

11-170
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 7 • ZESZYT 4



531
Pw^a

WARSZAWA 1969

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

<p>S. ZAHORSKI, Ciecze nienewtonowskie w świetle mechaniki kontinuum Неньтоновские жидкости в свете механики сплошных сред Non-Newtonian liquids in the light of continuum mechanics</p>	385
<p>A. LISOWSKI, Sposób elektrycznego modelowania równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i członach rzędu parzystego Метод электрического моделирования обыкновенных дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами и членами четного порядка Electric network models of ordinary and partial differential equations with constant coefficients and even order terms</p>	415
<p>A. LISOWSKI, Przykłady modelowania elektrycznego warunków brzegowych i początkowych równań różniczkowych występujących w zagadnieniach mechaniki Примеры электрического моделирования краевых и начальных условий дифференциальных уравнений для вопросов механики Examples of electrical network models simulating the initial and boundary value problems of applied mechanics</p>	429
<p>E. MACIĄG, Doświadczalna analiza drgań własnych rusztów cylindrycznych Экспериментальный анализ собственных колебаний цилиндрических решеток Experimental analysis of free vibrations of cylindrical grids</p>	445
<p>T. GIBZYŃSKA, M. ŻYCKOWSKI, Równania statyki dwurzędowego kulkowego łożyska wieńcowego Уравнения статики для двухрядного шарикового подшипника Equations of statics of double-row radial-thrust ball bearing</p>	465
<p>A. JAKOWŁUK, Wpływ poziomu naprężenia i współczynnika amplitudy naprężenia na proces wibro- pelzania Влияние уровня напряжения и коэффициента амплитуды напряжения на процесс ползучести The effect of stress level and the stress amplitude coefficient on the process of vibrational creep</p>	485
<p>A. JAKOWŁUK, Wpływ częstotliwości wibracji na proces wibro- pelzania Влияние частоты вибрации на процесс виброползучести The effect of vibration frequency on the vibrational creep process</p>	507
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	523

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 7 • Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1969

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER, IGOR
KISIEL, WITOLD NOWACKI, BARBARA SKAR-
ŻYŃSKA, MAREK SOKOŁOWSKI, WOJCIECH
SZCZEPIŃSKI, STEFAN ZAHORSKI — REDAK-
TOR NACZELNY

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (586+114) egz. Arkuszy wydawn. 11,5. Arkuszy drukarskich 9,5, Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składowania 14.VII.1969 r. Druk ukończono w grudniu 1969 r. Zam. 1364/69 P-84 Cena zł 30.—

Druk. im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

CIECZE NIENEWTONOWSKIE W ŚWIETLE MECHANIKI KONTINUUM

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zainteresowanie cieczami nienewtonowskimi, których własności mechaniczne odbiegają istotnie od cieczy klasycznych, wzrasta ostatnio znacznie z uwagi na rozwój przemysłu tworzyw sztucznych, przemysłu papierniczego i spożywczego, przemysłu paliw płynnych i smarów itp. Prowadzenie i właściwe ukierunkowanie badań doświadczalnych wymaga znajomości odpowiedniej teorii pozwalającej opisać i objaśnić liczne zjawiska obserwowane w cieczach nieklasycznych. Do chwili obecnej powstała już obszerna literatura teoretyczna i doświadczalna ujmująca zagadnienie w sposób mniej lub bardziej racjonalny i efektywny (por. [1, 2, 3, 4, 5, 6]).

Niniejszy przegląd stawia sobie za cel zaznajomienie z najważniejszymi zagadnieniami teorii i wynikami doświadczeń w ujęciu mechaniki kontinuum. Sposób przedstawienia obliczony jest na czytelnika zaznajomionego z podstawami mechaniki kontinuum, lecz nie będącego specjalistą w dziedzinie cieczy nienewtonowskich. Innymi słowy, jest to wyspecjalizowany przegląd dla zainteresowanych niespecjalistów.

Należy również podkreślić, że przegląd ten nie pretenduje do zbyt wielkiej ogólności i reprezentatywności; częściowy wybór literatury dokonany został w celu jak najlepszego i najpełniejszego, w opinii autora, zilustrowania pewnych zjawisk i sposobów ich wyjaśnienia. Z uwagi na obszerność przedmiotu, celowo pominięto takie zagadnienia, jak struktura cieczy, termodynamika, dyfuzja, przepływy zaburzone itp. Nie omówiono także licznych modeli cieczy badanych metodami mechaniki kontinuum, jak ciecze anizotropowe, ciekłe kryształy, podciecze itp., odsyłając zainteresowanego czytelnika do monografii [1]. Szeroko rozwinięta klasyczna teoria liniowych ośrodków lepkosprężystych również znalazła się poza przeglądem (por. [7, 8]).

W niniejszej pracy, po rozważeniu ograniczeń teorii klasycznych, rozwinięto teorię nieściśliwych cieczy prostych obejmującą, w pewnym sensie, większość starszych teorii cieczy nienewtonowskich. Omówiono klasę tzw. przepływów wiskometrycznych o dużym znaczeniu laboratoryjnym i praktycznym, zwracając szczególną uwagę na efekty naprężeń normalnych. Niektóre typy przepływów przedstawiono krótko dla uproszczonych modeli cieczy. Dokonano ogólnej klasyfikacji równań konstytutywnych cieczy związanych bezpośrednio lub pośrednio z nieściśliwymi cieczami prostymi. Trochę więcej miejsca po-

święcono cieczom drugiego stopnia i tzw. cieczom z konwekcyjną sprężystością. Na zakończenie przedyskutowano krótko zagadnienia stateczności, zwłaszcza dla płaskich ustalonych przepływów ścinających.

2. Ograniczenia teorii cieczy newtonowskich

Klasyczne równania konstytutywne cieczy lepkich, wyrażające *prawo Newtona-Cauchy-Poissona*

$$(2.1) \quad \mathbf{T} = -(p + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{1} + 2\eta_0 \mathbf{D},$$

gdzie \mathbf{T} jest symetrycznym tensorem naprężenia w sensie Cauchy, \mathbf{D} — tensorem prędkości deformacji, tj. symetryczną częścią gradientu pola prędkości, $\mathbf{1}$ — tensorem jednostkowym, zaś λ , η_0 — stałymi cieczy charakteryzującymi odpowiednio ściśliwość i lepkość newtonowską¹⁾, przybierają w przypadku cieczy nieściśliwych szczególnie prostą postać

$$(2.2) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2\eta_0 \mathbf{D}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0.$$

Zależności powyższe po wstawieniu do dynamicznych równań równowagi prowadzą do równań Naviera–Stokesa powszechnie stosowanych w klasycznej hydrodynamice. Stąd też często, w literaturze przedmiotu, zależności (2.2) nazywają się zależnościami opisującymi ciecz Naviera–Stokesa (por. [2]).

Z rozwiązania równań Naviera–Stokesa dla ustalonego przepływu Poiseuille'a otrzymuje się znane *prawo Hagen-Poiseuille'a*

$$(2.3) \quad Q = \frac{\pi R^4 f}{8\eta_0},$$

wyrażające liniowy związek między wydatkiem cieczy na jednostkę czasu Q i gęstością siły inicjującej f (gradientem ciśnienia w kierunku przepływu). Wydatek cieczy jest wprost proporcjonalny do czwartej potęgi promienia rury, natomiast odwrotnie proporcjonalny do lepkości η_0 . Podobnie ma się sprawa dla ustalonego przepływu Couette'a, dla którego proporcjonalność momentu M określonego na jednostkę wysokości do prędkości kątowej Ω z jaką obraca się jeden z cylindrów, wyraża się wzorem następującym:

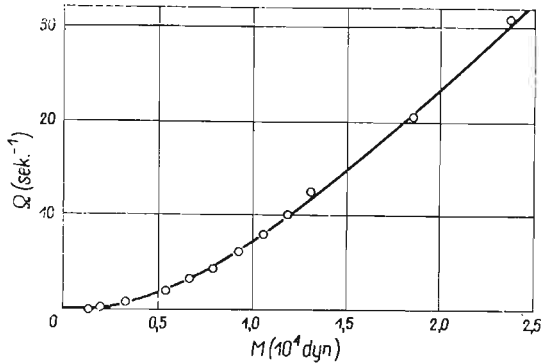
$$(2.4) \quad M = \frac{4\pi\eta_0 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega,$$

przy czym R_2 i R_1 oznaczają odpowiednio promień zewnętrzny i wewnętrzny wiskozyometru. Z doświadczeń wynika, że dla wielu realnych cieczy (zwłaszcza tych o niskim ciężarze cząsteczkowym) spełnione są zarówno zależności (2.2), jak i (2.3), (2.4).

Istnieje wiele praktycznie nieściśliwych cieczy o znaczeniu technicznym i laboratoryjnym, których zachowanie nie daje się opisać równaniami (2.2). Należą do nich roztwory i stopione

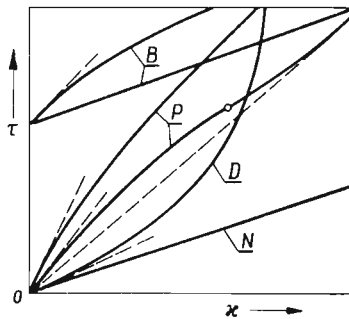
¹⁾ Notacja używana w pracy została w znacznej mierze zaczerpnięta z monografii [1, 2], gdzie można znaleźć szczegółowe definicje wprowadzonych wielkości i symboli. Wektory i tensory oznaczono odpowiednio półgrubymi małymi i dużymi literami. Tensory należy rozumieć jako liniowe transformacje przyporządkowujące każdemu wektorowi drugi wektor; $\operatorname{tr} \mathbf{T}$ oznacza operację śladu przyporządkowującą tensorowi liczbę, podobnie $\det \mathbf{T}$ jest wyznacznikiem tensora, a \mathbf{T}^T — tensorem transponowanym. Funkcjonały konstytutywne oznaczono literami gotyckimi, zaś funkcje i stałe materiałowe — literami greckimi.

polimery, roztwory mydła i celulozy, roztwory biologiczne, różne koloidy, itp., a także farby, smoły, asfalty, kleje i inne, których «ciekły» charakter nie ulega najmniejszej wątpliwości. Badania doświadczalne wykazały, że odpowiednie funkcje $Q(f)$ lub $M(\xi_2)$ są dla tych cieczy wyraźnie nieliniowe (por. rys. 1). Okazało się, że dla szerokiej klasy cieczy nienewtonowskich funkcje typu $Q(f)$ i $M(\xi_2)$ mogą być obliczone na podstawie znajomości funkcji lepkości $\eta(\kappa)$ zależnej wyłącznie od gradientu ścinania κ (prędkości ścinania).



Rys. 1. Prędkość kątowa w zależności od momentu skręcającego w viskozymetrze Couette'a. Lateks kauczukowy (GR-S) zawierający 62,2% części stałych (I. M. Krieger i S. H. Maron, J. Appl. Phys. **25**, 1954, 72)

Różny charakter zmienności $\eta(\kappa)$ warunkujący nieliniową zależność naprężenia ścinającego T od gradientu κ , posłużył w reologii do podziału ośrodków nienewtonowskich na «pseudoplastyki», «ciecze dylatancyjne» i «ośrodki Bingham'a» (por. [4, 5]). Zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 2, lepkość pseudoplastyków i roztworów polimerów maleje w porównaniu z wartością $\eta(0)$, często osiągając asymptotycznie stałą wartość $\eta(\infty)$,



Rys. 2. Schemat podziału cieczy nienewtonowskich. P — pseudoplastyki i roztwory polimerów, D — ciecze dylatancyjne, B — ośrodki Bingham'a, N — ciecze nienewtonowskie

podczas gdy dla cieczy dylatancyjnych odpowiednia lepkość wzrasta wraz ze wzrostem gradientu ścinania. Dla plastycznych ośrodków Bingham'a proces płynięcia rozpoczyna się w momencie kiedy naprężenie T osiąga pewną wartość krytyczną.

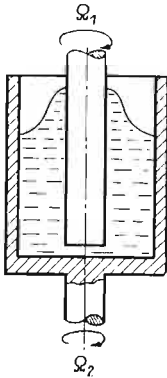
Zjawiska polegające na zmniejszaniu się lub wzroście naprężenia stycznego w zależności od okresu czasu, w którym realizowany jest proces ścinania, stanowią podstawę podziału

cieczy nienewtonowskich na *tiksotropowe* i *reopeksyjne* (por. [3, 4]). Wiedzano od dawna, że niektóre farby dają się łatwiej mieszać w miarę upływu czasu mieszania oraz że drobnoziarnisty piasek nasycony wodą odkształca się nieznacznie pod wpływem szybkich i krótkotrwałych obciążeń, w przeciwieństwie do obciążeń długotrwałych. Należy jednak podkreślić, że pojęcia tiksotropii i reopeksji wydają się dość sztuczne i w gruncie rzeczy zbędne dla wystarczająco ogólnych — zależnych od historii procesu — równań konstytutywnych cieczy prostych (por. [1]). Wprowadzenie tych pojęć do opisu zjawisk makroskopowych wynikało raczej z niedoskonałości stosowanych modeli, co nie oznacza, że na gruncie opisu mikroskopowego ośrodków wielofazowych nie posiadają one określonego znaczenia.

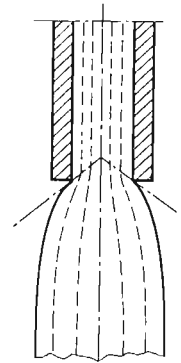
Innym zjawiskiem, istotnie odróżniającym ciecze nienewtonowskie od klasycznych cieczy lepkich, jest występowanie określonych naprężeń normalnych, podobnie do efektu Poyntinga w ciałach stałych. Z rozważenia różnicy naprężeń normalnych w kierunku promieniowym dla ustalonego przepływu Couette'a cieczy newtonowskiej wynika, że

$$(2.5) \quad \Delta T^{(rr)} = T^{(rr)}(R_2) - T^{(rr)}(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \rho r [\omega(r)]^2 dr < 0,$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy, zaś $\omega(r)$ — prędkością kątową w odległości r od osi cylindrów. Ponieważ naciski na ścianki są równe odpowiednim naprężeniom wziętym ze znakiem przeciwnym, nacisk na ściankę zewnętrzną — $T^{(rr)}(R_2)$ jest większy od nacisku na ściankę wewnętrzną — $T^{(rr)}(R_1)$. Powierzchnia swobodna cieczy przybiera wówczas charaktery-



Rys. 3. Podnoszenie się cieczy na powierzchni wewnętrznego walca w przepływie Couette'a



Rys. 4. Zwiększanie się średnicy swobodnej strugi cieczy wypływającej z kapilary

styczny kształt paraboloidy obrotowej. Doświadczenia wykazują jednak, że dla takich cieczy nienewtonowskich, jak np. roztwory polimerów, obserwuje się zjawisko odwrotne, tj. występowanie większych nacisków na ściance wewnętrznej, oraz że faktu tego nie można wytłumaczyć tylko przez właściwy dobór funkcji lepkości $\eta(\dot{\gamma})$; potrzebne są inne funkcje zależne od bardziej złożonego modelu cieczy.

Często obserwowano «wpełzanie» farb na wewnętrzne mieszkadło oraz znaczne zwiększenie średnicy swobodnej strugi cieczy wypływającej z kapilary (nazywane w języku angielskim *die swell*), lecz nie wiązano tego z efektami naprężeń normalnych (por. rys. 3, 4). Systematyczne studia tych zjawisk oraz próby ich teoretycznego wyjaśnienia datują się od czasu ostatniej wojny. Zostały one zapoczątkowane w W. Brytanii badaniami GARNERA,

NISSANA, WOODA, WEISSEBERGA i innych (por. [9, 10, 11]). Zwłaszcza doświadczalne i teoretyczne prace WEISSEBERGA i jego szkoły przedstawione na Międzynarodowym Kongresie Reologii w roku 1948 (por. [12]), zwróciły powszechną uwagę na efekt naprężeń normalnych zwany często w literaturze *efektem Weissenberga*. Wspomniane już zjawisko zwiększenia średnicy strugi cieczy nazywane jest często *efektem Barusa* [13] lub *efektem Merringtona* [14]; odgrywa ono istotną rolę w procesie formowania włókien sztucznych (por. [15]). Istnieją liczne próby wyjaśnienia wspomnianych zjawisk poprzez wpływ historii przepływu, wpływ *sprężystych* własności cieczy itp. (por. np. [2, 3]); próbę teoretycznego jakościowego opisu w oparciu o ogólną teorię cieczy prostych COLEMANA i NOLLA omówimy w jednym z następných punktów.

Przy rozważaniu momentów ograniczających stosowalność klasycznej teorii Naviera–Stokesa, należy zwrócić uwagę na zjawiska relaksacji naprężeń i nawrotu sprężystego obserwowane często w cieczach nienewtonowskich. Posłużyły one za podstawę podziału cieczy nieklasycznych na *ciecze lepkie* lub *ciecze niesprężyste (inelastic)* z jednej strony, a *ciecze lepkosprężyste* lub *ciecze sprężyste* z drugiej strony (por. [3]). Należy jednak podkreślić, że terminy te nie są zawsze jednoznaczne i powodują dużo nieporozumień. Niektórzy autorzy, na przykład, wiążą pojęcie *sprężystości* cieczy z efektami naprężeń normalnych, inni natomiast za decydujący moment uważają istnienie historii deformacji lub przepływu. Trzeba również pamiętać, że niektóre teorie cieczy *sprężystych*, będące formalnym przeniesieniem sprężystych własności ciał stałych na ciecze, w których nie istnieje określona konfiguracja odniesienia — stan naturalny (por. p. 3), są błędne z teoretycznego punktu widzenia (por. uwagi w monografii [1]).

Większość efektów różniących istotnie ciecze nienewtonowskie od klasycznych odkrywano przede wszystkim w trakcie badań doświadczalnych. Zasadniczą przeszkodą na drodze zbudowania wystarczająco ogólnych równań konstytutywnych był fakt, że w określonych typach przepływów, zwłaszcza realizowanych w różnego rodzaju wiskozymetrach, ujawniały się tylko niektóre własności cieczy. Na przykład, w przepływach ustalonych rola historii deformacji jest istotnie ograniczona, zaś w ustalonym przepływie między nieruchomymi koncentrycznymi walcami nie można rozróżnić ogólnej cieczy prostej od czysto lepkiej cieczy typu Reintera–Rivlina (por. p. 5.4) itp.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat włożono dużo pracy w rozwój różnych koncepcji cieczy nieklasycznych; doprowadziła ona do teorii nieściśliwych cieczy prostych Coleman–Nolla (por. [1, 2]) zapoczątkowanej fundamentalną pracą NOLLA z roku 1958 [16]¹⁾. Zasadnicze założenia tej teorii, niektóre wyniki teoretyczne oraz próby ich weryfikacji doświadczalnej będą stanowić treść kilku kolejnych punktów w pierwszej części niniejszego przeglądu.

3. Nieściśliwe ciecze proste

Przechodząc do krótkiego omówienia teorii nieściśliwych cieczy prostych²⁾ należy zastanowić się nad ogólną definicją cieczy. Zgodnie z określeniem OLDROYDA [18] i LODGE'A [3] *cieczą nazywamy ośrodek, dla którego naprężenia zawsze osiągną stan równowagi odpo-*

¹⁾ Znacznie mniej rozwiniętą teorię ściśliwych cieczy prostych można znaleźć w pracy [17].

²⁾ Teoria Coleman–Nolla dotyczy w gruncie rzeczy nieściśliwych płynów prostych. Z uwagi na ograniczenie nałożone w tytule niniejszego przeglądu pozostaniemy przy polskim terminie: ciecz prosta.

wiadający obciążeniu izotropowemu lub zerowemu, o ile ośrodek pozostaje w stałym kształcie. Pociąga to za sobą stwierdzenie, że ciecze w stanie spoczynku nie może przenosić naprężeń ścinających.

W założeniu, że \mathbf{x} oznacza położenie w przestrzeni euklidesowej punktu materialnego X w aktualnym czasie t , zaś ξ jest położeniem tego samego punktu materialnego w dowolnej chwili ($\tau \leq t$), ruch można zapisać w postaci

$$(3.1) \quad \xi = \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad -\infty < \tau \leq t,$$

w której χ_t oznacza funkcję względnej deformacji. Gradient względnej deformacji

$$(3.2) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{F}_t(t) = \mathbf{1},$$

opisuje zmianę lokalnej konfiguracji X między czasem τ i t . Funkcję tensorową

$$(3.3) \quad \mathbf{F}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_t(t-s) \quad \text{dla} \quad \infty > s \geq 0,$$

nazywamy historią względnego gradientu deformacji. Jeśli mamy dane pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, to biorąc pod uwagę, że

$$(3.4) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{d}{d\tau} \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \right|_{\tau=t},$$

można określić funkcję względnej deformacji z rozwiązania równań:

$$(3.5) \quad \dot{\xi}(\tau) = \mathbf{v}(\xi(\tau), \tau), \quad \xi(t) = \mathbf{x},$$

gdzie kropką oznaczono różniczkowanie po czasie τ .

Po tych wstępnych definicjach wielkości kinematycznych zapisujemy równania konstytutywne cieczei prostej w postaci następującej (por. [1, 2]):

$$(3.6) \quad \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)), \quad \det \mathbf{F}(s) = \mathbf{1},$$

przy czym p jest ciśnieniem hydrostatycznym, zaś $\int_{s=0}^{\infty}$ oznacza funkcjonal konstytutywny, którego argumentem jest cała przeszła historia deformacji. Równania (3.6) wyrażają fakt, że nieściśliwe ciecze proste to klasa ośrodków, dla których tensor naprężenia jest określony, z dokładnością do ciśnienia hydrostatycznego, przez historię względnego gradientu deformacji, oraz że dopuszczalne są jedynie przepływy izochoryczne. Oczywiście funkcjonal $\int_{s=0}^{\infty}$ jest inny dla każdego przypadku cieczy prostej specyfikując w ten sposób jej mechaniczne zachowanie się¹⁾.

W szczególnym przypadku cieczy newtonowskiej mamy

$$(3.7) \quad \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)) = -\eta_0 \left. \frac{d}{ds} (\mathbf{F}(s) + \mathbf{F}(s)^T) \right|_{s=0}.$$

Występującą w równaniach (3.6) niejednoznaczność funkcjonału konstytutywnego (wobec nieokreślonego ciśnienia p) usuwamy przez założenie

$$(3.8) \quad \text{tr} \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)) = 0, \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}.$$

¹⁾ Uogólnienie równań konstytutywnych cieczy prostych na inne niemechaniczne efekty jest całkowicie możliwe. Termodynamika ośrodków prostych została zaproponowana przez Colemaną [19] (por. także [1]).

Dalsze informacje dotyczące własności funkcjonału konstytutywnego wynikają z żądania spełnienia znanej ogólnej zasady mechaniki kontinuum nazywanej *zasadą materialnej obiektywności* (por. np. [1]). W myśl tej zasady wszystkie równania konstytutywne muszą być niezmiennicze względem zmian układu odniesienia w przestrzeni euklidesowej – wyrażonych zależnością (por. [16])

$$(3.9) \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x} - \mathbf{q}],$$

w której \mathbf{q} jest niezależne od czasu, zaś $\mathbf{Q}(t)$ oznacza dowolny zależny od czasu tensor ortogonalny, tj. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$. Zasada materialnej obiektywności wyraża niezależność własności ośrodka od ruchu «obserwatora» w przestrzeni; co jest zresztą w zgodzie z czysto intuicyjnym odczuciem.

Stosując powyższą zasadę do równań (3.6) otrzymamy, że (por. [2])

$$(3.10) \quad \mathbf{R}(0) \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}(s)) \mathbf{R}(0)^T ds = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{R}(s) \mathbf{F}(s) \mathbf{R}(0)^T) ds,$$

dla każdej ciągłej funkcji $\mathbf{R}(s)$, której wartości są tensorami ortogonalnymi i dla każdej historii $\mathbf{F}(s)$. Innymi słowy, warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby funkcjonał definiował ciecz prostą jest spełnienie zależności (3.10).

Łatwo zauważyć, że wprowadzona definicja cieczy prostej jest zgodna z definicją cieczy przytoczoną na początku niniejszego punktu. Na podstawie (3.10) można udowodnić (por. [2]), że zarówno dla cieczy prostej pozostającej cały czas w spoczynku, tj. $\mathbf{F}(s) = \mathbf{1}(s) = \mathbf{1}$, jak i dla poruszającej się ruchem sztywnym, tj. $\mathbf{F}(s)\mathbf{F}(s)^T = \mathbf{1}$, naprężenie jest ciśnieniem hydrostatycznym, mianowicie

$$(3.11) \quad \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{1}(s)) ds = 0, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1}.$$

Zasady materialnej obiektywności nie należy mylić z zagadnieniem niezmienniczości równań konstytutywnych względem zmiany odpowiedniej konfiguracji odniesienia zgodnie z wewnętrzną symetrią ośrodka. Równanie konstytutywne dowolnego ośrodka prostego, mianowicie

$$(3.12) \quad \mathbf{T} = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s)), \quad \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(t-s), \quad \infty > s \geq 0,$$

gdzie $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\tau)$ jest gradientem deformacji względem dowolnej konfiguracji odniesienia \mathbf{x} (nie będącej konfiguracją w chwili aktualnej), muszą być niezmiennicze względem odpowiedniej grupy izotropii \mathcal{G} (por. [1]). Przez *grupę izotropii \mathcal{G} względem konfiguracji \mathbf{x}* rozumie się zbiór wszystkich takich unimodularnych transformacji $\mathbf{H} \in \mathcal{U}$, że

$$(3.13) \quad \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s)) ds = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(s) \mathbf{H}) ds.$$

Jeśli grupa izotropii ośrodka dla dowolnej konfiguracji odniesienia jest podgrupą grupy unimodularnej, wówczas mamy proste ciało stałe; jeśli jest równa grupie unimodularnej otrzymujemy nową definicję cieczy prostej. W szczególnym przypadku, gdy grupa jest grupą ortogonalną otrzymamy izotropowe proste ciało stałe. Rozumowanie powyższe pozwala nie tylko uściślić w sensie matematycznym definicję cieczy prostej i wykazać jej

zgodność z (3.6), ale prowadzi również do wniosku, że *każda ciecz prosta jest izotropowa*, tzn., że jej własności są jednakowe we wszystkich kierunkach i dla każdego kształtu¹⁾.

Przy rozważaniach ogólnych, zwłaszcza przepływów wiskometrycznych (por. p. 4), nie są potrzebne żadne dodatkowe ograniczenia ani na postać funkcjonału konstytutywnego (3.6), ani też na historię gradientu ścinania. Aby umożliwić jednak różne aproksymacje oraz zrozumieć właściwie rolę cieczy klasycznych i ich najprostszyc uogólnień na tle teorii cieczy prostych, konieczne jest wprowadzenie *zasady zanikającej pamięci* (por. [21]). Zasada ta w języku matematycznym wyraża fakt, że daleka przeszłość historii deformacji ma znacznie mniejszy wpływ na aktualne naprężenia, niż historia ostatnia; wymaga to nałożenia pewnych ograniczeń na dziedzinę funkcjonału $\int_{s=0}^{\infty}$ i sam funkcjonał (por. [1]).

W przestrzeni wektorowej historii deformacji

$$(3.14) \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s) - \mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(s)^T \mathbf{F}(s) - \mathbf{1}, \quad |\mathbf{G}(s)| = (\text{tr} \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{1/2},$$

rozważmy następującą normę:

$$(3.15) \quad \|\mathbf{G}(s)\|_h = \left(\int_0^{\infty} [h(s)|\mathbf{G}(s)|]^2 ds \right)^{1/2},$$

przy czym $h(s)$ jest dodatnio określoną funkcją wpływu zdefiniowaną w przedziale $0 \leq s < \infty$, znormalizowaną, tj. $h(0) = 1$, oraz dążącą do zera tak, że $\lim_{s \rightarrow \infty} s^r h(s) = 0$ monotonicznie dla dużych s . Przestrzeń historii deformacji $\mathbf{G}(s)$ z tak określoną normą jest przestrzenią Hilberta, tzn. $\mathbf{G}(s) \in \mathcal{H}$.

Spełniona jest *zasada zanikającej pamięci w sensie słabym*, jeśli istnieje funkcja wpływu rzędu $r > 1/2$ oraz funkcjonał konstytutywny $\int_{s=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany i ciągły w otoczeniu $\mathbf{0}$ przestrzeni \mathcal{H} .

Spełniona jest *zasada zanikającej pamięci w sensie mocnym*, jeśli istnieje funkcja wpływu rzędu $r > 1/2 + n$ oraz funkcjonał $\int_{s=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany i posiada n -krotną pochodną Fréchet'a w otoczeniu $\mathbf{0}$ przestrzeni \mathcal{H} .

Tak określoną zasadę zanikającej pamięci wykorzystuje się przy wyprowadzaniu niektórych aproksymacji przedyskutowanych w p. 8.

4. Przepływy wiskometryczne

Istnieje szeroka klasa przepływów zwanych przepływami wiskometrycznymi (z uwagi na ich znaczenie doświadczalne i realizację w różnego typu wiskozymetrach), dla której teoria cieczy prostych prowadzi do szczególnie cennych wyników. Zagadnieniom przepływów wiskometrycznych poświęcona jest obszerna literatura zebrana w znacznej części w specjalnej monografii COLEMANA, MARKOVITZA i NOLLA [2] zawierającej 370 pozycji

¹⁾ Istnieją ośrodki, dla których grupy izotropii nie są równe grupie unimodularnej i nie zawierają w sobie grupy ortogonalnej. Przykładem służą tzw. proste podciecze (*simple subfluids*), których teoria została rozwinięta przez Wanga [20].

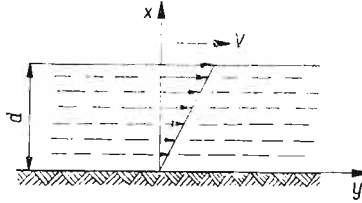
bibliograficznych. Do niej odsyłamy czytelników zainteresowanych w głębszym poznaniu tych zagadnień (por. także [1]).

Rozważmy najprostszy przepływ ścinający, dla którego w kartezjańskim układzie odniesienia (rys. 5) współrzędne fizyczne prędkości są następujące:

$$(4.1) \quad v^{(x)} = 0, \quad v^{(y)} = \kappa x, \quad v^{(z)} = 0.$$

Całkując równania (3.5) otrzymamy

$$(4.2) \quad \xi(\tau) = x, \quad \eta(\tau) = y + \kappa x(\tau - t), \quad \xi(\tau) = z,$$



Rys. 5. Prosty przepływ ścinający

a zatem historię względnego gradientu deformacji można zapisać w postaci

$$(4.3) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{1} - s\mathbf{M}, \quad [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{M} jest stałym tensorem. Podstawiając (4.3) do (3.6)₁ i (3.10), w założeniu, że $\mathbf{R}(s) = \mathbf{Q}$ i \mathbf{Q} jest niezależne od s , otrzymamy

$$(4.4) \quad \mathbf{T} + p\mathbf{1} = \mathfrak{h}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}\mathfrak{h}(\mathbf{M})\mathbf{Q}^T = \mathfrak{h}(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T)$$

dla wszystkich ortogonalnych \mathbf{Q} .

Jeśli w dowolnej chwili czasu i dla dowolnego punktu materialnego historia względnego gradientu deformacji przybiera postać (4.3) w pewnej ortogonalnej bazie $\mathbf{g}^{(i)}$, można bez trudu dowieść, że macierz tensora naprężenia musi być następująca (por. np. [2]):

$$(4.5) \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T^{(11)} & T^{(12)} & 0 \\ T^{(12)} & T^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & T^{(33)} \end{bmatrix},$$

przy czym współrzędne macierzy zależą wyłącznie od κ . Wprowadzając następujące funkcje wiskometryczne

$$(4.6) \quad T^{(12)} = \tau(\kappa), \quad T^{(11)} - T^{(33)} = \sigma_1(\kappa), \quad T^{(22)} - T^{(33)} = \sigma_2(\kappa),$$

łatwo jest stwierdzić, że określają one całkowicie własności cieczy dla rozważanego typu przepływu. Funkcję $\tau(\kappa)$ nazwano *funkcją naprężenia ścinającego*, zaś funkcje $\sigma_1(\kappa)$ i $\sigma_2(\kappa)$ *funkcjami naprężeń normalnych* (por. [1, 2]).

Można w dalszym ciągu dowieść, że funkcje wiskometryczne nie zależą od wyboru bazy $\mathbf{g}^{(i)}$ oraz, że spełniają zależności (por. [1, 2]).

$$(4.7) \quad \tau(-\kappa) = -\tau(\kappa), \quad \sigma_1(-\kappa) = \sigma_1(\kappa), \quad \sigma_2(-\kappa) = \sigma_2(\kappa),$$

$$(4.8) \quad \tau(0) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0.$$

Naturalne jest założenie, że kierunek przepływu powinien być zgodny z kierunkiem działania obciążeń ścinających, wówczas¹⁾

$$(4.9) \quad \kappa \tau(\kappa) > 0 \quad \text{dla} \quad \kappa \neq 0.$$

Zamiast funkcji $\tau(\kappa)$ stosuje się często wspomnianą już funkcję lepkości zdefiniowaną następująco:

$$(4.10) \quad \eta(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \tau(\kappa), \quad \eta_0 = \eta(0) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \eta(\kappa) = \tau'(0).$$

Z (4.9) wynika, że nie tylko $\eta(\kappa) > 0$, ale również $\tau'(0) > 0$; można zatem wprowadzić funkcję odwrotną λ

$$(4.11) \quad \kappa = \lambda(S), \quad S = \tau(\kappa),$$

nazywaną *funkcją prędkości ścinania*.

Dotychczasową analizę można rozszerzyć (por. [2]) na przypadki zmiennej macierzy $[\mathbf{M}]$, tj. na przypadki, w których κ i baza $\mathbf{g}^{(i)}$ zależą od czasu t i położenia \mathbf{x} zajmowanego przez punkt materialny w czasie t . Dopuszczalne są także historie względnego gradientu deformacji różniące się od (4.3), o zależną od czasu zmianę układu odniesienia. Podamy zatem następującą definicję przepływu wiskometrycznego [2]:

Przepływ nazywamy przepływem wiskometrycznym, jeśli historia względnego gradientu deformacji, dla każdego \mathbf{x} i t przybiera postać

$$(4.12) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{1} - s\mathbf{M}),$$

przy czym macierz tensora \mathbf{M} w bazie $\mathbf{g}^{(i)}$ ma postać (4.3)₂, zaś $\mathbf{R}(s)$ jest tensorem ortogonalnym dla każdego s i $\mathbf{R}(0) = \mathbf{1}$.

Ważną klasę przepływów wiskometrycznych stanowią tzw. *przepływy krzywolinearne* (curvilinear); dla których w dowolnym ortogonalnym układzie współrzędnych (x^1, x^2, x^3) pole prędkości wyraża się w postaci

$$(4.13) \quad v^1 = 0, \quad v^2 = u(x^1), \quad v^3 = w(x^1).$$

Fizyczne składowe tensora naprężenia są następujące:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} T^{(12)} &= v\tau(\kappa), \\ T^{(13)} &= \mu\tau(\kappa), \\ T^{(23)} &= \mu\nu\sigma_2(\kappa), \\ T^{(11)} - T^{(33)} &= \sigma_1(\kappa) - \mu^2\sigma_2(\kappa), \\ T^{(22)} - T^{(33)} &= (v^2 - \mu^2)\sigma_2(\kappa), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.15) \quad \kappa = \frac{1}{e_1} (u'^2 e_2^2 + w'^2 e_3^2)^{1/2}, \quad v = \frac{e_2}{e_1} \frac{u'}{\kappa}, \quad \mu = \frac{w'}{\kappa} \frac{e_3}{e_1},$$

zaś e_i oznaczają długości wektorów naturalnej bazy \mathbf{e}_i układu (x^1, x^2, x^3) . Tak zdefiniowana klasa przepływów reprezentuje ustalone przepływy wiskometryczne, do których

¹⁾ Coleman [22] wykazał, że nierówność (4.9), dopuszczająca także znak równości, wynika z rozważań termodynamicznych.

zalicza się większość przepływów spotykanych w wiskozymetrach oraz niektóre przepływy o znaczeniu technicznym i przemysłowym.

Warto jeszcze podkreślić, że nie każdy przepływ ustalony jest przepływem wiskometrycznym, w którym własności cieczy łącznie z efektami naprężeń normalnych opisane są przez trzy funkcje materiałowe: $\tau(\kappa)$ (lub $\eta(\kappa)$), $\sigma_1(\kappa)$, $\sigma_2(\kappa)$. Na przykład, proste rozciąganie strugi cieczy, opisujące w przybliżeniu część procesu formowania włókien sztucznych, nie jest przepływem wiskometrycznym (por. p. 7.2).

5. Szczególne przypadki przepływów wiskometrycznych

Z najważniejszych ustalonych przepływów wiskometrycznych należy wymienić:

a) *plaski przepływ Poiseuille'a*, dla którego w układzie współrzędnych kartezjańskich

$$(5.1) \quad v^x = 0, \quad v^y = v(x), \quad v^z = 0;$$

b) *przepływy helikoidalne*, dla których w walcowym układzie współrzędnych

$$(5.2) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = \omega(r), \quad v^z = u(r),$$

i do których zaliczamy w szczególności przepływ między współosiowymi cylindrami, przepływ Couette'a, przepływ Poiseuille'a i przepływ między nieruchomymi współosiowymi cylindrami;

c) *przepływ między obracającymi się płytą i stożkiem*, dla którego w kulistym układzie współrzędnych

$$(5.3) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = 0, \quad v^\varphi = \omega(\Theta);$$

d) *przepływ skręcający między wirującymi płytami*, dla którego w walcowym układzie współrzędnych

$$(5.4) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = \omega(z), \quad v^z = 0.$$

W dalszym ciągu scharakteryzujemy niektóre z nich zwracając również uwagę na doświadczalne możliwości wyznaczenia odpowiednich funkcji wiskometrycznych (por. [2, 3]).

5.1. Płaski przepływ Poiseuille'a. Na podstawie (5.1) i dynamicznych równań równowagi (por. [1])

$$(5.1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}, \quad \mathbf{b} = -\operatorname{grad} \psi,$$

gdzie \mathbf{a} jest przyspieszeniem, ψ — potencjałem sił masowych, otrzymamy

$$(5.1.2) \quad \kappa = v'(x) = \lambda(-xf+b), \quad \tau(v') = -xf+b,$$

przy czym f , b są stałymi całkowania, a funkcja $\lambda(\)$ została zdefiniowana przez (4.11). Uwzględnienie warunku przylegania na ściankach, tj. $v = 0$ dla $x = \pm d/2$, daje następujący profil prędkości oraz wydatek cieczy na jednostkę czasu:

$$(5.1.3) \quad v(x) = \int_x^{d/2} \lambda(f\xi) d\xi, \quad Q = \frac{2}{r^2} \int_0^{d/2} S \lambda(S) dS,$$

gdzie f odgrywa rolę gradientu ciśnienia inicjującego przepływ. Zależność ostatnia może być rozwiązana względem funkcji λ , mianowicie

$$(5.1.4) \quad \lambda \left(\frac{df}{2} \right) = \frac{2}{fd^2} \frac{\partial}{\partial f} (f^2 Q),$$

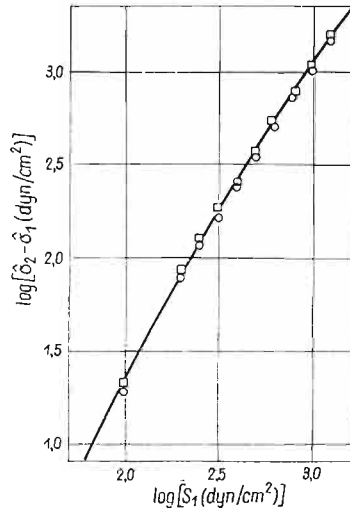
skąd, na podstawie doświadczalnej znajomości $Q(f)$, wylicza się funkcję naprężenia ścinającego $\tau(z)$ lub funkcję lepkości $\eta(z)$.

Naprężenia dane są zależnościami (4.6) z tym, że

$$(5.1.5) \quad T^{(xy)} = -xf, \quad T^{(xx)} = \rho y + yf + h(t),$$

gdzie $h(t)$ jest nieokreśloną, zależną wyłącznie od czasu, funkcją ciśnienia.

5.2. Przepływ Couette'a. Przepływ tego typu posiada duże znaczenie doświadczalne, toteż wielu badaczy konstruowało specjalne wiskozymetry Couette'a w celu określenia nie tylko funkcji lepkości, ale również naprężeń normalnych (por. [2]).



Rys. 6. Różnica funkcji naprężeń normalnych w specjalnym wiskozymetrze Couette'a dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cetanic. Oznaczenia: ○ — $R_1 = 0,500$ cm, $R_2 = 1,270$ cm; □ — $R_1 = 0,500$ cm, $R_2 = 0,743$ cm (wg [23])

Rozważenie równowagi dynamicznej przepływu prowadzi do następującej zależności między różnicą prędkości kątowych i momentem skręcającym na jednostkę wysokości:

$$(5.2.1) \quad \Delta\Omega = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \lambda \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) dr = \frac{1}{2} \int_{S_2}^{S_1} \frac{1}{S} \lambda(S) dS,$$

$$S_1 = \frac{M}{2\pi R_1^2}, \quad S_2 = \frac{M}{2\pi R_2^2},$$

która może być odwrócona w celu doświadczalnego pomiaru funkcji $\Delta\Omega(M)$, mianowicie

$$(5.2.2) \quad 2M \frac{\partial \Delta\Omega}{\partial M} = \lambda(S_1) - \lambda \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} S_1 \right).$$

Gdy różnica średnic między cylindrami zewnętrznym i wewnętrznym jest mała, korzysta się często z zależności

$$(5.2.3) \quad \Delta\Omega = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \lambda(S_1) + O\left(\frac{1}{R_1^2} (R_2 - R_1)^2\right).$$

W celu pomiaru efektów naprężeń normalnych wykorzystuje się różnicę naprężeń normalnych w kierunku promieniowym

$$(5.2.4) \quad \Delta T^{(rr)} = \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{1}{r} \left[\hat{\sigma}_2 \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) \right] - \rho r \omega(r)^2 \right\} dr,$$

gdzie oznaczono $\hat{\sigma}_i(S) = \sigma_i[\lambda(S)]$. Dla małej różnicy średnic otrzymamy

$$(5.2.5) \quad \Delta T^{(rr)} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} [\hat{\sigma}_2(S_1) - \hat{\sigma}_1(S_1) - \rho \Omega_1 \Omega_2 R_1^2] + O\left(\frac{1}{R_1^2} (R_2 - R_1)^2\right).$$

Z zależności (5.2.4) i (5.2.5) widać, że pomiar $\Delta T^{(rr)}$ pozwala wyznaczyć odpowiednią różnicę funkcji viskometrycznych $\sigma_2 - \sigma_1$. Ponieważ człon inercjalny jest ujemny, warunkiem koniecznym do tego, żeby $\Delta T^{(rr)}$ było dodatnie dla wszystkich M w otoczeniu zera, jest $\sigma_2 > \sigma_1$ dla wszystkich κ w otoczeniu zera. Na rys. 6 pokazano przykładowo wyniki uzyskane przez MARKOVITZA [23] dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cecanie.

5.3. Przepływ między stożkiem i płytą. Różne aparaty skonstruowane na zasadzie stożka i płyty obok swych niewątpliwych zalet (np. łatwość posługiwania się, mała ilość badanej cieczy, możliwość nałożenia ruchów okresowych itp.) posiadają także liczne wady. Wynikają one z faktu, że pole prędkości (5.3) spełnia dynamiczne równania równowagi w sposób przybliżony, jeśli pominie się człony inercjalne oraz przyjmie małe kąty α ($\alpha < 4^\circ$) między płytą i stożkiem (por. [2]). Należy również pamiętać o zaburzeniach w pobliżu krawędzi stożka, prowadzących w efekcie do wystąpienia tzw. wtórnego przepływu (por. p. 7.1)¹⁾.

W założeniu zwykle czynionych uproszczeń uzyskuje się następujący związek między przyłożonym momentem a różnicą prędkości kątowych:

$$(5.3.1) \quad M = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau(\kappa), \quad \kappa = \omega'(\theta) \approx \frac{\Delta\Omega}{\alpha},$$

gdzie R jest promieniem zewnętrznym urządzenia.

Zależność w postaci

$$(5.3.2) \quad \frac{\partial T^{(\theta\theta)}}{\partial \ln r} = \sigma_1(\kappa) + \sigma_2(\kappa),$$

służy zwykle do wyznaczenia sumy funkcji viskometrycznych $\sigma_1 + \sigma_2$. Rysunek 7 przedstawia odpowiednie jej wartości otrzymane przez MARKOVITZA i BROWNA [25] dla 6,9% roztworu poliizobutyleny w cecanie.

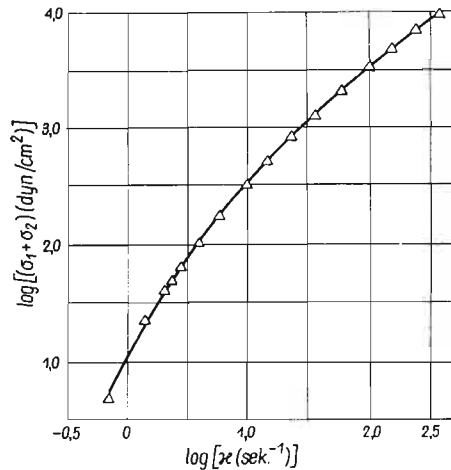
Niektórzy autorzy (np. [26]) zakładając, że powierzchnia $r = R$ jest powierzchnią swobodną pozostającą w kontakcie z atmosferycznym ciśnieniem p_0 oraz, że nie istnieją żadne

¹⁾ Szeroko stosowany w praktycznych pomiarach reogoniometr Weissenberga [24] jest zbudowany na zasadzie stożka i płyty.

efekty powierzchniowe, korzystają z następującego wyrażenia na całkowitą normalną siłę utrzymującą stożek i płytę na miejscu:

$$(5.3.3) \quad N = -\pi R^2 p_0 + \frac{\pi}{2} R^2 [\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)],$$

w celu obliczenia odpowiedniej różnicy funkcji wiskometrycznych $\sigma_1 - \sigma_2$. Postępowanie takie, z uwagi na wspomniane już efekty brzegowe, może być stosowane w sensie bardzo przybliżonym (por. [2]).



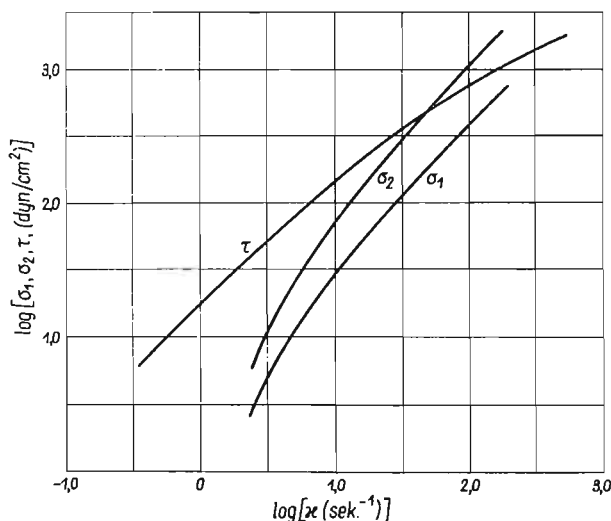
Rys. 7. Suma funkcji naprężeń normalnych w przepływie między stożkiem i płytą dla 6,9% roztworu poliizobutyleny w cecanie (wg [25])

5.4. Inne przepływy i wyznaczenie funkcji naprężeń normalnych. Do pomiarów naprężeń normalnych używa się także przepływu skręcającego między dwoma obracającymi się tarczami, który zresztą jako pierwszy posłużył do zademonstrowania tych naprężeń (por. [9, 11, 12]). Był on także wykorzystany przy konstrukcji specjalnego urządzenia stosowanego przez GREENSMITHA i RIVLINA [27] we wczesnych badaniach cieczy nienewtonowskich.

Przepływ skręcający bada się, podobnie jak przepływ między stożkiem i płytą, przy pominięciu efektów inercjalnych i zaburzeń wywołanych obecnością krawędzi. Umożliwia to wyznaczenie kombinacji funkcji naprężeń normalnych w postaci $1/\kappa \sigma_2(\kappa) + \sigma_1'(\kappa)$ lub jej całki, którą należy uzupełnić pomiarami w innych typach przepływów.

MARKOVITZ i BROWN [23, 25, 28, 29] przeprowadzili badania naprężeń normalnych dla roztworów poliizobutyleny w cecanie opierając się na trzech typach przepływów wiskometrycznych. Według ich programu przepływ Couette'a posłużył do wyznaczenia różnicy $\sigma_2 - \sigma_1$ [por. (5.2.5), rys. 6], zaś przepływ między stożkiem i tarczą do wyznaczenia sumy $\sigma_1 + \sigma_2$ [por. (5.3.2), rys. 7]. Mając wyznaczone funkcje σ_1 i σ_2 można było przewidzieć rozkład naprężeń normalnych w przepływie skręcającym i porównać go z wynikami eksperymentów; porównanie takie wykazało bardzo dobrą zgodność wyników doświadczalnych z teorią. Na rys. 8 przytaczamy odpowiednie wykresy funkcji naprężeń normalnych i funkcji naprężenia ścinającego według badań MARKOVITZA i BROWNA (por. [1]).

W niektórych starszych teoriach cieczy nienewtonowskich stwierdza się istnienie proporcjonalności $\sigma_1 = k\sigma_2$ między odpowiednimi funkcjami naprężeń normalnych (por. [1]). W teoriach WEISSEBERGA, LODGE'A i innych (por. [3]) zakłada się nawet, że $k = 0$, co pociąga za sobą $\sigma_1 = 0$ lub $T^{(11)} = T^{(33)}$. Nie tylko wyniki dotychczas przytoczonych doświadczeń przeczą takim założeniom, ale również przeczą specjalne doświadczenia



Rys. 8. Funkcje wiskometryczne uzyskane przez Markovitz'a i Browna dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cecaniu (wg [1])

podjęte w celu stwierdzenia istnienia i nieproporcjonalności dwóch różnic naprężeń normalnych (np. [30]). Istnieje zresztą przepływ wiskometryczny pozwalający stwierdzić bezpośrednio wartość funkcji $\sigma_1 \neq 0$. Dla przepływu cieczy między nieruchomymi koncentrycznymi cylindrami odpowiednia różnica naprężeń normalnych w kierunku promieniowym wyraża się następująco (por. [2]):

$$(5.4.1) \quad \Delta T^{(rr)} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \hat{\sigma}_1(S(r)) dr, \quad S(r) = \frac{b}{r} - \frac{rf}{2},$$

gdzie b jest znaną stałą, zaś f oznacza gradient ciśnienia na jednostkę długości przewodu. W myśl najnowszych poglądów, proporcjonalność funkcji naprężeń normalnych może mieć miejsce dla bardzo szczególnych rodzajów cieczy i w pewnych tylko przedziałach zmienności prędkości ścinania. Regułą jest niezależność σ_1 i σ_2 z tym, że funkcje te wyznaczone dla określonych przepływów wiskometrycznych są słuszne dla innych przepływów wiskometrycznych.

6. Jakościowe wyjaśnienie efektów naprężeń normalnych

W p. 2 opisaliśmy efekty naprężeń normalnych przy przepływie Couette'a i przy wpływie swobodnej strugi cieczy z kapilary. Zjawiska te mogą być wyjaśnione na gruncie teorii cieczy prostych, w założeniu, że rozwiązania teoretyczne słuszne dla nieskończonych cylind-

rów lub rur opisują w sposób przybliżony to, co zachodzi w rzeczywistych przyrządach laboratoryjnych (por. [2]).

Dla przepływu Couette'a (rys. 3) oznaczmy przez $\Delta = p_0 + T^{(zz)}$ nadwyżkę ciśnienia atmosferycznego p_0 nad odpowiednim naciskiem $-T^{(zz)}$ cieczy w kierunku osiowym. Ponieważ z reguły $\Delta \neq 0$, powierzchnia swobodna cieczy nie może być płaską. Jeśli odpowiednia pochodna w kierunku promieniowym

$$(6.1) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r} = -\rho r \omega(r)^2 + \frac{1}{r} \left[\hat{\sigma}_2 \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) \right] + \frac{M}{\pi r^3} \hat{\sigma}_1 \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right),$$

jest ujemna, jak to ma miejsce w przypadku gdy $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, można spodziewać się, że swobodna powierzchnia cieczy będzie się podnosić od cylindra wewnętrznego do zewnętrznego. Natomiast warunek

$$(6.2) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial r} > 0,$$

który jest spełniony tylko wtedy, gdy funkcje naprężeń normalnych nie są tożsamościowo równe zero, daje odwrotne pochylenie powierzchni swobodnej, powodując jak gdyby «wpełzanie» cieczy na powierzchnię cylindra wewnętrznego.

Dla przepływu Poiseuille'a, oznaczając przez $\Gamma = p_0 + T^{(rr)}|_{r=R}$ nadwyżkę ciśnienia atmosferycznego p_0 nad odpowiednim naciskiem $-T^{(rr)}|_{r=R}$ cieczy na ściankę rury, otrzymamy

$$(6.3) \quad \Gamma(z) = \rho[\psi(z) - \psi(0)] + fz + \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left[\hat{\sigma}_1 \left(\frac{fr}{2} \right) - 2\hat{\sigma}_2 \left(\frac{fr}{2} \right) \right] dr.$$

Jeśli funkcje naprężeń normalnych nie są tożsamościowo równe zero, $\Gamma(0)$ na wyjściu z rury może być różne od zera. W zależności od tego czy $\Gamma(0) < 0$ czy też $\Gamma(0) > 0$, otrzymamy zwiększenie lub zmniejszenie średnicy strugi cieczy. Można zatem oczekiwać, że zwiększenie średnicy nastąpi wtedy, gdy

$$(6.4) \quad 2\hat{\sigma}_2 \left(\frac{fr}{2} \right) - \hat{\sigma}_1 \left(\frac{fr}{2} \right) > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \frac{fr}{2} < \frac{fR}{2}.$$

7. Niektóre niewiskometryczne przepływy cieczy prostych

7.1. Wtórne przepływy w rurach. Dla ustalonego przepływu cieczy prostych przez rury, których przekroje nie są kołowo symetryczne, nie jest, w ogólnym przypadku, możliwe otrzymanie prostoliniowych linii prądu określonych następującym polem prędkości (por. [1]):

$$(7.1.1) \quad \mathbf{v} = v(\mathbf{p})\mathbf{k}, \quad v(\mathbf{p}) = 0 \text{ na konturze,}$$

gdzie \mathbf{k} jest jednostkowym wektorem w kierunku przepływu, a \mathbf{p} wektorem charakteryzującym położenie punktu materialnego na przekroju. Aby przepływ taki był możliwy, muszą być spełnione zależności

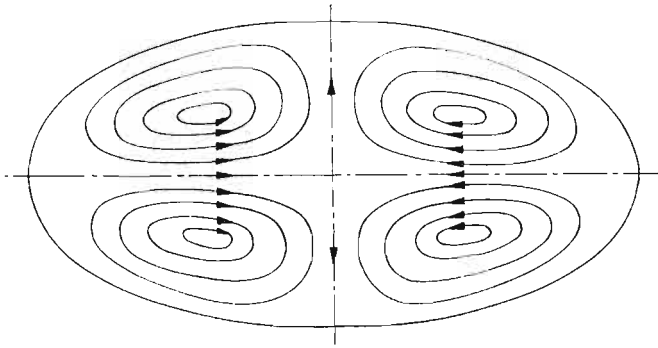
$$(7.1.2) \quad \operatorname{div}(\eta(z)\nabla v) = -a, \quad \nabla v \operatorname{div} \left(\frac{\sigma_1(z)}{z^2} \nabla v \right) + \nabla g = 0,$$

przy czym a jest stałą odpowiadającą gradientowi ciśnienia, zaś g pewną funkcją wektora \mathbf{p} . Ponieważ nie wszystkie rozwiązania (7.1.2)₁ spełniają (7.1.2)₂, przepływy prostoliniowe przez rury o przekroju niekołowym są dynamicznie możliwe tylko dla szczególnych przypadków cieczy (por. [31, 32]). Dotyczy to w szczególności liniowo lepkiej cieczy newtonowskich, dla których: $\eta(\kappa) = \eta_0 = \text{const}$, $\sigma_1 = 0$; cieczy drugiego stopnia (por. p. 9), dla których: $\eta(\kappa) = \eta_0 = \text{const}$, $\sigma_1 = \kappa^2 \cdot \text{const}$; cieczy Reiner–Rivlina (por. p. 8), itp.

Następnym krokiem w rozwinięciu teorii przepływów cieczy prostych przez rury o dowolnym przekroju jest rozważenie pola prędkości w postaci

$$(7.1.3) \quad \mathbf{v} = v(\mathbf{p})\mathbf{k} + \mathbf{u}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{v} = 0 \text{ na konturze,}$$

gdzie $\mathbf{u}(\mathbf{p})$ jest dodatkowym polem prędkości charakteryzującym tzw. *wtórne przepływy cieczy* w płaszczyźnie przekroju rury (por. [1]). Z punktu widzenia teorii, zagadnienie jest znacznie bardziej złożone i tylko przypadki niektórych szczególnych przekrojów dały się rozwiązać efektywnie.



Rys. 9. Schemat wtórnych przepływów w eliptycznym przekroju rury

RIVLIN i GREEN [32] oraz LANGLOIS i RIVLIN [33, 34] rozwiązali, na przykład, przepływ w rurze o przekroju eliptycznym, rozwijając pole $v(\mathbf{p})$ w szereg potęgowy według małych wartości gradientu ciśnienia a . Dla tego przekroju przepływ wtórny charakteryzuje się następującymi składowymi prędkości:

$$(7.1.4) \quad \begin{aligned} u_x &= -\frac{\delta}{\eta_0^5} a^4 A \left(\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{c^2} + \frac{5y^2}{b^2} - 1 \right) x + O(a^5), \\ u_y &= +\frac{\delta}{\eta_0^5} a^4 A \left(\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{5x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) y + O(a^5), \end{aligned}$$

przy czym δ oznacza stałą zależną od własności cieczy, a A — stałą zależną od wymiarów elipsy, której półosie wynoszą odpowiednio c i b . A zatem przepływy wtórne wywołane są w tym przypadku dopiero efektami czwartego rzędu, tj. proporcjonalnymi do a^4 , zaś kierunek przepływów zależy od znaku δ . Na rys. 9 przedstawiono schematycznie charakter przepływu wtórnego w przekroju eliptycznym dla $\delta > 0$; dla $\delta < 0$ kierunek zawirowań będzie przeciwny.

Inny charakter wtórnych przepływów obserwowano dla przypadku stożka i płyty oraz przepływu skręcającego (por. [2]). RIVLIN [35] podkreślił analogię, jaka może mieć miejsce

między laminarnymi przepływami cieczy nienewtonowskich i przepływami zaburzonymi klasycznymi cieczy Naviera–Stokesa.

7.2. Ustalony rozciąganie. Przypadek cieczy prostej w kształcie długiego walca (swobodna struga cieczy), poddanej prostemu ustalonymu rozciąganiu w kierunku osi, został rozważony przez COLEMANA i NOLLA [36], jako szczególny przypadek tzw. *przepływów ze stałą historią deformacji*.

Dla prostego ustalonego rozciągania równania na funkcję względnej deformacji w kartezjańskim układzie odniesienia są następujące:

$$(7.2.1) \quad \xi = \mathbf{x} \exp[\mathbf{D}(\tau - t)], \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}d & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}d \end{bmatrix}.$$

Prowadzą one do normalnych napięć na powierzchniach czołowych i powierzchni tworzącej walca w postaci

$$(7.2.2) \quad \begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2} \rho d^2 \left(\frac{1}{4} (r^2 - R^2) - \frac{1}{3} L^2 \right) + \frac{3}{2} d \hat{\lambda}_1 + \frac{3}{4} d^2 \hat{\lambda}_2, \\ t_L &= \frac{1}{2} \rho d^2 \left(\frac{1}{4} (r^2 - R^2) + \frac{2}{3} L^2 \right) + \frac{3}{2} d \hat{\lambda}_1 + \frac{3}{4} d^2 \hat{\lambda}_2, \\ t_R &= \frac{1}{2} \rho d^2 \left(z^2 - \frac{1}{3} L^2 \right), \end{aligned}$$

gdzie R i L oznaczają promień zewnętrzny i długość walca, zaś funkcje materiałowe $\hat{\lambda}_i$ zostały zdefiniowane następująco:

$$(7.2.3) \quad \hat{\lambda}_i = \lambda_i \left(\frac{\sqrt{6}}{2} d, \frac{d^3}{4} \right), \quad i = 1, 2.$$

Jak widać z (7.2.2), nawet przy pominięciu efektów inercyjnych, własności cieczy w rozważanym typie przepływu zależą tylko od dwóch funkcji materiałowych niezależnych od poprzednio zdefiniowanych funkcji wiskometrycznych τ , σ_1 i σ_2 (por. p. 4). Można również stwierdzić (por. [1]), że w doświadczeniach z prostym ustalonym rozciąganiem nie daje się odróżnić klasy cieczy prostych od czysto lepkich cieczy Reiner–Rivlina (por. p. 8).

8. Klasyfikacja cieczy nienewtonowskich

Pozostawiając na uboczu naszych rozważań ciecze nienewtonowskie nieproste lub ciecze posiadające wewnętrzną strukturę (ciecze anizotropowe, ciekłe kryształy, podciecze, ciecze wielobiegunowe itp.), można pokazać, że większość stosowanych w literaturze typów równań konstytutywnych stanowi szczególne przypadki nieściśliwych cieczy prostych. Równania takie otrzymuje się bądź przez właściwie potraktowany proces aproksymacji, bądź też przez postulowanie związków między naprężeniem i odpowiednimi parametrami

kinematycznymi. W niniejszym punkcie omówimy tylko najważniejsze typy równań konstytutywnych cieczy nieściśliwych, dla których dalsze szczegóły można znaleźć w obszernej monografii TRUESDELLA i NOLLA [1].

W założeniu, że tylko bardzo krótka historia gradientu deformacji jest istotna, można zażądać, aby tensor naprężenia zależał od n kolejnych pochodnych czasowych gradientu deformacji. Takie rozumowanie doprowadziło RIVLINA i ERICKSENA [37] do sformułowania ogólnych równań *cieczy nieściśliwej typu różniczkowego* w postaci

$$(8.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \eta(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n),$$

gdzie

$$(8.2) \quad \mathbf{A}_n = \left. \frac{d^n}{d\tau^n} \mathbf{C}_t(\tau) \right|_{\tau=t}, \quad \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)^T \mathbf{F}_t(\tau),$$

oznaczają tensory kinematyczne Rivlina–Ericksena. Zaslugą RIVLINA i SPENCERA [38, 39] było wyprowadzenie twierdzeń o reprezentacji funkcji tensorowej η w zależności od tensorów \mathbf{A}_n i ich wspólnych niezmienników (por. [1]). Dla *ustalonych przepływów wiskometrycznych*, dla których $\mathbf{A}_k = 0$ dla $k \geq 3$ (por. [1]), otrzymamy

$$(8.3) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 + \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \\ + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2),$$

gdzie α_i ($i = 1, \dots, 8$) są funkcjami niezmienników utworzonych z tensorów \mathbf{A}_1 i \mathbf{A}_2 . Związek między zdefiniowanymi w p. 4 funkcjami wiskometrycznymi i współczynnikami α_i jest następujący:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} \eta(\kappa) &= \alpha_1 + 2\kappa^2 \alpha_5 + 4\kappa^4 \alpha_7, \\ \sigma_1(\kappa) &= \kappa^2 (2\alpha_2 + \alpha_3 + 4\kappa^2 \alpha_4 + 4\kappa^2 \alpha_6 + 8\kappa^4 \alpha_8), \\ \sigma_2(\kappa) &= \kappa^2 \alpha_3. \end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, gdy równanie konstytutywne przedstawia związek tensora naprężenia i jego p kolejnych pochodnych czasowych z gradientem deformacji i jego r kolejnymi pochodnymi po czasie, mamy do czynienia z *cieczami typu prędkościowego*. Równanie cieczy typu prędkościowego może być wyrażone w postaci (por. [1])

$$(8.5) \quad \overset{(p)}{\mathbf{T}} = \eta(\overset{(1)}{\mathbf{T}}, \overset{(1)}{\mathbf{T}}, \dots, \overset{(p-1)}{\mathbf{T}}; \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r),$$

gdzie litera p u góry symbolu oznacza odpowiednio zdefiniowany (por. [1, 40]) p -ty strumień (uogólnioną obiektywną pochodną po czasie). W klasie cieczy typu prędkościowego¹⁾ mieszczą się *ciecze sprężysto-lepkie* rozważane przez OLDROYDA [18]. Ich równania konstytutywne w postaci

$$(8.6) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{P} + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \mathbf{P} - \mu_1 (\mathbf{P}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{P}) = 2\eta_0 \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{D}{Dt} \mathbf{D} - \mu_2 \mathbf{D}^2 \right),$$

¹⁾ Równanie w postaci (8.5) może równie dobrze definiować ciecz jak i ciało stałe, w zależności od warunków symetrii i warunków początkowych (por. [1]).

zawierają pięć stałych materiałowych $\lambda_1, \mu_1, \eta_0, \lambda_2, \mu_2$ oraz różnią się odpowiednio kowariantną (typ *A*) i kontrawariantną (typ *B*) reprezentacją tensora $\mathbf{P}^{(1)}$.

W założeniu, że funkcjonal konstytutywny cieczy prostej może być wyrażony w postaci sumy szeregu całek wielokrotnych, GREEN i RIVLIN [42] zbudowali teorię *cieczy typu całkowego*; była to zresztą najwcześniejsza teoria ogólna uwzględniająca złożone efekty pamięci ośrodka. Dla *cieczy typu całkowego rzędu drugiego* otrzymuje się

$$(8.7) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \int_0^\infty \zeta(s) \mathbf{G}(s) ds + \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \alpha(s_1, s_2) [\text{tr} \mathbf{G}(s_1)] \mathbf{G}_2(s_2) + \\ + \beta(s_1, s_2) \mathbf{G}(s_1) \mathbf{G}(s_2) \} ds_1 ds_2,$$

przy czym $\mathbf{G}(s)$ zdefiniowano wzorem (3.14), zaś ζ, α i β noszą charakter funkcji materiałowych. Szczególnymi przypadkami cieczy typu całkowego (rzędu pierwszego) są ciecze spełniające równania *skończonej liniowej lepkosprężystości* [por. (8.9)] oraz *infinitesimalnej liniowej lepkosprężystości* (równania Boltzmanna). Zasługą COLEMANA i NOLLA [43] jest pokazanie racjonalnego przejścia od koncepcji cieczy prostych do koncepcji klasycznych cieczy lepkosprężystych.

Możliwa jest oczywiście teoria *cieczy typu mieszanego*, tj. *całkowo-różniczkowego* (por. [1]), chociaż nie znalazła ona szerszego praktycznego zastosowania.

Opracowane przez COLEMANA i NOLLA [21] metody asymptotycznej aproksymacji funkcjonałów konstytutywnych, spełniających zasadę zanikającej pamięci w sensie mocnym (por. p. 3), dały początek całemu szeregowi równań konstytutywnych opisujących różne podklasy cieczy prostych.

Równania *cieczy prostej rzędu n* (por. [1]) można zapisać w postaci następującej:

$$(8.8) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \sum_{t=1}^n \mathfrak{B}_t(\mathbf{G}(s)),$$

w której \mathfrak{B}_t oznacza ograniczony funkcjonal wielomianowy stopnia t . Dla $n = 1$, po wykorzystaniu twierdzenia o całkowitej reprezentacji funkcjonału liniowego, otrzymamy równania

$$(8.9) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \int_0^\infty \mathbf{K}(s) [\mathbf{G}(s)] ds, \quad \int_0^\infty |\mathbf{K}(s)|^2 h(s)^2 ds < \infty,$$

odpowiadające *skończonej liniowej lepkosprężystości*.

Stosując do funkcji historii deformacji $\mathbf{G}(s)$ proces retardacji (por. [21]), polegający na następującej zmianie skali czasu:

$$(8.10) \quad \mathbf{G}^\alpha(s) = \mathbf{G}(\alpha s), \quad 0 < \alpha < 1,$$

gdzie czynnik retardacji α charakteryzuje «spowalnianie» przepływu²⁾, uzyskuje się równania *cieczy typu różniczkowego stopnia n*

$$(8.11) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \sum_{(j_1 \dots j_n)} [j_1 \dots j_n] [\mathbf{A}_{j_1} \dots \mathbf{A}_{j_n}] + o(\alpha^n) \\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \dots j_n \leq n, \quad j_1 + j_2 + \dots + j_n \leq n,$$

¹⁾ Ich uogólnienie na efekty pamięci (typ *A'* i *B'*) zostało przedstawione przez Waltersa (por. [41]).

²⁾ Podobne wyniki można uzyskać stosując zaproponowane przez Rivlina [44] rozwinięcie prędkości w szereg potęgowy: $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}_1 + \alpha^2 \mathbf{v}_2 + \dots$

równoważne w pewnym sensie równaniom (8.1). $\cdot_{j_1 \dots j_i} [\]$ oznacza tutaj t -liniową formę, a znak sumy rozciąga się na wszystkie zbiory $(j_1 \dots j_i)$ spełniające wymienione warunki. W szczególności dla $n = 0$ mamy ciecz idealną, zaś dla $n = 1$ ciecz newtonowską opisaną równaniem (2.2).

W celu dalszej ilustracji rozważmy *ciecz typu różniczkowego stopnia czwartego*, dla której pełna reprezentacja wynosi

$$(8.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{1} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4, \\ \mathbf{S}_1 &= \eta_0 \mathbf{A}_1, \\ \mathbf{S}_2 &= \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2, \\ \mathbf{S}_3 &= \beta_1 \mathbf{A}_3 + \beta_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_3 (\text{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1, \\ \mathbf{S}_4 &= \gamma_1 \mathbf{A}_4 + \gamma_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1) + \gamma_3 \mathbf{A}_2^2 + \gamma_4 (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2) + \gamma_5 (\text{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_2 + \\ &\quad + \gamma_6 (\text{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1^2 + [\gamma_7 \text{tr} \mathbf{A}_3 + \gamma_8 \text{tr} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)] \mathbf{A}_1, \end{aligned}$$

przy czym współczynniki α_i , β_i , γ_i są stałymi materiałowymi. Dla ustalonych przepływów wiskometrycznych mamy (por. [1])

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \eta(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \tau(\kappa) = \eta_0 + 2(\beta_2 + \beta_3) \kappa^2 + o(\kappa^3), \\ \sigma_1(\kappa) &= (2\alpha_1 + \alpha_2) \kappa^3 + [4(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) + 2\gamma_6] \kappa^4 + o(\kappa^4), \\ \sigma_2(\kappa) &= \alpha_2 \kappa^2 + 2\gamma_6 \kappa^4 + o(\kappa^4), \end{aligned}$$

a zatem odpowiednia funkcja lepkości określona jest równaniami (8.12) z dokładnością do członów $o(\kappa^3)$, podczas gdy funkcje naprężeń normalnych z dokładnością do członów $o(\kappa^4)$.

Przypadek *cieczy stopnia drugiego*, szeroko stosowany w rozwiązaniach różnych zagadnień konkretnych, otrzymamy zachowując w (8.12) tylko \mathbf{S}_1 i \mathbf{S}_2 (por. [1])

$$(8.14) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \eta_0 \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2, \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}.$$

Jest to najprostsze uogólnienie równań konstytutywnych cieczy newtonowskiej prowadzące do efektów naprężeń normalnych (por. p. 9).

Równanie (8.14) jest w literaturze stosowane i rozumiane jako przybliżenie cieczy prostej dla wystarczająco powolnych przepływów i jako opisujące pewien idealny model cieczy dla dowolnych przepływów; ten drugi sposób podejścia może prowadzić jednak do wyników niezadawalających (por. p. 9).

Osobną pozycję w teorii cieczy nienewtonowskich zajmują równania, wspomnianej już, *nieściśliwej cieczy lepkiej Reiner-Rivlina* (por. [1]), mianowicie

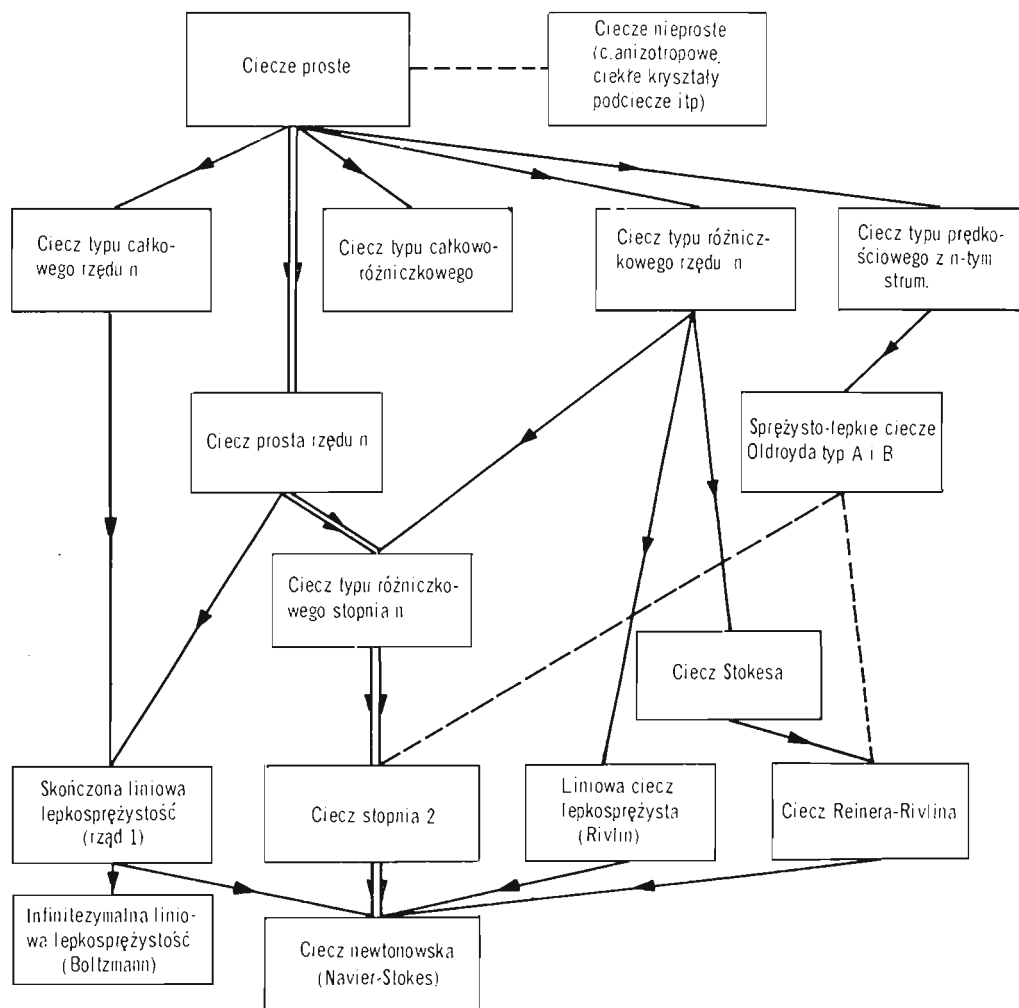
$$(8.15) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mu_1 \mathbf{D} + \mu_2 \mathbf{D}^2, \quad \mathbf{D} = 1/2 \mathbf{A}_1,$$

gdzie μ_1 i μ_2 są dowolnymi funkcjami niezmienników $\text{tr} \mathbf{D}^2$, $\text{tr} \mathbf{D}^3$ ($\text{tr} \mathbf{D} \equiv 0$). Ciecze tego typu doczekały się obszernej literatury teoretycznej i doświadczalnej, chociaż z uwagi na następujące zależności dla ustalonych przepływów wiskometrycznych:

$$(8.16) \quad \begin{aligned} \eta(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \tau(\kappa) = \frac{1}{2} \mu_1 \left(\frac{1}{4} \kappa^2, 0 \right), \\ \sigma_1(\kappa) &= \sigma_2(\kappa) = \frac{1}{4} \kappa^2 \mu_2 \left(\frac{1}{4} \kappa^2, 0 \right), \end{aligned}$$

nie mogą właściwie opisywać zachowania się licznych cieczy nienewtonowskich, dla których $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Zależności między poszczególnymi klasami cieczy, omówionymi w niniejszym punkcie, zostały schematycznie przedstawione na rys. 10. Należy pamiętać, że linie łączące różne typy cieczy ilustrują formalnie istniejące związki, nie precyzując wcale założeń, których spełnienia wymagają odpowiednie przejścia.



Rys. 10. Klasyfikacja cieczy nienewtonowskich na tle cieczy prostych

Trzeba również dodać, że przedstawiona klasyfikacja nie wyczerpuje wszystkich możliwości opisu cieczy nienewtonowskich i zawiera tylko najbardziej racjonalną ich część. Pominięto, na przykład, tzw. teorie *sprężystych* cieczy, o których była mowa w p. 2. Pominięto również ciecze opisywane *prawem potęgowym* (por. np. [4]), którego nie można uznać za słuszne z teoretycznego punktu widzenia z uwagi na nieobiektywność sformuło-

wania, niemożność opisanego efektów naprężeń normalnych, ograniczenie do zagadnień jednowymiarowych itp.

9. Niektóre rozwiązania dla cieczy drugiego stopnia

Jak już wspominaliśmy w punkcie poprzednim, równania cieczy drugiego stopnia (8.14) były szeroko stosowane do rozwiązań zagadnień konkretnych. Ich stosunkowa prostota (stałe współczynniki materiałowe) pozwoliła przeanalizować pewne przypadki przepływów nieustalonych — niemożliwe do rozwiązania dla bardziej ogólnych teorii (por. [1]).

Dla *nieustalonego prostego przepływu ścinającego* (por. p. 4), w założeniu zerowych sił masowych, otrzymamy równanie następujące:

$$(9.1) \quad \eta_0 \partial_{xx} v + \alpha_1 \partial_{xtx} v = \rho \partial_t v,$$

różniące się od równania parabolicznego teorii klasycznej mieszaną pochodną cząstkową trzeciego rzędu.

Jego szczególne rozwiązanie dla fal harmoniczych w postaci

$$(9.2) \quad v = V e^{-ax} \cos(\omega t - bx),$$

gdzie a i b są określonymi funkcjami $\xi = \alpha_1 \omega / \eta_0$, zostało przeanalizowane przez TRUESDELLA [45]. Wykazał on m.in., że dla $\alpha_1 > 0$, tłumienie a jest monotoniczną funkcją ξ i osiąga granicę $(\rho/\alpha_1)^{1/2}$ przy $\xi \rightarrow \infty$; natomiast dla $\alpha_1 < 0$ ¹⁾, a najpierw wzrasta z częstotliwością, osiągając maksimum równe $-\rho/8\alpha_1$ przy $\omega = \rho\eta_0/8 \sqrt[3]{\alpha_1^2}$, a następnie asymptotycznie opada do zera. A zatem dla $\alpha_1 < 0$ przy dużych częstotliwościach zaburzenia propagują się nieznacznie zmniejszone. W każdym przypadku niezerowa wartość α_1 redukuje zdolność cieczy do ścinania, lecz pozwala na propagację zaburzeń na większą odległość.

Rozważono również *drżania cieczy zawartej między koncentrycznymi cylindrami*, z których wewnętrzny jest nieruchomy, zaś zewnętrzny oscyluje wzdłuż osi z częstotliwością ν (por. [1]). Różnica między naprężeniami promieniowymi na ściankach cylindrów wynosi w przybliżeniu

$$(9.3) \quad \Delta T^{(rr)} = (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{V^2}{gR_2^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}g \right) \cos^2 \nu t + O(g^2) \right],$$

$$g = (R_1 - R_2)/R_2 > 0.$$

Podobnie dla drgań skrętnych otrzymano

$$(9.4) \quad \Delta T^{(rr)} = -2\alpha_1 \frac{\Omega^2}{g} [1 + O(g)] \cos^2 \nu t.$$

Warto również zwrócić uwagę na *zagadnienie stateczności rozwiązania* równania (9.1) przedyskutowane przez COLEMANA, DUFFINA i MIZELA [46], z uwagi na dalsze konsekwencje dla stateczności przepływów ścinających (por. p. 11). Udowodnili oni, że dla $\alpha_1 < 0$ rozwiązanie szczególne (9.1) w postaci

$$(9.5) \quad v = A e^{a_n t} \sin \frac{n\pi}{d} x, \quad a_n = \frac{\eta_0 \pi^2 n^2}{(-\alpha_1)(\pi^2 n^2 - \sigma^2 d^2)}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\rho}{-\alpha_1}},$$

¹⁾ To jest przypadek obserwowany dla roztworów poliizobutyleny w cetanie [25]; porównaj także rozważania punktu 10, gdzie $\alpha_1 < 0$ z definicji.

spełniające warunki brzegowe: $v(0, t) = v(d, t) = 0$, jest nieograniczone, gdy $n > \sigma d/\pi$. Każde ograniczone rozwiązanie $v(x, t)$ liniowego równania (9.1) jest niestateczne w tym sensie, że istnieje nieograniczone rozwiązanie $v^*(x, t)$ z tymi samymi warunkami brzegowymi, co $v(x, t)$, lecz posiadające wartości początkowe $v^*(x, 0)$ różniące się dowolnie mało od wartości początkowych $v(x, 0)$. Ponieważ nieograniczone rozwiązania dla cieczy drugiego stopnia nie mają fizycznego znaczenia, należy albo założyć, że w pewnym momencie przepływy przestają być linearne (por. p. 7.1), albo też wyłączyć je z klasy «powolnych» przepływów w sensie retardacji (por. p. 8).

10. Ciecze z konwekcyjną sprężystością

Stwierdzając, że takie terminy, jak *ciecz niesprężysta*, *ciecz lepko-sprężysta* itp. nie posiadają zdefiniowanego jednoznacznie znaczenia oraz że różne teorie będące formalnym przeniesieniem własności ciał sprężystych na ciecze są niesłuszne (por. p. 2), dochodzimy do pytania czy koncepcji *sprężystości* cieczy można nadać właściwe racjonalne znaczenie.

Znaczenie takie posiada wprowadzona przez TRUESDELLA [47] definicja *cieczy z konwekcyjną sprężystością*, dla której konfiguracją odniesienia jest konfiguracja zajmowana przez punkt materialny w czasie $t-t^*$, przy czym t oznacza czas aktualny, zaś t^* jest stałą cieczy nazywaną *czasem charakterystycznym (response time)*. Równania konstytutywne tego szczególnego przypadku nieściśliwej cieczy prostej można zapisać w postaci (por. [48])

$$(10.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{B}_{t-t^*}(t)) = -p\mathbf{1} + \mathbf{g}(\mathbf{F}_{t-t^*}(t)) \\ \mathbf{B}_{t-t^*} = \mathbf{F}_{t-t^*} \mathbf{F}_{t-t^*}^T$$

Z uwagi na pewne ogólne związki, które obowiązują w ośrodkach sprężystych (por. [1]), funkcje wiskometryczne cieczy z konwekcyjną sprężystością muszą być związane następującą zależnością

$$(10.2) \quad \sigma_2(\kappa) - \sigma_1(\kappa) = t^* \kappa^2 \eta(\kappa).$$

Stąd widać, że dla przepływów wiskometrycznych równania takich cieczy mogą nie opisywać w sposób wystarczająco ogólny zachowania się cieczy prostych. Natomiast dla tej klasy przepływów wyniki przewidziane przez teorię cieczy drugiego stopnia są identyczne z wynikami dla teorii cieczy z konwekcyjną sprężystością, jeśli $t^* = -2\alpha_1/\eta_0^1$.

Jeśli historia względnego gradientu deformacji występującego w (10.1) jest analityczna, równania konstytutywne nieściśliwej cieczy z konwekcyjną sprężystością przyjmują postać alternatywną

$$(10.3) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + (\alpha + 2\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^*)^n}{n!} \mathbf{A}_n + \beta \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^*)^{m+n}}{m!n!} \mathbf{A}_m \mathbf{A}_n,$$

w której α i β są funkcjami następujących niezmienników tensorów Rivlina-Ericksena: $(t^*)^k \text{tr} \mathbf{A}_k$, $(t^*)^{k+l} \text{tr} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_l$. LOCKETT i ZAHORSKI [48] pokazali, że *nieściśliwa ciecz typu różniczkowego, w ustalonych przepływach wiskometrycznych, nie może być odróżniona od*

¹) Zgodnie z zasadą przyczynowości $t^* > 0$, a zatem $\alpha_1 < 0$; stanowi to, obok wyników doświadczalnych, jeszcze jedną motywację znaku stałej α_1 .

cieczy z uogólnioną postacią konwekcyjnej sprężystości. To samo odnosi się do nieściśliwych cieczy trzeciego stopnia w dowolnych przepływach i cieczy czwartego stopnia w dwuwymiarowych przepływach, jeśli tylko odpowiednie historie deformacji są analityczne.

Uogólnienie równania (10.1) na ciecze proste można otrzymać wprowadzając całe widmo charakterystycznych czasów t_i^* ($i = 1, \dots, n$) i przechodząc do zależności funkcjonalnej dla $n \rightarrow \infty$.

11. Stateczność przepływów ścinających

Zagadnienie stateczności przepływów cieczy nienewtonowskich posiada znaczenie nie tylko teoretyczne, ale i praktyczne, zwłaszcza w technologii polimerów, masy papierniczej itp. Towarzyszące takim przepływowi anomalie (przepływy wtórne, zjawisko Tomsa w przepływie zaburzonym, efektywny poślizg na ściankach, itp.) mogą mieć związek z utratą stateczności (np. [49]), chociaż nie istnieje jednolity pogląd, czy anomalie takie dadzą się wyjaśnić na gruncie teorii kontynualnych, czy też rozważań czysto strukturalnych. Na przykład, zjawisko Tomsa (por. [50]) — wyraźną redukcję oporów przepływu nawet dla bardzo rozcieńczonych roztworów polimerów w porównaniu z przepływem czystego rozpuszczalnika — niektórzy autorzy wiążą z takimi czy innymi własnościami sprężystymi cieczy (por. np. [51]), inni doszukują się głównych przyczyn w zjawisku poślizgu w warstwie przyściennej tworzącej się na skutek odpowiedniej orientacji struktury (por. np. [52]).

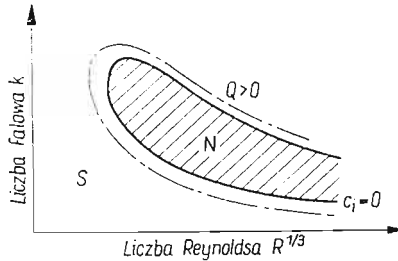
Ogólną teorię niestateczności wywołanej falami ścinania w ustalonych przepływach cieczy prostych przedstawili niedawno COLEMAN i GURTIN [53]. Stwierdzili oni m.in., że w obszarach poddanych ścinaniu amplitudy fal przyspieszenia mogą w sprzyjających warunkach dążyć do nieskończoności w skończonym przedziale czasu. Im większa jest prędkość ścinania, tym mniejsza jest krytyczna amplituda, której odwrotność zależy proporcjonalnie od chwilowego modułu drugiego rzędu zdefiniowanego przez drugą pochodną funkcjonalną od funkcjonału konstytutywnego (por. p. 3).

Krótki przegląd zagadnień stateczności dla płaskich ustalonych przepływów ścinających z określonymi warunkami brzegowymi zamieszczono w pracach [49, 54]; przedstawimy obecnie tylko niektóre wyniki.

Większość rozwiązanych przypadków dotyczy dwuwymiarowych zaburzeń nałożonych na płaski przepływ podstawowy (por. np. [55, 56, 57, 58]), co wobec nieistnienia odpowiednika twierdzenia Squire'a dla cieczy nienewtonowskich ogranicza ich znaczenie. Okazuje się bowiem, że obszar stateczności dla zaburzeń trójwymiarowych może nie zawierać się w analogicznym obszarze dla zaburzeń dwuwymiarowych (por. [59, 60]).

W zagadnieniach płaskich przepływów cieczy ze swobodną powierzchnią rozróżnia się dwa rodzaje fal zaburzenia: raczej krótkie fale ścinania o dużej częstości i długie fale powierzchniowe propagujące się stosunkowo wolno (por. [61]). Dla cieczy typu różniczkowego drugiego lub wyższego stopnia, rozważenie fal ścinania prowadzi zawsze do niestateczności przepływu lub fizycznie niedopuszczalnych wniosków (por. [57, 62]), co jest konsekwencją przybliżonego charakteru równań konstytutywnych (por. p. 8). Uniknąć tego można przez właściwie uwzględnioną pamięć ośrodka.

Rozwiązania zagadnień stateczności dla *plaskich przepływów Poiseuille'a* (np. [55, 58]) oraz dla *warstw cieczy spływających po nachylnych płaszczyznach* (np. [56, 57]) wykazują raczej destabilizujący charakter parametrów odpowiedzialnych za *sprężyste* lub *lepko-sprężyste* własności cieczy drugiego stopnia, cieczy sprężysto-lepkich typu Oldroyda itp. (por. rys. 11, 12).

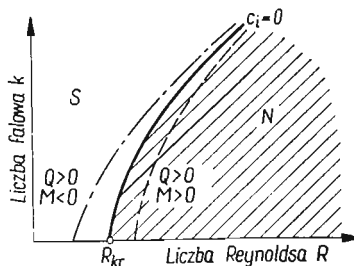


Rys. 11. Krzywa neutralnej stateczności dla płaskiego przepływu Poiseuille'a. *S* — obszar stateczności, *N* — obszar niestateczności

Rozważania przeprowadzone przez ZAHORSKIEGO [49] nad nieściśliwą cieczą z konwekcyjną sprężystością stopnia trzeciego (por. p. 10), spływającą po płaszczyźnie nachylonej pod kątem ϑ do poziomu, doprowadziły do następującej krytycznej liczby Reynoldsa dla zaburzeń powierzchniowych:

$$(11.1) \quad R_{kr}/\text{ctg } \vartheta = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} M + \frac{15}{7} M^2 \right) \left[\left(\frac{2}{15} - \frac{62}{105} M + \frac{128}{45} M^2 \right) + \right. \\ \left. + Q \left(\frac{1}{3} - \frac{11}{15} M + \frac{417}{80} M^2 \right) \right]^{-1},$$

gdzie parametr $Q > 0$ reprezentuje *sprężyste* własności cieczy (Q jest proporcjonalny do stałej α_1 dla cieczy drugiego stopnia), zaś mały parametr M określa w przybliżeniu zmianę



Rys. 12. Krzywa neutralnej stateczności fal powierzchniowych dla płaskiego przepływu po nachylonej płaszczyźnie. *S* — obszar stateczności, *N* — obszar niestateczności, R_{kr} — punkt bifurkacji

lepkości w zależności od prędkości ścinania. Dla $M > 0$, można spodziewać się efektów stabilizujących, zwłaszcza dla silnie spłaszczonych profili prędkości i większych grubości warstwy.

Zagadnienia utraty stateczności znacznie się komplikują dla *dwuwarstwowych przepływów po nachylonej płaszczyźnie*, wykazując różnorodny wpływ parametrów charakteryzujących

rozwarstwienie gęstości i lepkości (por. [63, 64]). W pracy [54], w oparciu o pewne wyniki KAO [65], wykazano, m.in., że dla fal powierzchniowych w dwuwarstwowym przepływie cieczy z konwekcyjną sprężystością stopnia drugiego, krytyczna liczba Reynoldsa wyraża się następująco:

$$(11.2) \quad R_{1kr}/ctg \vartheta = m[F(\delta, m) + Q_1 \tau^*]^{-1},$$

gdzie F jest pewną znaną funkcją parametrów δ i m określających odpowiednio stosunek grubości i lepkości warstwy dolnej do górnej, a Q_1 charakteryzuje wpływ własności *sprężystych*. Stabilizujący lub destabilizujący (w porównaniu z warstwą jednorodną) wpływ tych własności zależy istotnie od wielkości τ^* definiującej stosunek czasów charakterystycznych (por. p. 10) w cieczy dolnej i górnej. Pomimo dość złożonego obrazu zjawiska, *można spodziewać się efektu stabilizującego, gdy $\tau^* < 0$, tj. dla bardziej sprężystej warstwy górnej*. Odpowiadałoby to z grubsza rzecz biorąc roli jaką odgrywają zanieczyszczenia powierzchniowe (por. [66]) i rozwarstwienie cieczy obserwowane przy przepływach rozтворów i stopów polimerów oraz bardzo drobnych zawiesin (por. [67, 68]).

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik*, vol. III/3 Berlin-Heidelberg-New York 1965.
2. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
3. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London-New York 1964.
4. W. L. WILKINSON, *Non-Newtonian Fluids*, London-Oxford-New York-Paris 1960.
5. *Rheology, Theory and Applications*, vol. 1 i 2. Pod red. F. R. EIRICHA, New York 1956 i 1958.
6. M. REINER, *Rheology, Handbuch der Physik*, vol. VI, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
7. JOHN D. FERRY, *Lepkosprężystość polimerów*, Warszawa 1965.
8. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Warszawa 1963.
9. F. H. GARNER, A. H. NISSAN, *Rheological properties of high-viscosity solutions of long molecules*, *Nature*, **158** (1946) 634-635.
10. K. WEISSENBERG, *A continuum theory of rheological phenomena*, *Nature*, **159** (1947), 310-311.
11. G. F. WOOD, A. H. NISSAN, F. H. GARNER, *Viscosity of soap-in-hydrocarbon systems*, *J. Inst. Petroleum*, **33** (1947), 71-102.
12. K. WEISSENBERG, *Abnormal substances and abnormal phenomena of flow*, *Proc. Int. Congr. Rheol.*, (1948); I, 1949, 29-46.
13. C. BARUS, *Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity*, *Amer. J. Sci.*, **45** (1893), 87-96.
14. A. C. MERRINGTON, *Measurements of anomalous viscosity by the capillary tube method*, *Nature*, **152** (1943), 214-215.
15. *Man-Made Fibers. Science and Technology*, vol. 1. Pod red. H. F. MARKA, G. M. ATLASA i E. CERNII, New-York-London-Sydney 1967.
16. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2** (1958), 197-226.
17. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Simple fluids with fading memory*, *Proc. Int. Symp. Second-order Effects*, Haifa (1962), New York 1964, 530-552.
18. J. G. OLDROYD, *On the formulation of rheological equations of state*, *Proc. Roy. Soc.*, **A200** (1950), 523-541.
19. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17** (1964), 1-46.

20. C. C. WANG, *A general theory of subfluids*, Arch. Rational Mech. Anal., **20** (1965), 1–40.
21. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **6** (1960), 355–370.
22. B. D. COLEMAN, *Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic fluids*, Arch. Rational Mech. Anal., **9** (1962), 273–300.
23. H. MARKOVITZ, *Normal stress functions from Couette flow measurements*, J. Polymer Sci., **B3** (1965), 3–5.
24. K. WEISSENBERG, *Specification of rheological phenomena by means of a rheogoniometer*, Proc. Int. Congr. Rheol., (1948), II, 1949, 114–118.
25. H. MARKOVITZ, D. R. BROWN, *Normal stress measurements on a polyisobutylene-cetane solutions in parallel plate and cone plate instruments*, Proc. Int. Symp. Second-order Effects, Haifa (1962), New York 1964, 585–602.
26. A. JOBLING, J. E. ROBERTS, *An investigation, with the Weissenberg rheogoniometer, of the stress distribution in flowing polyisobutylene solutions at various concentrations and molecular weights*, J. Polymer Sci., **36** (1959), 433–441.
27. H. W. GREENSMITH, R. S. RIVLIN, *Measurements of the normal stress effect in solutions of polyisobutylene*, J. Amer. Chem. Soc., **73** (1951), 1901–1904.
28. H. MARKOVITZ, *Normal stress measurements on polymer solutions*, Proc. Int. Congr. Rheol., **1** (1963), New York 1965, 189–212.
29. H. MARKOVITZ, *The normal stress effect in steady torsional flow, predicted and experimental values*, Phys. Fluids, **8** (1965), 200.
30. J. W. HAYES, R. I. TANNER, *Measurements of the second normal stress difference in polymer solutions*, Proc. Int. Congr. Rheol., **3**, (1963), New York 1965, 389–399.
31. J. E. ERICKSEN, *Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-Newtonian fluids*, Quart. Appl. Math., **14** (1956) 318–321.
32. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes*, Quart. Appl. Math., **14** (1956), 299–308.
33. W. E. LANGLOIS, R. S. RIVLIN, *Slow steady-state flow of viscoelastic fluids through non-circular tubes*, Rend. Mat., **22** (1963), 164–185.
34. R. S. RIVLIN, *Second and higher order theories for the flow of a viscoelastic fluid in a non-circular pipes*, Proc. Int. Symp. Second-order Effects, Haifa (1962), New York 1964, 668–677.
35. R. S. RIVLIN, *The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids*, Quart. Appl. Math., **15** (1957), 212–215.
36. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Steady extension of incompressible simple fluids*, Phys. Fluids, **5** (1962), 840–843.
37. R. S. RIVLIN, J. E. ERICKSEN, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., **4** (1955), 323–425.
38. A. J. M. SPENCER, R. S. RIVLIN, *The theory of matrix polynomials and application to the mechanics of isotropic continua*, Arch. Rational Mech. Anal., **2** (1959), 309–336.
39. A. J. M. SPENCER, R. S. RIVLIN, *Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3×3 matrices*, Arch. Rational Mech. Anal., **2** (1959), 435–446.
40. Z. MOSSAKOWSKA, A. WESOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, *Niezmienniczość w mechanice kontinuum materialnego*, Metody Geometryczne w Fizyce i Technice, Warszawa 1968, 241–261.
41. K. WALTERS, *The solution of flow problems in the case of materials with memory*, I, J. Mécanique, **1** (1962), 469.
42. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, Arch. Rational. Mech. Anal., **1** (1957), 1–21.
43. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Rev. Modern Phys., **33** (1961), 239–249.
44. R. S. RIVLIN, *Viscoelastic fluids*, Brown University Report, Div. Appl. Math., 1963.
45. C. TRUESDELL, *The natural time of a visco-elastic fluid: its significance and measurement*, Phys. Fluids, **7** (1964), 1134–1142.
46. B. D. COLEMAN, R. J. DUFFIN, V. J. MIZEL, *Instability, uniqueness, and non-existence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip*, Arch. Rational Mech. Anal., **19** (1965), 100–116.

47. C. TRUESDELL, *Fluids of the second grade regarded as fluids of convected elasticity*, Phys. Fluids, **8** (1965), 1936-1938.
48. F. J. LOCKETT, S. ZAHORSKI, *On fluids with convected elasticity*, The National Physical Laboratory Report, Ma. 71. April 1968.
49. S. ZAHORSKI, *Instability depending on elastic properties of fluids in plane steady shearing flows*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969).
50. J. L. LUMLEY, *The Toms phenomenon: anomalous effects in turbulent flow of dilute solutions of high molecular weight linear polymers*, Appl. Mech. Rev., **20** (1967), 1139-1149.
51. A. B. METZNER, M. G. PARK, *Turbulent flow characteristics of viscoelastic fluids*, J. Fluid Mech., **20** (1964), 291-303.
52. P. S. VIRK, E. W. MERRIL, H. S. MICKLEY, K. A. SMITH, E. L. MOLLO-CHRISTENSEN, *The Toms phenomenon: turbulent flow of dilute polymer solutions*, J. Fluid Mech., **30** (1967), 305, 328.
53. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *On the stability against shear waves of steady flows in non-linear viscoelastic fluids*, J. Fluid Mech., **33** (1968), 165-181.
54. S. ZAHORSKI, *Role of elasticity stratification in two-layer flows down an inclined plane*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969) (w druku).
55. C. F. CHAN MAN FONG, K. WALTERS, *The solution of flow problems in the case of materials with memory. II. The stability of plane Poiseuille flow of slightly viscoelastic liquids*, J. Mécanique, **4** (1965), 439-553.
56. C. S. YIH, *Stability of a non-newtonian liquid film flowing down an inclined plane*, Phys. Fluids, **8** (1965), 1257-1262.
57. A. S. GUPTA, *Stability of a viscoelastic liquid film flowing down an inclined plane*, J. Fluid Mech., **28** (1967), 17-28.
58. D. H. CHUN, W. H. SCHWARZ, *Stability of a plane Poiseuille flow a second order fluid*, Phys. Fluids, **11** (1968), 5-9.
59. A. T. ЛИСТРОВ, *Об устойчивости параллельных течений неньютоновских сред*, ДАН СССР, **164** (1965), 1001-1004.
60. F. J. LOCKETT, *On the Squire's theorem*, Proc. Int. Congr. Rheol., Kyoto (1968), w druku.
61. C. S. YIH, *Stability of liquid flow down an inclined plane*, Phys. Fluids, **6** (1963), 321-334.
62. A. D. D. CRAIK, *A note on the static stability of an elasticoviscous fluid*, J. Fluid Mech., **33** (1968), 33-38.
63. T. W. KAO, *Stability of two-layer viscous stratified flow down an inclined plane*, Phys. Fluids, **8** (1965), 812-820.
64. C. S. YIH, *Instability due to viscosity stratification*, J. Fluid Mech., **27** (1968), 337-352.
65. T. W. KAO, *Role of viscosity stratification in the stability of two layer flow down an incline*, J. Fluid Mech., **33** (1968), 561-572.
66. T. B. BENJAMIN, *Effects of surface contamination on wave formation in falling liquid films*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 615-626.
67. B. A. TOMS, *Detection of a wall effect in laminar flow of solutions of linear polymers*, J. Colloid Sci., **4** (1949), 511-521.
68. J. J. BENBOW, R. V. CHARLEY, P. LAMB, *Unstable flow of molten polymers*, Nature, **192** (1961), 223-225.

Резюме

НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ЖИДКОСТИ В СВЕТЕ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Возрастающий интерес к неньютоновским жидкостям, механические свойства которых значительно отличаются от свойств классических жидкостей, тесно связан с научными и промышленными нуждами. В настоящей работе дается обзор наиболее существенных теоретических и экспериментальных результатов, полученных на основе механики сплошных сред. Многочисленные вопросы как напр. структурные методы, термодинамика и теплопередача, диффузия, возмущенное течение и др. не вошли в обзор наравне с вопросами инфинитезимальной вязкоупругости.

В начале работы представлены ограничения классической теории Навье-Стокса, которая справедлива лишь для ньютоновских жидкостей. Затем представлена более подробно теория несжимаемых простых жидкостей в применении к вискометрическим течениям. Обсуждаются также другие виды течений для упрощенных моделей жидкостей. В одном из дальнейших разделов представлена общая классификация жидкостей непосредственно, или косвенно, связанных с простыми жидкостями. Кратко рассмотрены т. наз. жидкости второго порядка и жидкости с конвективной упругостью. Наконец обсуждены некоторые вопросы устойчивости, особенно для случая плоских установившихся течений со сдвигом.

Summary

NON-NEWTONIAN LIQUIDS IN THE LIGHT OF CONTINUUM MECHANICS

The growing interest in non-Newtonian liquids, the mechanical behaviour of which considerably differs from that of classical liquids, remains in close connection with scientific and industrial purposes. The present paper gives a general survey of the most important results achieved so far on the basis of continuum mechanics. Many problems of more specialized validity, e.g. structural methods, thermodynamics and heat transfer, diffusion, turbulent flows etc., are not included into the survey as well as the problems of infinitesimal linear viscoelasticity.

The paper begins with presentation of some limitations of the classical theory of Navier-Stokes valid only to Newtonian liquids. Next, the theory of incompressible simple fluids as applied to the class of viscometri flows is developed in greater detail. Some other types of flows for simplified models are also discussed. A general classification of liquids directly or indirectly related to incompressible simple fluids is presented in one of further sections. So called fluids of the second grade and fluids with convected elasticity are briefly outlined. At the end of the paper some problems of stability are discussed, especially for the case of plane steady shearing flows.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1969 r.

SPOSÓB ELEKTRYCZNEGO MODELOWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH
ZWYCZAJNYCH I CZĄSTKOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH I CZŁONACH
RZĘDU PARZYSTEGO

ALEKSANDER LISOWSKI (KRAKÓW)

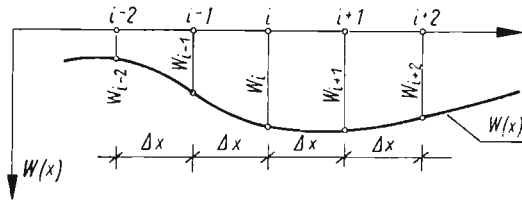
1. Ilorazy różnicowe

Dowolne równanie różniczkowe zwyczajne o postaci

$$a_n \frac{d^n w}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dw}{dx} + a_0 = 0$$

można, przy spełnieniu pewnych warunków, którymi nie będziemy się tutaj zajmowali, zastąpić równaniem różnicowym zamieniając różniczki na różnice skończone

$$a_n \frac{\Delta^n w}{\Delta x^n} + a_{n-1} \frac{\Delta^{n-1} w}{\Delta x^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{\Delta w}{\Delta x} + a_0 = 0.$$



Rys. 1. Oznaczenia punktów w metodzie różnic skończonych

W pracy niniejszej zajmiemy się modelowaniem dowolnych równań różnicowych o członach parzystych

$$(1.1) \quad a_n \frac{\Delta^n w}{\Delta x^n} + a_{n-2} \frac{\Delta^{n-2} w}{\Delta x^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + a_0 = 0,$$

gdzie n jest dodatnią liczbą parzystą.

Wyraźmy kolejne ilorazy różnicowe przez wartości funkcji w w okolicy punktu i , który przyjmujemy za centralny (dla którego pisać będziemy wyrażenia różnicowe). Oznaczając wartości funkcji w (zgodnie z oznaczeniem punktów na rys. 1, przyjmując odstępy zmiennej niezależnej $\Delta x = \text{const}$) w punkcie i przez w_i , a punktów sąsiednich przez w_{i-1} oraz w_{i+1} , otrzymamy pierwsze ilorazy różnicowe «w przód»

$$\frac{\Delta w_i}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (w_{i+1} - w_i),$$

albo ilorazy różnicowe centralne

$$(1.2) \quad \frac{\Delta w_i}{\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} (w_{i+1} - w_{i-1}).$$

Ilorazy różnicowe parzystego rzędu, które będą omawiane dalej, wyrażają się wzorami

$$(1.3) \quad a_2 \frac{\Delta^2 w_i}{\Delta x^2} = \frac{a_2}{\Delta x^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}),$$

$$(1.4) \quad a_4 \frac{\Delta^4 w_i}{\Delta x^4} = \frac{a_4}{\Delta x^4} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}),$$

$$(1.5) \quad a_6 \frac{\Delta^6 w_i}{\Delta x^6} = \frac{a_6}{\Delta x^6} (w_{i-3} - 6w_{i-2} + 15w_{i-1} - 20w_i + 15w_{i+1} - 6w_{i+2} + w_{i+3}),$$

$$(1.6) \quad a_8 \frac{\Delta^8 w_i}{\Delta x^8} = \frac{a_8}{\Delta x^8} (w_{i-4} - 8w_{i-3} + 28w_{i-2} - 56w_{i-1} + 70w_i - 56w_{i+1} + \\ + 28w_{i+2} - 8w_{i+3} + w_{i+4}).$$

2. Modelowanie członów równań różnicowych w sieci elektrycznej

Modelując np. człon różnicowy

$$(2.1) \quad a_n \frac{\Delta^n w}{\Delta x^n} + a_0 = \frac{a_n}{\Delta x^n} (w_{i-\frac{n}{2}} - \dots + w_{i+\frac{n}{2}}) + a_0$$

przyjmujemy następujące współczynniki przeniesienia analogii: współczynnik przeniesienia prądowego m_i

$$(2.2) \quad I_i^0 = a_0 m_i,$$

współczynnik przeniesienia napięciowego m_u

$$(2.3) \quad U_i = w_i m_u,$$

współczynnik przeniesienia oporności m_r

$$(2.4) \quad r_{i,i-1} = k \frac{\Delta x^n}{a_n} m_r,$$

gdzie I_i , U_i i $r_{i,i-1}$ oznaczają wielkości elektryczne, mianowicie I_i — natężenie prądu w amperach, U_i — napięcie w woltach oraz $r_{i,i-1}$ — opór w omach, a k — pewien współczynnik proporcjonalności.

Pomiędzy współczynnikami przeniesienia istnieje znany związek wynikły z prawa Ohma (patrz np. [3])

$$(2.5) \quad m_u = m_i m_r.$$

Przejdźmy do podania schematów sieci modelujących poszczególne ilorazy różnicowe.

2.1. Różnica rzędu drugiego. Równanie (1.3) może być łatwo modelowane w sieci elektrycznej. Rozpatrzmy układ podany na rys. 2. Wypiszmy warunek równowagi węzła i (pierwsze prawo Kirchhoffa) z uwzględnieniem występowania wyrazu wolnego

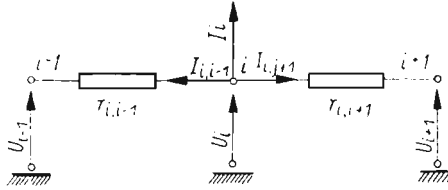
$$I_i = I_{i,i-1} + I_{i,i+1} + I_i^0 = 0.$$

Wyrażając prądy przez napięcia w węzłach sieci otrzymamy (zgodnie z prawem Ohma)

$$\frac{U_i - U_{i-1}}{r_{i,i-1}} + \frac{U_i - U_{i+1}}{r_{i,i+1}} + I_i^0 = 0,$$

a przyjmując stałą wartość oporów $r_{i,i-1} = r = \text{const}$, można napisać

$$(2.6) \quad \frac{1}{r} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) - I_i^0 = 0.$$



Rys. 2. Modelowanie różnicy rzędu drugiego w sieci elektrycznej

Jest oczywiste, że równanie (2.6) spełnia iloraz różnicowy drugiego rzędu (1.3), gdy przyjmie się podstawienie

$$r = \frac{\Delta x^2}{a_2} m_r, \quad U_i = w_i m_u \quad \text{oraz} \quad I_i^0 = a_0 m_i.$$

Odpowiednie zależności, które narzucają miana współczynników przeniesienia (w efekcie opór r musi być wyrażony w omach itd.) podane zostały w sposób ogólny we wzorach (2.2) do (2.5).

2.2. Różnica rzędu czwartego. Analizując równanie różnicowe dowolnego rzędu widzimy, że suma współczynników dodatnich i ujemnych jest sobie równa. Obecnie rozważane równanie nie da się zmodelować w ramach jednej siatki, gdyż łącząc bezpośrednio np. węzeł k z węzłem i otrzymamy wartość rzędu

$$I_{i,k} = \frac{U_i - U_k}{r_{ik}};$$

nie można więc uwzględnić różnych znaków funkcji w węzłach sąsiednich. Gdybyśmy jednak to zrobili według schematu podanego na rys. 3a, to otrzymamy

$$\Sigma I_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{r_{i,i-1}} + \frac{U_i - U_{i+1}}{r_{i,i+1}} + \frac{U_i - U_{i-2}}{r_{i,i-2}} + \frac{U_i - U_{i+2}}{r_{i,i+2}} = 0.$$

Czyniąc zadość równaniu (1.4), przyjmiemy

$$(a) \quad r_{i,i-2} = r_{i,i+2} = r \quad \text{oraz} \quad r_{i,i-1} = r_{i,i+1} = \frac{1}{4} r$$

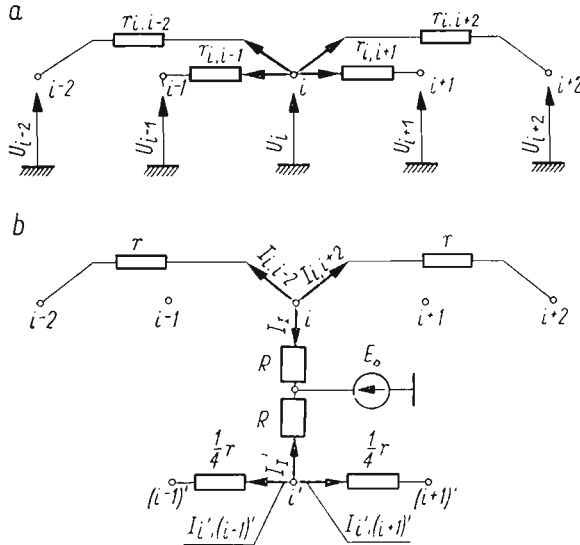
i otrzymamy

$$\frac{1}{r} (U_{i-2} + 4U_{i-1} - 10U_i + 4U_{i+1} + U_{i+2}) = 0.$$

W celu uwzględnienia ujemnych znaków przy niewiadomych U_{i-1} oraz U_{n+1} zastosować można układ dwóch siatek podany na rys. 3b (górnej i dolnej)¹.

Napiżmy warunek równowagi węzła i siatki górnej (oznaczenia bez indeksów)

$$(b) \quad \Sigma I_i = I_{i,i-2} + I_{i,i+2} + I_I = \frac{U_i - U_{i-2}}{r} + \frac{U_i - U_{i+2}}{r} + \frac{U_i - E_0}{R} \approx 0.$$



Rys. 3. Modelowanie różnicy rzędu czwartego w sieci elektrycznej

Odpowiednio warunek równowagi dla węzła i' siatki dolnej da zależność

$$\Sigma I_{i'} = I_{i',(i-1)'} + I_{i',(i+1)'} + I_{I'} = \frac{U_{i'} - U_{(i-1)'}}{\frac{1}{4}r} + \frac{U_{i'} - U_{(i+1)'}}{\frac{1}{4}r} + \frac{U_{i'} - E_0}{R} = 0,$$

a stąd

$$(c) \quad \frac{U_{i'} - E_0}{R} = - \left(\frac{4(U_{i'} - U_{(i-1)'})}{r} + \frac{4(U_{i'} - U_{(i+1)'})}{r} \right).$$

Przyjmujemy następnie, że odpowiednie potencjały węzłów siatki górnej i dolnej są sobie równe, czyli w rozważanym przypadku

$$(d) \quad U_{i'} = U_i, \quad U_{(i-1)'} = U_{i-1} \quad \text{oraz} \quad U_{(i+1)'} = U_{i+1}.$$

Podstawiając wyrażenie (c) do równania (b) z uwzględnieniem (d) otrzymamy

$$(2.7) \quad \frac{1}{r} (U_{i-2} - 4U_{i-1} + 6U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2}) = 0.$$

Widzimy zatem, że warunek analogii został spełniony².

¹) Sposób ten w zastosowaniu do równania biharmonicznego oraz równań przemieszczeniowych płaskiej teorii sprężystości podany jest np. w pracach [1, 3].

²) Wartość siły elektromotorycznej E_0 jest zasadniczo bez znaczenia. W praktyce regulujemy zmienną wartość zasilania napięciowego do tego momentu, aż oba potencjały siatki górnej i dolnej się wyrównają, co łatwo stwierdzić na woltomierzu.

Należy podkreślić, że w możliwościach modelowania równania różnicowego w sieci elektrycznej decydującą rolę odgrywa symetria współczynników względem punktu środkowego, dla którego jest to równanie wypisane oraz warunek, aby suma współczynników przy odpowiednich rzędnych funkcji w równaniu była równa zero. Jeżeli zatem można uzyskać właściwe wartości wszystkich współczynników dla punktów sąsiednich, to i wartość współczynnika dla punktu i musi być spełniona.

Wyjaśnione założenia pozwalają już bez trudu podać układ sieci elektrycznej spełniającej równanie różnicowe dowolnego parzystego rzędu.

2.3. Różnica rzędu szóstego. Uwzględniając znaki współczynników przy równaniu (1.5) od razu można powiedzieć, że do węzła i należy wziąć 1 i 1 dla węzła $i-2$, 2 i 1 dla

dla pozostałych połączeń otrzymamy

$$r_{i',(i-2)'} = r_{i',(i+2)'} = \frac{1}{6} r \quad \text{oraz} \quad r_{i,i-1} = r_{i,i+1} = \frac{1}{15} r.$$

Przyjęcie równych oporów R łączących węzły dolnej i górnej siatki konieczne jest dla spełnienia warunku równości prądów spływających z węzłów i oraz i' na masę.

2.4. Różnica rzędu ósmego. Uwzględniając wyżej podane objaśnienia od razu możemy przejść do modelowania równania (1.6) w sieć elektrycznej. Węzłami górnej siatki będą punkty $i-4$, $i-2$, i , $i+2$ oraz $i+4$, a wartość oporu

$$r_{i,i-4} = r_{i,i+4} = r = \frac{\Delta x^3}{a_8} m_r.$$

Połączenia węzłów siatki oraz wartości oporów podane zostały na rys. 5.

3. Modelowanie dowolnego równania różnicowego złożonego z członów rzędu parzystego

Rozważmy dla przykładu równanie różnicowe

$$(a) \quad a_6 \frac{\Delta^6 w_i}{\Delta x^6} + a_4 \frac{\Delta^4 w_i}{\Delta x^4} - a_2 \frac{\Delta^2 w_i}{\Delta x^2} + k w_i + a_0 = 0.$$

W równaniu powyższym oprócz członów rzędów parzystych dodano człon zawierający samą funkcję w_i . Z następującego rozważania okaże się, że ten dodatkowy człon łatwo jest zmodelować w sieci.

Równanie (a) z uwzględnieniem wartości poszczególnych członów (1.3)–(1.5) i uwzględnieniem znaków przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \frac{a_6}{\Delta x^6} (w_{i-3} - 6w_{i-2} + 15w_{i-1} - 20w_i + 15w_{i+1} - 6w_{i+2} + w_{i+3}) + \frac{a_4}{\Delta x^4} (w_{i-2} - 4w_{i-1} + \\ & + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}) - \frac{a_2}{\Delta x^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) + k w_i + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Po zgrupowaniu wyrazów otrzymamy

$$(b) \quad \begin{aligned} & w_{i-3} \frac{a_6}{\Delta x^6} - w_{i-2} \left(6 \frac{a_6}{\Delta x^6} - \frac{a_4}{\Delta x^4} \right) + w_{i-1} \left(15 \frac{a_6}{\Delta x^6} - 4 \frac{a_4}{\Delta x^4} - \frac{a_2}{\Delta x^2} \right) + w_i \left(k + \right. \\ & \left. + 20 \frac{a_6}{\Delta x^6} + 6 \frac{a_4}{\Delta x^4} + 2 \frac{a_2}{\Delta x^2} \right) + w_{i+1} \left(15 \frac{a_6}{\Delta x^6} - 4 \frac{a_4}{\Delta x^4} - \frac{a_2}{\Delta x^2} \right) + \\ & - w_{i+2} \left(6 \frac{a_6}{\Delta x^6} - \frac{a_4}{\Delta x^4} \right) + w_{i+3} \frac{a_6}{\Delta x^6} + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Połączenia węzła i z węzłami $i-1$, $i-2$, $i-3$ oraz $i+1$, $i+2$, $i+3$ zależy od znaków przy odpowiednich członach. Oznaczając wartość oporu łączącego punkt i z węzłami skrajnymi przez

$$(c) \quad r = r_{i,i-3} = r_{i,i+3} = \frac{\Delta x^6}{a_6} m_r$$

Oznaczenia węzłów siatki w układzie osi x, y wraz z podaniem współczynników równania (3.2) podane zostały na rys. 7a.

Zgodnie z oznaczeniami poprzednimi przyjęto dla siatki górnej

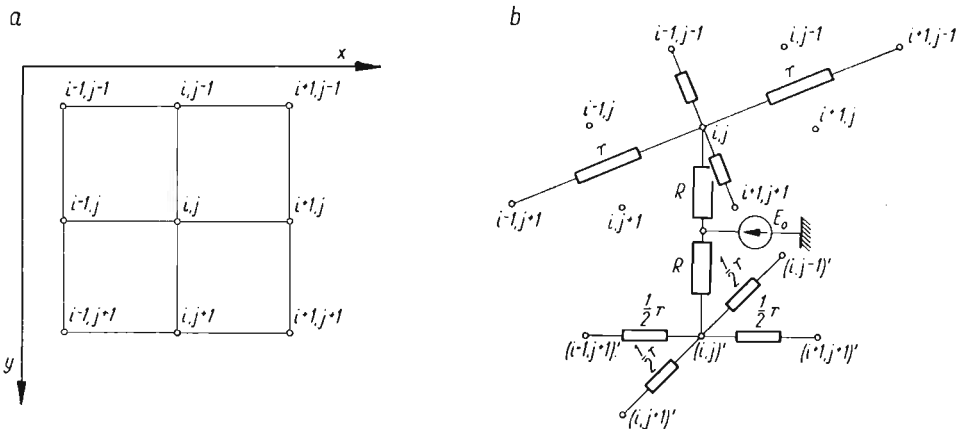
$$r = r_{i,j;+1j+1} = \frac{c^4}{1} m_r$$

oraz dla siatki dolnej

$$r_{(i,j;+1,j+1)'} = \frac{1}{2} r.$$

Schemat układu podany został na rys. 7b.

Zagadnieniem modelowania elektrycznego warunków brzegowych i początkowych nie będziemy się w tej pracy zajmowali; jest ono przedmiotem osobnego opracowania.



Rys. 7. Modelowanie członu cząstkowego rzędu czwartego w sieci elektrycznej

4. Zastosowania w zakresie teorii sprężystości

Po przedstawieniu możliwości modelowania elektrycznego równań różnicowych przejdziemy do podania kilku praktycznych zastosowań w zakresie teorii sprężystości. Układy sieci, które będą podane dotyczyć będą punktów, w których nie są modelowane warunki brzegowe lub początkowe.

4.1. Równanie belki na sprężystym podłożu. Równanie belki na sprężystym podłożu winklewskim ma postać

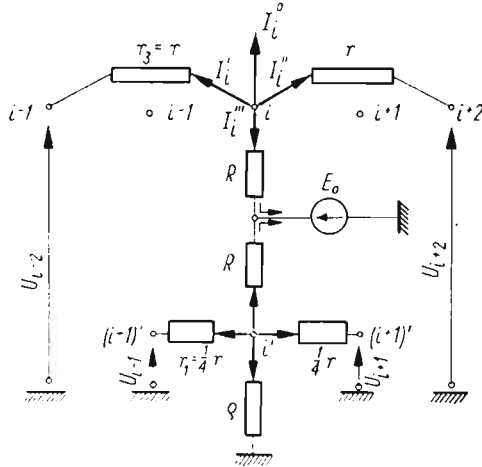
$$(4.1) \quad EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = p(x),$$

gdzie EJ — sztywność zginania belki (przyjmujemy ją jako stałą), k — stała podłoża (wartość siły powodująca jednostkowe ugięcie sprężyny modelującej podłoże sprężyste), $p(x)$ — obciążenie zewnętrzne działające na belkę prostopadle do jej osi.

Równanie (4.1) w zapisie różnicowym przyjmie postać

$$(4.2) \quad \frac{EJ}{\Delta x^4} (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) + k_i y_i - P_i = 0,$$

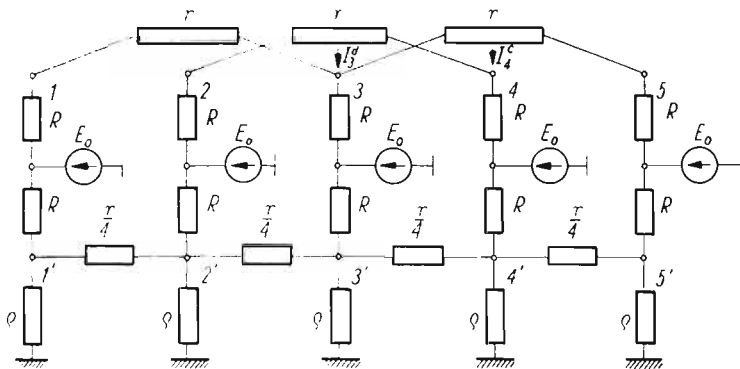
gdzie P_i przedstawia wypadkowe obciążenie przypadające na węzeł i .



Rys. 8. Modelowanie równania belki na sprężystym podłożu

Układ sieci modelującej równanie (4.2) podany został na rys. 8. Odpowiednie wielkości oznaczone na rysunku wynoszą

$$r = \frac{\Delta x^4}{EJ} m_r, \quad \varrho = \frac{1}{k_i} m_r, \quad I_i^0 = P_i m_i \quad \text{oraz} \quad U_i = y_i m_u.$$



Rys. 9. Model belki leżącej na sprężystym podłożu (część środkowa belki)

Układ sieci dla kilku punktów podany został na rys. 9.

4.2. Równanie zginania płyty. Różniczkowe równanie powierzchni odkształconej płyty ma postać

$$(4.3) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D},$$

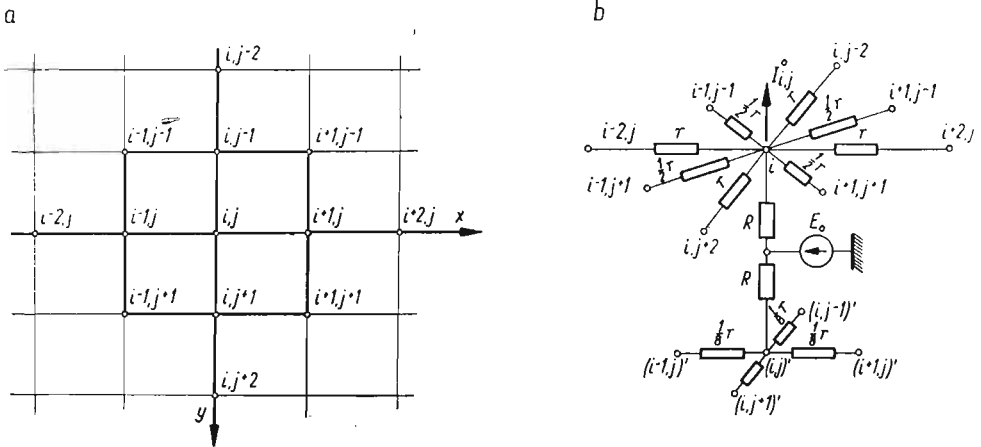
gdzie D — sztywność zginania płyty, a $q(x, y)$ — obciążenie działające na jednostkę powierzchni płyty.

Równanie różnicowe o postaci

$$\frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta y^4} = \frac{Q_{i,j}}{D}$$

można zapisać uwzględniając oznaczenia podane na rys. 10a oraz wzory (1.3) i (3.2)

$$\frac{1}{\Delta x^4} (w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}) + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} \left[4w_{i,j} - 2(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) + \frac{1}{\Delta y^4} (w_{i,j-2} + w_{i,j-1} + w_{i,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j+2}) \right] = \frac{Q_{i,j}}{D}$$



Rys. 10. Modelowanie równania płyty

Przy założeniu siatki o oczkach kwadratowych, czyli dla $\Delta x = \Delta y = c$, otrzymamy po zsumowaniu

$$(4.4) \quad \frac{1}{\Delta x^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}) + (w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2})] - \frac{Q_{ij}}{D} = 0.$$

Model powyższego równania w sieci podany został na rys. 10b¹⁾. Odpowiednie wielkości oznaczone na rysunku wynoszą

$$r = \frac{\Delta x^4}{D} m_r, \quad I_{i,j}^0 = Q_{i,j} m_i \quad \text{oraz} \quad U_{i,j} = w_{i,j} m_u,$$

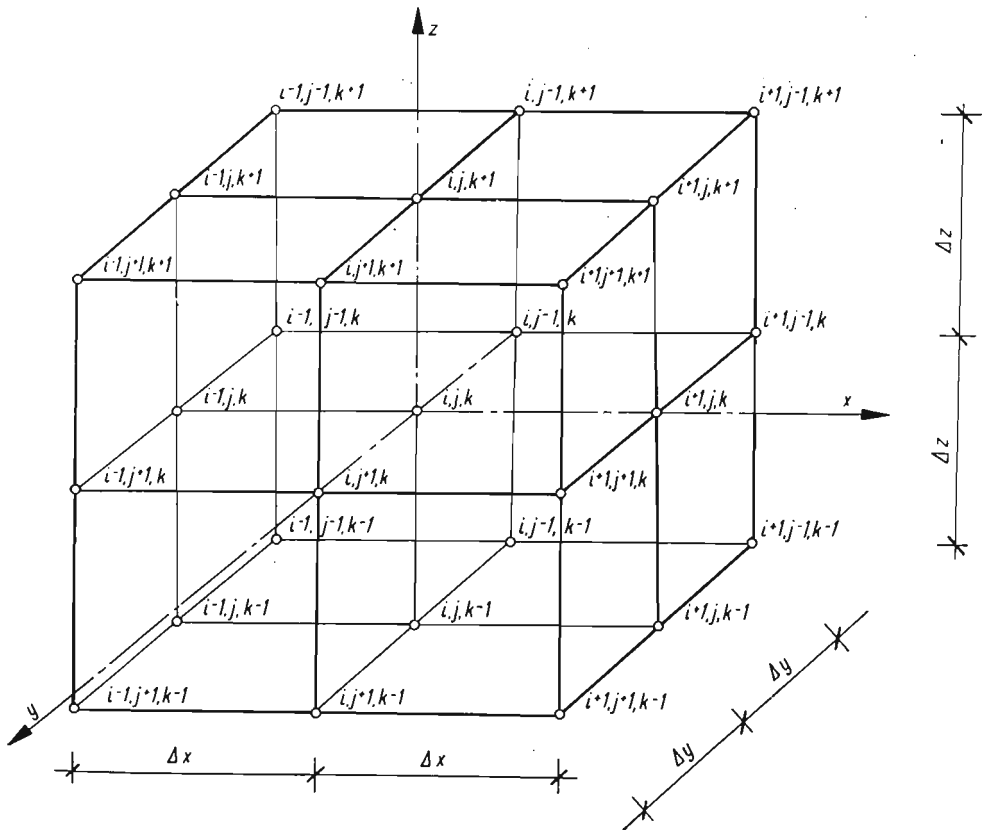
gdzie $Q_{i,j}$ przedstawia obciążenie zewnętrzne działające na węzeł i, j .

¹⁾ Rozwiązanie w sieci elektrycznej równania płyty podano np. w pracach [1, 2, 4].

4.3. Równania przemieszczeniowe teorii sprężystości ciał izotropowych. Przemieszczenia dowolnego punktu wewnątrz ciała liniowo sprężystego, izotropowego spełniają układ równań

$$(4.5) \quad \begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{X}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + n \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{Y}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{Z}{\lambda + G} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie X, Y, Z — składowe sił masowych wzdłuż odpowiednich osi układu ortogonalnego x, y, z w odniesieniu do jednostki objętości materiału, G — współczynnik sprężystości



Rys. 11. Oznaczenia punktów w układzie ortogonalnym osi x, y, z

poprzecznej (moduł Kirchhoffa) u, v i w — składowe przemieszczenia wzdłuż osi x, y, z . Współczynniki m, n i λ określone są wzorami

$$(4.6) \quad m = \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G}, \quad n = \frac{G}{\lambda + G} \quad \text{oraz} \quad \lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} G,$$

gdzie ν — współczynnik Poissona.

Przepiszmy równania (4.5) w postaci różnicowej dla punktu i, j, k

$$(4.7) \quad \begin{aligned} m \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta x^2} + n \left(\frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) + \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta x \Delta y} + \frac{X_{i,j,k}}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta y^2} + n \left(\frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) + \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta y \Delta x} + \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta y \Delta z} + \frac{Y_{i,j,k}}{\lambda + G} &= 0, \\ m \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta z^2} + n \left(\frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w_{i,j,k}}{\Delta y^2} \right) + \frac{\Delta^2 u_{i,j,k}}{\Delta z \Delta x} + \frac{\Delta^2 v_{i,j,k}}{\Delta w \Delta y} + \frac{Z_{i,j,k}}{\lambda + G} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $X_{i,j,k}$ $Y_{i,j,k}$ $Z_{i,j,k}$ — wypadkowe obciążenia działające na wyodrębniony węzeł siatki przestrzennej o odczkach $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

Dalej rozpiszemy pierwsze równanie (4.7) zgodnie z oznaczeniami punktów podanymi dla układu ortogonalnego osi x, y, z (patrz rys. 11). Dla uproszczenia przyjęto podział stały i jednakowy względem wszystkich trzech osi, czyli $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c$, przy czym współrzędna i określa położenie punktu względem osi x , współrzędne j — względem osi y oraz k — względem osi z .

Pierwsze równanie (4.7) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{m}{\Delta x^2} (u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k}) + \frac{n}{\Delta y^2} (u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}) + \\ + \frac{n}{\Delta z^2} (u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}) + \frac{1}{2\Delta x 2\Delta y} (v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k} + \\ + v_{i-1,j-1,k} - v_{i+1,j-1,k}) + \frac{1}{2\Delta x 2\Delta z} (w_{i+1,j,k+1} - w_{i+1,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1} + \\ - w_{i-1,j,k+1}) + lX_{i,j,k} = 0, \end{aligned}$$

gdzie $l = 1/(\lambda + G)$.

Grupując wyrazy otrzymamy przy uwzględnieniu $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} - \left(2 \frac{m}{c^2} + 4 \frac{n}{c^2} \right) u_{i,j,k} + \frac{m}{c^2} u_{i-1,j,k} + \frac{m}{c^2} u_{i+1,j,k} + \frac{n}{c^2} u_{i,j-1,k} + \frac{n}{c^2} u_{i,j+1,k} + \\ + \frac{n}{c^2} u_{i,j,k-1} + \frac{n}{c^2} u_{i,j,k+1} + \frac{1}{4c^2} (v_{i+1,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k} + v_{i-1,j-1,k} - v_{i+1,j-1,k}) + \\ + \frac{1}{4c^2} (w_{i+1,j,k+1} - w_{i+1,j,k-1} + w_{i-1,j,k-1} - w_{i-1,j,k+1}) + lX_{i,j,k} = 0. \end{aligned}$$

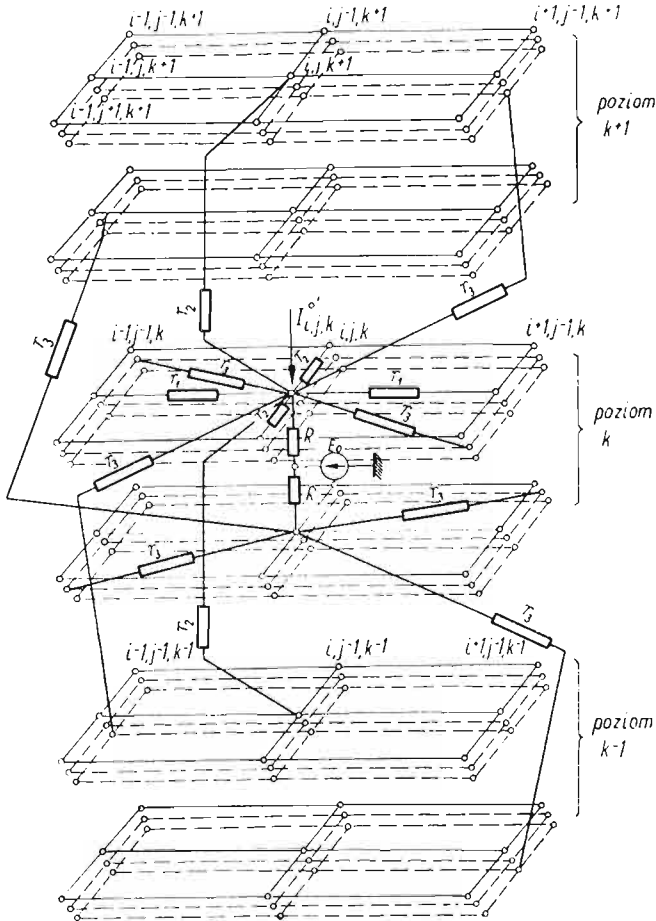
W rozpatrywanym punkcie i, j, k obszaru mamy układ trzech równań różnicowych, gdzie występują niewiadome $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$ i $w_{i,j,k}$. Dla wyznaczenia każdej składowej przesunięcia punktu i, j, k poprowadzimy potrójne siatki, które oznaczone są w odrębny sposób na rys. 12: względem osi x — w sposób ciągły, osi y — przerywany i osi z — kropkowany. Równania (4.8) zostały zmodelowane w sieci przy przyjęciu

$$(4.9) \quad r_1 = \frac{c^2}{m} m_r, \quad r_2 = \frac{c^2}{n} m_r \quad \text{oraz} \quad r_3 = \frac{4c^2}{1} m_r;$$

obciążenie sieci określa wartość $I_{i,j,k}^0 = lX_{i,j,k} m_i$.

W analogiczny sposób zapisać można dwa pozostałe równania (4.7) i zmodelować w sieci elektrycznej. Wówczas centralnymi punktami będą węzły i, j, k dla siatki oznaczonej linią przerywaną (współrzędne $v_{i,j,k}$) oraz linią kropkowaną (współrzędne $w_{i,j,k}$).

Modelowanie przesunięć układu przestrzennego jest niewątpliwie dość pracochłonne, gdyż każdy węzeł posiada w ogólnym przypadku trzy składowe przesunięć u, v, w , czyli dla modelowania n węzłów potrzebna będzie sieć złożona z $3n$ węzłów.



Rys. 12. Modelowanie równań przemieszczeniowych teorii sprężystości ciał izotropowych

Na przykład modelowanie sześcianu z podziałem krawędzi na połowy, czyli $\Delta x = \Delta y = \Delta z = a/2$ według rys. 11 wymagać będzie sieci elektrycznej o $27 \times 3 = 81$ węzłach.

W praktyce wykorzystać naturalnie można ewentualny warunek symetrii, co pozwala rozważyć przy tej samej liczbie niewiadomych układy kilkakrotnie bardziej złożone.

Oddzielną sprawą jest uwzględnienie warunków brzegowych lub początkowych. Wykorzystuje się tu te same związki, które występują w metodach obliczeniowych, a więc np. warunek zerowego ugięcia, czy zerowej wartości momentu zginającego lub siły poprzecznej. Sprawa ta będzie rozważona w oddzielnym artykule.

Literatura cytowana w tekście

1. К. К. Керопян, П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва 1963.
2. A. LISOWSKI, *Analogowe maszyny matematyczne* (skrypt), PWN, Kraków, Warszawa, Łódź 1967.
3. *Математическое моделирование и теория электрических цепей*, Академия Наук Украинской ССР, Институт Кибернетики, выпуск III, Киев 1965.
4. Г. Е. Пухов, В. В. Васильев, А. Е. Степанов, О. Н. Токарева, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. А. Н. Украинской ССР, Киев 1963.

Резюме

МЕТОД ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
И ЧЛЕНАМИ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Описывается метод построения электрических моделей дифференциальных выражений содержащих производные четного порядка. Применены две отдельные сети (верхняя и нижняя). Рассмотрены также неоднородные дифференциальные уравнения.

Приводится ряд примеров: дифференциального уравнения изгибаемой балки на упругом основании, изгиба тонкой плиты а также для системы уравнений на перемещения общей теории упругости.

Summary

ELECTRIC NETWORK MODELS OF ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND EVEN ORDER TERMS

The method of constructing the electric models of an even order finite difference expression has been described, two separate networks (the upper and lower ones) being introduced. Non-homogeneous differential equations are taken into consideration.

Examples of several types of models are given; the equations of bending of a beam on elastic foundation, bending of a thin elastic plate and the displacement equations of general elasticity theory have been discussed in particular.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1969 r. — przeredogowana (po raz pierwszy wpłynęła dnia 15 lipca 1968 r.)

PRZYKŁADY MODELOWANIA ELEKTRYCZNEGO WARUNKÓW BRZEGOWYCH
I POCZĄTKOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH WYSTĘPUJĄCYCH
W ZAGADNIENIACH MECHANIKI

ALEKSANDER LISOWSKI (KRAKÓW)

W pracy [4] podał autor podstawy modelowania w sieci elektrycznej równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i pochodnych rzędu parzystego. Obecnie rozważonych będzie kilka typów równań występujących często w zagadnieniach technicznych: równanie Laplace'a, równania Lamégo oraz równanie falowe i równanie drgań swobodnych. Podane będą przykłady elektrycznego modelowania równań z uwzględnieniem warunków brzegowych i początkowych.

1. Przykłady zastosowań równań różniczkowych do zagadnień mechaniki

1.1. Równanie drgań swobodnych nietłumionych. Rozpatrzmy równanie różniczkowe drugiego rzędu o postaci

$$(1.1) \quad m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + k \eta = 0,$$

gdzie m — masa drgającego ciała o jednym stopniu swobody, η — wychylenie od położenia równowagi, k — wartość siły powodującej jednostkowe ugięcie. Równanie (1.1) napisane dla punktu i w zapisie różnicowym przyjmie postać

$$(1.2) \quad \frac{m}{\Delta t^2} \eta_{i-1} - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_i + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_{i+1} = 0.$$

Pisząc równania dla kolejnych momentów o odstępnie czasu Δt otrzymamy

$$(1.2a) \quad \begin{aligned} \text{dla } t_0 = 0 \quad & \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_0 + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 = 0, \\ \text{dla } t_1 = 1\Delta t \quad & \frac{m}{\Delta t^2} \eta_0 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_1 + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_2 = 0, \\ \text{dla } t_2 = 2\Delta t \quad & \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_2 + \frac{m}{\Delta t^2} \eta_3 = 0 \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Przyjmując warunki początkowe dla $t = 0$, mianowicie

$$(1.2b) \quad \eta_{(0)} = \eta_0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\Delta\eta_0}{\Delta t} = \frac{\eta_1 - \eta_{1'}}{2\Delta t} = C,$$

otrzymamy z równania pierwszego (1.2a) wartość wychylenia η_1 (w czasie t_1), następnie z równania drugiego (1.2a) — wychylenie η_2 , z równania trzeciego (1.2a) — wychylenie η_3 itd. Niżej podamy przykład konkretny.

Przykład 1.1. Zmodelować w sieci równania drgań swobodnych (1.2) oraz obliczyć kolejne wychylenia masy, przyjmując dane układu ($m = P/g$, gdzie g przyspieszenie ziemskie 981 cm/sek^2)

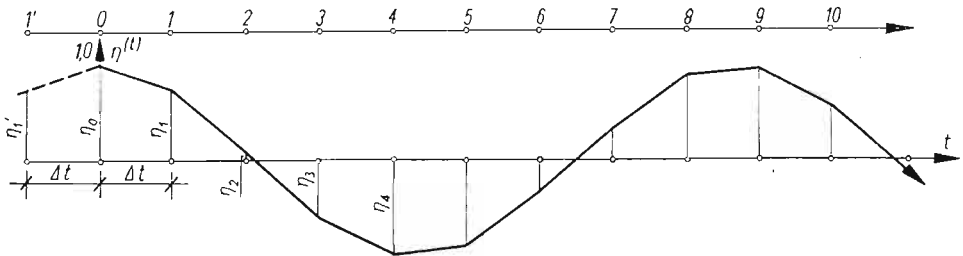
$$(1.2c) \quad \frac{m}{\Delta t^2} = 1 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \cdot \frac{\text{sek}^2}{\text{sek}^2} \right] \quad \text{i} \quad k = 0,5 \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}} \right]$$

oraz warunki początkowe

$$(1.2d) \quad \eta_0 = 1 [\text{cm}] \quad \text{i} \quad \eta'_0 = 0.$$

Uwzględniając (1.2c) w równaniu (1.2) otrzymamy

$$1\eta_{i-1} - 1,5\eta_i + 1\eta_{i+1} = 0.$$



Rys. 1. Wykres drgań swobodnych masy do przykładu 1.1

Z drugiego warunku (1.2b)

$$\frac{\eta_1 - \eta_{1'}}{2\Delta t} = 0;$$

z uwzględnieniem (1.2d) otrzymamy związek określający wychylenie w pomocniczym punkcie $1'$ (patrz rys. 1)

$$(1.2e) \quad \eta_{1'} = \eta_1.$$

Uwzględniając (1.2d) i (1.2e) w równaniach (1.2a) otrzymamy wychylenie masy w kolejnych odstępach czasu, mianowicie

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1 \text{ cm}, & \eta_1 &= 0,75 \text{ cm}, & \eta_2 &= 0,125 \text{ cm}, & \eta_3 &= -0,5625 \text{ cm}, & \eta_4 &= -0,96875 \text{ cm}, \\ \eta_5 &= -0,89062 \text{ cm}, & \eta_6 &= -0,36719 \text{ cm}, & \eta_7 &= 0,33984 \text{ cm}, & \eta_8 &= 0,87695 \text{ cm}, \\ & & & & & & \eta_9 &= 0,97559 \text{ cm} \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wykres podany na rys. 1 przedstawia wychylenie masy. Jak wiadomo, rozwiązanie równania (1.1) przedstawia zależność sinusoidalną, co wyraźnie jest uwidocznione w otrzymanym przebiegu (jest to przypadek drgań niegasnących o stałej amplitudzie).

Przejdźmy do modelowania równań (1.2a) w sieci z uwzględnieniem warunków początkowych.

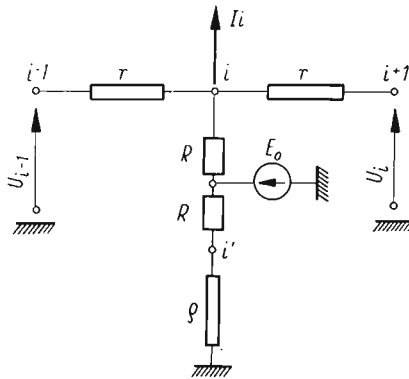
Przyjmijmy następujące współczynniki przeniesienia modelowego m_r i m_u ,

$$(1.2f) \quad r = \frac{\Delta t^2}{m} m_r, \quad \varrho = \frac{1}{k} m_r, \quad U_i = \eta_i m_u;$$

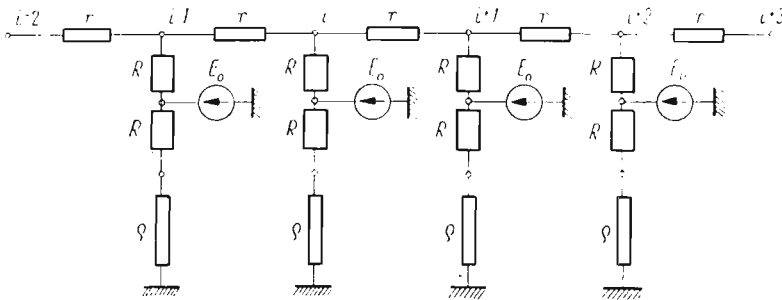
wówczas równanie (1.2) można zapisać w postaci

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{r} + \frac{U_i}{\varrho} = 0.$$

Układ sieci spełniający powyższe równanie podany jest na rys. 2.



Rys. 2. Elektryczny model równania różnicowego drgań swobodnych nietłumionych



Rys. 3. Elektryczny model układu różnicowego drgań przy założonym odstępzie Δt

Wstawiona siła elektromotoryczna E_0 ma za zadanie wyrównanie potencjałów i oraz i' . Dołączony do węzła prąd I_i modeluje obciążenie zewnętrzne [np. siłę wymuszającą w równaniu $m \frac{d^2\eta}{dt^2} + k\eta = P(t)$]. Dla przedstawienia układu równań (1.2a) należy odpowiednie schematy modelujące poszczególne równania odpowiednio połączyć ze sobą (patrz rys. 3).

Przejdźmy do modelowania warunków początkowych. Jako warunki początkowe zadania przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ znane jest wychylenie η_0 oraz prędkość η'_0 . Uwzględniając (1.2e) oraz (1.2f) otrzymamy wartości napięć modelujące wychylenia masy

$$(1.2g) \quad U_0 = \eta_0 m_u \text{ oraz } U_{1'} = U_1 = \eta_1 m_u.$$

Do dalszych rozważań przyjmujemy wartości współczynników przeniesienia

$$(1.2h) \quad m_r = 100 \left[\frac{\text{cm}}{\text{kG}} \cdot \Omega \right] \text{ oraz } m_u = 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{cm}} \right].$$

Ze znanej zależności $m_u = m_i m_r$ obliczymy współczynnik przeniesienia prądowego

$$(1.2i) \quad m_i = 0,01 \left[\frac{\text{kG} \cdot \text{A}}{\text{cm}^2} \right].$$

Obecnie określić możemy wielkości wchodzące w obwód sieci. Podstawiając do (1.2f) otrzymamy

$$(1.2j) \quad r = \frac{\Delta t^2}{m} m_r = 1 \left[\frac{\text{cm}}{\text{kG}} \right] \cdot 100 \left[\frac{\text{cm}}{\text{kG}} \cdot \Omega \right] = 100 \Omega, \quad \varrho = \frac{1}{k} m_r = 200 \Omega,$$

$$(1.2k) \quad U_0 = \eta_0 m_u = 1 [\text{cm}] \cdot 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{cm}} \right] = 1 \text{ V};$$

dotatkowo zakładamy $R = 1000 \Omega$.

Modelując równanie różnicowe drgań poczynając od punktu 0 należy do tego węzła przyłożyć napięcie U_0 (w rozpatrywanym przypadku — 1 V) modelujące wychylenie początkowe. Drugi warunek uzyskamy rozpisując pierwsze równanie (1.2a), które z uwzględnieniem przyjętych wielkości (1.2f) i (1.2c) — przyjmie postać

$$1 U_{1'} - (2 - 0,5) U_0 + 1 U_1 = 0.$$

Uwzględniając ponadto warunki początkowe ($U_{1'} = U_1$ oraz $U_0 = 1 \text{ V}$) otrzymamy

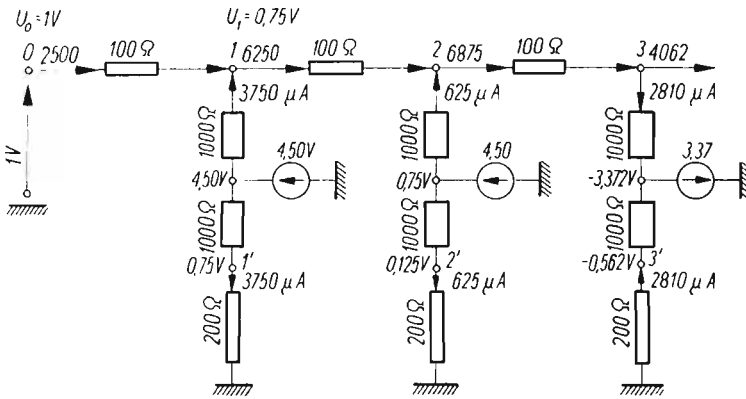
$$(1.2l) \quad U_1 = \frac{1,5 U_0}{2} = 0,75 \text{ V}.$$

Układ sieci poczynając od punktu 0 podany został na rys. 4. Po zasileniu układu napięciem równym 1 V tak manipulujemy siłą elektromotoryczną E_0 należącą do węzła 1, aby uzyskać w węźle siatki dolnej 1' napięcie równe 0,75 V. Następnie przechodzimy do węzła 2 i tak regulujemy napięciem E_0 (należącym do tego węzła), aby potencjały po obu stronach oporów R węzłów 1 i 1' zrównały się ze sobą. Dokonujemy pomiaru w węźle 2 i na to zmierzone napięcie ustalamy (ponownie regulując siłą elektromotoryczną E_0) potencjał węzła 2'. Przechodzimy następnie do siły elektromotorycznej E_0 należącej do węzła 3, którą ustalamy z warunku zrównania potencjałów w węzłach 2 i 2' i opisaną poprzednio czynność powtarzamy. W opisany sposób otrzymuje się rozkład prądów w sieci, przy czym napięcia w węzłach górnej (lub dolnej) siatki z uwzględnieniem współczynników (1.2h) określają wartość wychylenia masy w kolejnych odstępach czasu (1.2g).

Rozkład napięć i wartości prądów dla kilku pierwszych punktów rozważanego przykładu podany został na rys. 4.

Przykład 1.2. Zmodelować układ według danych przykładu poprzedniego, przyjmując warunki początkowe

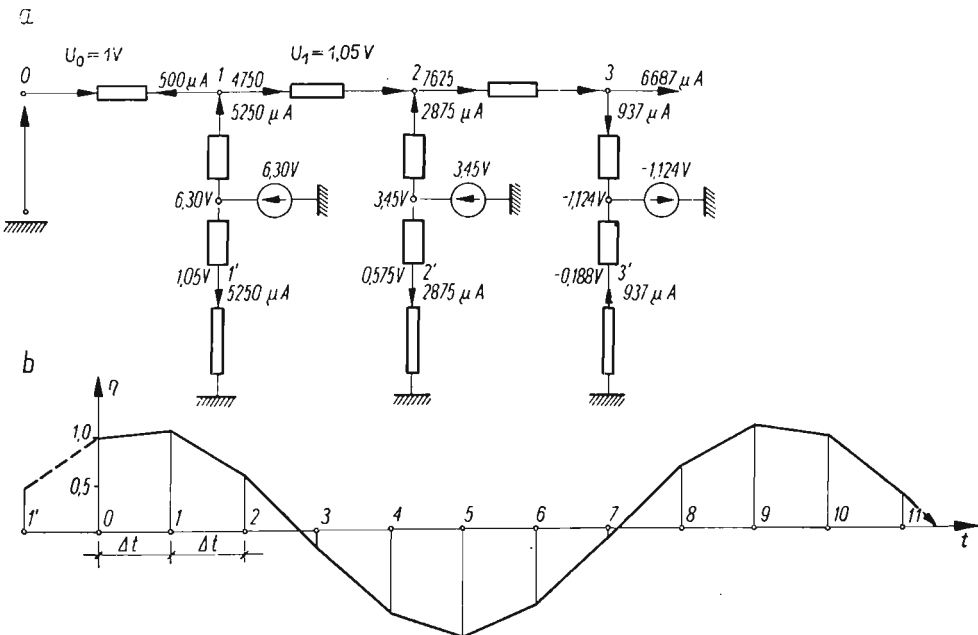
$$(1.2f) \quad \eta_0 = 1 \text{ cm}, \quad \eta'_0 = \frac{0,3}{\Delta t} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}}.$$



Rys. 4. Elektryczny model układu równania drgań według danych przykładu 1.1

Z ostatniego warunku otrzymamy $\eta_1 = \eta_1 - 0,6$. Piszemy równanie różnicowe (1.2) dla punktu początkowego

$$\frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 - \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) \eta_0 - \frac{m}{\Delta t^2} \eta_1 = 0.$$



Rys. 5. Elektryczny model równania drgań oraz wykres drgań swobodnych masy do przykładu 1.2

Uwzględniając dane zadania (1.2c) oraz warunki początkowe (1.2i) w równaniu $\eta_1 - 1,5\eta_0 + \eta_1 = 0$ otrzymamy $\eta_1 = 1,05$ cm.

Przyjmując współczynniki przeniesienia takie jak w zadaniu poprzednim (1.2f) otrzymano wielkości napięć dla punktów początkowych $U_0 = 1$ V i $U_1 = 1,05$ V, a wielkości napięć z pomiarów na analogu

$$U_2 = 0,575 \text{ V}, \quad U_3 = -0,188 \text{ V}, \quad U_4 = -0,856 \text{ V}, \quad U_5 = -1,097 \text{ V}, \\ U_6 = -0,789 \text{ V}, \quad U_7 = -0,087 \text{ V}, \quad U_8 = 0,659 \text{ V}, \quad U_9 = 1,075 \text{ V itd.}$$

Układ sieci, warunki początkowe oraz wartości napięć i rozdział prądów podany został dla kilku początkowych punktów sieci na rys. 5a. Wykres drgań podano na rys. 5b. Z wykresu widać, że w chwili początkowej zachodzi ruch masy w kierunku dodatnich wychyleń i po osiągnięciu wartości $\eta_{\max} \cong 1,1$ cm nastąpi ruch w kierunku przeciwnym.

W odróżnieniu do wykresu podanego na rys. 1, fazy ruchu są przesunięte oraz ruch następuje przy większej amplitudzie, natomiast częstotliwość drgań, która nie zależy od warunków początkowych, została ta sama.

1.2. Równanie drgań struny. Rozpatrzmy równanie falowe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

jako zagadnienie jednowymiarowe (odpowiadać to będzie drganiom poprzecznym struny)

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0.$$

W zapisie różnicowym

$$(1.4) \quad \frac{\Delta^2 \eta}{\Delta x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\Delta^2 \eta}{\Delta t^2} = 0.$$

Równanie powyższe rozpisane dla punktu i, j (patrz rys. 6a) przyjmie postać

$$(1.5) \quad \frac{1}{\Delta x^2} (\eta_{i-1,j} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i+1,j}) - \frac{1}{c^2 \Delta t^2} (\eta_{i,j-1} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i,j+1}) = 0.$$

Układ sieci spełniający powyższe równanie podany jest na rys. 6b. Napięcie modelować będzie (jak poprzednio) wychylenie, a oporności — parametry równania według wzorów

$$(1.5a) \quad U_{i,j} = \eta_{i,j} m_u,$$

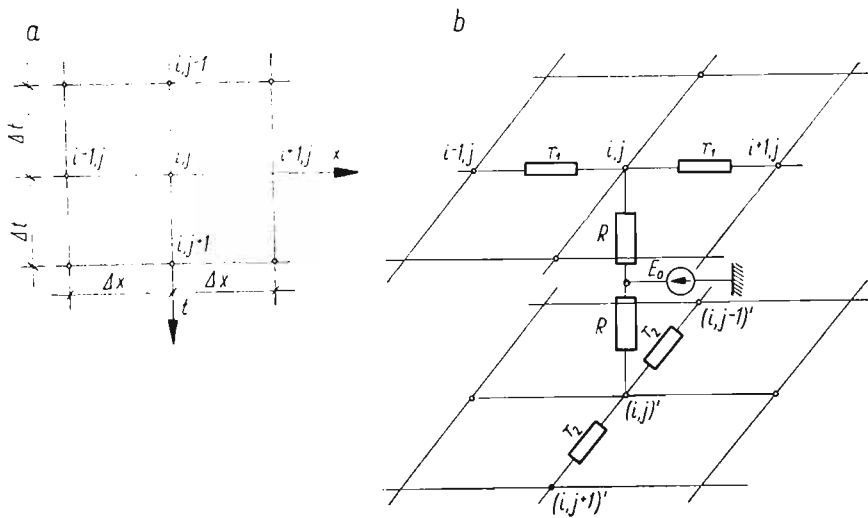
$$(1.5b) \quad r_1 = \frac{\Delta x^2}{l} m_r, \quad r_2 = \frac{c^2 \Delta t^2}{l} m_r.$$

Układ sieci modelującej równanie (1.4) omówimy na przykładzie konkretnym.

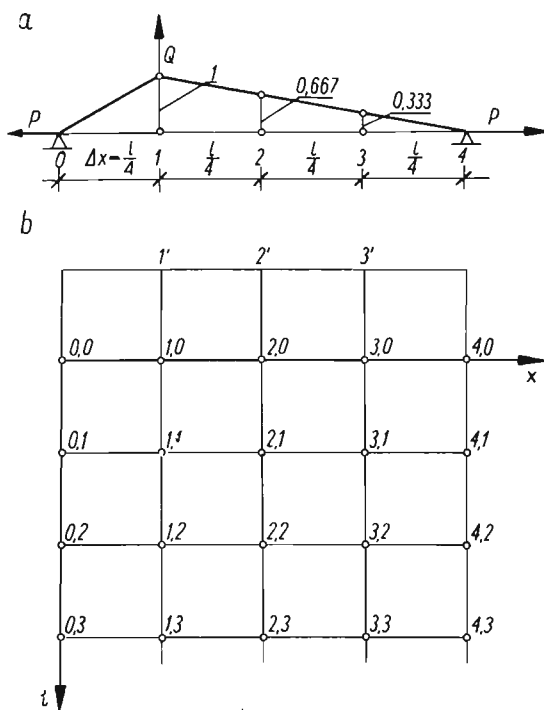
P r z y k ł a d 1.3. Określić wychylenia punktów węzłowych struny stosując podział na 4 równe części, przyjmując stan początkowy przy obciążeniu struny siłą w punkcie 1 według rys. 7a.

Jako dane zadania przyjęto

$$(1.5c) \quad \frac{1}{\Delta x^2} = \frac{1}{1 \text{ cm}^2}, \quad \frac{1}{c^2 \Delta t^2} = 1,5 \frac{1}{\text{cm}^2}.$$



Rys. 6. Oznaczenia punktów oraz model elektryczny równania drgań struny



Rys. 7. Warunki początkowe drgań struny oraz oznaczenia punktów do przykładu 1.3

Równanie (1.5) przyjmie zatem postać

$$(1.5d) \quad \eta_{i-1,j} + \eta_{i,j} + \eta_{i+1,j} - 1,5\eta_{i,j-1} - 1,5\eta_{i,j+1} = 0.$$

Zgodnie z rys. 7a przyjmujemy wychylenia początkowe (dla $t = 0$)

$$(1.5e) \quad \eta_{1,0} = 1 \text{ cm}, \quad \eta_{2,0} = 0,667 \text{ cm}, \quad \eta_{3,0} = 0,333 \text{ cm}.$$

Warunki brzegowe określają w dowolnej chwili zerowe wychylenia struny na podporach

$$(1.5f) \quad \eta_{0,t} = 0, \quad \eta_{4,t} = 0.$$

Jako dodatkowe warunki początkowe przyjęto zerowe prędkości punktów 1, 2, 3 w chwili, od której będziemy mierzyć czas, czyli dla $t = 0$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \frac{\partial \eta_3}{\partial t} = 0.$$

Z zależności ostatnich wynika

$$(1.5g) \quad \eta_{1'} = \eta_{1,1}, \quad \eta_{2'} = \eta_{2,1}, \quad \eta_{3'} = \eta_{3,1},$$

gdzie $\eta_{i'}$ oznacza teoretyczne wychylenie punktu i dla $t = -\Delta t$. Napiżemy równania (1.5d) dla punktów 1, 2 i 3 dla chwili $t = 0$

$$(1.5h) \quad \begin{aligned} \text{dla punktu 1} & \quad 0 + 1 + 0,667 - 1,5\eta_{1'} - 1,5\eta_{1,1} = 0, \\ \text{dla punktu 2} & \quad 1 + 0,667 + 0,333 - 1,5\eta_{2'} - 1,5\eta_{2,1} = 0, \\ \text{dla punktu 3} & \quad 0,667 + 0,333 + 0 - 1,5\eta_{3'} - 1,5\eta_{3,1} = 0, \end{aligned}$$

gdzie np. $\eta_{1'}$ oznacza wychylenie punktu 1 w chwili $t = -\Delta t$ oraz $\eta_{1,1}$ — dla chwili $t = \Delta t$.

Uwzględniając zależności (1.5g) wynikłe z założonych warunków początkowych z równań (1.5h) obliczymy

$$(1.5i) \quad \eta_{1,1} = 0,555, \quad \eta_{2,1} = 0,667, \quad \eta_{3,1} = 0,333.$$

Oznaczając wychylenia poszczególnych punktów układu w czasie zgodnie z rys. 7b otrzymano wartości dalszych wychyleń

$$\begin{aligned} \eta_{1,2} &= -0,185, & \eta_{2,2} &= 0,370, & \eta_{3,2} &= 0,333, \\ \eta_{1,3} &= -0,431, & \eta_{2,3} &= -0,320, & \eta_{3,3} &= 0,135, \\ \eta_{1,4} &= -0,316, & \eta_{2,4} &= -0,782, & \eta_{3,4} &= -0,457, \text{ itd.} \end{aligned}$$

Przejdźmy do modelowania układu w sieci elektrycznej. Przyjmujemy następujące współczynniki przeniesienia

$$m_r = 150 \Omega/\text{cm}^2, \quad m_u = 1 \text{ V/cm},$$

wówczas

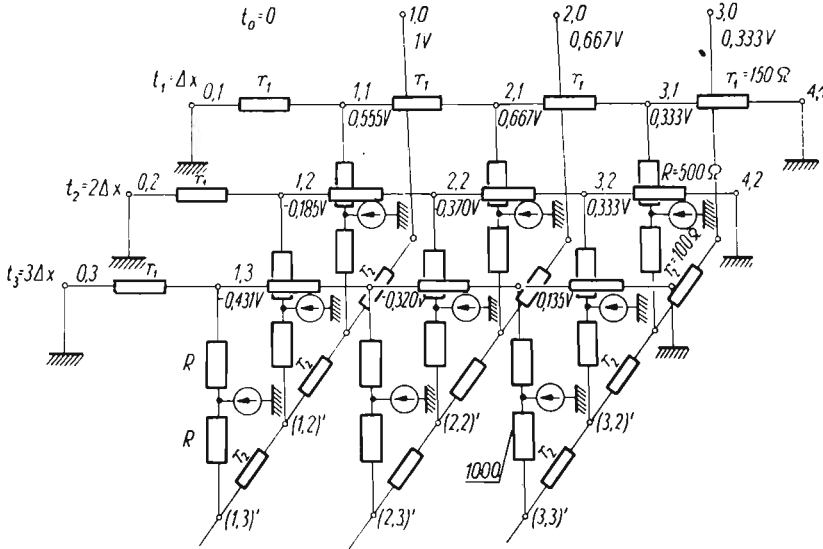
$$r_1 = \frac{\Delta x^2}{1} m_r = 150 \Omega, \quad r_2 = \frac{c^2 \Delta t^2}{1} m_r = 100 \Omega.$$

Dodatkowo zakładamy $R = 500 \Omega$.

Układ sieci dla kilku początkowych chwil (w odstępach czasu Δt) podany jest na rys. 8.

Rozwiązując układ na drodze eksperymentalnej najpierw modelujemy warunki początkowe przykładając do punktów 1, 0; 2, 0 i 3, 0 napięcia odpowiednio $U_{1,0} = 1 \text{ V}$, $U_{2,0} =$

$= 0,667 \text{ V}$, $U_{3,0} = 0,333 \text{ V}$, zgodnie z przyjętymi wychyleniami początkowymi (1.5e). Wychylenia końców struny w dowolnym czasie są równe zero, co uzyskujemy podłączając do masy węzły 0,1; 0,2; 0,3 itd. oraz 4,1; 4,2; 4,3 itd.



Rys. 8. Elektryczny model układu równania różnicowego drgań struny według danych przykładu 1.3

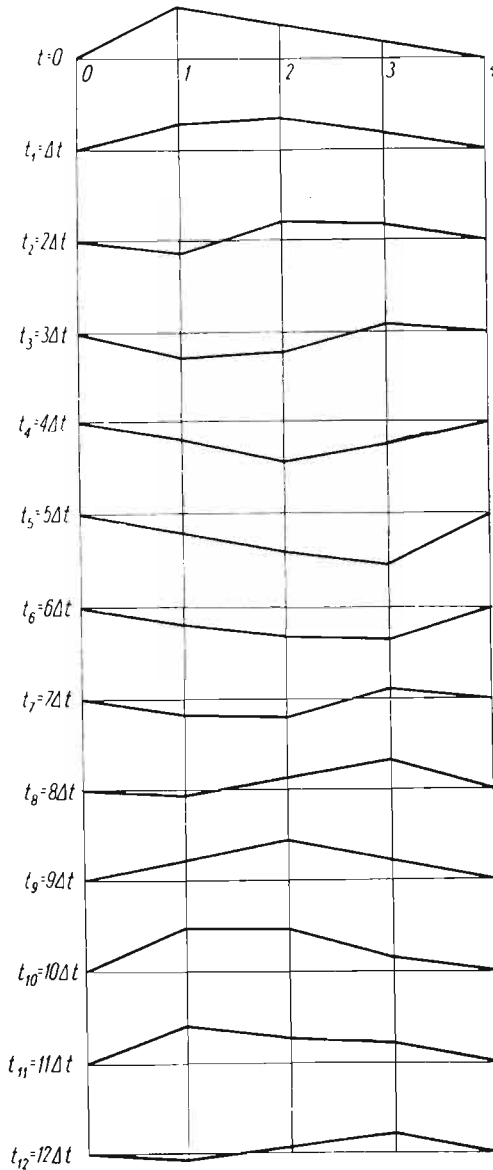
Warunek początkowych prędkości ujęty jest w zależności (1.5i). Modelowanie tych wartości w elektrycznym analogu uzyskujemy w ten sposób, że tak regulujemy wartościami sił elektromotorycznych E_0 należących do węzłów 1,1, 2,1 i 3,1, aby uzyskać w tych węzłach wymagane napięcia w stosunku do masy równe

$$U_{1,1} = 0,555 \text{ V}, \quad U_{2,1} = 0,667 \text{ V} \quad \text{oraz} \quad U_{3,1} = 0,333 \text{ V}.$$

Po ustaleniu wyjściowych napięć w węzłach górnych dla chwil t_0 oraz t_1 (patrz rys. 8) przechodzimy do zasilania węzłów (włączania sił elektromotorycznych E_0) dla chwili t_2 począwszy np. od węzła 1,2. Tak regulujemy zmienną siłą E_0 należącą do węzła 1,2, aby wyrównać różnicę napięć pomiędzy węzłami 1,1 i (1,1)' górnej i dolnej siatki. Dalej przechodzimy do siły E_0 węzła 2,2, której wartość ustalamy z warunku wyrównania potencjałów 2,1 i (2,2)'. Opisaną czynność powtarzamy dla węzła 3,2. Po skontrolowaniu, czy warunki równowagi potencjałów odpowiednich węzłów górnej i dolnej siatki są spełnione dla chwili t_1 , przechodzimy do ustalenia sił elektromotorycznych E_0 dla węzłów chwili t_3 z warunku wyrównania potencjałów górnych i dolnych węzłów chwili t_2 . Opisaną czynność powtarzamy dla dalszych następujących chwil.

Wynik przykładu dla dwunastu chwil podany jest na rys. 9. Z przebiegu kolejnych wykresów widać ciekawy przebieg odkształceń, gdy od chwili początkowej t_0 punkt 1 o największym wychyleniu uzyskuje największy przyrost prędkości powodując wygięcie struny w stronę przeciwną, podczas gdy pozostałe punkty mają jeszcze wychylenie dodatnie (dla $t = 2\Delta t$). Dalej następuje ruch w dalszym ciągu do dołu z tym, że dla $t = 5\Delta t$ uzyskujemy

niemal antysymetryczną postać podkształcenia w stosunku do schematu wyjściowego. Dalej cykl powtarza się powodując ruch poszczególnych punktów w górę.



Rys. 9. Postacie drgań struny w kolejnych odstępach czasu Δt

1.3. Równanie zginania płyt cienkich. Ugięcia $w(x, y)$ powierzchni środkowej płyty spełniają równanie biharmoniczne

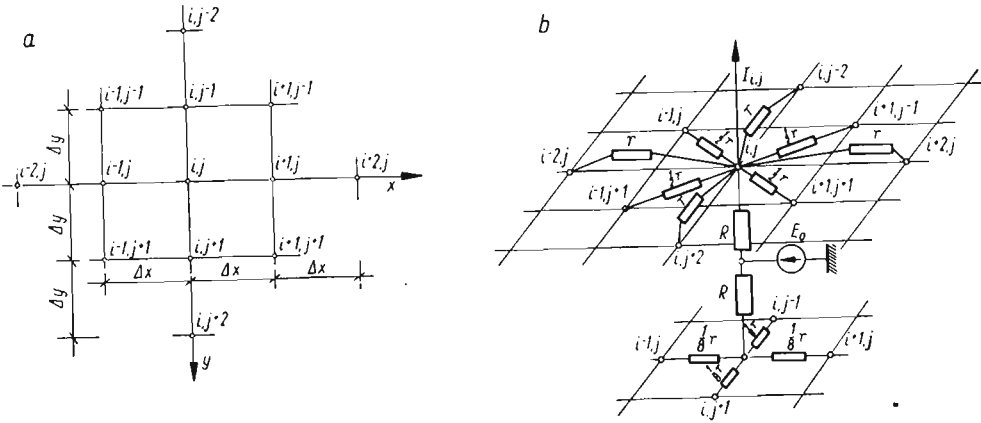
$$(1.6) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}.$$

W zapisie różnicowym

$$(1.7) \quad \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_{i,j}}{\Delta y^4} = \frac{Q_{i,j}}{D}$$

Rozpisując powyższe równanie dla punktu i, j (patrz rys. 10a) oraz przyjmując dodatkowe uproszczenie, że $\Delta x = \Delta y$, otrzymamy

$$(1.8) \quad 20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}) + w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} = \frac{q_{i,j} \Delta x^4}{D}$$



Rys. 10. Elektryczny model równania różnicowego płyty i oznaczenia punktów siatki

Widzimy, że współczynniki występujące przy ugięciach punktów sąsiednich tworzą układ symetryczny względem punktu centralnego i, j . Elektryczny model równania płyty podany został na rys. 10b. Odpowiednie zależności, pozwalające modelować w sieci elektrycznej równanie płyty wynoszą

$$(1.9) \quad r = \frac{\Delta x^4}{D} m_r, \quad I_{i,j} = q_{i,j} m_i, \quad U_{i,j} = w_{i,j} m_u$$

Między współczynnikami przeniesienia istnieje znana zależność

$$(1.10) \quad m_u = m_i m_r$$

Przejdźmy do modelowania warunków brzegowych.

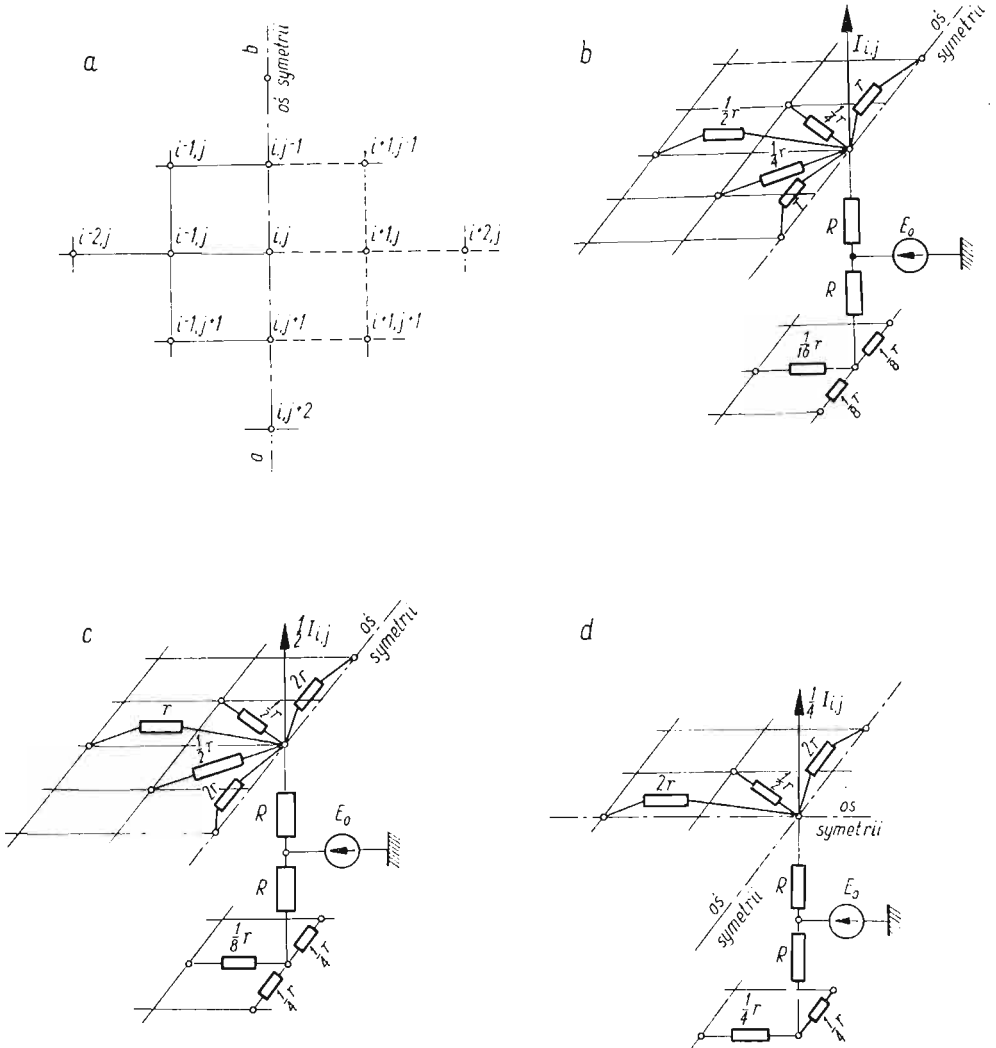
1.3.1. Powierzchnia odkształcenia płyty posiada oś symetrii $a-b$ (rys. 11a). Wówczas z warunku symetrii można przyjąć

$$(a) \quad w_{i+1,j-1} = w_{i-1,j}, \quad w_{i+1,j} = w_{i-1,j}, \quad w_{i+2,j} = w_{i-2,j}, \quad w_{i+1,j+1} = w_{i-1,j+1}$$

Uwzględniając powyższe zależności w (1.8) otrzymamy równanie

$$(1.11) \quad \frac{D}{\Delta x^4} [20w_{i,j} - 8(2w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + 2(2w_{i-1,j} + 2w_{i-1,j+1}) + + 2w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2}] = q_{i,j}$$

którego model, zgodnie z oznaczeniami (1.9), podany został na rys. 11b. Biorąc pod uwagę powiązanie punktów położonych na osi symetrii z punktami wewnętrznymi (punkt i, j łączy się z punktami $i-2, j$; $i-1, j$; $i-1, j+1$ oraz węzłami dolnej siatki $i-1, j$) należy dążyć do tego, aby były równocześnie spełnione równania (1.8) i (1.9), czyli punkty te



Rys. 11. Modelowanie punktów położonych na osi symetrii

wynny łączyć się za pośrednictwem tych samych oporów. Możemy to uzyskać dzieląc wszystkie wyrazy równania (1.9) przez dwa — wówczas analogiem dla punktu położonego na osi symetrii będzie układ podany na rys. 11c.

Porównując schemat sieci podanej na rys. 10b oraz 11c widać, że przy modelowaniu siatki płyty przyjmować będziemy dla punktów wewnętrznych układy według schematu podanego na rys. 10b, a dopiero dla punktów położonych na osi symetrii odkształconej powierzchni płyty — układy wedle schematu podanego na rys. 11c.

W przypadku podwójnej symetrii względem osi x oraz y wynikają zależności

$$(b) \quad \begin{aligned} w_{i+2,j} &= w_{i-2,j}, & w_{i,j+2} &= w_{i,j-2}, \\ w_{i+1,j-1} &= w_{i+1,j+1} = w_{i-1,j+1} = w_{i-1,j}, & w_{i,j+1} &= w_{i,j-1}, & w_{i+1,j} &= w_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Uwzględniając (b) w (1.11) otrzymamy równanie

$$(1.12) \quad 20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} \cdot 2 + w_{i,j-1} \cdot 2) + 2(w_{i-1,j} \cdot 4) + w_{i-2,j} \cdot 2 + w_{i,j-2} \cdot 2 = \frac{q_{i,j} \Delta x^4}{D},$$

w którym podzielimy wszystkie wyrazy przez cztery. Układ sieci modelującej równanie rozpisane dla punktu centralnego (przez który przechodzą obie osie symetrii) podano na rys. 11d.

Przejdźmy następnie do modelowania warunków brzegowych. Rozpatrzmy dwa najczęściej występujące przypadki — krawędź płyty oparta w sposób przegubowy oraz całkowicie utwierdzona.

1.3.2. *Krawędź swobodnie oparta na podporze.* Z warunku oparcia płyty wzdłuż jej krawędzi przyjmuje się, że ugięcia wzdłuż tej krawędzi są równe zeru. Dla przykładu rozpatrzmy krawędź $a-b$ płyty (patrz rys. 12a). Z warunku przylegania płyty do podpory można zapisać

$$(c) \quad w_a = w_{i+1,j-1} = w_{i+1,j} = w_{i+1,j+1} = w_b = 0.$$

Drugim warunkiem określającym przegubowy sposób podparcia jest zerowa wartość momentu zginającego w danym przypadku względem osi y .

$$(1.13) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

W zapisie różnicowym dla węzła $i+1, j$ leżącego na krawędzi otrzymamy

$$(1.14) \quad M_{(i+1,j)y} = -D \left(\frac{w_{i,j} - 2w_{i+1,j} + w_{i+2,j}}{2\Delta x} + \nu \frac{w_{i+1,j-1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1}}{2\Delta y} \right) = 0.$$

Uwzględniając (c) otrzymamy

$$(d) \quad w_{i+2,j} = -w_{i,j}.$$

Równanie powierzchni odkształconej płyty (1.8) rozpisane dla punktu $i+1, j$ oddalonego o Δx od krawędzi opartej w sposób przegubowy z uwzględnieniem (c) i (d) przyjmie postać

$$\begin{aligned} 20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} + w_{i+1,j}) + 2(w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) + \\ + w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2} + w_{i+2,j} = \frac{q_{i,j} \Delta x^4}{D}. \end{aligned}$$

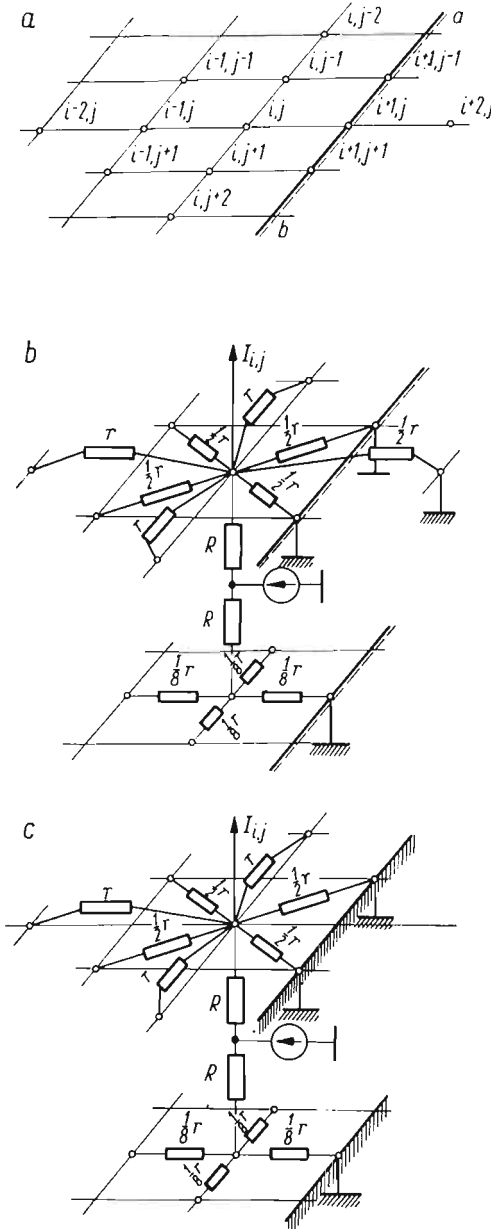
Uwzględnienie warunku zerowych ugięć na krawędzi podparcia prowadzi w modelu elektrycznym do zapewnienia tym węzłom zerowych potencjałów. Uzyskuje się to przez połączenie punktów $i+1, j-1$; $i+1, j+1$ i $i+1, j$ przewodem *bezoporowym* z masą (patrz rys. 12b).

Warunek (d) łatwo jest spełnić w sieci łącząc węzeł i, j z masą za pośrednictwem oporu równego $r/2$.

Łatwo sprawdzić, że wartość prądu łączącego węzły i, j i $i+2, j$, zgodnie z założeniem (d), wynosi

$$I = \frac{U_{i,j} - U_{i+2,j}}{r} = \frac{2U_{i,j}}{r} = \frac{U_{i,j}}{r/2},$$

co spełnia warunek brzegowy podany na rys. 12b.



Rys. 12. Modelowanie warunków brzegowych oparcia płyty na podporze pozwalającej na swobodny obrót oraz całkowicie utwierdzającej

1.3.3. *Krawędź całkowicie utwierdzona.* Rozpatrzmy jak wyżej krawędź równoległą do osi y .

Z warunków podparcia otrzymujemy

$$(e) \quad w_{i+1,j-1} = w_{i+1,j} = w_{i+1,j+1} = 0$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{w_{i,j} - w_{i+2,j}}{2\Delta x} = 0,$$

co prowadzi do zależności

$$(f) \quad w_{i+2,j} = w_{i,j}.$$

Przy spełnieniu warunku (f) nie popłynie prąd przez opór r łączący węzły i, j i $i+2, j$. W sieci elektrycznej najwygodniej to spełnić nie dając połączenia między tymi węzłami. Układ sieci podany dla węzła i, j oddalonego od Δx od krawędzi utwierdzającej podany został na rys. 12c.

W zakończeniu podamy kilka uwag dotyczących celowości modelowania w sieci elektrycznej równań różnicowych.

Zasadniczym zakresem stosowalności analogowych maszyn uniwersalnych jest rozwiązywanie równań różniczkowych. Maszyny analogowe mają tu tę wyższość nad cyfrowymi, że oprócz czterech działań arytmetycznych potrafią jako jedną operację wykonywać całkowanie, a w ograniczonych zastosowaniach — różniczkowanie. Maszyny analogowe, przez użycie członów całkujących i sumujących, zezwalają na modelowanie poszczególnych członów równania różniczkowego oraz otrzymanie w postaci wykresów lub odczytów cyfrowych zarówno ostatecznego rozwiązania, jak i wszystkich kolejnych pochodnych funkcji do rzędu najwyższej pochodnej równania włącznie [3].

Przedstawiony w pracy niniejszej sposób modelowania w sieci równań różnicowych wymaga montażu sieci złożonej ze znacznej nieraz liczby węzłów (wymaganej dla otrzymania wystarczająco dokładnego rozwiązania). Zmontowanie układu dla równania drgań swobodnych (1.1) czy tłumionych na maszynie uniwersalnej jest stosunkowo proste (przykład 1.1 i 1.2) i ma tę ponadto zaletę, że rozwiązanie uzyskuje się w postaci ciągłej funkcji. Jest jednak szereg takich zjawisk opisanych równaniami różniczkowymi, w których modelowanie równania jest kłopotliwe na maszynie uniwersalnej, a więc przede wszystkim w równaniach cząstkowych, które można rozwiązać stosując metodę różnic skończonych; wymaga to jednak z kolei dużej liczby wzmacniaczy operacyjnych. W takich przypadkach przedstawiony sposób może być szczególnie użyteczny, choćby przy rozwiązywaniu równań falowych (przykład 1.3) czy równania biharmonicznego. Dodatkowym aspektem, który można podkreślić jest fakt, że montaż układu analogowego w sieci elektrycznej może być wykonany w niemal prymitywny sposób w każdym laboratorium przy użyciu elementarnego wyposażenia, a cena uniwersalnych maszyn analogowych jest nieporównanie wyższa.

Literatura cytowana w tekście

1. M. T. HUBER: *Teoria sprężystości*, t. I i II. Polska Akademia Umiejętności, Kraków 1948, 1950.
2. K. K. Керопян. П. М. Чеголин, *Электрическое моделирование в строительной механике*, Госстройиздат, Москва 1963.

3. A. LISOWSKI, *Analogowe maszyny matematyczne*, (skrypt) PWN, Kraków, Warszawa, Łódź 1967.
4. A. LISOWSKI, *Sposób elektrycznego modelowania równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i członach rzędu parzystego*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, PWN, Warszawa, 7 (1969), z. 4, 425-438.
5. *Математическое моделирование и теория электрических цепей*, Академия Наук Украинской ССР, Институт Кибернетики; выпуск III, Киев 1965, выпуск V, Киев 1967.
6. Г. Е. Пухов, В. В. Васильев, А. Е. Степанов, О. Н. Токарева, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. А. Н. Украинской ССР., Киев 1963.

Резюме

ПРИМЕРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОПРОСОВ МЕХАНИКИ

Приводится ряд примеров моделирования в электрической сети таких явлений, как свободные недемпфированные колебания струны, изгиб тонкой упругой плиты с разными краевыми условиями (бигармоническое уравнение) и др. Представленный метод может быть особенно пригодным для ряда частных случаев, когда применение более универсальных аналоговых машин неэкономично.

Summary

EXAMPLES OF ELECTRICAL NETWORK MODELS SIMULATING THE INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF APPLIED MECHANICS

Several examples of electrical network models are given for such problems as free undamped vibrations of a string, bending of a thin plate with various boundary conditions (biharmonic differential equation) etc. The method presented in the paper seems to be particularly suited in many cases when the application of more universal analogue computers proves inefficient.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1969 r. — przeredagowana (po raz pierwszy wpłynęła dnia 15 lipca 1968 r.)

DOŚWIADCZALNA ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH RUSZTÓW CYLINDRYCZNYCH

EDWARD MACIĄG (KRAKÓW)

1. Wstęp

W niniejszej pracy omówione będą doświadczalne badania częstości i postaci drgań własnych modeli rusztu cylindrycznego. Jak wiadomo, ruszty przestrzenne typu cylindrycznego lub też innego mogą występować w postaci przekryć hal przemysłowych, hangarów, a także mogą tworzyć konstrukcję nośną hal sportowych, targowych itp. W szeregu przypadków, dla oceny tego rodzaju budowli pod względem dynamicznym wystarczy zbadać ich podstawowe charakterystyki dynamiczne, tj. częstości i postaci drgań własnych. Czasem wystarczy ograniczyć się tylko do tzw. obliczania budowli na rezonans, tj. porównanie drgań własnych z wymuszonymi, gdyż może to już wystarczyć do stwierdzenia nieprzydatności konstrukcji nawet bez szczegółowego wyliczenia amplitud przemieszczeń i naprężeń. Teoretyczne badania wspomnianych wyżej charakterystyk dynamicznych rusztów cylindrycznych były przedmiotem pracy [9]. Obliczenia dynamiczne tego rodzaju złożonych układów prętowych najczęściej prowadzi się w sposób przybliżony. Między innymi przyjmuje się następujące założenia upraszczające: masy pochodzące od ciężaru własnego i użytkowego skupione są w węzłach krzyżujących się prętów; krzyżujące się pręty połączone są przegubowo; pręty zakrzywione (np. koliste) zastępuje się odcinkami prostych. Mimo przyjmowania wymienionych upraszczających założeń obliczenia są złożone oraz pracochłonne i nastroczają duże trudności rachunkowe.

W związku z wyżej podanymi uwagami celowe jest prowadzenie badań modelowych, służących do weryfikacji lub uzupełnienia obliczeń teoretycznych. Niekiedy wystarczy przeprowadzić badania modelowe zamiast obliczeń i z kolei opierając się na prawach podobieństwa, znając częstości rezonansowe modelu, można podać częstości drgań własnych obiektu rzeczywistego. Obliczanie rusztów walcowych od obciążeń statycznych podane jest w [1], a zagadnienia stateczności tego typu konstrukcji omówione są w [2]. Problem obliczania statycznego oraz stateczności tzw. siatkowych powłok cylindrycznych (rombowa siatka prętów, w szczególnym przypadku przechodząca w ortogonalną) omówiono w [11].

2. Ustalenie praw modelowych

Zanim przejdziemy do badań rusztów, należy ustalić warunki, jakie powinien spełniać model obiektu rzeczywistego, którego własności chcielibyśmy poznać na podstawie badań modelu. Wiadomo, że technika modelowania opiera się na fizycznym podobieństwie, oznacza to przede wszystkim, że model (M) powinien być geometrycznie podobny do obiektu rzeczywistego (O) i że jednakowe fizyczne procesy w modelu i obiekcie powinny być opisywane tymi samymi matematycznymi równaniami. Nie zajmujemy się tu metodą analogii, która nie wymaga fizycznego podobieństwa modelu i obiektu i opiera się na dwójakim zastosowaniu tych samych matematycznych funkcji, opisujących badany proces w naturze na podobnym jej modelu. Mówimy, że stany obiektu naturalnego i modelu oraz zachodzące w nich procesy są fizycznie podobne w tym przypadku, kiedy w naturze i modelu przyczyny o tym samym charakterze wywołują odpowiednio równe skutki. Przy tym geometryczne podobieństwo obiektu i modelu będące koniecznym warunkiem podobieństwa powinno być zachowane także wtedy, kiedy stany obiektu i modelu są funkcjami czasu. Spełnienie tych warunków umożliwia przenoszenie wyników pomiarów z modelu na obiekt przy uwzględnieniu tzw. skal wynikających z praw podobieństwa [5].

Prawa podobieństwa wyrażają zależności między podstawowymi wielkościami określającymi przebieg procesów w rzeczywistym obiekcie i modelu. Prawa podobieństwa można otrzymać na podstawie analizy wymiarowej [3, 5, 10].

Rozważania ograniczamy do przypadku ścisłego podobieństwa geometrycznego modelu do obiektu rzeczywistego. Takie założenie przyjmuje się zwykle, gdy przechodzi się do konkretnych rozwiązań. Zakładamy, że materiał, z którego wykonujemy model i konstrukcję jest jednorodny, izotropowy i liniowo sprężysty. Z interpretacji fizycznej wynika, że częstość drgań własnych rusztu zależy od L , E , G i m , gdzie L określa wszystkie wymiary geometryczne układu, E i G stałe materiałowe, a m jest masą skupioną. Powyższe zapiszemy w postaci funkcji

$$(2.1) \quad \omega = \Phi(L, E, m, G).$$

L , E , G i m wyrazimy w układzie jednostek kG, cm, sek, czyli:

$$[L] = [\text{kG}^0 \text{cm}^1 \text{sek}^0], \quad [E] = [\text{kG}^1 \text{cm}^{-2} \text{sek}^0], \quad [m] = [\text{kG}^1 \text{cm}^{-1} \text{sek}^2], \\ [G] = [\text{kG}^1 \text{cm}^{-2} \text{sek}^0], \quad [\omega] = [\text{kG}^0 \text{cm}^0 \text{sek}^{-1}].$$

Wszystkie wielkości, od których zależy ω , można wyrazić za pomocą trzech jednostek kG, cm, sek; mogą zatem wystąpić najwyżej trzy wielkości wymiarowo niezależne. Przyjęto, że są nimi L , E , m . Tworzymy wyznacznik z wykładników przy wymiarach wielkości przyjętych za wymiarowo niezależne (w układzie kG, cm, sek)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Utworzony wyznacznik z wykładników przy wymiarach tych jednostek jest różny od zera. więc spełniony jest warunek wymiarowej niezależności. Pozostała wielkość, tj. G jest od nich wymiarowo zależna. Z twierdzenia π stosowanego w analizie wymiarowej wynika,

że jeśli w wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej funkcji $\Phi(E, L, m, G)$ argumenty E, L i m są wymiarowo niezależne, a argument G wymiarowo zależny, tzn. wyraża się w sposób następujący

$$(2.2) \quad G = \pi_1 E^{e_1} L^{e_2} m^{e_3},$$

gdzie π_1 jest wielkością bezwymiarową (liczbą), a wykładniki e_1, e_2 i e_3 są liczbami rzeczywistymi, to funkcja Φ musi mieć postać

$$\Phi(E, L, m; G) = \varphi(\pi_1) E^{e_1} L^{e_2} m^{e_3},$$

gdzie $\varphi(\pi_1)$ jest zwykłą funkcją liczbową argumentu bezwymiarowego π_1 i nie zależy od E, L i m , a wykładniki e_1, e_2 i e_3 (rzeczywiste) nie zależą od π_1 ani od E, L, m . Wyrazimy wymiary pozostałej wielkości, tj. G za pomocą wymiarów $[E], [L], [m]$

$$[\text{kG}^1 \text{cm}^{-2} \text{sek}^0] = [\text{kG}^{e_1} \text{cm}^{-2e_1} \text{cm}^{e_2} \text{kG}^{e_3} \text{cm}^{-e_3} \text{sek}^{2e_3}].$$

Z porównania stronami wykładników potęgowych przy jednakowych wymiarach otrzymujemy układ równań, którego rozwiązaniem jest

$$(2.3) \quad e_1 = 1, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0; \quad [G] = [E].$$

Z definicji wymiaru wynika, że

$$(2.4) \quad \pi_1 = \frac{G}{E}.$$

Wielkość bezwymiarowa π_1 bywa nazywana niezmiennikiem podobieństwa. Stosując twierdzenie π mamy

$$(2.5) \quad \omega = \varphi\left(\frac{G}{E}\right) E^{e'_1} L^{e'_2} m^{e'_3}.$$

Wykładniki potęgowe e'_1, e'_2, e'_3 nie zależą od π_1 ani od E, L, m . Wykładniki te wyznaczymy z warunku

$$(2.6) \quad [\omega] = [E^{e'_1} L^{e'_2} m^{e'_3}],$$

w ten sposób, że podstawimy za wymiary $[E], [L], [m], [\omega]$ ich wyrażenia w układzie jednostek $\text{kG}, \text{cm}, \text{sek}$

$$[\text{kG}^0 \text{cm}^0 \text{sek}^{-1}] = [\text{kG}^{e'_1} \text{cm}^{-2e'_1} \text{cm}^{e'_2} \text{kG}^{e'_3} \text{cm}^{-e'_3} \text{sek}^{2e'_3}].$$

Porównując wykładniki przy $\text{kG}, \text{cm}, \text{sek}$ i rozwiązując otrzymany układ równań dostajemy

$$(2.7) \quad e'_1 = \frac{1}{2}, \quad e'_2 = \frac{1}{2}, \quad e'_3 = -\frac{1}{2},$$

zatem

$$(2.8) \quad \omega = \varphi\left(\frac{G}{E}\right) \sqrt{\frac{EL}{m}}.$$

Modelowanie zjawiska opisywanego za pomocą funkcji Φ polega na tym, że wartości E_0, L_0, m_0, G_0 mnożymy przez pewne liczby $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i ε_1 tzn., że

$$(2.9) \quad E_M = \lambda_1 E_0, \quad L_M = \lambda_2 L_0, \quad m_M = \lambda_3 m_0, \quad G_M = \varepsilon_1 G_0,$$

gdzie λ_1 , λ_2 , λ_3 i ε_1 są tzw. skalami modelu [3]. Poszukujemy stosunku ω_M/ω_O . Z warunku jednorodności wymiarowej ω_M/ω_O jest liczbą. Na podstawie twierdzenia π napiszemy, że skoro zachodzi (2.8) to

$$(2.10) \quad \omega_O = \varphi(\pi_{1,O}) E_O^{1/2} L_O^{1/2} m_O^{-1/2}, \quad \pi_{1,O} = \frac{G_O}{E_O},$$

$$(2.11) \quad \omega_M = \varphi(\pi_{1,M}) E_M^{1/2} L_M^{1/2} m_M^{-1/2}, \quad \pi_{1,M} = \frac{G_M}{E_M} = \frac{\varepsilon_1 G_O}{\lambda_1 E_O} = \pi_{1,O} \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}.$$

Wobec tego na podstawie (2.9), (2.10), (2.11) będzie

$$(2.12) \quad \frac{\omega_M}{\omega_O} = \frac{\varphi_M(\pi_{1,M})}{\varphi_O(\pi_{1,O})} \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} \lambda_3^{-1/2}.$$

Z uwagi na to, że z analizy wymiarowej nie da się wyznaczyć $\varphi(\pi_1)$, na skale λ_1 , λ_2 , λ_3 i ε_1 nakładamy dodatkowy warunek wynikający z twierdzenia, że zjawiska opisane za pomocą tej samej funkcji nazywamy podobnymi, jeśli ich niezmienniki podobieństwa są równe [3]

$$(2.13) \quad \pi_{1,O} = \pi_{1,M}.$$

Na cztery skale λ_1 , λ_2 , λ_3 i ε_1 nakładamy jeden warunek, pozostałe tj. tyle, ile jest wielkości wymiarowo niezależnych wybieramy dowolnie. Warunek (2.13) nazywamy kryterium podobieństwa. Z (2.12) przy uwzględnieniu (2.13) otrzymamy

$$(2.14) \quad \Theta = \frac{\omega_M}{\omega_O} = \lambda_1^{1/2} \lambda_2^{1/2} \lambda_3^{-1/2},$$

gdzie Θ jest skalą częstości drgań własnych. Jeśli zakładamy, że materiał obiektu i modelu jest ten sam, to masy zmieniamy w tej samej skali co objętości, czyli $\lambda_3 = \lambda_2^3$ oraz $\lambda_1 = 1$, zatem

$$(2.15) \quad \Theta = \frac{1}{\lambda_2}.$$

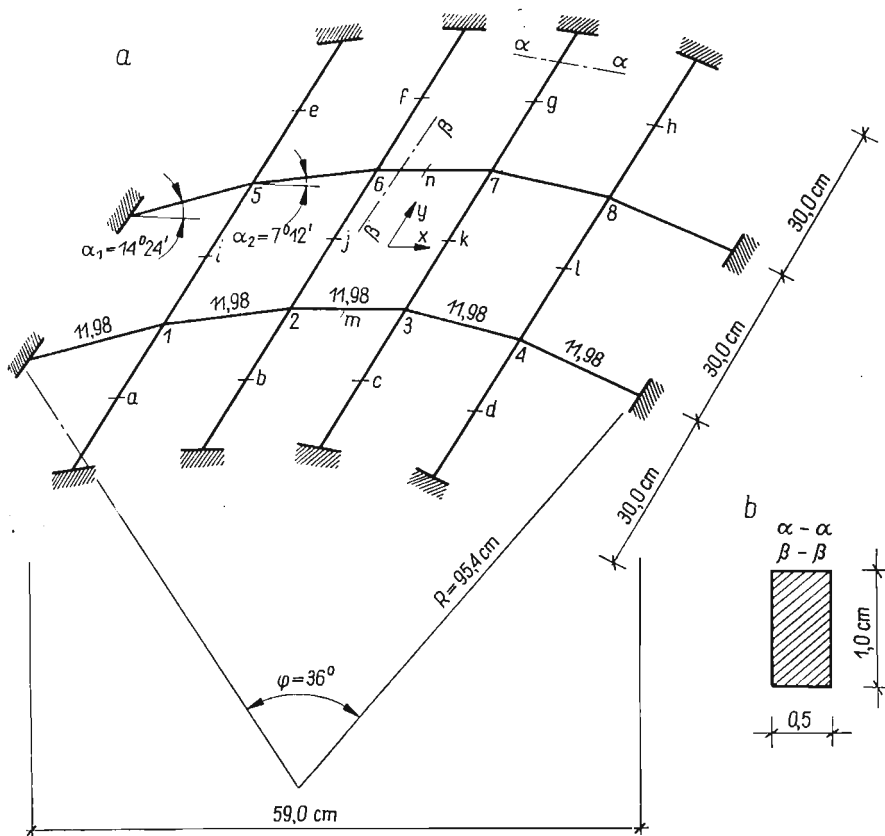
Na przykład dla modelu rusztu 100 razy mniejszego od obiektu naturalnego, $\lambda_2 = 1/100$ i na podstawie (2.15) $\Theta = 100$, zatem z (2.14) wynika, że częstości drgań własnych obiektu naturalnego będą sto razy mniejsze od częstości drgań własnych modelu $\left(\omega_O = \frac{\omega_M}{100}\right)$.

Bardziej szczegółowe omówienie niektórych innych zagadnień modelowania można znaleźć w literaturze, np. w [5, 10].

3. Opis modelu

Dla przeprowadzenia pomiarów częstości i postaci drgań własnych rusztu cylindrycznego wykonano stalowy model. Wymiary modelu są podane na rys. 1. Rzut z góry tworzy prostokąt $90,0 \times 59,0$ cm o ortogonalnej siatce prętów. Łuki w liczbie dwóch wykonane są z odcinków prętów prostych (po pięć cięciw w każdym łuku). Osiowa długość cięciw teoretycznie wynosi 11,98 cm (długość łuku odpowiadająca wymienionej długości cięciwy wynosi 12,0 cm). Odcinki proste załamane pręta poprzecznego tworzą cięciwy odcinka koła

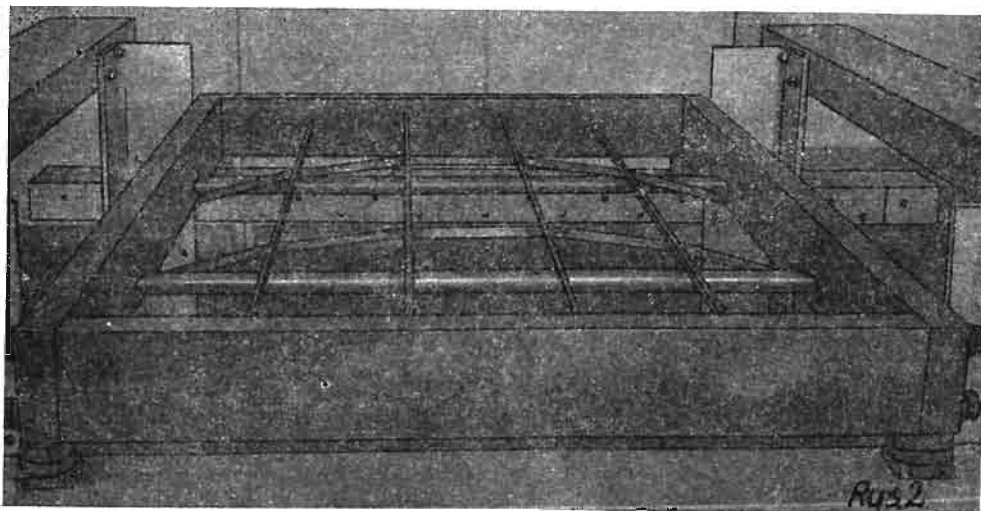
o promieniu $R = 95,4$ cm; kąt środkowy odpowiadający odcinkowi koła tworzącemu łuk kolisty wynosi $\varphi = 36^\circ$, zatem kąt φ_0 odpowiadający jednej cięciwie równa się $7^\circ 12'$. Stosunek strzałki łuku do rozpiętości f/l wynosi 0,08. Cztery poziome pręty podłużne o długości 90,0 cm w odstępach co 30,0 cm połączone są z prętami poprzecznymi. Przekroje prętów siatki rusztu są stałe na całej długości i jednakowe dla wszystkich prętów; wynoszą one 5×10 mm (porównaj rys. 1b). Węzły krzyżujących się prętów połączone są sztywno.



Rys. 1

Końce prętów zamocowane są zupełnie. Dla zapewnienia sztywnych połączeń pręty w węzłach zespawano. Spawania dokonano metodą elektryczną, jako elektrody użyto stali. Wpływy termiczne były niewielkie; spawanie prowadzono bardzo powoli. Końce prętów wpuszczone są w otwory obudowy i zaspawane jak wyżej. Obudowę stanowi sztywna stalowa rama zamknięta o wymiarach osiowych 61×92 cm, wykonana z płaskownika o przekroju poprzecznym 20×80 mm. Ramę w narożach połączone sztywno za pomocą kołków stalowych (spawanie mogłoby spowodować deformację ramy z powodu dużych wymiarów przekroju). W celu uniemożliwienia przemieszczeń poziomych, wywołanych rozporem, w podłużne pręty obudowy wmontowano dwa sztywne pręty stalowe o średnicy 20 mm symetrycznie rozmieszczone w odległości 3 cm od punktów zamocowania prętów poprzecznych. Pręty te wmontowano w taki sposób, aby uniemożliwiały odkształcenia

w osi poprzecznej obudowy na zewnątrz i do wewnątrz. Cały model jest wsparty na badawczym stendzie wykonanym z kątowników i ceowników, tworzącym sztywną ramę przestrzenną. Omawiany wyżej model wykonano w Zakładzie Aparatury Naukowej AGH. Rysunek 2 przedstawia model rusztu wraz ze stendem.



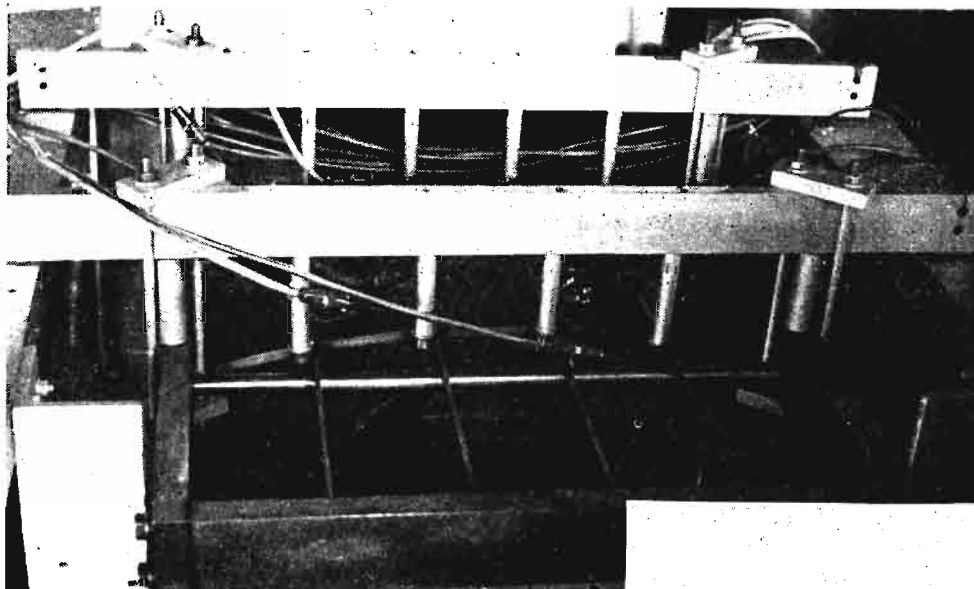
Rys. 2

4. Pomiary dynamiczne

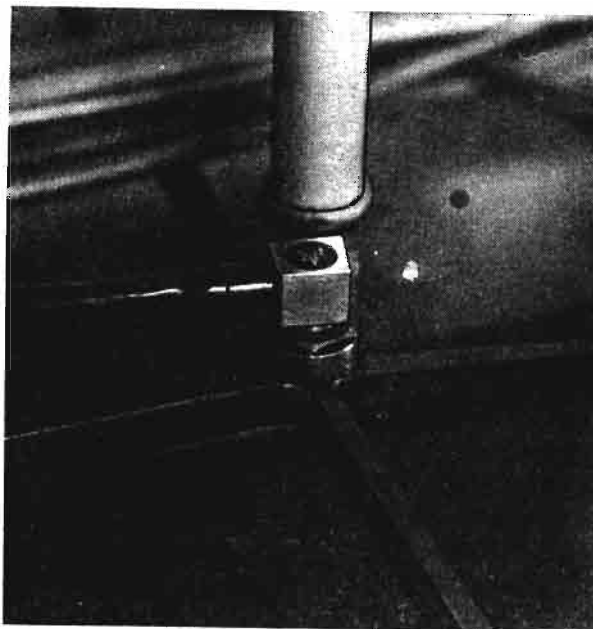
4.1. Zastosowana aparatura. Badania dynamiczne przeprowadzono w oparciu o aparaturę pomiarową będącą w dyspozycji Pracowni Badań Dynamicznych i Modelowych Katedry Dynamiki Budowli Politechniki Krakowskiej. Stosowana aparatura pomiarowa składa się z trzech zasadniczych części:

- 1) czujnika, czyli urządzenia do zmiany wielkości mechanicznej na elektryczną,
- 2) wzmacniacza lampowego do wiernego powiększania amplitud w celu uzyskania większej czułości,
- 3) urządzenia wskaźnikowego (oscyloskop elektronowy lub rejestrator).

Do pomiarów częstości i postaci drgań własnych modelu rusztu zastosowano bezdotykowe indukcyjne czujniki przemieszczenia typu OT18, produkcji Zakładu Produkcji Doświadczalnej Instytutu Lotnictwa z 1966 r. Czujniki OT18 przeznaczone są do pomiaru przemieszczeń lub drgań elementów maszyn w zakresie $\pm 0,15$ mm. Czujniki te można łatwo ustawiać nad badanym punktem. Zaletą omawianych tu czujników jest fakt braku dotyku do przedmiotu; czujnik nie obciąża konstrukcji, co jest szczególnie ważne w pracy na modelach. Czujniki te mogą pracować w dużym pasmie częstości. Dla umocowania czujników nad węzłami wykonano specjalne wsporcze urządzenie. Najczęściej urządzenie takie przymocowuje się do stendu, na którym spoczywa model. W tym przypadku konstrukcję wsporczą dla czujników połączono sztywno z ramą obudowy modelu rusztu, co wyeliminowało możliwość zakłóceń pomiarów na skutek ewentualnych ruchów modelu w stosunku do stendu spowodowanych np. odkształceniami stropu, na którym stoi stend. Rysunek



Rys. 3a



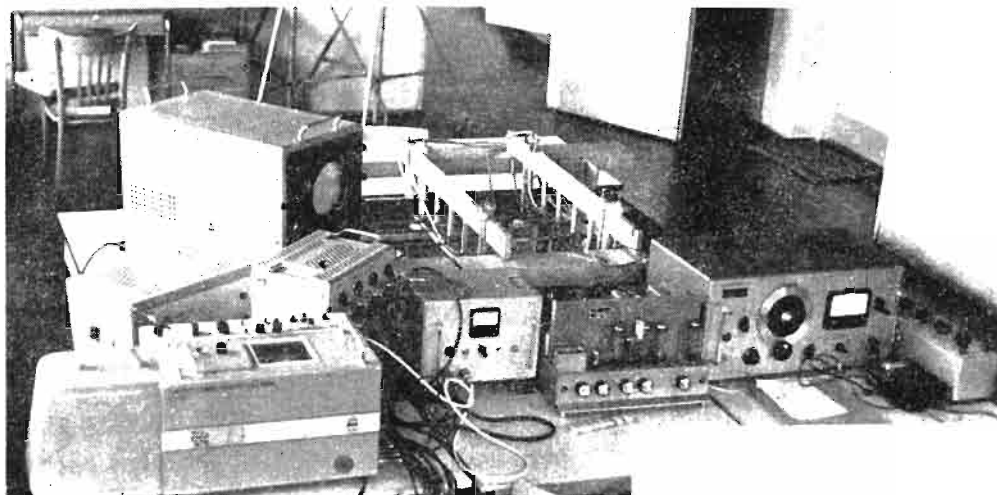
Rys. 3b

3a, b przedstawia sposób połączenia urządzenia wsporcze do obudowy wraz z zamocowanymi czujnikami i podłączonymi kablami.

Jako wzmacniacza lampowego użyto 8-kanalowego elektronicznego miernika wielkości mechanicznych typu RF-01-A, B, również produkcji ZPD Inst. Lotn. Miernik ten może

być stosowany do pomiaru przemieszczeń drgań, przyspieszeń i ciśnień przy użyciu odpowiednich do tych wielkości przetworników. Aparatura daje możliwości rejestracji mierzonych wielkości przy użyciu oscylografu pętlicowego lub katodowego. Aparatura RF-01-A, B może pracować w granicach 0–500 Hz, a z większym błędem przy 700 Hz. Dość wysoki zakres częstości jest potrzebny zwłaszcza przy wyższych harmonicznym postaciach drgań modeli wykonywanych z metalu, a właśnie stalowy model rusztu jest przedmiotem badań. Czujniki OT18 współpracują z aparaturą typu RF01.

W toku pomiarów stosowano dwustrumieniowy oscylo-synchroskop, typ Ok7-2s. Jest to przyrząd wysokiej klasy, przeznaczony do badań i pomiarów jednorazowych i okresowych przebiegów elektrycznych. Dla trwałego zapisu przebiegów drgań stosowano 12-kanalowy rejestrujący oscylograf pętlicowy 12LS-1, typ — Nr 462110, produkcji RFT

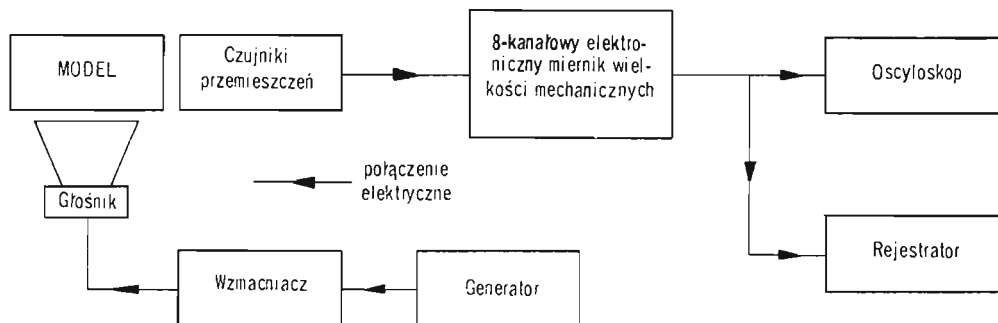


Rys. 4

(NRD). Zaletą wymienionego rejestratora jest możliwość zapisu z różnymi posuwami taśmy od 0,16 m/sek, do 1,6 m/sek. Szczególnie ważna przy wysokich częstościach drgań jest górna granica. «Rozciągnięty» zapis łatwiej pozwala przy wysokich częstościach określić fazowość rejestrowanych przebiegów. Rysunek 4 przedstawia komplet aparatury.

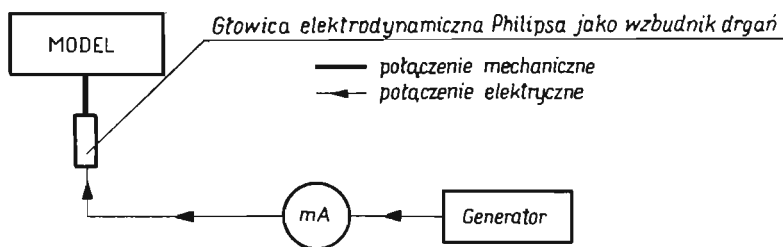
Przed kilku latami autor badał drgania własne identycznego modelu stalowego rusztu w b. Pracowni Modelowego Badania Powłok ZMOC IPPT. Model rusztu wykonany był również przez Zakład Ap. Nauk. AGH. Wyposażenie aparaturowe było tam dużo uboższe. Do pomiarów drgań zastosowano wówczas czujniki pojemnościowe (tylko dwa) specjalnie skonstruowane do badań dynamicznych modeli powłok. W pracach [6, 7, 8] podane są szczegółowe zasady, na których oparte jest działanie omawianych czujników. Zarówno obecnie, jak i poprzednio, jako czynnika pobudzającego do drgań używano w pierwszym rzędzie głośnika akustycznego. W toku obecnych pomiarów stosowano głośnik GD36/25 o mocy 25 W. W poprzednich badaniach był to głośnik o mocy 40 W. Całe urządzenie wymuszające składało się z generatora napięcia zmiennego (generator RC, typ PO10, zakres częstości 1–20 kHz, produkcja ZO PAN, Warszawa) oraz wzmacniacza (WR75/62,

produkcja Państw. Zakł. Teletransm., Warszawa) zasilającego głośnik akustyczny ustawiony pod modelem. Na rys. 5 podano blokowy schemat aparatury pomiarowo-rejestrującej oraz pobudzającej drgania. Oprócz głośnika, jako źródła drgań używano głowicę elektrodynamiczną PR9261 z zestawu Philipsa stosowaną najczęściej do pomiaru drgań względnych. Zakres działania $0 \div 1000$ Hz. Nacisk wywierany końcówką czujnika jest stosunkowo mały, jednak o ile zostanie osiągnięta częstość rezonansowa modelu, amplitudy drgań mogą być duże. Końcówka czujnika wywołuje nacisk 3,08 g na mA. Przy maksymal-



Rys. 5

nym natężeniu prądu amplituda siły wynosi 77 g. Stała siła sprężyny przyciskającej głowicę do przedmiotu wynosi 850 g. Wadą głowicy stosowanej jako źródła drgań jest wywieranie nacisku na przedmiot. Dla modeli metalowych, będących sztywnymi konstrukcjami (stąd wysokie częstości drgań własnych), nie jest to nacisk wielki i może dawać minimalny błąd w pomiarach. W skład urządzenia wymuszającego oprócz głowicy Philipsa wchodzi jeszcze generator napięcia (jak wyżej) oraz miliamperomierz (tutaj EAW). Na



Rys. 6

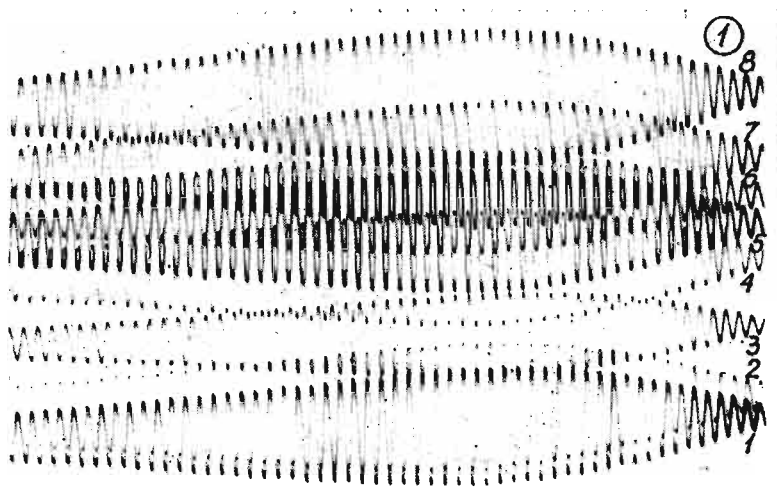
rys. 6 podano schemat blokowy urządzenia pobudzającego drgania w przypadku stosowania głowicy Philipsa jako źródła drgań. Przy badaniach wykonywanych w b. Pracowni Modelowego Badania Powłok jako czynnika pobudzającego do drgań, oprócz głośnika akustycznego, użyto elektromagnesu (wraz z generatorem i wzmacniaczem). Stosowanie elektromagnesu jest możliwe, ponieważ model wykonany był ze stali.

4.2. Opis i wyniki pomiarów. Pomiary drgań¹⁾ prowadzono w ośmiu węzłach krzyżujących się prętów. Nad każdym węzłem umieszczony był bezdotykowy czujnik OT18. Drgania

¹⁾ W przeprowadzaniu pomiarów obok autora brali udział pracownicy Pracowni Badań Dynamicznych i Modelowych: mgr inż. Mieczysław Pieronek i technicy: Antoni Abratański i Zbigniew Nasiński.

wzbudzano ze zmienną częstością i w ten sposób poszukiwano stref rezonansowych. Dla wstępnej wizualnej oceny częstości rezonansowych przebiegi obserwowano na oscyloskopie. Na oscyloskopie można było jednocześnie obserwować dwa przebiegi (dwa punkty pomiarowe). Dla określenia wzajemnego położenia ośmiu badanych punktów, w toku drgań, przyjmowano jeden przebieg jako porównawczy (odpowiedni czujnik stale połączony z oscyloskopem), a pozostałe czujniki kolejno podłączano do oscyloskopu. W toku obserwacji stwierdzono, że dla każdej wzbudzonej częstości, mierzone częstości drgań wszystkich badanych punktów były jednakowe. Obserwując przebiegi na oscyloskopie stwierdzono, że mamy do czynienia z falą stojącą. W następnej kolejności podłączono rejestrator dla trwałego zapisu wszystkich ośmiu przebiegów. Na podstawie wibrogramów oceniono strefy rezonansowe i porównywano je z wynikami otrzymanymi na oscyloskopie. Otrzymywano te same rezonansowe częstości drgań.

Dla wykrycia częstości rezonansowych, odpowiadających częstości drgań własnych układu, wzbudzając drgania głowicą elektrodynamiczną wielokrotnie zmieniano jej usytuowanie. I tak przykładając głowicę w punktach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 oraz w punktach *a, b, c, d, e, f, g* i *h* (bądź w pobliżu tych punktów — porównaj rys. 1) otrzymano dwie najniższe częstości drgań własnych $n_1 = 207$ Hz i $n_2 = 263$ Hz. Dla n_1 postać odkształcenia



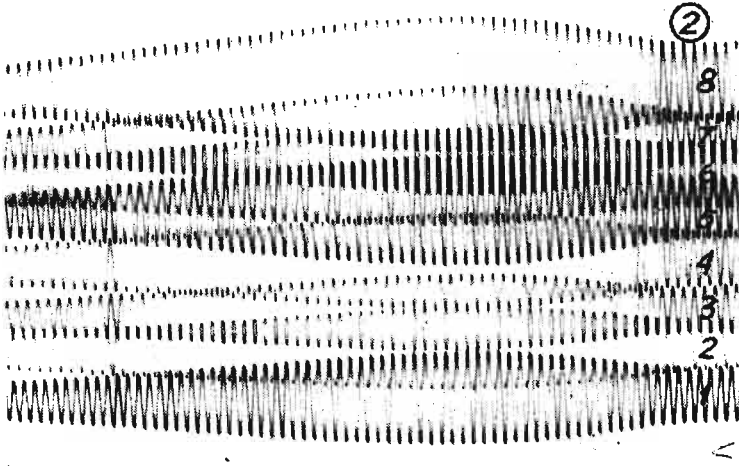
Rys. 7

rusztu jest symetryczna względem osi x i antysymetryczna względem osi y . Dla n_2 postać odkształcenia rusztu jest antysymetryczna względem osi x i y .

Wzajemne usytuowanie węzłów krzyżujących się prętów dla n_1 przedstawia wibrogram²⁾ pokazany na rys. 7, a dla n_2 wibrogram pokazany na rys. 8. Widoczne jest gwałtowne narastanie amplitud przy zbliżaniu się do częstości rezonansowej i również szybkie ich zmniejszanie się przy oddaleniu się od rezonansu. Numeracja przebiegów na wibrogramach odpowiada oznaczeniom węzłów rusztu (porównaj rys. 1). Wzbudzając głowicą drgania

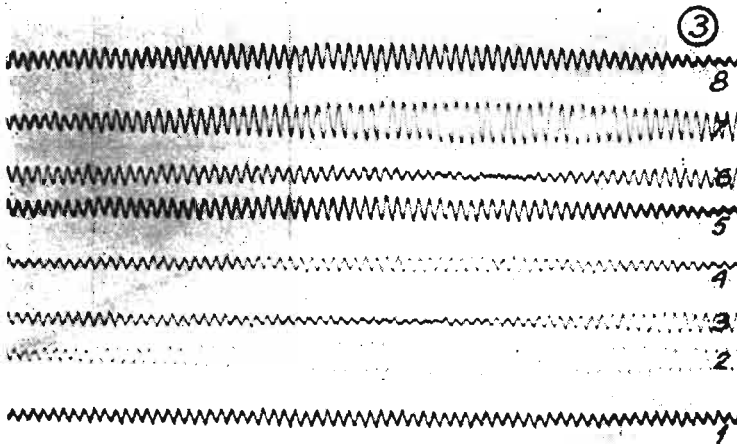
²⁾ Znacznik czasu na wszystkich wibrogramach oznacza 0,01 sek.³

w punkcie j lub k (rys. 1) znajdowano tylko n_1 , bowiem dla n_2 przez punkty i, j, k, l przechodzi oś węzłów o zerowej amplitudzie. Te same dwie pierwsze rezonansowe częstotliwości drgań otrzymano przy wzbudzeniu drgań głośnikiem akustycznym. O ile autorowi wiadomo, dotychczas głośnika akustycznego jako wzbudnika drgań używano dla modeli konstrukcji



Rys. 8

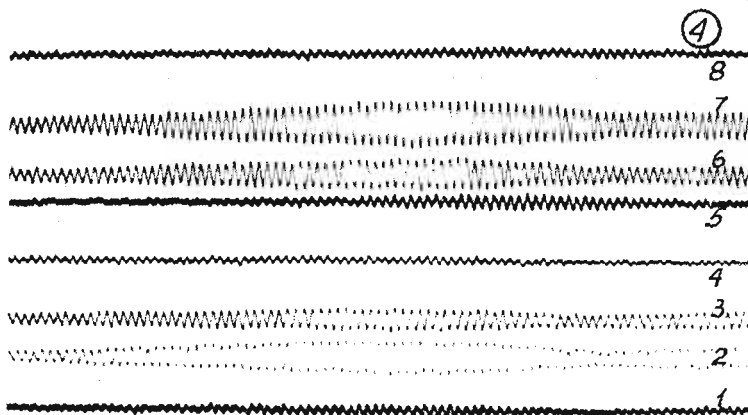
powierzchniowych (np. dla powłok w [6]). Okazało się jednak, że może on z powodzeniem być stosowany do wzbudzania drgań modeli układów prętowych. Amplitudy drgań wymuszone głośnikiem są jednak znacznie mniejsze, niż w przypadku posługiwania się głowicą



Rys. 9

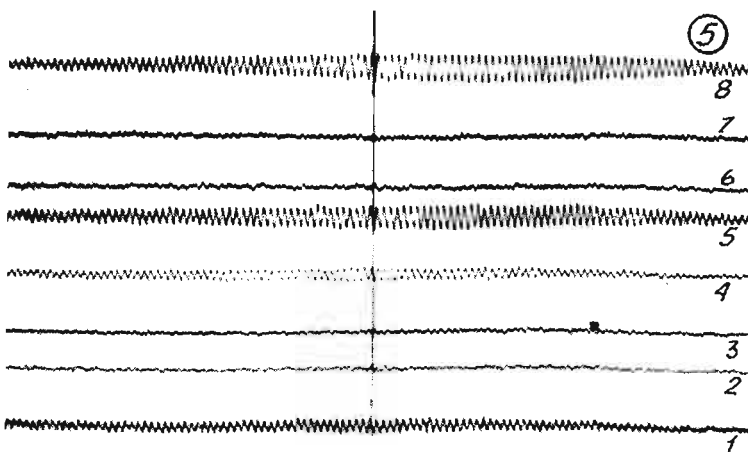
elektrodynamiczną. Warto nadmienić, że gdy w pracy [9] posługiwano się głośnikiem 40-watowym, wówczas dla pierwszej częstotliwości drgań amplitudy były tak duże, że z łatwością wyczuwało się je palcami. Znacznie większe amplitudy drgań zarówno dla n_1 jak i n_2 uzys-

kano nawet przy pomocy głośnika 25-watowego, dzięki zastosowaniu prostego zabiegu. Dla n_1 z uwagi na antysymetrię odkształcenia względem osi y zasłonięto połowę głośnika (względem osi y), a dla n_2 z uwagi na antysymetrię względem obu osi zasłonięto 3/4 tuby głośnika. Wibrogram pokazany na rys. 9 przedstawia przebiegi drgań wzbudzone głośnikiem o częstotliwości 263 Hz.



Rys. 10

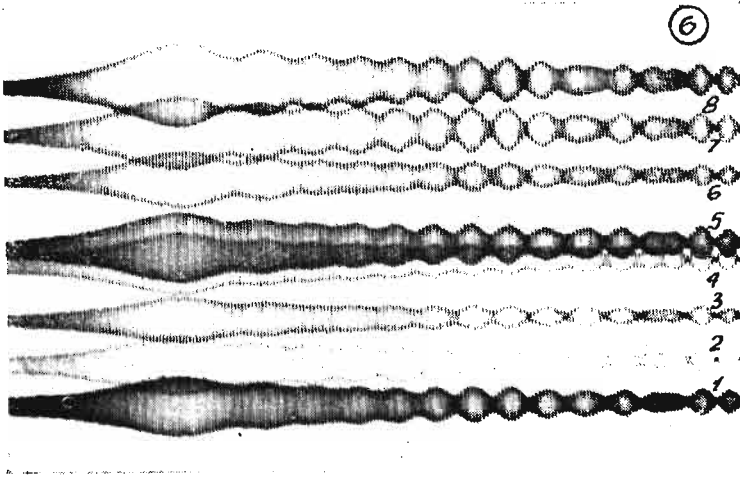
Wzbudzając drgania w punktach m i n otrzymano dwie dalsze częstotliwości drgań własnych $n_3 = 285$ Hz i $n_4 = 340$ Hz. Postacie odkształcenia układu, towarzyszące tym częstotnościom, są symetryczne względem osi y oraz dla n_3 symetryczne względem osi x i dla n_4 antysyme-



Rys. 11

tryczne względem tejże osi. Dla przykładu na rys. 10 zamieszczono wibrogram, odpowiadający n_4 (wzbudzenie drgań głośnikiem). Wzbudzając drgania w punktach m i n nie udaje się zmierzyć n_1 i n_2 ; przez wymienione punkty przechodzi wówczas linia węzłów o zero-

wej amplitudzie. Te same częstotliwości n_3 i n_4 uzyskano wzbudzając drgania głośnikiem. Dla zwiększania amplitud drgań przy n_4 zasłaniano pół głośnika (względem osi x). Wprawienie rusztu w drgania, odpowiadające wyższej postaci odkształcenia, jest coraz trudniejsze. Drgania mają mniejszą amplitudę oraz wymagają lepszego dostrojenia czynnika pobudzającego do drgań o częstotliwości rezonansowej rusztu. Mimo tego udało się wykryć zarówno przy pomocy głowicy jak i głośnika dalsze strefy rezonansowe przy częstotliwości $n = 430$ Hz, a nawet przy $n = 580$ Hz (tylko głowicą). Wibrogram na rys. 11 przedstawia przebiegi drgań wywołane głośnikiem dla $n = 430$ Hz. Postacie odkształcenia są symetryczne względem obu osi; charakterystyczne jest, że środkowe węzły krzyżujących się prętów osiągają w stosunku do bocznych bardzo małe amplitudy. Dla określenia postaci odkształceń przy wyższych częstotściach osiem punktów pomiarowych już nie wystarcza, bowiem zarówno w kierunku podłużnym (y), jak i przede wszystkim poprzecznym (x) tworzy się kilka półfal. Pomiar odkształcenia układu jest wówczas również możliwy. Jeden punkt przyjmuje się jako stały, a zmieniając w sposób ciągły położenie drugiego punktu badawczego i rzucając oba przebiegi na dwustrumieniowy oscyloskop można wizualnie ustalić postacie odkształ-



Rys. 12

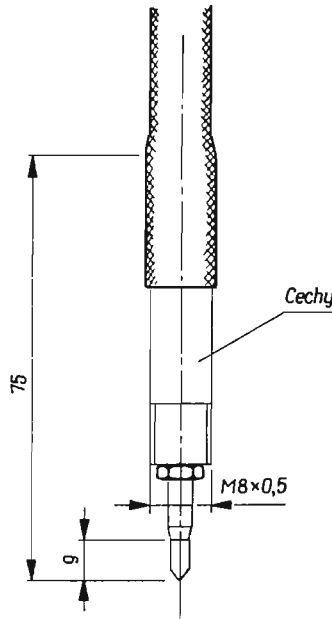
cenia. Jest to sposób bardzo żmudny i pracochłonny. Wiadomo, że jednak z punktu widzenia technicznego najważniejsza jest najniższa częstotliwość drgań własnych, jej też towarzyszą największe amplitudy drgań. W pracy [6] w oparciu o rozważania teoretyczne nad układami prętowymi i płytami oraz na podstawie pomiarów drgań na modelach powłok sformułowano założenie wiążące wyboczenie układu z jego postacią drgań. Według tego założenia pierwsza najniższa (podstawowa) postać drgań układu jest zgodna z postacią wyboczenia tego układu. Ponadto stwierdzono tam, że postać wyboczenia układu ma charakter podobny do odkształcenia tego układu pod działaniem siły skupionej. Miejsce zaczepienia siły skupionej jest zasadniczo dowolne. Zatem, jeśli się określi odkształcenia układu pod działaniem siły skupionej, to znana będzie zarazem podstawowa postać drgań układu. Na podstawie pomiarów na modelu rusztu, przy wzbudzaniu drgań głowicą elektrodynamiczną, która spełnia tu rolę siły skupionej, udało się określić postać odkształcenia nie tylko dla podstawowej, ale i dla wyższych częstotliwości drgań. Przy najwolniejszym

przesuwie taśmy rejestratora (0,16 m/sek) w trakcie szybkiego zmieniania wzbudzonych częstości głowicą w strefie n_1 i n_2 uzyskano odcinki przebiegów drgań odpowiadające tzw. efektowi Sommerfelda obserwowanemu w układzie drgającym o jednym stopniu swobody (z tłumieniem) przy zmiennym obciążeniu siłą bezwładności, pochodzącą od nierównoważonych mas silnika, pracującego ze zmiennymi częstościami w strefie rezonansu (porównaj np. [4, 12, 13]). Wibrogram na rys. 12 jest tego przykładem — niestabilny proces (dla strefy $n_2 = 262$ Hz) przejawia się silnymi dudnieniami.

Przy pomiarach przeprowadzonych w pracy [9] z uwagi na skromne ówczesne wyposażenie aparaturowe nie rejestrowano wyników pomiarów, a częstości drgań oceniano na podstawie generatora zmiennych częstości służącego do wymuszania drgań wzbudnikiem. Postacie odkształcenia oceniano przez obserwację dwu przebiegów na oscyloskopie; jeden przebieg przyjmowano jako porównawczy, drugi przebieg pochodzi od czujnika, którego położenie zmieniano. Na tej podstawie oceniono fazowość wszystkich badanych punktów i określono odpowiednie postacie odkształcenia. W toku pomiarów mierzono wówczas tylko dwie najniższe częstości. Otrzymano $n_1 = 220$ Hz i $n_2 = 248$ Hz. Postacie odkształcenia były takie same, jak w toku obecnych pomiarów.

5. Pomiar statyczne

Traktując ruszt jako schemat ustroju z ośmioma masami skupionymi w węzłach krzyżujących się prętów otrzymujemy układ o ośmiu stopniach swobody. Powyższe przyjęcie

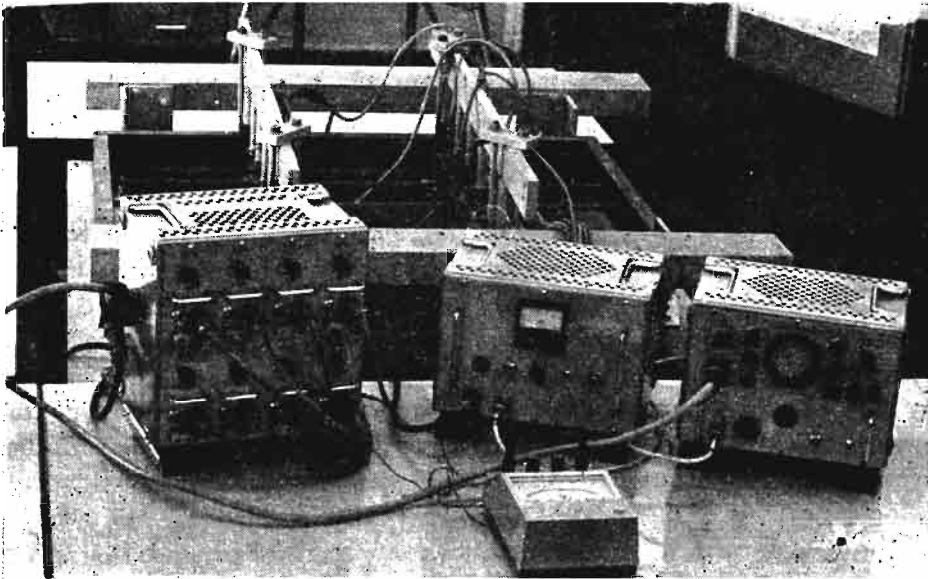


Rys. 13

w omawianym przypadku jest możliwe, ponieważ ruszt ma małą wyniosłość ($f/l = 0,08$) i składowe poziome siły bezwładności można wówczas pominąć (założenie stosowane dla powłok o małej wyniosłości). Dla przyjętego wyżej modelu układu z masami skupionymi

możliwe jest wyznaczenie częstości i postaci drgań własnych, jeśli znane są jednostkowe przemieszczenia punktów przyłożenia mas. Dla otrzymania tych wielkości przeprowadzono badania pozwalające wyznaczyć pionowe ugięcia węzłów krzyżujących się prętów.

5.1. Stosowana aparatura. Pomiary ugięć węzłów wykonano dwukrotnie przy pomocy dwu różnych zestawów aparatury. Pierwszy zestaw obejmował aparaturę elektryczną. Do pomiaru ugięć badanych punktów zastosowano indukcyjne czujniki przemieszczeń liniowych typu OT12 o zakresie ± 1 mm (4 sztuki) i typu OT14 o zakresie ± 5 mm (4 sztuki) produkcji ZPD Inst. Lotn. (1966 r.). Przy pomocy tych czujników mierzono przemieszczenia rzędu ułamka mikrometra. Czujniki te przymocowywano do omówionej już w p. 4.1 konstrukcji wsporczej przeznaczonej dla czujników bezdotykowych OT18. Czujniki te współpracują z aparaturą RF01. Czujniki te wywierają minimalny nacisk na przedmiot. Szkic czujnika OT12 podaje rys. 13, czujnik OT14 ma podobny wygląd. Do «wyzerowania» czujników stosowano cały zestaw 8-kanalowego miernika RF-01,A,B o którym była już mowa w p. 4.1.



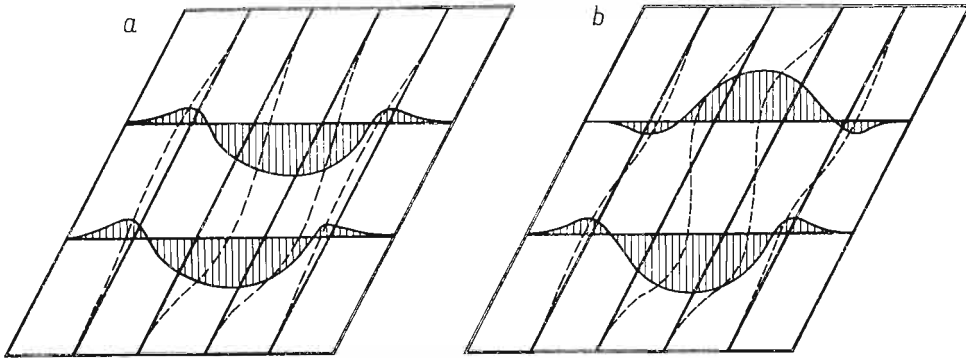
Rys. 14

Rys. 14 przedstawia komplet aparatury elektrycznej wraz z modelem. Drugi zestaw aparatury składa się ze zwykłych czujników zegarowych o dokładności 0,001 mm. Konstrukcja wsporcza posłużyła do umocowania podstaw czujników.

5.2. Opis i wyniki pomiarów. Pomiar przemieszczeń przeprowadzono przy obciążeniu węzłów krzyżujących się prętów siłami 2,0, 3,0, 5,0 i 7,0 kG. Węzły obciążano kolejno 1 ÷ 8. Pomiary powtarzano kilkakrotnie dla obu zestawów aparatury. Zamieszczone poniżej wielkości ugięć otrzymano z pomiarów przy pomocy czujników OT12 i OT14. Wyniki otrzymane z pomiarów czujnikami zegarowymi były bardzo bliskie lub równe otrzymanym aparaturą elektryczną. Stwierdzono zupełną liniową zależność ugięć od obciążenia oraz

Obliczone z odpowiednich równań jednorodnych postacie odkształcenia są takie same, jak pomierzone w toku pomiarów dynamicznych.

Przykładowo na rys. 15 schematycznie zaznaczono postacie odkształcenia dla n_3 i n_4 wyznaczone na podstawie pomiarów statycznych. Porównując rys. 15b odpowiadający $n_4 = 333$ Hz z wibrogramem na rys. 10, odpowiadającym $n_4 = 340$ Hz stwierdzamy na tym ostatnim rysunku różnicę w fazie w jednym skrajnym węźle; punkt ten praktycznie



Rys. 15

nie podlega drganiom; stąd prawie zerowa jego amplituda, a poza tym trudno określić fazowość tego punktu z uwagi na jej niezupełnie ustalony charakter. Najniższa częstość drgań obliczona na podstawie przemieszczeń wyznaczonych czujnikami zegarowymi wyniosła 229 Hz.

6. Porównanie wyników pomiarów i obliczeń

Z porównania wyników badań dynamicznych i statycznych widzimy, że różnią się one w granicach nie przekraczających 10%. Jako szczególnie przydatne należy ocenić badania dynamiczne, które z powodzeniem można stosować i dla rusztów cylindrycznych o dużej wyniosłości.

W pracy [9] przeprowadzono dwoma sposobami obliczenia dwu pierwszych częstości drgań własnych i postaci odkształceń im odpowiadających omawianego tu modelu rusztu. Prowadząc obliczenia metodą sił z uwzględnieniem wpływu sił podłużnych (dla dwu pierwszych częstości mają one znikomy wpływ mimo małej wyniosłości układu), poziomych składowych sił bezwładności (ich wpływ jest również niewielki) i momentów skręcających (sztywne połączenia w węzłach) otrzymano $n_1 = 220$ Hz. Licząc w sposób przybliżony otrzymano $n_2 = 258$ Hz. Na podstawie badań przeprowadzonych dawniej w [9], jak wspomniano w p. 4.2, z pomiarów dynamicznych otrzymano $n_1 = 220$ Hz i $n_2 = 248$ Hz; z pomiarów statycznych (prowadzonych tylko czujnikami zegarowymi o dokładności 0,01 mm) $n_1 = 235$ Hz i $n_2 = 258$ Hz. Wynik z pomiarów dynamicznych dla n_1 dokładnie zgadzał się z obliczeniowym, co, jak należy sądzić, było dziełem przypadku. Z kolei n_2 z pomiarów statycznych było zgodne z obliczeniowym. Obecnie, z uwagi na znacznie lepsze wyposażenie laboratorium w aparaturę pomiarową ponownie przeprowadzono

badania, lecz w nieporównanie większym zakresie, na nowym, identycznym modelu. Z obu badań otrzymano porównywalne wyniki, co pozwala sformułować wniosek o celowości i przydatności tego rodzaju badań na modelach. Okazuje się, że dynamiczny pomiar na modelach rusztów cylindrycznych pozwala określać nie tylko podstawową ale i kilka następnych częstości i postaci drgań własnych.

Literatura cytowana w tekście

1. F. BLEICH, E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, Berlin-Wien 1927.
2. J. CZULAK, *Stateczność rusztu walcowego*, Arch. Mech. Stos., VI/1954
3. S. ДРОВОТ, *О анализе размеровой*, Zastosowania Matematyki, z. 4, 1954.
4. А. П. Филиппов, *Колебания упругих систем*, Киев 1956.
5. К. Финк, X. Рорбах, *Измерение напряжений к деформаций*, Москва 1961 (tłumaczenie z niemieckiego)
6. A. LISOWSKI, *Stateczność i drgania powłok w oparciu o wyniki badań modelowych*, Rozpr. Inżyn. t. III, z. 89, 1957.
7. A. LISOWSKI, A. ORMICKI, B. MIĄSIK, *Czujnik pojemnościowy do pomiaru drgań*, Inż. i Budown., nr 8' 1956.
8. A. LISOWSKI, A. ORMICKI, B. MIĄSIK, *Pomiary drgań modeli powłok za pomocą aparatury elektroakustycznej*, Inż. i Budown. nr 8, 1957.
9. E. MACIĄG, *Analityczne i modelowe wyznaczanie częstości i postaci drgań własnych pewnych układów prętowych*, Rozpr. doktorska, Bibl. Gł. PK, 1963.
10. L. MÜLLER, *Teoria podobieństwa mechanicznego*, WNT, Warszawa 1961.
11. Г. И. Пшеничников, *Расчет сетчатых цилиндрических оболочек*, Москва 1961.
12. А. П. СУБАЧ, *Экспериментальное исследование влияния сил вязкого сопротивления на области неустойчивости колебательных с двигателем ограниченной мощности*, Вопросы динамики и прочности, Выпуск VIII.
13. А. П. СУБАЧ, *Экспериментальное исследование влияния сил сухого трения на области неустойчивости колебательных систем с двигателем ограниченной мощности*, Вопросы динамики и прочности, Выпуск VIII.

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

На основе анализа размерностей определен закон модельного подобия для колебаний решеток. Опираясь на этот закон можно определять частоту колебаний действительной конструкции измеряя соответствующие частоты на модели. Приводятся результаты статических и динамических исследований стальной модели цилиндрической решетки. Описывается также сама модель и применяемая аппаратура. Экспериментальные данные сравниваются с результатами полученными теоретическим путем.

S u m m a r y

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL GRIDS

Using the dimensional analysis the law of model similarity for vibrations of grids is determined. Thus the frequencies of vibrations of the natural object may be calculated, if the frequencies of a model are measured. Presented are static and dynamic investigations of a steel model of a cylindrical grid. Described is the model and the measuring equipment. Experimental results are compared with those obtained from the theoretical analysis.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1969 r.

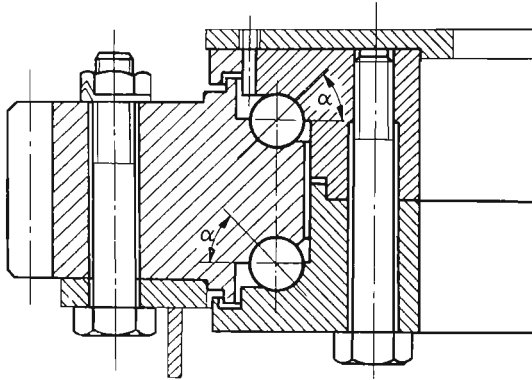


RÓWNANIA STATYKI DWURZĘDOWEGO KULKOWEGO ŁOŻYSKA WIĘNCOWEGO

TERESA GIB CZYŃSKA, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Konstrukcja łożysk wieńcowych znacznie różni się od konstrukcji katalogowych łożysk tocznych, powszechnie stosowanych w budowie maszyn. Charakterystyczną cechą dwurzędowych łożysk wieńcowych są duże wymiary średnic, wynoszące od około 0,5 m do około 3,5 m [23], przy czym jeden z pierścieni łożyska — wewnętrzny lub zewnętrzny — posiada wieńiec zębaty (rys. 1). Łożyska te dzięki swej konstrukcji przenoszą siły osiowe,



Rys. 1

promieniowe (kąt działania $0 < \alpha < 90^\circ$) i momenty oraz zapewniają dużą dokładność i pewność przenoszonego ruchu. W stosunku do tradycyjnych rozwiązań z czopem centrującym, posiadają zwartą budowę i są lżejsze. Wymagają jednak znacznie sztywniejszych konstrukcji wsporczych oraz nie mogą być obciążone bezpośrednio siłami skupionymi. Zatem uogólnione siły, przenoszone przez łożysko, są wypadkowymi wszystkich obciążeń zewnętrznych, działających na część obrotową maszyny, związaną z łożyskiem.

Analizą rozkładu sił na poszczególne kulki w łożysku wieńcowym oraz określeniem ich maksymalnych wartości zajmowali się GOLDSZTEIN [7], OHNRICH [15], KAZANSKIJ [10], MATTHIAS [11], oraz SZUCKI [21]. Przy czym GOLDSZTEIN, MATTHIAS i SZUCKI podali metodę obliczania łożysk o kącie działania $\alpha = 90^\circ$ (wzdłużnych dwukierun-

kowych) obciążonych siłą osiową i momentem. Natomiast KAZANSKIJ i OHNRICH uwzględnili działanie siły promieniowej na łożysko, lecz obliczanie maksymalnych nacisków na kulki oparli na zasadzie superpozycji sił. Stosowanie w tym przypadku zasady superpozycji jest niewłaściwe, gdyż na podstawie wzorów Hertza [9] dla styku punktowego w zakresie odkształceń sprężystych mamy nieliniową zależność między odkształceniem a siłą nacisku

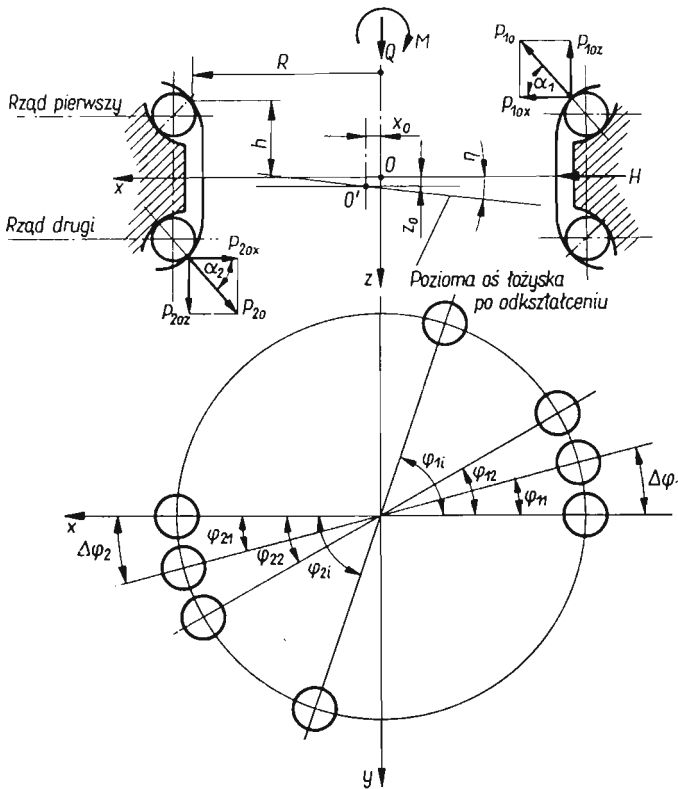
$$(1.1) \quad f = CP^{2/3};$$

C jest stałą zależną od geometrii i od materiału stykających się elementów.

Jak z powyższego wynika, do tej pory brak jest dostatecznie dokładnych metod pozwalających na określenie sztywności łożyska i sił działających na poszczególne kulki. Nie został również wyjaśniony wpływ kąta działania $\alpha < 90^\circ$ na pracę łożyska.

2. Założenia

Opierając obliczenia na teorii Hertza [9] oraz na metodzie Stribecka [20] przyjmujemy następujące założenia:



Rys. 2

1. Naprężenia zastępcze nie przekraczają granicy proporcjonalności.
2. Powierzchnie stykających się ciał są idealnie gładkie (nie występuje tarcie) oraz posiadają idealne kształty geometryczne.

3. Odształcenie występuje tylko w miejscach styku kulek z bieżniami. Powierzchnia styku jest płaska, a jej wymiary są małe w porównaniu z promieniami krzywizn stykających się elementów.

4. Pierścienie łożyska są sztywne. Pierścień zewnętrzny nie przemieszcza się, natomiast pierścień wewnętrzny przemieszcza się jako ciało sztywne.

5. Obciążenie działa w jednej płaszczyźnie.

Oprócz powyższych założeń przyjęto dodatkowo: mały stosunek h/R (rys. 2), co pozwala na pominięcie poziomych składowych przemieszczenia kulek związanych z obrotem pierścienia; luz łożyskowy — równy zeru.

3. Określenie podstawowych wielkości

W pracy zajmować się będziemy łożyskiem obciążonym uogólnionymi siłami Q , H i M , leżącymi w jednej płaszczyźnie. Siły te są wypadkowymi wszystkich obciążeń zewnętrznych działających na część obrotową maszyny związaną z łożyskiem.

Za wielkości dodatnie uogólnionych obciążeń będziemy uważali ten moment M i te siły Q , H , których zwroty są zgodne ze zwrotami uogólnionych sił, przedstawionych na rys. 2. Rozkład nacisków na kulki w łożysku zależy od wartości i znaków (zwrotów) poszczególnych sił zewnętrznych.

Dla ujęcia całości zagadnienia rozkładu sił wystarczy rozpatrzyć dwa układy obciążeń zewnętrznych, mianowicie jeden układ taki, jak na rys. 2, oraz drugi różniący się od pierwszego jedynie znakiem siły H .

Dla innych możliwych wariantów obciążeń zewnętrznych rozkład sił na kulki będzie symetryczny lub antymetryczny w stosunku do rozkładu sił wewnętrznych, wynikającego z wyżej wymienionych dwóch układów.

Na skutek działania obciążeń zewnętrznych pierścień wewnętrzny wraz z kulkami przemieści się w kierunku osi x i z odpowiednio o x_0 i z_0 , a ponadto obróci się jako bryła sztywna dookoła osi y o kąt η (rys. 2).

W łożysku nieobciążonym, środek każdej kulki leży na prostej łączącej punkty styku kulki z poszczególnymi pierścieniami i przechodzącej przez środki krzywizn dwu bieżni w płaszczyźnie południkowej. Kąt działania zawarty między tą prostą a osią x (rys. 2) jest stały dla wszystkich kulek znajdujących się w jednym rzędzie i dla rzędu pierwszego wynosi α_1 , a dla drugiego α_2 . W praktyce najczęściej stosuje się łożyska, w których kąty działania w obu rzędach są sobie równe

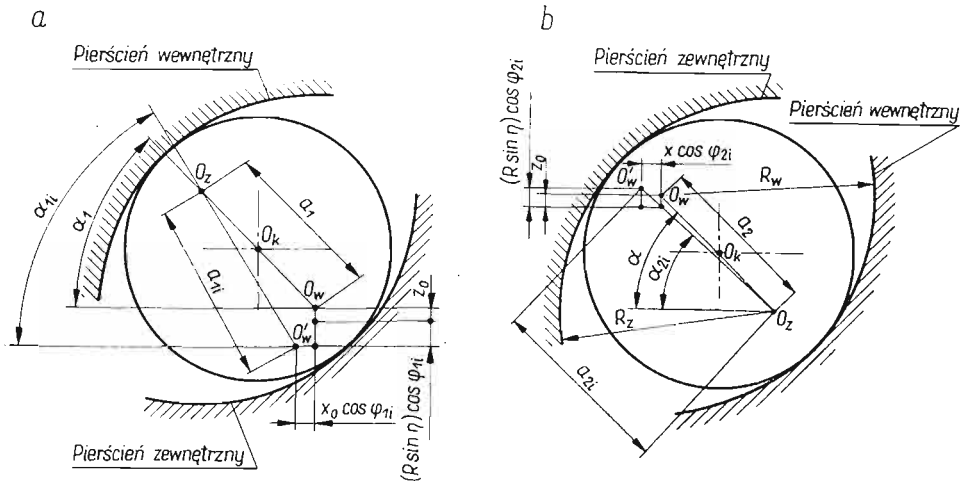
$$(3.1) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

Gdy pierścień wewnętrzny wraz z kulkami przemieści się pod wpływem obciążenia, wówczas kąt działania każdej kulki ulegnie zmianie i będzie funkcją kąta φ (rys. 2), określającego położenie kulki. Kąt ten oznaczать będziemy przez α_{1i} — dla i -tej kulki rzędu pierwszego i α_{2i} — dla i -tej kulki rzędu drugiego (rys. 3). Jeżeli założymy, że krzywizna bieżni w płaszczyźnie południkowej jest równa zeru [14,16], kąt działania mimo odształcania się kulek i bieżni nie ulegnie zmianie i w dalszym ciągu będzie obowiązywała zależność (3.1).

Zbliżenie dwu pierścieni mierzone wzdłuż prostej łączącej punkty styku kulek z bieżniami (rys. 3) wynosi

$$(3.2) \quad \bar{f}_{mi} = a_{mi} - a_m; \quad m = 1, 2,$$

gdzie a_m jest odległością między środkami krzywizn w płaszczyźnie południkowej bieżni zewnętrznej i wewnętrznej rzędu pierwszego lub drugiego przed odkształceniem, zaś a_{mi} jest odległością między środkami krzywizn w płaszczyźnie południkowej bieżni zewnętrznej i wewnętrznej dla i -tej kulki rzędu pierwszego lub drugiego po odkształceniu.



Rys. 3

Jeżeli $a_{mi} > a_m$, wówczas pierścienie w punktach styku z i -tą kulką oraz kulka ulegają odkształceniu sprężystemu, które odpowiada zbliżeniu tych pierścieni $f_{mi} = \bar{f}_{mi}$; $m = 1, 2$.

Gdy $a_{mi} \leq a_m$, przyjmujemy, że odkształcenie i -tej kulki i pierścieni jest równe zero $f_{mi} = 0$.

Odległość a_{mi} możemy wyznaczyć jako funkcję uogólnionych przemieszczeń x_0 , z_0 i η , z zależności geometrycznych przedstawionych na rys. 3.

Zbliżenie \bar{f}_{mi} wyrazimy zależnością

$$(3.3) \quad \bar{f}_{mi} = [(a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi})^2 + (a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi})^2]^{1/2} - a_m; \quad m = 1, 2.$$

Znaki górne obowiązują dla rzędu pierwszego, znaki dolne dla rzędu drugiego.

W przypadku, gdy $a_m = \infty$, tzn. gdy krzywizna co najmniej jednej bieżni w płaszczyźnie południkowej jest równa zero, zbliżenie określimy wzorem prostszym

$$(3.4) \quad \bar{f}_{mi} = \pm z_0 \sin \alpha_m \mp x_0 \cos \alpha_m \cos \varphi_{mi} + R \sin \eta \sin \alpha_m \cos \varphi_{mi}.$$

Gdy $\bar{f}_{mi} \leq 0$, przyjmujemy $f_{mi} = 0$.

Stosując wzór Hertza [9] wiążący odkształcenie f_{mi} z siłą P_{mi} działającą na i -tą kulkę, wyrazimy P_{mi} w funkcji uogólnionych przemieszczeń pierścienia wewnętrznego x_0, z_0, η , mianowicie

$$(3.5) \quad P_{mi} = Cf_{mi}^{3/2}.$$

4. Statyka łożyska

Związki między obciążeniami zewnętrznymi a uogólnionymi przemieszczeniami x_0, z_0 i η znajdziemy z warunków równowagi pierścienia wewnętrznego, które dla układu sił przedstawionego na rys. 2 są następujące:

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^n P_{1iz} - \sum_{i=1}^n P_{2iz} - Q = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{1ix} - \sum_{i=1}^n P_{2ix} + H = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n P_{1iz} R \cos \varphi_{1i} + \sum_{i=1}^n P_{2iz} R \cos \varphi_{2i} + \sum_{i=1}^n P_{1ix} h + \sum_{i=1}^n P_{2ix} h - M = 0,$$

gdzie: $P_{1iz} = P_{1i} \sin \alpha_{1i}$ jest rzutem siły działającej na i -tą kulkę 1 rzędu pierwszego, na oś z (rys. 2); $P_{1ix} = P_{1i} \cos \alpha_{1i} \cos \varphi_{1i}$ jest rzutem siły, działającej na i -tą kulkę 1 rzędu pierwszego, na oś x ; $P_{2iz} = P_{2i} \sin \alpha_{2i}$ jest rzutem siły, działającej na i -tą kulkę 2 rzędu drugiego, na oś z ; $P_{2ix} = P_{2i} \cos \alpha_{2i} \cos \varphi_{2i}$ jest rzutem siły, działającej na i -tą kulkę 2 rzędu drugiego, na oś x ; n oznacza liczbę kulek w jednym rzędzie.

Sumowanie obejmuje wszystkie kulki (praktycznie — kulki obciążone), zaś R, h i φ oznaczają wymiary łożyska oznaczone na rys. 2.

Kąt działania α_{mi} jest funkcją kąta φ_{mi} i obowiązują dla niego zależności:

$$(4.2) \quad \sin \alpha_{mi} = \frac{a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi}}{\sqrt{(a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi})^2 + (a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi})^2}},$$

$$\cos \alpha_{mi} = \frac{a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi}}{\sqrt{(a_m \sin \alpha_m \pm z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_{mi})^2 + (a_m \cos \alpha_m \mp x_0 \cos \varphi_{mi})^2}},$$

$m = 1, 2.$

Znak górny dotyczy rzędu pierwszego, a znak dolny — rzędu drugiego.

Jeżeli $a_m = \infty$, wówczas $\alpha_{1i} = \alpha_1, \alpha_{2i} = \alpha_2$, dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$.

Przy dużej ilości kulek zamiast sił skupionych, działających na kulki, możemy wprowadzić równoważne obciążenie ciągłe na obwodzie bieżni, zastępując sumowanie wielkości P_{mi} przez całkowanie funkcji

$$\frac{P_{mi}(\varphi)}{\Delta \varphi_m} d\varphi_m,$$

gdzie $\Delta \varphi_m = \frac{2\pi}{n_m}$, $m = 1, 2$, zaś n_m oznacza liczbę kulek w jednym rzędzie.

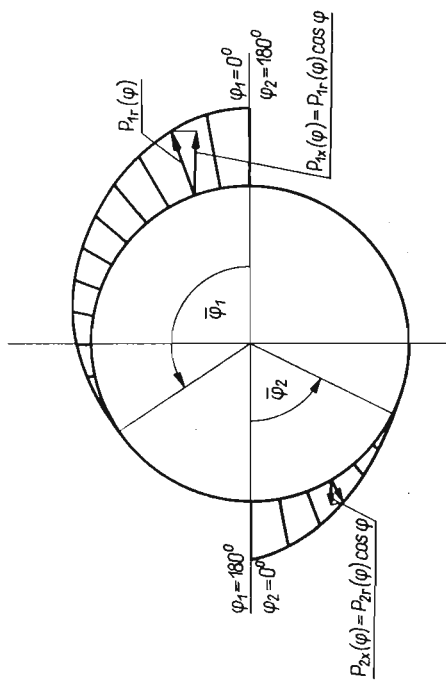
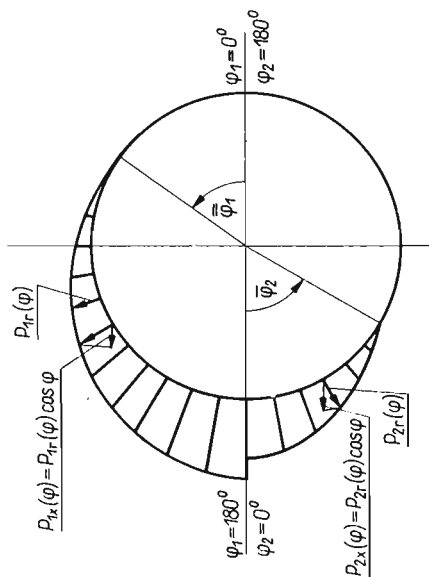
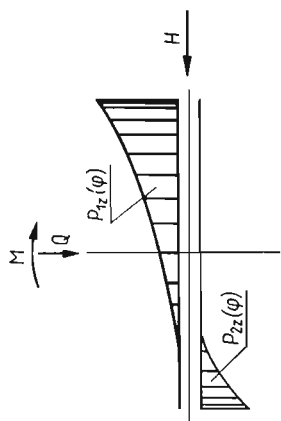
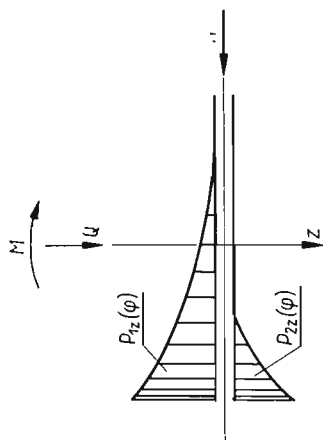
W przypadku $n_1 = n_2 = n$, mamy $\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_2 = \Delta \varphi$ oraz $\varphi_{1i} = \varphi_{2i} = \varphi_i$.

Wstawiając do równań (4.1) wyrażenia określone wzorami (3.3) i (4.2) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi Q}{cn} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1) d\varphi_1 + \\
 &- \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2) d\varphi_2, \\
 \frac{\pi H}{cn} &= - \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \\
 &+ \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2, \\
 (4.3) \quad \frac{\pi M}{cn} &= R \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \\
 &+ R \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2 + \\
 &+ h \int_0^{\bar{\varphi}_1} \frac{[\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2} - a_1]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_1 \sin \alpha_1 + z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_1)^2 + (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1)^2}} \times (a_1 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 d\varphi_1 + \\
 &+ h \int_0^{\bar{\varphi}_2} \frac{[\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2} - a_2]^{3/2} \times}{\sqrt{(a_2 \sin \alpha_2 - z_0 + R \sin \eta \cos \varphi_2)^2 + (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2)^2}} \times (a_2 \cos \alpha_2 + x_0 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_2.
 \end{aligned}$$

Granice całkowania $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ wyznaczmy z warunku $f_{m1} = 0$ (rys. 4).

Równania (4.3) obowiązują dla układu sił przedstawionych na rys. 2 z tym, że siła H powinna być tak niewielka, aby maksymalna siła działająca na kulkę rzędu pierwszego wystąpiła przy $\varphi_1 = 0$. Jeżeli siła H jest bardzo duża, wówczas obciążenie rzędu pierwszego ulegnie zmianie (rys. 5) i maksymalna siła działająca na kulkę wystąpi przy $\varphi_1 = 180^\circ$. Równania (4.3.) będą jednak w dalszym ciągu obowiązywały z tym tylko, że w całkach odnoszących się do rzędu pierwszego należy zmienić dolną i górną granicę całkowania. Granica dolna będzie równa $\bar{\varphi}_1$, a górna π . Jeżeli siła H ma zwrot przeciwny ($-H$) równania będą obowiązywały tak długo, jak długo $f_2(0^\circ) \geq 0$. Rozwiązując układ (4.3.) i od-



Rys. 5

Rys. 4

wracając go wyznaczylibyśmy uogólnione przemieszczenia x_0, z_0, η — a tym samym rozkład nacisków na kulki w łożysku — w funkcji uogólnionych sił zewnętrznych

$$(4.4) \quad x_0 = F_1(Q, H, M), \quad z_0 = F_2(Q, H, M), \quad \eta = F_3(Q, H, M).$$

Równania (4.3) nie nadają się jednak do dalszej analizy, zarówno z uwagi na trudności całkowania, jak i konieczność późniejszego rozwiązywania układu równań przestępnych ze złożonymi funkcjami nieelementarnymi. Można je rozwiązać metodą przybliżoną przedstawiając wyrażenia niewymierne w postaci potrójnych szeregów potęgowych. Na przykład:

$$f_1 \left(\varphi_1, \alpha_1; z_0, x_0, \eta, \frac{1}{a_1} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{ijk}(\varphi_1, \alpha_1; z_0) x_0^i \sin \eta^j a_1^{-k}.$$

Rozwiązanie równań (4.3) za pomocą szeregów będzie przedmiotem oddzielnej pracy, natomiast obecnie zajmiemy się rozwiązaniem ścisłym tych równań zakładając $a_m = \infty$ (pominiemy zmianę kąta działania, co byłoby ścisłe w przypadku co najmniej jednej bieżni stożkowej, natomiast dla bieżni toroidalnych stanowi dogodne przybliżenie), wówczas prawa strona powyższej zależności będzie równa wyrażeniu (3.4) i układ równań (4.3) przyjmie znacznie prostszą postać:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{\pi Q}{cn \sin \alpha} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} (z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} d\varphi + \\ &\quad - \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-z_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} d\varphi, \\ \frac{\pi H}{cn \cos \alpha} &= - \int_0^{\bar{\varphi}_1} (z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \\ &\quad + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-z_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi, \\ \frac{\pi M}{cn(R + h \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha} &= \int_0^{\bar{\varphi}_1} (z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \\ &\quad + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-z_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha \cos \varphi + R \sin \eta \sin \alpha \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

W równaniach tych przyjęto $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, a ponadto obie zmienne φ_1 i φ_2 oznaczono krótko przez φ .

Granice całkowania (rys. 4) wyznaczmy z warunku $f_{mi} = 0$; $m = 1, 2$, a więc

$$(4.6) \quad \bar{\varphi}_1 = \arccos \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta},$$

$$(4.7) \quad \bar{\varphi}_2 = \arccos \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha + R \sin \eta}.$$

W przypadku

$$(4.8) \quad \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta} \leq -1,$$

mamy $\bar{\varphi}_1 = \pi$.

Układ ten jest mniej skomplikowany niż (4.3) i w związku z tym prawe strony równań można będzie scałkować. Rozwiązanie prowadzi do równań przestępnych zawierających całki eliptyczne.

Odwroćenie tych równań i przedstawienie uogólnionych przemieszczeń w postaci (4.4) jest jednak w dalszym ciągu niemożliwe. Przemieszczenia możemy wyznaczyć jedynie na drodze numerycznej (rozwiązywanie równań przestępnych) lub metodą przybliżoną np. metodą szeregów potęgowych, którą stosowano w pracy [6] do rozwiązania tego układu równań, dla pewnego zakresu obciążeń zewnętrznych (duży moment, małe siły — osiowa i promieniowa).

W przypadku działania na łożysko tylko jednej uogólnionej siły układ równań sprowadzi się do jednego równania, mianowicie:

1. W przypadku działania siły osiowej Q

$$\frac{\pi Q}{cn} = z_0^{3/2} \sin^{5/2} \alpha \int_0^{\pi} d\varphi;$$

stąd

$$(4.9) \quad z_0 = \left(\frac{Q}{cn \sin^{5/2} \alpha} \right)^{2/3}.$$

2. W przypadku działania momentu M

$$\frac{\pi M}{cn} = 2 \sin^{3/2} \alpha (R \sin \eta)^{3/2} \left(R \sin \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi + h \cos \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi \right);$$

stąd

$$(4.10) \quad R \sin \eta = \left[\frac{\pi M}{1,4378 cn (R + h \operatorname{ctg} \alpha) \sin^{5/2} \alpha} \right]^{2/3}.$$

3. W przypadku działania siły poziomej H

$$\frac{\pi H}{cn} = 2x_0^{3/2} \cos^{5/2} \alpha \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi;$$

stąd

$$(4.11) \quad x_0 \operatorname{ctg} \alpha = \left(\frac{\pi H}{1,4378 cn \sin^{3/2} \alpha \cos \alpha} \right)^{2/3}.$$

Powyższe trzy przypadki są znane w literaturze [14,17]; zależności (4.9)–(4.11) przytoczyliśmy ze względu na to, że będziemy z nich korzystać w dalszej części pracy.

5. Rozwiązanie ściśle równań w przypadku $a_m = \infty$

Przystępując do rozwiązania układu równań (4.5) założymy $z_0 \neq 0$ i wyciągniemy $(z_0 \sin \alpha)^{3/2}$ przed znak całki oraz zastosujemy następujące podstawienia:

$$(5.1) \quad u = -\frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{z_0} + \frac{R \sin \eta}{z_0},$$

$$(5.2) \quad v = \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{z_0} + \frac{R \sin \eta}{z_0},$$

$$(5.3) \quad q_Q = \left(\frac{Q}{cn \sin^{5/2} \alpha} \right)^{2/3},$$

$$q_M = \left[\frac{\pi M}{1,4378 cn (R + h \operatorname{ctg} \alpha) \sin^{5/2} \alpha} \right]^{2/3},$$

$$q_H = \left(\frac{\pi H}{1,4378 cn \cos \alpha \sin^{3/2} \alpha} \right)^{2/3},$$

gdzie u i v noszą charakter bezwymiarowych uogólnionych przemieszczeń pierścienia wewnętrznego, q — zredukowanych obciążeń [o wymiarze długości wg zależności (4.9)–(4.11)].

Odształcenia i -tej kulki i pierścienia wewnętrznego (3.4) wyrażone za pomocą parametrów u i v przyjmą postać: w rzędzie pierwszym

$$(5.4) \quad f_1(\varphi) = z_0(1 + u \cos \varphi) \sin \alpha,$$

w rzędzie drugim

$$(5.5) \quad f_2(\varphi) = z_0(-1 + v \cos \varphi) \sin \alpha;$$

skąd przy $z_0 \neq 0$

$$\bar{\varphi}_1 = \arccos \left(-\frac{1}{u} \right), \quad \bar{\varphi}_2 = \arccos \left(\frac{1}{v} \right).$$

Równania (4.5) po uwzględnieniu zależności (5.1)–(5.3) zapiszemy następująco:

$$(5.6) \quad q_Q^{3/2} = \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left[\int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi - \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1 + v \cos \varphi)^{3/2} d\varphi \right],$$

$$q_H^{3/2} = \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[- \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1 + v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right],$$

$$q_M^{3/2} = \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[\int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1 + v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right].$$

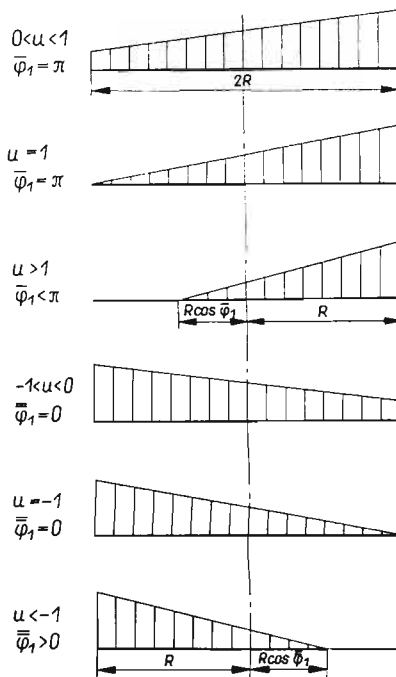
Z analizy funkcji podcałkowych wynika, że parametr u dla przyjętego układu obciążeń zewnętrznych może przyjmować dowolne wartości, natomiast parametr v winien spełniać warunek $v \geq 1$.

Wartości parametru u wskazują na rodzaj obciążenia rzędu górnego. Szczególnie interesujące są jego wartości graniczne, odpowiadające takiemu obciążeniu, przy jakim $f_1(0^\circ) = 0$ albo $f_1(180^\circ) = 0$.

Rozpatrzmy przypadek pierwszy, tzn. gdy $f_1(0^\circ) = 0$. Wówczas korzystając z zależności (5.4), otrzymamy

$$-\frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{z_0} + \frac{R \sin \eta}{z_1} = -1,$$
 a więc dla $f_1(0^\circ) = 0$, mamy $u = -1$. Podobnie dla $f_1(180^\circ) = 0$, mamy $u = 1$.

Analizując w dalszym ciągu wyrażenie podcałkowe (5.6) możemy stwierdzić, że dla $|u| \leq 1$ cały pierwszy rząd kulek będzie obciążony (górną granicą całkowania $\varphi_1 = \pi$), a dla $|u| > 1$ tylko część tego rzędu będzie przenosić obciążenie. Wartość bezwzględna parametru u wskazuje, która część rzędu pierwszego przenosi obciążenie. Na rys. 6 przedstawiono rzuty odkształceń na oś z w zależności od wartości parametru u .



Rys. 6

Dla dodatnich wartości parametru u maksymalne odkształcenie w rzędzie pierwszym wystąpi przy $\varphi_1 = 0^\circ$, a dla ujemnych przy $\varphi_1 = 180^\circ$ (duża siła H). Widzimy więc, że równania (5.6) będą obowiązywały tylko dla dodatnich wartości parametru u . Dla wartości ujemnych należy zmienić granicę całkowania we wszystkich całkach, zawierających ten parametr.

W odniesieniu do wartości parametru v , winien on spełniać warunek $v \geq 1$, co wynika z poprzednio przyjętego założenia $f_2(0^\circ) \geq 0$.

Równania dla ujemnych wartości parametru u zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned}
 q_{\underline{Q}}^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left[\int_{\bar{\varphi}_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi - \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} d\varphi \right], \\
 (5.7) \quad q_{\underline{H}}^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[- \int_{\bar{\varphi}_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right], \\
 q_{\underline{M}}^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left[\int_{\bar{\varphi}_1}^{\pi} (1-u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\bar{\varphi}_2} (-1+v \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi \right].
 \end{aligned}$$

Z uwagi na fakt, że w powyższych równaniach uwzględniono już znak ujemny parametru u , to w dalszym ciągu rozważań całki te będziemy rozwiązywać tylko dla wartości dodatnich tego parametru, przy czym w definicji (5.1) należy zmienić znaki po prawej stronie wyrażenia.

Dolna granica całkowania

$$\bar{\varphi}_1 = \arccos \frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta} = \bar{\varphi}_1$$

w przypadku, gdy

$$\frac{z_0}{x_0 \operatorname{ctg} \alpha - R \sin \eta} \geq 1,$$

wynosi $\bar{\varphi}_1 = 0$.

Całki zawarte w równaniach (5.6) i (5.7) sprowadzimy do całek eliptycznych pierwszego i drugiego rodzaju.

Najpierw zajmiemy się rozwiązaniem pierwszej całki z układu równań (5.6), zawierającej parametr u . W tym celu zastosujemy podstawienie

$$(5.8) \quad \cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \gamma,$$

gdzie $\gamma = \frac{\varphi}{2}$. Całka ta przyjmie więc postać:

$$(5.9) \quad \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1+u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = 2(1+u)^{3/2} \int_0^{\bar{\gamma}_1} (1+b_1^2 \sin^2 \gamma)^{3/2} d\gamma,$$

gdzie

$$(5.10) \quad b_1 = \sqrt{\frac{2u}{1+u}},$$

$$(5.11) \quad \bar{\gamma}_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1+u}{2u}}.$$

Rozwiązanie całki znajdującej się po prawej stronie równości (5.9) zależy od wartości parametru b_1 [18], a tym samym od wartości parametru u . Ponieważ parametr u może przyjmować dowolne dodatnie wartości, całka ta będzie miała dwa rodzaje rozwiązań

w zależności od przedziału zmienności tego parametru. Przedziały te określimy nierównościami: 1) dla $0 < b_1 \leq 1$, co odpowiada $0 < u \leq 1$; 2) dla $b_1 \geq 1$, co odpowiada $u \geq 1$.

W przypadku, gdy $0 < u \leq 1$ ($\bar{\varphi}_1 = \pi$), całka (5.9) zgodnie z katalogiem całek [18] będzie miała rozwiązanie

$$\int_0^{\pi/2} (1 - b_1^2 \sin^2 \gamma)^{3/2} d\gamma = \frac{2}{3} (2 - b_1^2) \mathbf{E}(b_1) - \frac{1 - b_1^2}{3} \mathbf{K}(b_1),$$

gdzie $\mathbf{K}(k)$ jest całką eliptyczną pełną pierwszego rodzaju, $\mathbf{E}(k)$ jest całką eliptyczną pełną drugiego rodzaju, a moduł $k = b_1$.

Podstawiając za b_1 wyrażenie (5.10) otrzymamy

$$(5.12) \quad \int_0^{\pi} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3} \sqrt{1+u} \left[4\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{2u}{1+u}} \right) - (1-u)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{2u}{1+u}} \right) \right].$$

Całkę (5.9) w przypadku $u \geq 1$ rozwiążemy [18]:

$$\int_0^{\gamma_1} (1 - b_1^2 \sin^2 \gamma)^{3/2} d\gamma = \left\{ \frac{2}{3} (2 - b_1^2) \left[b_1 E \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right) + \frac{1 - b_1^2}{b_1} F \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right) \right] + \right. \\ \left. - \frac{1 - b_1^2}{3b_1} F \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right) + \frac{b_1^2}{3} \sin \gamma \cos \gamma \sqrt{1 - b_1^2 \sin^2 \gamma} \right\} \Big|_0^{\gamma_1},$$

gdzie $F \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, $E \left(\gamma_2, \frac{1}{b_1} \right)$ — całką eliptyczną drugiego rodzaju, zaś

$$(5.13) \quad \gamma_2 = \arcsin(b_1 \sin \gamma).$$

Dla dolnej granicy całkowania wartość $\gamma_2 = 0$, a dla górnej $\gamma_2 = \pi/2$.

Ostatecznie całkę (5.9) dla $u \geq 1$ przedstawimy następująco

$$(5.14) \quad \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3\sqrt{2u}} \left[(u^2 - 4u + 3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) + 8u\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) \right].$$

Następną całkę $\int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi$ rozwiążemy, wykorzystując poprzednio stosowane podstawienia. Ponieważ sposób rozwiązania jest analogiczny, podamy tylko wzory końcowe. I tak dla $0 < u \leq 1$

$$(5.15) \quad \int_0^{\pi} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{5u} \sqrt{1+u} \left[(3u^2 + 1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{2u}{u+1}} \right) + \right. \\ \left. - (1-u)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{2u}{1+u}} \right) \right],$$

a dla $u \geq 1$

$$(5.16) \quad \int_0^{\bar{\varphi}_1} (1 + u \cos \varphi)^{3/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{5\sqrt{2u}} \left[2(3u^2 + 1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) + \right. \\ \left. - (u-1)(3u-1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+u}{2u}} \right) \right].$$

Następnie przystąpimy do rozwiązania całek układu równań (5.7) zawierających parametr u . W tym przypadku zamiast podstawienia (5.8) korzystniejsze jest podstawienie $\cos\varphi = 2\cos^2\gamma - 1$, gdzie $\gamma = \varphi/2$; a zatem

$$(5.17) \quad \int_{\varphi_1}^{\pi} (1-u\cos\varphi)^{3/2} d\varphi = 2(1+u)^{3/2} \int_{\gamma_1}^{\pi/2} (1-b_1^2\cos^2\gamma)^{3/2} d\gamma.$$

Dla $0 < u \leq 1$, $\varphi_1 = 0$, całka zgodnie z katalogiem całek [18] będzie miała rozwiązanie

$$\int_0^{\pi/2} (1-b_1\cos^2\gamma)^{3/2} d\gamma = \left\{ \frac{2}{3} (2-b_1^2) \left[E(\gamma_3, b_1) - \frac{b_1 \sin\gamma \cos\gamma}{\sqrt{1-b_1^2\cos^2\gamma}} \right] + \right. \\ \left. - \frac{1-b_1^2}{3} F(\gamma_3, b_1) + \frac{b_1}{3} \sin\gamma \cos\gamma \sqrt{1-b_1^2\sin^2\gamma} \right\} \Big|_0^{\pi/2},$$

gdzie $\gamma_3 = \arcsin \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-b_1^2\cos^2\gamma}}$.

Dla dolnej granicy całkowania $\gamma_3 = 0$, dla górnej $\gamma_3 = \pi/2$. Wobec tego po wstawieniu granic całkowania otrzymamy

$$(5.18) \quad \int_0^{\pi} (1-u\cos\varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3} \sqrt{1+|u|} \left[4\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) - (1-|u|) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right].$$

Z uwagi na to, że znak minus parametru u został już uwzględniony w wyrażeniach podcałkowych układu równań (5.7), do rozwiązania (5.18) wprowadzono jego wartość bezwzględną. Wartość całki (5.18) jest równa wartości wyrażenia (5.12) i podobnie dla $u \geq 1$ całka (5.17) będzie równa całce (5.14). Ponadto można sprawdzić, że dla wszystkich wartości parametru u będzie obowiązywała równość

$$(5.19) \quad - \int_{\varphi_1}^{\pi} (1-u\cos\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi = \int_0^{\varphi_1} (1+u\cos\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi.$$

Następnie przystąpimy do obliczenia całek zawierających parametr v . Całki te będą miały jeden rodzaj rozwiązania, ponieważ $v \geq 1$. Tok postępowania przy rozwiązaniu tych całek jest analogiczny do sposobu rozwiązywania całek zawierających parametr u i dlatego też ograniczymy się tylko do podania wzorów końcowych. A więc

$$(5.20) \quad \int_0^{\varphi_2} (-1+v\cos\varphi)^{3/2} d\varphi = \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right],$$

$$(5.21) \quad \int_0^{\varphi_2} (-1+v\cos\varphi)^{3/2} \cos\varphi d\varphi = \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1) \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \\ \left. - (v+1)(3v+1) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right].$$

Wstawiając rozwiązania całek do układów równań (5.6) i (5.7) otrzymamy dwa rodzaje rozwiązań:

dla $0 < |u| \leq 1$

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{1+|u|} \left[4\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) - (1-|u|)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_H^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{-2\operatorname{sgn}u}{5|u|} \sqrt{1+|u|} \left[(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-|u|)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 (5.22) \quad &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_M^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{2\operatorname{sgn}u}{5|u|} \sqrt{1+|u|} \left[(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-|u|)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{|2u|}{1+|u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\};
 \end{aligned}$$

dla $|u| \geq 1$

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left\{ \frac{2}{3\sqrt{|2u|}} \left[(|u|-1)(|u|-3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) + 8|u|\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_H^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{-2\operatorname{sgn}u}{5\sqrt{|2u|}} \left[2(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) + \right. \right. \\
 (5.23) \quad &\quad \left. \left. - (|u|-1)(|3u|-1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_M^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{2\operatorname{sgn}u}{5\sqrt{|2u|}} \left[2(3u^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (|u|-1)(|3u|-1)\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{1+|u|}{|2u|}} \right) \right] + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (v+1)(3v+1)\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

W przypadku granicznym $|u| = 1$, równania znacznie się uproszczą i możemy je przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{\pi} \left\{ \frac{8}{3} \sqrt{2} - \frac{2}{3\sqrt{2v}} \left[(v+1)(v+3) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) - 8v \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_H^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ -\frac{8 \operatorname{sgn} u}{5} \sqrt{2} - \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1) \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 (5.24) \quad &\quad \left. \left. -(v+1)(3v+1) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}, \\
 q_M^{3/2} &= \frac{z_0^{3/2}}{1,4378} \left\{ \frac{8 \operatorname{sgn} u}{5} \sqrt{2} + \frac{2}{5\sqrt{2v}} \left[2(3v^2+1) \mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -(v+1)(3v+1) \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{v-1}{2v}} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Każdy z układów równań (5.22) i (5.23), zawierający trzy niewiadome: z_0 , x_0 i η (poprzez u i v), da się sprowadzić do układu prostszego zawierającego tylko dwie niewiadome u i v . W tym celu równania (5.22) i (5.23) zapiszemy krótko następująco:

$$\begin{aligned}
 q_Q^{3/2} &= z_0^{3/2} \frac{F_1(u, v)}{\pi}, \\
 (5.25) \quad q_H^{3/2} &= z_0^{3/2} \frac{F_2(u, v)}{1,4378}, \\
 q_M^{3/2} &= z_0^{3/2} \frac{F_3(u, v)}{1,4378}.
 \end{aligned}$$

Następnie każde z powyższych równań podniesiemy do potęgi $2/3$ i dodamy stronami do siebie. W ten sposób wyznaczymy

$$(5.26) \quad \frac{z_0}{q} = \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1}$$

gdzie $q = q_Q + q_H + q_M$.

Wstawiając (5.26) do (5.25) i podnosząc równania do potęgi $2/3$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (5.27) \quad \bar{q}_Q &= \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1} \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3}, \\
 \bar{q}_H &= \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1} \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3},
 \end{aligned}$$

przy czym wielkości $\bar{q}_Q = q_Q/q$, $\bar{q}_H = q_H/q$, $\bar{q}_M = 1 - \bar{q}_H - \bar{q}_Q$ uważamy za znane.

Stosując metody numeryczne z równań tych możemy wyznaczyć u i v , a następnie, korzystając z zależności (5.1) i (5.2), pozostałe uogólnione przemieszczenia pierścienia łożyska

$$\begin{aligned}
 (5.28) \quad \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{q} &= \frac{v-u}{2} \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1}, \\
 \frac{R \sin \eta}{q} &= \frac{v+u}{2} \left\{ \left[\frac{F_1(u, v)}{\pi} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_2(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} + \left[\frac{F_3(u, v)}{1,4378} \right]^{2/3} \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

6. Zakończenie

W niniejszej pracy podaliśmy rozwiązanie ścisłe (5.22), (5.23) równań statyki łożyska w przypadku pominięcia zmiany kąta działania na skutek odkształcenia się kulek i bieźni (przyjęcie stałego kąta działania odpowiada stosowanej w wytrzymałości materiałów zasadzie zeszywnienia). Równań tych nie da się odwrócić — wykorzystać je jednak można, korzystając z wyrażen (5.26), (5.27) i (5.28) do przedstawienia graficznego lub tabelarycznego zależności

$$(5.29) \quad \frac{z_0}{q} = \Phi_1(\bar{q}_M, \bar{q}_H),$$

$$\frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{q} = \Phi_2(\bar{q}_M, \bar{q}_H), \quad \frac{R \sin \eta}{q} = \Phi_3(\bar{q}_M, \bar{q}_H),$$

tzn. do przedstawienia uogólnionych przemieszczeń w funkcji obciążeń zewnętrznych wyrażonych za pośrednictwem zmiennych \bar{q}_H i \bar{q}_M . Stosowanie wyrażen (5.29) jest szczególnie wygodne, gdyż zmienne \bar{q}_H i \bar{q}_M zmieniają się w granicach od zera do jedności.

Wyniki obecnej pracy znajdują przede wszystkim zastosowanie przy ocenie dokładności wzorów aproksymacyjnych, określających sztywność łożysk w sposób jawny; wyprowadzenie tych wzorów będzie tematem oddzielnego opracowania.

Literatura cytowana w tekście

1. J. ВАТ, *Odkształcenia i naprężenia w łożyskach tocznych*, Przegląd Mechaniczny, nr 9, 1961.
2. Р. Д. БЕЙЗЕЛМАН, Б. Н. ЦЫПКИН, *Подшипники качения*, Москва 1959.
3. С. А. ХАРЛАМОВ, *О жесткости радиально-упорного шарикового подшипника с осевым натягом*, Изв. Акад. Наук СССР, Мех. и Машин., nr 5, 1962.
4. ESCHMAN, HASBARGEN, WEIGAND, *Die Wälzlagerpraxis*, Oldenburg-Verlag, München 1953.
5. T. GIBCYŃSKA, *Konstrukcja i zastosowanie łożysk tocznych o dużych średnicach*, Czasopismo Techniczne, nr 6 M, 1965.
6. T. GIBCYŃSKA, *Obliczanie łożysk wieńcowych obciążonych jednocześnie momentem i niewielką siłą o dowolnym kierunku*, Arch. Budowy Maszyn, nr 3, 1967.
7. В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, *Вопросы и методика расчета опорно-поворотных кругов*, Стронт. и Дорожное Машин., nr 1, 1958.
8. H. FRETER, *Kugeldrehverbindungen Aufnahme von Kräften und Momenten*, Klepzig Fachberichte, nr 6, 1962 (cytowane za E. I. Detali Maszyn nr 39, 1962).
9. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, Cz. I. PWN, Warszawa 1954.
10. А. М. КАЗАНСКИЙ, *Методы расчета крупно-габаритных подшипников для опорно-поворотных устройств*, Вест. Машин., nr 7, 1961.
11. K. MATTHIAS, *Beitrag zur Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, N6, 1961.
12. K. MATTHIAS, *Sonderfälle bei der Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, N8, 1962.
13. K. MATTHIAS, *Berechnung von Kugeldrehverbindungen*, Hebezeuge und Fördermittel, N9, 1963.
14. Л. З. НОВИКОВ, *Статика радиально-упорного шарикового подшипника*, Изв. Акад. Наук СССР, Мех. и Машин., nr 5, 1963.
15. S. ÖHRNICH, *Berechnung der zweireihigen Kugeldrehverbindungen*, Veröffentlichung d. Instituts f. Fördertechnik, H2, Leipzig 1960 (tłumaczenie CBKUB nr 31).

16. A. PALMGREN, *Łożyska toczne*, PWT, Warszawa 1951.
17. A. PALMGREN, *Grundlagen der Wälzlageretechnik*, Franckhische Verlagshandlung, Stuttgart 1969.
18. И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений*, Москва 1962.
19. Н. А. СПИЦИН, М. З. НАРОДЕЦКИЙ, И. А. ЛЫСЕНКО, *Новое в теории расчета подшипников качения*, Труды Инст. ВНКТИПП, nr. 3 (35), 1963.
20. R. STRIBESK, *Kugellager für beliebige Belastung*, Z. VDI, Bd 45, 1961.
21. T. SZUCKI, *Obliczenie odkształceń łożysk stopowych żurawi budowlanych*, Zeszyty Naukowe Politechnik Warszawskiej, nr 109, 1965.
22. В. М. ШУСТОРОВИЧ, *Определение нагрузочной способности опорного подшипника качения при эксцентрическом приложении осевого усилия*, Вест. Машин., nr. 9, 1962.
23. *Łożyska kulkowe wieńcowe z wieńcem zębatym zewnętrznym*, ZN-65/MPC/10-CB-0012 (Norma Zakładowa CBKUB).

Р е з ю м е

УРАВНЕНИЯ СТАТИКИ ДЛЯ ДВУХРЯДНОГО ШАРИКОВОГО ПОДШИПНИКА

В работе даются точные решения уравнений равновесия двухрядного шарикового подшипника. Определение нагрузок основано на теории Герца, в связи с чем приняты предположения классической теории упругости, сверх того предполагается:

1. Постоянство угла действия подшипника (пренебрегается изменением этого угла связанным с деформацией подшипника),
2. Жесткие кольца подшипника,
3. Небольшое отношение h/R (рис. 2),
4. Зазор в подшипнике равен нулю.

Сначала определена упругая деформация i -того шарика, учитывая изменения угла действия вследствие деформации шариков и дорожки (3.3) а затем пренебрегая этим изменением. Определена сила действующая на i -тый шарик и построены условия равновесия для внутреннего кольца подшипника (4.1). С целью определения общего решения не зависящего от числа шариков суммирование заменяется интегрированием. Пределы интегрирования определены из условия $f_{mi} = 0$. Полученные уравнения (4.3) не пригодны для дальнейшего анализа, так из за затруднений при интегрировании, как и необходимости решения системы трансцендентных уравнений со сложными неэлементарными функциями. Для дальнейшего рассмотрения не учитывалось изменение угла действия; уравнения статики значительно упростились (4.5) и свелись к трансцендентным уравнениям (5.22) и (5.23) содержащим полные эллиптические интегралы первого и второго рода зависящие от параметров u и v определенных формулами (5.1) и (5.2).

Результаты настоящей работы найдут прежде всего применение для оценки точности приближенных формул определяющих явно жесткость подшипников; вывод этих формул будет темой отдельной работы.

S u m m a r y

EQUATIONS OF STATICS OF DOUBLE-ROW RADIAL-THRUST BALL BEARING

Paper gives an exact solution of the equilibrium equations of double-row radial-thrust ball bearing.

The determination of loading acting on individual balls is based on Hertz's theory, thus the classical assumptions of the theory of elasticity are accepted; further assumptions are as follows:

- 1) The pressure angle (rake angle) α is constant (the change of this angle due to elastic deformation of the balls is neglected),

- 2) The bearing rings are rigid,
- 3) The ratio h/R is small (Fig. 2),
- 4) The bearing clearance equals to zero.

The elastic deformation of the i -th ball is determined at first with the change of the pressure angle α being taken into account (3.3), and then with being neglected, (3.4).

The force acting on the i -th ball is then determined and the equations of equilibrium of the inner ring of the bearing are formulated, (4.1). To obtain a general solution independent on the number of balls the summation is replaced by the integration. The limit of integration is determined by the condition of no deformation of the ball, $f_{mi} = 0$. The obtained equations (4.3) are almost useless to the further analysis because of the difficulties of integration as well as the necessity of solution of the system of transcendental equations with involved non-elementary functions. Thus in the further analysis the change of the pressure angle α is neglected; the equations of statics take then considerably simplified form, (4.5), and may be reduced to transcendental equations (5.22) and (5.23) containing elliptic integrals of the first and of the second kind, depending on the parameters u and v , defined by the formulae (5.1) and (5.2).

The results of the present paper will be applied, above all, to the estimation of the accuracy of the approximative formulae determining the stiffness of the bearing in an explicit form; the derivation of such formulae will be given in a subsequent paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 marca 1969 r.



WPLYW POZIOMU NAPRĘŻENIA I WSPÓLCZYNNIKA AMPLITU-
DY NAPRĘŻENIA NA PROCES WIBROPEŁZANIA¹⁾

ANATOLIUSZ JAKOWLUK (BIAŁYSTOK)

1. Wstęp

Przedstawiana praca poświęcona jest zbadaniu wpływu niektórych parametrów na proces wibropełzania próbek, poddanych działaniu jednoosiowego stanu naprężenia. Dla ustalenia tych parametrów i zdefiniowania pojęcia «wibropełzanie» przeanalizujemy zastosowaną zmienność naprężenia w czasie.

Niech naprężenie $\sigma(t)$ zmienia się w czasie w sposób określony zależnością

$$(1.1) \quad \sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t,$$

gdzie: σ_m — naprężenie średnie, σ_a — amplituda naprężeń zmiennych, ω — prędkość kątowa.

Wprowadzając stosunek amplitudy naprężenia σ_a do naprężenia średniego σ_m

$$(1.2) \quad A_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$

zwanego dalej współczynnikiem amplitudy naprężenia, wyrażenie (1.1) można zapisać w postaci:

$$(1.3) \quad \sigma(t) = \sigma_m(1 + A_\sigma \sin \omega t).$$

Dobierając odpowiednio wartości naprężeń σ_m i σ_a możemy wyróżnić dwa następujące przypadki graniczne:

$\sigma_m \neq 0, \sigma_a = 0 (A_\sigma = 0)$ — pełzanie statyczne,

$\sigma_m = 0, \sigma_a \neq 0 (A_\sigma = \infty)$ — zmęczenie przy cyklu symetrycznym.

W przedziale zawartym między wymienionymi przypadkami granicznymi, przy małych wartościach współczynnika amplitudy naprężenia A_σ , przeważać będzie proces pełzania nad procesem zmęczenia, przy wzroście zaś A_σ zachodzi zjawisko odwrotne — zmęczenie będzie przeważać nad procesem pełzania. Złożony proces pełzania zachodzący w rozpatrywanym przedziale będziemy nazywać ogólnie *pełzaniem dynamicznym*. Odpowiednio w literaturze angielskiej utrwała się nazwa *dynamic creep* [1, 2, ...], w rosyjskiej zaś *wibro-*

¹⁾ Artykuł jest pierwszą częścią pracy wyróżnionej I nagrodą na ogólnopolskim konkursie na prace doświadczalne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Wrocławski PTMTS w 1968 r.

poluczniest' [3 ...]. W pełzaniu dynamicznym według autora [4] należy wyróżnić dwa zakresy, kiedy:

1) wibracje przy małym A_σ nie powodują zmęczenia (złom nie ma charakteru zmęczeniowego), ale łącznie z działaniem naprężenia statycznego wywołują proces pełzania, będziemy nazywali *wibropelzaniem*,

2) wibracje przy dużym A_σ powodują proces pełzania i zmęczenia będziemy nazywali *pełzaniem w procesie zmęczenia*.

Oczywiste jest, że nie da się przeprowadzić wyraźnej granicy podziału między wibropelzaniem a pełzaniem w procesie zmęczenia. Jednakże ze względu na istotną różnicę w mechanizmach powstawania stanów dekohezji (przy pełzaniu w procesie zmęczenia złom rozdzielczy, przy wibropelzaniu przełom poślizgowy [5]), jak również z uwagi na to, że przy dużych A_σ trwałość próbek jest rzędu kilkuset tysięcy cykli, podczas gdy przy małych A_σ i przy stosunkowo dużych odkształceniach pełzania ε_p próbki mogą przenosić setki milionów cykli, autor uważał za celowe dokonanie takiego rozróżnienia. Poznanie obu procesów ma duże znaczenie praktyczne.

Dla większych A_σ , przy ograniczonej granicy zmęczenia, tj. dla pełzania w procesie zmęczenia, przy projektowaniu elementów niektórych konstrukcji należy uwzględnić nie tylko warunek wytrzymałości na zmęczenie, lecz również warunek *szttywności czasowej* odkształcenia przy zmęczeniu w postaci

$$(1.4) \quad \varepsilon_p \leq \varepsilon_{p0p}.$$

Prac na temat pełzania w procesie zmęczenia ukazało się sporo. Pierwsze informacje na temat istnienia pełzania w procesie zmęczenia pochodzą z końca lat trzydziestych od badaczy niemieckich. Do pierwszych badań doświadczalnych z tej dziedziny, przeprowadzonych w sposób usystematyzowany, należy zaliczyć badania LAZANA [1] z 1949 r. Jednakże w badaniach tych odkształcenia mierzono dopiero po zniszczeniu próbki. Bardzo duży wkład wniosła szkoła japońska na początku lat sześćdziesiątych. Pierwsze badania krajowe na ten temat przedstawił autor [6] w 1964 r. Bardziej szczegółowe omówienie tej problematyki oraz bibliografię do niej, można znaleźć w pracy autora [4].

Przejdźmy do bezpośredniego tematu niniejszej pracy, tj. do wibropelzania.

Zagadnienie wibropelzania ma duże znaczenie w wielu dziedzinach praktyki inżynierskiej, takich jak: lotnictwo, technika raketowa, energetyka, budowa mostów kolejowych oraz drogowych itp. A więc wszędzie tam, gdzie występują duże naprężenia średnie σ_m , a obok nich małe wibracje pochodzące od pracy silników, bądź innych czynników wzbudzających drgania elementów konstrukcji.

Dotychczas na temat wibropelzania w metalach ukazało się niewiele prac, przy czym niektórzy autorzy dochodzą do przeciwstawnych wniosków. Do pierwszych z tej dziedziny należy zaliczyć pracę KENNEDY'EGO [7] z 1956 r., w której zostały przedstawione badania wpływu nałożenia na stałe naprężenie osiowe naprężenia zmiennego ze stosunkowo małą amplitudą ($A_\sigma = 0,016-0,116$) na proces pełzania. Badaniom były poddane próbki z ołowiu w temperaturze 305°K. Z badań tych wynika, że nałożenie na naprężenie statyczne σ_m naprężenia zmiennego o amplitudzie stanowiącej 5,6% σ_m wywołuje większy efekt pełzania, niż przykładanie na takie same okresy czasu przeciążenia statycznego stanowiącego 6,6% σ_m . Efekt był bardzo wyraźny, ale należy podkreślić, że pełzanie odbywało się przy

dużym poziomie naprężenia σ_m , gdyż odkształcenia natychmiastowe wynosiły około 3%, odkształcenia całkowite zaś — do 11%. Czas do zerowania w próbie najdłużej trwającej wynosił zaledwie 100 minut.

Aktywujący wpływ vibracji na proces pełzania stwierdzono w pracy ZIEMBY i autora [8] na stopie aluminiowym Al-Mg-Si(PA4) przy $A_\sigma = 0,0066-0,20$. W pracy autora [5] na stopie Al-Mg5(PA3) przy $A_\sigma = 0,0061$ oprócz aktywacji pełzania stwierdzono skrócenie żywotności próbek. Na tych stopach badania były prowadzone w temperaturze 296°K i przy częstotliwości 31 Hz.

MANJOINE [9] na stopie Al-Cu przy temperaturze 478°K i przy naprężeniach $\sigma_m + \sigma_a = 155 \pm 15$ MN/m² z częstotliwością $\nu = 20$ Hz stwierdził większe prędkości pełzania, niż przy naprężeniu statycznym $\sigma_m = 155$ MN/m². Jednakże przy niższym poziomie naprężenia σ_m było odwrotnie.

W pracy ŻUKOWA i IWANOWEJ [10] przy badaniu stali żaroodpornej w temperaturze 873°K stwierdzono, że nałożenie małych naprężeń zmiennych na naprężenie statyczne powoduje hamujący wpływ na proces pełzania. Jednakże pełzanie w tym przypadku odbywało się przy stosunkowo małych naprężeniach średnich wywołujących odkształcenia 0,05–0,4% po 100 h. Przy tak małych odkształceniach mogło się zdarzyć, że przyczyną hamującą proces pełzania nie były vibracje. Ogólnie, małe różnice małych wielkości mogą być spowodowane na przykład błędami maszyny itp. W szczególnych przypadkach jest możliwe, że vibracje będą wywierać hamujący wpływ na proces pełzania. Byłoby tak wówczas, gdyby vibracje przyspieszały dyspersyjne utwardzanie danego tworzywa kilkofazowego.

Z przedstawionego przeglądu prac wynika, że efekt wibropelzania nie jest jednoznaczny. Dotychczas nie wyjaśniono dostatecznie wpływu na ten efekt poziomu naprężenia oraz warunków termicznych. Nie wyjaśniono również wpływu częstotliwości.

Badaniu wpływu poziomu naprężenia i częstotliwości na proces wibropelzania autor poświęcił pracę [11].

Celem niniejszej pracy jest wyjaśnienie, na stopie Al-Mg-Si(PA4) w stałej temperaturze, wpływu na proces wibropelzania następujących parametrów:

- 1) poziomu naprężenia,
- 2) współczynnika amplitudy naprężenia A_σ , naprężenia średniego σ_m i naprężenia maksymalnego σ_{max} .

Ostatni punkt od strony jakościowej był przedstawiony we wcześniejszej pracy autora [12]. W tym miejscu badania te będą przedstawione również od strony ilościowej.

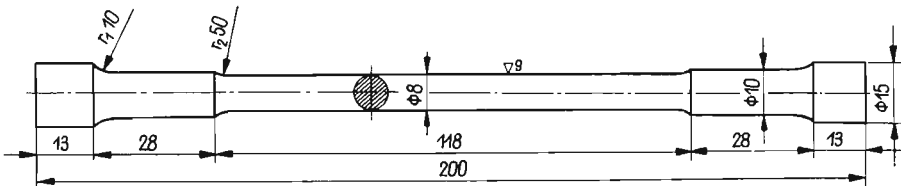
2. Dane dotyczące realizacji prób

2.1. Tworzywo, próbki, dokładność pomiaru wydłużeń. Badania przeprowadzono na próbkach ze stopu aluminium Al-Mg-Si(PA4) wykonanych z prętów o średnicy $d = 15$ mm. Wszystkie pręty dostarczone przez hutę były wykonane z jednego wlewka. Skład chemiczny stopu, zgodnie z atestem hutniczym, jest następujący: Cu — 0,10%, Fe — 0,21%, Mn — 0,71%, Mg — 0,95%, Si — 1,0%, Zn — 0,18%, Al — reszta.

Pręty po walcowaniu na zimno były w ciągu 5 h poddane przesycaaniu przez wygrzewanie w temperaturze 803°K. Następnie, po ochłodzeniu w wodzie w temperaturze 363°K, w ciągu około 1 h zostały poddane sztuczemu starzeniu w temperaturze 428–433°K.

Oznaczenie jednorodności materiału i wyznaczenie podstawowych własności mechanicznych badanego stopu zostały podane w pracy [4]. W tym miejscu należy jedynie stwierdzić, że tworzywo było dość jednorodne, a jego własności mechaniczne podlegały rozkładowi normalnemu. Wartości średnie wielkości mechanicznych, uzyskane w temperaturze 296°K, są następujące: $R_m = 368 \text{ MN/m}^2$, $R_e = 266 \text{ MN/m}^2$, $R_{0,02} = 248 \text{ MN/m}^2$, $E = 73,2 \text{ GN/m}^2$, $A_5 = 17,0\%$, $Z = 29,0\%$.

Do prób pełzania i wibropełzania były stosowane próbki przedstawione na rys. 1.



Rys. 1. Próbką do przeprowadzania prób na wibropełzanie

Przy realizacji prób na pełzanie ($A_\sigma = 0$) do pomiaru wydłużeń był używany dwuczujnikowy tensometr typu Mk3 produkcji NRD, z zastosowaniem bazy pomiarowej $L_0 = 50 \text{ mm}$, z elementarną działką 0,01 mm. Odczyt robiono z kilkakrotnie większą dokładnością, gdyż ze względu na dość szeroką działkę elementarną można było wzrokowo określić wynik z dokładnością do około 0,002 mm.

Przy realizacji prób na wibropełzanie, do pomiaru wydłużeń posługiwano się mikroskopem firmy Zeiss ze spiralą Archimedesesa o działce elementarnej $1 \mu\text{m}$. Dla kontroli pomiarów prowadzonych w trakcie badań próbki przed poddaniem ich procesowi wibropełzania i po zakończeniu próby mierzono na komparatorze firmy Zeiss również z dokładnością do $1 \mu\text{m}$.

2.2. Maszyny użyte do realizacji prób. Próby na pełzanie statyczne ($A_\sigma = 0$) zostały przeprowadzone na pełzarkach firmy Schopper. Pełzarki przed przeprowadzeniem prób zostały poddane legalizacji, którą przeprowadził Okręgowy Urząd Miar w Warszawie. W wyniku przeprowadzonej legalizacji dla każdej pełzarki został ustalony tzw. «błąd maszyny» sięgający $\pm 1\%$. W celu wyeliminowania wpływu błędu maszyny na uzyskiwane wyniki, naprężenia ustalone dla danej próby korygowano o dany błąd maszyny.

Próby wibropełzania przeprowadzono na adaptowanej do tego celu pełzarce, o maksymalnym zakresie 49 kN (5000 kG) firmy Schopper. Do wywoływania w próbce naprężenia zmiennego o amplitudzie σ_a włączono nad próbkę wibrator bezwładnościowy. Wibrator został skonstruowany w ten sposób, że masy mimośrodowe zamocowano na dwóch tarczach bliźniaczych umieszczonych symetrycznie względem osi uchwytów próbki. Zwiększenie amplitudy siły wibratora uzyskuje się przez dokładanie odpowiednich stalowych płytek równocześnie na obie tarcze, względnie zwiększanie mimośrodów, lub też równocześnie przez dokładanie i przesuwanie mas. Wibrator został przystosowany do pracy przy różnych częstotliwościach wymuszenia. Osiowość działania siły wymuszającej w stosunku do próbki osiągnięto przez odpowiednie wyważenie dynamiczne. W celu wyeliminowania zginania próbek, mocowano je za pomocą przegubów kulistych. Wartości liczbowe amplitud naprężeń zmiennych w ustalonej próbce dla różnych wartości mas, ich położeń

i różnych częstotliwości wymuszenia zostały wyznaczone drogą cechowania. Analizę stateczności pracy tej wibropelzarki jako układu dynamicznego oraz informacje odnośnie cechowania można znaleźć w pracy [4]. W tym miejscu należy jedynie stwierdzić, że praca wibropelzarki w szerokim zakresie częstotliwości była dość spokojna. Dokładność ustalania wartości amplitudy naprężeń, przy bardzo małych amplitudach, wynosiła około $0,2 \text{ MN/m}^2$, a większych — około $0,49 \text{ MN/m}^2$.

2.3. Uwagi ogólne. Próby pelzania i wibropelzania przeprowadzono w temperaturze otoczenia wynoszącej $296 \pm 0,5^\circ\text{K}$. Temperaturę w pomieszczeniu stabilizowano przez dylatacyjny termometr, który włączał i wyłączał zainstalowane układy grzejne.

Wybór stopu aluminium do badań oraz realizacja prób w temperaturze otoczenia zostały podyktowane następującymi względami:

- 1) Stopy aluminium mają duże zastosowanie w praktyce właśnie w warunkach zbliżonych do temperatury otoczenia.
- 2) Temperatura otoczenia dla aluminium jest temperaturą podwyższoną. Szczególnie jest to widoczne, kiedy temperaturę będziemy mierzyć w skali homologicznej. Dla badanego stopu PA4 temperatura otoczenia mierzona w skali homologicznej wynosi

$$(2.1) \quad \Theta = \frac{T}{T_m} = \frac{296}{926} \simeq 0,33,$$

gdzie: T i T_m — odpowiednio temperatury eksperymentu i topnienia mierzone w skali bezwzględnej. Należy zaznaczyć, że temperaturę $\Theta > 0,5$ określamy jako temperaturę wysoką, co dla badanego stopu odpowiada $T > 463^\circ\text{K}$.

3) Przeprowadzając próby w temperaturze otoczenia, znacznie uproszczono warunki badań, eliminując takie czynniki, jak wahania temperatury związane z jej regulacją, ewentualne zmiany fazowe itd.

4) Na podstawie wyników badań stopu aluminium, przeprowadzonych w temperaturze otoczenia, można wyciągnąć wnioski jakościowe o zachowaniu się innych tworzyw metalowych w temperaturach podwyższonych.

Dla wyciągnięcia wniosków ilościowych, co do wpływu wibracji na proces pelzania, niżej porównuje się średnie krzywe pelzanie otrzymane z pięciu lub czterech prób pelzania, w wyjątkowych zaś przypadkach — z trzech.

3. Wyniki badań

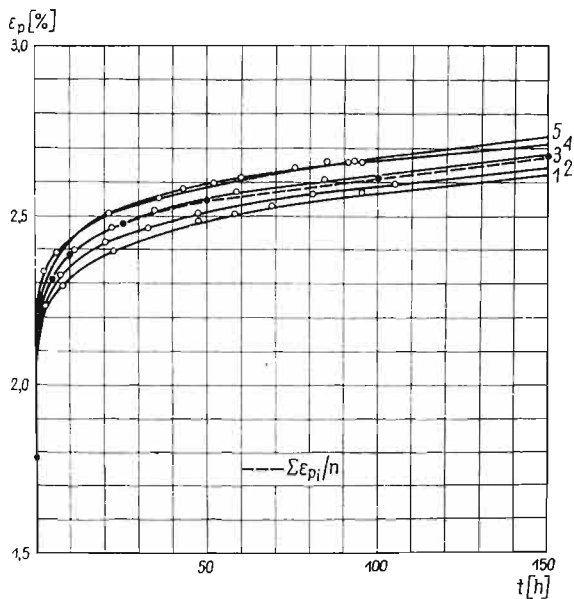
3.1. Wpływ współczynnika amplitudy naprężenia A_σ , naprężenia średniego σ_m i naprężenia maksymalnego σ_{max} na proces wibropelzania. Próby przeprowadzono przy częstotliwości $\nu = 31 \text{ Hz}$. Dla wyświetlenia wpływu parametrów A_σ , σ_m i σ_{max} na proces wibropelzania wystarczy badać tylko dwa z nich, gdyż między nimi istnieje związek (1.3).

a. *Badania wpływu σ_m na proces wibropelzania.*

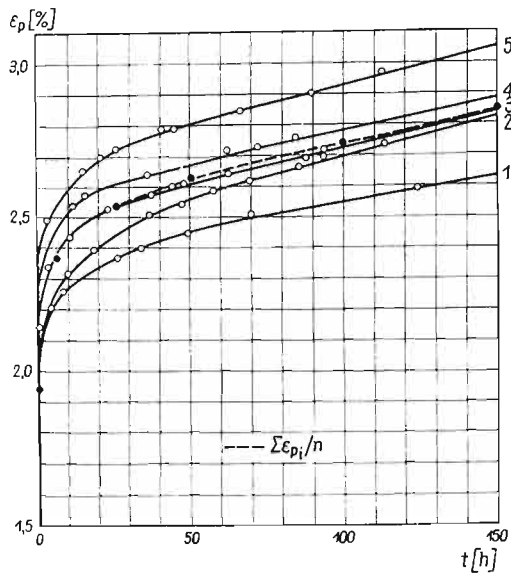
Dla zbadania wpływu σ_m ustalono σ_{max} na jednym poziomie

$$(3.1) \quad \sigma_{\text{max}} = \sigma_m(1 + A_\sigma) = \text{const} = 302,9 \text{ MN/m}^2.$$

Ponieważ σ_m z założenia jest zmienne, wobec tego dla zachowania stałości iloczynu musi być zmienne A_σ . Próby przeprowadzono przy następujących A_σ : 0, 0,0066, 0,050, 0,100.

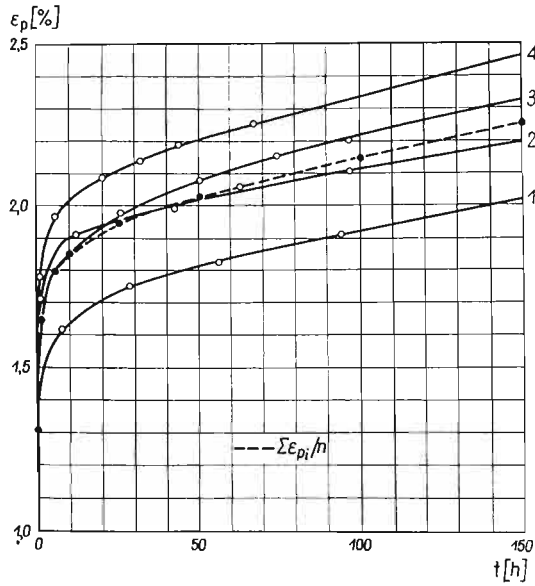


Rys. 2. Krzywe pelzania ($A_\sigma = 0$) przy $\sigma = 302,9$ [MN/m²]

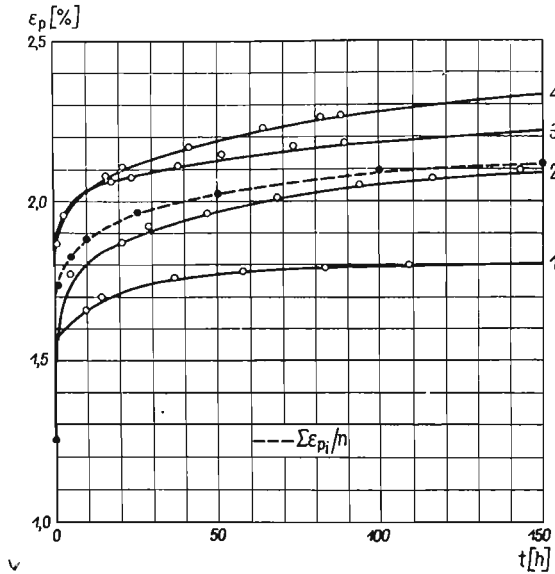


Rys. 3. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,0066$ dla $\sigma_{\max} = 302,9$ [MN/m²] przy $\nu = 7,6$ [Hz])

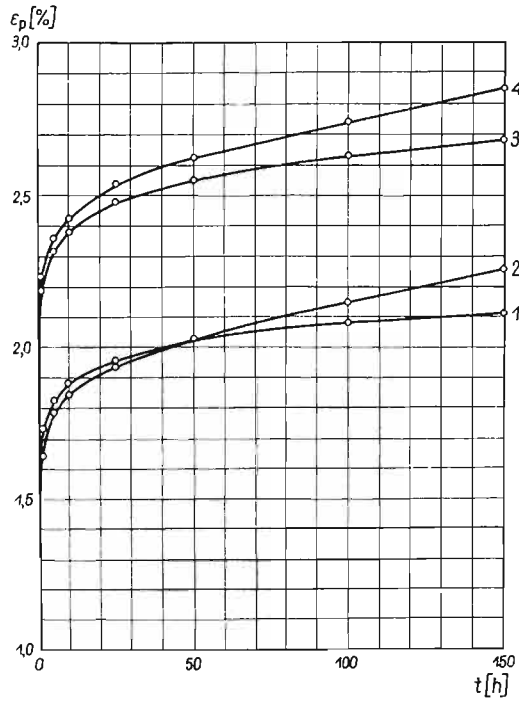
Krzywe wibropelzania z przeprowadzonych prób, dla kolejno wzrastających współczynników amplitudy naprężenia A_σ , przedstawiono na rys. 2-5. Na tych rysunkach linią przerywaną naniesiono średnie krzywe wibropelzania.



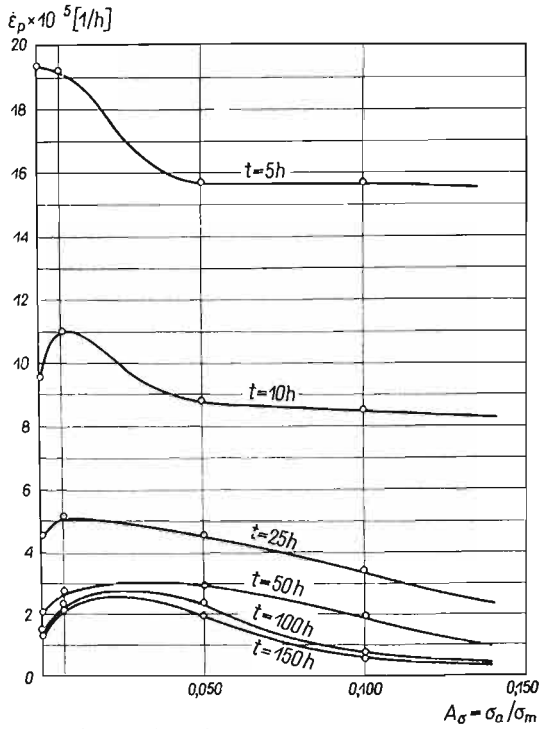
Rys. 4. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,050$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 31$ [Hz]



Rys. 5. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,100$) dla $\sigma_m = 302,9$ [MN/m²] przy $\nu = 31$ [Hz]



Rys. 6. Zestawienie krzywych wibropelzania o różnych A_σ i stałych $\sigma_{\max} = 302,9$ [MN/m²]



Rys. 7. Krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od A_σ przy $\sigma_{\max} = 302,9$ [MN/m²] i $\nu = 31$ [Hz]

Średnie krzywe wibropelzania zestawiono na rys. 6.

W oparciu o średnie krzywe wibropelzania obliczono dla czasów ustalonych prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$. Współrzędne średnich krzywych $\epsilon_p(t)$ i $\dot{\epsilon}_p(t)$ zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1. Zestawienie współrzędnych krzywych $\epsilon_p(t)$ i $\dot{\epsilon}_p(t)$ przy $\sigma_{\max} = 302,9$ [MN/m²]

Czas t [h]	$A_\sigma = 0$		$A_\sigma = 0,0066$		$A_\sigma = 0,050$		$A_\sigma = 0,100$	
	ϵ_p %	$\dot{\epsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$	ϵ_p %	$\dot{\epsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$	ϵ_p %	$\dot{\epsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$	ϵ_p %	$\dot{\epsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$
0	1,787		1,941		1,305		1,253	
1	2,189	229	2,235	172	1,640	215	1,727	255
2	2,244		2,285		1,720		1,777	
5	2,313	19,3	2,359	19,2	1,790	18,5	1,823	15,7
8	2,360		2,400		1,831		1,858	
10	2,379	9,50	2,424	11,0	1,846	8,75	1,882	9,50
12	2,398		2,444		1,864		1,896	
20	2,449		2,502		1,912		1,936	
25	2,471	4,40	2,531	5,10	1,935	4,50	1,955	3,40
30	2,493		2,553		1,957		1,970	
40	2,523		2,592		1,993		1,994	
50	2,547	2,05	2,623	2,70	2,023	2,90	2,016	1,90
60	2,564		2,646		2,051		2,032	
80	2,596		2,691		2,101		2,060	
100	2,625	1,40	2,737	2,23	2,148	2,33	2,081	0,775
120	2,652		2,780		2,194		2,091	
130	2,666		2,803		2,214		2,098	
150	2,693	1,33	2,846	2,18	2,254	1,90	2,116	0,62
170	2,719		2,890		2,290		2,123	

Na rys. 7 przedstawiono krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od współczynnika amplitudy naprężenia A_σ , które zbudowano w oparciu o tablicę 1 dla czasów $t = 5, 10, 25, 50, 100$ i 150 [h].

b. Badania wpływu σ_{\max} na proces wibropelzania.

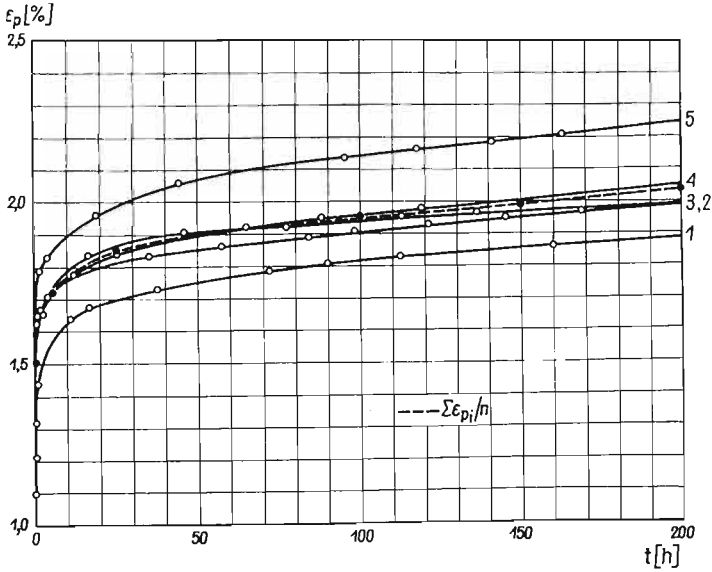
Dla zbadania wpływu σ_{\max} na proces wibropelzania ustalono naprężenie średnie na następującym poziomie:

$$(3.2) \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max}}{1 + A_\sigma} = \text{const} = 288,6 \text{ [MN/m}^2\text{]}.$$

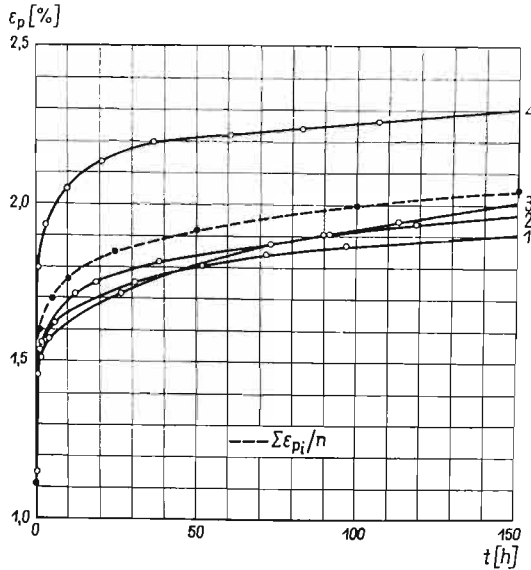
W tym przypadku z założenia zmienne jest σ_{\max} , wobec tego dla zachowania stałości ilorazu należy zmieniać współczynnik amplitudy naprężenia A_σ . Próby przeprowadzono przy następujących A_σ : 0; 0,0066; 0,0132; 0,050 i 0,100. Krzywe wibropelzania przy $A_\sigma = 0, 0,0066$ i 0,0132 są przedstawione kolejno na rys. 8–10. Przy $A_\sigma = 0,500$ wykorzystujemy krzywe wibropelzania podane na rys. 4.

Na rys. 11 podano zestawienie porównawcze średnich krzywych wibropelzania z rys. 8–10 i 4. Na rys. 11 dodatkowo naniesiono pojedynczą krzywą wibropelzania dla $A_\sigma = 0,100$, która oczywiście ma tylko znaczenie jakościowe.

W oparciu o średnie krzywe wibropęczania zestawione na rys. 11 obliczono dla czasów ustalonych prędkości wibropęczania $\dot{\varepsilon}_p$. Współrzędne średnich krzywych $\varepsilon_p(t)$ i $\dot{\varepsilon}_p(t)$ są podane w tablicy 2. Na podstawie danych z tablicy 2 i wartości $\dot{\varepsilon}_p$ z kolumny dla $A_\sigma = 0,050$



Rys. 8. Krzywe pełzania ($A_\sigma = 0$) dla $\sigma = 288,6$ [MN/m²]

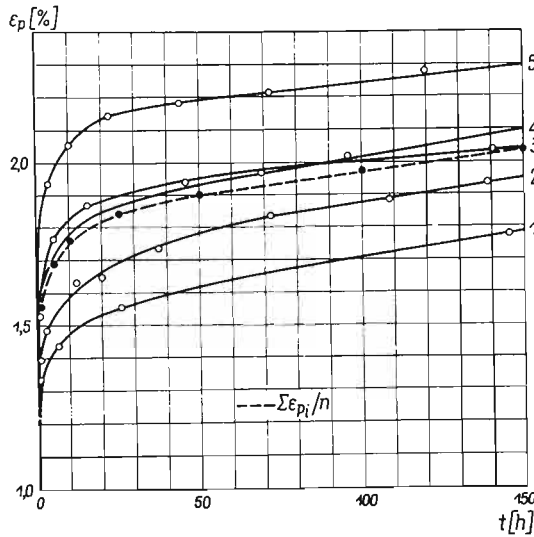


Rys. 9. Krzywe wibropęczania ($A_\sigma = 0,066$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 31$ [Hz]

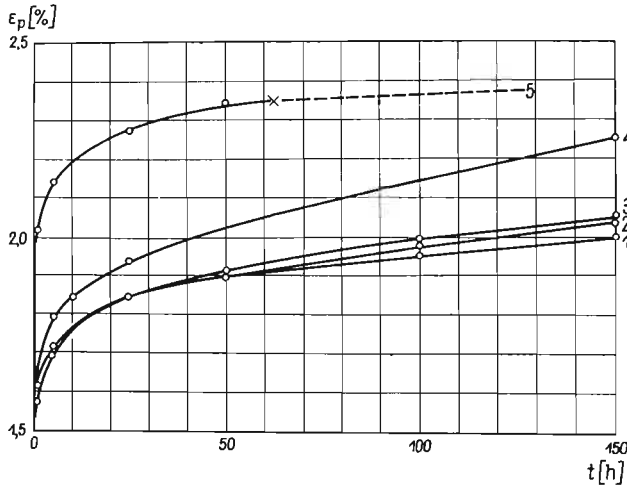
z tablicy 1 zbudowano krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropęczania $\dot{\varepsilon}_p$ w zależności od współczynnika amplitudy naprężenia A_σ dla czasów $t = 5, 10, 25, 50, 100$ i 150 [h] (rys. 12).

c. Analiza wyników i wnioski szczegółowe.

1) Z zestawienia krzywych wibropęczania, dla stałego naprężenia $\sigma_{max} = 302,9$ [MN/m²], przedstawionego na rys. 6 wynika, że krzywe wibropęczania układają się tym niżej od krzywej pęczania ($A_\sigma = 0$) im większy jest współczynnik amplitudy naprężenia A_σ . Jest to niewątpliwie efekt zmniejszania się wartości naprężenia średniego σ_m .



Rys. 10. Krzywe wibropęczania ($A_\sigma = 0,0132$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 31$ [Hz]



Rys. 11. Zestawienie krzywych wibropęczania dla różnych A_σ i stałych naprężeń $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²]

Jednakże krzywa wibropęczania odpowiadająca bardzo małemu $A_\sigma = 0,0066$, mimo obniżenia wartości naprężenia średniego σ_m , ułożyła się wyżej od krzywej pęczania ($A_\sigma = 0$). Jest to niewątpliwie silny wpływ działania vibracji o małych amplitudach na proces wibropęczania.

Tablica 2. Zestawienie współrzędnych krzywych $\varepsilon_p(t)$ i $\dot{\varepsilon}_p(t)$ przy $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²]

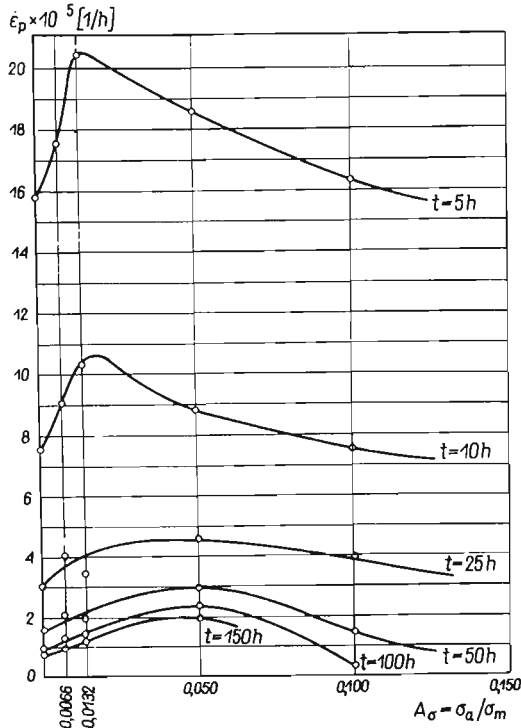
Czas t [h]	$A_\sigma = 0$		$A_\sigma = 0,0066$		$A_\sigma = 0,0132$		$A_\sigma = 0,100$	
	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h}\right]$
0	1,224		1,111		1,339		1,168	
1	1,616	216,5	1,600	260	1,563	133,0	2,024	451
2	1,657		1,632		1,605		2,075	
5	1,713	15,8	1,698	17,5	1,689	20,30	2,137	16,3
8	1,752		1,737		1,727		2,173	
10	1,768	7,50	1,754	9,00	1,752	10,25	2,187	7,50
12	1,782		1,773		1,768		2,202	
20	1,828		1,823		1,816		2,250	
25	1,843	3,00	1,845	4,00	1,837	3,40	2,270	3,90
30	1,858		1,863		1,850		2,289	
40	1,880		1,890		1,876		2,313	
50	1,896	1,55	1,912	2,05	1,898	1,95	2,331	1,45
60	1,911		1,931		1,915		2,342	
80	1,937		1,964		1,947		2,355	
100	1,953	0,800	1,990	1,275	1,970	1,375	2,362	0,275
120	1,969		2,015		2,002		2,366	
130	1,980		2,025		2,014			
150	1,996	0,775	2,047	0,975	2,040	1,150		
170	2,011		2,064		2,060			

Z porównania krzywych izochronicznych zależności $\dot{\varepsilon}_p(A_\sigma)$ przedstawionych na rys. 7 dla $\sigma_{\max} = 302,9$ MN/m² wynika, że krzywe te nie są podobne. To znaczy, że dla różnych czasów wpływ współczynnika amplitudy naprężenia A_σ na prędkość wibropęzania $\dot{\varepsilon}_p$ jest różny. O ile dla małych czasów obserwujemy silny wpływ wibracji na prędkość $\dot{\varepsilon}_p$ dla bardzo małych A_σ , to w miarę wzrostu czasu maksimum efektu istnienia wibracji przesuwa się ku nieco większym współczynnikom amplitudy naprężenia. Dla pełzania ustalonego, tj. dla $t = 150$ h, prędkość wibropęzania $\dot{\varepsilon}_p$ osiąga swe maksimum przy wartości $A_\sigma \approx 0,03$.

2) Z zestawienia krzywych wibropęzania przy stałym naprężeniu średnim $\sigma_m = 288,6$ MN/m² (rys. 11) wynika, że krzywe wibropęzania (ogólna tendencja) układają się tym wyżej od krzywej pełzania ($A_\sigma = 0$) im większy jest współczynnik amplitudy naprężenia A_σ . Taki stan rzeczy jest wynikiem działania dwóch czynników: wzrostu wartości naprężenia maksymalnego wraz ze wzrostem A_σ i aktywnego wpływu istnienia wibracji.

Analizując zestawienie krzywych izochronicznych zależności $\dot{\varepsilon}_p(A_\sigma)$ (rys. 12) widzimy, że i w tym przypadku nie są one podobne. Istnieje silniejszy wpływ wibracji małych na prędkość wibropęzania dla czasów małych. Przy czasach zbliżonych do pełzania ustalonego, prędkość wibropęzania $\dot{\varepsilon}_p$ osiąga swe maksimum przy większych współczynnikach amplitudy naprężenia A_σ . Maksimum to znajduje się w obszarze $A_\sigma \approx 0,050$. Przesunięcie tego maksimum w kierunku większych A_σ , w stosunku do przypadku $\sigma_{\max} = \text{const}$, jest wynikiem wzrostu σ_{\max} , tj. wzrostu amplitudy naprężenia σ_a .

3.2. Wpływ poziomu naprężenia na proces wibropelzania. W punkcie 3.1 wykazaliśmy, że proces wibropelzania zależy zarówno od naprężenia średniego σ_m i naprężenia maksymalnego σ_{max} , jak i od aktywującego wpływu istnienia samej wibracji. Jednakże z tych wyników nie możemy wydzielić udziału ilościowego w procesie wibropelzania przypadającego na



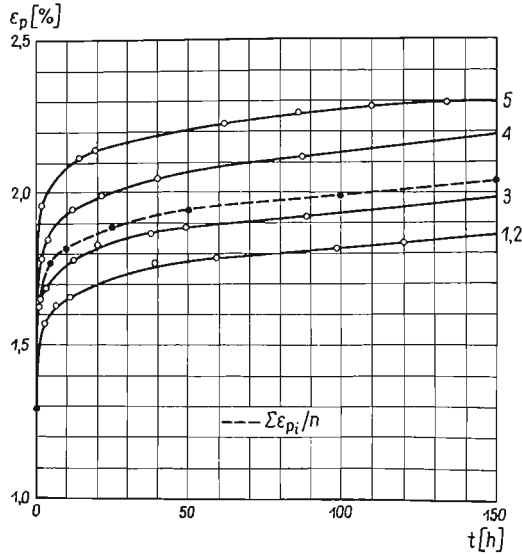
Rys. 12. Krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od A_σ dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] i $\nu = 31$ [Hz]

poszczególne parametry. W tym miejscu zbadamy wpływ poziomu naprężenia na proces wibropelzania przy stosowaniu stałego bardzo małego współczynnika amplitudy naprężenia $A_\sigma = 0,0066$. Stosowanie małego A_σ ma podwójne znaczenie. Przy małych A_σ , zgodnie z wynikami przedstawionymi wyżej, występuje duża aktywacja procesu wibropelzania. Poza tym, stosowanie bardzo małych A_σ pozwala w pierwszym przybliżeniu pominąć wpływ na proces wibropelzania samej amplitudy naprężenia σ_a . Dla podkreślenia aktywującego wpływu samego istnienia małych wibracji na proces wibropelzania, przybliżenie to zostało zastosowane na niekorzyść efektu wibropelzania. Mianowicie, porównuje się krzywe pelzania statycznego od naprężenia σ_i z krzywymi wibropelzania od naprężenia $\sigma_{i,max}$. Przy tym, między naprężeniami zachodzi relacja $\sigma_i = \sigma_{i,max}$. Przyjęto do badań trzy następujące poziomy naprężenia: 290,4; 302,9 i 333,4 MN/m². Próby wibropelzania przeprowadzono przy częstotliwości $\nu = 7,6$ Hz.

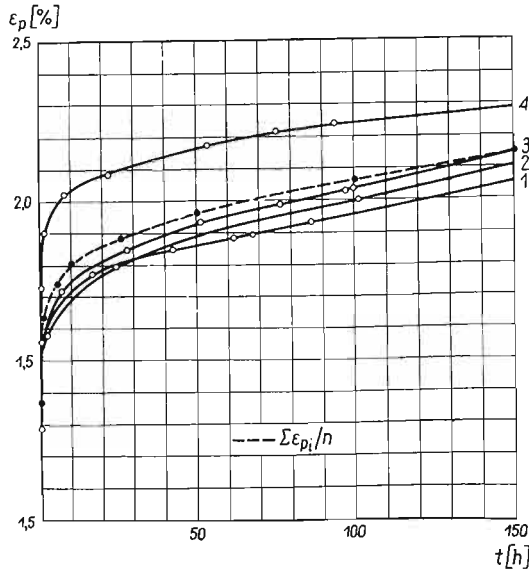
a. Wyniki badań.

Dla poziomu naprężenia 290,4 MN/m² krzywe pelzania i wibropelzania przedstawiono na rys. 13 i 14.

Dla poziomu naprężenia $302,9 \text{ MN/m}^2$ wykorzystujemy krzywe pełzania i krzywe wibropełzania na rys. 2 i 3.



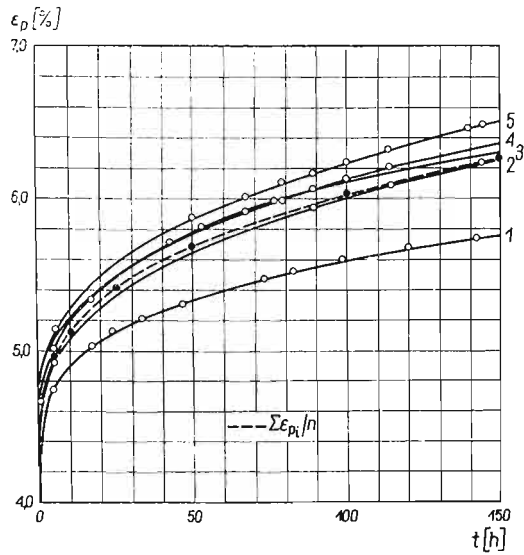
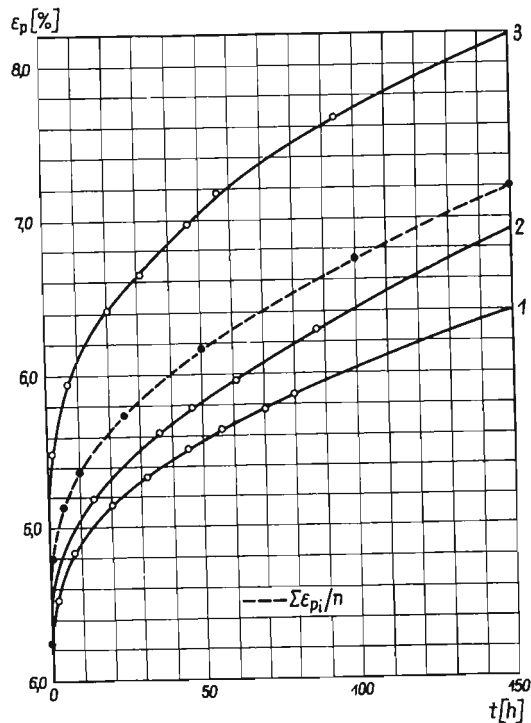
Rys. 13. Krzywe pełzania ($A_\sigma = 0$) dla $\sigma = 290,4 \text{ [MN/m}^2\text{]}$



Rys. 14. Krzywe wibropełzania ($A_\sigma = 0,0066$) dla $\sigma_m = 288,6 \text{ [MN/m}^2\text{]}$ przy $\nu = 7,6 \text{ [Hz]}$

Dla poziomu naprężenia $333,4 \text{ MN/m}^2$ krzywe pełzania podano na rys. 15, na rys. 16 zaś krzywe wibropełzania.

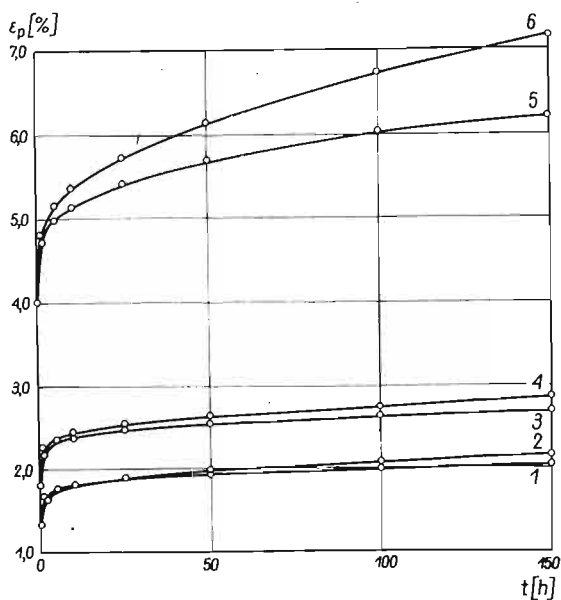
Średnie krzywe pełzania i wibropełzania przedstawione na rys. 13–16 oraz na rys. 2 i 3 (linie przerywane) zestawiono parami na rys. 17.

Rys. 15. Krzywe pełzania ($A_\sigma = 0$) dla $\sigma = 333,4$ [MN/m²]Rys. 16. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,0066$) dla $\sigma_{\max} = 333,4$ [MN/m²] przy $\nu = 7,6$ [Hz]

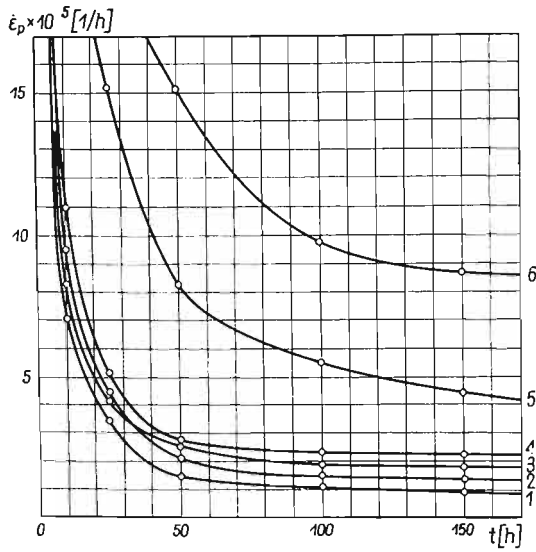
W oparciu o średnie krzywe pełzania i wibropelzania obliczono dla ustalonych czasów prędkości $\dot{\epsilon}_p$. Współrzędne średnich krzywych $\epsilon_p(t)$ i $\dot{\epsilon}_p(t)$ zestawiono w tabelicy 3.

Tablica 3. Zestawienie współrzędnych krzywych $\varepsilon_p(t)$ i $\dot{\varepsilon}_p(t)$

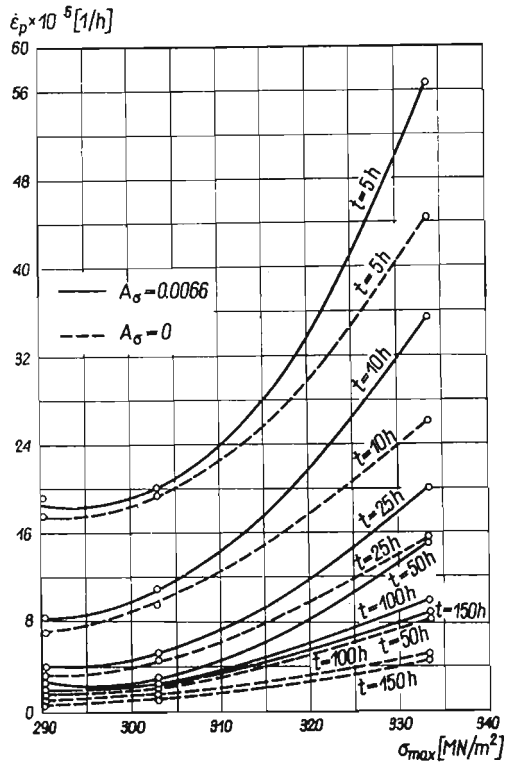
Czas t [h]	$\sigma = 290,4$ [MN/m ²] $A_\sigma = 0$		$\sigma_{\max} = 290,4$ [MN/m ²] $A_\sigma = 0,0066$		$\sigma = 333,4$ [MN/m ²] $A_\sigma = 0$		$\sigma_{\max} = 333,4$ [MN/m ²] $A_\sigma = 0,0066$	
	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]
	0	1,290		1,358		3,978		4,234
1	1,637	201	1,634	157	4,710	416	4,793	351
2	1,692		1,671		4,810		4,935	
5	1,765	17,5	1,746	19,2	4,982	44,8	5,137	56,7
8	1,795		1,785		5,076		5,275	
10	1,812	7,00	1,803	8,25	5,126	26,0	5,352	35,5
12	1,825		1,818		5,180		5,417	
20	1,866		1,861		5,327		5,619	
25	1,885	3,40	1,882	4,10	5,407	15,2	5,721	19,9
30	1,900		1,902		5,479		5,818	
40	1,922		1,934		5,590		5,981	
50	1,939	1,55	1,962	2,50	5,680	8,25	6,142	15,0
60	1,953		1,984		5,755		6,280	
80	1,972		2,021		5,902		6,523	
100	1,995	1,03	2,058	1,83	6,015	5,10	6,726	9,75
120	2,013		2,094		6,106		6,913	
130	2,024		2,112		6,153		7,001	
150	2,040	0,800	2,148	1,80	2,240	4,47	7,177	8,60
170	2,056		2,184		6,332		7,345	



Rys. 17. Zestawienie porównawcze par krzywych pełzania i wibroppełzania



Rys. 18. Zestawienie porównawcze krzywych prędkości pełzania i wibropelzania $\dot{\epsilon}_p(t)$ dla różnych poziomów naprężeń



Rys. 19. Krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ od poziomu naprężenia σ_{max} dla częstotliwości $\nu = 7,6 [Hz]$

Na rys. 18 przedstawiono zestawienie porównawcze krzywych prędkości pełzania i wibropełzania $\dot{\epsilon}_p(t)$ dla różnych poziomów naprężeń, które zbudowano w oparciu o tablicę 3 i częściowo tablicę 1 ($A_\sigma = 0$ i 0,0066).

Na rys. 19 podano krzywe izochroniczne zmienności prędkości pełzania i wibropełzania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od poziomu naprężenia σ , które zbudowano również w oparciu o tablicę 3 i częściowo tablicę 1 ($A_\sigma = 0$ i 0,0066) dla czasów $t = 5, 10, 25, 50, 100$ i 150 [h].

b. *Analiza wyników i wnioski szczegółowe.*

Z rys. 17 i 18 wynika, że im wyższy jest poziom naprężenia tym większą aktywację pełzania wywołuje działanie wibracji. Z rys. 19 widać, że przyrosty prędkości wibropełzania $\dot{\epsilon}_{pv}$ dla wyższych poziomów naprężeń są znacznie wyższe od przyrostów prędkości pełzania $\dot{\epsilon}_p$. Stosunek tych prędkości dla czasów ustalonych przy poziomach naprężeń 302,9 i 333,4 MN/m² podaje tablica 4.

Tablica 4. Zestawienie porównawcze $\frac{\dot{\epsilon}_{pv}}{\dot{\epsilon}_p}$ dla poziomów naprężeń 302,9 i 333,4 [MN/Mm²]

Czas t [h]	302,9 [MN/m]	333,4 [MN/m]
	$\frac{\dot{\epsilon}_{pv}}{\dot{\epsilon}_p}$	$\frac{\dot{\epsilon}_{pv}}{\dot{\epsilon}_p}$
5	1,00	1,26
10	1,16	1,36
25	1,16	1,31
50	1,31	1,82
100	1,59	1,91
150	1,64	1,93

Z tablicy 4 wynika, że istnieją znaczne względne przyrosty prędkości wibropełzania $\dot{\epsilon}_{pv}$ w stosunku do przyrostów prędkości pełzania $\dot{\epsilon}_p$. Poza tym, dla czasów większych przyrosty względne są większe.

Należy przypomnieć, że ta znaczna aktywacja prędkości wibropełzania została uzyskana mimo mniejszych naprężeń średnich σ_m przy próbach wibropełzania od naprężeń σ przy próbach pełzania statycznego (próby przeprowadzono przy $\sigma_{max} = \sigma$). Wynika stąd, że zaobserwowany efekt wibropełzania należy przypisać jedynie aktywującemu wpływowi samego istnienia wibracji.

4. Wnioski ogólne

1) Wpływ współczynnika amplitudy naprężenia A_σ , naprężenia średniego σ_m i naprężenia maksymalnego σ_{max} na proces wibropełzania.

Dla stałego naprężenia maksymalnego σ_{max} krzywe wibropełzania układają się tym niżej od krzywej pełzania ($A_\sigma = 0$) im większe jest A_σ . Wyjątek stanowią krzywe przy bardzo małych wibracjach, które mimo mniejszego naprężenia średniego σ_m układają się wyżej od krzywej pełzania. Pierwszy przypadek jest wynikiem zmniejszania się wartości naprężenia średniego σ_m , drugi — wynikiem istnienia silnego wpływu działania wibracji o małych

amplitudach. Ustalona prędkość wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ osiąga maksimum przy wartości $A_\sigma \simeq 0,03$.

Dla stałego naprężenia średniego σ_m krzywe wibropelzania układają się tym wyżej od krzywej pelzania ($A_\sigma = 0$) im większy jest współczynnik amplitudy naprężenia A_σ . Jest to wynikiem wzrostu naprężenia maksymalnego σ_{\max} , tj. wzrostu amplitudy naprężenia zmiennego σ_a . Dla czasów zbliżonych do wibropelzania ustalonego prędkość maksymalna $\dot{\epsilon}_{p\max}$ występuje przy $A_\sigma \simeq 0,050$.

Zarówno przy $\sigma_{\max} = \text{const}$, jak i przy $\sigma_m = \text{const}$ w pierwszym okresie wibropelzania maksima prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ występują przy tym mniejszych A_σ im krótsze są czasy ustalone t (rys. 7 i 12).

2) Wpływ poziomu naprężenia na proces wibropelzania.

Z badań wynika, że im wyższy jest poziom naprężenia, tym procentowo większy wpływ na proces wibropelzania wywołują wibracje w stosunku do pelzania statycznego. Poza tym, przy czasach większych przyrosty względne są większe.

W jaki sposób można interpretować przyspieszający wpływ małych wibracji i poziomu naprężenia na proces wibropelzania? Zagadnienie jest bardzo trudne dla ujęcia ścisłego. Dla realnego stopu, posiadającego wstępną gęstość dyslokacji, przeszkody w postaci wtórnej fazy, wtrącenia granice ziarn itp., model fizyczny będzie bardzo złożony. Jednakże można podać jakościowy obraz mechanizmu badanego zjawiska. Przyłożenie do próbki wibracji o małej amplitudzie, oprócz aktywacji poszczególnych atomów, powoduje również wzrost ruchliwości dyslokacji, co przy istnieniu odpowiedniego poziomu naprężenia średniego σ_m nadaje temu ruchowi — ruch dryfujący o określonym kierunku.

Jak wiadomo, że źródła Franka–Reada może powstać tym więcej dyslokacji im wyższe jest naprężenie krytyczne i im mniej jest przeszkód na drodze tych dyslokacji. Efekt sumaryczny pracy wszystkich źródeł w skali makro poprawnie opisuje silnie nieliniowa zależność prędkości pelzania od poziomu naprężenia σ , zaproponowana dla badanego stopu w pracy [13] w postaci

$$(4.1) \quad \dot{\epsilon}_p = B(t) \sigma^{n(t)},$$

gdzie: $B(t)$ — funkcja proporcjonalności prędkości pelzania, $n(t)$ — funkcja wskaźnika nieliniowości pelzania.

Przy istnieniu wibracji dyslokacje łatwiej pokonują przeszkody, przeszkody zaś stają się mniej stabilne. Łatwiej powstają nowe źródła Franka–Reada, a ich żywotność wzrasta. Powoduje to, że proces wibropelzania wzrasta jeszcze bardziej nieliniowo wraz ze wzrostem naprężenia σ w porównaniu z procesem pelzania statycznego.

3) Czy uzyskane wyniki mogą być przeniesione na inne stopy metali? Oczywiście nie można wyciągnąć z przedstawionych badań wniosku, że wibracje w każdej temperaturze przyspieszają proces pelzania. Na przykład, omówione na wstępie wyniki badań MANJOINE [9], jakościowo różniące się przy niskim i wysokim poziomie naprężenia, należy interpretować następująco. Próby na stopie Al-Cu były przeprowadzane w temperaturze, w której zachodzi proces starzenia. Przy niskim poziomie naprężenia średniego σ_m wpływ wibracji i naprężenia σ_{\max} był mniejszy, niż intensywny proces utwardzenia dyspersyjnego przy istnieniu wibracji. Przy wysokim poziomie σ_m zgodnie ze związkami (4.1) proces pelzania przebiega znacznie intensywniej. W tym przypadku łączne działanie σ_{\max} i samego istnienia

wibracji spowodowało dodatnie przyrosty $\dot{\epsilon}_p$, mimo przyspieszającego wpływu wibracji na proces utwardzania dyspersyjnego. Wynika stąd, że przy przenoszeniu wyników badań na inne stopy należy zachować dużą ostrożność, gdyż stopy mogą być o bardzo złożonej strukturze i składzie chemicznym. Jednakże można wyciągnąć jakościowe wnioski, co do zachowania się innych stopów, o ile zastosuje się teorię podobieństwa i analizę wymiarową w odniesieniu do wspólnej ustalonej temperatury w skali homologicznej i uwzględni się właściwości niektórych stopów do dyspersyjnego utwardzania.

Literatura cytowana w tekście

1. B. LAZAN, *Dynamic creep and rupture properties temperature resistant materials tensile fatigue stresses.*, Proc. ASTM, 1949, vol. 49, 757.
2. S. TAIRA, K. TANAKA, R. KOTERAZAWA, *Dynamic creep characteristic of low carbon steel at elevated temperature*, Proc. 4th Japan Congr. Test. Mater. (1960, Kyoto). Kyoto, Japan Soc. Test. Mater., 1961, 50.
3. P. Д. ВАГАПОВ, *Виброрелаксация, виброползучесть и петля гистерезиса с переменными по числу циклов параметрами*, В сб. *Колебания и прочность при переменных напряжениях*, М. Наука, 1965, 184.
4. A. JAKOWLUK, *Wibropelzanie w metalach*, WNT, ser. »Nowa Technika«, z. 73, Warszawa 1967.
5. A. JAKOWLUK: *Wpływ wibracji na przebieg odkształceń plastycznych i żywotność próbek metalowych* Ref. z Konf. Nauk. »Fizyka Odkształceń Plastycznych«, Warszawa listopad, 1966, 41.
6. A. JAKOWLUK, *Pewne spostrzeżenia na temat pelzania stopu PA3 w warunkach statycznych i dynamicznych obciążeń*, II Sympozjon PTMTS poświęcony geologii, Wrocław 1964, 51.
7. A. J. KENNEDY: *Effect of fatigue stresses on creep and recovery*, Proc. Internat. Conf. on Fatigue of Metals, London-New York 1956, 401.
8. A. JAKOWLUK and S. ZIEMBA, *Effect of vibration on the creep of tensile-test specimens of the aluminium alloy Al-Ng-Si (PA4)*, Proc. of the Second SESA Intern Congr. on Experimental Mechanics, 1966, 251, and in *Experimental Mechanics*, October 1966, 511.
9. M. J. MANJOINE: *Proceedings ASTM*, 1949, 49, 788.
10. А. М. ЖУКОВ и Г. М. ИВАНОВА: *Однородная ползучесть стали ЭИ-257 при наличии переменной составляющей нагрузки*, Инж. Журнал, т. 4, вып. 4, 1964, 781.
11. A. JAKOWLUK, *Badania wpływu różnych parametrów na proces wibropelzania w metalach*. Praca złożona na Ogólnopolski konkurs PTMTS we Wrocławiu w 1968 r., poświęcony pracom doświadczalnym z mechaniki.
12. A. JAKOWLUK, *Wpływ głębokości zawibrowania na proces wibropelzania w metalach*. Rozprawa doktorska, Warszawa 1965.
13. M. CZECH, A. JAKOWLUK, J. KOŁYBKO, *Pewne aspekty ustalania i doboru funkcji proporcjonalności pelzania oraz funkcji wskaźnika nieliniowości pelzania*. Referat na V Krajową Konf. Wytrzym. i Bad. Mater., Kraków 1969.

Резюме

ВЛИЯНИЕ УРОВНЯ НАПРЯЖЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА АМПЛИТУДЫ НАПРЯЖЕНИЯ НА ПРОЦЕСС ПОЛЗУЧЕСТИ

Исследования велись на алюминиевом сплаве AL-MG-Si (PA4) в одноосном напряженном состоянии при температуре 296°K и при частоте 31 гц.

При постоянном среднем напряжении σ_m , кривые виброползучести укладываются тем выше над кривой ползучести, чем выше коэффициент амплитуды напряжения $A\sigma = \sigma_a/\sigma_m$. При постоянном

максимальном напряжении σ_{\max} . кривые виброползучести укладываются тем ниже, чем больше A_σ . Однако для очень малого A_σ (0,0066) кривые виброползучести укладываются выше кривой ползучести, что свидетельствует о сильном активирующем влиянии малой вибрации на процесс виброползучести.

Для малого A_σ (0,0066) установлено, что чем выше уровень напряжения тем больше влияние вибрации на процесс виброползучести. В работе приводится физическое объяснение явления виброползучести.

S u m m a r y

THE EFFECT OF STRESS LEVEL AND THE STRESS AMPLITUDE COEFFICIENT ON THE PROCESS OF VIBRATIONAL CREEP

The investigations were carried out on an aluminium alloy Al-Mg-Si (PA4) under an uniaxial state of stress at a temperature of 296° K and a frequency of 31 Hz. For a constant mean stress σ_m , the vibrational creep curves are the higher in respect to the creep curve, the greater the stress amplitude coefficient $A_\sigma = \sigma_a/\sigma_m$. For a constant maximum stress σ_{\max} , the vibrational creep curves are the lower, the greater the A_σ . However, for a very small A_σ (0,0066) the vibrational creep curve is higher than the creep curve. Thus strongly activating influence of small vibrations on the vibrational creep process is clearly visible.

In the case of a small A_σ (0,0066), it was found that the higher the level of stress, the greater is the effect of the vibrations on the vibrational creep process.

A physical interpretation of the vibrational creep is also presented in the paper.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
BIAŁYSTOK

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 maja 1969 r.

WPLYW CZĘSTOTLIWOŚCI WIBRACJI NA PROCES WIBROPEŁZANIA¹⁾

ANATOLIUSZ JAKOWLUK (BIAŁYSTOK)

1. Wstęp

W pracy [1] autor przedstawił wyniki badań nad wpływem następujących parametrów na proces wibropełzania: poziomu naprężenia, współczynnika amplitudy naprężenia A_σ , naprężenia średniego σ_m i naprężenia maksymalnego σ_{max} . Badania były przeprowadzone na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia na próbkach ze stopu aluminium Al-Mg-Si (PA4). Stwierdzono, że krzywe wibropełzania układają się między krzywymi pełzania statycznego przy naprężeniach $\sigma = \sigma_m$ i $\sigma = \sigma_{max}$ przy czym przy małych współczynnikach amplitudy naprężenia A_σ krzywe wibropełzania układają się wyżej od krzywej pełzania statycznego przy naprężeniu $\sigma = \sigma_{max}$. Świadczy to aktywowującym wpływem samego istnienia wibracji na proces wibropełzania. Poza tym stwierdzono, że im wyższy jest poziom naprężenia tym silniej przejawia się ta aktywacja istnienia wibracji.

W niniejszej pracy autor postawił sobie za cel zbadanie wpływu częstotliwości wibracji ν na proces wibropełzania. Zagadnienie to w literaturze dotychczas nie znalazło dostatecznego naświetlenia. Z przeglądu prac różnych autorów na temat wibropełzania przedstawionego w pracy [2] oraz krótkiego przeglądu przedstawionego w pracy [1] wynika, że w pracach tych stosowano jedną tylko częstotliwość z przedziału najczęściej stosowanych w praktyce inżynierskiej częstotliwości. Istnieje wśród badaczy zmęczenia dość szeroko rozpowszechniony pogląd, że zmiany częstotliwości w tym przedziale nie prowadzą do istotnych zmian wytrzymałości zmęczeniowej. Jest to poniekąd uzasadnione przy wyznaczaniu fizycznej granicy zmęczenia, tj. trwałej granicy zmęczenia.

Pogląd ten w pewnym stopniu został przeniesiony również na badania wibropełzania oraz badania pełzania w procesie zmęczenia. Należy jednakże zaznaczyć, że wzrost częstotliwości obciążenia może spowodować ponad trzykrotne zwiększenie ograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej. Szczególnie jest to istotne dla niektórych stopów aluminium, gdzie według WADE i GROOTENHUISA [3] przy wzroście częstotliwości obciążenia nawet do 3800 Hz obserwowano ciągle wzrost ograniczonej i trwałej wytrzymałości zmęczeniowej.

Zauważmy, że przy ogólnej interpretacji zjawiska zmęczenia za czynnik decydujący uważamy nie naprężenie, lecz wywołane przez nie odkształcenie plastyczne. Na takim

¹⁾ Jest to druga część pracy wyróżnionej I nagrodą na ogólnopolskim konkursie na prace doświadczalne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Wrocławski PTMTS, w 1968 r.

założeniu zbudowane są wszystkie hipotezy dyslokacyjne. Ponieważ zmiana częstotliwości obciążenia powoduje zmianę wytrzymałości zmęczeniowej, przeto musi również powodować zmianę odkształceń plastycznych. Wobec tego zmiana częstotliwości obciążenia musi powodować również zmiany w wibropełzaniu. Poznanie tego procesu umożliwi nie tylko wyznaczenie potrzebnych wielkości wibropełzania, lecz również będzie pomocne w interpretacji zjawiska zmęczenia.

2. Dane dotyczące realizacji prób

Próby przeprowadzono na próbkach ze stopu aluminium Al-Mg-Si (PA4) w temperaturze $296 \pm 0,5^\circ\text{K}$. Informacje na temat składu chemicznego i własności mechanicznych tego stopu oraz informacje na temat maszyn i aparatury pomiarowej, zastosowanych do przeprowadzenia prób, zostały podane w pracy [1].

3. Wyniki badań

Dla osiągnięcia wyznaczonego celu zrealizowano następujący program badań. Poziom naprężeń średnich σ_m ustalono na $288,6 \text{ MN/m}^2$. Próby przeprowadzono przy dwóch współczynnikach amplitudy naprężenia $A_\sigma = 0,0066$ i $0,050$ przy różnych częstotliwościach obciążenia. Za bazę porównawczą dla krzywych wibropełzania służą odpowiednie krzywe pełzania statycznego ($A_\sigma = 0$) uzyskane przy trzech poziomach naprężeń: $\sigma = \sigma_m = 288,6 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{\max} = \sigma_m(1 + 0,0066) = 290,4 \text{ MN/m}^2$ i $\sigma_{\max} = \sigma_m(1 + 0,050) = 302,9 \text{ MN/m}^2$.

Dla uzyskania wyników ilościowych porównuje się nie pojedyncze krzywe pełzania i wibropełzania, a średnie krzywe pełzania i wibropełzania uzyskane z pięciu lub czterech prób.

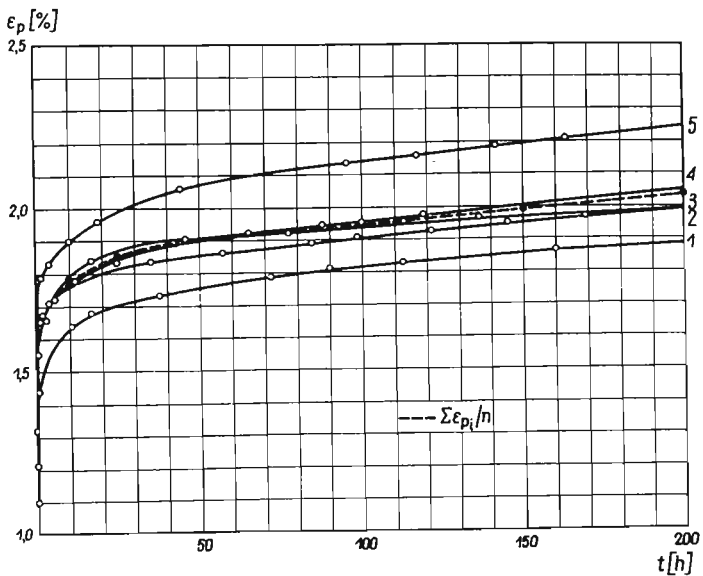
3.1. Wyniki badań przy $A_\sigma = 0,050$. Próby przeprowadzono przy następujących częstotliwościach obciążenia zmiennego: 0,0033; 21,8; 31; 37 Hz. Na rys. 1 przedstawiono krzywe pełzania ($A_\sigma = 0$) przy $\sigma = 288,6 \text{ MN/m}^2$. Krzywe pełzania ($A_\sigma = 0$) odpowiadające naprężeniu $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = 302,9 \text{ MN/m}^2$ przedstawiono na rys. 2.

Krzywe wibropełzania odpowiadające częstotliwościom 0,0033, 21,8, 31 i 37 Hz są odpowiednio przedstawione na rys. 3-6.

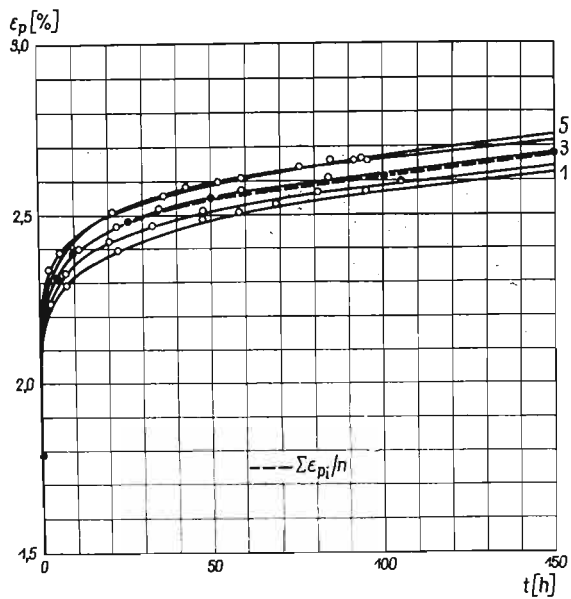
Na przedstawionych rys. 1-6 linią przerywaną naniesiono średnią krzywą pełzania $\varepsilon_p(t) = \frac{\sum \varepsilon_{pi}(t)}{n}$. Średnie krzywe pełzania i wibropełzania zestawiono na rys. 7. Z zestawienia

porównawczego krzywych $\varepsilon_p(t)$ (rys. 7) wynika, że krzywe wibropełzania układają się między krzywymi pełzania statycznego 1 i 6 z tym, że im niższa jest częstotliwość ν tym wyżej układają się krzywe. Dla przeprowadzenia pełnej analizy wpływu częstotliwości ν na proces wibropełzania należy zbadać jeszcze prędkości wibropełzania. W tym celu dla średnich krzywych obliczono prędkości pełzania dla ustalonych czasów. Zestawienie współrzędnych średnich krzywych $\varepsilon_p(t)$ i $\dot{\varepsilon}_p(t)$ podaje tablica 1.

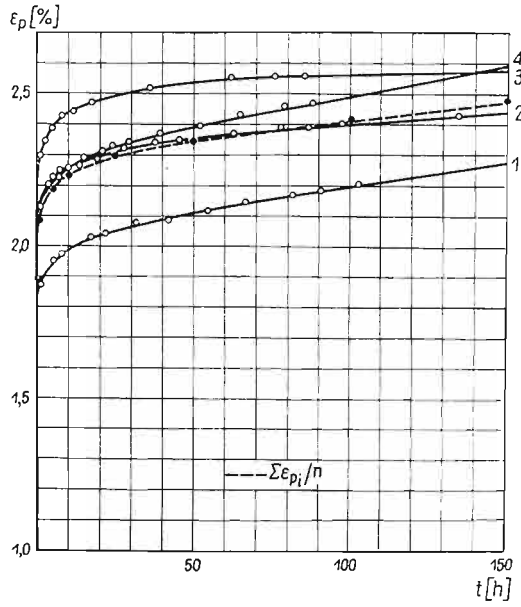
Na rys. 8 przedstawiono zestawienie porównawcze krzywych prędkości pełzania i wibropełzania $\dot{\varepsilon}_p(t)$. Z zestawienia tego widzimy, że dla czasów zbliżonych do pełzania ustalonego 150 h układanie się krzywych $\dot{\varepsilon}_p(t)$ jest odwrotne niż krzywych pełzania $\varepsilon_p(t)$ na rys. 7, tj. im wyższa jest częstotliwość tym prędkość jest większa.



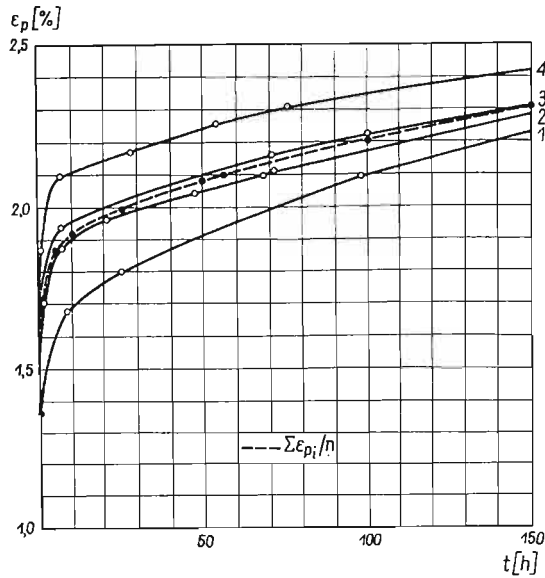
Rys. 1. Krzywe pelzania ($A_\sigma = 0$) dla $\sigma = 288,6$ [MN/m²]



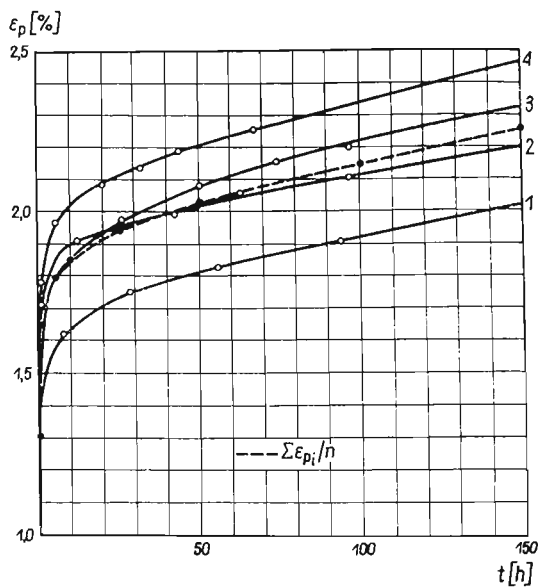
Rys. 2. Krzywe pelzania ($A_\sigma = 0$) dla $\sigma = 302,9$ [MN/m²]



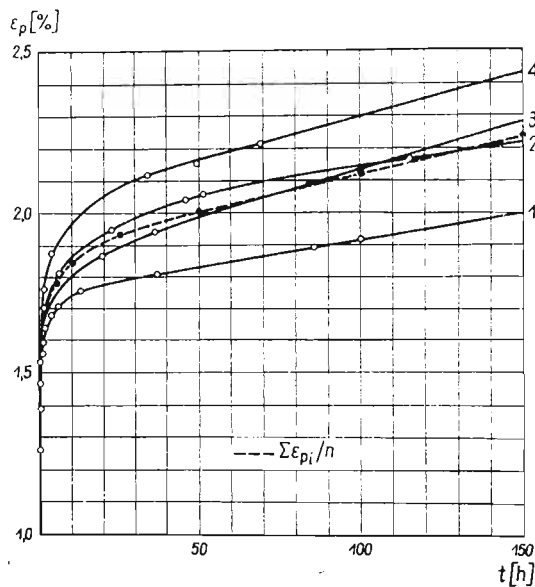
Rys. 3. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,050$) dla $\sigma_m = 288,6 \%$ [MN/m²] przy $\nu = 0,0033$ [Hz]



Rys. 4. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,050$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 21,8$ [Hz]



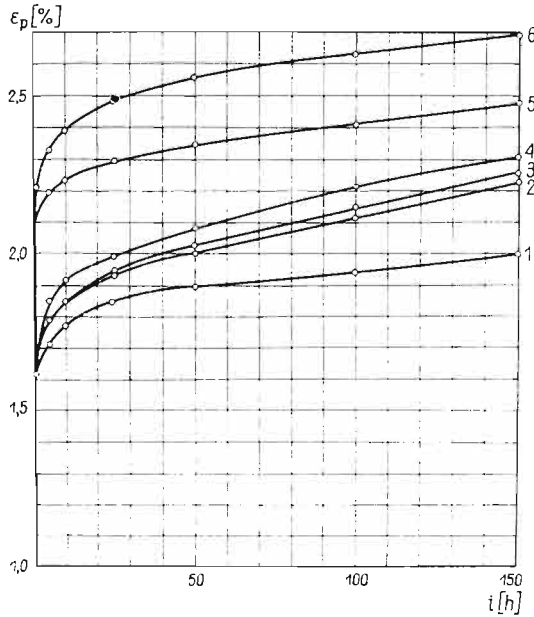
Rys. 5. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,050$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 31$ [Hz]



Rys. 6. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,050$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 37$ [Hz]

Dokładniejszych informacji o zmienności prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od częstotliwości ν dostarczają nam krzywe izochroniczne dla ustalonych czasów t (rys. 9), które zbudowano w oparciu o tablicę 1.

Idąc od małych czasów t do większych obserwujemy występowanie maksimum prędkości $\dot{\epsilon}_p$ przy różnych częstotliwościach, które przy większych czasach przesuwały się ku częstotliwościom mniejszym, z tym, że te maksima dla większych czasów stają się mniej wyraźne. W końcu dla pelzania ustalonego maksimum zanika, a zależność prędkości $\dot{\epsilon}_p$ od częstotliwości ν staje się liniowo wzrastającą.



Rys. 7. Zestawienie porównawcze krzywych $\epsilon_p(t)$ dla różnych częstotliwości przy $A_\sigma = 0,050$

3.2. Wyniki badań przy $A_\sigma = 0,0066$. Dla dokonania konfrontacji wpływu różnych częstotliwości wibracji przy $A_\sigma = 0,0066$ próby przeprowadzono przy następujących częstotliwościach ν : 0; 7,6 i 31 Hz. W badaniach tych amplituda naprężenia σ_a wynosiła zaledwie około $1,9 \text{ MN/m}^2$.

Na rys. 10 i 11 przedstawiono krzywe wibropelzania dla częstotliwości 7,6 i 31 Hz. Na rys. 12 przedstawiono krzywe pelzania statycznego przy $\sigma = \sigma_{\max} = 290,4 \text{ MN/m}^2$. Na rysunkach tych linią przerywaną naniesiono średnie krzywe $\epsilon_p(t)$.

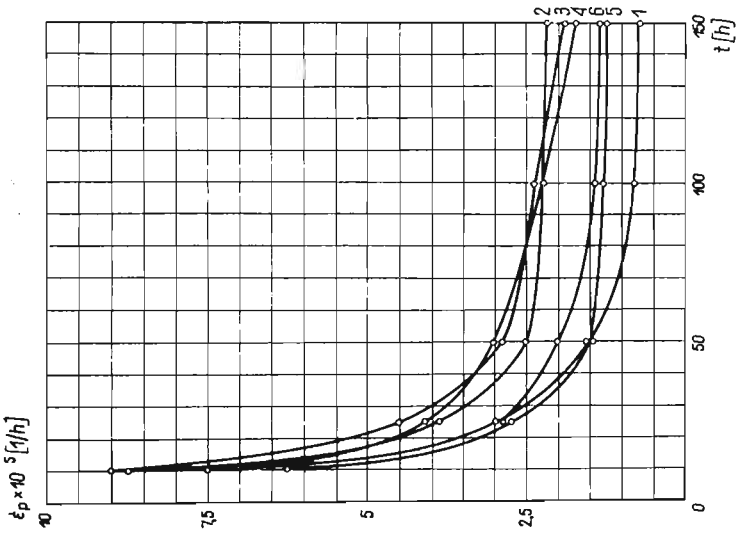
Dla średnich krzywych $\epsilon_p(t)$ obliczono prędkości pelzania dla ustalonych czasów. Zestawienie współrzędnych średnich krzywych $\epsilon_p(t)$ i $\dot{\epsilon}_p(t)$ podaje tablica 2.

Na rys. 13 przedstawiono zestawienie porównawcze średnich krzywych $\epsilon_p(t)$. Współrzędne dla krzywej 1 wzięto z tablicy 1. W oparciu o tablicę 2 i 1 zbudowano krzywe $\dot{\epsilon}_p(t)$ (rys. 14) oraz krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropelzania w zależności od częstotliwości (rys. 15) dla czasów ustalonych $\dot{\epsilon}_p(\nu)$.

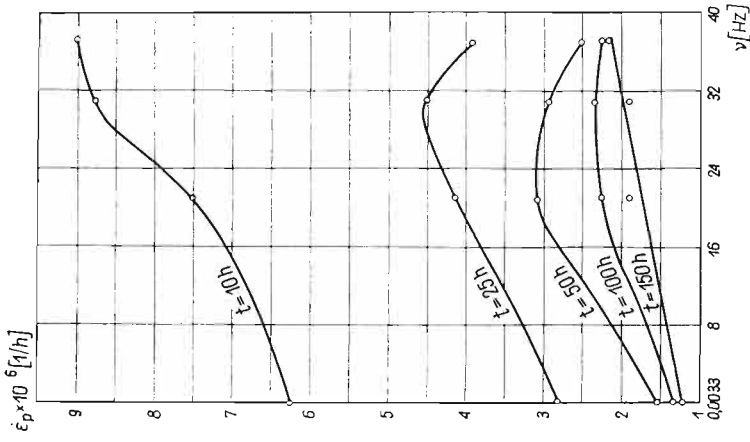
Z zestawienia porównawczego krzywych $\epsilon_p(t)$ (rys. 13) wynika, że dla bardzo małych wibracji krzywe wibropelzania układają się wyżej przy niższych częstotliwościach. Jeśli

Tablica 1. Zestawienie współrzędnych średnich krzywych $\varepsilon_p(t)$ i $\dot{\varepsilon}_p(t)$

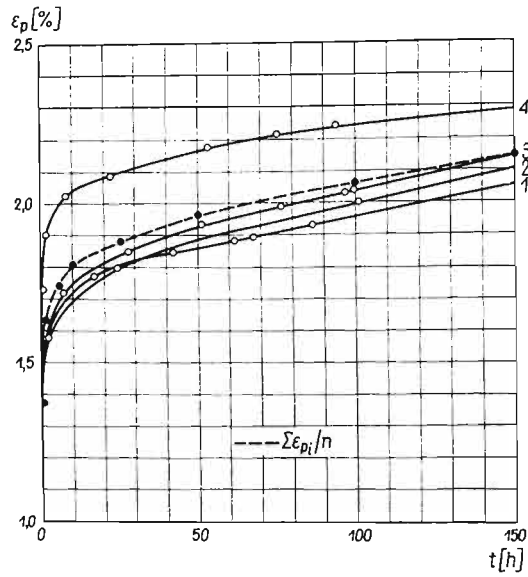
Czas t [h]	$A_\sigma = 0$ $\sigma = 288,6$ [MN/m ²]		$A_\sigma = 0,050$ $\nu = 0,0033$ [Hz] $\sigma_m = 288,6$ [MN/m ²]		$A_\sigma = 0,050$ $\nu = 21,8$ [Hz] $\sigma_m = 288,6$ [MN/m ²]		$A_\sigma = 0,050$ $\nu = 31$ [Hz] $\sigma_m = 288,6$ [MN/m ²]		$A_\sigma = 0,050$ $\nu = 37$ [Hz] $\sigma_m = 288,6$ [MN/m ²]	
	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ [$\frac{1}{h}$]
0	1,224		1,849		1,351		1,305		1,126	
1	1,616	216,5	2,096	149	1,684	212,0	1,640	215	1,660	298
2	1,657		2,146		1,775		1,720		1,722	
5	1,713	15,8	2,191	12,2	1,852	19,5	1,790	18,5	1,784	16,8
8	1,752		2,219		1,892		1,831		1,823	
10	1,768	7,50	2,232	6,25	1,914	7,50	1,846	8,75	1,841	9,00
12	1,782		2,244		1,922		1,864		1,859	
20	1,828		2,278		1,968		1,912		1,907	
25	1,843	3,00	2,294	2,80	1,989	4,10	1,935	4,50	1,920	3,90
30	1,858		2,306		2,009		1,957		1,946	
40	1,880		2,329		2,046		1,993		1,976	
50	1,896	1,55	2,345	1,55	2,077	3,05	2,023	2,90	2,001	2,50
60	1,911		2,360		2,107		2,051		2,026	
80	1,937		2,387		2,163		2,101		2,071	
100	1,953	0,800	2,414	1,30	2,211	2,25	2,148	2,33	2,115	2,23
120	1,969		2,439		2,253		2,194		2,160	
130	1,980		2,451		2,272		2,214		2,184	
150	1,996	0,775	2,476	1,23	2,309	1,75	2,254	1,90	2,229	2,20
170	2,011		2,500		2,342		2,290		2,272	



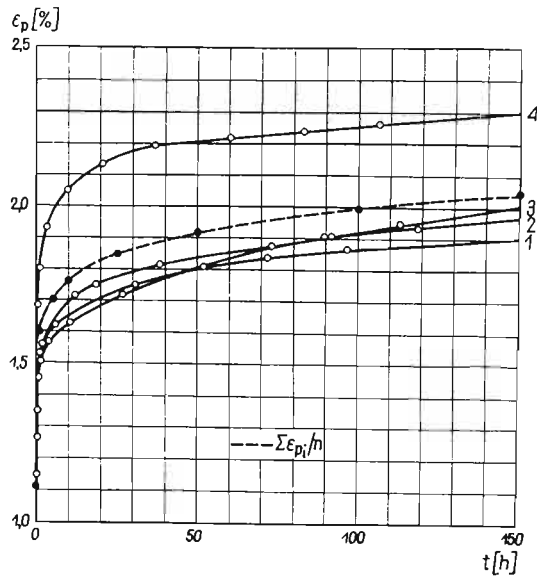
Rys. 8. Zestawienie porównawcze krzywych $\dot{\epsilon}_p(t)$ dla różnych częstotliwości przy $A_\sigma = 0,050$ i $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²]



Rys. 9. Krzywe izochroniczne zmieniności prędkości wibropelczania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od częstotliwości wibracji ν dla $A_\sigma = 0,050$ i $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²]

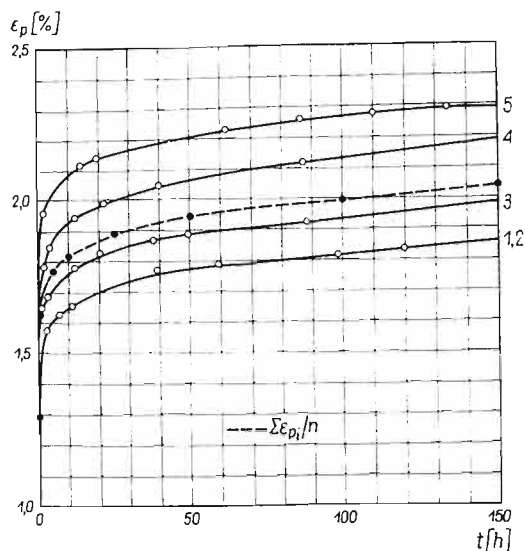


Rys. 10. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,066$ dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 7,6$ [Hz])

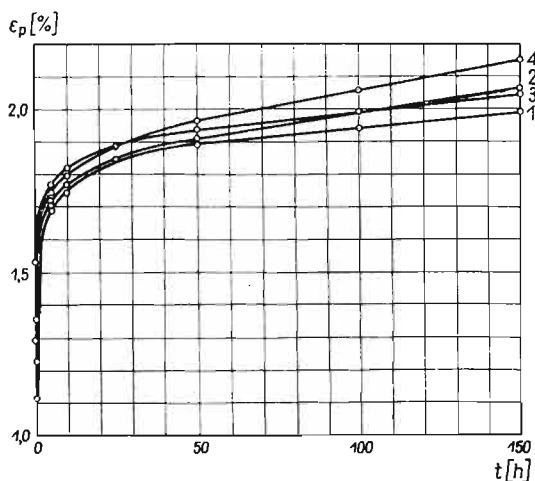


Rys. 11. Krzywe wibropelzania ($A_\sigma = 0,0066$) dla $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²] przy $\nu = 31$ [Hz])

chodzi o krzywe prędkości wibropęczania $\dot{\varepsilon}_p(t)$, to układają się one podobnie jak $\varepsilon_p(t)$, tj. krzywa $\dot{\varepsilon}_p(t)$ przy 7,6 Hz układu się wyżej od krzywej $\dot{\varepsilon}_p(t)$ przy $\nu = 31$ Hz (rys. 14). Poza tym, krzywe wibropęczania przy obu częstotliwościach układają się wyżej od krzywej



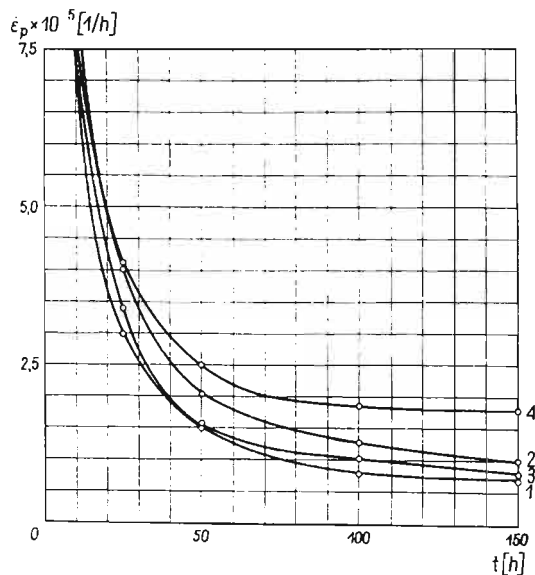
Rys. 12. Krzywe pełzania ($A_\sigma = 0$) dla $\sigma = 290,4$ [MN/m²]



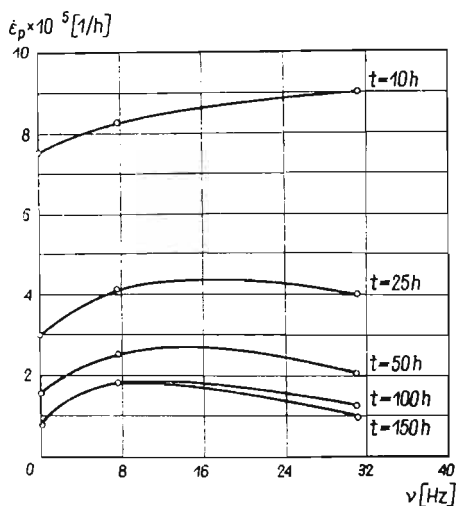
Rys. 13. Zestawienie porównawcze krzywych $\varepsilon_p(t)$ dla różnych częstotliwości przy $A_\sigma = 0,0066$

pełzania ($A_\sigma = 0$) przy naprężeniu $\sigma = \sigma_{\max}$ mimo mniejszego naprężenia średniego σ_m (rys. 13). Wynika stąd wniosek, że samo istnienie nawet bardzo małej wibracji powodowało znaczną aktywację procesu pełzania.

Przy $A_\sigma = 0,0066$ krzywe izochroniczne $\dot{\epsilon}_p(\nu)$ mają nieco odmienny charakter niż przy $A_\sigma = 0,050$. Poczynając od $t = 25$ h występują maksima $\dot{\epsilon}_p$ (rys. 15). Maksima te dla większych ustalonych czasów t przesuwają się ku mniejszym częstotliwościom ν . Dla wibro-



Rys. 14. Zestawienie porównawcze krzywych $\dot{\epsilon}_p(t)$ dla różnych częstotliwości ν przy $A_\sigma = 0,0066$



Rys. 15. Krzywe izochroniczne zmienności prędkości wibropelzania $\dot{\epsilon}_p$ w zależności od częstotliwości ν dla $A_\sigma = 0,0066$ i $\sigma_m = 288,6$ [MN/m²]

pelzania ustalonego ($t = 150$ h) maksimum to występuje przy około 8 Hz. Natomiast przy $A_\sigma = 0,050$, przy wibropelzaniu ustalonym, $\dot{\epsilon}_p$ wzrastało wraz ze wzrostem częstotliwości.

Tablica 2. Zestawienie współrzędnych średnich krzywych $\varepsilon_p(t)$ i $\dot{\varepsilon}_p(t)$

Czas t [h]	$A_\sigma = 0$ $\sigma = 290,4$ [MN/m ²]		$A_\sigma = 0,0066$ $\nu = 7,6$ [Hz] $\sigma_m = 288,6$ [MN/m ²]		$A_\sigma = 0,0066$ $\nu = 31$ [Hz] $\sigma_m = 288,6$ [MN/m ²]	
	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h} \right]$	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h} \right]$	ε_p %	$\dot{\varepsilon}_p \cdot 10^5$ $\left[\frac{1}{h} \right]$
0	1,290		1,358		1,111	
1	1,637	201	1,634	157	1,600	260
2	1,692		1,671		1,632	
5	1,765	17,5	1,746	19,2	1,698	17,5
8	1,795		1,785		1,737	
10	1,812	7,00	1,803	8,25	1,754	9,0
12	1,825		1,818		1,773	
20	1,866		1,861		1,823	
25	1,885	3,40	1,882	4,10	1,845	4,0
30	1,900		1,902		1,863	
40	1,922		1,934		1,890	
50	1,939	1,55	1,962	2,50	1,912	2,05
60	1,953		1,984		1,931	
80	1,972		2,021		1,964	
100	1,995	1,03	2,058	1,83	1,990	1,275
120	2,013		2,094		2,015	
130	2,024		2,112		2,025	
150	2,040	0,800	2,148	1,80	2,047	0,975
170	2,056		2,184		2,064	

4. Wnioski i interpretacja wyników

Konfrontując wyniki badań wibropelzania przy $A_\sigma = 0,050$ i $0,0066$ stwierdzić należy, że w obu przypadkach istotny wpływ na proces wibropelzania wywiera częstotliwość naprężenia zmiennego.

Istnieje jakościowa różnica we wpływie częstotliwości wibracji ν na prędkość wibropelzania przy różnych współczynnikach amplitudy naprężenia A_σ . Przy wibropelzaniu ustalonym dla $A_\sigma = 0,050$ obserwujemy liniowy wzrost prędkości $\dot{\varepsilon}_p$ wraz ze wzrostem częstotliwości wibracji ν . Natomiast przy wibropelzaniu ustalonym dla małego współczynnika amplitudy naprężenia $A_\sigma = 0,0066$ maksimum prędkości $\dot{\varepsilon}_p$ występuje w pobliżu częstotliwości ν równej około 8 Hz.

Dla obu współczynników amplitudy naprężenia A_σ stwierdzono przy jednakowym naprężeniu średnim σ_m , że krzywe wibropelzania $\varepsilon_p(t)$ układają się tym wyżej im mniejsza jest częstotliwość wibracji ν . Efekt ten przy $A_\sigma = 0,0066$ należy tłumaczyć przede wszystkim aktywnym wpływem istnienia samej wibracji, gdyż krzywe wibropelzania układają się nawet nad krzywą pelzania uzyskaną przy naprężeniu $\sigma = \sigma_{\max}$. Natomiast, przy $A_\sigma = 0,050$ efekt ten uzyskuje się dzięki naprężeniu σ_{\max} i aktywnemu działaniu istnienia wibracji. Na początku pierwszego okresu wibropelzania obserwujemy duże odkształcenia trwałe i to tym większe im mniejsza jest częstotliwość naprężeń zmiennych ν (rys. 7). Czym

należy to tłumaczyć? Najpierw zwrócić należy uwagę na to, że stwierdzone układanie się krzywych wibropęzania między krzywymi pełzania statycznego przy $\sigma = \sigma_m$ i $\sigma = \sigma_{\max}$ (rys. 7) świadczy o nieliniowości procesu pełzania badanego stopu¹⁾.

Dla podbudowania ostatniego stwierdzenia przypomnijmy, że dla liniowych modeli reologicznych naprężenia cyklicznie zmienne nie wywołują przyspieszenia pełzania. Omawiane efekty wibropęzania można interpretować przy pomocy impulsu siły. Ponieważ badany stop jest reologicznie silnie nieliniowy ze względu na poziom naprężenia σ [5], co można wykazać związkiem

$$(4.1) \quad \dot{\epsilon}_p(t) = B(t)\sigma^{n(t)}$$

gdzie $n(t)$ — funkcja wskaźnika nieliniowości pełzania rosnąca w pierwszym okresie pełzania do swojej wartości skończonej wynoszącej około 12,25, to można w pierwszym przybliżeniu pominąć jako mały wpływ dolnych połówek sinusoid obciążenia zmiennego $P(t) = P_a \sin \omega t$. Wówczas o omawianym efekcie decydować będą dodatnie impulsy siły nakładane na obciążenie statyczne P_m co pół okresu T . Wychodząc z wyrażenia na impuls siły

$$(4.2) \quad I = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt$$

i uwzględniając sinusoidalny charakter zmienności obciążenia otrzymujemy wyrażenie:

$$(4.3) \quad I = \int_0^{\frac{T}{2}} P_a \sin \omega t dt = \frac{P_a}{\omega} \left(1 - \cos \omega \frac{T}{2} \right).$$

Po uwzględnieniu, że $\omega = 2\pi\nu$ i $\nu = \frac{1}{T}$ wyrażenie na dodatni impuls obciążenia zmiennego przyjmie postać

$$(4.4) \quad I = \frac{P_a}{2\pi\nu} (1 - \cos \pi) = \frac{P_a}{\pi\nu}.$$

Na podstawie związku (4.4) stwierdzamy, że dodatni impuls obciążenia zmiennego jest proporcjonalny do amplitudy siły P_a i odwrotnie proporcjonalny do częstotliwości ν , tj. im mniejsza jest częstotliwość, tym impulsy siły są większe. Wywołuje on więc większe poślizgi i większe umocnienie próbki (rys. 7). Przechodząc zaś do granicy obciążenia statycznego $P = P_m + P_a$ stwierdzamy, że tu początkowo poślizgi są największe, a zatem i umocnienie (rys. 7, krzywa 6). Jest to tylko jedna strona efektu działania impulsów obciążenia zmiennego.

Obok wpływu samych impulsów dodatnich, aktywującą rolę odgrywa częstotliwość działania dodatnio-ujemnych impulsów. Szczególnie jest to widoczne dla wibropęzania ustalonego przy $A_\sigma = 0,050$ (rys. 9), gdzie $\dot{\epsilon}_p$ przy $t = 150$ h wzrasta liniowo ze wzrostu częstotliwości ν . Z punktu widzenia fizyki ciała działanie wibracji powoduje wzrost ruchliwości dyslokacji. Dyslokacje łatwiej pokonują przeszkody; same przeszkody stają się mniej

¹⁾ Silną nieliniowość pełzania badanego stopu omówiono w pracach [4, 5]

stabilne. Prowadzi to do rozluźnienia skupisk dyslokacji i w konsekwencji do zmniejszenia lokalnych naprężeń. Zmniejszenie lokalnych naprężeń powoduje osłabienie, a to przy istnieniu naprężenia średniego σ_m sprzyja pełzaniu. Na temat wpływu samej wibracji i poziomu naprężenia na proces wibropełzania była mowa szerzej w pracy [1].

Dla bardzo małych A_σ (rys. 13–15) wpływ impulsów dodatnich na umocnienie jest mały, natomiast istotny wpływ wywierają wibracje dodatnio-ujemnych impulsów. Łączne działanie impulsów dodatnich i wibracji powoduje, że dla czasów bliskich pełzaniu ustalonymu mamy maksimum prędkości wibropełzania w obrębie częstotliwości około 8 Hz.

Istnieje więc istotna różnica między wpływem częstotliwości ν dla małych i większych współczynników amplitudy naprężenia A_σ . Na podstawie powyższego i pracy [1] można wnioskować, że proces wibropełzania jest zjawiskiem bardzo złożonym, a wpływ częstotliwości na proces wibropełzania znaczny.

Na zakończenie spróbujmy przedyskutować postać hipotezy, która poprawnie opisywałaby proces wibropełzania. Biorąc pod uwagę wyniki uzyskane w pracy [1] i w pracy niniejszej oraz dla uproszczenia ustalając temperaturę należałoby poszukiwać funkcji w postaci

$$(4.5) \quad F(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, \sigma_m, A_\sigma, \nu) = 0.$$

Taka funkcja, którą można by nazwać dynamiczną hipotezą umocnienia, powinna poprawnie opisywać pełzanie w procesie zmęczenia i proces wibropełzania, gdyż ujmuje wszystkie główne parametry tych procesów. Proponowana nazwa jest uzasadniona tym, że przy statycznym działaniu naprężenia wzór (4.5) sprowadza się do znanej hipotezy umocnienia w postaci

$$(4.6) \quad F_3(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, \sigma) = 0.$$

Poza tym, hipoteza umocnienia jest najodpowiedniejsza dla stopów metali ze względu na posiadaną przez nie cechę umocnienia. Oczywiście przy stosowaniu hipotezy (4.5) wystąpią duże trudności matematyczne. Dla oceny przydatności tej hipotezy należałoby przeprowadzić znaczną ilość odpowiednio zaprogramowanych badań przy różnych poziomach naprężenia średniego σ_m , przy różnych współczynnikach amplitudy naprężenia A_σ i przy różnych częstotliwościach obciążenia zmiennego ν .

Literatura cytowana w tekście

1. A. JAKOWLUK, *Wpływ poziomu naprężenia i współczynnika amplitudy naprężenia na proces wibropełzania*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 4, 7 (1969)
2. A. JAKOWLUK, *Wibropełzanie w metalach*, WNT ser. «Nowa Technika» z. 73, Warszawa 1967.
3. A. R. WADE, P. GROOTENHUIS, *Proc. Intern. Conference on Fatigue of Metals.*, London 1956, 10–14th Sept, 368.
4. A. JAKOWLUK, S. ZIEMBA, *Pewien nieliniowy model reologiczny*, III Sympozjon poświęcony reologii, Wrocław 1966.
5. M. CZECH, A. JAKOWLUK, J. KOŁYBKO, *Pewne aspekty ustalania i doboru funkcji proporcjonalności prędkości pełzania oraz funkcji wskaźnika nieliniowości pełzania*. Referat na V Krajową Konf. Wytrż. i Badań Mater., Kraków 1969.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ ВИБРАЦИИ НА ПРОЦЕСС ВИБРОПОЛЗУЧЕСТИ

Исследования велись на алюминиевом сплаве Al-Mg-Si (PA4) в одноосном напряженном состоянии при температуре 296°K. Эксперименты велись при постоянном среднем напряжении σ_m и при различных коэффициентах амплитуды напряжения $A_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 0, 0,0066$ и $0,050$. Для $A_\sigma = 0,0066$ исследования проводились при частоте $\nu = 0, 7, 6$ и 31 гц; для $A_\sigma = 0,050$ — при частоте $\nu = 0, 0,0033, 21, 8, 31$ и 37 гц. В обоих случаях установлено, что кривые виброползучести укладываются тем выше над кривой ползучести, чем меньше частота переменной нагрузки ν . Полученный эффект влияния частоты объясняется положительными импульсами верхних полусинусоид переменной нагрузки, которые вызывают добавочное скольжения и упрочнение образца, и знакопеременных импульсов, вызывающих дрейфующее движение дислокации, связанное с направлением действия напряжения σ_m . Существует качественное отличие виброползучести при больших и малых A_σ . Во второй стадии ползучести для больших A_σ , с ростом ν , знакопеременная вибрация линейно увеличивает скорость виброползучести $\dot{\epsilon}_p$. При $A_\sigma = 0,0066$ совместное действие положительных и знакопеременных импульсов приводит к тому, что во второй стадии ползучести $\dot{\epsilon}_{p \max}$ проявляется при $\nu \simeq 8$ гц.

Summary

THE EFFECT OF VIBRATION FREQUENCY ON THE VIBRATIONAL CREEP PROCESS

The investigations were carried out on an aluminium alloy Al-Mg-Si (PA4) under an uniaxial state of stress at a temperature of 296°K. The tests were performed with a constant mean stress σ_m and various stress amplitude coefficients $A_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 0, 0,0066$ and $0,050$. For $A_\sigma = 0,0066$, the frequencies of the oscillating load $\nu = 0, 7, 6$ and 31 Hz were applied. For $A_\sigma = 0,050$, the frequencies were $\nu = 0, 0,0033, 21, 8, 31$ and 37 Hz. In both cases it was found that the vibrational creep curves were the higher, in relation to the static creep curve, the lower the applied frequency. The observed effect of the frequency was interpreted by means of positive impulses of upper half-sinusoids of the oscillating load which induce additional slips and strain hardening of the specimen, and positive-negative impulses causing a drifting dislocation movement related to the direction of the σ_m stress. There is a qualitative difference in vibrational creep for large and small A_σ . Together with the increase of ν , for higher A_σ , the oscillatory positive-negative impulses linearly increase the speed of vibrational creep $\dot{\epsilon}_p$. For $A_\sigma = 0,0066$, the combined action of positive impulses and positive-negative vibrations, result in the appearance of $\dot{\epsilon}_{p \max}$ for $\nu \simeq 8$ Hz.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
BIAŁYSTOK

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1969 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA ROK 1968

I. ROZWIJANIE DZIAŁALNOŚCI W DZIEDZINIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych w Oddziałach PTMTS

Oddział	Liczba zebrań					Liczba referatów	Liczba uczestników	Liczba dyskutantów
	I kw. 68	II kw. 68	III kw. 68	IV kw. 68	Razem			
Gdańsk	—	2	—	2	4	4	104	32
Gliwice	—	2	—	5	7	7	111	75
Kraków	1	2	1	1	5	7	66	30
Łódź	—	—	—	4	4	4	50	16
Poznań	2	3	—	3	8	8	118	40
Szczecin	2	1	—	2	5	5	90	25
Warszawa	3	1	—	1	5	5	125	32
Wrocław	2	1	—	3	6	6	80	24
	10	12	1	21	44	46	844	274

2. Organizowanie sympozjów i konferencji naukowych dotyczących wybranych działów specjalnych

1) Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach od 25 lutego do 3 marca 1968 r. Konwersatorium nt. *Zagadnienia optymalizacji w mechanice*. Wzięły w nim udział 63 osoby. Wygłoszono ogółem 26 referatów.

2) Oddział w Poznaniu zorganizował w dniach 26 i 27 kwietnia 1968 r. Sympozjum nt. *Teoria Drgań* (liniowych i stochastycznych). W obradach wzięło udział 51 osób. Zgłoszono ogółem 35 referatów, z których wygłoszono 28. Dotyczyły one następującej tematyki: a) prac ściśle teoretycznych, b) zastosowań technicznych teorii drgań, c) drgań układów mechanicznych z wymuszeniem stochastycznym, d) syntezy układów drgających, e) prac doświadczalnych.

3) Oddział Warszawski wspólnie z Zarządem Głównym zorganizował w dniach 5 i 6 listopada 1968 r., z okazji X-lecia PTMTS, Walny Zjazd członków Towarzystwa połączony z sesją naukową. Wzięło w nim udział 156 zgłoszonych uczestników, a na uroczystym otwarciu było obecnych ponad 200 osób. Wygłoszono 7 referatów przeglądowych obrazujących dorobek podstawowych dziedzin mechaniki teore-

tycznej i stosowanej w okresie dziesięciolecia 1958–1968, ze specjalnym uwzględnieniem roli i działalności Towarzystwa. Referaty przygotowywane były przez Oddziały terenowe, które współpracowały ze sobą i konsultowały poszczególne zagadnienia.

3. Konkursy naukowe

1) Oddział w Warszawie przeprowadził w roku 1968 konkurs na najlepszą teoretyczną pracę naukową z zakresu konstrukcji maszynowych i budowlanych. Zgłoszono do udziału w konkursie 12 prac Zarząd Oddziału, zgodnie z wnioskami Sądu Konkursowego pod przewodnictwem Prof. dra Z. Brzoski, przyznał następujące nagrody:

I w wysokości zł. 10.000 — zespołowi w składzie — Doc. H. Frąckiewicz, Mgr inż. A. Legat i Mgr inż. J. Lewiński; dwie równorzędne II nagrody w wysokości zł. 5.500 — każda — Dr. Z. Waszczyszynowi z Krakowa oraz Dr E. Włodarczykowi z Warszawy.

2) Oddział w Wrocławiu przeprowadził konkurs naukowy na prace doświadczałnic z dziedziny mechaniki. Zgłoszono 10 prac. Zarząd Oddziału na wniosek Sądu Konkursowego przyznał następujące nagrody:

I w wysokości zł. 8.000 — A. Jakowukowi; II w wysokości zł. 6.000 — R. S. Doroszkiewiczowi; dwie równorzędne III nagrody po zł. 3.500 — każda — E. Maciągowi i St. Wójcikowi.

4. Finansowanie prac naukowych

W okresie sprawozdawczym nie finansowano prac naukowych ze względu na skromne fundusze Towarzystwa, jak i zarządzenia Sekretarza Naukowego PAN nie zezwalające na prowadzenie tego rodzaju akcji przez towarzystwa naukowe.

5. Udział w konferencjach i kongresach krajowych i zagranicznych

Członkowie PTMTS brali czynny udział w konferencjach i kongresach naukowych, wygłaszając na nich referaty z prac własnych.

Sprawozdania z kongresów i konferencji, w których uczestniczyli członkowie Towarzystwa publikowane są w organie wydawniczym PTMTS — MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA.

6. Organizowanie wymiany naukowej z zagranicą

W ramach wymiany naukowej z zagranicą poszczególne Oddziały organizowały zebrania naukowe, sympozja, konferencje lub spotkania, na których referaty wygłaszali prelegenci zagraniczni.

I tak np. w Oddziale Krakowskim wygłaszali referaty: Prof. J. Lepik z Estońskiej SRR, Prof. W. Noll z USA i Prof. W. Nash, również z USA, w Oddziale Warszawskim — Prof. P. Wiśniewski z British Columbia University.

II. ROZPOWSZECHNIANIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej Towarzystwa

1) Organ PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA. W roku 1968 organ PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA ukazywał się w formie kwartalnika. Wydano 4 zeszyty: tom 6, zeszyt 1; tom 6, zeszyt 2; tom 6, zeszyt 3 i tom 6, zeszyt 4, z tym, że zeszyt 3 (o zwiększonej objętości 16 arkuszy wydawniczych) poświęcony był całkowicie dziesięcioleciu PTMTS. Zawierał on referaty wygłoszone podczas sesji naukowej związanej z jubileuszem Towarzystwa. Ponadto tematyka zeszytów wydawanych w roku 1968 zawierała, zgodnie z założeniami programowymi: artykuły przeglądowe

z różnych gałęzi mechaniki, prace oryginalne, prace doświadczalne, Biuletyn PTMTS, sprawozdania z sympozjów naukowych PTMTS, konferencji itp.

2) Oddział w Gliwicach wydał materiały konferencyjne związane z organizowanym konwersatorium nt. *Zagadnienia optymalizacji w mechanice*.

3) Oddział w Poznaniu wydał materiały konferencyjne związane z sympozjum nt. *Teoria Drgań*.

2. Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów

a) Kursy

1) Oddział w Gdańsku zorganizował w okresie I i II kwartału 1968 r. kurs nt. *Metody probabilistyczne w mechanice*. Kurs prowadził Prof. dr J. Więckowski.

2) Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs z zakresu transformacji całkowych.

b) Seminaria

Oddział w Gdańsku przeprowadził seminaria nt. *Nieliniowa teoria powłok*, w I, II i IV kwartale 1968 r.

3. Wzrost liczby członków

Dążenie do zwiększenia liczby członków PTMTS ilustruje następująca tablica:

Oddział	IV kw. 67	I kw. 68	II kw. 68	III kw. 68	IV kw. 68	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym	
		okres sprawozdawczy				liczba	%
Gdańsk	37	38	38	39	39	+2	+5,4
Gliwice	59	58	59	59	58	-1	-1,5
Kraków	58	58	60	60	74	+16	+27,7
Łódź	30	30	30	32	31	+1	+3,3
Poznań	50	51	50	50	50	—	—
Szczecin	25	27	27	28	28	+3	+12,0
Warszawa	144	146	146	139	143	-1	-0,6
Wrocław	56	56	56	56	59	+3	+5,3
Razem	459	464	466	463	482	+25	+5,4

Stosunkowo niewielki przyrost członków PTMTS spowodowany był poważnym ubytkiem jaki nastąpił w okresie sprawozdawczym, na skutek skreślenia z listy członków wielu osób uporczywie zalegających z płaceniem składek.

III. RÓŻNE

1. Zebrania organizacyjne

Liczba zebrań organizacyjnych w okresie sprawozdawczym przedstawia się następująco:

Zjazd Delegatów	1
Zebrań Zarządu Głównego	3
Zebrań Prezydium Zarządu Głównego	3
Zebrań Głównej Komisji Rewizyjnej	1
Zebrań Komitetu Organizacyjnego Obchodów dziesięciolecia PTMTS	4
Walnych Zgromadzeń Oddziałów	8

Zebrań Zarządów Oddziałów:		
Gdańsk	5	
Gliwice	8	
Kraków	7	
Łódź	4	
Poznań	5	
Szczecin	7	
Warszawa	5	
Wrocław	6	47
Innych zebrań organizacyjnych w Oddziałach		4
R a z e m zebrań organizacyjnych		71

2. Kontrole

W okresie sprawozdawczym przeprowadzone zostały następujące kontrole:

1) O d d z i a ł w K r a k o w i e. W dniu 30 marca 1968 r. Inspektor Zakładu Ubezpieczeń Społecznych w Krakowie przeprowadził kontrolę obliczania i odprowadzania składek ubezpieczeniowych za rok 1966 i 1967. Żadnych usterek w tym zakresie nie stwierdzono.

Z a r z ą d G ł ó w n y kontrolowany był pięciokrotnie, mianowicie:

— 27.II.68 r. przez Inspektora Wydziału Finansowego PRN — sprawdzenie potrącania i odprowadzania podatków od wynagrodzeń;

— w okresie od 5 do 28.II.68 r. Inspektor PAN dokonał kontroli działalności finansowej Towarzystwa;

— 15.V.68 r. Inspektor ZUS dokonał kontroli naliczania składek ubezpieczeniowych;

— 4.IX.68 r. Inspektor Wydziału Finansowego PRN dokonał kontroli prowadzenia ksiąg finansowych.

Poza drobnymi uwagami natury porządkowej, wszystkie wyżej wymienione kontrole stwierdziły prawidłowość prowadzenia działalności finansowej Towarzystwa.

IV. ANALITYCZNE PODSUMOWANIE DZIAŁALNOŚCI TOWARZYSTWA

W ciągu roku 1968 liczba członków Towarzystwa wzrosła o 9 osób, co stanowi 1,9%. (W roku 1967 wzrost ten wyniósł 6 osób, co stanowiło 1,3%). Liczba ta byłaby o wiele wyższa, gdyby nie poważny ubytek na skutek skreśleń z listy członków za niepłacenie składek.

Zebrań organizacyjnych odbyło się 71.

Liczba zebrań naukowych wyniosła 44, a liczba wygłoszonych na nich referatów — 46. W zebraniach tych wzięły udział 844 osoby oraz 274 — zabrały głos w dyskusji.

Ponadto, w ramach działalności rzeczowej, zorganizowano:

1 konwersatorium z udziałem 63 osób, na którym wygłoszono 26 referatów;

1 sympozjum z udziałem 51 osób, na którym wygłoszono 28 referatów;

1 sesję naukową (w ramach obchodów dziesięciolecia PTMTS) z udziałem około 200 osób, podczas której wygłoszono 7 referatów przeglądowych;

2 konkursy naukowe, ogólnokrajowe, na które zgłoszono 22 prace;

2 kursy naukowe;

1 seminarium prowadzone przez trzy kwartaly (I, II i IV).

Poza tym ukazały się 3 pozycje wydawnicze, w tym stały organ PTMTS kwartalnik MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA (40 arkuszy wydawniczych, 4 zeszyty) oraz 2 wydawnictwa materiałów konferencyjnych.

Tematyka organizowanych imprez i zebrań naukowych dotyczyła zagadnień stereomechaniki, hydro-mechaniki, aeromechaniki, termodynamiki.

Podział prac według ich przeznaczenia technicznego przedstawiał się następująco:

1. Prace o charakterze ogólnym nie związane wyraźnie z żadnym działem przemysłu.

2. Prace związane z budownictwem lądowym i wodnym.

3. Prace związane z konstrukcjami maszyn, samochodów, okrętów.

4. Prace dotyczące górnictwa i hutnictwa.
5. Prace związane z energetyką.
6. Prace dotyczące techniki nuklearnej.

W liczbie wygłoszonych referatów nadal ogromną przewagę miały tematy z mechaniki stosowanej, a stosunkowo nieliczne dotyczyły mechaniki teoretycznej.

Analizując działalność Towarzystwa w roku 1968 należy stwierdzić, że koncentrowała się ona głównie na przygotowaniach do sesji naukowej związanej z obchodami dziesięciolecia PTMTS. Przygotowania te trwały prawie 3 lata i brało w nich udział całe Towarzystwo. Referaty przeglądowe, opracowywane zespołowo przy współpracy różnych ośrodków naukowych w kraju, stanowiły podsumowanie mechaniki polskiej na przestrzeni lat 1958–1968, z podkreśleniem udziału w nim PTMTS. Tematyka referatów w czasie trwania przygotowań konsultowana była wielokrotnie na zebraniach Komitetu Organizacyjnego oraz Prezydium i Plenum Zarządu Głównego.

Ze względu na uroczysty charakter imprezy i udział w niej szeregu wysoko postawionych osób, również przygotowania organizacyjne wymagały specjalnej staranności i dużego nakładu pracy.

Obecność 7 gości zagranicznych na uroczystościach też zobowiązywała do zorganizowania im odpowiednich warunków i gościnnego przyjęcia.

W związku z wysiłkami skoncentrowanymi na przygotowaniach i obchodach dziesięciolecia Towarzystwa, stosunkowo skromnie, w porównaniu z latami ubiegłymi, wypadły inne formy działalności Towarzystwa. (Np. spadła nieco liczba zorganizowanych zebrań naukowych z 48 w roku 1967 do 46 w roku 1968 oraz wygłoszonych na nich referatów z 60 do 46). Liczba sympozjów zmniejszyła się o jedno. Również konkursów naukowych zorganizowano mniej o jeden, co jednak spowodowane było dążeniem do ogłaszania mniejszej liczby konkursów, ale za to bardziej atrakcyjnych, z wyższymi nagrodami i o zasięgu ogólnokrajowym.

V. SPRAWY FINANSOWE

Dla pełniejszego obrazu pracy Towarzystwa w okresie sprawozdawczym podane zostają zasadnicze dane dotyczące spraw finansowych.

A. Dochody

- | | |
|--|---------------|
| 1. Składki członkowskie | |
| planowano | zł. 25.000.— |
| wpłynęło | „ 27.610.— |
| wskaźnik wykonania wynosi — 110,4% | |
| 2. Sprzedaż zeszytów MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ | |
| planowano | zł. 25.000.— |
| wpłynęło | „ 28.097,10 |
| wskaźnik wykonania — 112,4% | |
| 3. Wpływy związane z uczestnictwem w sympozjach, konferencjach itp. | |
| planowano | zł. 25.000.— |
| wpłynęło | — |
| 4. Dotacja Polskiej Akademii Nauk na działalność wydawniczą, popularyzację wiedzy i administrację | |
| planowano | zł. 578.000.— |
| wpłynęło | „ 578.000.— |
| wskaźnik wykonania — 100,0% | |
| sumą tą objęta jest również dotacja na częściowe pokrycie wydatków związanych z jubileuszem Towarzystwa. | |

Na przejściowe dodatki mieszkaniowe planowano	zł. 2.460.—
wpłynęło	„ 1.852.—
wskaźnik wykonania — 75,3%	
tj. do wysokości rzeczywiście wypłaconych dodatków.	
Ogółem: planowano dochody	zł. 655.460.—
osiągnięto	„ 635.559,10
wskaźnik wykonania wynosi 98,5%	

B. Koszty

Ogólne wykonanie budżetu w tym zakresie przedstawia się następująco:

Rodzaj	Plan	Wykonanie	Wskaźnik wykonania
1. Działalność wydawnicza	zł 295.500.—	zł 247.352,70	83,7%
2. Popularyzacja wiedzy	„ 227.412.—	„ 90.134,12	39,7%
3. Administracja	„ 159.148.—	„ 138.088,82	89,3%
R a z e m	zł 682.060.—	zł 475.575,64	69,7%

w tym:

koszty osobowe (łącznie z nagrodami)

planowano zł. 366.438.—

wykonano „ 269.259,75

wskaźnik wykonania wynosi 73,5%

przy czym największą oszczędność, sięgającą blisko 90 tys. złotych osiągnięto w bezosobowym funduszu plac.

Na koszty rzeczowe:

planowano zł. 313.162.—

wykonano „ 204.463,89

wskaźnik wykonania wynosi 65,3%

Poważniejsze oszczędności osiągnięto:

w kosztach na podróże służbowe (około 28 tys. złotych) głównie w związku ze zjazdem jubileuszowym, oraz w dziale usług materialnych — około 49 tys. złotych w tym na popularyzację wiedzy przypada około 30 tys. złotych.

Powyższe dane nie obejmują przejściowego dodatku mieszkaniowego.

Koszty wydawnictwa kształtują się następująco:

osobowe: plan zł. 131.000.—

wykonanie „ 105.744,40

wskaźnik wykonania 81,4%

druk: plan zł. 160.000.—

wykonanie „ 140.974,80

wskaźnik wykonania 88,1%

drobne koszty rzeczowe:

plan zł. 4.500.—

wykonanie „ 633,50

W okresie sprawozdawczym wydano 4 zeszyty MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ. Przeciętny koszt jednego zeszytu wyniósł około 62 tys. złotych, zeszytu jubileuszowego około 81 tys. złotych.

Działalności gospodarczej Towarzystwo nie prowadziło.

Pełnienie funkcji w organach PTMTS było bezpłatne, referaty wygłaszane były honorowo.

Finansowanie działalności Towarzystwa przebiegało zgodnie z obowiązującymi przepisami. Wydatki znajdowały pokrycie w działalności finansowej.

POZYCJE OPUBLIKOWANE W TOMIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
W ROKU 1969

Zeszyt 1	Str.
<p>J. ZIÓŁKOWSKI, Stan naprężeń i odkształceń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych Напряженное и деформированное состояние в роторе с малым числом боковых радиальных лопоток State of stress and strain in a rotor with a small number of radial side blades</p>	3
<p>Z. SOBZYŃSKA, Działanie ruchomego, punktowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej Воздействие подвижного точечного теплового источника на неограниченное пространство Action of a moving concentrated heat source in elastic space</p>	21
<p>S. MAZURKIEWICZ, Dynamiczne badania własności mechanicznych poliamidu Tarlon X-A Динамические исследования механических свойств полиамида Тарлон X-A Dynamic investigation of mechanical properties of polyamide Tarlon X-A</p>	25
<p>H. KORESKI, Stan sprężysto-plastyczny i pełzanie geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej Упруго-пластическое состояние и ползучесть геометрически нелинейной конической оболочки Elasto-plastic state and creep of a geometrically non-linear conoidal shell</p>	39
<p>J. MARYŃIAK, Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie Упрощенный анализ боковой устойчивости планера буксируемого на канате Simplified analysis of lateral stability of towed glider</p>	55
<p>J. SAMBORSKI, Drgania grubościennej rury przy wewnętrznym i zewnętrznym przepływie cieczy Колесания толстостенной трубы обтекаемой внутри и снаружи жидкостью Vibrations of a thick-walled tube in internal and external flows of fluids</p>	73
<p>J. MIASTKOWSKI, Nośność graniczna rozciąganych prętów z karami kątowymi o dowolnych wymiarach części nad karami Несущая способность растягиваемых стержней с угловыми надрезами и произвольной шириной вне надрезов Plastic yielding of tensile v-notched elements with arbitrary intermediate shoulder ratio.</p>	181
Zeszyt 2	
<p>S. BORKOWSKI, Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych (lata 1965–1967) Обзор работ, касающихся термических напряжений в твердых телах (1965–1967) Thermal stresses in solids. Survey of papers published in 1965–1967</p>	107
<p>J. KLEPACZKO, O pewnym przypadku anizotropii О некотором случае анизотропии On a certain case of anisotropy</p>	155
<p>Z. WIŚNIEWSKI, Analiza układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką Анализ виброударной системы с нелинейной упругой характеристикой Analysis of vibratory-impact system with nonlinear spring characteristics</p>	165

- J. ORKISZ, J. WILK, Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń 179
 Численное решение о пластическом течении гибких оболочек вращения в области конечных деформаций
 Numerical calculation of flexible rotationally symmetric shells subjected to plastic flow at finite strains
- Z. WESOŁOWSKI, Skończone odkształcenia sprężystego klina i stożka 195
 Конечные деформации упругого клина и конуса
 Finite deformations of an elastic wedge and cone
- W. BARAŃSKI, Statyka powierzchniowych ośrodków włóknistych 205
 Статика поверхностной волокнистой среды
 Statics of surface fibrous media

Zeszyt 3

- J. BUKOWSKI, W. J. PROSNAK, Kierunki rozwoju mechaniki płynów w dziesięcioleciu 1958–1967 233
 Направления развития механики жидкостей и газов в минувшем десятилетии 1958–1967
 Development trends of mechanics of fluids in 1958–1967
- J. KŁEPACZKO, Fizyczne koncepcje równań konstytutywnych i termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne w metalach 261
 Физическая концепция определяющих уравнений и термически активированные дислокационные процессы в металлах
 Physical concepts in the constitutive equation and thermally activated processes in metals
- J. PIETRZAK, K. WRZEŚNIEWSKI, Zastosowanie grafów przepływu do pewnych zagadnień mechaniki budowli 273
 Применение графов течения к некоторым вопросам сооружений
 Application of flow graphs to some problems of structural mechanics
- J. HALAUNBRENNER, B. LECHOWICZ, Obszar kontaktu sztywnej kuli z półprzestrzenią lepko-sprężystą 283
 Область контакта жесткого шара с вязко-упругим полупространством
 The contact zone between a rigid sphere and a visco-elastic half-space
- M. MAKOWSKI, Zależność ryzyka awarii od parametrów procesu obciążenia 280
 Зависимость возможности аварии от параметров процесса нагрузки
 Dependence of the risk of failure on loading process parameters
- B. OLSZOWSKI, Kształtowanie dynamiczne elementów konstrukcji 299
 Оптимальный динамический расчет элементов конструкции
 Optimum dynamic design of structural elements
- A. GAJEWSKI, Stateczność nieprzyzmatycznych prętów w strumieniu płynu 311
 Устойчивость непризматических стержней, обтекаемых потоком жидкости
 Stability of nonprismatic bars in fluid flow
- A. DRESCHER, O pewnej metodzie wyznaczania kryterium zniszczenia polimerów 323
 О некотором методе определения критерия разрушения полимеров
 On a certain method of determination of a fracture criterion for polymers
- J. MIĄSTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Analiza nośności granicznej rozciąganego pasma z otworami 335
 Анализ несущей способности полосы с отверстиями, подвергаемой растяжению
 Limit analysis of strip with holes
- E. ZŁATANOWA, Zagadnienie osiowo-symetryczne dla obszarów sprężystych nieściśliwych ograniczonych kulistymi powierzchniami 353
 Осесимметрическая задача для несжимаемой упругой области ограниченной сферической поверхностью
 Axi-symmetric problem for incompressible elastic regions bounded by spherical surfaces

Zeszyt 4

- S. ZANORSKI, Ciecze nienewtonowskie w świetle mechaniki continuum 385
Неньютоновские жидкости в свете механики сплошных сред
Non-Newtonian liquids in the light of continuum mechanics
- A. LISOWSKI, Sposób elektrycznego modelowania równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i członach rzędu parzystego 415
Метод электрического моделирования обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами и членами четного порядка
Electric network models of ordinary and partial differential equations with constant coefficients and even order terms
- A. LISOWSKI, Przykłady modelowania elektrycznego warunków brzegowych i początkowych równań różniczkowych występujących w zagadnieniach mechaniki 429
Примеры электрического моделирования краевых и начальных условий дифференциальных уравнений для вопросов механики
Examples of electrical network models simulating the initial and boundary value problems of applied mechanics
- E. MACIĄG, Doświadczalna analiza drgań własnych rusztów cylindrycznych 445
Экспериментальный анализ собственных колебаний цилиндрических решеток
Experimental analysis of free vibrations of cylindrical grids
- T. GIBCZYŃSKA, M. ŻYCZKOWSKI, Równania statyki dwurzędowego kulkowego łożyska wieńcowego 465
Уравнения статики для двухрядного шарикового подшипника
Equations of statics of double-row radial-thrust ball bearing
- A. JAKOWLUK, Wpływ poziomu naprężenia i współczynnika amplitudy naprężenia na proces wibro-
pelzania 485
Влияние уровня напряжения и коэффициента амплитуды напряжения на процесс ползучести
The effect of stress level and the stress amplitude coefficient on the process of vibrational creep
- A. JAKOWLUK, Wpływ częstotliwości wibracji na proces wibro-
pelzania 507
Влияние частоты вибрации на процесс виброползучести
The effect of vibration frequency on the vibrational creep process

KOMUNIKAT

Zarząd Oddziału Poznańskiego PTMTiS zamierza zorganizować w drugiej połowie października 1970 r. sympozjum dotyczące następującej problematyki:

1. Drgania nieliniowe układów dyskretnych i ciągłych
2. Stateczność ruchu
3. Metody optymalizacji
4. Procesy stochastyczne
5. Modelowanie maszyn i procesów układami dyskretnymi

Zgłoszenia referatów wraz ze streszczeniami (około 2 strony maszynopisu) należy nadsyłać pod adresem:

Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

Oddział w Poznaniu, Poznań, ul. Strzelecka 11

do 31 marca 1970 r. Czas przewidziany na wygłoszenie referatu — 20 min.

Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego

(—) Prof. dr E. Karaśkiewicz

W tomie 8, zeszyt 1 ukaza się następujące prace:

- G. N. SAWIN, A. N. GUŻ, A. S. KOSMODAMIŃSKI, Zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych dla obszarów niekanonicznych (przegląd prac radzieckich)
Задачи механики сплошных сред для неканонических областей (Обзор советских статей)
Problems of mechanics of continuous media for non-canonical regions (survey of Soviet papers)
- A. LIŃEWKA, Modelowanie płaskich sprężysto-plastycznych zagadnień metodą fotoplastyczności
Моделирование плоских упруго-пластических задач методом фотопластичности
The modeling of the plane elasto-plastic problems by means of the photoplastic method
- W. TOMCZAK, L. BULZAK-MROZOWSKA, Wyznaczenie pola temperatury i pola strumienia ciepłego w przegrodzie wielowarstwowej przy harmonicznie zmiennym przepływie ciepła
Определение температурного поля и поля теплового в многослойной стенке при изменяющейся по гармоническому закону тепловом потоке
Determination of the temperature and heat flux field in a multilayer diaphragm at harmonic heat flow
- S. KALISKI, O przybliżonym integralnym oszacowaniu kumulacji plazmy poddanej działaniu koncentrycznego impulsu ciśnienia
Анализ одного класса нелинейной системы со случайным возмущением
On an approximate, integral determination of cumulation of the plasma under the action of the concentric pressure impulse
- W. GAWROŃSKI, Analiza pewnego układu nieliniowego przy wymuszeniu stochastycznym
Анализ одного класса нелинейной системы со случайным возмущением
Analysis of one class nonlinear system to stochastic excitation
- S. BORKOWSKI, Naprężenia kontaktowe w półpłaszczyźnie sprężystej o wzmocnionym brzegu
Контактные напряжения в упругой полуплоскости с подкрепленным краем
Contact stresses in elastic half-plane with stiffened boundary
- Z. J. PIEKARSKI, G. SZEFER, O pewnym przypadku pełzania półpłaszczyzny z nieciągłymi warunkami brzegowymi
Об одном случае ползучести полуплоскости с разрывными краевыми условиями
On a certain case of creep of a half-plane with discontinuous boundary conditions
- J. KŁEPACZKO, Uogólnione warunki stateczności w próbie rozciągania
Обобщение условия устойчивости при испытаниях на растяжение
Discussion of the generalized conditions for stability in the tension test

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS. (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17. poutój 1724)
