm, promień wycięcia 20 mm, minimalny przekrój 40 mm. Modele te wykonane były z aluminium D16AT. Naprężenia w modelach wyznaczył on dla pięciu wartości siły rozciągającej, dla których stosunek  $\sigma_{sr}/\sigma_0$  wynosił: 0,744, 0,931, 1,023, 1,210 i 1,340. Wartości  $\sigma_{sr}/\sigma_0 = 1,023$  i 1,210



Rys. 5. Wykresy rozciągania dla aluminium D16AT oraz dla celuloidu

były więc bardzo zbliżone do odpowiednich wartości jakie przyjęto w badaniach opisanych w niniejszym artykule. Na tej podstawie można uważać, że spełniony jest warunek podobieństwa geometrycznego oraz warunek podobieństwa obciążenia. Ażeby istniała możliwość porównania wartości naprężeń wyznaczonych w obu badaniach muszą być jeszcze spełnione pozostałe warunki omówione w rozdziale 2.

Porównanie kształtu bezwymiarowych krzywych rozciągania celuloidu oraz aluminium D16AT przeprowadzone zostało na rys. 5. Wykresy tych krzywych sporządzono przez odniesienie na osiach współrzędnych wielkości bezwymiarowych określonych stosunkami  $\sigma/\sigma_0$  i  $\epsilon/\epsilon_0$  zamiast  $\sigma$  i  $\epsilon$ .

Jak wynika z rys. 5 wykresy rozciągania dla celuloidu i aluminium wykazują dość duże podobieństwo, w związku z czym można przyjąć, że pierwszy z wymienionych w rozdziale 2 warunków podobieństwa jest spełniony. Z badań przedstawionych przez FROCHTA i THOM-

SONA w pracy [1] wynika, że spełniony jest również warunek równości współczynników Poissona w obszarze plastycznym. Do podobnych wyników, w przypadku innego materiału modelowego, mianowicie polistyrolu, doszedł w swych badaniach HILTSCHER [6]. Jak już wspomniano w rozdziale 2 spełniony jest także warunek odnośnie kryterium uplastycznienia materiału modelowego. Badania przeprowadzone przez HILTSCHERA [6], MÖNCHA i JIRĘ [2] oraz NETREBKĘ [7] wykazały, że uplastycznienie takich tworzyw sztucznych, jak celulooid i polistyrol, podobnie jak metali, przebiega zgodnie z warunkiem uplastycznienia Hubera—Misesa—Hencky'ego.

W związku z tym, że spełnione są wszystkie wymagane warunki podobieństwa modelowego istnieje możliwość porównania wyników badań uzyskanych w niniejszej pracy przy zastosowaniu metody fotoplastyczności z wynikami przedstawionymi przez KOPYTOWA.

Z rys. 4 wynika, że największa rozbieżność pomiędzy wartością naprężenia otrzymaną metodą fotoplastyczności dla modelu celuloidowego a wartością otrzymaną metodą optycznie czułej warstwy powierzchniowej dla prototypu aluminiowego występuje w przypadku naprężenia  $\sigma_y$  dla punktu  $x/b = 0$  przy  $\sigma_{st}/\sigma_0 = 1,22$ . Rozbieżność ta wynosi 13%, co nie przekracza maksymalnego błędu metody, który, jak wynika z analizy błędów przeprowadzonej w pracy [4], wynosi  $\pm 15\%$ . Rozbieżności pomiędzy wartościami naprężeń w innych punktach są znacznie mniejsze i wahają się w granicach średniego błędu popełnianego przy obliczaniu naprężeń. Dla zastosowanej w niniejszej pracy metody obliczeniowej błąd ten wynosi  $\pm 8\%$  [4].

#### 4. Wnioski

Porównanie wyników badań modelowych przeprowadzonych metodą fotoplastyczności z wynikami uzyskanymi dla modeli aluminiowych przy zastosowaniu metody optycznie czułej warstwy powierzchniowej umożliwiło wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Spełnienie przedstawionych w rozdziale 2 warunków podobieństwa modelowego umożliwia bezpośrednie przeniesienie na prototyp wyników badań przeprowadzonych metodą fotoplastyczności.

2. Błędy popełnione przy przeniesieniu na prototyp wyników badań modelowych nie przekraczają błędów obliczenia naprężeń metodą fotoplastyczności.

3. Średni błąd ostatecznych wyników, wynoszący  $\pm 8\%$ , stanowi dla celów praktycznych wystarczającą dokładność.

Na tej podstawie można przyjąć, że metoda fotoplastyczności może być przydatna do modelowania płaskich sprężystoplastycznych stanów naprężenia.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. M. FROCHT, R. A. THOMSON, *Studies in photoplasticity*, Arch. Mech. Stos., 2, 11 (1959), 157—171.
2. E. MÖNCH, R. JIRA, *Studie zur Photoplastizität von Cellulooid am Rohr unter Innerdruck*, Zeitschrift für angewandte Physik, 9, 7 (1955), 450—453.
3. E. MÖNCH, R. LORECK, *A study of the accuracy and limit of application of plane photoplastic experiments*, Photoelasticity, Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1963, 169—184.

4. A. LIŃEWA, *Wyznaczenie metodą fotoplastyczności składowych płaskiego stanu naprężenia w obszarze plastycznym*, rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, 1968.
5. В. Д. КОПЫТОВ, *Исследование напряженно-деформированного состояния при упруго-пластических деформациях полосы с двусторонней полукруглой выточкой методом фотоупругих покрытий*, Вестник Москов. Унив., Математика, механика, 2 (1967), 93—100.
6. R. HILTSCHER, *Theorie und Anwendung der Spannungsoptik im elastoplastischen Gebiet*, Zeitschr. des Verein. Deutsch. Ing., 2, 97, (1955), 49—58.
7. В. П. НЕТРЕВКО, *Проверка и уточнение основных законов фотопластичности целлулоида*, Вестник Москов. Унив., Математика, механика, 2 (1963), 53—59.
8. H. NEUBER, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 4, 28E (1961), 544—550.
9. В. М. ПАНФЕРОВ, *Концентрация напряжений при упруго-пластических деформациях*, Изв. АН СССР, ОТН, 4, (1954), 47—66.

### Резюме

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ФОТОПЛАСТИЧНОСТИ

Применение метода фотопластичности в моделировании плоских упруго-пластических задач, представлено на примере одноосно растягиваемой полосы с двусторонней полукруглой выточкой. Полученные результаты сравнены с результатами полученными на алюминиевых моделях методом фотоупругих покрытий, что дало возможность провести оценку погрешности при перенесении на прототип детали, напряжений определенных методом фотопластичности.

### Summary

#### THE MODELING OF THE PLANE ELASTO-PLASTIC PROBLEMS BY MEANS OF THE PHOTOPLASTIC METHOD

The tests of the tension bar with the symmetric semicircular notches were presented as the example of the application of the photoplastic method for the modeling of the plane elasto-plastic problems. The tests results were compared with the results obtained by means of the photo-elastic coating method for the aluminium models. This made it possible to estimate the errors of the transition from model to prototype.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1969 r.*

WYZNACZENIE POLA TEMPERATURY I POLA STRUMIENIA CIEPLNEGO  
W PRZEGRODZIE WIELOWARSTWOWEJ  
PRZY HARMONICZNIE ZMIENNYM PRZEPLYWIE CIEPŁA

WŁADYSŁAW TOMCZAK, LUCJA BULZAK-MROZOWSKA (WROCLAW)

Ważniejsze oznaczenia

- $a$  współczynnik wyrównywania temperatury, [m<sup>2</sup>/s]  
 $ber_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $bei_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $c$  ciepło właściwe, [J/kg grd]  
 $i$  jednostka urojona  
 $ker_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $kei_n z$  funkcje Thomsona rzędu  $n$   
 $q$  amplituda zespolona fali strumienia ciepłego, [W/m<sup>2</sup>]  
 $q(r, \tau)$  chwilowa wartość strumienia ciepłego, [W/m<sup>2</sup>]  
 $r$  współrzędna, [m]  
 $t$  amplituda zespolona fali temperatury, [°C]  
 $t(r, \tau)$  chwilowa wartość fali temperatury, [°C]  
 $A, B$  stałe całkowania  
 $F$  powierzchnia, [m<sup>2</sup>]  
 $M, N, P, Q$  patrz wzory (5) i (6) oraz tablica 2  
 $R$  współrzędna powierzchni ograniczającej warstwę przegrody złożonej, [m]  
 $V$  objętość, [m<sup>3</sup>]  
 $W$  opór cieplny [m<sup>2</sup> grd/W]  
 $\alpha$  współczynnik przejmowania ciepła, [W/m<sup>2</sup> grd]  
 $\lambda$  współczynnik przewodzenia ciepła, [W/m grd]  
 $\rho$  gęstość, [kg/m<sup>3</sup>]  
 $\tau$  czas, [s]  
 $\omega$  częstotliwość kątowna, [1/s]

Indeksy:

- $a$  dotyczy powierzchni napływu fali  
 $b$  dotyczy powierzchni odpływu fali  
 $k$  numer warstwy przegrody  $n$ -warstwowej

1. Wprowadzenie

Spośród wielu zagadnień związanych z niestalonym przewodzeniem ciepła, analiza przepływu fal temperatury i związanych z nimi fal strumienia ciepłego zasługuje na szczególną uwagę. Głównym powodem wyróżniającym ten problem spośród wielu innych jest fakt, że dowolną funkcję okresową, a więc także i temperaturę zmieniającą się okresowo w czasie możemy rozłożyć w szereg Fouriera, będący sumą harmonik o różnych ampli-

tudach, fazach i częstotliwościach kątowych. Tak więc harmoniczne fale temperatury są podstawowymi elementami, z których można zbudować funkcję wyznaczającą dowolną okresową zmianę temperatury.

Rozwiązania tego typu dla półprzestrzeni znaleźć można w pracy [6]. Znane są także rozwiązania dla przegród wielowarstwowych płaskich, cylindrycznych i oporów, podające związek pomiędzy amplitudami zespolonymi fal temperatury i strumienia ciepłego na powierzchniach ograniczających te przegrody [1]. W pracy [7] przeprowadzono analizę zagadnienia symetrii przepływu ciepła w płaskich przegrodach złożonych. Opracowanie [8] poświęcone jest wyznaczeniu ustalonych pól temperatury i strumienia ciepłego w przegrodach złożonych z wewnętrznymi źródłami ciepła. Brak jest dotychczas opracowań uwzględniających pojemności cieplne o zerowym oporze przewodzenia oraz wzorów wyznaczających chwilowe wartości temperatury i strumienia ciepłego w dowolnym  $r$ -tym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej. Niniejsza praca poświęcona jest rozwiązaniu tych właśnie zagadnień.

## 2. Równanie dla przegrody wielowarstwowej

Rozwiązanie równania przewodzenia ciepła

$$(2.1) \quad \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\beta - 1}{r} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} \right],$$

gdzie  $\beta = 1$  dla przegrody płaskiej,  $\beta = 2$  dla przegrody cylindrycznej i  $\beta = 3$  dla przegrody sferycznej, przy założeniu harmonicznie zmiennej temperatury w otoczeniu (lub na powierzchni  $r = R_0$ ) można przedstawić w postaci [1]

$$(2.2) \quad t(r, \tau) = [AE(r) + BF(r)] \exp i\omega\tau.$$

Po zastosowaniu do równania (2.2) prawa Fouriera

$$(2.3) \quad q(r, \tau) = -\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r}$$

otrzymamy wzór określający wartość strumienia ciepłego

$$(2.4) \quad q(r, \tau) = [AE_1(r) + BF_1(r)] \exp i\omega\tau.$$

Funkcje  $E(r)$ ,  $F(r)$ ,  $E_1(r)$ ,  $F_1(r)$  dla  $\beta = 1, 2, 3$  podane są w tabelcy 1. Symbole  $A$  i  $B$  oznaczają stałe całkowania.

Wyrażenia znajdujące się w nawiasach kwadratowych prawych stron równań (2.2) i (2.4) określają odpowiednio amplitudy zespolone fali temperatury i fali strumienia ciepłego. W dalszym ciągu operować będziemy amplitudami zespolonymi pomijając czynnik  $\exp i\omega\tau$  wymuszający okresowość zjawiska [1].

Przyjmując w równaniach (2.3) i (2.4)  $r = R_{a,1}$  możemy wyznaczyć stałe  $A$  i  $B$ . Po przeprowadzeniu przekształceń, amplitudy zespolone fali temperatury i fali strumienia ciepłego na powierzchni napływu tych fal możemy wyrazić poprzez amplitudy zespolone na powierzchni odpływu

$$(2.5) \quad t_{a,1} = M_1 t_{b,1} + N_1 q_{b,1},$$

$$(2.6) \quad q_{a,1} = P_1 t_{b,1} + Q_1 q_{b,1}.$$

Wielkości  $M$ ,  $N$ ,  $P$  i  $Q$  przedstawiono w tabelcy 2. Wskaźnik  $a$  dotyczy powierzchni napływu, a wskaźnik  $b$  — powierzchni odpływu fal.

Tablica 1. Funkcje równań (2.2) i (2.4)

	Przegroda płaska	Przegroda cylindryczna	Przegroda sferyczna
	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$
$E(r)$	$\text{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$I_0\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{1}{r}\text{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
$F(r)$	$\text{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$K_0\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{1}{r}\text{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
$E_1(r)$	$-\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\text{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$-\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}I_0\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{\lambda}{r^2}\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\text{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right) - \frac{\lambda}{r}\text{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
$F_1(r)$	$-\lambda\text{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\lambda\sqrt{\frac{i\omega}{a}}K_1\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$	$\frac{\lambda}{r^2}\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\text{sh}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right) - \frac{\lambda}{r}\text{ch}\left(r\sqrt{\frac{i\omega}{a}}\right)$
	$0 \leq r \leq R$	$R_a \leq r \leq R_b$	$R_a \leq r \leq R_b$

Tablica 2. Rzeczywiste i urojone części elementów macierzy różnego rodzaju warstw

	Przegroda płaska	Przegroda cylindryczna	Przegroda sferyczna	Opór	Pojemność	
	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	—	—	
	1	2	3	4	5	6
[0ε]	$\text{Re } M_k$	$\text{ch } d \cos d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\text{ber } z_a (\text{kei}_1 z_b - \text{ker}_1 z_b) +$ $+ \text{ber}_1 z_b (\text{kei } z_a + \text{ker } z_a) +$ $- \text{bei } z_a (\text{kei}_1 z_b + \text{ker}_1 z_b) +$ $- \text{bei}_1 z_b (\text{kei } z_a - \text{ker } z_a)]$	$\frac{1}{2R_b z} (\text{sh } h \cos b + \text{ch } h \sin h) +$ $+ \frac{R_a}{R_b} \text{ch } h \cos h$	1	1
	$\text{Im } M_k$	$\text{sh } d \sin d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\text{ber } z_a (\text{kei}_1 z_b + \text{ker}_1 z_b) +$ $+ \text{ber}_1 z_b (\text{kei } z_a - \text{ker } z_a) +$ $+ \text{bei } z_a (\text{kei}_1 z_b - \text{ker}_1 z_b) +$ $+ \text{bei}_1 z_b (\text{kei } z_a - \text{ker } z_a)]$	$\frac{1}{2R_b z} (\text{ch } h \sin h - \text{sh } h \cos h) +$ $+ \frac{R_a}{R_b} \text{sh } h \sin h$	0	0
	$\text{Re } N_k$	$-\frac{R}{2\lambda d} [\text{sh } d \cos d +$ $+ \text{ch } d \sin d]$	$\frac{R_b}{\lambda} [\text{bei } z_a \text{kei } z_b + \text{ber } z_b \text{ker } z_a +$ $- \text{ber } z_a \text{kei } z_b - \text{bei } z_b \text{ker } z_a]$	$-\frac{1}{\lambda z} \frac{R_a}{R_b} (\text{sh } h \cos h + \text{ch } h \sin h)$	W	0
	$\text{Im } N_k$	$\frac{R}{2\lambda d} [\text{sh } d \cos d +$ $- \text{ch } d \sin d]$	$\frac{R_b}{\lambda} [\text{ber } z_b \text{kei } z_a + \text{bei } z_b \text{ker } z_a +$ $- \text{ber } z_a \text{kei } z_b - \text{bei } z_a \text{ker } z_b]$	$\frac{1}{\lambda z} \frac{R_a}{R_b} (\text{sh } h \cos h - \text{ch } h \sin h)$	0	0



1	2	3	4	5	6
$\text{Re } P_k$	$\frac{\lambda}{R} d [\text{sh } d \cos d + \text{ch } d \sin d]$	$\lambda z_b^2 [\text{ber}_1 z_b \text{ker}_1 z_a + \text{ber}_1 z_a \text{ker}_1 z_b + \text{bei}_1 z_a \text{kei}_1 z_b - \text{bei}_1 z_b \text{kei}_1 z_a]$	$\frac{\lambda}{R_b^2 z} (\text{sh } h \cosh h + \text{ch } h \sin h) + \lambda z \frac{R_a}{R_b} (\text{ch } h \sin h - \text{sh } h \cosh h) + \frac{\lambda (R_b - R_a)}{R_b^2} \text{ch } h \cosh h$	0	0
$\text{Im } P_k$	$-\frac{\lambda}{R} d [\text{sh } d \cos d + \text{ch } d \sin d]$	$\lambda z_b^2 [\text{ber}_1 z_b \text{kei}_1 z_a + \text{ber}_1 z_a \text{ker}_1 z_b + \text{bei}_1 z_a \text{ker}_1 z_b - \text{bei}_1 z_b \text{ker}_1 z_a]$	$\frac{\lambda}{R_b^2 z} (\text{ch } h \sin h - \text{sh } h \cosh h) + -\lambda z \frac{R_a}{R_b} (\text{ch } h \sin h + \text{sh } h \cosh h) + \frac{\lambda (R_b - R_a)}{R_b^2} \text{sh } h \sin h$	0	$\frac{V}{F}$
$\text{Re } Q_k$	$\text{ch } d \cos d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\text{ber } z_b (\text{kei}_1 z_a - \text{ker}_1 z_a) + \text{ber}_1 z_a (\text{kei } z_b + \text{ker } z_b) + -\text{bei } z_b (\text{kei}_1 z_a + \text{ker}_1 z_a) + -\text{bei}_1 z_a (\text{kei } z_b - \text{ker } z_b)]$	$\frac{R_a}{R_b} \text{ch } h \cosh h - \frac{R_a}{R_b^2 z} (\text{ch } h \sin h + \text{sh } h \cosh h)$	1	$\frac{F_h}{F_a}$
$\text{Im } Q_k$	$\text{sh } d \sin d$	$\frac{z_b}{\sqrt{2}} [\text{ber } z_b (\text{kei}_1 z_a + \text{ker}_1 z_a) + \text{ber}_1 z_a (\text{kei } z_b - \text{ker } z_b) + \text{bei } z_b (\text{kei}_1 z_a - \text{ker}_1 z_a) + \text{bei}_1 z_a (\text{kei}_1 z_b - \text{ker}_1 z_b)]$	$\frac{R_a}{R_b} \text{sh } h \sin h - \frac{R_a}{R_b^2 z} (\text{ch } h \sin h + \text{sh } h \cosh h)$	0	0
	$d = R \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$	$z_a = R_a \sqrt{\frac{\omega}{a}}; \quad z_b = R_b \sqrt{\frac{\omega}{a}}$	$h = (R_b - R_a) \sqrt{\frac{\omega}{2a}}; \quad z = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$		

$R$  — grubość warstwy

$(R_b - R_a)$  — grubość warstwy

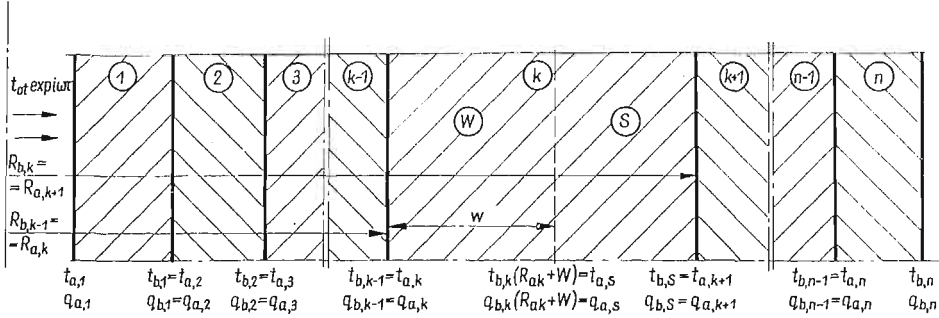
$(R_b - R_a)$  — grubość warstwy

Uwaga: Współczynniki w podanych w tablicy wzorach dotyczą warstwy  $k$ , ze względu na uproszczenie zapisu pominięto przy nich indeks  $k$ .

Układ równań (2.5), (2.6) przedstawić można w postaci macierzowej, [1, 2, 5]:

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} t_{a,1} \\ q_{a,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & N_1 \\ P_1 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,1} \\ q_{b,1} \end{bmatrix}.$$

Wartości  $M_1, N_1, P_1, Q_1$  dla  $\beta = 1, 2, 3$  przedstawiono w tabelcy 2. Teorię funkcji Thomsona występujących w kolumnie 3 tej tabeli znaleźć można w pracy [3].



Rys. 1. Przegroda  $n$ -warstwowa

Jeżeli dana jest przegroda składająca się z  $n$  warstw, pomiędzy którymi nie ma oporu cieplnego, czyli kiedy spełnione są związki (rys. 1):

$$(2.8) \quad \left. \begin{aligned} t_{b,k} &= t_{a,k+1} \\ q_{b,k} &= q_{a,k+1} \end{aligned} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

to zależność pomiędzy amplitudami fal temperatury i strumienia na powierzchniach ograniczających tę przegrodę możemy przedstawić w postaci równania macierzowego

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} t_{a,1} \\ q_{a,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,n} \\ q_{b,n} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.10) \quad \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n \begin{bmatrix} M_k & N_k \\ P_k & Q_k \end{bmatrix}.$$

### 3. Macierzowe przedstawienie oporu

Jeżeli na styku dowolnej warstwy  $k$  i  $k+1$  istnieje opór cieplny  $W$ , to będziemy mieli

$$(3.1) \quad q_{b,k} = \frac{1}{W} [t_{b,k} - t_{a,k+1}]$$

oraz

$$(3.2) \quad q_{b,k} = q_{a,k+1}.$$

Po przekształceniach układ równań (3.1), (3.2) można zapisać w postaci macierzowej

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} t_{b,k} \\ q_{b,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{a,k+1} \\ q_{a,k+1} \end{bmatrix}.$$

Opór możemy zatem traktować jak warstwę, której pojemność cieplna równa jest zeru. Współczynniki macierzy tej warstwy są liczbami rzeczywistymi. Typowym przykładem takiej warstwy jest opór przy napływie fali temperatury na powierzchnię przegrody. Równy on jest odwrotności współczynnika przejmowania ciepła. Elementy macierzy warstwy — oporu przedstawione są w rubryce 5 tabelicy 2.

#### 4. Macierzowe przedstawienie pojemności cieplnej

Niech będzie dana warstwa zbudowana z materiału o nieskończenie małym oporze przewodzenia ciepła. Przez powierzchnię  $F_1$  napływa na tę warstwę zmienny w czasie strumień ciepła  $q_1 \exp i\omega\tau$  powodując wzrost temperatury. Jednocześnie z powierzchni  $F_2$  odpyływa strumień  $q_2 \exp i\omega\tau$  powodując jej obniżenie. Z pewnym przybliżeniem za taką warstwę uważać możemy warstwę płynu, którego zmiany temperatury są stosunkowo wolne w czasie [6]. Bilans cieplny dla takiej warstwy przedstawiał się będzie następująco:

$$(4.1) \quad F_1 q_1 \exp i\omega\tau d\tau - F_2 q_2 \exp i\omega\tau d\tau = c_0 V dt(\tau),$$

gdzie  $V$  jest pojemnością warstwy. Przyjmujemy, że zmiany temperatury otoczenia na granicy z powierzchnią  $F_1$  mają charakter harmoniczny. Harmoniczne będą także zmiany temperatury w warstwie,

$$(4.2) \quad t(\tau) = t \exp i\omega\tau.$$

Oznaczając przez  $t_1$  amplitudę zespoloną fali temperatury na powierzchni  $F_1$ , a przez  $t_2$  amplitudę na powierzchni  $F_2$ , otrzymamy

$$(4.3) \quad t_1 = t_2 = t.$$

Po zróżniczkowaniu zależności (4.2) względem czasu i uwzględnieniu jej w równaniu (4.1) oraz po przeprowadzeniu działań otrzymamy

$$(4.4) \quad q_1 = ic_0\omega \frac{V}{F_1} t_2 + \frac{F_2}{F_1} q_2.$$

Układ równań (4.3), (4.4) można zapisać w postaci macierzowej

$$(4.5) \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ic_0\omega \frac{V}{F_1} & \frac{F_2}{F_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy dla warstwy — pojemności przedstawiono w kolumnie 6 tabelicy 2.

W celu bliższego wyjaśnienia rozważań podanych w rozdziałach 3 i 4 posłużymy się następującym przykładem.

Warstwa  $k$  (rys. 1) przegrody  $n$ -warstwowej o pojemności  $V$  wypełniona jest płynem o ciepłe właściwym  $c_k$  i gęstości  $\rho_k$ . Współczynniki przejmowania ciepła na powierzchniach  $F_{a,k-1}$  i  $F_{b,k+1}$  wynoszą odpowiednio  $\alpha_{a,k-1}$  i  $\alpha_{b,k+1}$ .

Formalnie mamy tutaj do czynienia z połączeniem trzech warstw: oporem, pojemnością cieplną i oporem. Przypisując oporom kolejne numery  $k-1$  oraz  $k+1$  możemy, po wyko-

rzystraniu rozwiązań zawartych w rozdziale 3 i 4 napisać zależność pomiędzy amplitudami na powierzchniach stałych przegrody, ograniczającej warstwę płynu

$$(4.6) \quad \begin{bmatrix} t_{a,k-1} \\ q_{a,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_{a,k-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\omega c_k \varrho_k \frac{V_k}{F_{a,k-1}} & \frac{F_{b,k+1}}{F_{a,k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_{a,k+1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,k+1} \\ q_{b,k+1} \end{bmatrix}.$$

Dla przegrody płaskiej mamy  $F_2 = F_1$  i  $\frac{V_k}{F_{a,k-1}} = R_k$ , gdzie  $R_k$  jest grubością  $k$ -tej warstwy.

### 5. Analiza wzorów z tablicy 2

Wzory dla przegrody cylindrycznej i sferycznej podane w kolumnach 3 i 4 tablicy 2 przechodzą dla  $R_b > R_a \gg R_b - R_a$  we wzory dla przegrody płaskiej przedstawione w kolumnie 2 tejże tablicy.

Tak więc, przegrodę płaską (kolumna 2) możemy traktować jako szczególny przypadek przegród cylindrycznej i sferycznej. Ma on miejsce wtedy, kiedy mamy do czynienia z dużymi zmianami krzywizn. Z dobrą dokładnością możemy przyjąć, że ma to miejsce dla

$$R_a \sqrt{\frac{\omega}{2a}} > 3.$$

Przyjmując w zależnościach podanych w kolumnie 2, 3 i 4  $c\varrho = 0$ , czyli  $a = \lambda/c\varrho = \infty$ , przy przejściu do granicy otrzymamy zależności uwidocznione w kolumnie 5. Jest to zupełnie zrozumiałe, ponieważ założenie  $c\varrho = 0$  oznacza, że pojemność cieplna przegrody jest równa zero, a więc mamy do czynienia tylko z oporem. Wreszcie przyjmując, że opór cieplny jest równy zero, czyli że  $\lambda = \infty$  po wyznaczeniu granic z zależności przedstawionych w kolumnach 2, 3, 4 otrzymamy związki dla pojemności przedstawione w kolumnie 6.

Opór i pojemność cieplna są zatem szczególnymi przypadkami warstw opisanych wzorami w kolumnach 2, 3 i 4.

### 6. Wyznaczenie chwilowej wartości temperatury i strumienia cieplnego w dowolnym punkcie przegrody wielowarstwowej

Związek pomiędzy amplitudami na wejściu i wyjściu w przegrodzie wielowarstwowej określony jest równaniem (2.9). Może być to przegroda składająca się z oporów, pojemności i warstw spełniających równanie Fouriera przewodzenia ciepła. Spośród czterech amplitud zespolonych:  $t_{s,1}$ ,  $q_{a,1}$ ,  $t_{b,n}$  i  $q_{b,n}$  wystarczy znać dwie, żeby za pomocą wzoru (2.9) wyznaczyć dwie pozostałe. Znajomość dwóch amplitud jest równoznaczna ze znajomością dwóch warunków brzegowych, a wyznaczenie pozostałych amplitud za pomocą zależności (2.9) uwzględni wpływ własności materiału wszystkich warstw na ich wartości. Możemy zatem przyjąć, że znamy wartości  $t_{b,n}$ ,  $q_{b,n}$ .

Wykorzystując to stwierdzenie wyznaczmy wzór określający amplitudy zespolone fali temperatury i fali strumienia ciepłego w dowolnym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej.

Podzielmy umownie  $k$ -tą warstwę na dwie warstwy zbudowane z tego samego materiału, ograniczone powierzchniami o współrzędnych  $R_{b,k-1} = R_{a,w}$ ;  $R_{b,w} = R_{a,w+w}$  oraz  $R_{b,w} = R_{a,s}$ ;  $R_{b,s} = R_{a,k+1}$ , gdzie (rys. 1)

$$R_{a,k} \leq w \leq R_{a,k+1}.$$

Amplitudy zespolone na powierzchni  $R_{a,k}+w = R_{b,w} = R_{a,s}$  będą równe

$$(6.1) \quad \begin{bmatrix} t_k(R_{b,w}) \\ q_k(R_{b,w}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_w & N_w \\ P_w & Q_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{b,n} \\ q_{b,n} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(6.2) \quad \begin{bmatrix} M_w & N_w \\ P_w & Q_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(R_{a,k}+w) & N(R_{a,k}+w) \\ P(R_{a,k}+w) & Q(R_{a,k}+w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{k+1} & N_{k+1} \\ P_{k+1} & Q_{k+1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} M_n & N_n \\ P_n & Q_n \end{bmatrix}.$$

Z zależności (6.1), po uwzględnieniu członu  $\exp i\omega\tau$  wymuszającego okresowość zjawiska, wyznaczmy wzory określające chwilowe wartości fali temperatury i fali strumienia ciepłego w dowolnym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej:

$$(6.3) \quad t_k(R_{b,w}, \tau) = [(M_w t_{b,n} + N_w q_{b,n})] \exp i\omega\tau,$$

$$(6.4) \quad q_k(R_{b,w}, \tau) = [(P_w t_{b,n} + Q_w q_{b,n})] \exp i\omega\tau.$$

Zazwyczaj znamy wartości amplitud na obu powierzchniach przegrody złożonej. Jest to równoznaczne, w ujęciu macierzowym, ze znajomością warunków brzegowych pierwszego lub trzeciego rodzaju.

Po wyznaczeniu z równania (2.9) wartości  $q_{b,n}$ , wstawieniu jej do wzorów (6.3) i (6.4) i wykonaniu przekształceń otrzymamy związek określający amplitudy zespolone fali temperatury i strumienia ciepłego w dowolnym punkcie  $k$ -tej warstwy przegrody  $n$ -warstwowej, jako funkcje amplitud temperatury na powierzchniach ograniczających tę przegrodę,

$$(6.5) \quad t_k(R_{b,w}, \tau) = \left[ \left( M_w - \frac{N_w}{N} M \right) t_{b,n} + \frac{N_w}{M} t_{a,1} \right] \exp i\omega\tau,$$

$$(6.6) \quad q_k(R_{b,w}, \tau) = \left[ \left( P_w - \frac{Q_w}{N} M \right) t_{b,n} + \frac{Q_w}{N} t_{a,1} \right] \exp i\omega\tau.$$

Znając amplitudy zespolone zawarte w nawiasach kwadratowych prawych stron równań (6.5) i (6.6) bez trudu wyznaczmy amplitudy rzeczywiste oraz przesunięcia faz fali temperatury i strumienia ciepłego.

## 7. Wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono metodę wyznaczania pola temperatury i pola strumienia ciepłego w wielowarstwowych przegrodach płaskich, cylindrycznych i sferycznych przedzielanych oporami i pojemnościami cieplnymi, przy założeniu harmonicznej zmiany temperatury na powierzchniach napływu. Stosując rozwinięcie w szereg Fouriera

można za pomocą przedstawionej metody wyznaczyć pole temperatur i pole strumienia ciepłego w przegrodach wielowarstwowych przy założeniu dowolnej okresowej zmiany temperatury na jednej z jej powierzchni. Obliczenia te wykorzystać można przy założeniu warunków brzegowych pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju, a także przy założeniu mieszanych warunków brzegowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARLSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959.
2. T. CHOLEWICKI, *Analiza obwodów elektrycznych*, WNT, Warszawa 1962.
3. N. W. MC LACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
4. L. BULZAK-MROZOWSKA, *Analiza przepływu fal temperatury i fal strumienia ciepłego w płaskich przegrodach jedno- i wielowarstwowych*, praca doktorska, Wrocław 1969.
5. L. A. PIPES, *Zastosowanie rachunku macierzowego w technice. Nowoczesna matematyka dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1962.
6. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
7. W. TOMCZAK, L. BULZAK-MROZOWSKA, *Wyznaczenie tłumienia fali temperatury w wielowarstwowych ścianach osłonowych*, Arch. Inż. Łąd., 1/XIV, Warszawa 1968.
8. W. TOMCZAK, *Macierzowa analiza ustalonego pola temperatury w przegrodach wielowarstwowych z wewnętrznymi źródłami ciepła*, Arch. Bud. Masz., 4, 1969.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И ПОЛЯ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА В МНОГОСЛОЙНОЙ СТЕНКЕ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПО ГАРМОНИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ ТЕПЛОМ Потоке

В работе приводится метод определения мгновенных значений температуры и теплового потока в произвольной  $n$ -ной точке  $k$ -того слоя  $n$ -слойной стенки, в предположении, что температура изменяется по гармоническому закону. Этот метод дает возможность получения решений для многослойных плоских, цилиндрических и сферических стенок, в предположении крайних условий первого, второго и третьего рода, а также смешанных крайних условий. Приводится расчетная схема учитывающая термическое сопротивление на контакте между слоями, а также присутствие слоев с нулевым термическим сопротивлением и отличной от нуля теплоемкостью.

#### Summary

#### DETERMINATION OF THE TEMPERATURE AND HEAT FLUX FIELD IN A MULTI-LAYER DIAPHRAGM AT HARMONIC HEAT FLOW

The paper presents a method of determination of the values of temperature and heat flux at an arbitrary point of the  $k$ -th layer of a  $n$ -layer diaphragm under the assumptions that the temperature varies harmonically. The presented method applies to plane, cylindrical and spherical multi-layer diaphragms with boundary conditions of the 1st, 2nd and 3rd kind or mixed. The proposed procedure takes into consideration the thermal resistance between the layers as well as the layers with vanishing resistance and a definite heat capacity.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1969 r.

O PRZYBLIŻONYM INTEGRALNYM OSZACOWANIU KUMULACJI PLAZMY  
PODDANEJ DZIAŁANIU KONCENTRYCZNEGO IMPULSU CIŚNIENIA

SYLWESTER K A L I S K I (WARSZAWA)

1. Wstęp

Basow i współpracownicy [1], jak również autorzy pracy [2] zastosowali uśredniony, integralny opis problemu ekspansji plazmy deuterowej poddanej działaniu silnego impulsu laserowego. Opis ten, mimo daleko idących uproszczeń, doprowadził do wyników porównywalnych co do rzędu wielkości z wynikami eksperymentu przeprowadzonego cztery lata później [3]; potwierdza to jego przydatność przy jakościowej ocenie parametrów w procesie nagrzewania plazmy.

Złożoność mechanizmów fizycznych przy impulsowym laserowym nagrzewaniu plazmy [4, 5, 6] zmusza do wprowadzania szeregu założeń i uproszczeń, co z kolei nie daje pewności odnośnie dokładności uzyskanych wyników. Poza tym matematyczna analiza procesów fal uderzeniowych przy uwzględnieniu skomplikowanych mechanizmów powierzchniowych, strat promieniowania itd. jest niezwykle złożona i stanowi źródło dodatkowych formalnych przybliżeń rachunkowych. W związku z powyższym metoda integralnego opisu uśrednionego, jak to wynika z porównania [1] [7] i [3], ma określony praktyczny sens. W oparciu o powyższą metodę udało się w [8] rozwiązać złożony problem nagrzewania za pomocą impulsu laserowego plazmy deuterowej zawartej w gęstej otoczce opóźniającej proces ekspansji plazmy.

Model integralnego uśrednionego opisu plazmy można również zastosować z powodzeniem i do problemu kumulacji plazmy poddanej działaniu zewnętrznego, koncentrycznego impulsu ciśnienia. Zagadnienie to przy spełnieniu warunków samopodobieństwa zostało dla kuli bez otoczki rozwiązane w sposób ścisły stosunkowo dawno (por. [9, 10, 11]).

Metoda integralnego uśrednienia stanowi dla kuli bez otoczki daleko bardziej uproszczony opis zagadnienia rozwiązanego ściśle. Jednakże jej zaletą jest to, że jest nieporównywalnie bardziej prosta oraz, i to jest najistotniejsze, że można ją zastosować do kuli z otoczką, gdzie rozwiązanie ścisłe nie istnieje oraz do bardziej złożonych układów, dla których rozwiązania ścisłego nie udaje się uzyskać i gdzie fizyka występujących zjawisk jest nader skomplikowana (por. [8]).

Taka sytuacja może mieć miejsce np. przy kombinowaniu przypadków typu [8] i niniejszego. W związku z powyższym rozpatrzmy obecnie, w oparciu o uśredniony opis integralny, rozwiązanie problemu kumulacji plazmy (z otoczką i bez) poddanej koncentrycz-

nemu impulsowi ciśnienia, zaś w następnej pracy, bazując na rozwiązaniu niniejszym oraz [8], rozpatrzmy bardziej złożony problem kombinowany nie dający się potraktować ściśle.

W rozdziale 2 pracy podano równania wyjściowe oraz założenia, w rozdziale 3 rozwiązanie problemu oraz w rozdziale 4 przykład liczbowy.

## 2. Równania problemu

Rozpatrzmy kulkę plazmową o promieniu  $r_0$ , poddaną koncentrycznemu działaniu impulsu ciśnienia. Przyjmiemy wszystkie założenia oraz ograniczenia analogiczne do podanych w pracach [1] i [8], tj. założenia odnośnie strat promieniowania, przewodzenia itd., jak również założenia dotyczące relacji pomiędzy czasem relaksacji a czasem tworzenia procesu. Przyjmiemy za punkt wyjścia równania gazu idealnego.

Zgodnie z powyższymi założeniami skorzystamy, dla integralnego opisu uśrednionego naszego zagadnienia, z równań zachowania pędu i energii w postaci

$$(2.1) \quad G \frac{dv}{dt} - 4\pi r^2 p = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \left( G \frac{v^2}{2} + E \right) = 0,$$

gdzie oznaczono przez  $v = \frac{dr}{dt}$  — średnią prędkość rozszerzenia gazodynamicznego (kumulacji),  $r$  — promień kuli,  $p$  — średnie ciśnienie,  $G$  — średnią masę kuli i otoczki, względnie masę samej kuli plazmowej<sup>1)</sup> oraz przez

$$(2.3) \quad E = \frac{3}{2} kNT$$

energię wewnętrzną gazu, przy czym  $T$  jest uśrednioną temperaturą,  $k$  — stałą Boltzmanna,  $N$  — całkowitą liczbą cząstek kuli (kuli i otoczki).

Poza tym obowiązuje oczywiście uśredniona relacja stanu

$$(2.4) \quad pV = kNT.$$

Należy tutaj zauważyć, że w uśrednionym rozwiązaniu integralnym wpływ otoczki uwidacznia się tylko w zmianie  $G$ , co stanowi oczywiście daleko idące uproszczenie w stosunku do rzeczywistości, gdzie wskutek niejednorodności powstają odbite fale uderzeniowe i strona matematyczna zagadnienia komplikuje się niepomierne w porównaniu z [9].

W związku z powyższym, dla uzyskania realnych oszacowań należy założyć niezbyt duże różnice gęstości materiału otoczki i kuli oraz stosunkowo małe wymiary geometryczne otoczki<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> W przypadku założenia stałej gęstości i liniowej zmiany prędkości wzdłuż promienia mamy  $G = \frac{3}{5} G_0$ , gdzie  $G_0$  — masa kuli.

<sup>2)</sup> Dla stanów asymptotycznych wyniki będą lepsze dla dużych różnic gęstości.



Inną wersją rozwiązania może być oddzielne uśrednione rozwiązanie dla otoczki, a następnie dla kuli, dla której warunki początkowe (brzegowe) wynikną z rozwiązania dla otoczki przy założeniu określonego mechanizmu oddziaływania. Ponieważ taka procedura stanowiłaby, z pewnymi modyfikacjami, dwukrotne powtórzenie procedury rozwiązania niniejszego — pominiemy ją, zwracając jedynie uwagę na to, że takie dwuetapowe rozwiązanie byłoby ściślejsze, szczególnie przy znacznej różnicy gęstości ośrodków. Zakładając, że  $r = r(t)$ , warunki początkowe (odpowiadają one również brzegowym) będą miały postać

$$(2.5) \quad \begin{aligned} r &= r_0, \\ v &= r' = -v_0 \end{aligned} \quad \text{dla } t = 0.$$

Do warunków tych winien dojść jeszcze trzeci warunek, jako że układ równań (2.1), (2.2) redukuje się do równania trzeciego rzędu względem  $r(t)$ . Ponieważ warunek ten dotyczy drugiej pochodnej, wymaga sprecyzowania charakteru impulsu ciśnienia.

Założmy, że impuls ten ma postać

$$(2.6) \quad I = P_{(t)}\delta(t) \quad \text{lub} \quad I = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ P \rightarrow \infty}} P\Delta t = \text{const.}$$

Przy takim założeniu  $v_0$  oraz  $I$  będą z sobą związane relacją

$$(2.7) \quad v_0 = \frac{I}{G},$$

zaś dla  $r''$  założymy

$$(2.8) \quad r''_{(0)} = 0.$$

Warunek (2.8) jest równoważny przyjęciu stałej całkowania równania (2.2) w postaci:

$$(2.9) \quad \frac{Gv_0^2}{2},$$

co odpowiada energii początkowej układu.

Założenie takie prowadzi jednakże w przypadku rozwiązania uśrednionego do rozwiązania, dla którego zmiana prędkości  $r'(t)$  fali kumulacji następuje przy  $r = 0$ , co oczywiście fizycznie jest niemożliwe. Przyjęcie impulsu w postaci (2.6) jest dopuszczalne, jeżeli założy się, że efekt ten został wywołany niesprężystym zderzeniem mas i masa początkowa ulega zwiększeniu. Masa ta może pochodzić np. od materii strugi kumulacyjnej. W związku z powyższym w miejsce stałej energii początkowej (2.9) przyjmujemy:

$$(2.10) \quad \alpha \frac{Gv_0^2}{2},$$

gdzie  $\alpha > 1$ .

Założenie to prowadzi do eliminacji skrajnego, nierealnego przypadku zmiany prędkości rozszerzenia (kumulacji) hydrodynamicznego  $r'(t)$  przy  $r = 0$ .

Układ równań (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) z warunkami początkowymi (2.5) i (2.10) stanowi sformułowanie problemu. Przejdźmy obecnie do konstrukcji rozwiązania ogólnego.

## 3. Rozwiązanie równań

Wykorzystując (2.4) i podstawiając do (2.3), a następnie do (2.2), możemy układ równań (2.1), (2.2) zapisać następująco

$$(3.1) \quad Gr'' - 4\pi r^2 p = 0,$$

$$(3.2) \quad \left( G \frac{r'^2}{2} + \frac{3}{2} pV \right)' = 0.$$

Mając na uwadze, że  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  oraz, że na podstawie (3.1)

$$(3.3) \quad p = \frac{Gr''}{4\pi r^2},$$

otrzymujemy po podstawieniu do (3.2)

$$(3.4) \quad \frac{G}{2} (r'^2 + rr'')' = 0$$

lub

$$(3.5) \quad \frac{G}{4} (r^2)''' = 0.$$

Całkując (3.5) i uwzględniając (2.10) znajdujemy

$$(3.6) \quad \frac{G}{4} (r^2)'' = \alpha \frac{Gv_0^2}{2}$$

lub

$$(3.7) \quad (r^2)'' = 2\alpha v_0^2.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu mamy zatem

$$(3.8) \quad r = \sqrt{\alpha v_0^2 t^2 + C_1 t + C_0}.$$

Na podstawie pierwszego z warunków początkowych (2.5) mamy

$$(3.9) \quad C_0 = r_0^2,$$

zaś z drugiego obliczamy

$$(3.10) \quad [r'(t)]_{t=0} = \left[ \frac{C_1 + 2\alpha v_0^2 t}{2\sqrt{r_0^2 + \alpha v_0^2 t^2 + C_1 t}} \right]_{t=0} = -v_0,$$

$$(3.11) \quad C_1 = -2v_0 r_0.$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy

$$(3.12) \quad r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2r_0 v_0 t + \alpha v_0^2 t^2},$$

$$(3.13) \quad r'(t) = -\frac{v_0 r_0 - \alpha v_0^2 t}{\sqrt{r_0^2 + \alpha v_0^2 t^2 - 2r_0 v_0 t}}.$$

Dla

$$(3.14) \quad t = t_0 = \frac{r_0}{\alpha v_0}$$

zachodzi  $r'(t) = 0$ . Wtedy  $r = r_{\min}$  wynosi

$$(3.15) \quad r_{\min} = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}} r_0.$$

Maksymalne ciśnienie

$$(3.16) \quad p_{\max} = \left. \frac{Gr''}{4\pi r^2} \right|_{t=t_0}$$

prowadzi do

$$(3.17) \quad p_{\max} = \frac{G}{4\pi} \left[ \frac{\alpha v_0^2 (r_0^2 + \alpha v_0^2 t^2 - 2r_0 v_0 t) - (\alpha v_0^2 t - v_0 r_0)^2}{(\alpha v_0^2 t^2 - 2r_0 v_0 t + r_0^2)^{5/2}} \right]_{t = \frac{r_0}{\alpha v_0}} = \\ = \frac{G}{4\pi} \frac{v_0^2}{r_0^3} \frac{\alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^3}} = \frac{Gv_0^2}{4\pi r_0^3} \sqrt{\frac{\alpha^5}{(\alpha-1)^3}}$$

oraz

$$(3.18) \quad T = \frac{G}{3kN} \left[ v_0^2 \alpha - \frac{(\alpha v_0^2 t - v_0 r_0)^2}{r_0^2 + \alpha v_0^2 t^2 - 2r_0 v_0 t} \right]$$

i

$$(3.19) \quad T_{\max} = \frac{\alpha G v_0^2}{3kN}.$$

W przypadku uwzględnienia otoczki przyjmujemy:

$$(3.20) \quad G_c = G\beta.$$

gdzie  $\beta > 1$ , zaś  $G$  jest masą kuli.

#### 4. Przykład

Rozpatrzmy krótkie przykłady ilustracyjne. Przyjmiemy następujące dane wyjściowe:

$$(4.1) \quad r_0 = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ cm}; \quad V = 10^{-5} \text{ cm}^3; \quad \frac{N}{V} = 3,0 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}; \\ G = 10^{-6} \text{ g}; \quad \alpha = 2; \quad v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ cm/sek.}$$

Wtedy

$$(4.2) \quad t_0 = \frac{r_0}{\alpha v_0} = \frac{1,33 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 5 \cdot 10^6} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ sek,}$$

$$(4.3) \quad p_{\max} = \frac{10^{-6}}{12,56} \frac{25 \cdot 10^{12}}{(1,33 \cdot 10^{-2})^3} 4\sqrt{2} \text{ g/cm sek}^2 \approx 4,8 \cdot 10^{12} \text{ g/cm sek}^2 = 4,8 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

$$(4.4) \quad T_{\max} \approx \frac{p_{\max} V}{kN} \approx 10^6 \text{ C}^0 \left( \text{ściślej } T_{\max} = \frac{\alpha G v_0^2}{3kN} \right).$$

W przykładzie powyższym przyjęto  $\alpha = 2$ , tj. porównywalne masy zewnętrzne i wewnętrzne. Dla bardzo dużych  $\alpha$ , rzędu  $10^2$ , otrzymamy:

$$(4.5) \quad t_0 \approx 0,27 \cdot 10^{-11} \text{ sek}; \quad p_{\max} \approx 2,7 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad T_{\max} \approx 2 \cdot 10^7 C^0.$$

Dla  $\alpha$  bliskich jedności, np. rzędu 1,01

$$(4.6) \quad t_0 = 2,66 \cdot 10^{-9} \text{ sek}; \quad p_{\max} \approx 2,7 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad T_{\max} \approx 2 \cdot 10^5 C^0.$$

Ze wzorów rozdziału 3 wynika, że doбором prędkości początkowej, masy i objętości oraz  $\alpha$  można w istotny sposób regulować ciśnienie maksymalne. Natomiast  $T_{\max}$  można regulować głównie za pomocą prędkości początkowej oraz  $\alpha$  i  $\beta$ .

### 5. Uwagi końcowe

Uzyskane wyżej rozwiązania obowiązują dla układu z otoczką lub bez niej w założeniu, że  $\beta$  nie różni się od 1 o kilka rzędów wielkości. Rozwiązanie ściśle dla układu z otoczką byłoby zbyt skomplikowane nawet na drodze numerycznej.

Cel niniejszej pracy, jak już wspomnieliśmy na wstępie, poza uzyskaniem możliwości operowania bardzo prostymi wzorami i uwzględnieniem otoczki — polega, między innymi, na możliwości kombinowania rozwiązań uzyskanych w niniejszej pracy z rozwiązaniami, pracy [8], czego nie daje się dokonać na gruncie ścisłych rozważań i co ze względu na niezwykłą złożoność zjawisk fizycznych nie zawsze jest celowe. W takich przypadkach metoda integralnego, uśrednionego opisu oddaje praktyczne usługi w zakresie orientacji w rzędach wielkości parametrów badanego procesu.

W dalszych pracach zajmiemy się kombinowanym problemem złożonym z problemu pracy niniejszej i [8], a następnie uściślonymi (falowymi) rozwiązaniami tych problemów.

### Literatura cytowana w tekście

1. Н. Г. БАСОВ, О. Н. КРОХИН, *Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора*, ЖЭТФ, 1, 46 (1964).
2. A. F. HAUGHT, D. H. POLK, W. J. FADER, *Production of plasmas for thermonuclear research by laser beam irradiation of solid particles*, Reports, 1—8 (1965—1968), United Aircraft R. Lab., Contract for the US Atomic Energy Commission.
3. Н. Г. БАСОВ, С. Л. ЗАХАРОВ, Л. Г. КРЮКОВ, Ю. В. СЕНАТСКИЙ, С. В. ЧЕКАЛИН, *Эксперименты по наблюдению нейтронов при фокусировке мощного лазерного излучения на поверхность дейтериди лития*, Писма в ред. ЖЭТФ, 1, 8 (1968).
4. Ю. АФИНАСЬЕВ, В. М. КРОЛЬ, О. Н. КРОХИН, И. В. НЕМЧАНОВ, *Газодинамические процессы при нагревании вещества излучением лазера*, ПММ, 6, 30 (1966).
5. И. В. НЕМЧАНОВ, *Стационарный режим движения нагреваемых излучением паров вещества при наличии бокового растекания*, ПММ, 2, 31, 1967.
6. R. E. KIDDER, *The application of lasers to the production of high temperature and high pressure plasma*, Report of Lawrence Rad. Lab., Univ. California-Livermore 1967.
7. J. M. DAWSON, *On the production of plasma by giant pulse laser*, Phys. Fluids, 7, 7 (1964).
8. S. KALISKI, *About approximate appraisals of deuterium plasma expansion excited by a thermal shock of lasers impulse*, Proc. Vibr. Probl., 4, 10 (1969).

9. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошных сред*, Москва 1955.
10. Ф. А. Блум, К. П. Станюкович, Б. И. Шехтер, *Физика взрыва*, Москва 1959.
11. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Раизер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Москва 1966.

## Резюме

## О ПРИБЛИЖЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ КУМУЛЯЦИИ ПЛАЗМЫ ПОДВЕРГНУТОЙ ДЕЙСТВИЮ КОНЦЕНТРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ

В работе рассмотрена проблема кумуляции плазмы с оболочкой и без оболочки под действием концентрического импульса давления. На грунте теории идеального газа решение дается опирающееся на интегральное, усредненное описание процесса. Оценены критические параметры процесса.

Метод усредненного описания позволяет учесть, хотя с далеко идущим приближением, влияние оболочки по отношению к известному автомодельному решению, а также позволяет объединить настоящее решение например с [8], где механизм процесса необычно сложен и точное решение получить нельзя. Усредненное же решение позволяет качественно оценить параметры процесса. Этой проблемой займемся, на грунте обеих работ: настоящей и [8], отдельно.

## Summary

## ON AN APPROXIMATE, INTEGRAL DETERMINATION OF CUMULATION OF THE PLASMA UNDER THE ACTION OF THE CONCENTRIC PRESSURE IMPULSE

The problem of cumulation of the plasma, with the shell and without it, under the action of the concentric impulse of pressure was analysed in this paper. The solution was presented on the ground of theory of the perfect gas, basing on the integral, averaged description of the process. The critical parameters of the process were estimated.

The method of averaged description allows, though with a far going approximation, to take into consideration, in relation to the known strict self-similar solution, the influence of shell, and allows to connect this solution with, for instance [8], where the mechanism of process is extraordinary complicated and a strict solution is unattainable. However, the averaged solution allows to estimate qualitatively the parameters of the process. We shall deal with this problem on the ground of both this paper and [8] separately.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 czerwca 1969 r.*

---



ANALIZA PEWNEGO UKŁADU NIELINIOWEGO  
PRZY WYMUSZENIU STOCHASTYCZNYM

WŁODZIMIERZ GAWRÓŃSKI (GDAŃSK)

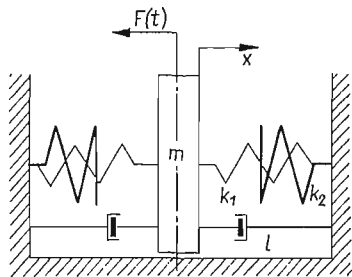
1. Opis układu

Schemat układu przedstawiono na rys. 1.

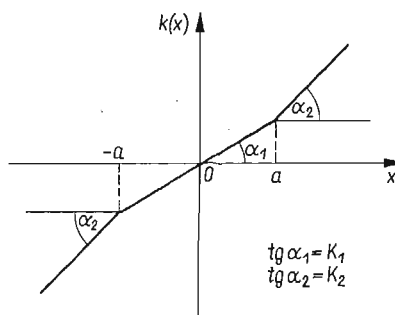
Jest to układ o jednym stopniu swobody, o współczynniku inercyjności  $m$ , współczynniku tarcia lepkiego  $l$  i sile sprężystości  $k(x)$  danej związkiem (1.1) (rys. 2)

$$(1.1) \quad k(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{dla } |x| \leq a \\ k_2 x + a(k_1 - k_2) & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

Charakterystyka sprężysta  $k(x)$  jest nieparzysta. Dla  $k_2 > k_1$  układ ma charakterystykę sztywną, dla  $k_2 < k_1$  — miękką; gdy  $k_2 = k_1$  układ jest liniowy.



Rys. 1



Rys. 2

Zakładamy, że siła wymuszająca  $F(t)$  jest procesem stochastycznym typu «biały szum» o rozkładzie normalnym. Gęstość widmowa tego procesu wynosi

$$S(\omega) = S_0^* = \text{const},$$

zaś funkcja korelacyjna procesu dana jest związkiem

$$(1.2) \quad R^*(\tau) = 2\sigma^2\delta(\tau),$$

gdzie

$$\sigma^2 = \pi S_0^*$$

$\delta(\tau)$  — delta funkcja Diraca.

Wartość średnia procesu  $F(t)$  jest równa zero

$$E[F(t)] \equiv 0.$$

Równanie stanu dynamicznego układu ma postać

$$(1.3) \quad m\ddot{x} + l\dot{x} + k(x) = F(t)$$

lub

$$(1.4) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + g(x) = f(t),$$

gdzie

$$2h = \frac{l}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m},$$

$$g(x) = \begin{cases} \omega_0^2 x & \text{dla } |x| \leq a \\ \omega_0^2 b^2 x + a\omega_0^2(1-b^2) & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, \quad b^2 = \frac{k_2}{k_1},$$

zaś gęstość widmowa procesu  $f(t)$  jest

$$S_0 = \frac{S_0^*}{m^2}.$$

Równanie (1.4) możemy przedstawić za pomocą układu dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -2hv - g(x) + f(t). \end{aligned}$$

## 2. Charakterystyki probabilistyczne reakcji

Funkcja wymuszająca  $f(t)$  jest stacjonarną, ciągłą funkcją losową, będącą zbiorem poszczególnych swych realizacji  $\tilde{f}(t)$ . Reakcja układu  $x(t)$ , zależna od własności dynamicznych układu oraz od wymuszenia, jest również zbiorem realizacji  $\tilde{x}(t)$ , odpowiadających realizacjom  $\tilde{f}(t)$ . Dla układów liniowych można znaleźć wzajemną odpowiedniość między  $\tilde{x}(t)$  i  $\tilde{f}(t)$  za pomocą liniowego funkcjonału charakteryzującego dany układ. Korzystając z zasady superpozycji można z dowolną dokładnością określić charakterystyki funkcji losowej  $x(t)$ . Ponieważ dla układów nieliniowych nie obowiązuje zasada superpozycji, tylko w nielicznych przypadkach można znaleźć pełne charakterystyki reakcji [jeśli układ opisany jest równaniem różniczkowym rzędu  $n$ -tego, to pełnym opisem reakcji układu będzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $n-1$  współrzędnych stanu  $p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$ ].

Do nielicznych wyjątków należy stacjonarna reakcja układu na proces wymuszający typu «biały szum». W przypadku tym gęstość rozkładu współrzędnych stanu układu można znaleźć jako rozwiązanie cząstkowego równania różniczkowego, tzw. równania



Fokkera—Plancka. Dotychczas nie znaleziono rozwiązania tego równania dla przypadku, gdy układ znajduje się w stanie przejściowym.

Tak więc, jeżeli wymuszenie jest idealnym białym szumem, to funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa współrzędnych stanu  $x$  i  $v = \frac{dx}{dt}$  dla układu nieliniowego określona jest równaniem Fokkera—Plancka ([4] s. 14).

Rozwiązaniem równania Fokkera—Plancka dla układu równań (1.5) jest funkcja [2, 3]

$$(2.1) \quad p(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{2h}{\sigma_1^2} \left[ \frac{v^2}{2} + G(x) \right] \right\},$$

gdzie  $\sigma_1^2 = \pi S_0$  — wariancja procesu  $f(t)$ ,  $G(x)$  — energia potencjalna układu

$$(2.2) \quad G(x) = \int_0^x g(u) du = \begin{cases} \omega_0^2 \frac{x^2}{2} & \text{dla } |x| \leq a \\ \omega_0^2 \frac{b^2}{2} \left[ \left( x + a \frac{1-b^2}{b^2} \right)^2 - a^2 \frac{1-b^2}{b^4} \right] & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

oraz stała  $C$  określa się z warunku normowania

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dx dv = 1.$$

Uwzględniając (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$(2.4) \quad C^{-1} = 2\pi\sigma_0^2\omega_0 \left\{ \operatorname{erf}(s) + \frac{B}{b} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right] \right\},$$

gdzie

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi S_0}{2h\omega_0^2}, \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}\sigma_0}, \quad B = \exp\left(s^2 \frac{1-b^2}{b^2}\right).$$

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^s e^{-u^2} du.$$

Z równania (2.1) wynika, że gęstość rozkładu  $p(x, v)$  można przedstawić w postaci

$$p(x, v) = Cp_1(x)p_2(v),$$

gdzie

$$p_1(x) = \exp\left[-\frac{2hG(x)}{\sigma_1^2}\right], \quad p_2(v) = \exp\left[-\frac{hv^2}{\sigma_1^2}\right],$$

a więc  $x$  i  $v$  są statystycznie niezależne.

Dla  $|x| \leq a$  rozkład zmiennej losowej  $x$  jest normalny, dla  $|x| > a$  rozkład prawdopodobieństwa  $x$  nie jest gaussowski.

Rozkłady graniczne wynoszą

$$(2.5) \quad p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 J} \exp\left[-\frac{G(x)}{\sigma_0^2\omega_0^2}\right],$$

$$(2.6) \quad p(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, v) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\omega_0} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_0^2\omega_0^2}\right],$$

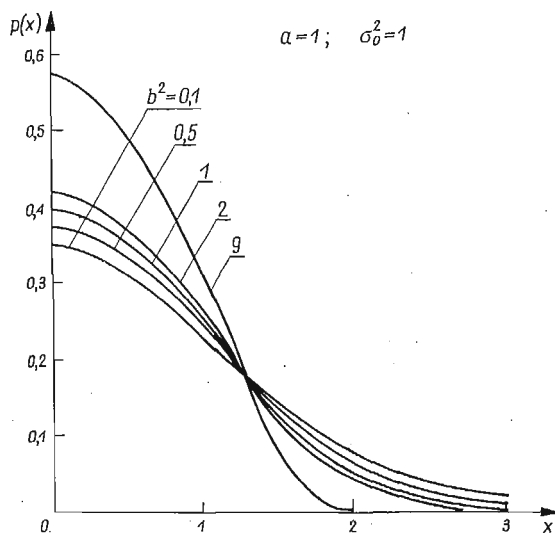
gdzie

$$J = \operatorname{erf}(s) + \frac{B}{b} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right].$$

Funkcja  $p(v)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Wykres  $p(x)$  dano na rys. 3.

Wariancja zmiennej losowej  $x$  wynosi:

$$(2.7) \quad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx.$$



Rys. 3

Zgodnie z (2.5) otrzymamy

$$(2.8) \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{J} \left\langle \operatorname{erf}(s) - \frac{2s}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) + \frac{B}{b^4} \left\{ \frac{2s}{\sqrt{\pi}} (2b^2 - 1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-\frac{s^2}{b^2}\right) + \frac{b^2 + 2s^2(1-b^2)^2}{b} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right] \right\} \right\rangle.$$

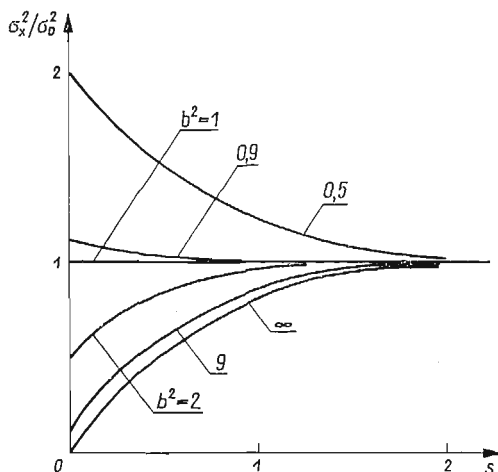
Wielkość  $\sigma_x$  jest dyspersją zmiennej  $x$  dla rozpatrywanego układu,  $\sigma_0$  — dyspersją  $x$  dla układu liniowego. Wykres zależności (2.8) dano na rys. 4. Z wykresu rys. 4 widzimy, że dla  $s > 2$ , a więc  $a > 2\sqrt{2}\sigma_0 = 2,82\sigma_0$  wariancja reakcji układu nieliniowego mało różni się od wariancji reakcji układu liniowego o charakterystyce sprężystej  $k(x) = k_1x$ . Wynika to z analizy krzywych gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $x$  (rys. 3): prawdopodobieństwo, że zmienna losowa  $x$  przyjmie wartości  $x > 3$  jest bardzo małe (mniejsze niż 0,3%).

Wariancja zmiennej  $v$  wynosi

$$(2.9) \quad \sigma_v^2 = \omega_0^2 \sigma_0^2,$$

czyli jest równa wariancji  $v$  dla układu liniowego.

Obliczymy średnią częstość przekraczania przez układ poziomą  $x = r$ . Częstość tę oznaczmy  $\nu_r^+$ . Ponieważ dany poziom układ może przekraczać z dołu do góry lub z góry do dołu, wobec tego przyjmujemy, że za średnią częstość będziemy uważali ilość przejść



Rys. 4

w jednostce czasu z dołu do góry, a więc gdy  $v > 0$ . Założenie to uwzględnia indeks „+” w oznaczeniu  $\nu_r^+$ .

Wartość średnia częstości przekraczania przez układ poziomą  $x = r$  z prędkością dodatnią dana jest związkiem [1,2]

$$(2.10) \quad \nu_r^+ = \int_0^{\infty} v p(r, v) dv.$$

Jeżeli przyjmiemy  $r = 0$ , wówczas związek (2.10) określa średnią wartość częstości układu, tj. średnią ilość przekraczania przez układ poziomą  $x = 0$  w kierunku z dołu do góry  $\nu_0^+$ . Zgodnie z (2.10) i (2.1) otrzymujemy

$$(2.11) \quad \nu_r^+ = \frac{CS_0}{2h} \exp\left[-\frac{2hG(r)}{S_0}\right]$$

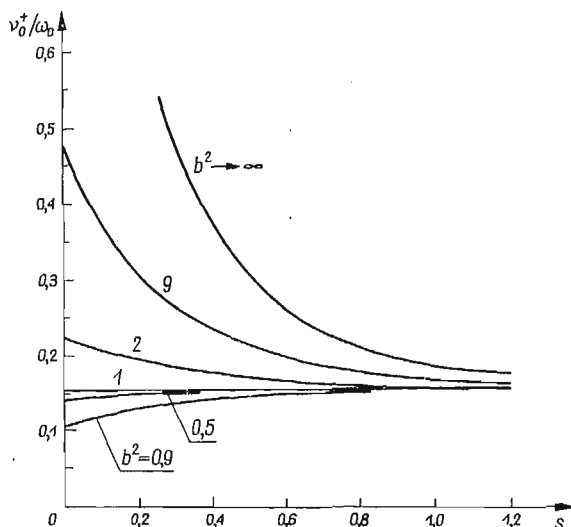
i

$$(2.12) \quad \nu_0^+ = \frac{\pi CS_0}{2h}.$$

Z (2.12) i (2.4) otrzymujemy

$$(2.13) \quad \frac{\nu_0^+}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi \left\{ \operatorname{erf}(s) + \frac{B}{b} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s}{b}\right) \right] \right\}} = \frac{1}{2\pi J}.$$

Wykres zależności (2.13) dano na rys. 5. I tu widzimy, że dla dużych wartości  $s$  ( $s > 2$ ) wartość średniej częstości drgań układu nieliniowego zbliża się do wartości częstości drgań układu liniowego z powodów wyżej wymienionych.



Rys. 5

Rozważania powyższe dotyczyły reakcji układu na wymuszenie stochastyczne typu «biały szum». Układy mechaniczne są filtrami dolnoprzepustowymi, wobec tego analiza powyższa jest słuszna również dla wymuszenia o funkcji gęstości widmowej dostatecznie gładkiej w zakresie niskich częstotliwości.

### 3. Stabilność techniczna układu

Analizę stabilności układu przeprowadzono w sensie technicznym [5]. Warunki stateczności są tu mniej silne od warunków stabilności asymptotycznej procesu stochastycznego (por. [4], s. 50—53; [6], s. 915, 916). Analiza techniczna stabilności w rozpatrywanym przypadku nie obejmuje zachowania się układu w procesie przejściowym, a tylko jego stan ustalony (ze względu na to, że nieznanne jest niestacjonarne rozwiązanie równania Fokkera—Plancka). Dla rozwiązań stacjonarnych warunki te są w wielu wypadkach dostatecznie dokładne [5].

Dany jest obszar  $\Omega$  określony zależnością

$$(3.1) \quad \Omega \equiv \{|x| \leq \beta_1, |v| \leq \beta_2\}$$

gdzie  $\beta_1, \beta_2$  — dane parametry.

Układ uważamy za stabilny technicznie, jeżeli zmienne losowe  $x$  i  $v$  należą do obszaru  $\Omega$  z żądanym prawdopodobieństwem  $1 - \varepsilon$ , tzn. jeśli jest spełniony warunek

$$(3.2) \quad p[(x, v) \in \Omega] \geq 1 - \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  — dana wartość, określająca wymagania dotyczące niezawodności układu.

Dla ułatwienia analizy stabilności, nieliniowe równanie różniczkowe układu (1.4) zastąpimy równaniem liniowym w postaci

$$(3.3) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_1^2 x = f(t),$$

gdzie  $\omega_1^2$  — zlinearyzowany współczynnik, wyznaczony z równości prac wykonanych przez siły sprężystości w układzie liniowym i nieliniowym, zgodnie ze wzorem

$$\int_0^{\beta_1} g(x) dx = G(\beta_1) = \frac{\omega_1^2}{2} \beta_1^2,$$

stąd

$$(3.4) \quad \omega_1^2 = \begin{cases} \omega_0^2 & \text{dla } |x| \leq a \\ \omega_0^2 \frac{b^2}{\beta_1} \left[ \left( \beta_1 + a \frac{1-b^2}{b^2} \right)^2 - a^2 \frac{1-b^2}{b^4} \right] & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

Rozwiązanie równania Fokkera—Plancka dla układu liniowego (3.3), w stanie ustalonym ma postać

$$(3.5) \quad p(x, v) = C_1 \exp \left[ -\frac{h}{\sigma_1^2} (v^2 + \omega_1^2 x^2) \right],$$

gdzie

$$\sigma_1^2 = \pi S_0, \quad C_1 = \frac{h\omega_1}{\pi\sigma_1}.$$

Mamy więc

$$(3.6) \quad p[(x, v) \in \Omega] = \int_{-\beta_1}^{+\beta_1} \int_{-\beta_2}^{+\beta_2} p(x, v) dx dv.$$

Po podstawieniu (3.5) do (3.6) i odpowiedniej transformacji otrzymujemy

$$(3.7) \quad p[(x, v) \in \Omega] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \int_{-\eta_0}^{+\eta_0} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right] d\xi d\eta,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \xi_0 = \frac{\beta_1}{\sigma_1} \omega_1 \sqrt{2h} \quad \eta_0 = \frac{\beta_2}{\sigma_1} \sqrt{2h}.$$

Dla danych  $\varepsilon$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $\sigma_1^2$  należy dobrać parametry układu  $h$  i  $\omega_0^2$  tak, aby była spełniona nierówność (3.2). Jeżeli we wzorze (3.7) oznaczymy

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \exp \left( -\frac{\xi^2}{2} \right) d\xi,$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta_0}^{+\eta_0} \exp \left( -\frac{\eta^2}{2} \right) d\eta,$$

wówczas warunek stabilności (3.2) przyjmie postać:

$$\Phi_1 \Phi_2 \geq 1 - \varepsilon.$$

Przykład. Przyjmijmy  $\varepsilon = 0,02$ . Wartości  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  wybieramy tak, aby spełniona była nierówność

$$(3.9) \quad \Phi_1 \Phi_2 \geq 0,98.$$

Na dwie wielkości niezależne został nałożony jeden warunek, wobec tego wybieramy jedną z nich dowolnie, względnie narzucamy dodatkowo warunek optymalizujący układ. Przyjmijmy więc

$$\Phi_2 \geq 0,9836,$$

wówczas

$$\Phi_1 \geq 0,9973.$$

Dla tych wartości  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  z tablicy otrzymujemy

$$\xi_0 \geq 3,00 \quad \eta_0 \geq 2,40.$$

Związki (3.7) i (3.8) dają

$$(3.10) \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1} \omega_1 \sqrt{2h} \geq 3,00,$$

$$(3.11) \quad \frac{\beta_2}{\sigma_1} \sqrt{2h} \geq 2,40.$$

Z porównania (3.4), (3.10) i (3.11) po przekształceniach otrzymujemy warunki stabilności technicznej układu

$$(3.12) \quad h \geq 9,04 \frac{S_0}{\beta^2},$$

$$(3.13) \quad \omega_0^2 \geq \begin{cases} 1,25 \frac{\beta_1}{\beta_2} & \text{dla } |x| \leq a \\ 1,25 \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2 \left[ \left( \beta_1 + a \frac{1-b^2}{b^2} \right)^2 + a^2 \frac{1-b^2}{b^4} \right]} & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. H. CRANDALL, *Random vibration of a nonlinear system with a set-up spring*, J. Appl. Mech., 29, 1962, 477—482.
2. *Случайные колебания*, ред. С. Крандалл, Москва 1967.
3. T. K. SAUGHEY, *On the response of a class of nonlinear oscillators to stochastic excitation*, Div. Eng. and Appl. Institute of Technology, Pasadena, California, June 1964, tłum. ros., Механика, Сб. пер., 1965.
4. А. А. Красовский, *Статистическая теория переходных процессов в системах управления*, Москва 1968.

5. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna maszyn wirnikowych przy wymuszeniach stochastycznych*, Sb. V Konf. Dynamika Stroju, Liblice 1968.
6. P. З. Хасминский, *Об устойчивости нелинейных стохастических систем*, ПММ, 30, вып. 5, 1966.

## R e z y u m e

АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
СО СЛУЧАЙНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В работе исследована реакция нелинейной системы с кусочно линейной характеристикой при случайном возмущении типа «белый шум». С помощью уравнения Фоккера—Планка определена плотность распределения вероятности установившегося процесса; определена вариация перемещения и скорости и средняя частота колебаний системы.

Исследована устойчивость системы в техническом смысле [5] и для требуемой надежности системы определено множество её параметров. Определенная на этом множестве система технически устойчива.

## S u m m a r y

ANALYSIS OF ONE CLASS NONLINEAR SYSTEM TO STOCHASTIC  
EXCITATION

In the paper the response of the nonlinear system with the piecewise linear spring characteristic to stochastic excitation «white noise» is given. The probable density of the stationary process is determined by the Fokker—Planck partial differential equation. The variance of the displacement and the velocity as well as the mean frequency of the vibration of the system have been found.

The technical stability of the system [5] is analysed. The set of the parameters of the system for its given reliability have been found. The system determined for this set is technical stability.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1969 r.*

---





NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE W PÓŁPŁASZCZYŹNIE SPRĘŻYSTEJ  
O WZMOCNIONYM BRZEGU

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Zagadnienie wyznaczania naprężeń kontaktowych w półpłaszczyźnie sprężystej, której brzeg jest wzmocniony prętem, było przedmiotem rozważań kilku autorów. W pracach GIRKMANN, MARGUERRE'A, BIOTA, REISSNERA (por. [2]), rozpatrzono wpływ obciążenia pośredniego, które przekazywane jest poprzez pręt na półpłaszczyznę sprężystą. Ostatnio temat ten — z uwagi na zastosowania (blachownice), został podjęty przez SZERIEMIETJEWĄ [6, 7], który zajmował się wyznaczaniem naprężeń w blachownicach o przekroju teowym i dwuteowym. W pracy ŁARKINA [5] rozpatrzono wpływ sił skupionych, przyłożonych w płaszczyźnie środkowej tarczy, na rozkład naprężeń kontaktowych występujących w miejscu połączenia tarczy z prętem. W pracy ARUTUNIANA [4] rozwiązano zagadnienie kontaktowe dla półpłaszczyzny, której brzeg jest wzmocniony prętem o skończonej długości. Rozwiązanie tego problemu sprowadzono do równania różniczkowo-całkowego typu Prandtla.

GODYCKI [3] podał przegląd prac dotyczących dźwigarów tarczowych z żebrami podporowymi. Przytoczono tam też analizę przydatności praktycznej wyników teoretycznych i doświadczalnych; przedstawiono aktualny stan omawianej problematyki ze szczególnym uwzględnieniem żelbetowych belek—ścian. Przegląd omawianej tutaj problematyki, lecz dla zagadnień termosprężystych, przedstawiono w pracy [1].

W niniejszej pracy rozwiązano zagadnienie wpływu momentu skupionego, leżącego w płaszczyźnie środkowej tarczy, na rozkład naprężeń kontaktowych występujących w miejscu połączenia tarczy z prętem. W zakończeniu pracy przytoczono przykład liczbowy.

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy półpłaszczyznę sprężystą

$$(2.1) \quad \mathcal{D} = \{(x, y): x > 0, -\infty < y < \infty\},$$

będącą powierzchnią środkową tarczy o grubości  $h$ , mającej moduł sprężystości  $E$ , której brzeg

$$(2.2) \quad \mathcal{C} = \{(x, y): x = 0, -\infty < y < \infty\}$$

połączony jest sprężycie z prętem; pręt ten ma przekrój  $F_1$  i moment bezwładności  $I_1$ ; jest też obciążony siłami poprzecznymi o intensywności  $r(y)$ . Przyjmować będziemy, że funkcja obciążenia  $r(y)$  jest funkcją nieparzystą. Założymy dalej, że w punkcie  $A(x_A = x_1, y_A = 0)$  przyłożony jest moment skupiony o wartości  $M$ , który jako para sił równoległych do osi  $y$  znajduje się w płaszczyźnie środkowej tarczy. Zadaniem naszym będzie wyznaczenie naprężeń kontaktowych, stycznych i normalnych, występujących w miejscu połączenia pręta z brzegiem tarczy. Przystępując do formalnego ujęcia występujących w zadaniu problemów brzegowych, określimy je następująco:

*Pręt.* Mamy wyznaczyć funkcje  $u = u(y)$  i  $v = v(y)$ , kolejno klasy  $C^{(4)}$ ,  $C^{(2)}$ , które przedstawiają współrzędne, odpowiednio w kierunku osi  $x$  i  $y$ , wektora przemieszczenia dowolnego punktu osi pręta połączonego z tarczą w sposób sprężysty. Funkcje te czynią zadość równaniom różniczkowym zagadnienia ściskania i zginania pręta prostego

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E_1 F_1 \frac{d^2 v}{dy^2} &= -s(y), \\ E_1 I_1 \frac{d^4 u}{dy^4} &= q(y) + r(y), \end{aligned}$$

gdzie występujące w równaniach (2.3) funkcje  $s(y)$ ,  $q(y)$  oznaczają kolejno obciążenie kontaktowe styczne i normalne występujące w przekroju tarczy  $x = 0$  (brzeg tarczy).

*Tarcza.* Należy wyznaczyć funkcję  $F = F(x, y)$ , która w obszarze  $\mathcal{D}$  jest klasy  $C^{(4)}$  i czyni zadość równaniu płaskiego stanu naprężenia

$$(2.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{y_0}^y Y(x, \tilde{y}) d\tilde{y}, \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{D},$$

a na brzegu  $\mathcal{C}$  jest funkcją klasy  $C^{(5)}$  i czyni zadość (por. [6]) warunkom brzegowym postaci następującej

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dy^2} &= \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right), \\ \frac{d^4 u}{dy^4} &= -\frac{1}{E} \left[ (2 + \nu) \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y^2} \right], \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (2.4) i (2.5) symbole  $F$ ,  $Y$  oznaczają, kolejno, funkcję naprężeń Airy'ego i współzrędną siły masowej. Tę ostatnią wielkość, zgodnie z naszym założeniem, przyjmiemy w postaci

$$(2.6) \quad Y = -P[\delta(x, x_1; y, 0) - \delta(x, x_1 + \Delta x; y, 0)].$$

W (2.6) symbolem  $\delta(x, x_1; y, y_1)$  oznaczono deltę Diraca w punkcie o współrzędnych  $(x_1, y_1)$ .

Funkcja  $F(x, y)$  powinna mieć taki przebieg, aby dla  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \pm \infty$  spełnione były warunki równowagi oraz aby funkcje naprężeń stycznych i normalnych zerowały się dla przekrojów tarczy w nieskończoności:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(y) dy, \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, \\ h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y dy &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(y) y dy + M \quad \text{dla } x \rightarrow \infty; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &\rightarrow 0, \quad \text{dla } x \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &\rightarrow 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \rightarrow 0 \quad \text{dla } y \rightarrow \pm \infty. \end{aligned}$$

Dla zupełności sformułowanych zagadnień brzegowych potrzebne są jeszcze warunki ciągłości rozwiązań na linii  $x = 0$ . Warunki te otrzymujemy z porównania zależności (2.3) i (2.5). W naszym przypadku mają one postać

$$(2.8) \quad \begin{aligned} s(y) &= -kh \left( \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right), \\ \dot{q}(y) + r(y) &= -\kappa h \left[ (2 + \nu) \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial x^2} \right], \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

W równaniu (2.8) przyjęto

$$(2.9) \quad k = \frac{E_1 F_1}{Eh}, \quad \kappa = \frac{E_1 I_1}{Eh}.$$

Warunki (2.8) wynikają z równań ciągłości przemieszczeń. Oprócz tych warunków, powinny być jeszcze spełnione równania ciągłości naprężeń na linii  $x = 0$   $\left( \tau_{xy} = \frac{1}{h} s(y), \sigma_y = \frac{1}{h} q(y) \right)$ .

Doprowadza to nas do zależności

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{h} s(y), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{1}{h} q(y), \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Jeżeli połączymy ze sobą warunki (2.8) i (2.10), to otrzymamy

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} - \frac{1}{k} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (2 + \nu) \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\kappa h} r(y), \quad \text{dla } (x, y) \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

W ten sposób problem został sprowadzony do zagadnienia brzegowego, polegającego na wyznaczeniu funkcji  $F(x, y)$  czyniącej zadość równaniu (2.4) oraz warunkom (2.7) i

(2.11). Znajomość tej funkcji pozwoli obliczyć naprężenia kontaktowe, styczne i normalne, tj. naprężenia  $s(y)$  i  $q(y)$  [wzory (2.10)], a przy znanym rozkładzie obciążenia  $r(y)$  — umożliwi wyznaczenie pola naprężeń w płęcie. Jeżeli chodzi o określenie pola naprężeń w tarczy, to uzyskać to możemy drogą różniczkowania funkcji naprężeń  $F(x, y)$ . Z tego też względu tym zadaniem w pracy zajmować się nie będziemy.

### 3. Rozwiązanie zadania

Zgodnie z założeniem przyjmujemy, że jedynym obciążeniem działającym w płaszczyźnie środkowej tarczy są dwie siły skupione (2.6) działające w punktach  $A(x_1, 0)$  i  $B(x_1 + \Delta x, 0)$ . Siły te są równoległe do osi  $y$ , mają te same wartości, lecz zwroty przeciwne. Przy budowaniu funkcji  $F$  wykorzystamy pewne rozwiązania znane dla płaszczyzny sprężystej. W przypadku bowiem, gdy działa siła  $-P$ , przyłożona w punkcie  $A(x_1, 0)$ , wówczas stan naprężenia i odkształcenia opisany jest funkcją (por. [2, 5])

$$(3.1) \quad F_A = -\frac{1+\nu}{4} \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \left[ \beta(x_1 - x) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] e^{-\beta(x_1 - x)} \sin \beta y d\beta;$$

zatem dla siły  $P$ , działającej w punkcie  $B(x_1 + \Delta x, 0)$ , funkcja określona równaniem (3.1) przyjmie postać

$$(3.1') \quad F_B = \frac{1+\nu}{4} \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \left[ \beta(x_1 + \Delta x - x) + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] e^{-\beta(x_1 + \Delta x - x)} \sin \beta y d\beta.$$

W przypadku, gdy działa para sił  $(-P, P)$ , wówczas funkcja Airy'ego będzie sumą funkcji  $F_A$  i  $F_B$ . Jeżeli przyjmujemy określenia  $M = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ P \rightarrow \infty}} P \Delta x$ , a  $F_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} (F_A + F_B)$ , to otrzymamy ostatecznie

$$(3.2) \quad F_1 = -\frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} \left[ \beta(x_1 - x) - \frac{2\nu}{1+\nu} \right] e^{-\beta(x_1 - x)} \sin \beta y d\beta.$$

Wprowadźmy do (3.2) następujące oznaczenia

$$(3.3) \quad a = -\frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} \left( \beta x_1 - \frac{2\nu}{1+\nu} \right) e^{-\beta x_1}, \quad b = \frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1};$$

wówczas (3.2) będziemy mogli zapisać w postaci

$$(3.2') \quad F_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} (a + \beta b x) e^{\beta x} \sin \beta y d\beta.$$

Ponieważ funkcja (3.2') jest rozwiązaniem dla przypadku tarczy nieskończonej, obciążonej momentem przyłożonym w punkcie  $A(x_1, 0)$ , przeto w rozpatrywanej przez nas tarczy pojawią się w przekroju  $x = 0$  naprężenia normalne i styczne, które — ogólnie biorąc — nie będą równe naprężeniom kontaktowym. Otrzymałą więc całkę, którą dla

naszego zadania powinniśmy uważać za całość szczególną równania niejednorodnego (2.4), należy uzupełnić całość ogólną równania jednorodnego. Przy tym wyborze kierować będziemy się kształtem funkcji (3.2). W przypadku obciążeń przyłożonych na brzegu, funkcja ta ma postać

$$(3.2'') \quad F_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} (c + \beta dx) e^{-\beta x} \sin \beta y d\beta,$$

w której występują dwie nieokreślone funkcje  $c = c(\beta)$  i  $d = d(\beta)$ , odpowiednio do dwu warunków brzegowych (2.11), gdyż pozostałe warunki (2.7) są przy funkcjach typu (3.2) spełnione.

Ostatecznie, po dodaniu funkcji  $F_1$  i  $F_2$  otrzymamy funkcję naprężeń w postaci

$$(3.4) \quad F = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} [(a + \beta bx) e^{\beta x} + (c + \beta dx) e^{-\beta x}] \sin \beta y d\beta.$$

Obciążenie  $r(y)$  przedstawimy w postaci całki Fouriera, dla funkcji nieparzystej; reprezentacja ta może być zapisana jako

$$(3.5) \quad r(y) = \int_0^{\infty} r(\beta) \sin \beta y d\beta,$$

gdzie

$$r(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r(\mu) \sin \beta \mu d\mu.$$

Podstawiając (3.4), (3.5) do warunków brzegowych (2.11), otrzymamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} -[1 + \beta k(1 + \nu)]c + (1 + 2\beta k)d &= -[1 - \beta k(1 + \nu)]a - (1 - 2\beta k)b, \\ [1 - \kappa\beta^3(1 + \nu)]c - [2 + \beta^3\kappa(1 - \nu)]d &= -[1 + \beta^3\kappa(1 + \nu)]a - [2 - \beta^3\kappa(1 - \nu)]b. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.6), uzyskamy

$$(3.7) \quad c = \frac{D_c}{D}, \quad d = \frac{D_d}{D},$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{aligned} D &= 1 + 2\beta\nu k + 2\beta^3\kappa + \beta^4\kappa k(3 + 2\nu - \nu^2), \\ D_c &= \frac{1 + \nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \left\{ \frac{4\pi r(\beta)}{(1 + \nu)M} (1 + 2\beta k) e^{\beta x_1} + 2 \frac{2 + 5\nu}{1 + \nu} - \beta \left( 3x_1 + \frac{4k\nu^2}{1 + \nu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta^2 k x_1 \nu + 4\beta^3 \kappa \frac{\nu}{1 + \nu} - 2\beta^4 \kappa [x_1 + k(2 - 3\nu - \nu^2)] - \beta^5 \kappa \kappa x_1 (1 + \nu)^2 \right\}, \\ D_d &= \frac{1 + \nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \left\{ \frac{4\pi r(\beta)}{(1 + \nu)M} e^{\beta x_1} [1 + \beta k(1 + \nu)] + \frac{3 + 7\nu}{1 + \nu} + \right. \\ &\quad \left. - 2\beta(x_1 - k\nu) - 2\beta^3 \kappa + \beta^4 \kappa k(1 + \nu)(1 + 5\nu) - 2\beta^5 \kappa k x_1 (1 + \nu)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (2.10), (3.4), wyznaczmy funkcje naprężeń kontaktowych

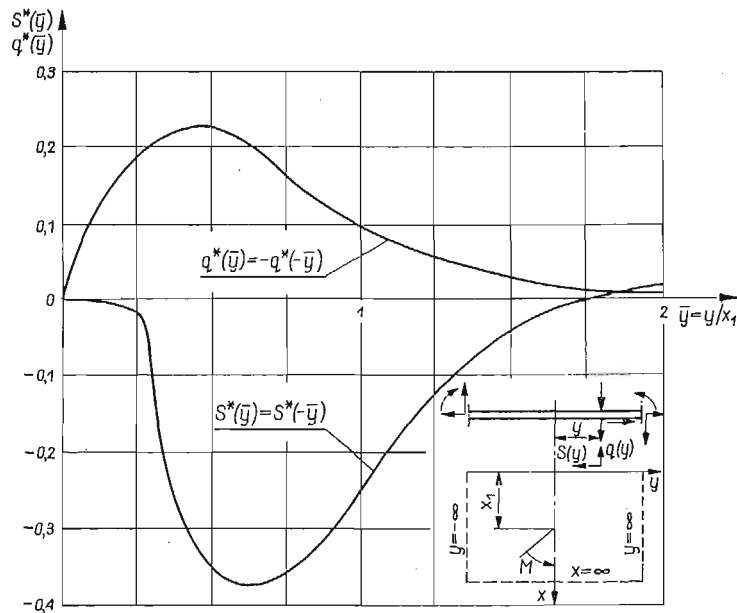
$$(3.9) \quad -\frac{1}{h} s(y) = \int_0^{\infty} (a+b-c+d)\beta \cos \beta y d\beta,$$

$$\frac{1}{h} q(y) = \int_0^{\infty} (a+2b+c-2d)\beta \sin \beta y d\beta.$$

W zakończeniu podamy jeszcze, dla ilustracji sposobu rozwiązania, przykład liczbowy, który został wykonany przy założeniu, że  $\nu = k = \infty$ . Na podstawie (3.7), (3.8) otrzymujemy

$$(3.9') \quad c = -\frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \frac{2-3\nu-\nu^2+\beta x_1(1+\nu)^2}{(1+\nu)(3-\nu)},$$

$$d = \frac{1+\nu}{4} \frac{M}{\pi h} e^{-\beta x_1} \frac{1+5\nu-2\beta(1+\nu)x_1}{3-\nu},$$



Rys. 1

a po uwzględnieniu (3.3) i (3.9), uzyskujemy wzory określające naprężenia kontaktowe

$$(3.10) \quad s(y) = -\frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \beta (2-\beta x_1) e^{-\beta x_1} \cos \beta y d\beta,$$

$$q(y) = \frac{1+\nu}{3-\nu} \frac{M\nu}{\pi} \int_0^{\infty} \beta \left( \frac{1-3\nu}{1+\nu} + \beta x_1 \right) e^{-\beta x_1} \sin \beta y d\beta.$$

Po obliczeniu całek występujących w (3.10), otrzymamy

$$(3.11) \quad \begin{aligned} s^*(\bar{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3-\nu}{1+\nu} \frac{\pi}{M} \frac{x_1^2}{2} s(\bar{y}) = \frac{\bar{y}^2-3}{(1+\bar{y}^2)^3} \bar{y}^2, \\ q^*(\bar{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3-\nu}{\nu} \frac{\pi}{M} \frac{x_1^2}{8} q(\bar{y}) = \frac{1-\nu\bar{y}}{(1+\bar{y}^2)^3} \bar{y}, \end{aligned}$$

gdzie przez  $\bar{y}$  oznaczono w (3.11) nową zmienną, określoną równaniem  $\bar{y} = y/x_1$ . Wykresy naprężeń kontaktowych stycznych  $s^*(\bar{y})$  i normalnych  $q^*(\bar{y})$ , będące obrazem geometrycznym funkcji (3.11), przedstawiono na rys. 1.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. BORKOWSKI, *Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965—1967)*, Mech. Teor. Stos., 2, 7 (1969), 107—153.
2. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1957.
3. T. GODYCKI, *Przegląd ważniejszych prac na temat dźwigarów tarczowych z żebrami podporowymi*, Arch. Inż. Łąd., 1/2, 15 (1969), 173—200.
4. Н. Х. АРУТУНЯН, *Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением*, Прикл. Мат. Мех., 4, 32 (1968), 632—646.
5. Ю. И. ЛАРКИН, *Напряженное состояние упругой полуплоскости с подкрепленным краем, наеруэсненной сосредоточенной силой*, Изв. Вузов, Стр. Арх., 12, 10 (1967), 47—57.
6. М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ, *Пластинки с подкрепленным краем*, Львов 1960.
7. М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ, *Определение напряженного состояния тавровых и двутавровых балок методами плоской задачи теории упругости*, Прил. теории функции в мех. спл. среды, Москва 1965.

#### Резюме

#### КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

В работе рассмотрена упругая полуплоскость, край которой упруго соединен со стержнем обладающим определенным сечением и моментом инерции. В дальнейшем принимается, что в некоторой точке полуплоскости действует сосредоточенный момент, который, рассматриваемый в качестве пары сил, действует в серединной плоскости диска. Приводятся решения задачи о контактных нормальных и касательных напряжениях, появляющихся на соединении стержня с краем диска. В заключение дается численный пример.

## S u m m a r y

CONTACT STRESSES IN ELASTIC HALF-PLANE WITH STIFFENED  
BOUNDARY

An elastic half-plane with the boundary elastically connected with a rod of a given crosssection is considered. At an arbitrary point of the half-plane a moment is applied. The pair of forces forming the couple is acting in the central plane. The solution for the contact shear and normal stresses acting along the surface between the strip with the half-plane. A numerical example is given.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1969 r.*

---

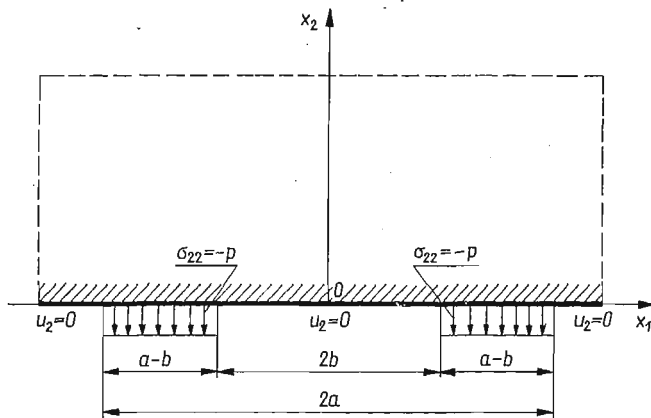


O PEWNYM PRZYPADKU PEŁZANIA PÓŁPŁASZCZYZNY  
Z NIECIĄGŁYMI WARUNKAMI BRZEGOWYMI

ZBIGNIEW JAN PIEKARSKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [2] autorzy podali rozwiązanie problemu pełzania półpłaszczyzny przy nieciągłych warunkach brzegowych, odpowiadających zagadnieniu szczeliny Griffitha. Zagadnienie dwóch kolinearnych szczelin obciążonych stałym naprężeniem normalnym na gruncie teorii sprężystości rozpatrzył po raz pierwszy WILLMORE [4], stosując metodę funkcji zmiennej zespolonej. Następnie TRANTER [3] rozwiązał ponownie problem przy



Rys. 1

ogólniejszych założeniach (obciążenie normalne szczelin — dowolne), sprowadzając zadanie brzegowe do potrójnych równań całkowych, dla których znalazł ściśle, zamknięte rozwiązanie.

W pracy niniejszej rozważymy półpłaszczyznę o brzegu wolnym od naprężeń stycznych  $\sigma_{12}$ , obciążoną symetrycznie na dwóch odcinkach brzegu naprężeniem normalnym  $\sigma_{22} = \text{const}$ ; na pozostałej części brzegu dano przemieszczenie pionowe  $u_2 = 0$  (rys. 1).

O materiale ośrodka zakładamy, że jest lepkosprężysty i podlega liniowej teorii pełzania ze starzeniem według ARUTUNIANA [1]. Związki fizyczne, w ogólności nieinwariantne względem chwili przyłożenia obciążenia, mają postać

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E(t)} (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t (\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) \dot{\delta}(t, \tau) d\tau, \quad ij = 1, 2,$$

gdzie  $\varepsilon_{ij}$  — składowe tensora odkształceń,  $\sigma_{ij}$  — składowe tensora naprężeń,  $\delta_{ij}$  — symbol Kroneckera,  $\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$ ,  $\nu = \text{const}$  — współczynnik Poissona,  $E(t)$  — moduł sprężystości,  $C(t, \tau)$  — miara pełzania.

Rozważany problem brzegowy jest uogólnieniem wspomnianych zadań Willmora i Trantera na gruncie teorii pełzania. Może on znaleźć zastosowanie również w mechanice górotworu do analizy stanu naprężeń i odkształcenia w otoczeniu filara. Rozwiązanie podamy w oparciu o funkcję naprężeń Airy'ego i transformację całkową Fouriera. Mieszany problem brzegowy sprowadzimy do układu dwóch równań całkowych, dla których można podać ściśle rozwiązanie zamknięte.

## 2. Ogólna metoda rozwiązania problemu

Jak wiadomo [1], płaskie zagadnienie teorii pełzania dla modelu ciała opisanego związkami (1.1) można zawsze sprowadzić do rozwiązania równania biharmonicznego dla funkcji naprężeń  $F(x_1, x_2, t)$ , które po wykonaniu cosinusowej transformacji całkowej Fouriera względem zmiennej  $x_1$ , prowadzi do równania zwyczajnego

$$(2.1) \quad \frac{d^4 \tilde{F}}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \tilde{F}}{dx_2^2} + \alpha^4 \tilde{F} = 0$$

dla transformaty

$$\tilde{F}(\alpha, x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x_1, x_2) \cos \alpha x_1 dx_1.$$

Całka ogólna równania (2.1), po uwzględnieniu warunku, by dla  $|x_2| \rightarrow \infty$  znikwały drugie pochodne funkcji naprężeń, przyjmuje postać

$$(2.2) \quad \tilde{F}(\alpha, x_2) = (A + B\alpha x_2) e^{-\alpha x_2}.$$

Naprężenia wyznaczmy ze znanych związków

$$\sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12},$$

które po wykonaniu transformacji odwrotnej dają

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [(2 - \alpha x_2)B - A] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A + B\alpha x_2] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{12} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [(1 - \alpha x_2)B - A] \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu warunku brzegowego  $\sigma_{12}(x_1, 0) = 0$  otrzymujemy  $A = B$ , skąd

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(1-\alpha x_2) \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{22} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(1+\alpha x_2) \alpha^2 e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha, \\ \sigma_{12} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A \alpha^3 x_2 e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha. \end{aligned}$$

Dysponując naprężeniami (2.4), możemy z (1.1) wyznaczyć odkształcenia, a dalej ze związków

$$(2.5) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

— przemieszczenia, otrzymując

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha A(1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha + \\ &\quad + (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^{\infty} \alpha A(1-2\nu-\alpha x_2) e^{-\alpha x_2} \sin \alpha x_1 d\alpha \right\} \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + f_1(x_2), \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha A[2(1-\nu)+\alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha + \\ &\quad - (1+\nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left\{ \int_0^{\infty} \alpha A[2(1-\nu)+\alpha x_2] e^{-\alpha x_2} \cos \alpha x_1 d\alpha \right\} \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + f_2(x_1). \end{aligned}$$

Funkcje  $f_1(x_2)$  i  $f_2(x_1)$ , podobnie jak w teorii sprężystości, przyjmują postać odpowiadającą sztywnemu przemieszczeniu

$$f_1(x_2, t) = C^* x_2 + B^*, \quad f_2(x_1, t) = -C^* x_1 + D^*.$$

Po uwzględnieniu symetrii zadania otrzymujemy  $C^* = B^* = 0$ , skąd ostatecznie

$$(2.7) \quad f_1(x_2) = 0, \quad f_2(x_1, t) = D^*(t).$$

Wzory (2.4), (2.6) i (2.7) pozwalają na szczegółowe rozpatrzenie dalszych warunków brzegowych.

### 3. Problem brzegowy typu dwóch kolinearnych szczelin

Zgodnie z rys. 1 mamy

$$(3.1) \quad \text{dla } x_2 = 0 \quad \begin{cases} u_2 = 0, & x_1 < b; \\ \sigma_{22} = -p, & b < x_1 < a; \\ u_2 = 0, & x_1 > a. \end{cases}$$

Mieszany warunek brzegowy (3.1) zastąpimy formalnie warunkiem ciągłym, przemieszczeniowym

$$(3.2) \quad u_2 = g(x_1, t) = \begin{cases} 0, & x_1 < b; \\ v(x_1), & b < x_1 < a; \\ 0, & x_1 > a; \end{cases}$$

gdzie  $v(x_1, t)$  jest nieznanym na razie przemieszczeniem, którego wartość wyznaczymy na podstawie (3.1)<sub>2</sub>.

Sprowadzenie problemu (3.1) do (3.2) pozwala na bezpośrednie wyznaczenie parametru  $A(\alpha)$  na drodze transformacji odwrotnej. W tym celu podstawiamy wyrażenie (2.6)<sub>2</sub> z uwzględnieniem (2.7) do warunku (3.2)

$$\frac{2(1-\nu^2)}{E(t)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha - 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_1}^t \left[ \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha \right] \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + D^*(t) = \\ = g(x_1, t).$$

Oznaczając dla zwięzłości

$$(3.3) \quad 2(1-\nu^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha A \cos \alpha x_1 d\alpha = \omega(x_1, t)$$

otrzymujemy

$$\frac{\omega(x_1, t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \omega(x_1, \tau) \dot{\delta}(t, \tau) d\tau + D^*(t) = g(x_1, t)$$

i dalej

$$(3.4) \quad \omega(x_1, t) + \int_{\tau_1}^t \omega(x_1, \tau) [-E(t) \dot{\delta}(t, \tau)] d\tau = E(t)[g(x_1, t) - D^*(t)].$$

Otrzymane równanie całkowe Volterry II rodzaju posiada rozwiązanie

$$(3.5) \quad \omega(x_1, t) = E(t)[g(x_1, t) - D^*(t)] - \int_{\tau_1}^t E(\tau)[g(x_1, \tau) - D(\tau)] R(t, \tau) d\tau,$$

w którym funkcja  $R(t, \tau)$  stanowi rezolwentę jądra  $\left[ -E(t) \frac{\partial}{\partial t}(t, \tau) \right]$ . Szczegółowe obliczenie tej rezolwenty podane było w pracy [2], w tym miejscu więc ograniczymy się jedynie do zacytowania gotowego wyniku

$$(3.6) \quad R(t, \tau) = -\gamma \left\{ [\dot{\varphi}(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] + \varphi(\tau) \left[ \frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\varphi(\tau)E(\tau) \right] \right\} \times \\ \times \int_{\tau_1}^t E(\tau') e^{-\eta(\tau, \tau')} d\tau' + \left[ \frac{\dot{E}(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\varphi(\tau)E(\tau) \right]$$

słusznego dla funkcji  $\delta(t, \tau)$  postaci (por. [1])

$$(3.7) \quad \delta(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + C(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + \varphi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}].$$

We wzorze (3.6) oznaczono

$$(3.8) \quad \eta^{(\tau, \tau')} = \gamma \int_{\tau}^{\tau'} [1 + \varphi(\theta)E(\theta)] d\theta.$$

Znając funkcję  $\omega(x_1, t)$  [z (3.5)] obliczymy nieznaną wielkość  $A(\alpha)$  z (3.3), mianowicie

$$\begin{aligned} 2(1-\nu^2)\alpha A &= \tilde{\omega}(\alpha, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \omega(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 = \\ &= E(t) \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(t) \delta(\alpha) \right] + \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x_1, \tau) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (3.2)

$$(3.9) \quad \begin{aligned} 2(1-\nu^2)\alpha A &= E(t) \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^a v(x_1, t) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(t) \delta(\alpha) \right] + \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^a v(x_1, \tau) \cos \alpha x_1 dx_1 - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

gdzie  $\delta(\alpha)$  jest dystrybucją «delta» Diraca.

Otrzymany wynik, zawierający nieznaną dotąd funkcję  $v(x_1, t)$  czyni zadość warunkom (3.1)<sub>1,3</sub>. Podstawienie go do (3.1)<sub>2</sub> daje związek

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha \left\{ E(t) \left[ \frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, t) \cos \alpha \zeta d\zeta - D^*(t) \delta(\alpha) \right] - \int_{\tau}^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, \tau) \cos \alpha \zeta d\zeta - D^*(\tau) \delta(\alpha) \right] \times \right. \\ \left. \times E(\tau) R(t, \tau) d\tau \right\} \cos \alpha x_1 d\alpha = -2(1-\nu^2)p, \end{aligned}$$

który po zmianie kolejności całkowania przybiera postać

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, t) E(t) \left( \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha \zeta \cdot \cos \alpha x_1 d\alpha \right) d\zeta - E(t) D^*(t) \int_0^{\infty} \alpha \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha + \\ - \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{2}{\pi} \int_b^a v(\zeta, \tau) \left( \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha \zeta \cdot \cos \alpha x_1 d\alpha \right) d\zeta \right] E(\tau) R(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{\tau_1}^t E(t) R(t, \tau) D^*(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \alpha \delta(\alpha) \cos \alpha x_1 d\alpha = 2(1-\nu^2)p. \end{aligned}$$

Drua i czwarta całka równe są zeru na podstawie własności dystrybucji «delta», oznaczając dalej

$$(3.10) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha \zeta \cdot \cos \alpha x_1 d\alpha = K(x_1, \zeta)$$

dochodzimy do układu równań całkowych

$$(3.11) \quad E(t) \int_b^a v(\zeta, t) K(x_1, \zeta) d\zeta = w(x_1, t),$$

$$w(x_1, t) - \int_{\tau_1}^t w(x_1, \tau) R(t, \tau) d\tau = -2(1-\nu^2)p,$$

z których pierwsze jest typu Fredholma I rodzaju, a drugie typu Voltery II rodzaju.

Rozwiązanie (3.11)<sub>2</sub> jest znane [2] i ma postać

$$(3.12) \quad w(x_1, t) = -2(1-\nu^2)pE(t)\delta(t, \tau_1).$$

Również jądro  $K(x_1, \zeta)$  wyznaczyć można w postaci zamkniętej

$$(3.13) \quad K(x_1, \zeta) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(x_1-\zeta)^2} + \frac{1}{(x_1+\zeta)^2} \right]$$

korzystając z rezultatów teorii dystrybucji. Zatem dla (3.11)<sub>1</sub> otrzymujemy

$$\int_b^a v(\zeta, t) \left[ \frac{1}{(x_1-\zeta)^2} + \frac{1}{(x_1+\zeta)^2} \right] d\zeta = 4(1-\nu^2)p\delta(t, \tau_1).$$

Niewiadomą funkcję  $v(\zeta, t)$  poszukiwać będziemy w postaci

$$(3.14) \quad v(\zeta, t) = V(\zeta)\delta(t, \tau_1).$$

Wtedy  $V(\zeta)$  spełniać musi równanie

$$\int_b^a V(\zeta) \left[ \frac{1}{(x_1-\zeta)^2} + \frac{1}{(x_1+\zeta)^2} \right] d\zeta = 4(1-\nu^2)p,$$

które po dwukrotnym scałkowaniu względem zmiennej  $x_1$  przybierze postać

$$(3.15) \quad \int_b^a V(\zeta) \ln|x_1^2 - \zeta^2| d\zeta = -2(1-\nu^2)p x_1^2 + l x_1 + m;$$

tutaj  $l$  i  $m$  są stałymi dowolnymi.

Dokonując zmiany zmiennych

$$\zeta^2 = b^2 + s, \quad x_1^2 = b^2 + z,$$

otrzymujemy

$$\int_0^{a^2-b^2} W(s) \ln|z-s| ds = -(1-\nu^2)p(b^2+z) + \frac{l}{2} \sqrt{b^2+z} + \frac{m}{2},$$

gdzie

$$(3.16) \quad W(s) = \frac{V(\sqrt{b^2+s})}{\sqrt{b^2+s}}.$$

Po dalszej zmianie zmiennych

$$\frac{s}{a^2-b^2} = \zeta, \quad \frac{z}{a^2-b^2} = y$$

otrzymujemy równanie całkowe

$$(3.17) \quad \int_0^1 W(\zeta) \ln|y-\zeta| d\zeta = -(1-\nu^2)py + l' \sqrt{y(a^2-b^2)+b^2+m'}$$

rozwiązane przez Carlemana

$$W(\zeta) = \frac{A'}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \int_0^1 \left[ \frac{-(1-\nu^2)p + \frac{l'}{2} \frac{a^2-b^2}{\sqrt{y(a^2-b^2)+b^2}}}{y-\zeta} \right] \sqrt{y(1-y)} dy,$$

gdzie  $A'$  i  $l'$  są stałymi zależnymi od  $l$  i  $m$ .

Wykonując całkowanie dostajemy dalej

$$(3.18) \quad W(\zeta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \left\{ A' + \left[ -(1-\nu^2)p \frac{\pi}{2} (1-2\zeta) + \frac{l'}{2} (a^2-b^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^1 \frac{1}{y-\zeta} \sqrt{\frac{y(1-y)}{y(a^2-b^2)+b^2}} dy \right] \right\}.$$

Występującą tu całkę

$$I = \int_0^1 \frac{1}{y-\zeta} \sqrt{\frac{y(1-y)}{y(a^2-b^2)+b^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \int_0^1 \frac{y(1-y)}{y-\zeta} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}}, \quad d = \frac{b^2}{a^2-b^2},$$

możemy doprowadzić do postaci

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[ - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}} dy + (1-\zeta) \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}} + \right. \\ \left. + \zeta(1-\zeta) \int_0^1 \frac{1}{y-\zeta} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(y+d)}} \right],$$

a po prostych przekształceniach i wprowadzeniu podstawień

$$k^2 = \frac{1}{1+d} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2; \quad n = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}; \quad y = 1 - \sin^2 \varphi$$

— do postaci

$$(3.19) \quad I = \frac{2}{a} \left[ \left( \frac{1}{k^2} - \zeta \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \right. \\ \left. + \zeta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] = \frac{2}{a} \left[ \left( \frac{1}{k^2} - \zeta \right) K(k) - \frac{1}{k^2} E(k) + \zeta \Pi(n, k) \right],$$

gdzie

$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$  jest całką eliptyczną zupełną I rodzaju,

$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$  jest całką eliptyczną zupełną II rodzaju,

$\Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2} - n, k\right)$  jest całką eliptyczną zupełną III rodzaju.

Wyrażenie  $\zeta \Pi(n, k)$  przekształcić można dalej otrzymując

$$(3.20) \quad \zeta \Pi(n, k) = \frac{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}{\sqrt{1-k^2(1-\zeta)}} [K(k) E(\psi, k) - E(k) F(\psi, k)], \\ \psi = \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin \sqrt{1-\zeta}.$$

Podstawiając (3.20) do (3.19), a toż kolei do (3.18) otrzymamy

$$W(\zeta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} \left\{ \left[ A' - (1-\nu^2)p \frac{\pi}{2} + l' \frac{a^2-b^2}{a} \frac{K(k)-E(k)}{k^2} \right] + \right. \\ \left. - \zeta \left[ -(1-\nu^2)p\pi + l' \frac{a^2-b^2}{a} K(k) \right] + l' \frac{a^2-b^2}{a} \frac{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}{\sqrt{1-k^2(1-\zeta)}} [K(k) E(\psi, k) + \right. \\ \left. - E(k) F(\psi, k)] \right\}.$$

Oznaczając

$$B' = A' - (1-\nu^2)p \frac{\pi}{2} + l' \frac{a^2-b^2}{a} \frac{K(k)-E(k)}{k^2}, \\ L = l' \frac{a^2-b^2}{a} K(k)$$

otrzymujemy

$$(3.21) \quad W(\zeta) = \frac{B' - \zeta(L - (1-\nu^2)p\pi)}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{L}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2(1-\zeta)}} \left[ E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right].$$



Wracając do (3.16), wzór na  $V(\zeta)$  przybiera postać

$$V(\zeta) = W(\zeta) \sqrt{b^2 + \zeta(a^2 - b^2)} = \sqrt{b^2 + \zeta(a^2 - b^2)} \left\{ \frac{B' - \zeta(L - (1 - \nu^2)p\pi)}{\pi^2 \sqrt{\zeta(1 - \zeta)}} + \frac{L}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2(1 - \zeta)}} \left[ E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right] \right\}.$$

Żądając regularności przemieszczenia  $v(\zeta, t)$  należy usunąć osobliwości pierwszego wyrazu dla  $\zeta = 0$  i  $\zeta = 1$ . Musi być wtedy

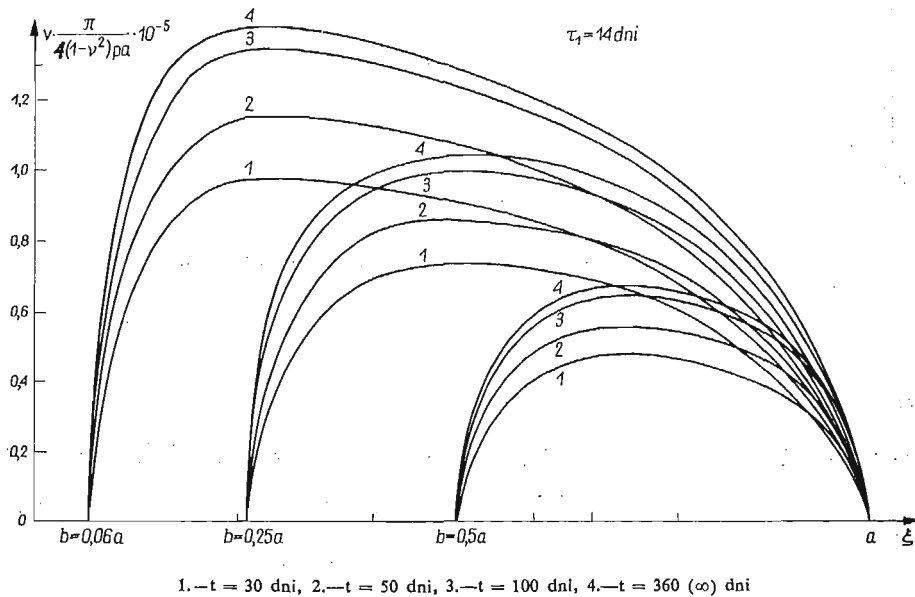
$$[B' - \zeta(L - (1 - \nu^2)p\pi)]_{\zeta=0}^{\zeta=1} = 0,$$

skąd

$$B' = 0, \quad L = (1 - \nu^2)p\pi.$$

Ostatecznie więc, po wstawieniu wartości współczynnika  $k$

$$(3.22) \quad V(\zeta) = \frac{(1 - \nu^2)pa}{\pi} \left[ E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right].$$



Rys. 2

Poszukiwana postać przemieszczenia na brzegu  $v(\zeta, t)$  wynosi więc na podstawie (3.14)

$$(3.23) \quad v(\zeta, t) = \frac{(1 - \nu^2)pa}{\pi} \left[ E(\psi, k) - \frac{E(k)}{K(k)} F(\psi, k) \right] \delta(t, \tau_1).$$

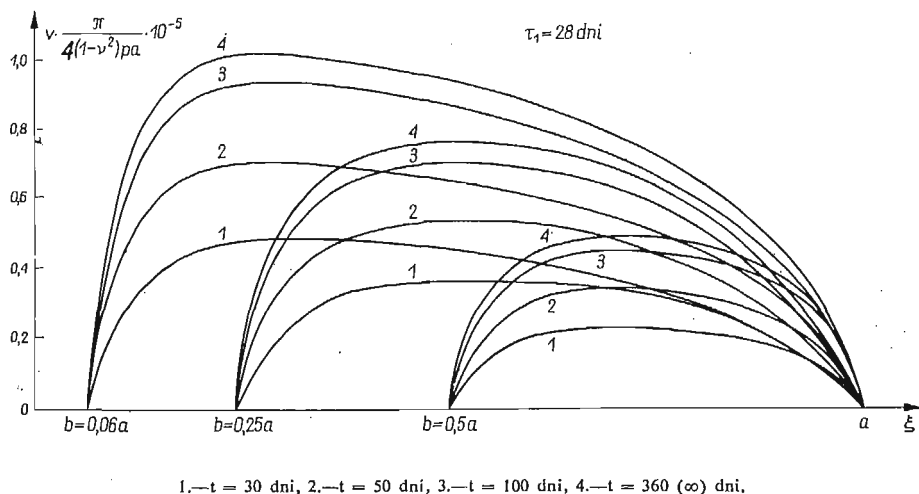
Dla przypadku sprężystego jest  $\delta(t, \tau_1) = 1/E = \text{const}$  i otrzymujemy wynik zgodny z rezultatem Willmore'a.

Wzór (3.23) stanowi rozwiązanie postawionego problemu brzegowego. Dla ilustracji liczbowej wykonano przykład obliczeniowy przyjmując materiał Arutuniana—Masłowa o jądrze

$$(3.24) \quad \delta(t, \tau_1) = \frac{1}{E(\tau_1)} + \varphi(\tau_1)[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}],$$

gdzie

$$E(\tau_1) = E_0(1 - \beta e^{-\alpha\tau_1}), \quad \varphi(\tau_1) = C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}.$$



Rys. 3

Dla wartości parametrów

$$E_0 = 2 \cdot 10^5; \quad \beta = 1, \quad \alpha = 0,03; \quad C_0 = 0,90 \cdot 10^{-5}; \quad A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026$$

wiekui materiału  $\tau_1 = 14$  i  $\tau_1 = 28$  dni oraz różnych wartości czasu  $t$  sporządzono wykresy przemieszczeń podane na rys. 2 i 3.

#### 4. Zakończenie

Znając rozwiązanie problemu brzegowego wyrażone funkcją (3.23) możemy wyznaczyć parametr  $A(\alpha)$  z (3.9), a stąd naprężenia i przemieszczenia w dowolnym punkcie półpłaszczyzny. Szczegółów tych obliczeń nie będziemy przytaczać z uwagi na ich podobieństwo z [2]. Warto zauważyć, że przeprowadzone rozważania nie ulegną zmianie, gdy szerokość

przedziału  $(b, a)$  będzie funkcją czasu:  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$ . Wynika to stąd, że równanie całkowe (3.15) pozostanie słuszne dla każdej chwili  $t$ . Możemy więc napisać [w miejsce (3.23)]

$$v(\xi, t) = \frac{(1-\nu^2)pa(t)}{\pi} \left[ E(\psi, k(t)) - \frac{E(k(t))}{K(k(t))} F(\psi, k(t)) \right] \delta(t, \tau_1), \quad k(t) = 1 - \left[ \frac{b(t)}{a(t)} \right]^2.$$

Dalsze uogólnienie uzyskamy biorąc zmienne obciążenie  $p = p(x_1)$ . Bez żadnych zmian pozostaną wtedy obliczenia aż do (3.14) włącznie, a jedynie końcowy wynik spowodowany całkowaniem względem zmiennej  $x_1$  [jak to widać z rozważań poprzedzających (3.15)] będzie inny. Jak już we wstępie wspomniano, wyniki pracy mogą znaleźć zastosowanie w teorii szczelin, mechanice górotworu, teorii konstrukcji i w innych dziedzinach nauk technicznych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Н. Х. Арутюнян, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва—Ленинград 1952.
2. Z. PIEKARSKI, G. SZEFER, *Pełzanie półpłaszczyzny przy mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos. (w druku).
3. C. J. TRANTER, *The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure*, Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1961.
4. T. J. WILLMORE, *The distribution of stress in the neighbourhood of a crack*, Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 2, 53, 1949.

#### Резюме

#### ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОЛУПЛОСКОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В статье рассмотрена ползучесть полуплоскости из вязко-упругого материала, подчиняющегося линейной теории старения Арутюняна, при смешанных граничных условиях. Дано точное решение задачи, с применением интегрального преобразования Фурье и элементов теории обобщенных функций. Работа может найти применение в теории трещин, механике горной породы и теории конструкции.

## Summary

ON A CERTAIN CASE OF CREEP OF A HALF-PLANE  
WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

The problem of creep of a semi-infinite plane made of a Arutunian-type visco-elastic material and subject to discontinuous boundary conditions has been considered. The exact closed-form solution is based on the application of Fourier transforms and the elements of the distribution theory. The results can be applied in the crack theory, rock mechanics and the theory of engineering structures.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 sierpnia 1969 r.*

---

## UOGÓLNIONE WARUNKI STATECZNOŚCI W PRÓBIE ROZCIĄGANIA

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Zagadnienie sformułowania warunku utraty stateczności w próbie rozciągania, uwzględniającego wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na własności plastyczne badanej próbki, jest coraz częściej przedmiotem zainteresowania. Można tu wymienić na przykład prace [1, 2, 3, 5].

Należy podkreślić, że przyjęte w danym przypadku kryterium utraty stateczności określa otrzymany warunek stateczności. Dlatego też wyprowadzone warunki stateczności mogą różnić się w zależności od przyjmowanych kryteriów utraty stateczności.

Na przykład, w pracy [3] przyjęto klasyczne kryterium utraty stateczności

$$(1.1) \quad \frac{dP}{d\varphi} = 0, \quad \varphi = \ln \frac{F_0}{F},$$

to jest przyjęto za punkt utraty stateczności moment, gdy siła na wykresie  $P = P(\varphi)$  osiąga maksymalną wartość; przez  $\varphi$  oznaczono odkształcenie naturalne,  $F_0$  oraz  $F$  oznaczają odpowiednio pole początkowego przekroju próbki i pole aktualne. Równoczesne założenie równania konstytutywnego z pominięciem efektów historii prędkości odkształcenia i temperatury, w formie

$$(1.2) \quad \sigma = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

prowadzi do wartości siły w danym momencie procesu rozciągania próbki

$$(1.3) \quad P = F\sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T),$$

gdzie przez  $\sigma$  oznaczono rzeczywiste naprężenie, natomiast przez  $\dot{\varphi}$  oznaczono prędkość odkształcenia w mierze logarytmicznej,  $T$  oznacza temperaturę w skali absolutnej. Po zróżniczkowaniu (1.3) względem  $\varphi$  otrzymuje się

$$(1.4) \quad \frac{dP}{d\varphi} = F \frac{d}{d\varphi} [\sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T)] + \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) \frac{dF}{d\varphi},$$

po dalszym zróżniczkowaniu

$$(1.5) \quad \frac{d}{d\varphi} [\sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T)] = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi}.$$

Ponieważ

$$(1.6) \quad F = F_0 e^{-\varphi},$$

to

$$(1.7) \quad \frac{dF}{d\varphi} = -F_0 e^{-\varphi}, \quad \frac{dF}{d\varphi} = -F.$$

Biorąc pod uwagę kryterium (1.1) oraz (1.4), (1.5) i (1.7) otrzymuje się uogólniony warunek stateczności (1.8) zamieszczony pierwotnie w pracy [3]

$$(1.8) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T).$$

Można tu wyróżnić dwa przypadki szczególne, mianowicie:

a) izotermiczny proces deformacji próbki; wówczas  $\frac{dT}{d\varphi} = 0$ ,

stąd

$$(1.9) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad T = \text{const.}$$

Warunek stateczności w postaci (1.9) został ostatnio przedyskutowany w pracy [2]. Za procesy izotermiczne można uznać w zasadzie wszystkie procesy odkształcania próbek przy małej prędkości deformacji, rzędu  $\dot{\varphi} = 10^{-3} \text{ sek}^{-1}$  lub mniejszych. Przy większych prędkościach deformacji proces nie jest ściśle izotermiczny i stopniowo zmienia się na adiabatyczny, zależnie od intensywności wymiany ciepła z otoczeniem próbki. Można uznać, że przy prędkości deformacji rzędu  $\dot{\varphi} = 10^2 \text{ sek}^{-1}$ , czasy deformacji są tak krótkie, zwykle kilka milisekund, że proces deformacji jest wyłącznie procesem adiabatycznym.

W przypadku procesu ściśle izotermicznego zwiększenie prędkości deformacji może powodować zwiększenie lub zmniejszenie wydłużeń równomiernych zależnie od wybranego metalu. Z reguły dla polikrystalicznych metali o sieci regularnej płaskocentrowanej zachodzi zwiększenie wydłużeń równomiernych wraz ze wzrostem prędkości odkształcania;

b) proces przy stałej prędkości odkształcania,  $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$ ,

stąd warunek (1.8) przyjmuje postać

$$(1.10) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Klasycznym przykładem procesu deformacji o zmieniającej się temperaturze jest wspomniany uprzednio proces adiabatyczny. Dokładną analizę procesu adiabatycznego przeprowadzono w pracy [3]. Jak wynika z analizy przeprowadzonej w tej pracy, teoretyczne wydłużenia równomierne próbek są zawsze mniejsze dla procesu adiabatycznego w porównaniu z izotermicznym. Efekt ten nie jest procentowo duży, rzędu kilku procent w zakresie temperatur średnich i podwyższonych,  $0,2 \leq T/T_m \leq 0,5$ , ( $T_m$  oznacza temperaturę topnienia). Natomiast w zakresie temperatur niskich i skrajnie niskich,  $T/T_m \leq 0,2$ , różnice w teoretycznym wydłużeniu równomiernym dla tych dwóch procesów mogą dochodzić do kilkuset procent i więcej.

O ile proces deformacji próbki zachodzi zarówno przy stałej prędkości odkształcenia, jak i w stałej temperaturze, to uogólniony warunek (1.9) redukuje się do postaci analogicznej do dotychczas powszechnie używanej w literaturze, mianowicie

$$(1.11) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T), \quad \begin{aligned} T &= \text{const} \\ \dot{\varphi} &= \text{const}. \end{aligned}$$

## 2. Próbka niejednorodna

Warunek (1.8) odnosi się wyłącznie do idealnej próbki, to jest próbki o idealnie jednorodnym materiale i o idealnie jednakowej powierzchni pola początkowego przekroju poprzecznego  $F_0$ . Przypadek próbki idealnej został szeroko przedyskutowany w pracy [3]. Oczywiście próbka taka jest ze względów technicznych niewykonalna. Zwykle  $F_0$  zmienia się nieco wzdłuż długości próbki liczonej jako  $x$  od jednego z jej końców. Tak więc  $\frac{dF_0}{dx}$  ma zwykle pewną skończoną wartość, stąd równanie (1.7) przedstawi się w nieco innej formie

$$(2.1) \quad \frac{dF}{d\varphi} = -F \left( 1 \pm \frac{1}{F_0} \frac{dF_0}{dx} \frac{dx}{d\varphi} \right).$$

Wartość  $\frac{dF_0}{dx}$  może być przyjęta zarówno jako dodatnia lub ujemna, gdyż fakt ten nie wpływa na moment utraty stateczności. Z fizycznego punktu widzenia należy przyjąć więc wartość bezwzględną  $\left| \frac{dF_0}{dx} \right|$ . Przez  $\frac{d\varphi}{dx} = \lambda$  oznaczono pewien parametr nazwany gradientem odkształcenia. Uwzględniając jak poprzednio równania (1.1), (1.4), (1.5) i (2.1) otrzymuje się warunek stateczności (2.2) z uwzględnieniem zmian przekroju początkowego po długości próbki i gradientem  $\lambda$  jako parametrem

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) \left( 1 + \frac{1}{\lambda F_0} \left| \frac{dF_0}{dx} \right| \right).$$

W obecnym przypadku gradient odkształcenia  $\lambda$  odgrywa rolę parametru. Przyjęta wartość  $\lambda$  determinuje wartość tak zwanego wydłużenia równomiernego, przy czym  $\lambda$  może zawierać się w bardzo szerokich granicach,  $0 \leq \lambda \leq \infty$ . Dla  $\lambda = 0$  wartość wydłużenia równomiernego wynosi  $\varphi_r = 0$ , gdyż nie jest możliwe uzyskanie takiego procesu deformacji z równoczesnym założeniem zmian początkowego przekroju próbki po długości. W takim przypadku utrata stateczności następuje natychmiast. W przypadku dopuszczenia  $\lambda = \infty$ , tj. do absolutnej utraty stateczności, wydłużenie równomierne osiąga największą możliwą wartość teoretyczną. Ponieważ w rzeczywistości nawet w obszarze powstałego na próbce przewężenia wartości  $\lambda$  nie osiągają wartości nieskończenie wielkich, to w konkretnych przypadkach wartości wydłużeń równomiernych będą zawsze zależne od aktualnie dopuszczalnej wartości gradientu  $\lambda$ .

Celem ilustracji problemu zakłada się proces izotermiczny zachodzący przy stałej prędkości odkształcenia; wówczas  $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$ ;  $\frac{dT}{d\varphi} = 0$ . Stąd

$$(2.3) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \sigma(\varphi, \dot{\varphi}, T) \left( 1 + \frac{1}{\lambda F_0} \left| \frac{dF_0}{dx} \right| \right).$$

Równocześnie przyjmuje się równanie konstytutywne, które zostało pierwotnie wykorzystane do podobnej analizy w pracy [3]

$$(2.4) \quad \sigma = B\varphi^m \dot{\varphi}^{n(\varphi)},$$

gdzie  $n(\varphi) = n_0 + \alpha\varphi$ ,  $B$ ,  $m$  oraz  $n(\varphi)$  oznaczają odpowiednio moduł plastyczności, wykładnik umocnienia oraz czułość na prędkość odkształcenia jako rosnącą funkcję odkształcenia. Zwykle czułość na prędkość  $n$  przyjmuje się jako stałą [3], jednak jak wykazano w pracach [4] i [6], czułość na prędkość odkształcenia  $n$  nieco wzrasta ze wzrostem odkształcenia. Uwzględniając ten fakt można bardziej dokładnie opisać wartości modułu stycznego krzywej umocnienia w obszarze odkształceń, gdzie tworzy się szyjka. Na przykład, według danych z pracy [4]

$$\begin{aligned} \text{dla aluminium} \quad n(\varphi) &= 0,014 + 0,0503\varphi, \\ \text{dla miedzi} \quad n(\varphi) &= 0,0034 + 0,0060\varphi. \end{aligned}$$

Zmiany początkowego pola przekroju poprzecznego przyjęto w liniowej postaci

$$(2.5) \quad F_0 = F_0^* + ax,$$

to jest w formie stożka o zmieniającej się średnicy według (2.6)

$$(2.6) \quad d_0 = \sqrt{d_0^{*2} + \frac{4}{\pi} ax},$$

gdzie  $a$  oznacza stałą, natomiast  $d_0^*$  stanowi najmniejszą średnicę próbki.

Moduł styczny można wyznaczyć z równania (2.4)

$$(2.7) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \sigma \left( \frac{m}{\varphi} + \alpha \ln \dot{\varphi} \right).$$

Równocześnie

$$(2.8) \quad \left| \frac{dF_0}{dx} \right| = a.$$

Podstawiając zależności (2.4), (2.5) i (2.8) do warunku stateczności (2.3) otrzymuje się wartość odkształcenia w momencie utraty stateczności

$$(2.9) \quad \varphi_r = \frac{m}{1 + \frac{a}{\lambda F_0} - \alpha \ln \dot{\varphi}}.$$

Otrzymany rezultat wskazuje na stabilizujący wpływ prędkości odkształcenia na przebieg procesu rozciągania z jednej strony oraz na zmniejszanie się wydłużeń  $\varphi_r$  w zakresie odkształceń statecznych przy powiększaniu wartości  $a$ , to jest nierównomierności początkowego przekroju, z drugiej. Problem ten został przedyskutowany w nieco inny sposób,



jednak z podobnym wynikiem w pracy [5]. Z równania (2.9) wynika, że dla pewnej wartości prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi}_r$  oraz założonym  $\lambda$  można osiągnąć «teoretyczną» wartość wydłużenia  $\varphi_r = m$ ; wówczas musi być spełniona zależność

$$\frac{a}{\lambda F_0} - \alpha \ln \dot{\varphi}_r = 0,$$

lub inaczej

$$\dot{\varphi}_r = \exp \frac{a}{\lambda \alpha F_0}.$$

Na przykład, zakładając dopuszczalny gradient w postaci zmiany odkształcenia na 1 mm długości próbki jako  $\Delta\varphi = 1 \cdot 10^{-4}$ ;  $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$  [1/mm], zakładając dalej wartość  $a$  jako powstałą z niedokładności wykonania próbki w postaci względnej zmiany pola przekroju

$$\frac{a}{F_0} = \frac{1}{x} \frac{F - F_0}{F_0}$$

i przyjmując względną zmianę pola przekroju  $\frac{F - F_0}{F_0} = 1 \cdot 10^{-4}$  na długości 10 mm mamy  $a/F_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ . Otrzymane wartości  $\dot{\varphi}_r$  odpowiednio dla aluminium i miedzi wynoszą

$$\begin{array}{ll} \text{aluminium} & \dot{\varphi}_r = e^{1,9}, & \dot{\varphi}_r = 6,68 \text{ sek}^{-1}, \\ \text{miedź} & \dot{\varphi}_r = e^{16,6}, & \dot{\varphi}_r = 1,6 \cdot 10^7 \text{ sek}^{-1}. \end{array}$$

Można więc stwierdzić znaczny wpływ czułości na prędkość odkształcenia na osiągnięcia teoretycznego wydłużenia  $\varphi_r = m$ . W przypadku niskiej czułości na prędkość odkształcenia, co jest słuszne w przypadku miedzi, wartość  $\dot{\varphi}_r$  jest zbyt duża, aby mogła być zrealizowana w próbach rozciągania.

Należy podkreślić, że jeżeli przeprowadzić analizę próbki nieidealnej, to wydłużenia równomierne  $\varphi_r$  mogą być, zależnie od prędkości odkształcenia, zarówno mniejsze, jak również większe od wartości teoretycznej  $\varphi_r = m$ . Przy czym dla takich metali jak aluminium i miedź wzrost prędkości odkształcenia pociąga za sobą zwiększenie się  $\varphi_r$ . Powyższy wniosek jest zgodny z uzyskanymi wynikami w pracach [3] oraz [5].

### 3. Próbka idealna, przykłady

Poniższy fragment pracy może stanowić ilustrację problemu i pewne uzupełnienie wyników uzyskanych w pracy [3]. Rozważania dotyczyć będą próbki idealnej, a więc przypadku szczególnego dla  $\frac{dF_0}{dx} = 0$ . Zakłada się dwa rodzaje równania konstytutywnego, mianowicie

$$(3.1) \text{ typ A} \quad \sigma = f(\varphi) + \psi(\dot{\varphi}),$$

przy czym  $f(\varphi)$  oznacza statyczną krzywą umocnienia, a  $\psi(\dot{\varphi})$  jest rosnącą funkcją prędkości odkształcenia równą zeru dla  $\dot{\varphi} = 0$ . Równanie konstytutywne typu A może być w szczególności użyte do opisu dynamicznych krzywych umocnienia żelaza i miękkich stali z pominięciem przystanku plastyczności;

$$(3.2) \text{ typ B} \quad \sigma = f(\varphi)\psi_1(\dot{\varphi}).$$

Równanie typu B — (3.2) jest zwykle używane do opisu krzywych umocnienia z grupy metali o sieci regularnej płaskocentrowanej; do tego typu należy także równanie (2.4).

Moduły styczne krzywych umocnienia można przedstawić w formie

$$(3.3) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = f'(\varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}; \quad f'(\varphi) = \left( \frac{d\sigma}{d\varphi} \right)_{\text{stat.}},$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = f'(\varphi) \psi_1(\dot{\varphi}) + f(\varphi) \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Warunki stateczności (1.9) przyjmą formę

$$(3.5) \quad f(\varphi) - f'(\varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} - \psi(\dot{\varphi}),$$

$$(3.6) \quad f(\varphi) - f'(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{\psi_1(\dot{\varphi})} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Struktura otrzymanych równań wskazuje, że w przypadku stałej prędkości odkształcenia ( $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$ ), warunek stateczności (3.6) otrzymany na podstawie równania konstytutywnego typu B nie zależy od prędkości odkształcenia jako parametru, co udowodniono uprzednio w pracy [3]. Natomiast dla przypadku równania typu A otrzymany warunek stateczności (3.5) wskazuje na przesuwanie się momentu utraty stateczności do obszaru odkształceń mniejszych przy zwiększaniu prędkości odkształcenia. Wynika to ze znaku minus przed funkcją  $\psi(\dot{\varphi})$  w równaniu (3.5).

Po przyjęciu w obydwu przypadkach statycznej krzywej umocnienia  $f(\varphi)$  w postaci

$$f(\varphi) = B\varphi^m; \quad f'(\varphi) = \frac{m}{\varphi} f(\varphi),$$

otrzymuje się odpowiednio warunki stateczności

$$(3.7) \quad \text{A} \quad \frac{m}{\varphi_r} = 1 + \frac{1}{f(\varphi)} \left[ \psi(\dot{\varphi}) - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \right],$$

$$(3.8) \quad \text{B} \quad \frac{m}{\varphi_r} = 1 - \frac{1}{\psi_1(\dot{\varphi})} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Na podstawie (3.7) i (3.8) można wyznaczyć wartości wydłużenia równomiernego w momencie utraty stateczności

$$(3.9) \quad \text{A} \quad \varphi_r = \frac{m}{1 + \frac{1}{f(\varphi)} \left[ \psi(\dot{\varphi}) + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \right]}.$$

$$(3.10) \quad \text{B} \quad \varphi_r = \frac{m}{1 - \frac{1}{\psi_1(\dot{\varphi})} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}},$$

Z równania (3.9) wynika, że dla pewnej określonej postaci historii prędkości odkształcenia można osiągnąć wartość wydłużenia równomiernego równą wykładnikowi umocnienia,  $\varphi_r = m$ . Zachodzi to dla przypadku, gdy

$$(3.11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \psi(\dot{\varphi}) \quad \text{lub} \quad \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \psi(\dot{\varphi}) \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \psi}.$$

W przypadku stałej prędkości odkształcenia  $\varphi_r$  jest zawsze mniejsze od wartości wykładnika umocnienia  $m$ , tj.  $\dot{\varphi} = \text{const}$ ,  $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$ ,  $\varphi_r < m$ .

Natomiast postać równania (3.10) prowadzi do wniosku, że dla rosnących prędkości odkształcenia  $\varphi_r$  jest zawsze większe od wartości wykładnika umocnienia  $m$ , o ile  $\psi_1(\dot{\varphi})$  jest rosnącą funkcją  $\dot{\varphi}$ . Gdy prędkość odkształcenia maleje podczas procesu deformacji próbki, to  $\varphi_r$  będzie mniejsze od  $m$ . Ogólnie można wyróżnić trzy przypadki:

$$\begin{aligned} \text{dla} \quad & \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} > 0, \quad \varphi_r > m, \\ \text{dla} \quad & \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{const}, \quad \varphi_r = m, \\ \text{dla} \quad & \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} < 0, \quad \varphi_r < m. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę równanie konstytutywne (2.4) otrzymuje się

$$\psi_1(\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^n; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{n}{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}^n; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} = \frac{n}{\dot{\varphi}} \psi_1(\dot{\varphi});$$

stąd

$$(3.12) \quad \varphi_r = \frac{m}{1 - \frac{n}{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}}.$$

Takie zachowanie się oraz równanie (3.12) przedyskutowano bardziej szczegółowo w pracy [3].

#### 4. Gradient odkształcenia jako zmienna niezależna

Jeżeli bardziej dokładnie prześledzić proces deformacji próbki w postaci długiego pręta, to okazuje się, że proces deformacji przebiega niezupełnie jednorodnie. W danym momencie miejsca słabsze wzdłuż długości próbki odkształcają się bardziej intensywnie, zachodzi w nich szybsze umocnienie materiału, w następnym momencie bardziej intensywnie odkształcają się miejsca sąsiednie itd. Przy podejściu tego rodzaju akceptuje się pewną niejednorodność deformacji wzdłuż długości, która wynika z istoty opisanego mechanizmu odkształcania się próbki. Niewątpliwie najbardziej odpowiednią miarą stanu zaawansowania rozumianego w ten sposób procesu deformacji próbki jest gradient odkształcenia

po długości. Pierwotnie gradient jako miarę zdefiniowaną przy użyciu odkształcenia inżynierskiego

$$\lambda = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$$

wprowadzono w pracy [1].

Okazuje się jednak, że gradient  $\lambda$  lepiej przedstawić używając miary odkształcenia naturalnego  $\varphi$ , gdzie  $\varphi = \ln(1+\varepsilon)$ , stąd

$$(4.1) \quad \lambda = \frac{d\varphi}{dx}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{1+\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx}.$$

Wprowadzenie gradientu zdefiniowanego w naturalnej mierze odkształcenia, jak to uczyniono w niniejszej pracy, znacznie upraszcza dalsze rozważania i odpowiednio skraca zapisy warunków stateczności.

Po zróżniczkowaniu równania (1.3) względem  $x$  otrzymuje się

$$(4.2) \quad \frac{dP}{dx} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dx} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{dx} \right) F + \sigma \frac{dF}{dx}.$$

Na podstawie równania (1.6)

$$(4.3) \quad \frac{dF}{dx} = e^{-\varphi} \left( \frac{dF_0}{dx} - F_0 \frac{d\varphi}{dx} \right).$$

Ponieważ musi być spełniony warunek równowagi  $\frac{dP}{dx} = 0$ , równanie (4.2) po uprzednim uwzględnieniu (4.3) oraz (4.1), a także  $\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$ ;  $\frac{dT}{dx} = \lambda \frac{dT}{d\varphi}$ , przyjmuje następującą postać

$$(4.4) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dx} + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) \lambda + \frac{\sigma}{F_0} \frac{dF_0}{dx} = 0.$$

Równocześnie  $\frac{d\dot{\varphi}}{dx} = \frac{d\lambda}{dt}$ , stąd ostatecznie otrzymuje się

$$(4.5) \quad \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) \lambda + \frac{\sigma}{F_0} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \frac{dF_0}{dx} = 0.$$

Jest to więc równanie różniczkowe względem  $\lambda$ , którego rozwiązanie ogólne stanowi następująca zależność

$$(4.6) \quad \lambda = \exp \int \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) dt \times \\ \times \left\{ - \int \frac{\sigma}{F_0} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \frac{dF_0}{dx} \left[ \exp - \int \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) dt \right] dt + C \right\}.$$

Równanie (4.6) określa zmiany gradientu  $\lambda(t)$  podczas procesu deformacji nieidealnej próbki dla dowolnego procesu o zmiennej prędkości odkształcenia i zmiennej temperaturze.

O ile założyć próbkę idealną,  $\frac{dF_0}{dx} = 0$ , to rozwiązanie (4.6) redukuje się do postaci

$$(4.7) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \int \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dT}{d\varphi} - \sigma \right) dt,$$

wyznaczającej bieżącą wartość gradientu z dokładnością do stałej. W przypadku stałej prędkości odkształcenia,  $\dot{\varphi}$  odgrywa rolę parametru i wówczas  $\varphi = \dot{\varphi}t$ ;  $t = \frac{\varphi}{\dot{\varphi}}$ ;  $dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$ .

Jako definicję utraty stateczności przyjmuje się w tym przypadku obszar na płaszczyźnie  $(\lambda, \varphi)$  lub  $(\sigma, \varphi)$ , w którym gradient dąży do nieskończoności, tj.  $\frac{d\lambda}{dt} \rightarrow \infty$ . Odpowiednikiem nieskończonego wzrostu gradientu  $\lambda$  jest utworzenie się zlokalizowanej szyjki. Należy również pamiętać, że dopuszcza się zarówno wartości  $+\lambda$  jak i  $-\lambda$ , stąd rozwiązanie równania (4.5) może mieć kilka gałęzi. Zwiększenie się gradientu  $\lambda$  w pewnym obszarze nie stanowi jeszcze o utracie stateczności. Tak więc istnieją zawsze dwa obszary, w pierwszym gradient  $\lambda$  rośnie, lecz nie dąży do nieskończoności, jest to obszar deformacji statecznej. W drugim natomiast  $\lambda$  dąży do nieskończoności, jest to obszar utraty stateczności.

### 5. Przykłady w przypadku gradientu $\lambda$ jako zmiennej niezależnej

Zakłada się równanie konstytutywne w postaci analogicznej do (2.4), jednak dla uproszczenia ze stałą czułością na prędkość odkształcenia  $n$  i z odkształceniem wstępnym  $\varphi_0$  jako parametrem

$$(5.1) \quad \sigma = B(\varphi_0 + \varphi)^m \dot{\varphi}^n.$$

Zakładając proces izotermiczny otrzymuje się

$$(5.2) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{m}{\varphi_0 + \varphi} \sigma; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{n}{\dot{\varphi}} \sigma.$$

Po podstawieniu (5.2) do (4.7) i założeniu stałej prędkości odkształcenia,  $\varphi = \dot{\varphi}t$  mamy

$$(5.3) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \left[ \frac{\dot{\varphi}}{n} \int \left( \frac{m}{\varphi_0 + \dot{\varphi}t} - 1 \right) dt \right],$$

a po scałkowaniu otrzymuje się szukane rozwiązanie dla obszaru rosnącego  $\lambda$

$$(5.4) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left( \frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right)^{m/n} \cdot e^{-\varphi/n}, \quad \varphi \leq \varphi_r$$

lub

$$(5.5) \quad \log \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{n} \left( m \log \frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} - \varphi M \right), \quad M = \log e.$$

Otrzymane rozwiązanie (5.5) dla próbki aluminiowej i dla  $\varphi_0 = 0$  przy kilku wartościach prędkości odkształcenia oraz przy kilku wartościach czułości na prędkość odkształcenia  $n$  przedstawiono na rys. 1. Na rysunku widać stabilizujący wpływ wzrostu prędkości odkształcenia oraz udowodnioną uprzednio dla tego równania konstytutywnego niewrażliwość punktu utraty stateczności, tj. punktu, gdzie  $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$ , na prędkość odkształcenia.

Rozgraniczający obszary stateczności i niestateczności punkt, gdzie  $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$ , przypada zawsze dla rozważanego równania konstytutywnego, przy założeniu  $\varphi_0 = 0$ , dla wartości odkształcenia  $\varphi_r = m$ .

W celu dyskusji wpływu poszczególnych czynników, takich jak  $\dot{\varphi}$ ,  $\varphi_0$ ,  $m$ ,  $n$  na wartości gradientu  $\lambda$  należy obliczyć następujące różniczki

$$(5.6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{\varphi}} = - \frac{m}{n} \left( \frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right) \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

$$(5.7) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_0} = \frac{m}{n} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\varphi_0 + \varphi} \right) \frac{\lambda}{\lambda_0},$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial m} = \frac{1}{n} \log \left( \frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right),$$

$$(5.9) \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial n} = - \frac{1}{n^2} \left[ m \log \left( \frac{\varphi_0 + \varphi}{\dot{\varphi}} \right) - \varphi M \right].$$

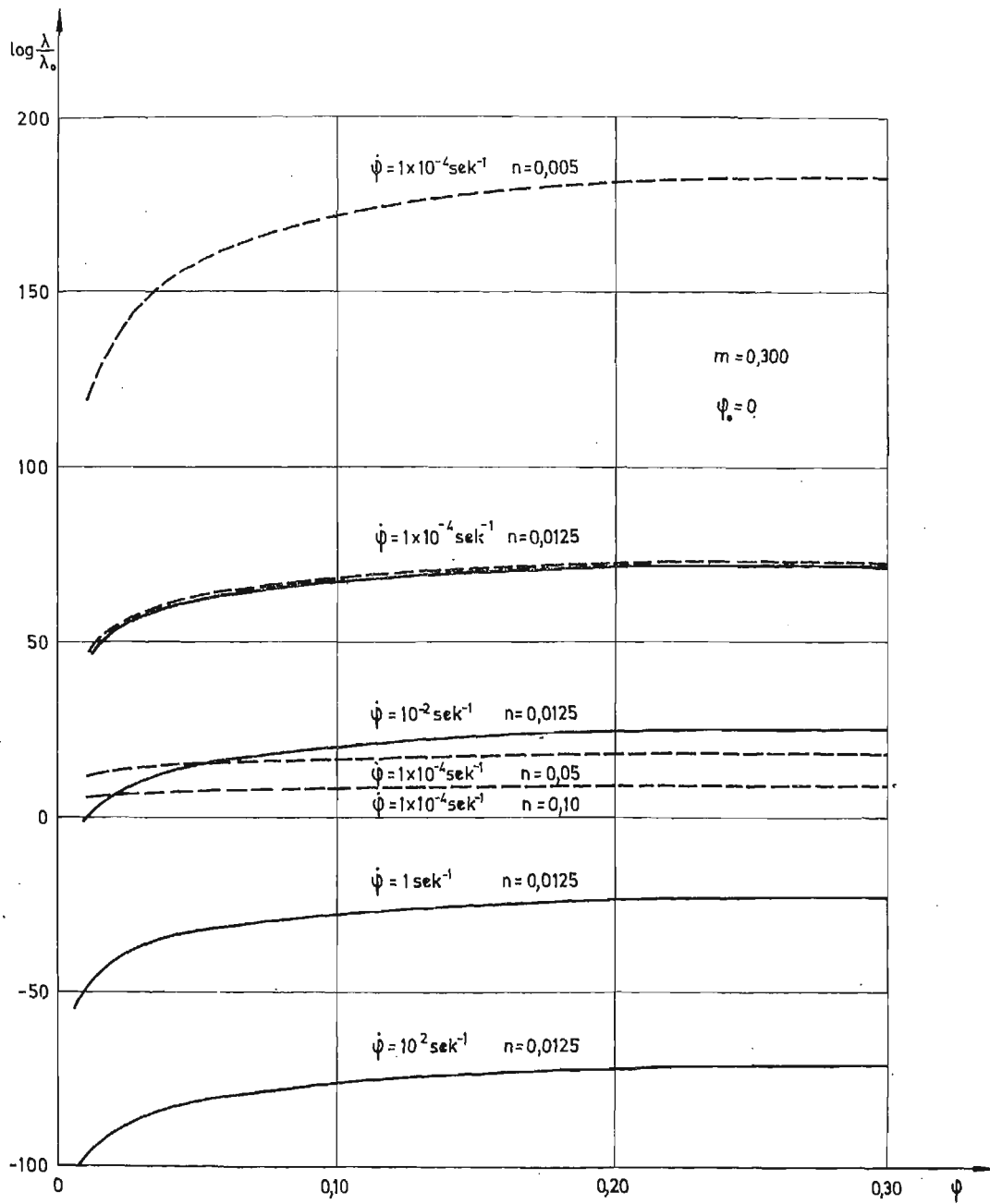
Zarówno przedstawione wykresy na rys. 1, jak również równania od (5.6) do (5.9) wskazują, że zwiększenie prędkości odkształcenia oraz wzrost czułości na prędkość odkształcenia wpływają ustateczniająco na proces deformacji próbki, tj. następuje zmniejszenie gradientów. Natomiast zwiększenie odkształcenia wstępnego  $\varphi_0$  oraz wykładnika umocnienia  $m$  prowadzi do wzrostu gradientu  $\lambda$ . Podobne wnioski otrzymano także w pracy [5].

Przykładem szczególnym równania konstytutywnego (5.1) jest związek, gdy nie zachodzi umocnienie, tj. dla  $m = 0$

$$(5.10) \quad \sigma = \sigma_0 \dot{\varphi}^n.$$

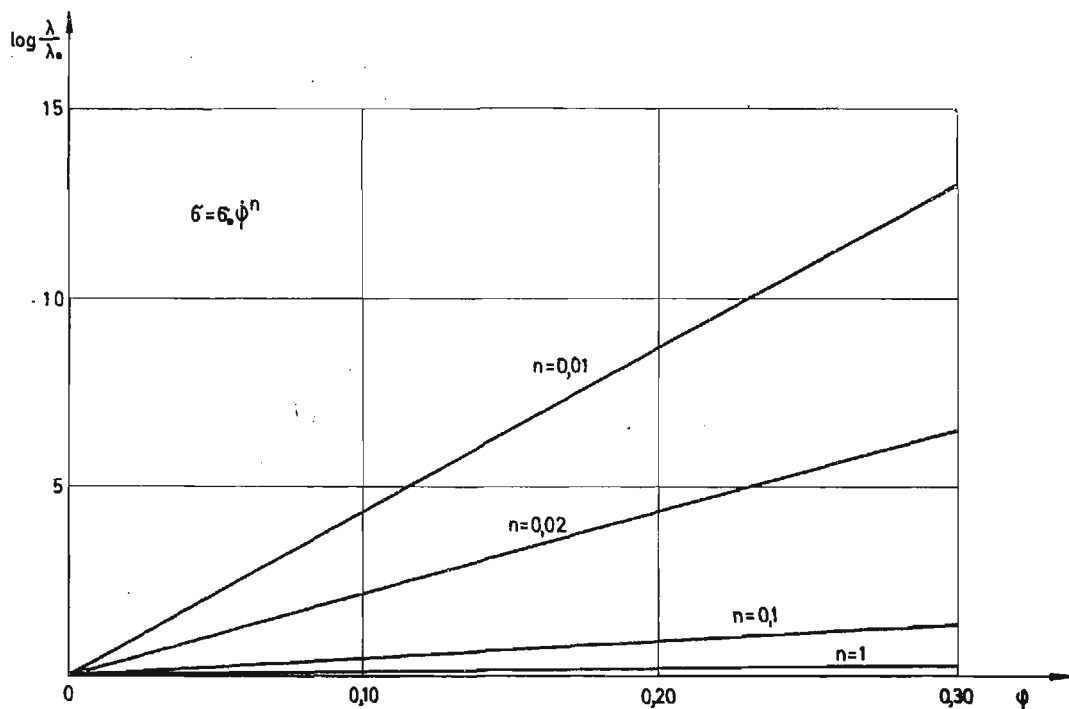
Równanie (5.10) może stanowić w pewnych przypadkach dobry opis zjawiska superplastyczności metali, wówczas czułość na prędkość odkształcenia może osiągać stosunkowo duże wartości, w przybliżeniu  $n = 0,1$ . Dla  $n = 1$  otrzymuje się równanie dla cieczy Newtona. Dla przypadku równania (5.10) rozwiązanie (5.4) upraszcza się do postaci (5.11) po przyjęciu odpowiedniej gałęzi rozwiązania

$$(5.11) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \frac{\varphi}{n}, \quad \varphi_r = 0, \quad \varphi \geq \varphi_r.$$



Rys.1

Otrzymany wynik przedstawiono na rys. 2 dla różnych wartości czułości na prędkość  $n$ . W obecnym przypadku obszar, w którym  $\lambda$  zwiększa się nie zmierzając do nieskończoności, redukuje się do zera i utrata stateczności następuje natychmiast, a więc dla całego obszaru zachodzi  $\lambda(\varphi) \rightarrow \infty$ . Jednak obserwuje się wydatne zmniejszenie gradientów odkształcenia dla materiałów typu cieczy o bardzo dużej lepkości, co zachodzi dla metali superplastycznych.



Rys. 2

Jako drugi przykład założono równanie konstytutywne o strukturze równania (3.1) w postaci

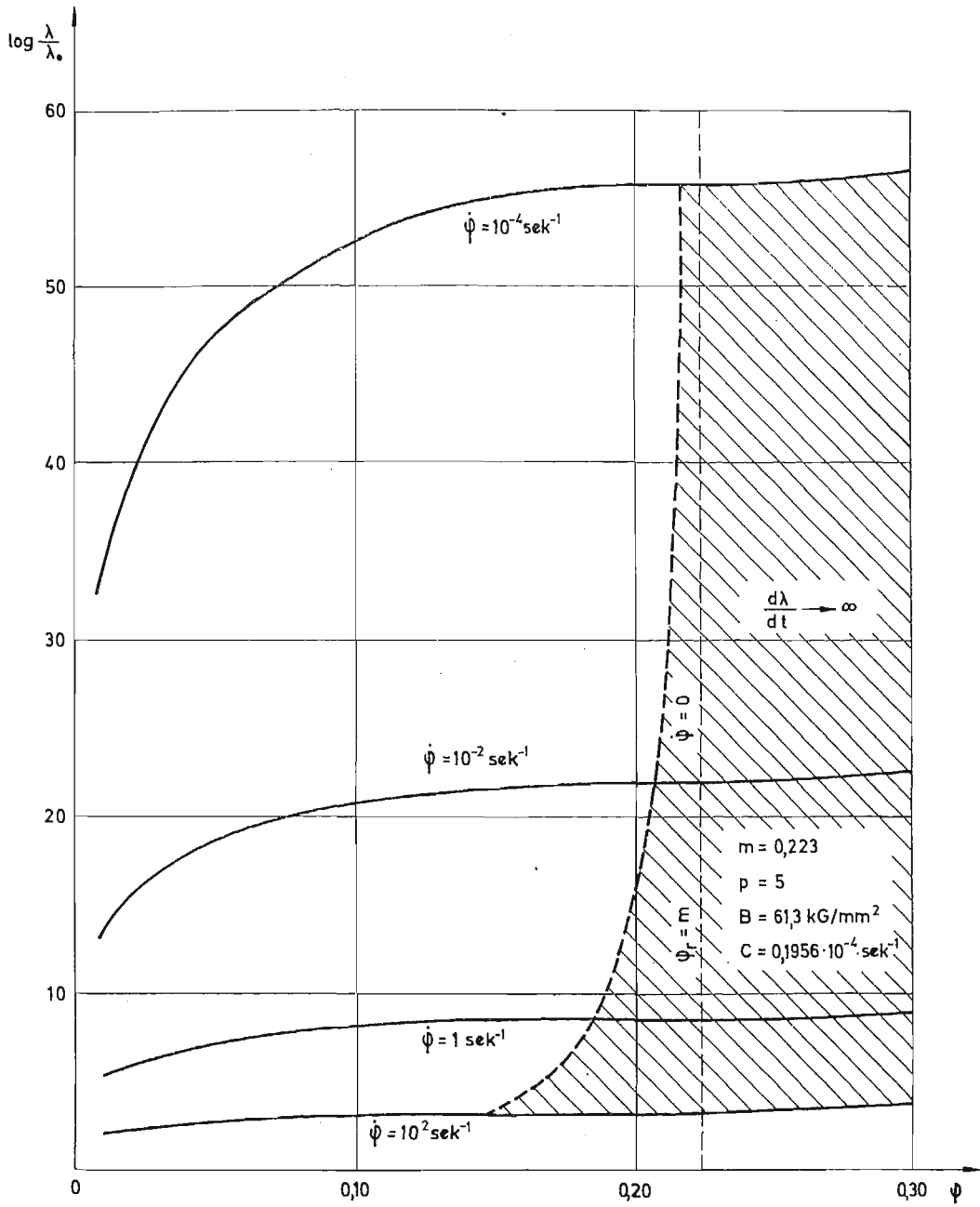
$$(5.12) \quad \sigma = B\varphi^m + \left(\frac{\dot{\varphi}}{C}\right)^{1/p} \quad \text{lub} \quad \dot{\varphi} = C[\sigma - B\varphi^m]^p.$$

Równanie (5.12) nadaje się do opisu krzywych umocnienia żelaza i miękkich stali z pomięciem przystanku plastycznego [1]. Na podstawie (5.12).

$$(5.13) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{m}{\varphi} B\varphi^m = \frac{m}{\varphi} \left[ \sigma - \left(\frac{\dot{\varphi}}{C}\right)^{1/p} \right],$$

$$(5.14) \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \sigma} = p\dot{\varphi} \left(\frac{C}{\dot{\varphi}}\right)^{1/p}.$$





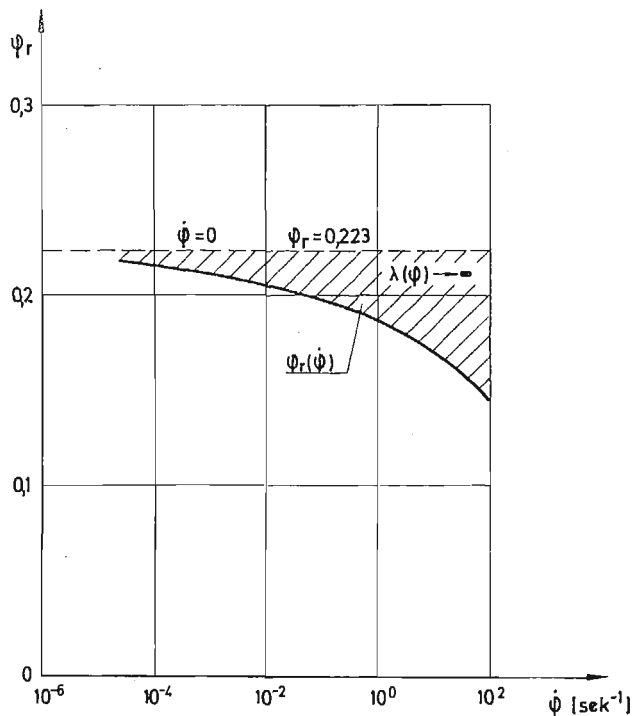
Rys. 3

Po podstawieniu związków (5.13) i (5.14) do równania (4.7) otrzymuje się

$$(5.15) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \left\{ p \dot{\varphi} \left( \frac{C}{\dot{\varphi}} \right)^{1/p} \int \left[ \frac{m}{\varphi} B \varphi^m - B \varphi^m - \left( \frac{\dot{\varphi}}{C} \right)^{1/p} \right] dt \right\},$$

a po scałkowaniu dla przypadku stałej prędkości odkształcenia,  $\varphi = \dot{\varphi} t$ ,

$$(5.16) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \exp \left\{ p B \varphi \left( \frac{C}{\dot{\varphi}} \right)^{1/p} \left[ \varphi^m \left( \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{m+1} \right) - \frac{1}{B} \left( \frac{\dot{\varphi}}{C} \right)^{1/p} \right] \right\}, \quad \varphi \leq \varphi_r.$$



Rys. 4

Wartości wydłużenia równomiernego  $\varphi_r$  można wyznaczyć z warunku  $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$ , stąd

$$(5.17) \quad \varphi_r^m \left( \frac{m}{\varphi_r} - 1 \right) - \frac{1}{B} \left( \frac{\dot{\varphi}}{C} \right)^{1/p} = 0.$$

Gdzie wartość odkształcenia  $\varphi_r(\dot{\varphi})$  należy interpretować jako wartość rozdzielającą obszary stateczności i niestateczności, dla  $\varphi > \varphi_r$ ,  $\lambda(\varphi) \rightarrow \infty$ . Równania (5.16) i (5.17) zostały przeanalizowane numerycznie dla przypadku miękkiej stali,  $p = 5$ ;  $m = 0,223$ ;  $C = 0,1956 \cdot 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$ ;  $B = 61,3 \text{ kG/mm}^2$ . Wartości stałych  $p$ ,  $m$ ,  $C$ ,  $B$  przyjęto za pracę [1]. Wyniki obliczeń dla czterech wartości prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi}_1 = 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$ ;  $\dot{\varphi}_2 = 10^{-2} \text{ sek}^{-1}$ ;  $\dot{\varphi}_3 = 10^0 \text{ sek}^{-1}$ ;  $\dot{\varphi}_4 = 10^2 \text{ sek}^{-1}$  przedstawiono na rys. 3 i 4. W obecnie rozważanym

przypadku widać również stabilizujący wpływ wzrostu prędkości odkształcenia, jednak w miarę zwiększania wartości prędkości odkształcenia  $\dot{\varphi}$  punkt utraty stateczności przemieszcza się w stronę mniejszych odkształceń. Największą wartość  $\varphi_r = 0,223$ , uzyskuje się dla  $\dot{\varphi} = 0$ . Zmiany  $\varphi_r$  w funkcji  $\dot{\varphi}$  przedstawiono na rys. 4. Zmniejszanie się  $\varphi_r$  wraz ze wzrostem  $\dot{\varphi}$  wydaje się być charakterystyczne dla zachowania się żelaza i miękkich stali w przeciwieństwie do, na przykład, miedzi lub aluminium.

## 6. Dyskusja i wnioski

Porównanie dwóch przedstawionych wyżej warunków utraty stateczności w próbie rozciągania, które opierają się w pierwszym przypadku na definicji gradientu odkształcenia  $\lambda$  jako parametru, w drugim natomiast jako zmiennej niezależnej, prowadzi do wniosku, że dla  $\lambda = \infty$  te dwie koncepcje są zbieżne. Równoważność obydwu warunków, wzory (2.2) i (4.5), należy rozumieć w ten sposób, że dla jednakowego typu równania konstytutywnego i idealnej próbki  $\left(\frac{dF_0}{dx} = 0\right)$ , otrzymuje się jednakowe wartości  $\varphi_r$  z warunku (2.2) oraz z warunku  $\frac{d\lambda}{d\varphi} = 0$  dla zależności (4.7).

Pośród ważniejszych wniosków należy wymienić:

(i) Opis procesu utraty stateczności przy użyciu definicji gradientu odkształcenia w mierze naturalnej  $\lambda = \frac{d\varphi}{dx}$  bardziej dokładnie opisuje cały proces deformacji próbki w przeciwieństwie do warunku otrzymanego w oparciu o kryterium maksimum siły  $\frac{dP}{dx} = 0$ , gdzie opis dotyczy jedynie samego punktu utraty stateczności.

(ii) Zwiększenie prędkości odkształcenia wpływa ustateczniająco na proces rozciągania próbki powodując ogólne zmniejszenie się gradientów deformacji po długości próbki.

(iii) Ponieważ dla próbki rzeczywistej punkt utraty stateczności zależy zarówno od początkowej niejednorodności próbki, jak i od prędkości odkształcenia, przy czym jeżeli tendencje te są przeciwstawne, to wydłużenie równomierne  $\varphi_r$  może być zarówno mniejsze, jak i większe od wartości «teoretycznej» dla warunków statycznych. W przypadku materiałów takich jak stal wzrost prędkości odkształcenia może powodować zmniejszanie się wydłużeń równomiernych wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia.

(iiii) W przypadku założenia jako kryterium utraty stateczności odpowiednio mniejszego gradientu odkształcenia  $\lambda$  niż  $\lambda = \infty$ , tj.  $\lambda < \infty$ , punkt utraty stateczności przesuwa się do obszaru odkształceń mniejszych, wówczas

$$(\varphi_r)_{\lambda < \infty} < (\varphi_r)_{\lambda = \infty}.$$

W tej sytuacji wydłużenie równomierne  $\varphi_r$ , rozumiane jako wielkość charakteryzująca własności plastyczne metalu, wymaga bardziej precyzyjnej definicji niż dotychczas.

## Literatura cytowana w tckście

1. J. D. CAMPBELL, *Plastic instability in rate — dependent materials*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 15 (1967), 359.
2. E. W. HART, *Theory of the tensile test*, Acta Met., 2, 15 (1967), 351.
3. J. KLEPACZKO, *Generalized conditions for stability in tension tests*, Int. J. Mech. Sciences, 5, 10 (1968), 225.
4. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inż., 3, 13 (1965), 561.
5. Z. MARCINIAK, *Związek między czułością materiału na prędkość odkształcenia a przebiegiem rozciągania niejednorodnych próbek*, Arch. Hutn., 3, 8 (1968), 305.
6. J. WANTUCHOWSKI, *Wpływ prędkości odkształcenia na wielkość naprężeń przy próbie rozciągania*, Arch. Hutn., 1, 2 (1957), 47.

## Р е з ю м е

## ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА РАСТЯЖЕНИЕ

В работе обсуждаются и сравниваются два условия устойчивости для испытуемых на растяжение металлических образцов. Первое из обобщенных условий для идеального образца, зависящее от способности материала образца к упрочнению, чувствительности к скорости деформации и температуры, приводилось прежде в работе [3]. Это условие, опирающееся на критерий максимальной силы, в настоящей работе обобщается на случай образца с неоднородным по длине исходным сечением, причем в качестве параметра вводится градиент натуральной деформации  $\varphi$

по длине образца:  $\lambda = \frac{d\varphi}{dx}$ .

Второе из обобщенных условий определено на основе градиента деформации  $\lambda$ , рассматриваемого в качестве независимой переменной, что приводит к дифференциальному уравнению описывающему весь процесс деформации. Решение этого уравнения дает изменение градиента во времени  $\lambda(t)$ . Область, в которой градиент деформации  $\lambda$  стремится к бесконечности, является областью неустойчивости.

Для обоих случаев дается несколько примеров, иллюстрирующих поведение металлов так с гранцентрированной, как и объемноцентрированной кубической решеткой.

## S u m m a r y

DISCUSSION OF THE GENERALIZED CONDITIONS FOR STABILITY  
IN THE TENSION TEST

The aim of the present work is a comparison between two existing conditions for stability in the tension test of a metal specimen.

The first stability condition for an ideal specimen, which takes into consideration the strain hardening phenomenon the strain rate sensitivity and temperature dependence of a metal investigated, has been discussed previously in the paper [3]. This condition, which is based on the maximum of the tensile force criterion, has been generalized in the present paper for the case when the specimen cross-section is initially nonconstant. The new parameter is introduced, namely, the strain gradient  $\lambda$ , when the natural measure

of strain  $\varphi$  is used,  $\lambda = \frac{d\varphi}{dx}$ .

The second condition has been defined on the basis of the strain gradient  $\lambda$  as an independent variable. In this way, the differential equation was obtained which describes the all process of deformation. The solution appears as the changes of strain gradient in a function of time,  $\lambda = \lambda(t)$ . Over the range of  $(\lambda, t)$  plane when strain gradient tends to infinity the specimen behaviour is unstable.

For both cases some examples illustrating behaviour of specimens made of *fcc* as well *bcc* metals are given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 sierpnia 1969 r.*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## DRUGA LETNIA SZKOŁA NA TEMAT «MODEL SZTYWNO-PLASTYCZNEGO CIAŁA W TEORII PŁYT I POWŁOK» Kääriku (Est. SRR), 2—8 czerwiec 1969 r.

Na wzór pierwszej Letniej Szkoły (Kääriku, 22—31 lipiec 1966) zorganizowano ponownie konferencję poświęconą tym razem zastosowaniom teorii plastyczności w teorii płyt i powłok. Celem tego typu konferencji jest danie możliwości wystąpienia młodym pracownikom nauki z własnymi pracami, jak też wystuchanie referatów przeglądowych wygłaszanych przez wybitnych specjalistów.

Konferencja została zorganizowana pod patronatem Akademii Nauk ZSRR oraz Ministerstwa Średniego i Wyższego Szkolnictwa ZSRR przez Tartuski Gos. Uniwersytet. Przewodniczącym «Szkoły» był prof. Ū. LEPIK (TGU). W konferencji wzięło udział 99 uczestników reprezentujących 23 ośrodki naukowe Związku Radzieckiego i 2 ośrodki Polski (prof. A. SAWCZUK i doc. J. RYCHLEWSKI z Warszawy, dr Z. WASZCZYSZYN z Krakowa). Ogółem wygłoszono 27 referatów, z czego 5 było przeglądowych.

Referaty przeglądowe, nie ograniczone limitem czasu, obejmowały różnorodną tematykę. Referaty wygłoszili: Ju. W. NIEMIROWSKIJ, *Statyka i dynamika sztywno-plastycznych konstrukcyjnie anizotropowych i niejednorodnych powłok i płyt*, A. S. GRIGORIEW, *O teorii powłok przy dużych odkształceniach*, G. I. BYKOWCEW i T. D. SEMYKINA, *Odkształcenia konstrukcji z lepkoplastycznego materiału*, P. MÜRSEPP, *90-lecie urodzin L. S. Lejbizona* oraz Ju. N. RABOTNOW opowiedział o swoich osobistych wrażeniach z konferencji na temat zniszczenia kruchej w Brighton.

Wystąpienia pozostałych uczestników zamykały się w ramach 20 minut i dają się z grubsza podzielić na następujące grupy: a) dynamika sztywno-plastycznych płyt i powłok — 7 referatów, b) zadania statyczne projektowania i obliczania — 11 referatów, c) optymalne projektowanie — 2 referaty, d) inne zagadnienia (lepkosprężystość, zagadnienia podstawowe teorii plastyczności, metody matematyczne) — 3 referaty.

Należy podkreślić, że zarówno w referatach przeglądowych, jak też przykładach zastosowań wielokrotnie cytowano i opierano się na pracach polskich.

Zaproszeni goście z Polski wygłoszili następujące referaty: A. SAWCZUK, *Pełne rozwiązania w teorii płyt*, J. RYCHLEWSKI, *O dodatniej określoności mocy dysypacji*, Z. WASZCZYSZYN, *Skończone ugięcia plastycznych ortotropowych powłok obrotowo-symetrycznych*.

Konferencja odbyła się w Kääriku — sportowej bazie TGU, położonej w odległości około 60 km na południe od Tartu. Miejsowość licząca zaledwie kilka domów, piękne otoczenie z pobliskim jeziorem i lasami, wreszcie same budynki bazy wraz z urządzeniami sportowymi stwarzały idealne warunki nie tylko dla obrad i nawiązania bliskich kontaktów, ale też dla odpoczynku. Stworzenie serdecznej atmosfery i nadzwyczajna gościnność w stosunku do wszystkich gości była dziełem całego Komitetu Organizacyjnego, a przede wszystkim prof. Ū. LEPIKA oraz prof. U. NIGULA.

*Zenon Waszczyszyn (Kraków)*

**SYMPOZJUM IUTAM**  
**«NIESTATECZNOŚĆ UKŁADÓW CIĄGLYCH»**  
**Herrenalb (koło Karlsruhe), 8—12. IX. 1969 r.**

Obok wielkich kongresów międzynarodowych, obejmujących swą tematyką całokształt zagadnień mechaniki teoretycznej i stosowanej, a organizowanych co cztery lata, Międzynarodowa Unia Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM) organizuje corocznie kilka sympozjów. Są one poświęcone tematyce stosunkowo wąskiej, dość ściśle sprecyzowanej i skupiają zazwyczaj około stu specjalistów z różnych krajów. Listę osób zainteresowanych ustala przy tym komitet organizacyjny sympozjum, następnie zwraca się do nich z imiennymi zaproszeniami. W tej sytuacji większość uczestników referuje swe prace, a jedynie nieliczni przyjeżdżają w celu przysłuchania się obradom i wzięcia udziału w dyskusji.

Jedno z sympozjów, zorganizowanych przez IUTAM w 1969 r., poświęcone było problemom niestateczności układów ciągłych, zarówno ciał stałych, jak i płynów, ze szczególnym zwróceniem uwagi na wykorzystanie metod Lapunowa do badania stateczności. Sympozjum odbyło się w Herrenalb, niewielkim uzdrowisku koło Karlsruhe, w okresie 8—12.IX.1969. Na przewodniczących Komitetu Naukowego Sympozjum zostali powołani L. J. F. BROER (Eindhoven, Holandia) i H. LEIPHOLZ (Karlsruhe, NRF); powołanie dwóch przewodniczących związane było z istnieniem dwóch zasadniczych kierunków obrad — stateczności płynów i ciał stałych. W skład Komitetu Naukowego weszli ponadto: W. W. BOŁOTIN (Moskwa, ZSRR), L. CONTRI (Padwa, Włochy), G. HERRMANN (Evanston, USA), M. D. KRUSKAL (Princeton, USA), R. MAZET (Chatillon-sous-Bagneux, Francja), J. T. STUART (Londyn, Anglia) oraz T. TATSUMI (Kyoto, Japonia). Przewodniczącym Lokalnego Komitetu Organizacyjnego był H. LEIPHOLZ; komitet ten obejmował ogółem 6 osób.

Spośród około 150 zaproszonych, udział w sympozjum zgłosiło 112 osób z 22 krajów, mianowicie: USA — 29, NRF — 15, W. Brytania — 14, ZSRR — 10, Holandia — 7, Włochy — 6, Kanada — 5, Norwegia i Rumunia po 4, Szwajcaria — 3, Czechosłowacja, Dania i Francja po 2, wreszcie Argentyna, Austria, Hiszpania, Izrael, Japonia, Polska, Szwecja, Turcja i Węgry po 1 osobie. Rzeczywista liczba uczestników była nieco mniejsza, gdyż zabrakło kilku przedstawicieli ZSRR (S. A. AMBARTSUMIAN, E. I. GRIGOLUK, A. A. MOWCZAN), USA (N. J. HOFF), Holandii (W. T. KORTER), Włoch (L. CONTRI), W. Brytanii (A. H. CHILVER) i Izraela (M. REINER).

Komitet Naukowy Sympozjum przyjął do wygłoszenia 65 prac z 19 krajów, przewidując przy tym następujące czasy wygłoszenia: 9 referatów generalnych po 50 minut, 28 referatów po 30 minut i 28 komunikatów po 15 minut. Pewną innowacją było przy tym pozostawienie po 5 minut rezerwy po każdym referacie na pytania bieżące: dzięki temu nie występowały spóźnienia pomimo przedłużania niektórych referatów. Dyskusja odbywała się po serii trzech referatów; przewidziano na nią tylko 10 minut, co jednak z reguły okazywało się wystarczające wobec istnienia wspomnianych już pięciominutowych rezerw czasowych. Tematykę przyjętych referatów można by sklasyfikować następująco: stateczność konstrukcji (sprężystych, plastycznych, ośrodków Cosseratów) — 24 prace; stateczność przepływów — 14; problemy matematyczne stateczności — 14; aerospężystość i problemy niekonserwatywne — 10; stateczność drgań — 3. Ostatecznie przedstawiono 58 referatów.

Obrady Sympozjum rozpoczęły się w poniedziałek, 8 września 1969, o godz. 9.00, przemówieniem wstępnym prof. H. LEIPHOLZA. Obrady odbywały się zarówno w godzinach przedpołudniowych, 9.00—12.45, jak i popołudniowych, 14.30—18.00; jedynie we środę, 10.IX., zamiast obrad popołudniowych przewidziano dwie wycieczki. Obrady przedpołudniowe odbywały się wspólnie, natomiast popołudniowe, od godz. 15.30, dzielono na dwie sekcje: jedna z nich była zazwyczaj poświęcona stateczności ciał stałych, druga — stateczności przepływów. We czwartek wieczorem burmistrz Herrenalb przyjął wszystkich uczestników Sympozjum w salach Domu Zdrojowego. W piątek wieczorem odbyło się posiedzenie Biura IUTAM, na którym podjęto decyzję w sprawie miejsca najbliższego Międzynarodowego Kongresu Mechaniki: odbędzie się on w 1972 r. w Moskwie — zaproszenie ze strony Akademii Nauk ZSRR przekazał prof. L. I. SIEDOW.

Obecnie omówimy krótko referaty generalne 50-minutowe i wymienimy tytuły referatów 30-minutowych. Pierwszy referat generalny miał wygłosić W. T. KORTER (Delft, Holandia) na temat «Zależności



między teorią stateczności w hydrodynamice i teorią stateczności statycznej». Wobec choroby prof. Koitera referat ten nie został wygłoszony; natomiast w to miejsce włączono referat H. LEIPHOLZA, «Bezpośrednie zastosowanie metody Lapunowa do badania stateczności układów ciągłych»; autor zwrócił szczególną uwagę na problemy niekonserwatywne i podał liczne przykłady. W. W. BOŁOTIN (Moskwa, ZSRR) w referacie «Stateczność układów lepkosprężystych w przypadku obciążeń niekonserwatywnych» podał ogólną teorię stateczności prętów, wykonanych z materiału o liniowych własnościach lepkosprężystych, ściskanych siłą podśledzącą i śledzącą. D. D. JOSEPH (Minneapolis, USA) wygłosił referat «Miejsc metod energetycznych w globalnej teorii stateczności hydrodynamicznej»; autor badał konieczne i wystarczające warunki stateczności przepływów Couette'a i Poiseuille'a, wprowadzając pojęcie *niestateczności subliniowej*. Również W. ECKHAUS (Delft, Holandia) w referacie «Stateczność rozwiązań periodycznych w mechanice płynów» zajął się przepływami Poiseuille'a, mianowicie ich statecznością z uwagi na zakłócenia periodyczne; stwierdzono, że może istnieć wiele, być może nawet nieskończenie wiele ograniczonych rozwiązań równania zasadniczego w zakresie nadkrytycznym. M. COTSAPIS (Fontenay-aux-Roses, Francja) przedstawił pracę «W sprawie ogólnych twierdzeń dotyczących stateczności», w której sformułował zagadnienie określenia stateczności bezpośrednio w oparciu o równanie różniczkowe ruchu, bez jego całkowania; szczególną uwagę zwrócono przy tym na przejście od ruchu laminarnego do burzliwego. G. HERRMANN (Evanston, USA) wygłosił referat «Determinizm i niepewność w teorii stateczności», w którym poddał szczegółowej analizie wpływ małego tłumienia na siłę krytyczną dla układów niekonserwatywnych; wymieniono również inne pokrewne efekty, jak tłumienie termosprężyste, sprzężenie elektromagnetyczne i śledzenie opóźnione. W konkluzji autor postulował poddanie rewizji definicji stateczności w sensie Lapunowa. Pokrewnej tematyce poświęcony był referat generalny H. ZIEGLERA (Zürich, Szwajcaria) «Efekty śladowe w teorii stateczności»; w którym zaproponowano pojęcie *modeli dopuszczalnych* dla danego zjawiska fizycznego. Referat B. D. COLEMANA (Pittsburgh, USA) «W sprawie stateczności układów nieliniowych wykazujących pamięć długozakresową» wprowadził nowe ujęcie statycznego i kinetycznego kryterium stateczności, oparte o drugą zasadę termodynamiki. Ostatni referat generalny W. W. RUMIANCEWA (Moskwa, ZSRR) «Pewne problemy stateczności ruchu ciał sztywnych i sprężystych wypełnionych cieczą» nie został wygłoszony wobec nieobecności autora.

Tytuły referatów półgodzicznych przedstawiają się następująco, w kolejności ich wygłaszania: J. ANTON, M. I. FREEDMAN, P. FALB (Providence, USA): «Kryteria obszarów stateczności dla układów modelowanych pewnymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi»; E. ADAMS (Karlsruhe, NRF): «Przyczynki do teorii hydrodynamicznej niestateczności w oparciu o lematy Nagumo i Westphala»; E. H. DOWELL (Princeton, USA): «Aerosprężysta stateczność płyt i powłok»; F. H. BUSSE (Monachium, NRF): «Obszary stateczności komórkowego przepływu płynu»; S. T. ARIARATNAM (Londyn, Anglia): «Stateczność konstrukcji przy zakłóceniach stochastycznych»; H. G. M. VELTHUIZEN, L. van WIJNGAARDEN (Enschede, Holandia): «Stateczność fal grawitacyjnych na powierzchni w przypadku przepływu o niejednorodnym rozkładzie prędkości»; N. D. POPESCU (Petrosani, Rumunia): «Stateczność dynamiczna belek prostych zginanych siłami periodycznie zmiennymi»; C. S. HSU, T. H. LEE (Berkeley, USA): «Badanie stateczności układów ciągłych przy wymuszeniu parametrycznym bezpośrednią metodą Lapunowa»; R. KODNÁR (Bratysława, CSRS): «Problemy zastosowania nieliniowych operatorów do badania stateczności cienkich płyt i powłok»; P. C. PARKS (Warwick, Anglia): «Pewne zastosowania funkcjonałów Lapunowa»; M. H. GRADOWCZYK (Buenos Aires, Argentyna): «Niestateczność powierzchni granicznej między cieczą i ziarnistym podłożem»; M. BERGER (Minneapolis, USA): «W sprawie stanów równowagi i drgań periodycznych cienkich nieliniowych układów sprężystych»; N. J. ZABUSKY, G. S. DEEM (Whippany, USA): «Dwuwymiarowe przepływy burzliwe»; G. AUGUSTI (Providence, USA — Neapol, Włochy): «W sprawie wyboczenia i niestateczności konstrukcji niesprężystych»; M. SLEMROD, E. F. INFANTE (Providence, USA): «Zasada niezmienniczości dla układów dynamicznych w przestrzeniach Hilberta»; R. J. KNOPS, L. E. PAYNE (Newcastle, Anglia): «Stateczność i ciągła zależność od warunków początkowych w teorii sprężystości»; M. KRUSKAL (Princeton, USA): «Istnienie, jednoznaczność i nieistnienie wielomianowych praw zachowania dla pewnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych»; S. NEMAT-NASSER (San Diego, USA): «Termosprężysta stateczność ciała przy odczłaceniu skończonych pod działaniem obciążeń niekonserwatywnych»; A. C. NEWELL, J. A. WHITEHEAD (Los Angeles, USA): «Konwekcja o skończonej amplitudzie przy skończonej szerokości pasma»; S. H. DAVIS (Baltimore, USA): «W sprawie możliwości występowania niestateczności przy skończonej amplitudzie»; R. F. BERGERON (Cambridge, Mass., USA): «Pewna klasa nie-

ustalonych fal nieliniowych w przypadku przepływów równoległych»; F. WILLE (Freiburg, NRF): «W sprawie stateczności skrzydła w zakresie poddźwiękowym»; M. ŻYCKOWSKI, A. GAJEWSKI (Kraków, Polska): «Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku niekonserwatywnych problemów stateczności»; T. TATSUMI, K. GOROH (Kyoto, Japonia): «Nieliniowa niestateczność przepływów swobodnych»; P. K. C. WANG (Los Angeles, USA): «Stabilizacja zwrotna równowagi hydromagnetycznej»; M. COMO (Neapol, Włochy): «Teoria sprężysto-plastycznego wybożenia konstrukcji».

Na zakończenie konferencji odbyła się godzinna «konferencja okrągłego stołu», w trakcie której padło szereg cennych uwag ogólnych, dotyczących pojęcia stateczności. Konferencję prowadził G. HERRMANN (USA).

Obszerne streszczenia prac, referowanych na Sympozjum, opublikowane zostaną w specjalnej księdze pokonferencyjnej w ramach wydawnictwa Springer-Verlag. Z uwagi na narzucony limit objętości (380 stron) Komitet Organizacyjny postawił bardzo ostre ograniczenia długości poszczególnych prac.

*Michał Życzkowski (Kraków)*

## PLANOWANE SYMPOZJA IUTAM

1970

1. Second IUTAM Symposium on Creep in Structures  
Miejsce: Gothenburg, Sweden  
Termin: sierpień, 17–21, 1970  
Przewodniczący: Prof. F.K.G. Odqvist  
Torstenssons väg 7D  
S-18264 Djursholm, Sweden
2. IUTAM Symposium on High-Speed Computing of Elastic Structures  
Miejsce: Liège, Belgium  
Termin: 29 sierpień do 4 września, 1970  
Przewodniczący: Prof. B. Fraeijs de Veubeke  
Laboratoire d'Aeronautique  
Université de Liège  
75, Rue du Val Benoit, Liège, Belgium

1971

1. Joint IUTAM/IUGG Symposium on Flow of Multiphase Fluids in Porous Media  
Miejsce: Calgary, Canada  
Termin: maj, 11–15, 1971  
Przewodniczący: Prof. W. D. Baines  
Dept. of Mechanical Engineering  
University of Toronto  
Toronto 181, Ontario, Canada
2. IUTAM Symposium on Unsteady Boundary Layers  
Miejsce: Quebec, Canada  
Termin: maj 1971  
Przewodniczący: Prof. E. A. Eichelbrenner  
Laval University  
Quebec, Canada
3. IUTAM Symposium on Nonsteady Flow of Water at High Speeds  
Miejsce: Leningrad, USSR  
Termin: czerwiec, 22–26, 1971  
Przewodniczący: Prof. L. I. Sedov  
MGU, Zone 1, kw. 84  
Moscow B-234, USSR
4. IUTAM Symposium on Dynamics of Ionized Gases  
Miejsce: Tokyo, Japan  
Termin: wrzesień 1971  
Przewodniczący: Prof. M. J. Lighthill  
Dept. of Applied Mathematics and Theoretical Physics  
The University of Cambridge  
Silver Street, Cambridge, UK

1972

1. Joint IUTAM/ITTC Symposium on the Directional Stability and Control  
of Bodies Moving in Water

Miejsce: London, UK

Termin: marzec lub kwiecień 1972

Przewodniczący: Prof. R. E. D. Bishop  
Dept. of Mechanical Engineering  
University College London  
Gower Street, London WC 1, UK

*Sekretarz Generalny IUTAM  
Fritiof I. Niordson  
Professor, Ph. D.  
Rigensgade 13  
1316 Copenhagen K, Denmark*

**POZYCJE OPUBLIKOWANE W TOMIE 5 I 6  
МЕХАНИКИ ТЕОРЕТИЧНЕЈ І СТОСОВАНЕЈ В ЛАТАХ 1967 І 1968**

TOM V, ZESZYT 1/1967

I. I. BLECHMAN, Zagadnienie dynamiki maszyn wibracyjnych Вопрос динамики вибрационных машин The problems of vibration machines dynamics	3
J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ, O oporze przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepko-sprężystym О сопротивлении при качении жесткого шара по вязко-упругому основанию On the rolling resistance of a rigid ball moving on the viscoelastic base	19
J. MURZEWSKI, Z. MENDERA, Korelacja cech wytrzymałościowych i wyężenie materiału Корреляция прочностных свойств и напряженность материала The correlation of strength characters and material yield conditions	35
J. JASIEWICZ, Wymiana masy z powierzchni kul i kropeł Массообмен с поверхности шаров и капель The mass transfer from spheres and drops surfaces	45
J. MARYŃIAK, Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym Упрощенный анализ продольной устойчивости планера во время полета Simplified longitudinal stability of a towed sailplane	57
E. DRESCHEROWA, Wpływ wstępного odkształcenia plastycznego na energię uderowego zrywania Влияние предварительных пластических деформаций на энергию разрушения при ударном разрыве The influence of the initial plastic deformation on the fracture energy in tension impact test	103
A. GAJEWSKI, Zastosowanie rachunku zaburzeń w problemach stateczności płyt prostokątnych o zmiennej grubości Применение метода возмущений в задачах устойчивости прямоугольных пластинок толщины The application of the perturbation method in stability problems of rectangular plates with variable thickness	113
BIULETYN INFORMACYJNY	125

TOM V, ZESZYT 2/1967

J. KESTIN, O zastosowaniu zasad termodynamiki do opisu materiałów odkształconych О применении принципов термодинамики к описанию деформированных материалов On the application of the principles of thermodynamics to description of deformed materials	147
Z. OLESIAK, O pewnych własnościach naprężeń cieplnych О некоторых свойствах термических напряжений On some properties of thermal stresses	181
Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, O wyboczeniu biegunowych siatek prętowych О потере устойчивости стержневых сеток On the buckling of polar bar networks	193
Z. KAZIMIERSKI, Metoda charakterystyk dla dwuwymiarowych nieustalonych przepływów gazów Метод характеристик для двумерных нестационарных течений газа A method of characteristics for two-dimensional unsteady gas flow	199
W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosseratów Механика сплошных сред типа Коссера Mechanics of continuous media — Cosserat type	215
BIULETYN INFORMACYJNY	259

## TOM V, ZESZYT 3/1967

Z. MARCINIAK, O różnych formach utraty stateczności blachy poddawanej rozciąganiu w stanie plastycznym O различных видах потери устойчивости листа подверженного растяжению в пластическом состоянии On various forms of instability in sheet material undergoing plastic tension	277
R. GANOWICZ, Rozwiązania osobliwe w ogólnej teorii płyt trójwarstwowych Особые решения в общей теории трехслойных пластин Singular solutions in the general theory of three-layer plates	293
W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalna weryfikacja niestacjonarnych procesów plastycznego płynięcia Экспериментальная проверка теоретических решений для больших пластических деформаций металлов Experimental verification of some theoretical solutions of large plastic deformations of metals	309
S. KALISKI, E. WŁODARCZYK, O zjawiskach rezonansowych w układach nieograniczonych О резонансных явлениях в неограниченных системах On resonance phenomena in unbounded systems	325
Cz. RYMARZ, Fale powierzchniowe w ośrodku z naprężeniami momentowymi Поверхностные волны в среде с моментными напряжениями Surface waves in a medium with couple-stresses	337
J. MARYNIAK, Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym Продольная динамическая устойчивость планера в буксирном комплексе Dynamic longitudinal stability of a towed sailplane	347
BIULETYN INFORMACYJNY	385
RECENZJE	397

## TOM V, ZESZYT 4/1967

B. DUSZCZYK, Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym Устойчивость сплошного цилиндра под действием гидростатического давления Stability of a full circular cylinder loaded with hydrostatic pressure	401
A. KOWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa w przypadku niekonserwatywnych zagadnień stateczności sprężystej Условие безопасности по напряжениям в неконсервативных задачах упругой устойчивости Stress criterion of safety for non-conservative problems of elastic stability	411
J. KLEPACZKO, Urządzenie do dynamicznego skręcania Устройство для динамических испытаний на кручение Impact torsion test apparatus	425
E. KAŚKI, Quasi-statyczne termnaprężenia w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny i oddającym ciepło przez konwekcję Термические нестационарные напряжения в брусе с прямоугольным сечением проводящим электрический ток и отдающим тепло через поверхность Quasi-static thermal stresses in a bar of rectangular cross-section conducting electric current and exchanging heat by convection	439
Z. ENGEL, Badania synchronizacji i samosynchronizacji wibratorów mechanicznych Исследование синхронизации и автосинхронизации механических вибраторов Investigations of synchronization and self-synchronization of mechanical vibrators	451
J. ORKISZ, Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego	463

Применение теории пластического течения для анализа конечных деформаций гибких осесимметрических оболочек вращения  
 Finite deformations of flexible axially symmetric membrane shells in the light of the theory of plastic flow

BIULETYN INFORMACYJNY

495

## TOM VI, ZESZYT 1/1968

- J. MIASTKOWSKI, Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności (część II)  
 Влияние истории нагружения на поверхность текучести. Часть II.  
 On the effect of the prestraining history on the yield surface. Part II. 3
- K. PUSTELNIK, Cz. WOŹNIAK, Obliczanie tarcz siatkowych przy wykorzystaniu przybliżonej teorii efektu brzegowego  
 Расчет сетчатых дисков основанный на использовании приближенной теории краевого эффекта  
 Edge effect in dense latticetype disc structures 33
- J. MURZEWSKI, J. SOJKA, O efekcie skali ciała kruche go wytrzymującego ustaloną koncentrację mikro-uszkodzeń  
 О масштабном эффекте для хрупкого тела, выдерживающего установленную концентрационным микро-повреждений  
 On the size effect in brittle bodies capable to sustain a certain concentration of microdamage 43
- B. KOWALCZYK, Analiza układu wibro-uderzeniowego z tarciem suchym  
 Анализ виброударной системы при наличии сухого трения  
 Analysis of a vibratory-impact system with solid friction 63
- Z. OSIŃSKI, Dekrement drgań tłumionych jednocześnie tarciem wewnętrznym (wiskotycznym) i konstrukcyjnym  
 Декремент демпфированных колебаний системы с внутренним (вязким) и конструкционным трением  
 Damping decrement of vibrations effected simultaneously by the viscotic and structural friction 71
- Z. K. LEŚNIAK, Optymalizacja kształtu łuku jako przekroju dźwigarów sklepieniowych  
 Оптимализация формы апрогно сечения перекрытий  
 Optimum design of the arch section of shell beams 79
- B. RADZISZEWSKI, A. RÓŻYCKI, Układ o dwóch stopniach swobody jako «dynamiczny izolator» drgań  
 Система с двумя степенями свободы как «динамический изолятор» колебаний  
 The system with two degrees of freedom as a «dynamic vibrator absorber» 93
- BIULETYN INFORMACYJNY 111

## TOM VI, ZESZYT 2/1968

- B. WIENIASZ, Rozkłady temperatury na powierzchni chłodzonej poddanej działaniu ruchomych źródeł ciepła w zastosowaniu do procesów obróbki skrawaniem  
 Распределение температуры на охлаждаемой поверхности, под действием подвижных источников тепла, в применении к процессам обработки резанием  
 Distribution of temperature on the cooled surface subjected to the action of moving heat sources in machining process 119
- W. GOGÓL, Efekt Jacqa  
 Эффект Жака  
 The Jacq's effect 133

M. TALL, Eksperymentalny sposób wyznaczania współczynnika restytucji pracującej maszyny wibruderzeniowej Экспериментальный способ определения коэффициента восстановления скорости для работающего вибротомота Experimental method of estimation of the coefficient of restitution for a vibratory-impact mechanisms	149
M. A. GLIŃSKA, L. ŁUKASZEWSKA, J. ODERFELD, E. PLEŚCZYŃSKA, Ocena największych naprężeń w wieńcu łopatek Оценка максимальных напряжений в лопаточном венце Estimation of maximum stresses in turbine blades	155
W. W. ŁUCJAŃEK, Laboratoryjne metody pomiaru pochodnych aerodynamicznych Лабораторные методы измерения аэродинамических производных Laboratory methods of the measurements of aerodynamic derivatives	165
B. JANCELEWICZ, Badania wpływu zgniotu wprowadzonego w obszarze koncentracji naprężeń na trwałość zmęczeniową duralowej konstrukcji z karbem Исследование влияния локальной пластической деформации, вызванной в районе концентрации напряжений, на усталостную долговечность конструкции из алюминиевого сплава с надрезом Investigations of influence of local plastic strain induced in stress concentration region on fatigue life of aluminium alloy notched structure	205
BIULETYN INFORMACYJNY	235

## TOM VI, ZESZYT 3/1968

J. MUTERMILCH, Dziesięciolecie Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Десятилетие Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики Tenth anniversary of the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics	243
W. NOWACKI, Kierunki rozwojowe i zadania badawcze w dziedzinie mechaniki ciała stałego Направления развития и задачи исследований в области механики твердого тела Development trends and research programme in the field of mechanics of solids	251
W. BOGUSZ, E. KARAŚKIEWICZ, S. WIŚNIEWSKI, Rozwój mechaniki układów dyskretnych w ostatnim dziesięcioleciu w Polsce Развитие польской механики дискретных систем в минувшем десятилетии Development of mechanics of discrete systems in Poland in 1958—1967	259
I. KISIEL, Rozwój reologii w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (1958—1968) Прогресс в области реологии в Польше в первом десятилетии деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики (1958—1968) Progress in rheological sciences in Poland during the ten years of existence of the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics (1958—1968)	269
S. OSIEDUSZKO, Termodynamika techniczna w Polsce w okresie ostatniego dziesięciolecia Техническая термодинамика в Польше в минувшем десятилетии Engineering thermodynamics in Poland during the past ten years	299
G. SZEFER, Rozwój teorii sprężystości w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu (1958—1967) istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Успехи теории упругости в Польше в первом десятилетии (1958—1967) деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики Progress in the elasticity theory in the first decade (1958—1967) of existence of the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics	313



- M. ŻYCZKOWSKI, Rozwój teorii plastyczności i wyężenia w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (1958—1967) 361  
 Успехи теории пластичности и прочности в Польше в первом десятилетии деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики (1958—1967)  
 Progress in the domain of plasticity theory and strength criteria in the past ten years of existence of the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics

## TOM VI, ZESZYT 4/1968

- W. NOWACKI, Rozwój teorii wytrzymałości materiałów w Polsce 407  
 Прогресс в области теории прочности материалов в Польше  
 Engineering mechanics in Poland
- M. ZEMBRZUSKI, O nieustalanej dyfuzji tlenu w procesie spalania ziarna węglowego 417  
 О неустановившейся диффузии кислорода в процессе сгорания угольного зерна  
 On transient diffusion of oxygen in coal grain combustion process
- M. ZEMBRZUSKI, Podstawy teorii spalania ziarna węglowego przy skończonej wartości współczynnika nadmiaru powietrza 427  
 Основы теории сжигания угольного зерна при конечном значении коэффициента избытка воздуха  
 Principles of combustion theory of coal grain with finite coefficient of air excess
- L. DIETRICH, K. TURSKI, Nośność graniczna rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem karbów kątowych 437  
 Предельная несущая способность растягиваемых цилиндрических стержней ослабленных рядом надрезов  
 Load-carrying capacity of tensile axially-symmetric bars weakened by series of V-notches
- W. BŁAŻEWICZ, Badania możliwości zmniejszenia prędkości propagacji pęknięcia zmęczeniowego w blachach duralowych przy użyciu zgniotu 449  
 Исследование возможности уменьшения скорости распространения усталостных трещин в дураломиниевых листах при помощи наклепа  
 Investigation on the possibility decreasing the fatigue crack growth rate in aluminium alloy thin sheet material by using plastic deformation
- J. LIPIŃSKI, J. ZIÓŁKOWSKI, Stan naprężeń i przemieszczeń w tarczy kołowej o stałej grubości wywołany impulsem cieplnym na wycinku tarczy  $\Delta a$  471  
 Напряженное состояние и перемещения в диске постоянной толщины, вызванные тепловым импульсом приложенным к сектору диска  $\Delta a$   
 State of stress and strain in a circular disc of constant thickness due to thermal nucleus in a sector of the disc  $\Delta a$
- A. MŁOTKOWSKI, Wytrzymałość płyty kołowej jednostronnie uźebrowanej poddanej antysymetrycznemu zginaniu 481  
 Прочность круговой пластинки усиленной односторонними радиальными ребрами, подверженной антисимметричному изгибу  
 Strength of circular plate with one-sided ribs subjected to antisymmetric bending
- BIULETYN INFORMACYJNY 502

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, Aproksymacja powierzchni nośności granicznej przekroju rurociągu  
Аппроксимация предельной поверхности для поперечного сечения толстостенного трубопровода при сложных нагрузках  
On approximation of the yield surface of a thick-walled pipe-line under complex loads
- A. MŁOTKOWSKI, Przybliżone obliczanie płyty kołowej, uźebrowanej jednostronnie obciążonej antysymetrycznie  
Приближенное решение подвергнутой антисимметричному изгибу круговой пластинки подкрепленной односторонними радиальными ребрами  
Approximate solution of a circular plate with one-sided ribs subjected to antisymmetric bending
- J. MARYNIAK, M. GOSTAN, Stateczność podłużna szybowca z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydła  
Влияние изгибной деформируемости крыльев на продольную устойчивость планера  
Effect of flexural deformability of wings on the longitudinal stability of a glider
- J. KÖNIG, Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowywania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie  
Основные теоремы теории приспособляемости упруго-пластических конструкций к изменяющимся во времени нагрузкам  
Basic theorems on shakedown of elastic-plastic structures under time-dependent loadings
- A. GAJEWSKI, Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieżąca  
Некоторые вопросы выбора оптимальной формы стержня сжимаемого полярно направленной силой  
Certain problems of optimum design of a rod compressed by a polar force
- R. KRZYWIĘC, Analogia mechaniczno-steromechaniczna w klasie dwuwskaznikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju  
Механико-стереомеханическая аналогия для класса уравнений Лагранжа второго порядка с двумя индексами  
Mechanical-elastic analogy in the class of two-index Lagrange equations of second kind

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA; I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętros 17, pokój 1724)

---

Mech. Teor., T. 8, z. 1, s. 1—104, Warszawa 1970, Indeks 36712