

J. II. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 7 • ZESZYT 3



WARSZAWA 1969

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

<p>J. BUKOWSKI, W. J. PROSNAK, Kierunki rozwoju mechaniki płynów w dziesięcioleciu 1958–1967 Направления развития механики жидкостей и газов в минувшем десятилетии 1958–1967 Development trends of mechanics of fluids in 1958–1967</p>	233
<p>J. KŁEPACZKO, Fizyczne koncepcje równań konstytutywnych i termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne w metalach Физическая концепция определяющих уравнений и термически активированные дислокационные процессы в металлах Physical concepts in the constitutive equation and thermally activated processes in metals</p>	261
<p>J. PIETRZAK, K. WRZEŚNIEWSKI, Zastosowanie grafów przepływu do pewnych zagadnień mechaniki budowli Применение графов течения к некоторым вопросам сооружений Application of flow graphs to some problems of structural mechanics</p>	273
<p>J. HALLAUNBRENNER, B. LECHOWICZ, Obszar kontaktu sztywnej kuli z półprzestrzenią lepkosprężystą Область контакта жесткого шара с вязко-упругим полупространством The contact zone between a rigid sphere and a visco-elastic half-space</p>	283
<p>M. MAKOWSKI, Zależność ryzyka awarii od parametrów procesu obciążenia Зависимость возможности аварии от параметров процесса нагрузки Dependence of the risk of failure on loading process parameters</p>	289
<p>B. OLSZOWSKI, Kształtowanie dynamiczne elementów konstrukcji Динамическая оптимализация элементов конструкции Optimum dynamic design of structural elements</p>	299
<p>A. GAJEWSKI, Stateczność nieprzyzmatycznych prętów w strumieniu płynu Устойчивость непризматических стержней, обтекаемых потоком жидкости Stability of nonprismatic bars in fluid flow</p>	311
<p>A. DRESCHER, O pewnej metodzie wyznaczania kryterium zniszczenia polimerów О некотором методе определения критерия разрушения полимеров On a certain method of determination of a fracture criterion for polymers</p>	323
<p>J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Analiza nośności granicznej rozciąganego pasma z otworami Анализ несущей способности полосы с отверстиями, подвергаемой растяжению Limit analysis of strip with holes</p>	335
<p>E. ZŁATANOWA, Zagadnienie osiowo-symetryczne dla obszarów sprężystych nieściśliwych ograniczonych kulistymi powierzchniami Осесимметрическая задача для несжимаемой упругой области ограниченной сферической поверхностью Axis-symmetric problem for incompressible elastic regions bounded by spherical surfaces</p>	353
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	465

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 7 • Z E S Z Y T 3



W A R S Z A W A 1 9 6 9

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR
CZESŁAW EIMER · BARBARA SKARŻYŃSKA
MAREK SOKOŁOWSKI · WOJCIECH SZCZEPIŃSKI

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (588+114) egz. Arkuszy wydawn. 12,0. Arkuszy drukarskich 9,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g. 70×100. Oddano do składania 21.IV.1969 r. Druk ukończono we wrześniu 1969 r. Zam. 859/69. P-79. Cena zł 30,—

Druk. im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

KIERUNKI ROZWOJU MECHANIKI PŁYNÓW W DZIESIĘCIOLECIU 1958-1967

JERZY BUKOWSKI, WŁODZIMIERZ PROSNAK (WARSZAWA)

Przed dziesięciu laty, na prośbę organizatorów dorocznego zjazdu GAMM w Saarbrücken w kwietniu 1958 roku, pierwszy z autorów miał okazję wygłosić referat przeglądowy na temat rozwoju prac badawczych w dziedzinie aerodynamiki w Polsce. Referat ten zawierał również najogólniejsze informacje o rozwoju innych dziedzin mechaniki w naszym kraju i kończył się wiadomością o powołaniu do życia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Dziś Towarzystwo obchodzi dziesięciolecie swej działalności, a autorzy podjęli próbę opracowania przeglądu kierunków rozwoju mechaniki płynów w Polsce w latach 1958-1967. Dokonanie takiego przeglądu w sposób krytyczny nie jest łatwe z uwagi na różnicowania istniejące i powstające stale wewnątrz tej dziedziny mechaniki. Różnicowania takie pogłębiają i zawężają niekiedy specjalizację do tego stopnia, że merytoryczna, wyważona ocena dorobku naukowego staje się trudna poza wąskim kręgiem osób i to niejednokrotnie w skali międzynarodowej. Istnieje wprawdzie jeden niezawodny sprawdzian, jakim jest praktyczna użyteczność, a więc społeczne konsekwencje osiągnięć naukowych. Zgodzimy się jednak, że przykładanie tej miary do wyizolowanych prac, sądenie według tego kryterium tematów, a nie kierunków prac badawczych, mogłoby dać wręcz mylące wyniki.

Podjmiemy próbę oceny kierunków rozwoju mechaniki płynów w ostatnim dziesięcioleciu, jak to się czyni zazwyczaj — z dwóch punktów widzenia. Po pierwsze, miejsca naszego dorobku w światowym rozwoju dyscyplin tej dziedziny mechaniki. Z drugiej strony, zbieżności głównych kierunków prac z potrzebami gospodarki i rozwoju społecznego naszego kraju. Zadaniem o wiele trudniejszym ze względów wyżej wspomnianych byłaby próba wyceny treściowej dorobku, efektywności badań podjętych w poszczególnych kierunkach.

Uporządkowanie podjętego przeglądu wymaga umownego bodaj podziału całej dziedziny mechaniki płynów na główne dyscypliny i wskazania w tych właśnie dyscyplinach kierunków rozwijanych prac.

Dokonanie takiego uporządkowania nie jest rzeczą łatwą, a to z uwagi na okoliczność, że zbyt wiele logicznych podstaw podziału dopomina się o swoje prawa. W tych warunkach łatwo jest w systematyce dyscyplin dopuścić się błędu polegającego na próbie segregacji w oparciu o dwie lub więcej podstaw.

W broszurze pt. *Materiały Wydziału IV PAN dotyczące prognoz rozwoju nauk technicznych w Polsce do r. 1985* (Wyd. PAN, cz. I, rok 1968) W. PROSNAK i J. MĄCZYŃSKI w rozdziale zatytułowanym *Prognozy rozwojowe mechaniki płynów* proponują dla celów perspektywicznych wydzielenie następujących dyscyplin w mechanice płynów.

Jako pierwszą dyscyplinę wymieniają wspomniani autorzy *Podstawowe badania nad zagadnieniami przeplywowymi* stwierdzając, że (cytujemy): «Bezpośrednie aktualne zapotrzebowanie przemysłu wymaga wyodrębnienia całokształtu tych zjawisk, które występują w procesach przemysłowych i w warunkach przyrodniczych naszego kraju, i traktowania ich jako osobnej dyscypliny.»

Drugą z kolei dyscypliną, uwzględniającą w szczególności potrzeby przemysłu chemicznego, byłoby *Badanie przepływu ośrodka, w którym zachodzą reakcje chemiczne*. Do tej dyscypliny włączono procesy spalania zachodzące w silnikach i różnych urządzeniach przeplywowych.

Jako trzecią dyscyplinę proponuje się uznać — *Badanie przepływów z dużymi prędkościami przy uwzględnieniu modeli przepływu coraz bardziej zbliżonych do rzeczywistości i wzięcia pod uwagę występujących zjawisk fizycznych*.

Ostatnią według powyższych propozycji, czwartą wyodrębnioną dyscypliną byłyby *Badania gazu rozrzedzonego*.

Współautorstwo jednego z autorów cytowanej *Prognozy* w przedstawionym obecnie opracowaniu pozwala na uściślające i uzupełniające komentarze bez zasadniczego kwestionowania proponowanego podziału, który jak każdy inny może budzić zastrzeżenia. W aktualnym stanie mechaniki płynów uderza w szczególności niewspółmierność zakresu dyscyplin pierwszej i trzeciej w stosunku do drugiej i czwartej.

Jak wynika z dalej dokonanego przeglądu dziedzin techniki i gospodarki związanych z mechaniką płynów, w dyscyplinie pierwszej (*Podstawowe badania nad zagadnieniami przeplywowymi*) należałoby wyodrębnić dużą grupę — może nawet oddzielną dyscyplinę — obejmującą problemy hydrologii z interesującym zagadnieniem filtracji, problematykę wielkich budowli wodnych i wreszcie zagadnień falowania powierzchni cieczy.

Dyscyplina pierwsza (w ujęciu *Prognoz rozwojowych mechaniki płynów*) z uwagi na cechy fizyczne traktowanych płynów, modele rozpatrywanych zjawisk i metody badawcze musi w sposób oczywisty mieć wewnątrznie rozbudowaną strukturę.

Przepływy przy równoczesnym występowaniu fazy ciekłej i gazowej lub z udziałem rozdrobnionych cząstek ciała stałego wystąpią, a przynajmniej mogą wystąpić, jako odrębne problemy we wszystkich wymienionych dyscyplinach.

Oddzielną grupę problemową stanowią w dyscyplinie pierwszej zagadnienia mechaniki płynów leżące na styku z reologią i z niektórymi problemami teorii sprężystości.

Na tym kończymy uwagi dotyczące klasyfikacji dyscyplin mechaniki płynów.

*

Przechodząc do dorobku dziesięciolecia 1958–1967 w dziedzinie mechaniki płynów, spróbujmy dokonać jego przeglądu i oceny, stosując najpierw jako miarę porównawczą — nadażanie za światowym rozwojem poszczególnych dyscyplin.

Jesteśmy w sytuacji o tyle korzystnej, że poszczególne etapy rozwoju prac w dziedzinie mechaniki płynów można łatwo powiązać z datami sympozjów, organizowanych w Polsce od 1954 roku przez Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN. Sympozja te odegrały niezmiernie ważną rolę dla rozwoju mechaniki płynów jako czynnik zarazem dydaktyczny — w najogólniejszym sensie tego słowa — i stymulujący. Dlatego poświęcimy więcej uwagi rozwojowi tych sympozjów.

Dwa początkowe sympozja, zorganizowane w latach 1954 i 1955 w Międzyzdrojach, miały charakter częściowo kursów naukowych, a częściowo tylko — konferencji naukowych. Niektóre spośród przedstawionych na nich referatów były referatami przeglądowo-dydaktycznymi, a tylko nieznaczna część referatów dotyczyła własnych wyników naukowych autorów. Niemniej jednak już na konferencji w 1955 r. paru początkujących pracowników naukowych przedstawiło prace w zakresie dynamiki gazu lepkiego i aerodynamiki molekularnej, które zakwalifikowano do wygłoszenia na Międzynarodowym Kongresie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w Brukseli, we wrześniu 1956 r. Na tejże konferencji zdecydowano, że następne odbywać się będą w odstępach dwuletnich i sprecyzowano zadania i cele przyszłych konferencji, jak również określono niektóre środki, za pomocą których zamierzano te cele osiągnąć.

Jednym z tych środków, który okazał się niezmiernie skuteczny, była zasada zapraszania sporej liczby wybitnych naukowców zagranicznych. Ponieważ młodsi — wówczas — polscy pracownicy naukowcy nie byli partnerami do dyskusji i mogli raczej biernie korzystać z prezentowanych referatów, przyjęto zasady równoczesnego zapraszania naukowców z ZSRR i krajów demokracji ludowej oraz z USA i krajów Europy zachodniej, po to, by — z jednej strony — zapewnić zaproszonym możliwość twórczej i interesującej dyskusji (pamiętajmy, że był to okres, gdy stosunki naukowe między Wschodem i Zachodem dopiero się nawiązywały — po okresie zimnej wojny), a z drugiej strony — by stworzyć młodemu polskiemu pracownikom naukowym klimat międzynarodowego sympozjum, dać im możliwość przysłuchiwania się dyskusjom, a — przede wszystkim — możliwość przedstawienia własnych prac przed szerszym kompetentnym audytorium, możliwość nawiązania osobistych kontaktów, możliwość zorientowania się co do tendencji rozwojowych i ostatnich osiągnięć mechaniki płynów.

Mniej natomiast chodziło organizatorom o skierowanie polskich prac zgodnie z potrzebami przemysłu, zwłaszcza, że charakter zapotrzebowania przemysłu był bądź to mało stymulujący (mało współczesny), bądź też — realizacja stawianych zadań wymagała stosowania skomplikowanej aparatury, jaką w owym czasie nie dysponowały polskie placówki naukowe, działające w dziedzinie mechaniki płynów.

Zgodnie z tymi ustaleniami, Konferencja Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT-PAN zorganizowana w Krynicy w 1957 r., a więc u progu tego okresu, którego dotyczy niniejszy przegląd, miała już charakter typowego sympozjum naukowego. Wzięli w niej udział wybitni specjaliści w dziedzinie mechaniki płynów z ZSRR, NRF, Rumunii, Francji, Jugosławii i ChRL, przy czym ze strony polskiej przedstawiono szereg oryginalnych prac, poświęconych głównie zagadnieniom dynamiki gazów, aerodynamiki molekularnej i teorii filtracji, oraz pewnym osiągnięciom w zakresie innych aktualnych wówczas zagadnień mechaniki płynów, jak np. własna teoria profilu z klapą strumieniową.

Kolejne sympozja, będące swego rodzaju milowymi kamieniami w rozwoju polskich prac w dziedzinie mechaniki płynów, były zorganizowane w 1959 r. w Augustowie, w 1961 r. — w Jabłonie, w 1963 r. — w Zakopanem, w 1965 r. — w Juracie, i w 1967 r. — w Tardzie.

Skrystalizowany w Krynicy charakter Konferencji ZMCiG IPPT-PAN utrzymał się bez zmiany również po roku 1961, w którym prof. FISZDON, jako nowy kierownik Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT-PAN przejął z rąk prof. BONDERA sprawy organizowania dalszych konferencji.

Wzrastała liczba uczestników, w tym również uczestników zagranicznych, i liczba referatów; podnosił się również stale poziom naukowy referatów polskich.

W pojęciu najmłodszych pracowników naukowych w dziedzinie mechaniki płynów sympozja ZMCiG są już czymś istniejącym zawsze. Dla nich jest rzeczą naturalną, że miarą poziomu ich początkowych prac jest zakwalifikowanie ich do wygłoszenia na sympozjum; że data zbliżającego się sympozjum jest elementem uaktywnienia działalności naukowej; że krytyka prac przedstawiona na sympozjum wpływa na ich dalszy przebieg, a czasem nawet na korektę ich ustawienia i ukierunkowania.

Również wśród uczestników zagranicznych sympozja wyrobiły sobie określoną renomę naukową i nierzadko zdarza się słyszeć na zagranicznych kongresach naukowych powołania na prace, a nawet na dyskusje, przedstawione na naszych krajowych sympozjach. Nazwy miejscowości Augustów, Zakopane, Jurata stanowią swoistą skalę czasu w rozwoju pewnych problemów.

W sposób świadomie wrywkowy spróbujemy przedstawić obecnie charakter i tendencje rozwoju prac w dziedzinie mechaniki płynów, omawiając reprezentatywne prace bądź też ich cykle. Ogólnie biorąc — źródłem ich inspiracji była 'przeważnie aktualna problematyka światowa, i o kierunku rozwojowym decydowała chęć czynnego włączenia się do tej problematyki. W okresie wyrabiania sobie imienia przez polską mechanikę płynów i okresie nawiązywania i rozszerzania kontaktów naukowych tego rodzaju podejście należy niewątpliwie uznać za uzasadnione.

O sympozjum w Krynicy była już mowa.

W Augustowie — przedstawiono nader reprezentatywną dla owego okresu pracę, dotyczącą pola przepływu w sąsiedztwie płata skośnego, przy dużych kątach natarcia. Praca ta, całkowicie doświadczalna, wykazała wielkie bogactwo i skomplikowanie zjawisk przepływowych, niemożliwych i dziś jeszcze do badania metodami teoretycznymi.

W Jabłonie — przedstawiono po raz pierwszy wyniki uzyskane przy zastosowaniu metod numerycznych, realizowanych na elektronicznej maszynie cyfrowej, a także — w szczególnym przypadku ruchu cieczy lepkiej w sąsiedztwie punktu spiętrzenia, zaproponowano metodę rozwiązywania zagadnień ruchu cieczy lepkiej pod postacią swoistych rozwinięć w otoczeniu przepływu nielepkiego, przy wprowadzeniu prędkości poślizgu.

W Zakopanem — przedstawiono m.in. pracę o przepływie z odsuniętą falą uderzeniową w opływie asymetrycznym, przy czym do rozwiązania zastosowano metodę związków całkowych, nader popularną w owym czasie, nadającą się bowiem do zastosowania na ówczesnych maszynach cyfrowych, o niezbyt wielkiej — w porównaniu z dzisiejszymi — pamięci i prędkości działania.

Marginesowo warto zaznaczyć, że znany specjalista Vaglio LAURIN uznał w 1961 r. w styczniu w dyskusji na Kongresie IAS w Nowym Jorku tak postawione zagadnienie za niemożliwe do rozwiązania. Ważniejszy jest jednak fakt, że prace te otwierające cały cykl prac podobnych, tzn. opartych na metodzie związków całkowych, stworzyły podstawy do współpracy z ośrodkami w Moskwie, a częściowo także w Nowosybirsku, z których pierwszy opracował podstawy tej metody, drugi zaś był zainteresowany konkretnymi wynikami. W zakresie zastosowania i badania ograniczeń metody związków całkowych mamy własne interesujące osiągnięcia.

Spśród prac polskich przedstawionych na sympozjum w Zakopanem zasługują na wymienienie prace o metodzie charakterystyk w zastosowaniu do przepływów trójwymiarowych, prace w zakresie magneto-gazodynamiki, prace z dziedziny ruchu gazów rozrzedzonych oraz — po raz pierwszy pojawiające się prace — dotyczące doświadczeń w elektroiskrowej rurze uderzeniowej.

Sympozjum w Juracie pozwoliło na przedstawienie poważnego już dorobku polskiego w dziedzinie dynamiki gazu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła. Spotykamy tu prace o konstrukcji zagadnienia Cauchy'ego dla pewnej klasy przepływów nieustalonych, cykl prac o zastosowaniu metody związków całkowych — m.in. do zagadnień chłodzenia ciał poruszających się z prędkością hipersoniczną; wyniki zaawansowanych już prac o wyznaczaniu przepływów trójwymiarowych metodą charakterystyk, prace o ścisłych rozwiązaniach równania Boltzmanna, o efektach relatywistycznych, o wpływie reakcji chemicznych na strukturę fali uderzeniowej, o opływie hipersonicznym ciał z odkształcalną powierzchnią, o pewnych właściwościach przepływów transsonicznych gazu lepkiego.

Ostatnie spośród dotychczasowych sympozjów, a mianowicie sympozjum w Tardzie w 1967 r., stanowi pod pewnym względem obraz kontynuacji, ciągłości tematyki. Mamy tu na myśli fakt, że na pewne pytania postawione przed dwoma laty w Juracie znalazła się jednoznaczna odpowiedź.

Tak na przykład kwestia dokładności, z jaką można wyznaczyć za pomocą metody związków całkowych rozwiązanie tzw. standardowego zagadnienia, postawionego przez VAN DYKE'A, została rozstrzygnięta w sposób dość nieoczekiwany. Okazało się mianowicie, że zagadnienie leży poza zakresem stosowalności metody, w jej pierwszym przybliżeniu.

Ciągłość rozwoju można było obserwować również na przykładzie prac o strukturze fali uderzeniowej, o przepływach trójwymiarowych gazu nielepkiego, o przepływach niestacjonarnych w przewodach z nagłym rozszerzeniem, o przepływach naddźwiękowych w sąsiedztwie drgających ścianek.

Pojawiły się — co jest nader korzystnym objawem — prace teoretyczne bezpośrednio związane z zastosowaniami, jak np. prace nad uderzeniem dźwiękowym, spowodowanym przez samolot lecący z prędkością naddźwiękową i prace z zakresu meteorologii.

*

Podana charakterystyka polskich «biennale» aerodynamicznych pozwala zorientować się w zbieżności i nadażaniu naszych prac w wybranych kierunkach (głównie dynamiki gazów) za światowymi trendami rozwojowymi.

W pełnym zakresie mechaniki płynów kierunki rozwoju, choć w sposób niedoskonały, będzie można ocenić w oparciu o bibliografię opracowaną do niniejszego referatu za dziesięciolecie 1958–1967.

Bibliografia ta, zestawiona latami w porządku alfabetycznym pierwszego autora, obejmuje tylko prace drukowane, już rozpowszechnione (nie obejmuje prac «w druku»). Pominięto prace powielone w biuletynach i sprawozdaniach wewnętrznych (IMP-PAN, ZMCiG-IPPT-PAN, Katedra Aerodynamiki PW), sprawozdania z konferencji i sympozjów. Uwzględniono natomiast prace zamieszczone w uczelnianych zeszytach naukowych. Nie zamieszczono prac luźno tylko (raczej brzmieniem tytułu niż treścią) związanych z mechaniką płynów.

Otrzymany obraz dorobku należy traktować na pewno jako reprezentatywny, ale niepełny. Wiele prac, ważnych dla poszczególnych gałęzi gospodarki, tak sporządzona bibliografia nie uwidoczniła (wymienimy choćby «Prace Instytutu Lotnictwa» i «Technikę Lotniczą»). Z drugiej strony ma ona tę zaletę, że jest kompletna w zakresie wykazanych wydawnictw.

Spis bibliograficzny obejmuje 429 prac 188 autorów (102 po jednej pracy) opublikowanych w następujących wydawnictwach:

Bulletin de l'Academie des Sciences (s.t., s.m., s.f.)	58
ABM, AH, AMS (67+36+49)	152
Rozprawy Inżynierskie	19
Fluid Dynamics Transactions	35
Prace IMP	83
Prace ITC	21
Zeszyty uczelniane	8
Różne	20
Różne wydawnictwa zagraniczne	33
	<hr/> 429

Problematyka dynamiki gazów, łącznie z pracami z zakresu magneto-hydrodynamiki i plazmy, te ostatnie o przeważającej zawartości zagadnień przepływowych, reprezentowana jest przez 80 prac.

Zagadnieniom gazów rozrzedzonych poświęconych jest 7 prac. Pracom z tej dziedziny poświęciliśmy więcej miejsca w omawianiu naszych sympozjów.

Przepływy z zachodzącymi przemianami chemicznymi z wyjątkiem spalania, które jest tematem 7 publikacji, tylko marginesowo traktuje kilka prac.

W najobszerniejszej grupie (według określenia PROSNAKA i MĄCZYŃSKIEGO *Podstawowe badania nad przepływami*) obejmującej praktycznie wszystkie zagadnienia płynów nieściśliwych, problemom zbiorników wodnych, przepływów w kanałach, hydrologii, filtracji i zjawisk falowych poświęconych jest ponad 50 prac. Wypada podkreślić stosunkowo dużą liczbę prac poświęconych zjawiskom falowania swobodnej powierzchni cieczy (22) i zagadnieniom filtracji (17). Wiele z tych prac ma charakter badań podstawowych, z przewagą rozważań analitycznych.

Wiele spośród 22 prac poświęconych przepływowi dwufazowemu, ściślej — przepływowi z zawieszoną cząstką ciała stałego lub kropelek (pęcherzyków) odmiennej fazy płynu, nawiązuje do zagadnień złożonych przypadków filtracji.

Zagadnieniami przepływów w przewodach prostoosiowych zajmuje się 13 prac. Są to zarówno rozważania natury podstawowej, jak i próby rozważań konkretnych trudnych zagadnień (rurociąg naftowy).

Nie wymieniamy tutaj obserwacji i badań w zakresie przepływów naddźwiękowych w prostych rurach, będących tematem licznych prac wymienionych w grupie dynamiki gazów.

Zagadnieniom aeracji naturalnej nie jest poświęcona żadna z opublikowanych prac. Prace w tej dziedzinie są jednak prowadzone. Dotkliwie daje się odczuć brak odpowiedniego tunelu aerodynamicznego, pozwalającego na badanie modeli większych wymiarów.

Wentylacji, jednemu z kluczowych zagadnień nowoczesnego budownictwa i poprawy warunków eksploatacji kopalń, poświęconych jest zaledwie 11 prac, wliczając w to parę prac dotyczących konstrukcji wentylatorów.

Transportowi hydraulicznemu i pneumatycznemu poświęcono 2 prace. Nie więcej znalazło się autorów podejmujących tematykę z zakresu napędów i regulacji hydraulicznej i pneumatycznej. W tej dziedzinie zagadnieniom automatyki opartej na elementach przepływowych trzeba będzie niewątpliwie poświęcić o wiele więcej uwagi i zainteresowania.

11 publikacji zajmuje się sprawami okrętownictwa, w tym większość pędnikami, a tylko nieliczne zagadnieniami tzw. teorii okrętu.

Tematyka lotnictwa jest przedmiotem 13 prac dotyczących głównie zagadnień płatów nośnych.

Znana była z okresu międzywojennego ścisła i owocna współpraca Instytutu Aerodynamicznego przy Politechnice w Warszawie z przemysłem lotniczym. Dzisiaj usługi dla tego przemysłu przejął w zasadniczej mierze resortowy Instytut Lotnictwa. Większość z wymienionych publikacji w zakresie aerodynamiki samolotu pochodzi spoza Instytutu — głównie z Politechniki Warszawskiej i Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT-PAN. (Bibliografia — przypominamy — nie obejmuje «Prac Instytutu Lotnictwa»).

Jeżeli publikacje w dziedzinie zastosowań lotniczych przedstawiają się skromnie; to prace z zakresu «teorii okrętu» — chodzi o zagadnienia hydrodynamiczne budowy i eksploatacji statków — w wydawnictwach objętych spisem bibliograficznym, poza śrubami napędowymi, należą do rzadkości.

W warunkach rozwoju przemysłu stoczniowego w oparciu o własne konstrukcje stan ten jest niepokojący, tym więcej, że konkurencja na rynku produkcji stoczniowej zmusza do szybkiego postępu technicznego w tej dziedzinie.

Można mieć nadzieję, że sprawa ulegnie zmianie na lepsze z rozwojem prac i wyposażenia Instytutu Okrętowego w Gdańsku.

Z zakresu turbin wodnych i pomp znajdujemy w bibliografii dziesięciolecia 10 prac. Również w tej dziedzinie niedostatek prac badawczych odbija się niewątpliwie ujemnie na produkcji maszyn hydraulicznych, w szczególności pomp o różnych charakterystykach i przeznaczeniach. Drobnym ułamkiem strat, jakie ponosi gospodarka narodowa wskutek braku postępu technicznego w dziedzinie budowy pomp, opłaciłby z nadwyżką szeroki program badań w tej dziedzinie, badań dziś wybitnie zaniedbanych.

Podsumowując: w szerokiej dziedzinie zagadnień technicznych i przemysłowych od wentylacji przez zagadnienia transportu, napędu i automatyki hydraulicznej i pneu-

matycznej, okrętownictwa, lotnictwa aż do turbin wodnych i pomp, znajdujemy w spisie bibliograficznym łącznie niespełna 50 publikacji. Niewątpliwie, jak wspomniano wcześniej, prace objęte bibliografią nie stanowią całego dorobku badawczego. Jest jednak godne podkreślenia, jak mało jest prac adresowanych do tych dziedzin przemysłu przez autorów mających coś do powiedzenia w mechanice płynów.

Temu stanowi zaniedbania przeciwstawić należy dziedzinę turbin ciepłych i sprężarek. Znajdujemy w rozpatrywanym okresie dziesięciolecia ponad 50 publikacji, których adresatem jest konstrukcja i eksploatacja ciepłych maszyn wirnikowych. Wyspecjalizowany w tej dziedzinie Instytut (IMP-PAN), własne wydawnictwo tego Instytutu, ukierunkowane zainteresowanie kierownictwa i zespołu pracowników — to oczywiście okoliczności sprzyjające. Ale takie sprzyjające okoliczności powinny istnieć także dla rozwoju badań warunkujących postęp w innych przemysłach związanych z problematyką mechaniki płynów.

Wymienionych łącznie niewiele ponad 100 opracowań znajdujących wyraźnego adresata w różnych dziedzinach przemysłu wyczerpuje udokumentowaną publikacjami współpracę nauki z przemysłem w dziedzinie mechaniki płynów poprzez prace najbliższe adaptacji.

Ogólne zagadnienia przepływowe w zakresie płynów nieściśliwych reprezentowane są w bibliografii 62 tytułami. Jeżeli dołączyć tu 24 opracowania dotyczące stoisk i urządzeń pomiarowych i 9 prac z dziedziny zastosowań «analogii aero-hydrodynamicznych» (powietrze zamiast cieczy w urządzeniach modelowych maszyn hydraulicznych), to otrzymamy łącznie około 100 prac w zakresie badań raczej podstawowych.

Oddzielną pozycję stanowią publikacje w liczbie 22 poświęcone wymianie ciepła. W większości są to również prace o charakterze podstawowym.

Niewątpliwie w tej grupie publikacji, które zaliczaliśmy do nie mających bezpośredniego adresu zastosowań, istnieje wiele prac o dużym dla praktyki znaczeniu. Jednak znając trudności wdrożeniowe nawet opracowań wybitnie aplikacyjnych, należy wyrazić wątpliwość, czy bez dużego wkładu starań placówek badawczych te rezultaty badań o charakterze podstawowym dadzą się szybko spożytkować dla postępu technicznego.

Dla uniknięcia nieporozumień chcemy stwierdzić wyraźnie — nie mamy w mechanice płynów nadmiaru prac podstawowych. Mamy niedostatek dobrych aplikacji. Tak trzeba rozumieć wskazaną dysproporcję.

Statystyczna analiza podana wyżej może budzić zastrzeżenia. Oczywiście nie tylko ilość, ale przede wszystkim jakość, konkretna treść opracowań stanowić może o ich praktycznej użyteczności.

Osąd pod tym względem zebranych w spisie prac jest zadaniem niewątpliwie trudniejszym i niełatwym do podjęcia w ramach bardzo ogólnego referatu.

Biorąc za punkt wyjścia metodę badania, polskie prace z dziedziny mechaniki płynów można scharakteryzować w następujący sposób.

W badaniach o charakterze teoretycznym stosuje się wprawdzie metodę analityczną, i to się niewątpliwie utrzyma, jednak coraz powszechniej i szerzej stosuje się metody numeryczne w powiązaniu z użyciem maszyn cyfrowych. Wynika to z faktu, że w najogólniejszym układzie równań, rządzących ruchem gazu lepkiego i przewodzącego ciepło, tkwi wielka ilość informacji, umożliwiająca rozwiązanie fundamentalnych zagadnień

mechaniki płynów, w tym np. zagadnienie genezy turbulencji. Fakt, że zagadnień tych nie rozwiązano dotychczas metodą analityczną wynika z redukcji tej ilości informacji założeniami upraszczającymi, jakie trzeba było wprowadzić po to, by w ogóle uzyskać rozwiązanie układu w szczególnych przypadkach. Zastosowanie elektronicznych maszyn cyfrowych o odpowiednio dużej pamięci i szybkości działania pozwala na rezygnację z tak daleko posuniętych założeń upraszczających, a opublikowane w ostatnich latach wyniki dotyczące m.in. przepływów wtórnych, potwierdzają słuszność tego «kierunku natarcia». Możemy wiele zrobić w tej dziedzinie, pod warunkiem jednak, że pracujący w niej ludzie będą mieli do dyspozycji odpowiednie narzędzie w postaci nowoczesnych maszyn cyfrowych.

Fakt ten wypada silnie podkreślić. O ile uzyskanie wyników doświadczalnych w dziedzinie mechaniki płynów jest zazwyczaj związane z uzyskaniem aparatury nadającej się *w y ł ą c z n i e* do celów mechaniki płynów, o tyle wielkie maszyny matematyczne, zakupione głównie z myślą o realizacji celów technicznych lub przemysłowych, mogą natychmiast dać *d o d a t k o w y* efekt w postaci intensyfikacji badań naukowych. Warto przy tym zauważyć, że w dziedzinie metod numerycznych granica między zagadnieniami poznawczymi i inżynierskimi jest bardzo płynna i umowna: zagadnienia *poznawcze* różnią się od *inżynierskich* zazwyczaj tylko kształtem powierzchni brzegowych, a więc czynnikiem mało istotnym w przypadku stosowania maszyny matematycznej.

Głosząc tu pochwałę maszyn matematycznych jako narzędzia badawczego w dziedzinie mechaniki płynów i stwierdzając prawidłową (aczkolwiek hamowaną brakiem odpowiednich maszyn matematycznych) tendencję rozwoju tej dziedziny w Polsce, nie usuwamy w cień roli eksperymentu.

W sprawie stanu i możliwości rozwoju prac eksperymentalnych w mechanice płynów można stwierdzić co następuje.

Dysponujemy dziś w Polsce podstawowymi urządzeniami, umożliwiającymi badanie przepływów poddźwiękowych w zakresie niemal wystarczającym z punktu widzenia zarówno badań podstawowych i dydaktyki, jak i niektórych potrzeb aplikacyjnych. Urządzenia, umożliwiające badanie przepływów naddźwiękowych w zakresie niezbędnym z punktu widzenia badań podstawowych i szeroko pojętej dydaktyki, a mianowicie rury uderzeniowe i tunele: naddźwiękowy i hipersoniczny, zostały również zbudowane u nas — właśnie w ciągu minionego dziesięciolecia — dużym nakładem ludzkiego wysiłku, uporu i osobistego zaangażowania. Niektóre z tych urządzeń, jak np. rura uderzeniowa, stanowiły w swoim czasie absolutne *novum* w Polsce. Warto przy tym podkreślić, że nie sprowadzaliśmy tych urządzeń za dewizy.

Uznajemy za celowe i niezbędne prowadzenie prac doświadczalnych w zakresie, jaki określają parametry posiadanych urządzeń w dziedzinie zarówno badań podstawowych, jak i zastosowań. Podkreślamy możliwość wykorzystania urządzeń już istniejących, wyposażonych dodatkowo w nowoczesną aparaturę pomiarową, w szczególności elektroniczną.

Nowe instalacje widzimy raczej typu kameralnego (w wymiarach i w kosztach), o określonym przeznaczeniu.

Z instalacji większych dobitnie odczuwa się brak kanału wodnego do modelowych badań statków i tunelu o dużych wymiarach, ale ograniczonej prędkości, umożliwiających prowadzenie obserwacji wizualnych i pomiarów przy użyciu modeli większych wymiarów.

Mamy w ostatnim przypadku na myśli głównie pomiary w zakresie *aerodynamiki przemysłowej* (poza potrzebami lotnictwa).

W tej dziedzinie metody doświadczalne pozostaną jeszcze w większości przypadków przez dłuższy okres konkurencyjne w stosunku do metod numerycznych.

*

W zakończeniu naszego przeglądu prac w dziedzinie mechaniki płynów w ostatnim dziesięcioleciu pozwalamy sobie wskazać na najważniejsze pożądane ukierunkowania tych prac na przyszłość.

Wymienimy najpierw te dziedziny gospodarki, które reprezentują «duże pieniądze», w których nawet nieznaczne ulepszenia, jakie mogą przynieść prace badawcze, wyrażają się od razu wielomilionowymi korzyściami.

Przemysł chemiczny, ściślej przebieg procesów chemicznych, stanowi niewątpliwie niewyczerpane i dotychczas niewykorzystane źródło problemów dla przedstawionych wszystkich dyscyplin mechaniki płynów, dotychczas nie interesujących się bliżej tą dziedziną aplikacji.

Geologia i górnictwo wymagają o wiele intensywniejszej penetracji badań z dziedziny mechaniki płynów. Począwszy od zagadnień związanych z tzw. opróbowaniem wierceń poszukiwawczych i eksploatacji gazu i ropy do ciągle następujących wiele trudności zagadnień wentylacji kopalń (olbrzymie ilości powietrza niezbędne w kopalniach gazowych), odgazowania złóż, napędów pneumatycznych itp. postęp techniczny uwarunkowany jest mobilizacją dotychczasowego dorobku badawczego, a w wielu przypadkach rozwojem ukierunkowanych odpowiednio badań.

Pompy i tzw. hydraulika siłowa, to następna dziedzina, w której każdy procent poprawy sprawności i każdy tydzień wydłużenia trwałości pracy maszyn i urządzeń przyniesie olbrzymie korzyści gospodarce.

Przypominamy to, co mówiliśmy poprzednio na temat przemysłu okrętowego. W tej dziedzinie postęp — to uwarunkowanie istnienia przemysłu okrętowego na obecnym poziomie jego rangi gospodarczej. Nie będzie postępu bez intensywnych badań, bez zaangażowania w prace badawcze w tej dziedzinie, obok specjalistów budowy okrętów, mocnych hydromechaników i aerodynamików.

Ogromne gospodarcze, ale i społeczne znaczenie mieć będzie, jak już wspomniano, silne wkroczenie aerodynamiki przemysłowej w dziedzinę budownictwa i urbanistyki. Niezbędna w zmotoryzowanym świecie luźna, a wysoka zabudowa miast nastęcza wielkie bogactwo problematyki przepływowej. Ale również wszelkie kształtowanie krajobrazu coraz bardziej powinno być poddawane prawidłom aerodynamiki.

Okoliczności, że cyklony nie stanowią dla naszego kraju kłęski żywiołowej, nie upoważnia do lekceważenia możliwości ochrony przed wszelkiego rodzaju ujemnymi skutkami wiatrów. Przeciwnie, należy myśleć o wyzyskaniu naturalnego ruchu mas powietrza.

I wreszcie lotnictwo. Jesteśmy za biedni na wielkie przedsięwzięcia w zakresie własnych konstrukcji wielkich i szybkich nowoczesnych samolotów. Istnieją w tej chwili dwie potęgi przemysłowe, które na to stać. Ale czy to oznacza rezygnację z małego lotnictwa? A doszliśmy już do tego, że zamierzono za zachodnie dewizy nabywać opracowanie aerodyna-

miczne skrzydeł do naszych szybowców. Zadanie było oczywiście wykonalne w kraju, zostało podjęte i zrealizowane.

Lotnictwem trzeba się zajmować choćby dlatego, że jest ono i pozostanie czynnikiem postępu w wielu innych dziedzinach konstrukcji.

Wzywając do inicjatywy w zakresie podejmowania tematyki służącej w widomy sposób postępowi technicznemu w różnych dziedzinach naszej gospodarki, przypomnieć jednak warto znaną prawdę. Bez głodu nowości, bez głodu postępu technicznego, przejawionego przez nasz przemysł i gospodarkę w ogóle, inicjatywy rozwoju badań stosowanych nie znajdują właściwego klimatu.

Wykaz niektórych skrótów

- Archiwum Mechaniki Stosowanej — AMS
 Archiwum Hydrotechniki — AH
 Archiwum Budowy Maszyn — ABM
 Archiwum Górnictwa — A Gór.
 Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., sér. tech. — Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech.
 Bull. de l'Acad. Pol. Sc., Série des sciences math., astr. et phys. — Bull. Acad. Pol. Sc. série des sc. math., astr. et phys.
 Prace Instytutu Techniki Ciepłej — Pr. ITC
 Prace Instytutu Maszyn Przepływowych — Pr. IMP
 Ciepłe Maszyny Przepływowe (Biuletyn) — CMP
 Fluid Dynamics Transactions PWN — F. Dyn. Tran.
 Journal Aero-Space Sciences — JAS
 Journal des Rech. — J. d. Rech.
 Proc. of International Symposium Held Nice (1960) — Proc. of IS Held Nice (1960)
 Journal of Fluid Mechanics — JFM
 Rozprawy Inżynierskie — Rozp. Inż.
 Zeszyty Politechniki Warszawskiej (Mech)-Zesz. PW (Mech)
 Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej (Mechanika) — Zesz. Nauk. P.Ł. (Mech)
 Advances Aeronautical Sciences — Adv. Aero. Sc.
 Biuletyn Ciepłych Maszyn Przepływowych — Biul. CMP
 Prace Matematyczne — Pr. Mat.
 Podstawowe Problemy Współczesnej Techniki — Pod. Prob. Współ. Techn.
 Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki-IBTP Rep.
 Przegląd Mechaniczny — Przegl. Mech.
 Gospodarka Paliwami i Energią — Gosp. Paliwami i Energ.
 International Journal of Heat and Mass Transfer — IJH and M. Tran.
 Transactions ASME Journal of Engineering for Power — Tran. ASME J. of Eng. for Power
 Inst. for Aero-Space Studies UTIAS Toronto — Inst. for Aero-Space Studies Toronto
 Прикладная Математика и Механика — ПИММ

BIBLIOGRAFIA POLSKICH PRAC Z DZIEDZINY MECHANIKI PŁYNÓW ZA OKRES DZIESIĘCIOLECIA 1958-1967

1958

1. K. BRODOWICZ, *Wpływ burzliwości na przejmowanie ciepła w pęczku rur*, ABM, 2, 5 (1958).
2. S. JUNIEWICZ, J. AULICH, *Zastosowanie analogii aerohydrodynamicznej w badaniach urządzeń hydrotechnicznych*, AH, 1, 5 (1958).

3. A. KONORSKI, *Przepustowość wielostopniowych turbin ciepłych*, ABM, 3, 5 (1958).
4. R. KOZUBOWSKI, *Turbina do badań modelowych układów lopatkowych*, ABM, 3, 5 (1958).
5. B. KRAJEWSKI, *Nowa metoda obliczania przepływu przez wieniec maszyn wirnikowych*, ABM, 3, 5 (1958).
6. J. KRZYŻANOWSKI, *Profile łopatkowe o dużej sprawności do modernizacji układów lopatkowych turbin*, ABM, 3, 5 (1958).
7. M. ŁUNC, J. LUBOŃSKI, *Gaz raréfié électrisé dans un champ magnétique, I Equations générales. Distribution de la densité*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 4, 6 (1958).
8. M. ŁUNC, J. LUBOŃSKI, *Champ de l'intensité du flux des particules*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 5, 6 (1958).
9. M. ŁUNC, J. LUBOŃSKI, *Gaz compris entre deux parois planes identiques et parallèles*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 5, 6 (1958).
10. J. MADEJSKI, *O możliwości realizacji przemiany izotermicznej w maszynach przepływowych*, ABM, 2, 5 (1958).
11. W. PROSNAK, *Porównawcze pomiary wagowe płatów pierścieniowych i prostokątnych o małych wydłużeniach*, ABM, 3, 5 (1958).
12. W. PROSNAK, *Theory of two-dimensional aerofoil with jet flap*, AMS, 1, 10 (1958).
13. A. SZANIAWSKI, *Relaxation phenomena in flow problems*, AMS, 5, 10 (1958).
14. A. SZANIAWSKI, *Thermodynamics of irreversible phase change processes*, AMS, 3, 10 (1958).
15. A. SZANIAWSKI, *Kryterium oceny wpływu zjawisk relaksacyjnych na opływ nadźwiękowej głowicy rakiety*, Biul. Woj. Ak. Tech., 17, 8 (1958).
16. R. SZEWAŁSKI, *Praca kierownic turbinowych układów ekspansyjnych przy ponadkrytycznych spadkach ciepłych*, ABM, 3, 5 (1958).
17. Z. SZOPOWSKI, *Analiza róż falowania w oparciu o notowania wiatrowe*, AH, 2, 5 (1958).
18. J. ŚMIGIELSKI, H. RUTKOWSKA, *Badania strat przepływu w palisadzie złożonej z krótkich łopatek turbinowych*, ABM, 3, 5 (1958).
19. A. T. TROSKOŁAŃSKI, *Podstawy mechaniki cieczy we współrzędnych walcowych*, AH, 1, 5 (1958).

1959

20. E. BURKA, E. WOŹNY, *Ustalony przepływ laminarny przez prostoosiowy kanał zamknięty o przekroju trójkątnym*, ABM, 1, 6 (1959).
21. M. BURNAT, *On the conditions of simple wave formation*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 10, 7 (1959).
22. W. FISZDON, E. MOLLO-CHRISTENSEN, *Preliminary experimental investigation of oscillating shock wave boundary layer interaction*, Mass. Inst. of Tech. Fluid Dyn. RG, Rep 59-8, June 1959.
23. H. JARZYNA, *Uproszczona teoria pędnika cykloidalnego*, ABM, 1, 6 (1959).
24. J. KARWOWSKI, *Metoda pola sił falującej wody*, AH, 4, 6 (1959).
25. J. KARWOWSKI, *Method of the undulating water field of force*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11, 7 (1959).
26. J. KARWOWSKI, *Measurements of surface sea currents*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 12, 7 (1959).
27. J. KRZYŻANOWSKI, *Analiza i ocena przydatności metod określania przelotności palisad łopatkowych*, ABM, 4, 6 (1959).
28. J. LITWINISZYN, *Flows in pipe networks from the point of view of the theory of random processes*, AMS, 4, 11 (1959).
29. J. LITWINISZYN, *Flow stability in pipe networks*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 10, 7 (1959).
30. M. ŁUNC, *Principe d'un dispositif antigeratoire*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 1, 7 (1959).
31. J. MĄCZYŃSKI, *Transient response of nine ventilation networks during from reversal*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 6, 7 (1959).
32. L. NIEMAND, *Niektóre uwagi o poliotropowych przepływach gazu*, ABM, 1, 6 (1959).
33. L. NIEMAND, *Wpływ tarcia na rozprężenie gazu w skośnym ścięciu kierownic turbinowych*, ABM, 3, 6 (1959).
34. W. J. PROSNAK, P. KUCHARCZYK, *The influence of the ground of the aerodynamics properties an airfoil with jet flap*, AMS, 4, 11 (1959).
35. R. PUZYREWSKI, *Some results of experimental investigations of short turbine nozzle blades in cascade*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 9, 7 (1959).

36. J. ROŚCISZEWSKI, *Przebieg fali uderzeniowej przez przewody o zmiennych przekrojach*, ABM, 1, 6 (1959).
37. J. ROŚCISZEWSKI, *Influence of shock wave attenuation boundary layer growth on contact surface motion in the shock tube*, JAS, 6, 26 (1959).
38. A. SZANIAWSKI, *The influence of molecular structure on the structure of a weak shock wave*, AMS, 3, 11 (1959).
39. A. SZANIAWSKI, *The structure of weak shock waves in real gases*, AMS, 2, 11 (1959).
40. B. SZCZENIOWSKI, *Solution of boundary problems in two—dimensional potential motion in compressible perfect fluid*, ABM, 2, 6 (1959).
41. R. SZEWAŁSKI, *The critical pressure ratio for a series of steam and gas discharging orifices and its effect on the maximum discharge of the system*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 9, 7 (1959).
42. R. SZEWAŁSKI, *Krytyczne warunki rozprężania gazu i pary przez grupę otworów wypływowych połączonych w szereg i ich wpływ na przelotność układu*, ABM, 3, 6 (1959).
43. Cz. SZYMAŃSKI, *Some plane problem of the theory of limit equilibrium of loose and cohesive, nonhomogeneous isotropic media in the case of nonlinear limit curve*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 2/3, 7 (1959).
44. J. ŚMIGIELSKI, R. PUZYREWSKI, *Some results of experimental investigations of short turbine nozzle blades in a cascade*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 9, 7 (1959).
45. J. ŚMIGIELSKI, R. PUZYREWSKI, *Niektóre wyniki badań doświadczalnych palisady kierowniczych łopatek turbinowych o małej wysokości*, ABM, 3, 6 (1959).
46. J. ZIELIŃSKI, *Badania dysz dla wytrysku wody i obliczanie schładzaczy wtryskowych*, Pr. ITC, z. 13 (1959).

1960

47. J. BONDER, *О тензорном методе в теории неустановившихся пространственных течений типа двойной волны*, ПИММ, 6, 24 (1960).
48. M. BURNAT, *Simple waves in plane non-steady compressible, inviscid and non-heat-conducting flow*, AMS, 1, 12 (1960).
49. M. CLOUPEAU, A. SZANIAWSKI, *Étude optique d'un tube de choc a soufflage magnetique*, J.d. Rech. CNRS, No. 51 (1960).
50. Cz. DREUT, *Fale wodne w doświadczalnym korycie hydraulicznym. Metodyka pomiaru i analiza parametrów falowania*, AH, 4, 7 (1960).
51. W. FISZDON, E. MOLLO-CHRISTENSEN, *An experiment on oscillatory shock wave boundary layer interaction*, JAS, 1, 27 (1960).
52. H. JARZYNA, *Kinematyka pędnika cykloidalnego*, ABM, 1, 7 (1960).
53. J. LITWINISZYN, *On the organization of the mean of information on smoke distribution in mine ventilation networks*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 9, 8 (1960).
54. M. ŁUNC, J. LUBOŃSKI, *Mouvement d'un gaz électrisé très rarefié en presence des parois diffusantes*, Proc. of IS Held Nice, (1960).
55. J. MAKOWSKI, *Pomiar gęstości wody napowietrzanej*, AH, 1, 7 (1960).
56. J. OSTROWSKI, *Właściwości opływu płatów skośnych w zakresie krytycznych kątów natarcia*, ABM, 4, 7 (1960).
57. T. PILLER, *Związek między średnią prędkością przekroju a jego wymiarami i prędkościami na pionowej przechodzącej przez nurt*, AH, 3, 7 (1960).
58. W. J. PROSNAK, P. KUCHARCZYK, *O profilu z odmuchiwanej lotką lub klapą*, ABM, 3, 7 (1960).
59. J. ROŚCISZEWSKI, *Calculation of nonuniform shock waves*, JFM, 3, 8 (1960).
60. J. ROŚCISZEWSKI, *Propagation of wave of finite amplitude through duct of nonuniform cross section*, JFM, 4, 8 (1960).
61. K. SALWA, H. WALDEN, *Filtracja cieczy w złożu ze szczeliną poziomą*, Rozp. Inż., 3, 8 (1960).
62. J. SIELSKI, *Wpływ anizotropii podłoża na filtrację pod budowę piętrzącą*, AH, 1, 7 (1960).
63. B. STANISZEWSKI, *Nucleate boiling growth and departure*, ABM, 1, 7 (1960).
64. K. STUDZIŃSKI, *Analityczne wyznaczanie przybliżonej charakterystyki zewnętrznej i wewnętrznej przekładni hydrokinetycznej*, Zesz. PW (Mech), 6 (45), (1960).
65. A. SZANIAWSKI, *Certains problemes de la dynamique du gaz parfait contenant des-molecules qui peuvent se decomposer*, AMS, 4, 12 (1960).

66. A. SZANIAWSKI, *Certaines relations existant entre les derivees partielles des deux cotés de l'onde de choc*, Aplikace Mat., 5, 5 (1960).
67. J. WYSOCKI, *Przybliżona metoda obliczania wiatraków o danym kształcie geometrycznym*, ABM, 3, 7 (1960).

1961

68. W. BRZOZOWSKI, *Tunel dwupalisadowy do badań przy dużych prędkościach przepływu*, Pr. IMP, z. 4, (1961).
69. W. BRZOZOWSKI, J. ŚMIGIELSKI, A. ŻABICKI, *Wyniki badań palisad profili turbinowych akcyjnych TP2 i Ala w tunelu dużych prędkości*, Pr. IMP, z. 5, (1961).
70. W. BRZOZOWSKI, *Results of the first experiments with small-power magnetohydrodynamics generators*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 10, 9 (1961).
71. E. BURKA, *Podstawy badania maszyn wodnych metodą aerodynamiczną*, Pr. IMP, z. 3, (1961).
72. E. BURKA, *Stoisko aerodynamiczne do badania maszyn wodnych w laboratorium IMP PAN w Gdańsku*, Pr. IMP, z. 3, (1961).
73. Z. DZIEWOŃSKI, *Wykreślna analiza przepływu wody w zbiornikach retencyjnych*, AH, 4, 8 (1961).
74. W. FISZDON, *Some experimental results of generating high frequency oscillations shock waves and oscillating shock wave boundary layer interaction at supersonic speeds*, Adv. Aero. Sc., 3 (1961).
75. S. GÓRA, *Wpływ strat wyrównania dobowego na sposób pracy kaskady przewalowej elektrowni wodnych*, AH, 2, 8 (1961).
76. W. R. GUNDLACH, *Bemerkungen zur Berechnung der Schaufelkränze ... des Laufkranzes*, Biul. CMP, nr 34, (1961).
77. W. JUNGOWSKI, *Analiza zmiennych w czasie zjawisk występujących w rurociągu dalekościżnym*, ABM, 3, 8 (1961).
78. W. JUNGOWSKI, *Analiza wpływu tarcia gazu i masy tłoka na temperaturę spiętrzenia w hiperdźwiękowym tunelu aerodynamicznym z ruchomym tłokiem*, ABM, 1, 8 (1961).
79. W. JUNGOWSKI, *Zmienny w czasie przepływ w kolektorze wylotowym silnika spalinowego*, ABM, 4, 8 (1961).
80. L. KOBYLŃSKI, *The calculation of nozzle-propeller systems based on the theory of thin annular air-foils with arbitrary circulation distribution*, Pr. IMP, z. 2, (1961).
81. R. KOZUBOWSKI, *Doświadczenia z powietrzną turbiną modelową IMP—PAN*, Pr. IMP, z. 11/12 (1961).
82. A. L. KOWAL, *Badania nad możliwością równomiernego rozdziału wody w poprzecznym przekroju osadnika o przepływie poziomym*, AH, 3, 8 (1961).
83. A. KOWALEWICZ, *Analiza nieliniowych oscylacji ciśnienia występujących przy spalaniu*, ABM, 3, 8 (1961).
84. A. KRZYWICKI, *O zastosowaniu metody Weyla w zagadnieniu brzegowym zlinearyzowanych równań hydrodynamiki*, Pr. Mat., 5 (1961).
85. W. KRZYŻANOWSKI, Z. FRANASZCZUK, K. STELLER, *Wpływ wadliwej eksploatacji i zużycia turbin wodnych na ich sprawność i wydajność elektrowni wodnych*, AH, 2, 8 (1961).
86. J. KRZYŻANOWSKI, B. WEIGLE, *Niektóre wyniki badań kierownic pierścieniowych z krótkimi łopatkami o profilu TN2*, Pr. IMP, z. 2, (1961).
87. J. KRZYŻANOWSKI, B. WEIGLE, *Wyniki badania przelotności prostych palisad profili kierowniczych TN2*, Pr. IMP, z. 3, (1961).
88. S. KUCZEWSKI, *Metoda obliczenia kąta wypływu z łopatek wirnika sprężarki promieniowej*, Pr. ITC, z. 15, (1961).
89. S. KUCZEWSKI, *Metoda projektowania układu łopatkowego sprężarek osiowych*, Pr. ITC, z. 16, (1961).
90. J. LITWINISZYN, *On a certain model of the flow of liquid in a pipe network*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 8, 9 (1961).
91. J. MADEJSKI, *Wymiana ciepła podczas ruchu laminarnego przez kanały o przekroju pierścieniowym*, AMS, 2, 13 (1961).
92. J. MADEJSKI, *Próba teoretycznej analizy wymiany ciepła podczas wrzenia pęcherzykowego*, Pr. IMP, z. 2, (1961).

93. J. MADEJSKI, *Combined laminar flow forced and natural convection in vertical round tubes*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11, 9 (1961).
94. J. MACZYŃSKI, *Solving of non-linear stationary networks of duct on digital computers*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 10, 9 (1961).
95. J. NOWAKOWSKI, *Badanie przepływu w kanałach wentylatorów osiowo-akcyjnych*, Pr. ITC, z. 16, (1961).
96. W. J. PROSNAK, *On the viscous flow near the stagnation point on an interface*, AFO SR 159 Princeton Univ., Rep. 563, (1961).
97. R. PUZYREWSKI, *Zagadnienie przepływów wtórnych w kanałach w świetle twierdzeń Helmholtza i niektóre wnioski dotyczące kształtowania kanałów o małej wysokości*, Pr. IMP, z. 5, (1961).
98. H. WALDEN, *Przybliżone metody badania ruchu konturu roponośnego przy filtracji cieczy ściśliwej w złożu*, Rozp. Inż., 1, 9 (1961).
99. H. WALDEN, *Współczynnik oporów hydraulicznych w gazociągach dalekosiężnych*, Rozp. Inż., 3, 9 (1961).
100. H. WALDEN, *Niezotermiczny przepływ gazu w gazociągach dalekosiężnych*, Rozp. Inż., 4, 9 (1961).
101. H. WALDEN, *Wzory do obliczeń przepływu gazu w nachylonych gazociągach*, Rozp. Inż., 4, 9 (1961).
102. W. WOLSKI, *Badania modelowe filtrów odwrotnych dla gruntów mało spoistych*, AH, 3, 8 (1961).

1962

103. S. APANASEWICZ, *Математический анализ плоских движений в магнитной гидродинамике*, F. Dyn. Tran., 1 (1961), AMS, 3/4, 14 (1962).
104. J. BODZIONNY, J. LITWINISZYN, *Mathematical approach to the phenomenon of colmatage of an n-fractional suspension of particles*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 1, 10 (1962).
105. J. BONDER, *Sur une forme symetrique spatio temporelle des equations de la dynamique des gaz et sur quelques — unes de ses applications*, F. Dyn. Tran. 1 (1964), AMS 3/4, 14 (1962)
106. J. BONDER, *Sur les propriétés fondamentales des ondes doubles dans les écoulements compressibles irrrotationnels tridimensionnels et non stationnaires*, Proc. of X IC of App. Mech., Amsterdam-New York, (1962).
107. K. BRODOWICZ, *Numeryczna metoda rozwiązania równań konwekcji swobodnej wzdłuż izotermicznej płyty pionowej przy zmiennych parametrach materiałowych*, ABM, 3, 9 (1962).
108. E. BURKA, *Charakterystyki energetyczne maszyn wodnych badanych metodą aerodynamiczną*, Pr. IMP, z. 6, (1962).
109. E. BURKA, *Badania doświadczalne modelowej turbiny śmigłowej SM400 na stoisku aerodynamicznym*, Pr. IMP, z. 7, (1962).
110. E. BURKA, *Porównanie wyników badań geometrycznie podobnych turbin śmigłowych napędzanych powietrzem i wodą*, Pr. IMP, z. 8, (1962).
111. E. BURKA, *Pomiar natężenia przepływu przepływomierzem typu Alcocka*, Pr. IMP, z. 10, (1962).
112. E. BURKA, *Metoda aerodynamiczna badania maszyn wodnych*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
113. J. BROSCZ, *Badania sprzęgieł hydrokinetycznych*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
114. M. BURNAT, *Метод характеристик для квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений типа газодинамики*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 2, 10 (1962).
115. M. BURNAT, *Задача Коши для сжимаемых течений типа простых волн*, AMS, 3/4, 14 (1962), F. Dyn. Tran., 1, (1964).
116. J. CHOMIAK, *Kolebania kapli вязкой жидкости в турбулентном газе*, AMS, 3/4, 14 (1962), F. Dyn. Tran., 1 (1964).
117. Cz. DREUT, *Teoretyczne metody obliczeń dynamicznych parametrów morskiej fali postępowej*, AH, 3, 9 (1962).
118. Z. DŻYGADŁO, *Some problems of linearized supersonic flow past vibrations surface of a body of revolution*, AMS, 3/4, 14 (1962).
119. W. FISZDON, *Known applications of variational methods to transonic flows*, Proc. IUTAM Sym. Trans. Aachen, (1962).

120. W. FISZDON, *A method of calculating flutter of a conical nozzle with internal supersonic flow*, Proc. III ICAS Stockholm, (1962), Adv. Aero, Sc., 5/6.
121. W. FISZDON, *Application of the variational methods to the solutions of practical supersonic flow problems*, ZAMM, Sonderheft, (1962).
122. W. FISZDON, *A method of calculating the flow in a divergent nozzle with oscillating walls*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1, (1964).
123. J. FOLWARCZNY, *Podobieństwo termodynamiczne dla przepływu laminarnego w okrągłym kanale prostym*, ABM, 2, 9 (1962).
124. W. GORODZIEJCZUK, *Wyznaczanie parametrów ruchu mieszaniny gruntowej w rurociągach poziomych*, AH, 4, 9 (1962).
125. R. GUTOWSKI, *The problem of solidification front in liquids*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 5, 10 (1962).
126. R. HERCZYŃSKI, *Stare i nowe zagadnienia teorii filtracji*, Pod. Prob. Współ. Tech., (1962).
127. R. HERCZYŃSKI, *Вытеснение несмешивающихся жидкостей в пористой среде*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
128. S. JANICKI, *Plaskie drgania stacjonarne ośrodka gazowego wymuszone działaniem źródła energii mechanicznej*, Pr. IMP, z. 9, (1962).
129. H. JARZYNA, *Pędnik cykloidalny, jego teoria i badania*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
130. W. JUNGOWSKI, *Metoda obliczania temperatury spiętrzenia w hiperdźwiękowym tunelu aerodynamicznym z ruchomym tlokiem i uwagi o projektowaniu tuneli tego typu*, ABM, 3, 9 (1962).
131. W. JUNGOWSKI, *Methods of calculation of stagnation temperature in a hypersonic gun tunnel*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
132. L. KOBYLIŃSKI, *Teoria i badanie układu płatów automatycznie sterowanych systemem Hooke'a*, Pr. IMP, z. 8, (1962).
133. L. KOBYLIŃSKI, *Badanie śrub okrętowych w tunelu kawitacyjnym*, Pr. IMP., z. 11-12, (1962).
134. A. KONARSKI, *Uściślone prawo przelotności i nowa metoda obliczania przelotności turbin ciepłych*, Pr. IMP, z. 6, (1962).
135. R. KOZUBOWSKI, *Doświadczenia z powietrzną turbiną modelową*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
136. J. KRZYŻANOWSKI, *Rola przepływowych badań modelowych układów lopatkowych*, Pr. IMP. z. 11-12, (1962).
137. P. KUCHARCZYK, *Геометрический метод определения классов решений уравнений газодинамики на основе некоторых групп Ли преобразований пространства и пространства — времени*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
138. S. KUCZEWSKI, *Przybliżona metoda obliczania charakterystyk promieniowych pomp wodnych*, Pr. ITC, z. 18, (1962).
139. S. KUCZEWSKI, *The influence of impeller design parameters on the characteristic slope of a radial flow blower at nominal duty point*, Pr. ITC, z. 18, (1962).
140. J. LUBOŃSKI, *Hypersonic, plane Couette flow in rarefied gas*, AMS 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
141. W. ŁUCJANEK, *Sily aerodynamiczne na harmonicznie drgającym profilu w przypadku nieciągłości cyrkulacji w ścieżce wirowej za profilem*, ABM, 2, 9 (1962).
142. M. ŁUNC, *Les équations de transport des quantites moleculaires pareilles a l'entropie*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
143. J. MADEJSKI, *Laminar thermal boundary layer at high velocities*, AMS, 6, 14 (1962).
144. J. MADEJSKI, *Kombinowana wymuszona i swobodna konwekcja podczas ruchu laminarnego w rurach pionowych*, Pr. IMP, z. 6, (1962).
145. J. MADEJSKI, *Analiza selektywnej przepuszczalności przegród mikroporowatych*, Pr. IMP, z. 7, (1962).
146. J. MILEWSKI, *Niektóre doświadczenia w dziedzinie megnetogazodynamiki*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
147. J. MĄCZYŃSKI, D. KRZYSZTOŃ, *Characteristic functions and strain tensor in a compressible sand mass motion*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 1, 10 (1962).
148. W. NOBIS, J. SOBIERAJ, *Badania modelowe poboru wody z rzeki przez ujęcia w zatoce*, AH, 1, 9 (1962)

149. W. PROSNAK, *O pewnej właściwości płaskich przepływów cieczy doskonałej z liniami poślizgu*, ABM, 2, 9 (1962).
150. W. J. PROSNAK, E. ŁUCZYWEK, *Urządzenie wagowe do badania śmigieł przeciwbieżnych*, ABM, 1, 9 (1962).
151. W. J. PROSNAK, *On the viscous flow near the stagnation point on an interface*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
152. K. STELLER, *Wyznaczanie kątów łopatek w wolnobieżnych turbinach śmigłowych*, Pr. IMP, z. 9, (1962).
153. A. SZANIAWSKI, *Equations of transonic flow of a heat conducting fluid*, AMS, 6, 14 (1962).
154. A. SZANIAWSKI, *La vitesse du son et l'adiabate d' Hugoniot pour des gaz inértes lourds, pertiellement ionisés*, AMS, 3/4, 14 (1962); F. Dyn. Tran., 1 (1964).
155. R. SZEWAŁSKI, *Maszyny przepływowe i ich problematyka*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
156. J. ŚMIGIELSKI, *Jednowymiarowy przepływ adiabatyczny czynnika dwufazowego*, Pr. IMP, z. 10, (1962).
157. J. ŚMIGIELSKI, *Zagadnienia badań doświadczalnych ostatnich stopni turbin parowych dużej mocy*, Pr. IMP, z. 11-12, (1962).
158. J. WIĘCKOWSKI, *On certain dynamics properties of an elastic bar immersed and non-immersed in liquid with free surface*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11, 10 (1962).
159. J. WIĘCKOWSKI, *O własnościach dynamicznych belki sprężystej niezwilżonej i zanurzonej w cieczy jako modelu podłoża fundamentowego*, Pr. IMP, z. 8, (1962).
160. J. WIĘCKOWSKI, *Stacjonarne wymuszone fale grawitacyjne na nieograniczonej powierzchni swobodnej cieczy idealnej*, Pr. IMP, z. 9, (1962).
161. J. WIĘCKOWSKI, *The influence of compressibility on hydrodynamic damping and reduced mass of a liquid with free surface contained in a homogeneous gravitatial field*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11, 10 (1962).
162. J. WOLF, *Application to the field tube of the general equations of parallel flow recuperative multichannel heat exchangers*, ABM, 3, 9 (1962).
163. S. WÓJCICKI, *Modelowanie komór spalania turbin spalinowych ze wstępnym odparowaniem mieszanki palnej*, ABM 3, 9 (1962).
164. S. WÓJCICKI, *Ustatecznianie płomienia w warstwie powierzchniowej*, ABM, 1, 9 (1962).

1963

165. A. BOBESZKO, *Sprężyste fale giętne w nieskończonej rurze przy przepływie płynu nieściśliwego*, Rozp. Inż., 1, 11 (1963).
166. J. BONDER, *La forme invariante des équations generales de la dynamique des gaz réels*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 11 (1963).
167. K. BRODOWICZ, J. BIALOKOZ, *Free convection heat transfer from a vertical plate to freon 12 near the critical state*, ABM, 4, 10 (1963).
168. L. BRZESKI, Z. KAZIMIERSKI, *O własnościach punktów styczości linii Fanno i politrop*, CMP, Nr 57/58, (1963).
169. J. CHOMIAK, *Postaciowe drgania kropli lepkiej cieczy o zmiennej masie i własnościach*, ABM, 1, 10 (1963).
170. M. CHUDEK, *Zagadnienie przepływu wody przez rury murowe wykonane dla potrzeb górnictwa*, AH, 4, 10 (1963).
171. E. CZETWERTYŃSKI, *O możliwościach powstawania ruchu wirowego cieczy doskonałej*, AH, 2, 10 (1963).
172. R. DĘBSKI, *Badania laboratoryjne parcia wody powodziowej na budynki*, AH, 3, 10 (1963).
173. C. DREUT, S. KITEGORODZKIJ, *Metody prognozy morskiego falowania wiatrowego dla potrzeb hydrotechniki*, AH, 1, 10 (1963).
174. R. GUTOWSKI, *The problem of motion of the freezing front in liquids*, AMS, 2, 15 (1963).
175. R. HERCZYŃSKI, *Steady flow through porous media with heat and mass exchange I*, AMS, 6, 15 (1963).
176. R. HERCZYŃSKI, *Steady flow through porous media with heat and mass exchange II*, AMS, 6, 15 (1963).
177. J. HRYŃCZUK, *Analiza teoretyczna akceleracji plazmy w zmiennym polu elektromagnetycznym*, Pr. IMP, z. 18, (1963).

178. H. JARZYNA, *Nowy układ kinematyczny pędnika cykloidalnego*, Pr. IMP, z. 18, (1963).
179. W. JUNGOWSKI, J. OSTROWSKI, *Ocena możliwości chłodzenia materiałów w transporcie pneumatycznym na przykładzie alkalicelulozy*, Z. Pol. (Mech), 10 (71), (1963).
180. L. KACZYŃSKI, *Doświadczalna ocena kryteriów w zakresie stateczności spalania za mechanicznymi statecznikami płomienia*, ABM, 4, 10 (1963).
181. Z. KAZIMIERSKI, *Pole prędkości w przepływie potencjalnym przez osiowy stopień turbiny lub sprężarki*, CMP, Nr 45, (1963).
182. B. KORDAS, *Hydrauliczne obliczenia studni o drenach promienistych w pobliżu rzeki*, Rozp. Inż., 1, 11 (1963).
183. P. КОЗУБОВСКИЙ, *Выбор оптимальной величины верхней перекрыши в турбинных ступенях высокого давления активного типа*, Pr. IMP, z. 14–16, (1963).
184. B. KRAJEWSKI, *Variational problems of the theory of three-dimensional flow through thermal turbomachinery*, AMS, 6, 15 (1963).
185. J. KRZYŻANOWSKI, B. WEIGLE, *O pewnym przypadku znacznej przelotności palisady łopatek kierowniczych*, Pr. IMP, z. 13, (1963).
186. E. КЖЫЖАНОВСКИ, *Некоторые замечания к проектированию лопаточной системы методами канальным и модельных ступеней*, Pr. IMP, z. 14–16, (1963).
187. P. KUCHARCZYK, *Metoda wyznaczania pewnych klas przepływów za pomocą modelowania na grupach Lie'go*, Rozp. Inż., 3, 11 (1963).
188. J. LITWINISZYN, *Colmatage considered as a certain stochastic process*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 3, 11 (1963).
189. J. LITWINISZYN, *The movement of contact surface of two immiscible liquids flowing through a duct*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 6, 11 (1963).
190. J. LITWINISZYN, J. MAĆZYŃSKI, *Filtration due to the action of wind during waste or storage neap fires*, A. Gór. 2, 8 (1963).
191. M. ŁUNC, H. NOWAK, D. SMOLEŃSKI, *Self-induction in detonation wave propagation*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 11 (1963).
192. J. MADEJSKI, *Turbulent flow heat transfer in the thermal entrance region*, AMS, 4, 15 (1963).
193. J. MADEJSKI, *Zagadnienie krzepnięcia cieczy na grubej chłodzonej płycie*, Pr. IMP, z. 13, (1963).
194. J. MAĆZYŃSKI, *Współdziałanie nagrzewania skal z przepływami w sieciach wentylacyjnych*, A. Gór. 2, 8 (1963).
195. W. MERC, *Wpływ konwekcji naturalnej na rozkład współczynnika przejmowania ciepła przy laminarnym ruchu wody w rurze pionowej*, ABM, 3, 10 (1963).
196. W. MOROZOWSKA, *Wpływ parametrów konstrukcyjnych cyklonu na charakterystykę jego pracy*, Pr. ITC, z. 21, (1963).
197. E. NOWAK, *Free molecular hypersonic flow past a sphere*, AMS, 3, 15 (1963).
198. J. OSTROWSKI, *Wpływ geometrycznych parametrów szczelin wlotowych na ukształtowanie się przepływu przy przepłukiwaniu wzdłużnym cylindra silnika okrętowego*, ABM, 2, 10 (1963).
199. Z. A. PIETRZYK, *Investigation of flow through an electromagnetic shock tube. Selection of optimum parameters and preliminary results*, AMS, 5, 15 (1963).
200. Z. PIETRZYK, *Zjawiska towarzyszące fali uderzeniowej w elektrycznej rurce uderzeniowej*, Zagad. magnetogazodynamiki, cz. II, wyd. PAN, (1963).
201. W. J. PROSNAK, *A note on the application of Pohlhausen's method to the stagnation point flow*, ABM, 1, 10 (1963).
202. P. ПУЗЫРЕВСКИ, *Попытка теоретического подхода к оценке концевых потерь*, Pr. IMP, z. 14–16, (1963).
203. R. PUZYREWSKI, *Konwekcja linii wirowych w zakrzywionych kanałach jako podstawa do obliczania strat brzegowych*, Pr. IMP, z. 17, (1963).
204. S. SIENNICKI, *Badania nad poprawieniem przepływu przez elektrofiltrowy*, Biul. ITC, nr 10; Gosp. Paliwami i Energ., (1963).

205. B. STANISZEWSKI, *Częstotliwość i średnica pęcherzyków pary powstającej przy wrzeniu*, ABM, 3, 10 (1963).
206. R. STANISZEWSKI, *Problem wyznaczania optymalnych i krytycznych parametrów pracy silnika nieizobarycznego z dyszą rozwartą*, ABM, 2, 10 (1963).
207. K. STELLER, *Rewersyjność wirnikowych maszyn wodnych*, Pr. IMP, z. 17, (1963).
208. A. SZANIAWSKI, *Dyskusyjne problemy podstawowych równań magnetogazodynamicznych*, Zagad. magnetogazodynamiki, cz. II, wyd. PAN, (1963).
209. A. SZANIAWSKI, *Transonic approximation to the equations of flow*, AMS, 6, 15 (1963).
210. B. SZCZENIOWSKI, *Thermodynamic processes of mixing of two different gases*, ABM, 3, 10 (1963).
211. R. SZEWAŁSKI, *The optimization problem of basic steam turbine stage design parameters*, Pr. IMP, z. 14-16, (1963).
212. R. SZYMANIK, R. STANISZEWSKI, *O pewnej metodzie badań komór spalania*, ABM, 3, 10 (1963).
213. J. ŚMIGIELSKI, A. ŻABICKI, J. DUDZISZ, *Wyniki badań przepływu przez palisady łopatek turbinowych o dużej reakcyjności z przekroczeniem prędkości dźwięku*, Pr. IMP, z. 13, (1963).
214. J. ŚMIGIELSKI, *Shock condensation during the expansion of steam in a nozzle*, Pr. IMP, z. 14-16, (1963).
215. J. WIĘCKOWSKI, *O szczególności przypadku stacjonarnych drgań wymuszonych cieczy ściślej z powierzchni swobodną w jednorodnym polu grawitacyjnym*, Pr. IMP, z. 18, (1963).
216. S. WÓJCICKI, *Modelowanie silników pulsacyjnych*, ABM, 3, 10 (1963).

1964

217. S. APANASIWICZ, *On certain classes of non-stationary axially symmetric flow in magnetogasdynamics*, AMS, 2, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
218. A. BOBESZKO, *Flexural elastic waves in an infinite tube containing flowing a compressible fluid, according to the exact theory of elasticity*, AMS, 1, 16 (1964).
219. S. BEDNARZ, S. KASPRZYK, *Proces przejściowy w hydraulicznym układzie nieliniowym*, Rozp. Inż., 3, 12 (1964).
220. S. BEDNARSKI, W. PRÓCHNICKI, *Konstrukcja analogowego urządzenia hydraulicznego do modelowania turbiny parowej w obwodzie regulacyjnym*, Pr. IMP, z. 21, (1964).
221. K. BOCHENEK, *Remarks concerning a dissipative model of magnetogasdynamics*, AMS, 3, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
222. J. BONDER, *Sur l'invariance du système différentiel de la dynamique des gaz réels envisagé dans l'espace temps affine, sous métrique (Application du principe de Galilée)*, AMS 2, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2, (1965).
223. M. BURNAT, A. KIEŁBASIŃSKI, A. WAKULICZ, *The method of characteristics for a multidimensional gas flow*, AMS, 2, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2, (1965).
224. S. DĄBROWSKI, *Charakterystyki sprzęgieł hydrokinetycznych z regulowanym napełnieniem*, Przegl. Mech., 1/1964.
225. R. DŁUGOLEŃKI, *Niektóre zagadnienia obliczania przepływu czynnika ściślej w uszczelnieniach labiryntowych*, Pr. ITC, z. 24, (1964).
226. K. FANTI, *Praca przelewu ze wstawką poziomą i zamknięciem segmentowym*, AH, 1, 11 (1964).
227. W. FISZDON, *A simple qualitative estimation of the effect of an oscillating pressure on the detached shock-wave shape*, AMS, 2, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
228. W. FISZDON, W. ŁUCJANEK, M. NOWAK, *Influence of ground proximity on aerodynamics forces on an oscillating tilted airfoil*, Proc. IV C. ICAS Paris, Aug., (1964).
229. W. FISZDON, *On certain methods of analysis of the vortex flow behind an oscillating two-dimensional blunt-body*, Proc. IUTAM Sym., Ann — Arbor, USA, July 1964.
230. A. GÓRALSKI, *Wpływ kształtu na współczynnik oporu przy ruchu brył izometrycznych w nieruchomym lepkim płynie*, Rozp. Inż., 1, 12 (1964).
231. A. GÓRALSKI, *O niustalonym ruchu cząstki kulistej w nieruchomym lepkim płynie*, Rozp. Inż., 4, 12 (1964).

232. R. GUTOWSKI, *The motion of the freezing front in a liquid, taking into account the dependency of thermal parameters on the temperature*, AMS, 1, 16 (1964).
233. R. HERCZYŃSKI, *The flow gases through circular tubes in a wide range of Knudsen numbers*, AMS, 3, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
234. T. JANKOWSKI, *Laminar boundary layer on a rotating body of revolution*, AMS, 3, 16 (1964).
235. Z. KAZIMIERSKI, *Obliczanie rozkładu prędkości na profilach łopatkowych stopnia maszyny przepływowej z uwzględnieniem wzajemnego oddziaływania wieńców*, CMP, Nr 50, (1964).
236. J. KĘDZIERZEWSKI, *Wykorzystanie badań modelowych do projektowania wentylatorów*, Cz. I, Biul. ITC, Gosp. Paliwami i Energ., nr 3, (1964).
237. J. KĘDZIERZEWSKI, *Wykorzystanie badań modelowych do projektowania wentylatorów*, Cz. II, Biul. ITC, nr 4, Gosp. Paliwami i Energ., nr 4, (1964).
238. H. KIERSZENKIERN, *Badanie siły hydrodynamicznej i jej wpływ na współpracę rozdzielacza suwakowego z innymi elementami automatycznej regulacji hydraulicznej*, Pr. ITC, z. 25, (1964).
239. A. KOWALEWICZ, *Stability analysis of a normal shock-diffuser*, AMS, 5, 16 (1964).
240. B. KRAJEWSKI, *A variational approach to the three dimensional theory of convective heat transfer*, AMS, 3, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
241. I. KUZORA, *Model elektryczny stacjonarnych drgań wymuszonych cieczy idealnej z powierzchnią swobodną*, Pr. IMP, z. 19, (1964).
242. J. LITWINSZYN, *Contribution to the probabilistic interpretation of fluid flow in a porous medium*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 8, 12 (1964).
243. J. LITWINSZYN, A. Z. SMOLARSKI, *Smoluchowski's system of equations and its application in mechanics of loose media*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 8, 12 (1964).
244. W. ŁUCJANEK, *Wpływ nierównomierności prędkości unoszenia wirów za harmonicznym profilem na siły aerodynamiczne działające na profil*, ABM, 1, 11 (1964).
245. S. MAY, *Shock waves in gas with dispersed liquid*, AMS, 3, 16 (1964).
246. J. MAĆZYŃSKI, *Flow of gases in a hot non-homogeneous porous medium*, AMS, 2, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
247. J. MAĆZYŃSKI, *Filtration of air unfortunally heated porous prisms and conical heaps*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 4, 12 (1964).
248. Z. A. PIETRZYK, *Speed measurement of gas sound downstream of a shock wave in an electromagnetic shock tube*, AMS, 2, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
249. W. J. PROSNAK, *The asymmetric hypersonic blunt body problem*, AMS, 3, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
250. W. J. PROSNAK, E. ŁUCZYWEK, *The direct asymmetric hypersonic blunt body problem*, Proc. IV ICAS, Paris 1964, paper No 64.
251. R. PUZYREWSKI, *Niektóre uwagi o zachowaniu się wirowego przepływu cieczy idealnej w pobliżu „linii sprzężenia”*, ABM, 1, 11 (1964).
252. R. PUZYREWSKI, *Description of the phenomenon of secondary flows in curved channels by means of convection of rotation lines*, AMS, 3, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
253. R. PUZYREWSKI, T. JANKOWSKI, R. KOZUBOWSKI, *Method of analysis of the single stage turbine characteristics with the use of a digital computer*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 1, 12 (1964).
254. R. PUZYREWSKI, *Wyznaczanie linii prądu przepływu wtórnego za zakrzywieniem kanału*, Pr. IMP, z. 19, (1964).
255. R. PUZYREWSKI, T. JANKOWSKI, R. KOZUBOWSKI, *Анализ результатов исследования модельной турбинной ступени с применением вычислительных машин*, Энергомашиностроение, 10, (1964).
256. T. RYNCARZ, R. SKAWIŃSKI, *Elektroosmotyczny przepływ roztworów w gruncie jako zjawisko zmienne w czasie*, AH, 1, 11 (1964).
257. K. SALWA, H. WALDEN, *Wypieranie wody przez gaz wtłaczany do wielowarstwowego pokładu*, Rozp. Inż., 2 (1964).
258. S. SIEMICKI, *Przejmowanie ciepła przez palisadę rur przy konwekcji wymuszonej*, ABM, 1, 11 (1964).
259. J. SOBIERAJ, *Uwarunkowanie dopływu wody do studni wierconej charakterystyką warstwy wodonośnej*, AH, 2, 11 (1964).

260. K. STELLER, *Projektowanie średniobieżnych wirników rewersyjnych typu Francisa*, Pr. IMP, z. 19, (1964).
261. K. STELLER, *Badania doświadczalne rewersyjnych maszyn wodnych z średniobieżnymi wirnikami typu Francisa*, Pr. IMP, z. 20, (1964).
262. K. STELLER, *Wpływ parametrów konstrukcyjnych średniobieżnej maszyny wodnej na jej własności energetyczne w ruchu pompowym i turbinowym*, Pr. IMP, z. 21, (1964).
263. A. SZANIAWSKI, *L'écoulement transsonique dans une tuyère avec un point d'intersection des deux lignes du son*, AMS, 3, 16 (1964); F. Dyn. Tran., 2 (1965).
264. A. SZANIAWSKI, *Equations of plane symmetric transonic viscous and heat conducting flow*, AMS, 5, 16 (1964).
265. A. SZANIAWSKI, *Importance des effets de dissipation en écoulement transsonique*, Proc. IV C. ICAS, Paris, Aug. 1964, paper No 54-587.
266. A. TARNOGRODZKI, *Współczynniki aerodynamiczne wirnika śmigłowca z profilem strumieniowym w przypadku lotu wiszącego*, ABM, 4, 11 (1964).
267. Z. WAŁENTA, T. T. RUDOWSKA, *Rura uderzeniowa. Pomiarы wnioskі*, Rozp. Inż., 3, 12 (1964).
268. R. WYSZYŃSKI, *Metoda obliczania średniej prędkości bezwzględnej i kąta wypływu gazu z kanałów sprzężających wirnika sprężarki promieniowej*, ABM, 3, 11 (1964).
269. A. ZIABICKI, *Hydrodynamics of free steady — state jet subject to axial tension. I, General theory*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 10, 12 (1964).
270. A. ZIABICKI, *Hydrodynamics of a free steady — state jet subject to axial tension. II, Velocity distribution in jets of various rheological materials*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 10, 12 (1964).
271. A. ZIABICKI, *Hydrodynamics of a free steady — state jet subject to axial tension. III, Velocity distribution in jets with variable in space reological characteristics*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11, 12 (1964).
272. A. ZIABICKI, *Hydrodynamics of a free steady — state jet subject to axial tension. IV, Solution of the jet equation for Newtonian liquids*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 12, 12 (1964).

1965

273. Ś. APANASIWICZ, *Niestacjonarne przepływy osiowo-symetryczne w magneto-gazodynamice*, Pr. IMP, z. 26, (1965).
274. S. APANASIWICZ, *O zastosowaniu równań magneto-gazodynamiki do badań własności luku elektrycznego*, Pr. IMP, z. 27, (1965).
275. S. BEDNARCZYK, *Ruch falowy w kanałach otwartych i metody wyznaczania jego wielkości hydraulicznych*, AH, 4, 12 (1965).
276. T. BERNARD, *Wpływ parametrów kinematycznych i geometrycznych na sprawność wentylatorów osiowych*, Pr. ITC, z. 26, (1965).
277. T. BERNARD, *Projektowanie układów lopatkowych sprężarek i wentylatorów osiowych*, Pr. ITC, z. 27, (1965).
278. B. BOCZAR-KARAKIEWICZ, *Metoda wyznaczania ciśnień hydrodynamicznych wywołanych oddziaływaniem falowania na poziomą płytę przegrody ażurowej*, AH, 4, 12 (1965).
279. K. BRODOWICZ, W. T. KIERKUS, *Determination of streamlines and velocity components in free convection*, ABM, 3, 12 (1965).
280. M. BRUNNÉ, *Podstawy teoretyczne indukcyjnej metody pomiarowej przewodności elektrycznej stacjonarnego strumienia plazmy*, Pr. IMP, z. 25, (1965).
281. M. BRUNNÉ, *Wybrane zagadnienia z teorii efektu naskórkowości w osiowosymetrycznych konfiguracjach plazmy*, Pr. IMP, z. 28, (1965).
282. L. BRZESKI, *Zastosowanie prawa emisji maxwellowskiej do wyznaczenia naprężeń w ośrodku gazowym*, CMP, nr 57/58, (1965).
283. L. BRZESKI, *O własnościach punktów styczności linii Fanno i politrop*, CMP, nr 57/58, (1965).
284. W. BYSZEWSKI, J. KOPYSTYŃSKI, Z. MUCHA, Z. A. PIETRZYK, *Zastosowanie modelu „śnieżnego pluga” do rurki uderzeniowej ze współosiowymi elektrodami*, Rozp. Inż., 4, 13 (1965).

285. R. DŁUGOŁĘCKI, *Badanie wpływu kształtu komór wirowych na pracę uszczelnienia przelotowego*, Pr. ITC, z. 26, (1965).
286. R. DŁUGOŁĘCKI, *Zagadnienie dokładności określania straty przecieku w rzeczywistych uszczelnieniach labiryntowych*, Pr. ITC, z. 27, (1965).
287. J. E. DRAWRY, Z. A. WALENTA, *Determination of diaphragm opening times and use of diaphragm partial traps in a hypersonic shock tube*, Inst. for Aero-Space Studies, Toronto, UTIAS Tech. Not., No 90, (1965).
288. L. DROGASZ-WAWRZYŃIAK, *Obliczanie wysokości nabiegania fali na skarpy i granicy ich umacniania*, AH, 4, 12 (1965).
289. M. W. FILINOW, C. GRABARCZYK, *Przybliżone metody obliczania ruchu konturu gaz-ciecz z uwzględnieniem sprężystości cieczy i złoża*, Rozp. Inż., 1, 13 (1965).
290. W. FISZDON, *On certain methods of analysis of the vortex flow behind an oscillating two-dimensional blunt body*, AMS, 1, 17 (1965).
291. A. GARDZILEWICZ, R. PUZYREWSKI, *Wpływ osłony końcówki termometru rtęciowego na pomiar temperatury mieszaniny wodnopowietrznej*, Pr. IMP, z. 23, (1965).
292. J. KOPYSTYŃSKI, A. SZANIAWSKI, *Structure of flow in a nozzle throat*, AMS, 3, 17 (1965).
293. A. KOWALEWICZ, *Uwagi o przepływie przez dyfuzor przydźwiękowy z iglicą centralną*, ABM, 1, 12 (1965).
294. R. KOZUBOWSKI, *O pewnym przypadku doboru optymalnej szerokości łopatek kierowniczych w stopniach turbin parowych typu akcyjnego*, Pr. IMP, z. 23, (1965).
295. B. KRAJEWSKI, *Turbulentny przepływ ciepła w środowiskach usypanych*, ABM, 2, 12 (1965).
296. J. KRZYŻANOWSKI, *O ruchu filmu wodnego na łopatkach wirnikowych turbin kondensacyjnych*, Pr. IMP, z. 22, (1965).
297. J. KRZYŻANOWSKI, *Przybliżone rozwiązanie równania ruchu cienkiej warstwy cieczy po wirującej płaskiej płycie*, Pr. IMP, z. 24, (1965).
298. P. KUCHARCZYK, *Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 5, 13 (1965).
299. S. KUCZEWSKI, *Przeliczanie charakterystyk wentylatorów promieniowych na podstawie wyników badań modeli*, Pr. ITC, z. 27, (1965).
300. M. LASKA, *Wpływ wiatru na zjawiska dynamiczne zachodzące w zamkniętych i płytkich zbiornikach wodnych*, AH, 4, 12 (1965).
301. J. B. LEWANDOWSKI, *Charakterystyka hydrauliczna urządzenia o przepływie wymuszonym przez sprężone powietrze*, AH, 4, 12 (1965).
302. M. ŁUNC, *Some exact solutions of the Boltzman equation with Maxwellian distribution law*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 4, 13 (1965).
303. J. MADEJSKI, *Wpływ oporów molekularno—kinetycznych na wymianę ciepła podczas zmian fazowych*, Pr. IMP, z. 28, (1965).
304. J. MACZYŃSKI, *Jet in a coaxial free stream mean flow pattern*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 4, 13 (1965).
305. M. NOWAK, *Direct solution of Poisson's equation for incompressible flow*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 2, 13 (1965).
306. W. J. PROSNAK, J. M. BREITER, *On a rapid estimation of the shock stand-off distance based on the method of integral relations*, AMS, 6, 17 (1965); przedruk w „Механика,” сборник переводов Иностран. Статей, 3, 103 (1967).
307. R. PUZYREWSKI, *Analiza efektu separacji kropeł wody w kierunku promieniowym w ostatnich stopniach turbin kondensacyjnych*, Pr. IMP, z. 22, (1965).
308. R. PUZYREWSKI, A. GARDZILEWICZ, *Niektóre wyniki badań przepływu pary wodnej z kondensacją przez dyszę*, Pr. IMP, z. 25, (1965).
309. R. PUZYREWSKI, R. JASIŃSKI, *Pomiar grubości cienkich warstwek wody metodą opornościową*, Pr. IMP, z. 26, (1965).
310. J. RUTKOWSKI, *On the continuity principle for fluid systems in motion*, ABM, 3, 12 (1965).
311. R. STANISZEWSKI, *The problem of determination of the pressure field in the combustion chamber of a rocket engine under variable flight conditions*, AMS, 4, 17 (1965).

312. K. STELLER, *O zależności między natężeniem przepływu przez turbinę wodną a spadkiem ciśnienia w spiralnym kanale zasilającym o przekroju kołowym*, Pr. IMP, z. 25, (1965).
313. A. SZANIAWSKI, *Transonic approximations to the flow through a nozzle*, AMS, 1, 17 (1965).
314. A. TARNOGRODZKI, *Profil strumieniowy w pobliżu ziemi*, ABM, 2, 12 (1965).
315. A. TARNOWSKI, *Zmienność współczynników wydatku i ciśnień na przelewach w świetle badań modelowych*, AH, 3, 12 (1965).
316. Z. THRUN, *Pewna metoda przybliżonego obliczania dwuwymiarowych zagadnień dyfuzji*, Rozp. Inż., 2, 13 (1965).
317. H. TUBIELEWICZ-WITKOWSKA, *Zagadnienia teoretyczne falowania przy zmiennej głębokości*, AH, 4, 12 (1965).
318. Z. A. WALENTA, *Analogue networks for high heat transfer rate measurements in shock tube and shock tunnels*, Proc. 5 Inter. Shock Tube Sym., April 1965.
319. Z. A. WALENTA, *Analog networks for high heat transfer rate measurement*, AIAA Jour. Tech. Not., April 1965.
320. E. WALICKI, *Laminarna struga zatopiona cieczy lepkiej*, Zesz. Nauk. P. Ł. (Mech.), z. 15, (1965).
321. A. WERNER, *Nowy sposób pomiaru małych przepływów gazu*, Biul. ITC, nr 1 Gosp. Paliwami i Energ., (1965).
322. J. WIĘCKOWSKI, *Potencjał przepływu cieczy ściśliwej przy drganiach stacjonarnych belki pływającej o przekroju prostokątnym*, Pr. IMP, z. 28, (1965).
323. A. ZIABICKI, A. CYBULSKI, J. GROMADOWSKI, *Hydrodynamics of a free, steady state jet subject to axial tension. V, Numerical computation of the perturbation corrections for Newtonian jets*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 6, 13 (1965).
324. A. ZIABICKI, J. GROMADOWSKI, A. CYBULSKI, *Hydrodynamics of free steady state jet subject to axial tension. VI, Applicability regions of the theory for Newtonian liquids*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 13 (1965).

1966

325. B. BOJARSKI, *Subsonic flow of compressible fluid*, AMS, 4, 18 (1966).
326. M. BURNAT, *Theory of simple waves for nonlinear systems of partial differential equations of the first order and applications to gas dynamics*, AMS, 4, 18 (1966).
327. J. CHOMIAK, *Odbiór próbek przepływającego czynnika dwufazowego*, Pr. IMP, 29–31 (1966).
328. R. DŁUGOŁĘCKI, *Obliczanie przepływów oraz wybór parametrów geometrycznych i kształtu stopnia dławiącego w osiowych uszczelnieniach labiryntowych*, Pr. ITC, z. 28, (1966).
329. T. DROZD, *Wymiana ciepła przy burzliwym przepływie cieczy lepkiej w okrągłej rurze*, Rozp. Inż., 3, 14 (1966).
330. A. GLIKSON, B. KOWALSKI, M. ŁUNC, *Some new results in the first collision methods I*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 2, 14 (1966).
331. A. GLIKSON, B. KOWALSKI, M. ŁUNC, *Some new results in the first collision methods II*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11–12, 14 (1966).
332. Z. KAZIMIERSKI, *Płaski przepływ przez osiowy stopień maszyny przepływowej o dowolnych parametrach geometrycznych*, AH 2, 13 (1966).
333. P. KLIKOWSKI, *Przybliżony opis zewnętrznego przepływu płynów lepkich*, ZP (Mech.), 18 (137), (1966).
334. M. E. KLONOWSKA, E. ŁUCZYWEK, W. J. PROSNAK, *Wpływ liczby Macha i wykładnika izentropy na odległość fali uderzeniowej od podstawy walca kołowego opływającego osiowo-symetrycznie*, ABM, 3, 13 (1966).
335. L. KOBYLŃSKI, T. KORONOWICZ, A. ZBOROWSKI, *Comparative resistance and propulsion experiments with the victory ship models*, Pr. IMP, z. 33, (1966).
336. A. KONORSKI, *Zjawiska wymiany masy i energii w przepływie czynnika dwufazowego*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
337. A. KOWALEWICZ, *A simplified theory of the Ranque effect*, ABM, 4, 13 (1966).
338. W. KRAJ, *A simplified model of colmatage accompanied by diffusion process*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 8, 14 (1966).

339. B. KRAJEWSKI, *Wyznaczenie granicznej liczby Nusselta dla kanałów o zmiennej temperaturze ścianek*, ABM, 1, 13 (1966).
340. А. КШЫВИЦКИ, О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, *Метод сеток для нестационарных уравнений Навье—Стокса*, Тр. Мат. Инст. Стек., 92, (1966).
341. J. KRZYŻANOWSKI, *Warunki transportu fazy ciekłej do filmu wodnego łopatek turbin kondensacyjnych*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
342. J. KRZYŻANOWSKI, *Ruch filmu wodnego na powierzchni łopatki wirnikowej turbiny kondensacyjnej*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
343. B. LESZCZYŃSKI, *Kształt zwierciadła wody spływającej po statku w warunkach ruchu ustalonego przy stałej prędkości wsiąkania*, AH, 1, 13 (1966).
344. J. LITWINISZYN, *The phenomenon of colmatage*, AMS, 4, 18 (1966).
345. J. LITWINISZYN, *Colmatage accompanied by diffusion*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 4, 14 (1966).
346. J. LITWINISZYN, *Cauchy's problem in the process of colmatage accompanied by diffusion*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 14 (1966).
347. J. LITWINISZYN, *Colmatage scouring kinetics in the light of stochastic birth—death process*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 9, 14 (1966).
348. J. MĄCZYŃSKI, *The non-linear range of the Taylor instability in a porous medium*, Rev. Roum. Math. Pures at Appl., 4, 11 (1966).
349. W. MIODUSZEWSKI, W. WOLSKI, *Laboratoryjne pomiary ciśnienia wody w porach gruntu spoistego w warunkach filtracji*, AH, 1, 13 (1966).
350. E. NOWAK, *Obliczanie parametrów przepływu w rurze uderzeniowej z uwzględnieniem jonizacji*, Rozp. Inż., 2, 14 (1966).
351. M. NOWAK, *Solution of Poisson's equation for a certain system of oscillating airfoils in an incompressible flow*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 4, 14 (1966).
352. W. NOWAK, R. SOBAŃSKI, *Chłodzenie okrągłej rury porowatej gazem przenikającym przez ściankę*, ABM, 1, 13 (1966).
353. B. OTREMBA, *Teoria laminarnego przepływu cieczy lepkich w szczelinach*, ABM, 4, 13 (1966).
354. J. PAWLAK, *Badanie kawitacji w pompie promieniowej na stoisku o obiegu zamkniętym*, Pr. ITC, z. 30, (1966).
355. A. PIETRZAK, *Wpływ skończonej grubości skrzydeł śruby napędowej na rozkład prędkości lokalnych wokół symetrycznych profili śrubowych o zadanym kształcie*, Pr. IMP, 33, (1966).
356. Z. A. PIETRZYK, *Shock waves with strong ionizing action in hydrogen and nitrogen*, AMS, 3, 18 (1966).
357. W. J. PROSNAK, *Formulation of the inverse blunt-body problem in the frame of the method of integral relations*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 3, 14 (1966).
358. R. PUZYREWSKI, S. KRZECZKOWSKI, *Niektóre wyniki badań nad rozdrabnianiem warstewki wody i ruchem wody w śladzie aerodynamicznym*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
359. R. PUZYREWSKI, *Przepływ pary wodnej z kondensacją przez dyszę de Laval'a*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
360. R. PUZYREWSKI, *Pomiary grubości cienkich warstewek wody*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
361. R. RADWAN-DĘBSKI, *Podstawy hydrologiczne projektowania ujęć wody opadowej*, AH, 1, 13 (1966).
362. J. SKIEPKO, J. DAŁEK, *Application des ondes doubles concurrentes aux problèmes non stationnaires unidimensionnels avec des conditions aux limites discontinues*, AMS, 5, 18 (1966).
363. L. SOLARZ, *Aeromagnetic flutter of walls of a plane infinite channel*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 14 (1966).
364. K. STELLER, *Zasysanie powietrza przez turbinę wodną*, Pr. IMP, z. 33, (1966).
365. A. SZANIAWSKI, *The structure of a weak shock-wave in a viscous heat conducting fluid*, AMS, 2, 18 (1966).
366. R. SZEWAŁSKI, *The problem of erosion damage of turbine blading connected with two-phase flow*, Tran. ASME, J. of Eng. for Power, Nr 4, New York 1966.
367. R. SZEWAŁSKI, *Problematyka przepływu pary mokrej w części niskoprężnej turbin parowych wielkiej mocy*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).
368. R. SZEWAŁSKI, *Uwagi o kinematyce przepływu fazy ciekłej i jej konfrontacja z doświadczeniem eksploatacyjnym z zakresu erozji łopatek*, Pr. IMP, z. 29–31, (1966).

369. A. TARNOGRODZKI, *Waga aerodynamiczna do badania płatów strumieniowych*, ABM, 4, 13 (1966).
 370. A. TRZASKA, *Some remarks on colmatage in conditions of axisymmetric flow*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 14 (1966).

1967

371. B. BOCZAR-KARAKIEWICZ, *Wpływ uszczelnienia przegrody porowatej na wielkość i rozkład obciążeń hydraulicznych wywołanych działaniem fali na poziome elementy konstrukcyjne przegrody*, AH, 3, 14 (1967).
 372. B. BOJARSKI, *Subsonic flow of compressible fluid*, The Math. Prob. in fluid Mech., PWN, (1967).
 373. J. BONDER, *Sur la construction de solutions, relatives aux problèmes non stationnaires d'une classe des e'coulements compressibles*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
 374. M. BURNAT, *The method of solution of hyperbolic systems by means of combining simple waves*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
 375. M. BURNAT, *Theory of simple waves for nonlinear systems of partial differential equations of the first order and applications to gas dynamics*, The Math. Prob. in Fluid Mech., (1967).
 376. M. BURNAT, A. KIELBAŚIŃSKI, *Computation of three dimensional supersonic gas flow*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
 377. E. BURKA, *Investigation aerodynamiques du profil MHT-C-04-10-Type Carafoli*, Rev. Roum. Techn.-Mec. Appl., nr 2, 12 (1967).
 378. J. CHOMIAK, *Drop vibration produced by atomization*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
 379. W. FISZDON, J. T. SZUSTER, *Influence of a magnetic field on vorticity distribution in perfectly conducting incompressible viscous fluid flow in a channel*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
 380. A. GARDZILEWICZ, *Pomiar temperatury spiętrzenia w przepływie pary wodnej z kondensacją w dyszy* Pr. IMP, 38, (1967).
 381. J. JASIEWICZ, *Mass transfer coefficients at the surface of a sphere under forced convection*, ABM, 2, 14 (1967).
 382. W. M. JUNGOWSKI, *On the pressure oscillating in a sudden enlargement of a duct section*, F. Dyn. Tran. 3 (1967).
 383. J. KOŁODKO, *Grenzschichten hinter Stosswellen*, Pr. IMP, 34, (1967).
 384. S. KOSOWSKI, *Plane isentropic steady flow of an ideal relativistic gas with radiation in the state of local thermodynamics equilibrium*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
 385. A. KOWALEWICZ, *Some results of investigation of spark ignition of two-phase mixtures*, ABM, 4, 14 (1967).
 386. G. KOWALEWSKI, Z. ORZECZOWSKI, *Nowa metoda mikrofotograficznego badania rozpylania cieczy*, Materiały VI Zjazdu Katedr Termodynamiki, Łódź 1967.
 387. A. KRZYWICKI, *On a new finite-difference scheme for the non-stationary Navier-Stokes equations*, Bull. Acad. Pol. Sc. série des sc. math., astr. et phys., 15, no 6, (1967).
 388. A. KRZYWICKI, *On the regularity with respect to time of weak solutions of the Navier-Stockes equations (wspólna z K. K. Golovkinem)*, Colloquium Mathematicum 16, (1967).
 389. J. KRZYŻANOWSKI, *Ruch cienkiej warstwy cieczy na płaskiej wirującej płycie o promieniowej krawędzi natarcia*, Pr. IMP, z. 36, (1967).
 390. J. KRZYŻANOWSKI, *Ruch cienkiej warstwy cieczy na wklęsłej powierzchni łopatki wirnikowej turbiny kondensacyjnej*, Pr. IMP, z. 37, (1967).
 391. J. KRZYŻANOWSKI, *Osady soli jako materiał do badań ruchu filmu wodnego na powierzchni łopatek turbin kondensacyjnych*, Pr. IMP, z. 39, (1967).
 392. J. KRZYŻANOWSKI, R. SZEWAŁSKI, *Some experimental results on erosion impact damage of large steam turbine blading*, Tran. ASME, Cavi. Forum, 1967.
 393. J. KRZYŻANOWSKI, *Eine Analyse der Kollisionseffekte der Wassertropfen mit Laufschaufeln von Dampfturbinen und einige Versuchsergebnisse*, Pr. IMP, z. 42-43, (1967).
 394. B. LESZCZYŃSKI, *Rozwiązanie równania wolnozmiennającego się nieustalonego ruchu wody w warunkach nawodnienia stokowego*, AH, 3, 14 (1967).

395. J. LITWINISZYN, *Colmatage with reference to the model of a random walking particle*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 6, 15 (1967).
396. J. LITWINISZYN, *On sand displacements in the neighbourhood of an immobile vertical plane*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 7, 15 (1967).
397. J. LUBOŃSKI, *Initial phase of a strong shock wave development*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
398. J. MADEJSKI, *Stationary relaxation phenomena in forced convection heat transfer*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
399. J. MADEJSKI, *Simultaneous mass and heat transfer on an adsorbing porous sphere*, AMS, 2, 19 (1967).
400. S. MAY, *Fala uderzeniowa w wilgotnej mieszaninie parogazowej*, IBTP, Rep. 6/1967.
401. J. MACZYŃSKI, *An isothermal turbulent jet of an incompressible fluid in a coaxial surrounding uniform stream*, AMS, 1, 19 (1967).
402. Z. MUCHA, *Application of the Θ -pinch effect for generation of strong shock waves*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 1, 15 (1967).
403. J. NIESYTO, *Self-excited vibrations of an axially symmetric shell of finite length subjected to the action of internal supersonic flow*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 11, 15 (1967).
404. J. NIESYTO, *Supersonic potential flow inside of an axially symmetrical deformable shell of finite length*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
405. M. NOWAK, *Interaction of two airfoils oscillating harmonically in an incompressible flow*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
406. J. OTREMBĄ, *Przepływ laminarny cieczy lepkich w szczelinach pierścieniowych*, ABM, 3, 14 (1967).
407. H. PACZYŃSKA, *Rozkład wirowości w oscylującej warstwie przysiennej wokół cylindrycznego ciała*, Rozp. Inż., 2, 15 (1967).
408. A. PODSĘDKOWSKI, *Możliwości obniżenia poziomu hałasu wywołanego niejednorodnościami strumienia w wentylatorze osiowym*, Pr. ITC, z. 32, (1967).
409. Z. A. PIETRZYK, *Investigation of plasma behind a strong shock wave in an electromagnetic shock tube*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
410. Z. PIETRZYK, T. RUDOWSKA, *Ionized gas flow past a cylinder and a sphere*, AMS, 2, 19 (1967).
411. W. J. PROSNAK, J. M. BREITER, *Computation of flow around a blunt-body with a gaseous protective layer*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
412. W. J. PROSNAK, W. FISZDON, *A method for determination of hypersonic flow about a two-dimensional blunt body with an oscillating surface*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
413. W. J. PROSNAK, E. ŁUCZYWEK, *On the inverse asymmetric blunt body problem*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
414. R. PUZYREWSKI, S. KRZECZKOWSKI, *Ruch kropeł wody w śladzie aerodynamicznym*, Pr. IMP, z. 35, (1967).
415. R. PUZYREWSKI, *Perturbation analysis of condensation controlled by heat and mass transfer on large droplets*, IJH and M. Tran., 10 (1967).
416. K. STELLER, *Kierownice hydraulicznych maszyn odwracalnych*, Pr. IMP, z. 37, (1967).
417. K. STELLER, *Przepływ wody z powietrzem przez maszynę hydrauliczną*, Przegl. Mech., (1967).
418. A. SZANIAWSKI, *Two parametrical forms of the selfsimilar transonic Guderley-Frankl solutions*, Zeit. für A. Math. und Mech., 5, B 47 (1967).
419. A. SZANIAWSKI, *The asymptotic structure of weak shock waves in flows over symmetrical bodies at Mach number unity*, Gasdynamik KTH, Stockholm, 70, 1967.
420. A. SZANIAWSKI, *Some aspects of transonic flows in real fluids*, F. Dyn. Tran., 3 (1967).
421. B. SZCZENIOWSKI, *Flow of gas through an annular duct of constant cross-section*, ABM, 1, 14 (1967).
422. P. SZYMAŃSKI, *O niektórych przekształceniach równań Navier'a-Stokes'a*, Zesz. PW (Mech), 19 (147) (1967).
423. J. ŚMIGIELSKI, *Düsenströmung mit Wärmezufuhr und Ionisation im thermodynamischen Nichtgleichgewicht*, Pr. IMP, z. 34, (1967).
424. J. ŚWIĘCH, *Wybrane zagadnienia z teorii wirującego oderwania*, CMP, 63 (64) (1967).
425. A. TARNOWSKI, *Efforts hydrodynamiques exercés sur les vannes-batardeaux d'une bache de turbine de basse chute*, Bull. Acad. Pol. Sc. s. tech., 9, 15 (1967).

426. A. TARNOGRODZKI, E. ŁUCZYWEK, *Approximate method of determination of location of a sonic boom in accelerated motion of an aircraft*, AMS, 3, 19 (1967).
427. Z. A. WALENTA, *Optimalization of the parameters of a double diaphragm shock tube*, AMS, 5, 19 (1967).
428. W. ZIELKE, *A nonlinear approximation for weak hydromagnetic shock wave propagation*, F. Dyn. Tran. 3 (1967).
429. A. ŻABICKI, *Uwagi o pomiarze niestacjonarnych ciśnień za kołem roboczym*, CMP, 63/64, (1967).

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1969 r.



FIZYCZNE KONCEPCJE RÓWNAŃ KONSTITUTYWNYCH I TERMICZNIE AKTYWOWANE PROCESY DYSLOKACYJNE W METALACH

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

1. Wstęp. Założenia podstawowe

Obecnie uznaje się powszechnie, że natura deformacji plastycznej w metalach posiada charakter dynamiczny. Przejawem dynamicznych cech deformacji plastycznej są takie zjawiska, jak pełzanie i wrażliwość metali na prędkość odkształcenia oraz wpływ temperatury na krzywą umocnienia.

Zjawisko pełzania, które obserwuje się jako wydłużanie się próbki z czasem po przyłożeniu stałego naprężenia, jest w zasadzie zjawiskiem wysoko temperaturowym, jednak można je zaobserwować w całym zakresie temperatur począwszy od 0°K aż do temperatury topnienia danego metalu.

Innym przejawem jest zależność krzywych umocnienia metali od prędkości odkształcenia i temperatury.

Wszystkie wymienione zjawiska są ze sobą ściśle związane, a ich wzajemny związek może być wyjaśniony w oparciu o termicznie aktywowane procesy dyslokacyjne.

Porównując gazy i ciecze z ciałami stałymi, a w szczególności z metalami, dochodzi się do wniosku, że czasy relaksacji procesów molekularnych w gazach i w większości cieczy są zwykle tak krótkie, iż ośrodek znajduje się prawie zawsze w wyraźnym stanie równowagi. W tym przypadku molekularna struktura gazów i cieczy nie zależy od historii ośrodka. Przeciwnie, w strukturach krystalicznych czasy relaksacji procesów fizycznych związanych z deformacją plastyczną są tak długie, że stan równowagi nie zostaje nigdy praktycznie osiągnięty. Na przykład, wynikiem takiego zachowania się jest zjawisko umocnienia, gdzie dany metal zostaje wytrącony ze stanu bliskiego stanowi równowagi, tj. ze stanu wyżarzonego, poprzez deformację plastyczną.

Jeżeli założyć, że czasy relaksacji zmian strukturalnych wywołanych deformacją plastyczną są nieskończenie długie, wówczas naprężenie tnące τ jest jednoznacznie funkcją odkształcenia φ , prędkości odkształcenia η i temperatury T ,

$$(1.1) \quad \tau = \tau(\varphi, \eta, T).$$

Związek (1.1) stanowi więc znaną koncepcję mechanicznego równania stanu [1, 2, 3]. Należy się zatem spodziewać, że prawdopodobieństwo spełnienia związku (1.1) będzie większe w niskich temperaturach, tj. w otoczeniu 0°K. W zakresie wyższych temperatur mogą występować pewne procesy relaksacyjne, które prowadzą do niejednoznaczności

związku (1.1) i, jak to stwierdzono doświadczalnie, pojawiają się efekty historii prędkości odkształcenia [4, 5] i efekty historii temperatury [6, 7].

W obecnym stanie wiedzy wiele przytoczonych uprzednio faktów z makroskopowego zachowania się metali, znajdujących się w stanie plastycznym, można wyjaśnić na gruncie teorii dyslokacji. Wiadomo, że plastyczne odkształcenia są wynikiem przemieszczania się dyslokacji wewnątrz sieci krystalicznej, a więc proces ten jest związany z dynamiką dyslokacji. Ruchowi dyslokacji, która na swej drodze napotyka różne przeszkody towarzyszą oprócz przyłożonego naprężenia, wywołującego ruch, drgania termiczne atomów w sieci krystalicznej. Drgania te dostarczają dodatkowej niezbędnej energii na pokonanie przez dyslokację przeszkody i jej dalszy ruch. W ten sposób proces deformacji plastycznej może być uważany za proces termicznie aktywowany. Ponieważ jednocześnie może zachodzić więcej niż jeden typ procesu, przeto ogólnie procesy termicznie aktywowane można opisać zależnością

$$(1.2) \quad \eta_i = \nu_i(\tau, s, T) \exp - \left[\frac{U_i(\tau, s, T)}{kT} \right],$$

gdzie i odnosi się do i -tego rodzaju procesu, η jest prędkością odkształcenia przy czystym ścinaniu, ν oznacza współczynnik częstotliwości związany z częstotliwością drgań atomów w sieci krystalicznej, U oznacza średnią energię aktywacji, natomiast τ, s, T oraz k oznaczają odpowiednio naprężenie tnące, parametr strukturalny, temperaturę w skali absolutnej i stałą Boltzmanna.

Na uwagę zasługuje fakt, że strukturę określa się za pomocą pewnego parametru, który opisuje plastyczne zachowanie się polikryształu. Parametrem takim nie jest w tym przypadku miara odkształcenia. Jedynie w przypadku procesów, dla których s jest jednoznaczna funkcją φ , równanie (1.1) może być spełnione.

Z założenia energia aktywacji U_i jest malejącą, z reguły nieliniową funkcją naprężenia, gdyż naprężenie powoduje zmniejszenie dostarczanej przez fluktuacje cieplne energii, która jest niezbędna do pokonania przeszkód na drodze ruchu dyslokacji.

Z formalnego punktu widzenia funkcję $U_i(\tau, s, T)$ można rozłożyć w szereg Taylora w otoczeniu pewnej wartości naprężenia τ_G dla $s = \text{const}$ i $T = \text{const}$, jak to zrobiono w pracy [8], aby następnie znaleźć współczynniki szeregu na podstawie odpowiednio przeprowadzonych doświadczeń

$$(1.3) \quad [U_i(\tau, s, T)]_{s, T} = [U_i(\tau_G, s, T)]_{s, T} + \frac{d[U_i(\tau, s, T)]_{s, T}}{d\tau} (\tau - \tau_G) + \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2[U_i(\tau, s, T)]_{s, T}}{d\tau^2} (\tau - \tau_G)^2 + \dots,$$

gdzie τ_G stanowi atermiczną wartość pola naprężeń dalekiego oddziaływania, które musi zostać pokonane podczas ruchu dyslokacji. Równocześnie energia aktywacji U_i jest rosnącą funkcją temperatury T , gdyż w niskich temperaturach mogą jedynie zachodzić procesy charakteryzujące się niskimi wartościami energii aktywacji. W obszarze wyższych temperatur procesy o niskich wartościach U_i będą zachodzić prawie natychmiast, a zjawisko wpływu prędkości odkształcenia będzie zależeć od termicznej aktywacji procesów

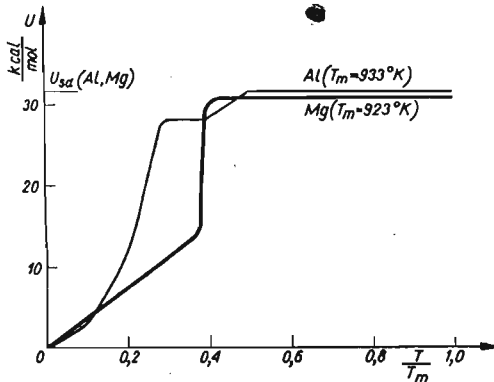
o większych wartościach energii aktywacji. W obszarze wysoko temperaturowym, tj. $T \geq \frac{1}{2} T_m$, gdzie T_m oznacza temperaturę topnienia, energia aktywacji U_i osiąga zazwyczaj najwyższe wartości i jest równa energii aktywacji samodyfuzji U_{sd} .

Reasumując

$$\lim_{T \rightarrow 0^\circ K} [U_i(\tau, s, T)]_{s, T} = 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow \frac{T_m}{2}} [U_i(\tau, s, T)]_{s, T} = U_{sd}.$$

Przy czym funkcja $[U_i(\tau, s, T)]_{s, T}$ nie zawsze wykazuje cechy funkcji ciągłej w pochodnej względem T . Jak stwierdzono doświadczalnie, funkcja U_i w mniejszym stopniu zależy od parametru struktury s [10, 11]. Doświadczalnie wyznaczone kształty funkcji energii aktywacji dla Al oraz Mg wg [9, 10, 11] przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

Funkcja ν_i natomiast zależy głównie, jak się wydaje, od parametru struktury s . Jednak ogólne zachowanie się tej funkcji jest dotychczas zbadane mniej dokładnie.

Z ogólnego punktu widzenia, podczas deformacji plastycznej może operować więcej niż jeden termicznie aktywowany mechanizm. Gdy poszczególne rodzaje mechanizmów są niezależne, wówczas wynikowa prędkość odkształcenia stanowi następującą sumę

$$(1.4) \quad \eta = \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Ponieważ, jak stwierdzono, deformacja plastyczna metali zachodzi wskutek ruchu defektów budowy krystalicznej, tj. dyslokacji, w ostatnich latach zwrócono szczególną uwagę na identyfikację poszczególnych termicznie aktywowanych mechanizmów związanych z ruchem dyslokacji.

2. Klasyfikacja mechanizmów dyslokacyjnych

Fakt, że poruszające się dyslokacje są liniowymi tworami geometrycznymi, przemieszczającymi się wzdłuż płaszczyzn poślizgu w trójwymiarowej sieci krystalicznej powoduje, że napotymane przeszkody oddziałują z dyslokacjami w zależności od ich

geometrycznych charakterystyk. Zgodnie z takim poglądem wszystkie przeszkody można podzielić na trzy klasy [12].

1. Przeszkody zlokalizowane, które oddziałują z dyslokacjami na ograniczonych odcinkach. Między odcinkami, gdzie dyslokacje są zakotwiczone, pętle dyslokacyjne wyginają się pod wpływem przyłożonego naprężenia na kształt łuku. Jednym z przykładów przeszkód tego typu mogą być lokalne pola naprężeń wywołane atomami domieszek.

2. Przeszkody liniowe, które zakotwiczą dyslokacje odcinkowo, a więc na przykład pola naprężeń samej sieci, tzw. bariery naprężenia Peierlsa-Nabarro.

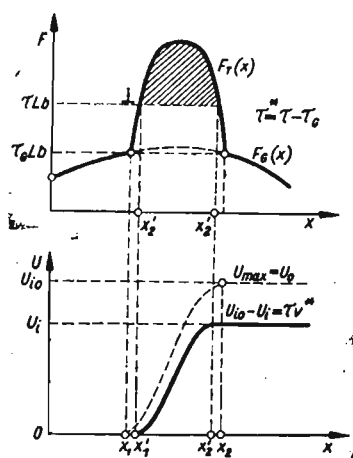
3. Przeszkody objętościowe, które wywołują pojawienie się mechanizmów dysypujących energię wskutek wzajemnej reakcji pól naprężenia poruszających się dyslokacji z różnymi oddziaływaniami w dużych objętościach sieci krystalicznej. Na przykład lepkość elektronowa pojawiająca się podczas ruchu superszybkich dyslokacji.

Niezależnie od wymienionego podziału, wszystkie przeszkody można sklasyfikować w zależności od zasięgu oddziaływania pola naprężeń, jakie wywołują w kryształach [13], a mianowicie:

A. Dalekiego oddziaływania, pole naprężeń większe niż 10 odstępów międzyatomowych.

B. Bliskiego oddziaływania, pole naprężeń mniejsze niż 10 odstępów międzyatomowych.

Energia, która musi być dostarczona do pokonania przez dyslokację pola dalekiego oddziaływania, jest zwykle tak duża, że drgania termiczne sieci nie są w stanie w jakikol-



Rys. 2

wiek sposób ułatwić pokonania takiej przeszkody. A więc przeszkody dalekiego oddziaływania są przeszkodami atermicznymi w dyskutowanym zakresie temperatur, tj. $T \leq 1/2 T_m$. Również przeszkody objętościowe są przeszkodami atermicznymi. Oczywiście określenie atermiczny nie oznacza, że krzywa umocnienia podczas dominacji procesu atermicznego jest niezależna od temperatury.

Natomiast wszystkie przeszkody bliskiego oddziaływania są termicznie aktywowane i są przeszkodami zlokalizowanymi, bądź liniowymi.

W oparciu o przedstawioną klasyfikację można wprowadzić podstawowe założenie, zwane założeniem superpozycji. Według tego założenia poruszająca się dyslokacja musi

pokonać pole sił, które stanowi superpozycję pól bliskiego i dalekiego oddziaływania. Sytuacja taka została przedstawiona schematycznie na rys. 2. Niech oś x oznacza kierunek ruchu dyslokacji, a dyslokacja znajduje się początkowo w punkcie $x = x'_1$. Oś rzędnych przedstawia siłę F , która działa na segment dyslokacji o długości L przeciwstawiając się jej ruchowi

$$(2.1) \quad F = \tau Lb,$$

gdzie τ oznacza przyłożone naprężenie tnące w płaszczyźnie ruchu dyslokacji, a b jest wektorem Burgersa.

Siłę będącą wynikiem pola naprężeń dalekiego oddziaływania oznaczono przez $F_G(x)$, natomiast charakterystykę siła–przemieszczenie dla pola bliskiego oddziaływania oznaczono przez $F_T(x)$. Jeżeli siła F wzrasta pod wpływem przyłożonego naprężenia, to w pewnym momencie osiągnie tak dużą wartość, że drgania termiczne sieci będą w stanie dostarczyć niezbędną dodatkową część energii i dyslokacja pokona przeszkodę. Dostarczona dodatkowo energia, która stanowi zakreskowane pole pod krzywą $F_T(x)$ jest właśnie energią aktywacji danego procesu U_i . Tak więc

$$(2.2) \quad U_i = \int_{x'_1}^{x'_2} F_T(x) dx,$$

lub

$$(2.3) \quad U_i = U_{i0} - \tau^* Lb(x'_2 - x'_1),$$

gdzie

$$(2.4) \quad U_{i0} = \int_{x_1}^{x_2} F_T(x) dx.$$

Energia U_{i0} stanowi maksymalną energię, która musi zostać dostarczona dla pokonania przeszkody i nosi nazwę energii przeszkody bliskiego oddziaływania. Wyrażenie $Lb(x'_2 - x'_1)$ nosi nazwę aktywowanej objętości i równanie (2.3) można napisać w postaci

$$(2.5) \quad U_i = U_{i0} - \tau^* v,$$

lub

$$(2.6) \quad U_i = U_{i0} - v(\tau - \tau_0).$$

Gdy ograniczyć się do wyrazu z pierwszą pochodną w szeregu (1.3), to wówczas

$$(2.7) \quad v = - \frac{d[U_i(\tau, s, T)]_{s, T}}{d\tau}.$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że zależność siła–przemieszczenie stanowi podstawową charakterystykę metalu dla aktualnie dominującego termicznie aktywowanego mechanizmu. Kształt tej charakterystyki dla wybranego modelu procesu wpływa na określone zachowanie się metalu. Dotychczas zaproponowano kilka podstawowych modeli termicznie aktywowanych procesów, a tym samym i odpowiednie kształty charakterystyki siła–przemieszczenie, jednak szczegółowe omówienie tych modeli wykracza poza ramy niniejszego opracowania.

Jeżeli zaniedbać wpływ struktury na kształt charakterystyki siła–przeszczenie i podstawić (2.6) do (1.2) równocześnie pomijając wpływ naprężenia na funkcję częstotliwości ν_i , wówczas otrzymuje się

$$(2.8) \quad \tau = \tau_G + \frac{1}{\nu} \left(U_{i0} + kT \ln \frac{\eta_i}{\nu_i(s, T)} \right),$$

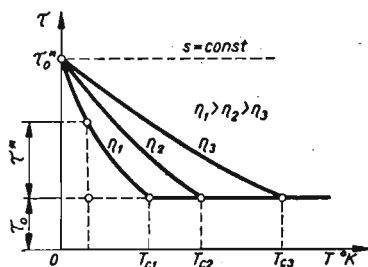
oznaczając

$$\tau^*(s, T, \eta) = \frac{kT}{\nu} \ln \frac{\eta_i}{\nu_i(s, T)}, \quad \tau_0(s) = \tau_G + \frac{U_{i0}}{\nu},$$

mamy

$$(2.9) \quad \tau = \tau_0(s) + \tau^*(s, T, \eta).$$

Tak więc, naprężenie plastycznego płynięcia τ składa się w tym przypadku z dwóch składowych, składowej atermicznej τ_0 , która jest zależna od temperatury jedynie poprzez moduł ścinania G i składowej termicznej τ^* , która zależy od temperatury i prędkości odkształcenia [13]. W ogólnym przypadku obydwie składowe są zależne od struktury.



Rys. 3

Rezultat ten został przedstawiony schematycznie na rys. 3. Przez τ_0 oraz τ^* oznaczono atermiczną i termicznie aktywowaną składową naprężenia. Składowa termicznie aktywowana zwiększa się przy wzroście prędkości odkształcenia. Przy wzroście temperatury osiąga się dla danej prędkości odkształcenia temperaturę krytyczną T_c , gdy całkowita energia na pokonanie przeszkody dostarczana jest przez fluktuacje cieplne, wówczas $\tau = \tau_0$ z zależności (2.8) mamy

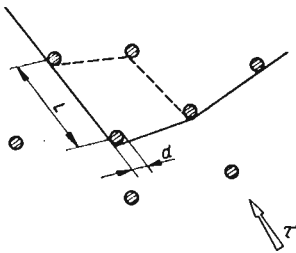
$$(2.10) \quad \eta_{ic} = \nu_i(s, T_c) \exp \left(- \frac{U_{i0}}{kT_c} \right).$$

W momencie osiągnięcia temperatury $T = 0^\circ\text{K}$ całkowita energia niezbędna na pokonanie przeszkody jest dostarczana przez odpowiednio duże naprężenie τ_0^* . Oczywiście jest wyobraźalne przekroczenie wartości naprężenia τ_0^* dla $T > 0^\circ\text{K}$, przy czym, w miarę wzrostu temperatury dla przekroczenia τ_0^* niezbędna jest coraz większa prędkość odkształcenia η_0 . Teoretycznie wyznaczone prędkości odkształcenia η_0 wynoszą około $\eta_0 \approx 10^3 \text{ sek}^{-1}$ dla $T \approx 290^\circ\text{K}$. Przy większych prędkościach odkształcenia, rzędu $10^4 \sim 10^6 \text{ sek}^{-1}$, sporym prawdopodobnie podczas propagacji fal uderzeniowych, musi zachodzić jakościowa zmiana mechanizmu pokonywania przeszkód przez dyslokacje.

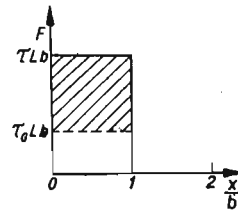
Należy również podkreślić, że otrzymane równanie konstytutywne (2.9) wykazuje analogiczną budowę jak równanie zaproponowane na drodze fenomenologicznej przez MALVERNA [14], z tą jednak różnicą, że w pracy [14] parametrem struktury jest odkształcenie. Analogia w budowie tych równań została wykazana na nieco innej drodze w pracy [15].

3. Mechanizm wzajemnych przecięć dyslokacji

Mechanizm wzajemnych przecięć poruszających się i zakotwiczonych dyslokacji został przedyskutowany przez SEEGERA [16] oraz przez wielu innych badaczy np. [17]. Na rys. 4 przedstawiono schemat tego mechanizmu, a na rys. 5 przyjętą charakterystykę siła–przeszczenie. W przypadku tego modelu przyjmuje się, że ruchoma dyslokacja przecina



Rys. 4



Rys. 5

las prostopadłych zakotwiczonych dyslokacji, a średnia odległość pomiędzy zakotwiczonymi dyslokacjami wynosi L . Funkcję częstotliwości przyjmuje się w formie niezależnej od naprężenia

$$(3.1) \quad v_i(s, T) = NAb^2 \frac{v_0}{L},$$

gdzie N oznacza liczbę przeszkód na jednostkę objętości, w punktach tych ruchome dyslokacje są w danej chwili zatrzymane, A oznacza powierzchnię, która zostaje pokryta podczas jednego przejścia dyslokacji przez przeszkodę, b jest wektorem Burgersa, v_0 oznacza częstotliwość Debye'a.

Równocześnie dzięki przyjęciu najprostszego wykresu siła–przeszczenie, rys. 5, aktywowana objętość wynosi

$$(3.2) \quad v = Lb^2.$$

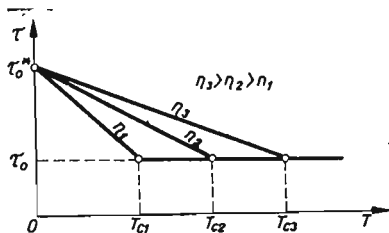
Stąd zgodnie z (2.8)

$$(3.3) \quad \tau = \tau_0 + \frac{1}{Lb^2} \left(U_0 + kT \ln \frac{\eta L}{NAb^2 v_0} \right), \quad T \leq T_c$$

$$\tau = \tau_0 \quad T \geq T_c.$$

Otrzymany wynik przedstawiono na rys. 6. W tym przypadku otrzymano liniową zależność naprężenia od temperatury oraz logarytmiczną od prędkości odkształcenia. Występują również dwa parametry strukturalne, mianowicie τ_0 oraz L .

Zależność (3.3) była wielokrotnie sprawdzana na drodze doświadczalnej wykazując zadowalającą zgodność. Przegląd wyników doświadczeń przeprowadzonych w tym celu zamieszczono na przykład w pracach [12, 17].



Rys. 6

4. Metodyka przeprowadzania doświadczeń

Celem przeprowadzania doświadczeń jest dostarczenie informacji o zachowaniu się poszczególnych parametrów wchodzących do uzyskanych równań konstytutywnych. Przede wszystkim należy poznać wartości energii aktywacji dla poszczególnych procesów i równocześnie zbadać ewentualne jej zmiany w funkcji temperatury, naprężenia i struktury.

Dla ilustracji problemu zostanie założona następująca postać równania konstytutywnego

$$(4.1) \quad \eta = v(v, T) \exp \left[- \frac{U_0 - v(\tau - \tau_G)}{kT} \right].$$

Niech poszukiwanymi doświadczalnie parametrami będą energia aktywacji U oraz aktywowana objętość v , wówczas na podstawie (4.1)

$$(4.2) \quad U = -k \left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial \frac{1}{T}} \right)_{\tau, v}$$

oraz

$$(4.3) \quad v = -kT \left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial \tau} \right)_T.$$

Pochodne w zależnościach (4.2) i (4.3) można otrzymać na drodze doświadczalnej zastępując przyrosty różnicami skończonymi.

Wszystkie możliwe pochodne, które można wyznaczyć doświadczalnie dają się sklasyfikować w zależności od typu doświadczenia.

A. Próba pełzania ze zmianą temperatury, $\tau = \text{const}$.

W przypadku tej próby zmienia się możliwie nagle, w pewnym wybranym momencie, temperaturę o ΔT rejestrując wywołaną zmianę prędkości odkształcenia. Wynikiem jest doświadczalnie wyznaczona pochodna

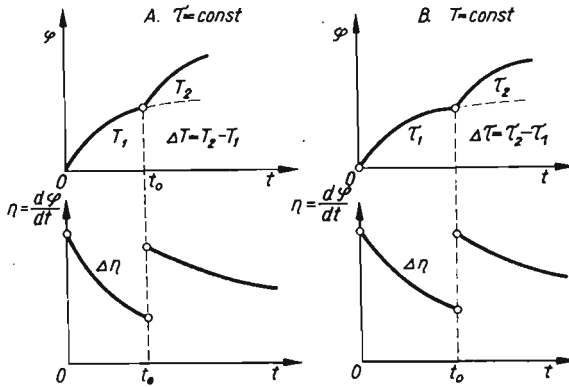
$$\left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial \frac{1}{T}} \right)_{\tau} = \frac{\ln \frac{\eta_2}{\eta_1}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}, \quad \Delta T = T_2 - T_1.$$

B. Próba pełzania ze zmianą naprężenia, $T = \text{const}$.

W przypadku tej próby mierzy się przyrost prędkości odkształcenia spowodowany nagłym przyrostem naprężenia. Jako wynik otrzymuje się pochodną

$$\left(\frac{\partial \ln \eta}{\partial \tau}\right)_T = \frac{\ln \frac{\eta_2}{\eta_1}}{\tau_2 - \tau_1}, \quad \Delta \tau = \tau_2 - \tau_1.$$

Schemat prób A. oraz B. przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7

C. Próba w jednoosiowym stanie naprężenia (rozciąganie, ściskanie, skręcanie) ze zmianą temperatury, $\eta = \text{const}$.

Podczas próby przeprowadzanej przy stałej prędkości odkształcenia zmienia się nagle temperaturę przy wybranej wartości odkształcenia φ . Mierzone przyrosty wyznaczają następującą pochodną

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_{\eta, \varphi} = -\frac{\tau_2 - \tau_1}{T_2 - T_1}, \quad \begin{aligned} -\Delta \tau &= \tau_2 - \tau_1, \\ \Delta T &= T_2 - T_1. \end{aligned}$$

D. Próba w jednoosiowym stanie naprężenia ze zmianą prędkości odkształcenia, $T = \text{const}$.

Podczas próby przeprowadzanej w stałej temperaturze zmienia się skokowo prędkość odkształcenia, w ten sposób można wyznaczyć pochodną

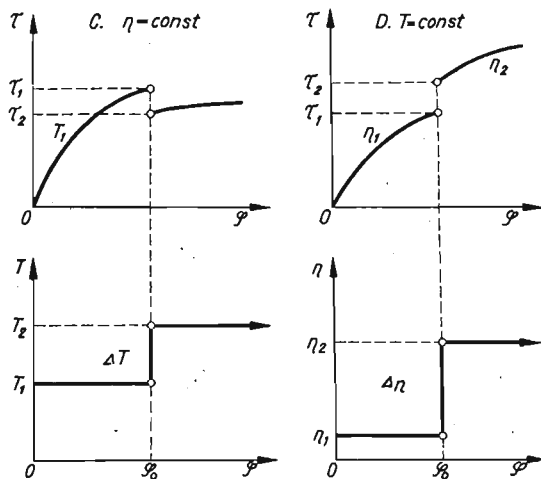
$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \ln \eta}\right)_{T, \varphi} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\ln \frac{\eta_2}{\eta_1}}, \quad \begin{aligned} \Delta \tau &= \tau_2 - \tau_1, \\ \Delta \ln \eta &= \ln \eta_2 - \ln \eta_1. \end{aligned}$$

Schemat prób C. oraz D. został przedstawiony na rys. 8. Wszystkie cztery przedstawione schematy pozwalają na doświadczalne wyznaczenie odpowiednich pochodnych, które z kolei służą za podstawę do wyznaczenia szukanych parametrów w otrzymanych równaniach konstytutywnych.

W świetle naszkicowanej teorii wyłania się możliwość uzyskiwania informacji o zachowaniu się poszczególnych mechanizmów dyslokacyjnych na podstawie odpowiednio przeprowadzanych doświadczeń w skali makroskopowej. Wiele z uzyskanych w ten sposób

информации zostało potwierdzonych na drodze bezpośredniej obserwacji z użyciem mikroskopii elektronowej.

Wydaje się, że w ten sposób mogą w przyszłości zostać stworzone fizyczne podstawy dla poprawnego konstruowania równań konstytutywnych w teorii plastyczności.



Rys. 8

Literatura cytowana w tekście

1. P. LUDWIK, *Elemente der Technologischen Mechanik*, J. Springer, 1909.
2. J. H. HOLLOMON, *Trans. AIME*, **171** (1947), 535.
3. J. KLEPACZKO, *Rozprawy Inżynierskie*, **3**, 13 (1965), 561.
4. J. KLEPACZKO, *Arch. Mech. Stosowanej*, **2**, 19 (1967), 211.
5. J. KLEPACZKO, *Journ. Mech. Phys. of Solids*, **4**, 16 (1968), 255.
6. T. A. TROZERA, O. D. SHERBY, J. E. DORN, *Trans. ASM*, **49** (1956).
7. T. E. TIETZ, J. E. DORN, *Trans. ASM*, **41A** (1949), 163.
8. U. S. LINDHOLM, *Behavior of Materials Under Dynamic Loading*, Ed. ASME, (1965).
9. O. D. SHERBY, J. L. LYTTON, J. E. DORN, *Acta Met.*, **5** (1957), 219.
10. H. CONRAD, L. HAYS, G. SCHOECK, H. WIEDERSICH, *Acta Met.*, **9** (1961), 367.
11. H. CONRAD, R. ARMSTRONG, H. WIEDERSICH, G. SCHOECK, *Phil. Mag.*, **6** (1961), 177.
12. J. E. DORN, Lawrence Radiation Laboratory, Berkeley, California, Report UCRL — 17521.
13. H. CONRAD, *Journ. of Metals*, **7**, 16 (1964), 582.
14. L. E. MALVERN, *Journ. Appl. Mech.*, **18** (1951), 203.
15. U. S. LINDHOLM, *Journ. Mech. Phys. of Solids*, **12** (1964), 317.
16. A. SEEGER, *Phil. Mag.*, **46** (1955), 1194.
17. J. E. DORN, J. MITCHELL, F. HAUSER, *Experimental Mech.*, **11**, 5 (1965).

Резюме

ФИЗИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И ТЕРМИЧЕСКИ АКТИВИРОВАННЫЕ ДИСЛОКАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕТАЛЛАХ

Темой работы является обсуждение термически активированных дислокационных процессов в металлах и их соотношение с влиянием скорости деформации и температуры на кривую упрочнения.

Обсуждаются основные предположения принятые в этого рода теории, а также и модель взаимных сечений подвижных дислокаций с закрепленными.

В заключение, даются типовые схемы экспериментов, которые можно использовать для проверки обсуждаемой теории.

S u m m a r y

PHYSICAL CONCEPTS IN THE CONSTITUTIVE EQUATION AND THERMALLY ACTIVATED PROCESSES IN METALS

The aim of this work is to discuss up-to-date knowledge of the thermally activated dislocation processes in metals and involved interrelation between temperature and strain-rate effects.

In addition, the fundamentals have been discussed for the theory of this kind and, as an example, the Seeger's model of intersections of forest dislocations has been shown.

Finally, the experimentally possible situations are introduced which should be useful in verification of the theory.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji 21 listopada 1968 r.

ZASTOSOWANIE GRAFÓW PRZEPŁYWU DO PEWNYCH ZAGADNIENÍ
MECHANIKI BUDOWLI

JACEK PIETRZAK, KAZIMIERZ WRZEŚNIEWSKI (POZNAŃ)

Artykuł niniejszy zawiera omówienie grafów przepływu, ich koncepcji oraz sposobu rozwiązywania. Rozpatrywany typ grafów, zaproponowany przez MASONA [6], stanowiący pewien system algebry graficznej, ze względu na swój ogólny charakter wykorzystywany może być w dziedzinach różniących się znacznie charakterem fizycznym od dziedzin zasadniczych zastosowań — elektroniki, elektrotechniki, teorii modelowania. Celem artykułu jest zwrócenie uwagi na stosunkowo mało znany w kraju aspekt zastosowań grafów przepływu do zagadnień mechaniki budowli. W dziedzinie tej grafy przepływu wykorzystywane mogą być dla graficznej reprezentacji metod obliczeniowych, co poza korzyściami natury pojęciowej [1, 2, 4] pozwala osiągnąć w pewnych przypadkach również oszczędności w zakresie nakładu pracy obliczeniowej [3].

1. Wprowadzenie

1.1. Rozważmy zbiór A złożony z elementów $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ o przyporządkowanych im znakach punktu, zwanych dalej *wierzchołkami*. Z elementów zbioru A utwórzmy

	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n	a_{n+1}
a_1	R	R		R		R	
a_2	R	R		R		R	
...							
a_i	R	R		R		R	
...							
a_n	R	R		R		R	
a_{n+1}	R	R		R		R	

Rys. 1

iloczyn kartezjański $A \times A$ i określmy w zbiorze A relację połączeń zorientowanych R (rys. 1) zdefiniowaną następująco:

$a_i R a_j \Leftrightarrow a_{ij} = 1$, gdy istnieje połączenie między elementami a_i oraz a_j , w kierunku od i do j . Relacji R przyporządkujemy znak linii łączącej wierzchołek a_i z wierzchołkiem a_j ,

opatrzonej strzałką wskazującą kierunek połączenia, zwanej dalej *krawędzią zorientowaną* b_{ij} .

Zbiór wierzchołków oraz krawędzi zorientowanych będziemy nazywali *grafem skierowanym*.

1.2. Rozważmy układ n niezależnych równań liniowych, zapisanych w formie równania macierzowego:

$$(1.2.1) \quad \mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Wykorzystując pojęcie macierzy jednostkowej \mathbf{E} (o wymiarze $n \times n$) zapiszmy równanie (1.2.1) w równoważnej postaci:

$$(1.2.2) \quad [\mathbf{F} + \mathbf{E} \quad -\mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

O macierzy \mathbf{Y} założmy, że można ją przedstawić jako iloczyn

$$(1.2.3) \quad \mathbf{Y} = y_{n+1} \mathbf{K} = \mathbf{K}y_{n+1}$$

dowolnie obranego parametru y_{n+1} , zwanego również źródłem Z układu oraz wynikającej z tego doboru macierzy \mathbf{K} . W poniższych rozważaniach przyjmijmy jako wartość parametru y_{n+1} jedność.

Wprowadzając zależność (1.2.3) do równania (1.2.2) możemy napisać:

$$[\mathbf{F} + \mathbf{E} \quad -\mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{K}y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Wykorzystajmy własności macierzy jednostkowej:

$$-\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}y_{n+1} = -\mathbf{K}\mathbf{E}y_{n+1} = -\mathbf{K}y_{n+1}$$

i zapiszmy powyższe równanie w następującej postaci:

$$(1.2.4) \quad [\mathbf{F} + \mathbf{E} \quad -\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{X}.$$

Z pierwszej macierzy występującej w równaniu (1.2.4), poprzez dodanie wiersza o elementach zerowych, utwórzmy macierz kwadratową:

$$(1.2.5) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{E} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

i poddajmy ją transpozycji. Otrzymamy wówczas macierz \mathbf{C} :

$$(1.2.6) \quad \mathbf{C} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{F} + \mathbf{E})^T & \mathbf{O} \\ -\mathbf{K}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T + \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{K}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

1.3. Weźmy pod uwagę graf skierowany, zdefiniowany w punkcie 1.1. oraz układ równań określony w punkcie 1.2. Wierzchołki grafu a_1, a_2, \dots, a_n oraz a_{n+1} potraktujemy odpowiednio jako reprezentację zmiennych zależnych X_1, X_2, \dots, X_n oraz źródła y_{n+1} układu równań (1.2.1). Krawędziom b_{ij} grafu przyporządkujemy odpowiednio wielkości C_{ij} , zwane dalej *transmitancjami*, będące elementami macierzy \mathbf{C} .

Dla grafu skierowanego, o nadanej w ten sposób interpretacji, zdefiniujemy operacje dodawania i mnożenia przez operator, określając wielkość zmiennej X_j , reprezentowanej przez j -ty węzeł grafu, jako sumę iloczynów utworzonych z transmitancji C_{ij} krawędzi b_{ij} dochodzących do j -tego węzła oraz zmiennych węzłów początkowych tych gałęzi:

$$(1.3.1) \quad X_j = \sum_i C_{ij} X_i + C_{i, n+1} y_{n+1}.$$

	$F X = Y = K y_{n+1}$	$C = \begin{bmatrix} F^T E & 0 \\ -K^T & 0 \end{bmatrix}$
	$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix};$ $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}; y_{n+1} = y_3 = z_1$	$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} a_{11} + 1 a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} + 1 0 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}$
	$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix};$ $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}; y_{n+1} = y_4 = z_1$	$C = \begin{bmatrix} a_{11} + 1 a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} + 1 a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + 1 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix}$
	$F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}; y_{n+1} = y_5 = z_1$	$C = \begin{bmatrix} a_{11} + 1 & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + 1 \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & 0 \\ a_{32} & a_{42} & 0 \\ a_{33} + 1 & a_{43} & 0 \\ a_{34} & a_{44} + 1 & 0 \\ -k_3 & -k_4 & 0 \end{bmatrix}$

Rys. 2

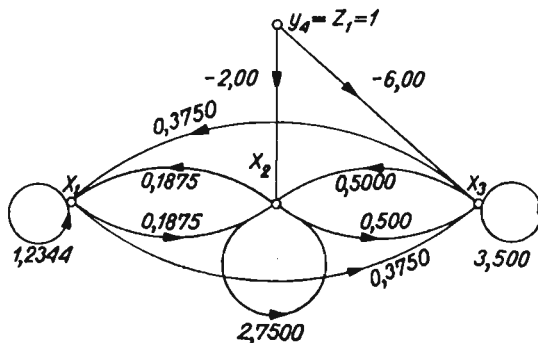
Graf o określonych powyżej właściwościach, reprezentujący w sposób jednoznaczny układ równań liniowych, będziemy nazywali *grafem przepływu*. Na rys. 2 przedstawiono grafy przepływu odnoszące się kolejno do układów dwóch, trzech i czterech równań liniowych. Na podstawie powyższych schematów nietrudno narysować jest strukturę grafu dla układu równań liniowych o dowolnej liczbie niewiadomych.

2. Rozwiązanie grafu

2.1. Przez *rozwiązanie grafu przepływu* rozumiane jest określenie na podstawie grafu wybranych zmiennych zależnych jako funkcji zmiennych niezależnych. Rozwiązanie otrzymane może być za pomocą *metody redukcji*, polegającej na przekształceniu grafu pierwotnego w graf zastępczy, w którym uwidocznione są bezpośrednie relacje między wybraną zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi albo za pomocą *metody bezpośredniej*, wykorzystującej regułę MASONA [6], według której wielkość zmiennej zależnej X_j wynosi*:

$$(2.1.1) \quad X_j = \frac{\sum_k G_k D_k}{D} y_{n+1},$$

gdzie y_{n+1} jest źródłem układu. Pozostałe wielkości występujące we wzorze (2.1.1), ustalone na podstawie inspekcji grafu, oznaczają odpowiednio: transmitancję (G_k) *ścieżki otwartej* $y_{n+1} \div X_j$, czyli transmitancję takiego ciągu zgodnych skierowanych krawędzi,



Rys. 3

biegnących od wierzchołka y_{n+1} do wierzchołka X_j , który nie przechodzi przez żaden wierzchołek więcej niż jeden raz; *wyznacznik* (D_k) części grafu, która nie styka się z k -tą ścieżką otwartą; *wyznacznik* (D) grafu.

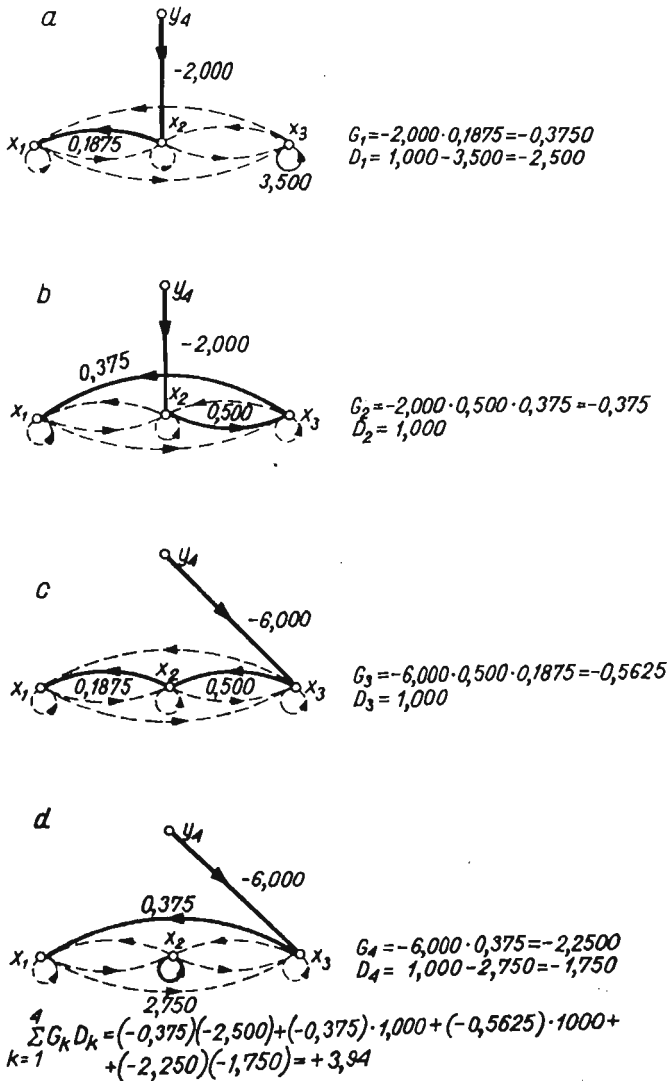
Wyznacznik grafu (lub części grafu) obliczany jest za pomocą wzoru*

$$(2.1.2) \quad D = 1 - \sum P_{m1} + \sum P_{m2} - \sum P_{m3} + \dots,$$

w którym P_{mn} jest iloczynem transmitancji w m -tej kombinacji n — nie stykających się z sobą pętli.

Jeżeli graf posiada kilka źródeł: $Z_1 = y_{n+1}$; $Z_2 = y_{n+2}$; $Z_3 = y_{n+3}, \dots$, co zachodzi, gdy graf reprezentuje kilka powiązanych ze sobą układów równań, wtedy przy obliczaniu

* wyprowadzenie wzorów (2.1.1) i (2.1.2) można znaleźć również w pozycji [7] (s. 27-29).



Rys. 4

zmiennych zależnych za pomocą wyrażenia (2.1.1) stosujemy superpozycję wpływów poszczególnych źródeł.

2.2. Przykład. Dla zilustrowania metody bezpośredniej rozważmy graf z rys. 3 reprezentujący układ równań:

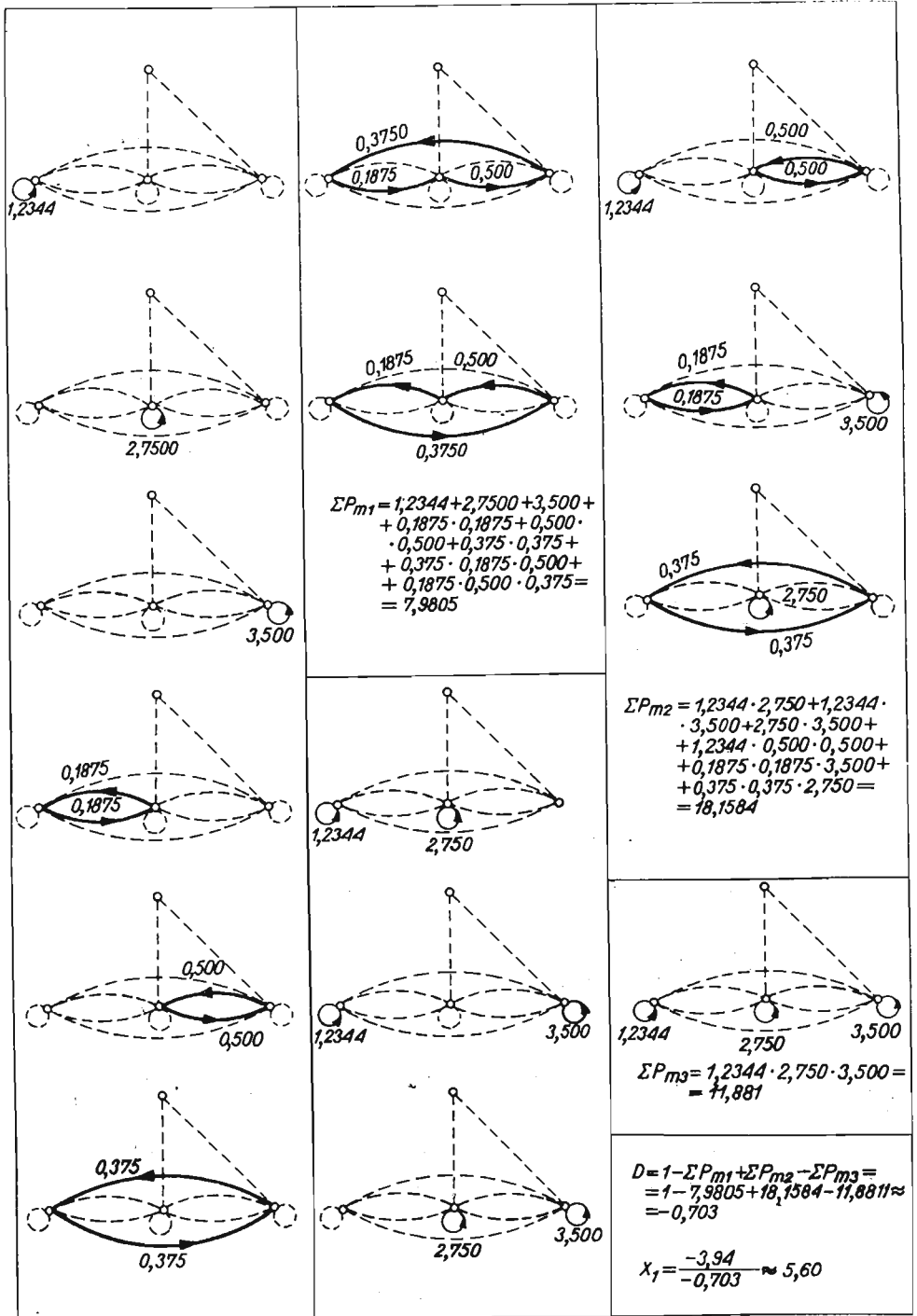
$$0,2344 X_1 + 0,1875 X_2 + 0,375 X_3 = 0,0,$$

$$0,1875 X_1 + 1,7500 X_2 + 0,5000 X_3 = 2,0,$$

$$0,375 X_1 + 0,5000 X_2 + 2,5000 X_3 = 6,0.$$

Analizę grafu prowadzącą do określenia wielkości X_1 podano na rys. 4 i 5.

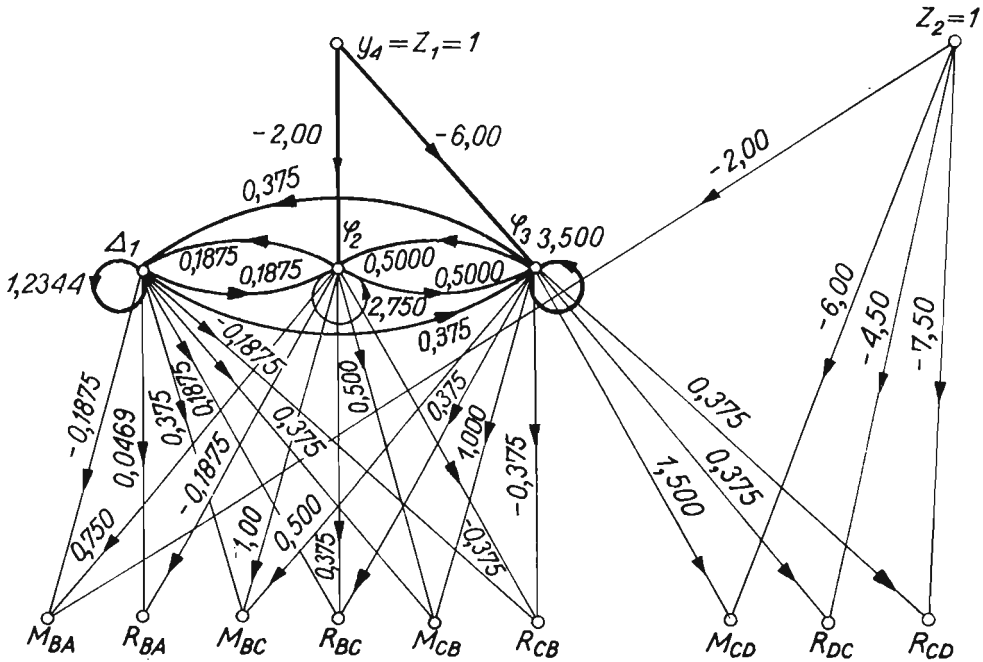
Pozostałe zmienne X_2 i X_3 obliczono w sposób podobny; wynoszą one odpowiednio 0,87 i 3,07.



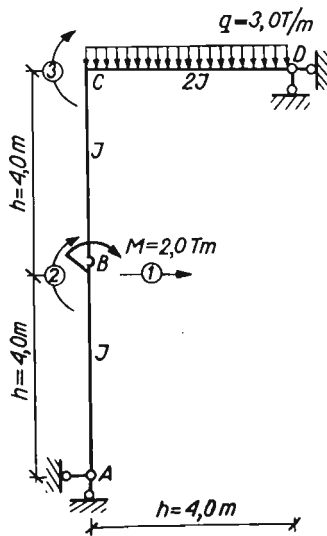
Rys. 5

3. Zastosowania

Charakter grafów przepływu, omówiony powyżej, implikuje możliwości wykorzystania ich w mechanice budowli do obrazowego przedstawienia struktury obliczeń statycznych — zarówno ich fragmentu, jak i całego kompleksu — przy czym narysowanie grafu przepływu reprezentującego dany układ dokonane może być niejednokrotnie wyłącznie



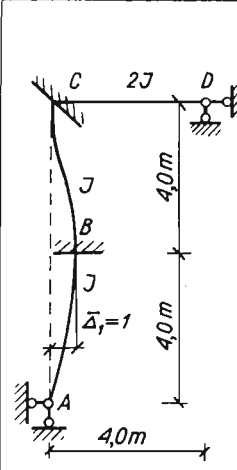
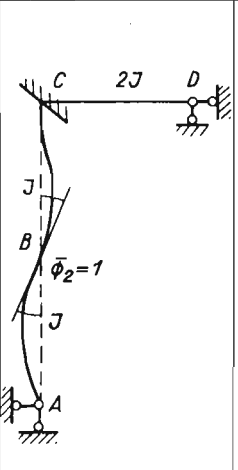
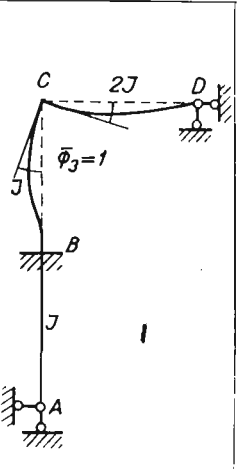
Rys. 6



Rys. 7

na podstawie bezpośredniej analizy układu, tj. bez zapisywania równań charakteryzujących układ.

Na rys. 6 zamieszczono przykład grafu przepływu odnoszącego się do obliczania sił poprzecznych i momentów zginających w ramie przedstawionej na rys. 7. Część grafu wyróżniona grubszą linią reprezentuje układ równań kanonicznych metody odkształceń; część pozostała odnosi się do obliczenia wielkości momentów i sił poprzecznych w oparciu o rzeczywiste wielkości Δ_1 , φ_2 i φ_3 oraz wielkości *momentów i sił wyjściowych*. Obie części grafu połączone ze sobą pozwalają na wyznaczenie na ich podstawie dowolnej ze zmiennych zależnych: M_{BA} , R_{BA} , M_{BC} , ..., R_{DC} bez konieczności liczbowego określenia przemieszczeń Δ_1 , φ_2 i φ_3 . Podstawą ustalenia transmitancji gałęzi grafu z rys. 6 jest analiza przedstawiona na rys. 8.

		
$\bar{\Delta}_1=1$	$\bar{\varphi}_2=1$	$\bar{\varphi}_3=1$
$M_{BA}^{\bar{\Delta}_1=1} = -\frac{3EJ}{4^2} = -0,1875EJ$	$M_{BA}^{\bar{\varphi}_2=1} = \frac{3EJ}{4} = 0,750EJ$	$M_{BA}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0$
$R_{BA}^{\bar{\Delta}_1=1} = +0,0469EJ$	$R_{BA}^{\bar{\varphi}_2=1} = -0,1875EJ$	$R_{BA}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0$
$M_{BC}^{\bar{\Delta}_1=1} = \frac{6EJ}{4^2} = +0,375EJ$	$M_{BC}^{\bar{\varphi}_2=1} = \frac{4EJ}{4} = EJ$	$M_{BC}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,5EJ$
$R_{BC}^{\bar{\Delta}_1=1} = +0,1875EJ$	$R_{BC}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0,375EJ$	$R_{BC}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,375EJ$
$M_{CB}^{\bar{\Delta}_1=1} = +0,375EJ$	$M_{CB}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0,500EJ$	$M_{CB}^{\bar{\varphi}_3=1} = EJ$
$R_{CB}^{\bar{\Delta}_1=1} = -0,1875EJ$	$R_{CB}^{\bar{\varphi}_2=1} = -0,375EJ$	$R_{CB}^{\bar{\varphi}_3=1} = -0,375EJ$
$M_{CD}^{\bar{\Delta}_1=1} = 0$	$M_{CD}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0$	$M_{CD}^{\bar{\varphi}_3=1} = \frac{3E \cdot 2J}{4} = 1,5EJ$
$R_{DC}^{\bar{\Delta}_1=1} = 0$	$R_{DC}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0$	$R_{DC}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,375EJ$
$R_{CD}^{\bar{\Delta}_1=1} = 0$	$R_{CD}^{\bar{\varphi}_2=1} = 0$	$R_{CD}^{\bar{\varphi}_3=1} = 0,375EJ$

Rys. 8

Zamieszczone na rys. 8 rozwiązanie grafu, z uwagi na przykładowy charakter, dotyczy tylko jednej zmiennej zależnej — wielkości momentu zginającego M_{BA} :

$$M_{BA} = \sum_{k=1}^7 \frac{G_{1k} D_{1k}}{D_1} Z_1 + \frac{G_2 D_2}{D_2} Z_2,$$

gdzie:

$$G_{11}(y_4, \varphi_2, \Delta_1, M_{BA}) = (-2) \cdot 0,1875 (-0,1875) = 0,0703,$$

$$G_{21}(y_4, \varphi_2, \varphi_3, \Delta_1, M_{BA}) = (-2) \cdot 0,500 \cdot 0,375 (-0,1875) = 0,0703,$$

$$G_{31}(y_4, \varphi_3, \varphi_2, \Delta_1, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,500 \cdot 0,1875 (-0,1875) = 0,1054,$$

$$G_{41}(y_4, \varphi_3, \Delta_1, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,375 (-0,1875) = 0,4218,$$

$$G_{51}(y_4, \varphi_2, M_{BA}) = (-2) \cdot 0,750 = -1,500,$$

$$G_{61}(y_4, \varphi_3, \varphi_2, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,500 \cdot 0,750 = -2,250,$$

$$G_{71}(y_4, \varphi_3, \Delta_1, \varphi_2, M_{BA}) = (-6) \cdot 0,375 \cdot 0,1875 \cdot 0,750 = -0,3164,$$

$$D_1 = -0,703; \quad D_{11} = -2,500; \quad D_{21} = 1,0; \quad D_{31} = 1,0; \quad D_{41} = -1,750 \text{ (por. przykład poprzedni),}$$

$$D_{51} = 1 - (1,2344 + 3,500 + 0,375^2) + 1,2344 \cdot 3,500 = 0,4454,$$

$$D_{61} = 1 - 1,2344 = -0,2344,$$

$$D_{71} = 1,00; \quad Z_1 = 1,$$

$$G_{21} = -2,00; \quad D_{21} = 1,0; \quad D_2 = 1,0; \quad Z_2 = 1,$$

$$\text{stąd} \quad M_{BA} = \frac{-1,196}{-0,703} - 2,0 = -0,300 \text{ Tm.}$$

Wielkości pozostałych sił przekrojowych wyznaczone być mogą w analogiczny sposób przy wykorzystaniu grafu z rys. 6.

Jak wspomniano na wstępie niniejszego artykułu, zastosowanie grafów przepływu przy rozwiązywaniu równań może w niektórych wypadkach dać znaczne zaoszczędzenie na pracy obliczeniowej. Szczegółowe dane, przykładowe, w odniesieniu do równań typu:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{1p} = 0,$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{2p} = 0,$$

.....

$$a_{i(i-1)} X_{i-1} + a_{ii} X_i + a_{i(i+1)} X_{i+1} + a_{ip} = 0,$$

.....

$$a_{n(n-1)} X_{n-1} + a_{nn} X_n + a_{np} = 0,$$

tj. równań często spotykanych również w mechanice, można znaleźć w pracy [3]. Porównanie, jakie przeprowadzili tam autorzy, dotyczące nakładu pracy dla podanego powyżej układu równań przy zastosowaniu różnych metod obliczeniowych, wykazało przewagę metody omawianej w artykule nad metodami dotychczas stosowanymi.

Literatura cytowana w tekście

1. Chuan C. FENG, Richard D. BENTON, *Flow graph of moment distribution*, Journal of the Structural Division, April 1964, Proc. ASCE.
2. Chuan C. FENG, Kenneth A. STEAD, *Slope deflection and moment flow graphs*, J. Str. Div., June 1967, Proc. ASCE.
3. Chuan C. FENG, Larry J. FEESTER, *Flow solutions of band matrix problems*, Journal of the Engineering Mechanics Division, February 1966, Proc. ASCE.
4. Kurt H. GERSTLE, *Flow graphs in structural analysis*, J. Str. Div., October 1960, Proc. ASCE.
5. J. KOLENDOWSKI, *Znaczenie grafów i teorii grafów*, Przegląd Elektrotechniczny, Styczeń 1967.
6. S. J. MASON, *Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. Inst. Radio Engers, USA, 1953, Vol. 41.
7. L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przepływu sygnałów*, PWN, Warszawa 1968 (tłum. z j. franc.).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ТЕЧЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ СООРУЖЕНИЙ

В статье обсуждается концепция графов и указывается возможность их использования в статическом анализе стержневых систем. Рассуждения иллюстрируются числовыми примерами, один из которых касается расчета сил поперечных сечений, в простой статически неопределимой раме.

Summary

APPLICATION OF FLOW GRAPHS TO SOME PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS

A general idea of flow graphs is derived in the paper. The paper contains also considerations of possible application of the graphs in the structural analysis. Some numerical examples are enclosed.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1968 r.

OBSZAR KONTAKTU SZTYWNEJ KULI Z PÓŁPRZESTRZENIĄ LEPKOSPĘŻYSTĄ

JADWIGA H A L A U N B R E N N E R I BRONISŁAW L E C H O W I C Z (KRAKÓW)

1. Wprowadzenie

Badaniem narastania z czasem powierzchni rzeczywistego kontaktu dwu ciał stałych w obrębie kontaktu nominalnego zajmowało się kilku autorów, rozpatrując wpływ tego procesu na wzrost tarcia statycznego. W pracy przedstawionej poniżej badano zależność powierzchni nominalnego kontaktu od czasu dla sztywnej kuli przyciskanej stałą siłą normalną do półprzestrzeni lepkospężystej.

Problem kontaktu dwu ciał sprężystych, izotropowych, ograniczonych powierzchniami drugiego stopnia i przyciskanych do siebie stałą siłą P , normalną do ich wspólnej powierzchni stycznej, rozwiązał HERTZ [1] przy następujących założeniach: a) oba ciała stosują się do prawa Hooke'a, b) przez powierzchnię kontaktu nie przenoszą się naprężenia styczne, c) rozmiary liniowe obszaru kontaktu są dużo mniejsze od rozmiarów ciał ściskanych. W przypadku sztywnej kuli i półprzestrzeni sprężystej i izotropowej, obszar kontaktu jest kołem o promieniu a danym wzorem

$$a^3 = \frac{3P}{4} \cdot \frac{1-\nu^2}{E} R,$$

gdzie E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona materiału podstawy, zaś R promień kuli. W przypadku tym, po przyłożeniu siły, powierzchnia kontaktu ustala się bardzo szybko, tym szybciej, im rozmiary ciał stykających się są mniejsze. Decyduje o tym prędkość rozchodzenia się fal sprężystych w ośrodku i ich tłumienie. W przypadku ciał lepkospężystych, po przyłożeniu siły ściskającej, obszar kontaktu narasta z czasem i może się ustalić, lub też narastać stale, jeżeli materiał podstawy okazuje nieodwracalne lepkie płynięcie.

Problem wciskania sztywnej, gładkiej kuli w półprzestrzeń lepkospężystą i nieściśliwą ($\nu = 0,5$) rozwiąziali teoretycznie LEE i RADOK [2]. Zakładając liniowy model reologiczny i przykładając do kuli siłę $PH(t)$, uzyskali na promień koła styku wzór

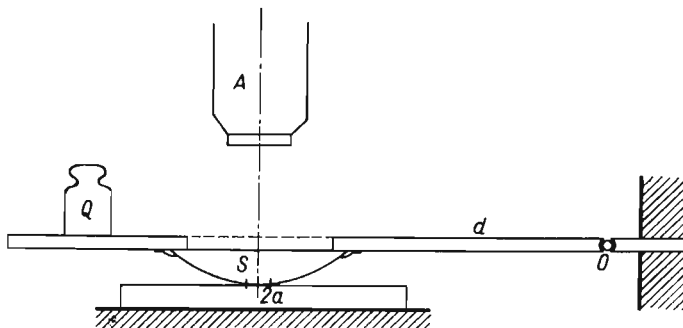
$$(1.1) \quad a^3(t) = \frac{3P}{4} R \left[\frac{1}{E_0} + \psi(t) + \frac{t}{\eta_0} \right],$$

gdzie E_0 oznacza moduł sprężystości natychmiastowej materiału, $\psi(t)$ — funkcję pełzania, zaś η_0 — współczynnik lepkości przy ustalonym płynięciu materiału] proporcjonalnym do czasu.

Wzór ten może posłużyć do wyznaczania wielkości charakteryzujących materiał lepko-sprężysty: E_0 , η_0 , $\psi(t)$, jeżeli wyznaczymy doświadczalnie $a = a(t)$, R , P .

2. Eksperyment

W przeprowadzonym doświadczeniu sztywna kula była reprezentowana przez soczewkę szklaną, płasko-wypukłą o promieniu krzywizny $R = 10,5$ cm, półprzestrzeń lepko-sprężysta — przez płytę miękkiej żywicy epoksydowej P 53, grubości 2,5 cm, położoną na grubej płycie szklanej (rys. 1).



Rys. 1. Aparat do obserwacji obszaru styku soczewki z podłożem lepko-sprężystym

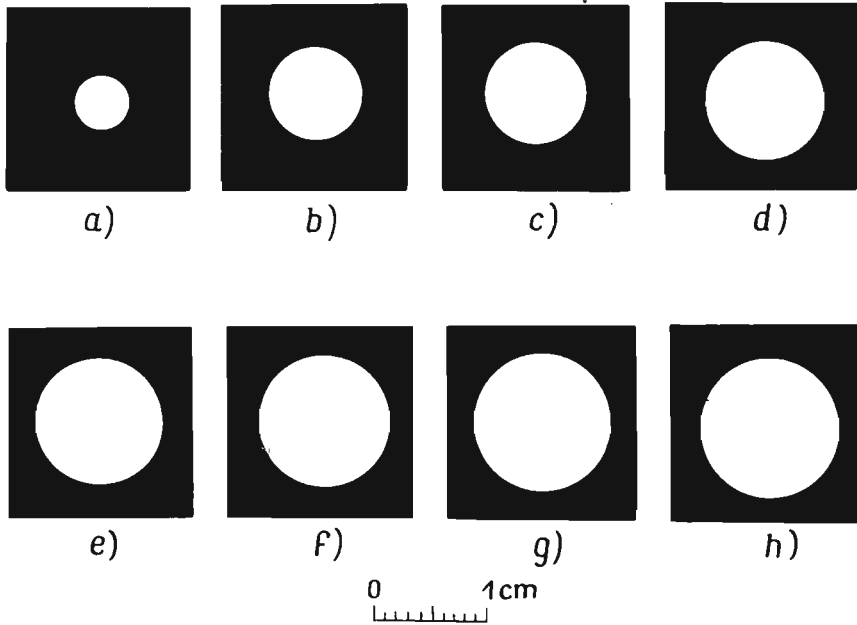
Soczewkę s umocowano w ramieniu d dźwigni obracalnej koło osi O i obciążonej odważnikiem Q . Łączny nacisk normalny po uwzględnieniu ciężaru soczewki, $P = 11,4$ N. Aby zrealizować założenie pracy [2] dotyczące braku tarcia na powierzchni styku, powierzchnię żywicy natarto dwusiarczkiem molibdenu; zabieg ten zwiększył też kontrast optyczny obszaru styku z otoczeniem. Obszar styku fotografowano poprzez szkło soczewki.

Celem zbadania wartości współczynnika Poissona podczas pełzania, do płytki z badanej żywicy o wymiarach: $10\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 1,1\text{ cm}$ przyklepiono dwie poprzeczki metalowe z haczykami i narysowano na niej tuszem dwa odcinki długości 7 cm, pionowy i poziomy. Fotografowano wiszącą pionowo płytkę przed obciążeniem i po obciążeniu ciężarem 20 N po upływie czasów: 10 s, 100 s, 1 h, 3 h liczonych od momentu przyłożenia obciążenia. Zmierzono długości obu odcinków na kliszy za pomocą komparatora i na podstawie definicji ν uzyskano wartości $\nu = 0,52; 0,44; 0,44; 0,45$. Wartość ν obliczona na podstawie zdjęć robionych w kilka sekund po nagłym przyłożeniu obciążenia wypadła w kilkakrotnie powtarzanych pomiarach o około 4% większa od 0,5. Tę nie spotykaną na ogół wartość ν można wyjaśnić obniżeniem się temperatury próbki o około $0,1^\circ\text{C}$ przy nagłym rozciągnięciu, stwierdzoną przy użyciu zamocowanej w niej termopary i anizotropią rozciągniętego materiału pod względem mechanicznym i cieplnym.

W celu znalezienia funkcji $a = a(t)$ fotografowano obszar styku poprzez soczewkę. Przez pierwsze 1,5 minuty od chwili przyłożenia siły filmowano obszar kontaktu w sposób ciągły (20 klatek na sekundę), następnie robiono zdjęcia po 5, 10, 20, 40 minutach, potem

po 1, 2, 4, 8 godzinach itd. przez 3 doby w temperaturze $(20,5 \pm 0,5)^\circ\text{C}$. Sfotografowano też skalę milimetrową poprzez szkło soczewki. Rys. 2 przedstawia kilka uzyskanych zdjęć.

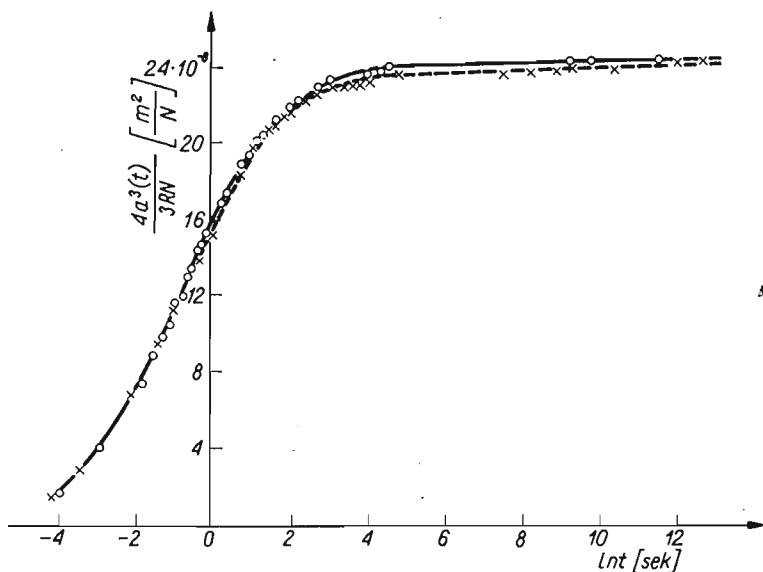
Po zmierzeniu średnic koła styku na zdjęciach, sporządzono wykres $4a^3(t)/3PR$ w półlogarytmicznym układzie współrzędnych, przedstawiony na rys. 3. Jest to zgodnie z wzorem (1.1) równocześnie wykres podatności J materiału na rozciąganie. Z wykresu widać, że krzywa podatności dla czasów $t > 1$ min przebiega niemal poziomo, z czego wnioskujemy, że materiał nie okazuje lepkiego płynięcia.



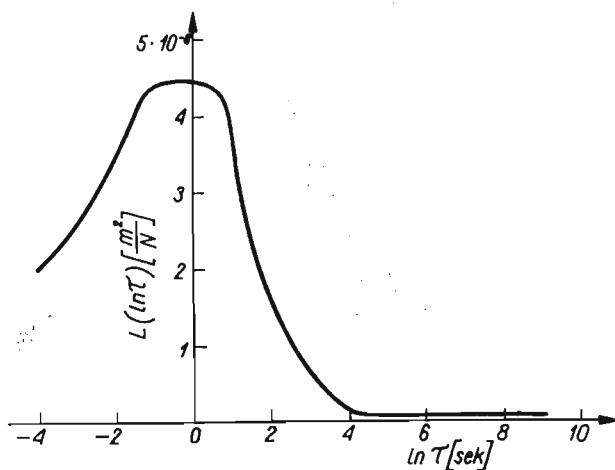
Rys. 2. Fotografie obszaru styku soczewki szklanej z podłożem lepkosprężystym (żywica P 53) po czasach: a) 0,05 s, b) 0,2 s, c) 0,4 s, d) 0,8 s, e) 20 min, f) 1 h, g) 1 d, h) 3 d, liczonych od momentu przyłożenia siły

Wykres podatności uzyskany w ten sposób porównano z wykresem otrzymanym przez obserwację pełzania próbki w kształcie prostopadłościennego beleczki o wymiarach: $1,6\text{ cm} \times 1,2\text{ cm} \times 15,5\text{ cm}$, uchwyconej nieruchomo u góry i poddanej stałej pionowej sile rozciągającej 24 N. Użyto aparatu opisanego w pracy: HALAUNBRENNER i KUBISZ [3] z ciągłym zapisem optycznym. Na podstawie obserwacji pełzania sporządzono wykres podatności na rozciąganie $J = \frac{\epsilon}{\sigma}$ w funkcji $\ln t$. Wykres ten przedstawia krzywa prze-
rywana na rys. 3. Z rys. 3 widać, że oba wykresy do czasu około 1 s pokrywają się; potem podatność obliczona na podstawie promienia koła styku jest w przybliżeniu o 2% większa. Wzrost ten można przypisać niewielkiej zmianie temperatury (gdyż aparat na rys. 1 nie był termostatowany) i wartości współczynnika Poissona odbiegającej od wymaganej przez teorię wartości 0,5.

Na podstawie wykresu podatności na rys. 3 można znaleźć wielkości charakteryzujące żywicę pod względem lepkosprężystym. Przyjmując, że materiał podstawy jest reprezentowany modelem liniowym, złożonym ze sprężyny (E_0), tłumika (η_0) i nieskończenie wielu



Rys. 3. Wykresy podatności $J = \varepsilon(t)/\sigma$ żywicy epoksydowej P 53 na rozciąganie w stałej temperaturze $20,5^\circ\text{C}$; krzywą ciągłą sporządzono na podstawie obserwacji narastania średnicy koła styku, kreśląc $4a^3(t)/3PR$ jako funkcję $\ln t$; krzywą przerywaną — na podstawie obserwacji pełzania beleczki poddanej stałej sile rozciągającej



Rys. 4. Pierwsze przybliżenie logarytmicznego widma czasów opóźnień dla żywicy epoksydowej P 53 w temperaturze $20,5^\circ\text{C}$

elementów Voigta o zmieniających się w sposób ciągły E i η połączonych szeregowo otrzymujemy na podatność na rozciąganie tego modelu wzór

$$J = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E_0} + \int_0^{\infty} f(\tau)[1 - e^{-t/\tau}] d\tau + \frac{t}{\eta_0},$$

gdzie $\tau = \eta/E$ jest czasem opóźnienia poszczególnego elementu Voigta, funkcja $f(\tau)$ — funkcją rozkładu podatności na poszczególne czasy opóźnień, zwana też *widmem czasów opóźnień*.

Funkcję L rozkładu podatności na $\ln \tau$: $L(\ln \tau) = \tau f(\tau)$ zwaną *logarytmicznym widmem czasów opóźnień* uzyskano z wykresu na rys. 3 metodą STAVERMANA i SCHWARTZLA [4] różniczkując graficznie tę krzywą. Rysunek 4 przedstawia pierwsze przybliżenie logarytmicznego widma czasów opóźnień dla żywicy P 53. Sprężystość natychmiastowa odczytana z pierwszego zdjęcia powierzchni styku $E_0 = 6600 \text{ N/cm}^2$, odczytana z krzywej pełzania belecзки 7500 N/cm^2 .

3. Wnioski

Wyznaczanie *widma czasów opóźnień* przez obserwację narastania powierzchni styku kuli z półprzestrzenią lepkosprężystą jest metodą wymagającą spełnienia podanych, na wstępie założeń, a zatem nie zawsze dającą się zastosować. Moment pierwszego zdjęcia fotograficznego jest niepewny z dokładnością do czasu przesuwu jednej klatki. Wynika stąd niepewna wartość modułu sprężystości natychmiastowej E_0 . Wyznaczanie widm korzystniej jest zatem oprzeć na obserwacji pełzania prętów przy rozciąganiu lub skręcaniu z zapisem ciągłym wielkości odkształcenia.

Narastanie powierzchni styku z czasem jest przyczyną zależności siły tarcia statycznego przy ślizganiu i toczeniu ciał po podłożu lepkosprężystym od czasu nieruchomego kontaktu. Po przyłożeniu do ciała spoczywającego siły stycznej do powierzchni podstawy i stopniowym jej zwiększeniu, następuje nagły skok ciała z dużą prędkością, któremu towarzyszy wydobycie się ciała z zagłębienia, w którym spoczywało.

Z problemem narastania powierzchni styku należy liczyć się przy składowaniu przedmiotów sporządzonych z materiałów lepkosprężystych, gdyż poddane stałemu naciskowi mogą się trwale odkształcać, a w przypadku dużej adhezji — szepiać.

Literatura cytowana w tekście

1. H. HERTZ, J. für Reine und Angewandte Mathematik, B. 29, S. 259, 1882.
2. E. LEE, J. R. M. RADOK, *Stress analysis in linearly viscoelastic materials*. IX Congress International de Mécanique Appliquée, v. V, 321-329, Univ. de Bruxelles, 1957.
3. J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ, Mech. Teor. i Stos. 1, 5, (1967).
4. A. J. STAVERMAN, E. SCHWARTZL, Die Physik der Hochpolymeren, Berlin, Springer, 1956, vol. 4, S. 44.

Резюме

ОБЛАСТЬ КОНТАКТА ЖЕСТКОГО ШАРА С ВЯЗКО-УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Область контакта жесткого шара прижимаемого нормальной силой P к изотропному вязко-упругому полупространству представляет собой круг, радиус которого увеличивается со временем. Эту задачу теоретически решили Ли и Радок (Конгресс Инт. прикл. мех. Брюссель 1957 г.).

Полученное решение связывает радиус круга контакта $a(t)$ с функцией ползучести материала и дает возможность экспериментально определить функцию ползучести на основании наблюдения роста a при постоянной температуре.

При эксперименте использовано толстую плиту из мягкой эпоксидовой смолы P 53 и стеклянную линзу с радиусом кривизны $R = 10,5$ см. Область стыка смолы, для уменьшения трения и увеличения оптического контакта натирается M_oS_2 . Линзу расположено на плите снимая непрерывно на киноплёнке область контакта: в течение первой 1,5 минуты (20 кадров в секунду), затем после 5, 10, 20 и 40 минут и далее после 1, 2, 4 и 8 часов и т. д. в течение трех суток при постоянной температуре $20,5^\circ\text{C}$. Изготовлено диаграмму: $a^3 \frac{4}{3RP}$ в функции времени в полулогарифмической координатной системе, получая кривые функции ползучести смолы. Для сравнения определяются функции ползучести при растяжении стержня, изготовленного из той же самой смолы при той же температуре. Обе кривые совпадают с собой с точностью до 2%. На основании полученной функции ползучести определяется мгновенная податливость и спектр времен запоздании смолы P 53 при постоянной температуре $20,5^\circ\text{C}$.

Summary

THE CONTACT ZONE BETWEEN A RIGID SPHERE AND A VISCO-ELASTIC HALF-SPACE

The contact zone between a rigid sphere and a visco-elastic isotropic half-space under the normal compressible force takes the form of a circle with the radius increasing with the time. This problem has been theoretically solved by Lee and Radok (1957). The obtained relation between the radius of the contact circle $a(t)$ and the creep-function enables us to find experimentally the creep-function on the basis of observed growth of the radius a .

A thick plate of the soft epoxy resin P 53 and a glass lens with the radius $R = 10,5$ cm have been used. The contact surface was covered by a thin layer of M_oS_2 in order to minimize the friction and to improve the optical contrast. The contact zone between the lense and the plate was filmed during the first 1,5 min. (20 pictures per minute), and then photographed after 5, 10, 20, 40 minutes and 1, 2, 4, 8 hours and so on during 3 days. The constant temperature $20,5^\circ\text{C}$ was maintained during the test.

As the results the diagram of the magnitude $a^3 \frac{4}{3RP}$ as the function of the time was plotted. This diagram represents the creep-function. For comparison the creep-function was also experimentally determined from the tension bar test. Both curves almost coincide, the difference being less than 2%.

Using the creep function the retardation spectrum was determined for the P 53 resin in the constant temperature $20,5^\circ\text{C}$.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1968 r.

ZALEŻNOŚĆ RYZYKA AWARII OD PARAMETRÓW PROCESU OBCIĄŻENIA

MACIEJ M A K O W S K I (KRAKÓW)

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest zanalizowanie zależności ryzyka awarii $r(t)$ od charakterystyk losowego obciążenia.

Zagadnienie to rozwiązano w przypadku, gdy konstrukcja podlega zmęczeniu i starzeniu oraz obciążenie jest dowolnym niestacjonarnym procesem losowym. Jest to uogólnienie zadania, jakie postawili i rozwiązali (w zastosowaniu do utraty wytrzymałości ośrodka stałego mikroniejednorodnego) MURZEWSKI i autor [6].

W przypadku szczególnym stacjonarnego procesu obciążenia i stałej nośności, otrzymano wniosek pokrywający się z wynikiem pracy [6], mianowicie $r = \text{const}$.

Rozpatrujemy obciążenia konstrukcji tego samego rodzaju, np. obciążenia budynków mieszkalnych tego samego typu, mostów tej samej klasy i konstrukcji, itp.

Obciążenie $P(t)$ jest procesem losowym, tzn. że dla każdej ustalonej chwili t obciążenie jest zmienną losową określoną dla zbioru wszystkich obiektów danej klasy, natomiast dla konkretnego obiektu obciążenie jest funkcją nielosową czasu, która jednakże nie jest znana *a priori*.

Ograniczymy się do rozpatrywania jednej budowli o dokładnie skontrolowanych wymiarach, wykonanej z materiałów, których własności są w pełni określoną funkcją czasu. Przy tych założeniach nośność konstrukcji $N(t)$ jest nielosową i *a priori* określoną funkcją czasu (rys. 1). Tak postawione zagadnienie może być podstawą do dalszych uogólnień — dla losowych procesów $N(t)$.

Zagadnienie będzie rozwiązane przy zastosowaniu teorii przewyższania określonego poziomu przez proces losowy [9].

Wymieniona teoria była już stosowana do zagadnień praktycznych. RICE [7] wyprowadził wzór na średnią częstość \bar{n}_N przekroczeń poziomu N przy dodatnim nachyleniu realizacji $P(t)$ stacjonarnych, scentralizowanych, różniczkowych procesów gaussowskich:

$$(1.1) \quad \bar{n}_N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-K_0''}{K_0}} e^{-\frac{N^2}{2K_0}},$$

gdzie K_0 — wariancja, K_0'' — druga pochodna funkcji korelacyjnej.

Jeśli przewyższenie poziomu N przez proces stacjonarny powoduje zniszczenie obiektu, to \bar{n}_N równa się ryzyku r .

2. Oznaczenia i definicje

- $N(t)$ nośność konstrukcji w chwili t ,
 T trwałość konstrukcji (czas bezawaryjnej eksploatacji),
 $\mathcal{P}(t)$ niezawodność konstrukcji (prawdopodobieństwo przetrwania),
 $r(t)$ ryzyko awarii (intensywność prawdopodobieństwa),
 $P(t)$ proces obciążenia,
 $\dot{P}(t)$ szybkość obciążenia,
 $\bar{p}(t)$ wartość średnia obciążenia,
 $K(t_1, t_2)$ funkcja korelacyjna procesu obciążenia,
 $\mu^2(t)$ wariancja obciążenia,
 $R_{\dot{p}\dot{p}}(t_1, t_2)$ funkcja korelacji wzajemnej dla obciążenia i szybkości obciążenia,
 $f(p, \dot{p}/t)$ dwuwymiarowa gęstość obciążenia i szybkości obciążenia w tej samej chwili t ,
 $F(p, \dot{p}/t)$ dwuwymiarowa dystrybuanta obciążenia i szybkości obciążenia w chwili t .

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy we wstępie, rozpatrywana konstrukcja jest reprezentantem pewnej populacji jednorodnych konstrukcji spełniających te same warunki

Zakładamy, że czas życia konstrukcji jest zmienną losową, w związku z tym można określić funkcję, która jest prawdopodobieństwem bezawaryjnej pracy konstrukcji w okresie czasu t .

Def. 1

Prawdopodobieństwo przetrwania konstrukcji

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}[P(t) < N(t)]; \quad 0 \leq t \leq T.$$

Obok tej funkcji używa się w teorii niezawodności również funkcji $Q(t)$ będącej prawdopodobieństwem powstania awarii.

Def. 2

Prawdopodobieństwo zniszczenia (awarii)

$$Q(t) = 1 - \mathcal{P}(t).$$

Jeśli założymy, że funkcja $Q(t)$ jest ciągła wraz z pierwszą pochodną, można mówić o gęstości prawdopodobieństwa powstania awarii, czyli o gęstości rozkładu trwałości.

Def. 3

Gęstość rozkładu trwałości

$$q(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = -\dot{\mathcal{P}}(t).$$

Następnym równie ważnym pojęciem teorii niezawodności jest prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy konstrukcji w odcinku czasu (t, t_1) , gdy wiadomo, że do chwili t konstrukcja pracowała bezawaryjnie.

Def. 4

Niezawodność warunkowa (prawdopodobieństwo przetrwania w okresie od t do t_1).

$$\mathcal{P}(t \div t_1) = \frac{\mathcal{P}(t_1)}{\mathcal{P}(t)}.$$

Z definicji tej wynika, że prawdopodobieństwo powstania awarii w odcinku czasu (t, t_1) przyjmuje postać

$$Q(t \div t_1) = \frac{\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(t_1)}{\mathcal{P}(t)}.$$

Przyjmując $t_1 = t + dt$ i obliczając granicę przy $dt \rightarrow 0$ otrzymujemy nową funkcję, zwaną ryzykiem awarii.

Def. 5

Ryzyko awarii

$$r(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{Q(t \div t + dt)}{dt}.$$

Ryzyko awarii $r(t)$ można traktować jako warunkową gęstość powstania awarii w chwili t pod warunkiem, że do tej chwili konstrukcja pracowała bezawaryjnie lub, mówiąc mniej ściśle, jako prawdopodobieństwo tego, że konstrukcja, która pracowała bezawaryjnie do chwili t uszkodzi się w czasie $t + dt$, gdzie dt jest dostatecznie małe.

W przypadku gdy konstrukcja nie podlega zmęczeniu i starzeniu dość intuicyjne staje się przyjęcie założenia, że ryzyko awarii jest stałe (niezależne od czasu). Jeden z wniosków niniejszej pracy uzasadnia możliwość przyjmowania tego typu założenia.

3. Wyznaczanie ryzyka awarii przy zastosowaniu zagadnienia o przewyższaniu

Do wyznaczenia ryzyka awarii zastosowano zagadnienie o przewyższaniu, przy czym zagadnienie to uogólniono w niniejszej pracy na przypadek, w którym poziom przekraczany przez funkcję losową jest niekoniecznie stały.

Twierdzenie 1

Założenia: $P(t)$ — proces losowy ciągły wraz z pochodną,
 $N(t)$ — funkcja nielosowa czasu.

Teza:
$$r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p} - \dot{N}(t)] f[N(t)\dot{p}/t] d\dot{p}.$$

Dowód:

Oznaczając przez $\mathcal{P}(a/t)$ prawdopodobieństwo przewyższenia stałego poziomu „ a ” przez funkcję losową $P(t)$ w czasie dt mamy znany wzór [9]

$$\mathcal{P}(a/t) = dt \int_0^{\infty} \dot{p} f(a, \dot{p}/t) d\dot{p}$$

i w przypadku, gdy $a = 0$ wzór

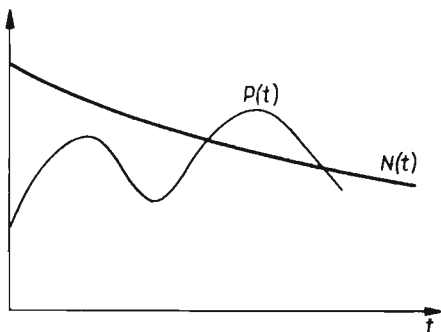
$$(3.1) \quad \mathcal{P}(0/t) = dt \int_0^{\infty} \dot{p} f(0, \dot{p}/t) d\dot{p}.$$

Wyprowadzimy transformację

$$Y(t) = P(t) - N(t),$$

$$W(t) = \dot{P}(t) - \dot{N}(t).$$

Wyznaczenie prawdopodobieństwa przewyższenia przez funkcję losową $P(t)$ poziomu $N(t)$ sprowadza się teraz do wyznaczenia prawdopodobieństwa przewyższenia przez funkcję losową $Y(t)$ poziomu zerowego.



Rys. 1

Należy znaleźć dwuwymiarową gęstość $f_1(y, w)$.

$$(3.2) \quad F_1(y, w) = \mathcal{P}(Y < y, W < w) = \mathcal{P}(P - N < y, \dot{P} - \dot{N} < w) = \\ = \mathcal{P}(P < y + N, \dot{P} < w + \dot{N}) = F(y + N, w + \dot{N}),$$

czyli

$$(3.3) \quad F_1(y, w) = F(p, \dot{p}),$$

gdzie

$$p = y + N; \quad \dot{p} = w + \dot{N}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}} \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} = \frac{\partial F(y + N, w + \dot{N})}{\partial p}$$

i podobnie

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial w} = \frac{\partial^2 F(y + N, w + \dot{N})}{\partial p \partial \dot{p}} = f(y + N, w + \dot{N}),$$

mamy więc

$$(3.4) \quad f_1(y, w) = f(y + N, w + \dot{N}).$$

Oznaczając przez A zdarzenie, polegające na przewyższeniu w czasie dt przez funkcję losową $Y(t)$ poziomu zerowego, otrzymujemy na podstawie wzoru (3.1)

$$\mathcal{P}(A) = dt \int_0^{\infty} w f_1(0, w/t) dw = dt \int_0^{\infty} w f[N(t), w + \dot{N}(t)/t] dw;$$

podstawiając

$$w + \dot{N}(t) = \dot{p}$$

otrzymujemy

$$\mathcal{P}(A) = dt \int_{\dot{N}}^{\infty} (\dot{p} - \dot{N}) f[N(t), \dot{p}/t] d\dot{p}.$$

Z def. 5 ryzyka zniszczenia

$$r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}(A)}{dt}$$

otrzymujemy

$$(3.5) \quad r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p} - \dot{N}(t)] f[N(t), \dot{p}/t] d\dot{p}.$$

cbdo.

Twierdzenie 2

Założenie: $P(t)$ — stacjonarny w sensie węższym,
 $N(t)$ — funkcja nielosowa (nośność).

Teza:
$$r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p} - \dot{N}(t)] f[N(t), \dot{p}] d\dot{p}.$$

Dowód:

Z założenia stacjonarności wynika, że dwuwymiarowa gęstość obciążenia nie zależy od translacji na osi czasu

$$f(p_1, p_2/t_1, t_2) = f(p_1, p_2/dt), \quad \text{gdzie} \quad dt = t_2 - t_1,$$

poprzez przekształcenie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} p_1 &= p \\ p_2 &= p + \dot{p} dt \end{aligned}$$

przechodzimy do dwuwymiarowej gęstości zmiennych p i \dot{p}

$$(3.7) \quad f(p, \dot{p}/t_1, t_2) = f(p, \dot{p} + \dot{p} dt/dt) |dt|,$$

gdzie $|dt|$ jest wartością bezwzględną jacobianu przekształcenia (3.6), stąd wynika, że

$$f(p, \dot{p}/t_1, t_2) = f(p, \dot{p}/dt), \quad \text{gdzie} \quad dt = t_2 - t_1,$$

czyli

$$f(p, \dot{p}/t, t) = f(p, \dot{p}/0) = f(p, \dot{p}),$$

a stąd

$$(3.8) \quad f[N(t), \dot{p}/t] = f[N(t), \dot{p}].$$

Wstawiając (3.8) do wzoru (3.5) otrzymujemy tezę:

$$(3.9) \quad r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p} - \dot{N}(t)] f[N(t), \dot{p}] d\dot{p}.$$

cbdo.

Temat

Założenie: $P(t)$ — proces stacjonarny w sensie węższym.

Teza: $Rp\dot{p}(t, t) = 0$.

Twierdzenie to znane jest w literaturze procesów losowych, np. [9]. Przytoczono nowy dowód tego twierdzenia.

Dowód:

Z definicji

$$R_{p\dot{p}}(t_1, t_2) = E\{[P(t_1) - \bar{p}(t_1)]\dot{P}(t_2)\} = E[P(t_1)\dot{P}(t_2)] - \bar{p}(t_1)E[\dot{P}(t_2)].$$

Ze stacjonarności $P(t)$ wynika $E[\dot{P}(t_2)] = 0$,

czyli

$$R_{p\dot{p}}(t, t) = E[P(t)\dot{P}(t)] = \frac{d}{dt} E\left[\frac{1}{2} P^2(t)\right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E[P^2(t)].$$

Ze stacjonarności wynika, że $E[P^2(t)] = \text{const}$,

czyli $R_{p\dot{p}}(t, t) = 0$.

cbdo.

Wniosek 1

Rozważmy przypadek szczególny, gdy $P(t)$ jest procesem losowym stacjonarnym normalnym.

Wtedy na podstawie poprzedniego tematu: obciążenie i pochodna obciążenia w tej samej chwili t są zmiennymi losowymi nieskorelowanymi, a więc dla procesu normalnego są również zmiennymi losowymi niezależnymi, czyli:

$$f(p, \dot{p}) = f(p)f(\dot{p}).$$

W naszym przypadku mamy:

$$(3.10) \quad f[N(t), \dot{p}] = f[N(t)]f(\dot{p}).$$

Wstawiając (3.10) do (3.9) otrzymujemy

$$(3.11) \quad r(t) = \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} [\dot{p} - \dot{N}(t)] f[N(t)] f(\dot{p}) d\dot{p};$$

$P(t)$ z założenia jest normalny, czyli gęstość ma postać

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_p}} \exp\left[-\frac{(p - \bar{p})^2}{2\mu_p^2}\right];$$

$\dot{P}(t)$ — jako pochodna procesu stacjonarnego normalnego jest również procesem stacjonarnym normalnym o wartości średniej równej zero i wariancji równej drugiej pochodnej funkcji korelacyjnej procesu $P(t)$ wziętej ze znakiem minus w punkcie $\tau = 0$;

$$\bar{\dot{p}} = 0 \quad \mu_{\dot{p}}^2 = -\frac{d^2 K_p(\tau)}{d\tau^2} \quad \text{dla} \quad \tau = 0,$$

czyli

$$(3.12) \quad f[N(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_p}} \exp\left[-\frac{(N(t) - \bar{p})^2}{2\mu_p^2}\right],$$

$$f(\dot{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_{\dot{p}}}} \exp\left[-\frac{\dot{p}^2}{2\mu_{\dot{p}}^2}\right].$$

Wstawiając związki (3.12) do wzoru (3.11) otrzymujemy

$$r(t) = \frac{1}{2\pi\mu_p\mu_{\dot{p}}} \exp\left[-\frac{(N(t)-\bar{p})^2}{2\mu_p^2}\right] \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} \dot{p} \exp\left[-\frac{\dot{p}^2}{2\mu_{\dot{p}}^2}\right] d\dot{p} - \\ - \dot{N}(t) \frac{1}{2\pi\mu_p\mu_{\dot{p}}} \exp\left[-\frac{(N(t)-\bar{p})^2}{2\mu_p^2}\right] \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\dot{p}^2}{2\mu_{\dot{p}}^2}\right] d\dot{p}.$$

Wyliczając pierwszą całkę przez podstawienie

$$\frac{\dot{p}^2}{2\mu_{\dot{p}}^2} = t$$

otrzymujemy

$$(3.13) \quad r(t) = \frac{1}{2\pi\mu_p} \exp\left[-\frac{(N(t)-\bar{p})^2}{2\mu_p^2}\right] \left\{ \dot{p} \exp\left[-\frac{\dot{N}^2(t)}{2\mu_{\dot{p}}^2}\right] - \frac{\dot{N}(t)}{\mu_{\dot{p}}} \int_{\dot{N}(t)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\dot{p}^2}{2\mu_{\dot{p}}^2}\right] d\dot{p}, \right.$$

gdzie występującą w tym wzorze całkę można doprowadzić do stabilizowanej funkcji Laplace'a.

Wniosek 2

Założenie: 1) konstrukcja nie podlega zmęczeniu ani starzeniu $N(t) \equiv N = \text{const}$,
2) obciążenie jest procesem stacjonarnym.

Teza:
$$r(t) \equiv r = \int_0^{\infty} \dot{p} f(N, \dot{p}) d\dot{p}.$$

W przypadku, gdy $N(t) \equiv N = \text{const}$, mamy do czynienia z klasycznym znanym z literatury zagadnieniem o przewyższaniu przez funkcję losową ustalonego poziomu N . Wzór na ryzyko awarii w tym przypadku można wyprowadzić ustalając warunek na przewyższenie, licząc $\mathcal{P}(A)$ i $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}(A)}{dt}$, lub jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia 2 przyjmując w założeniu

$$N(t) \equiv N = \text{const}, \text{ czyli } \dot{N}(t) \equiv 0;$$

mamy więc

$$(3.14) \quad r(t) \equiv r = \int_0^{\infty} \dot{p} f(N, \dot{p}) d\dot{p}$$

cbdo.

Widzimy stąd, że jeśli konstrukcja nie podlega zmęczeniu ani starzeniu i obciążenie jest procesem stacjonarnym, to ryzyko awarii jest niezależne od czasu $r(t) \equiv r = \text{const}$.

Wniosek 3

Założenie takie samo, jak we wniosku 2, i oprócz tego $P(t)$ normalny. Wtedy

$$(3.15) \quad r(t) = \frac{\mu_{\dot{p}}}{2\pi\mu_p} \exp\left[-\frac{(N-\bar{p})^2}{2\mu_p^2}\right].$$

Wzór (3.15) wynika natychmiast ze wzoru (3.13), gdzie podstawiono $N(t) \equiv N = \text{const}$ i zgadza się ze wzorem Rice'a (1.1) dla $\bar{p} = 0$ uwzględniając, że dla procesów gaussowskich

$$\mu_p = - \left. \frac{d^2 K(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

Przypadki szczególne uwzględnione we wniosku 2 i 3 zostały uzyskane wcześniej, drogą bezpośredniego zastosowania zagadnienia o przewyższaniu przez funkcję losową stałego poziomu [6].

4. Wnioski

Fundamentalne prawo probabilistycznej teorii niezawodności wyraża prawdopodobieństwo przetrwania konstrukcji jako funkcję okresu eksploatacji

$$(3.16) \quad \mathcal{P}(T) = \exp \left[- \int_0^T r(t) dt \right].$$

Oznaczając przewidywany okres eksploatacji przez T^* i przyjmując z góry, że prawdopodobieństwo przetrwania konstrukcji w okresie T^* jest bliskie jedynki i równe $1 - \omega$ otrzymujemy zgodnie z (3.16)

$$\mathcal{P}(T^*) = \exp \left[- \int_0^{T^*} r(t) dt \right],$$

czyli

$$1 - \omega = \exp \left[- \int_0^{T^*} r(t) dt \right].$$

Oznaczając przez $R(t)$ funkcję pierwotną do $r(t)$ otrzymujemy

$$1 - \omega = \exp[R(0) - R(T^*)],$$

czyli mamy w postaci uwikłanej

$$(3.17) \quad R(T^*) = R(0) - \ln(1 - \omega).$$

Znając ryzyko, możemy więc wyciągnąć prognozę na temat przewidywanego okresu eksploatacji z prawdopodobieństwem $1 - \omega$; T^* może służyć za miarę bezpieczeństwa konstrukcji obok innych miar zdefiniowanych w probabilistycznej teorii bezpieczeństwa [5].

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. BOŁOTIN, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Warszawa 1968.
2. E. FIDELIS i in., *Matematyczne podstawy oceny niezawodności*, Warszawa 1966.
3. B. W. GNIEDENKO, *Metody matematyczne w teorii niezawodności*, Warszawa 1968.
4. E. J. GUMBEL, *Statistics of Extremes*, Columbia University Press., New York 1962.
5. J. MURZEWSKI, *Wprowadzenie do teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, PWN, Warszawa 1963.
6. J. MURZEWSKI, M. MAKOWSKI, *Wyteżenie ośrodka mikroniejednorodnego przy stacjonarnym procesie naprężeń*, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, t. XV, z. 1-2 (1969).

7. S. O. RICE, *Mathematical Analysis of Random Noise*, BSTJ.
8. SMIRNOW, DUNIN BARKOWSKI, *Krótki kurs statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1966.
9. A. A. SWIESZNIKOW, *Podstawowe metody funkcji losowych*, Warszawa 1966.

R e z y u m e

ZAWISIMOSĆ WZMOŻNOSCI AWARII OD PARAMETRÓW PROCESU NAGRUZKI

В настоящей работе выводится [6] формула, определяющая возможность аварии, при предположении изменяющейся во времени несущей способности и воздействия случайных нагрузок на конструкцию.

Используя задачу о превышении случайной функцией некоторого уровня, обуславливается возможность аварии от нагрузки, ее скорости и от несущей способности.

Доказывается, что в частном случае, стационарного процесса нагрузки и постоянной несущей способности возможность аварии не зависит от времени.

S u m m a r y

DEPENDENCE OF THE RISK OF FAILURE ON LOADING PROCESS
PARAMETERS

The formula [6] for the risk of failure is derived under assumptions that the load carrying capacity is variable in time and the loads acting on the structure are random. The problem of surpassing of a certain level by the random function is applied and the risk of failure is formulated in terms of the loads, the load rates and the carrying capacity. It has been demonstrated that in the particular case of a stationary load process and a constant carrying capacity the risk of failure is independent of time.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1968 r.

KSZTAŁTOWANIE DYNAMICZNE ELEMENTÓW KONSTRUKCJI

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

1. Wprowadzenie

Stały wzrost wymagań odnośnie jakości projektowanych urządzeń i konstrukcji otwiera coraz szersze perspektywy dla zastosowań metod i koncepcji matematycznej teorii optymalizacji. Jedną z ważnych dziedzin, w których metody te mogą znaleźć szerokie zastosowanie, jest kształtowanie dynamicznych własności elementów konstrukcji. Kształtowanie takie jednak, w ścisłym tego słowa znaczeniu, praktycznie jeszcze dzisiaj nie istnieje. Obliczenia dynamiczne wykonywane w stadium projektowania są zazwyczaj tylko obliczeniami sprawdzającymi, czy zaprojektowana konstrukcja spełnia ograniczenia i warunki wymagane przez obowiązujące normy i przepisy, a dotyczące wartości amplitud drgań, naprężeń itd. W wyniku takiego sposobu projektowania uzyskuje się jedno z wielu możliwych rozwiązań dopuszczalnych pod względem dynamicznym. Nie wiadomo nawet w jakim stopniu rozwiązanie to jest zbliżone do pewnego optimum, które pozostaje nadal nieznanne. Nie chodzi nawet o to, aby każdą konstrukcję projektować jako dynamicznie optymalną, choć to byłoby na pewno najlepsze. Znajomość rozwiązania optymalnego poza swym znaczeniem teoretycznym ma jednak również istotne znaczenie praktyczne, gdyż umożliwiałaby świadome kształtowanie dynamicznych własności konstrukcji tak, aby była ona możliwie zbliżona do optymalnej.

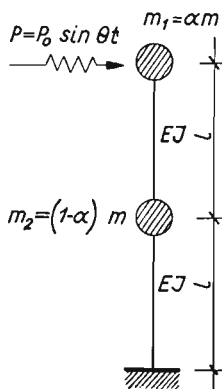
Praca ma na celu omówienie jednej z możliwości optymalnego kształtowania układu o dwóch stopniach swobody przedstawionego na rys. 1. W rozważanym przypadku kształtowanie polega na odpowiednim doborze wartości obu mas skupionych m_1 i m_2 układu, przy ustalonej sztywności pręta c i założeniu, że działa nań przyłożone do górnej masy poprzeczne wymuszenie harmoniczne o ustalonej częstotliwości kołowej θ . Optymalizacja została przeprowadzona czterokrotnie przy zastosowaniu czterech różnych kryteriów jakości charakteryzujących pod względem ilościowym odpowiedź badanego układu na dane wymuszenie. Ponieważ struktura układu jest ustalona przez założenie konkretnego schematu (rys. 1), mamy tu do czynienia z typowym przypadkiem optymalizacji parametrycznej [1]. Jako parametry wprowadzono dwie niezależne wielkości bezwymiarowe α i λ , przy czym parametr α określa stosunek masy m_1 do sumy m obu mas układu, zaś parametr λ — bezwymiarową wartość tej sumy wyrażoną przez wielkości stałe c i θ . Parametrom tym należy nadać takie wartości ze zbioru wartości dopuszczalnych, aby minimalizowały one odpowiedni wskaźnik jakości.

Jakość układu rzeczywistego oceniać można przez porównywanie go z układem idealnym, jakim jest układ pozostający w spoczynku mimo działającego nań obciążenia zmiennego w czasie. Podejście takie pozwala przedstawić wskaźnik jakości w postaci odpowiedniego funkcjonału zależnego od zmiennych stanu układu [2]. W rozważanym przypadku zmiennymi stanu są przemieszczenia mas układu liczone od położenia równowagi statycznej. Ograniczając się do analizy stanu ustalonego przy wymuszeniu harmonicznym, za zmienne stanu przyjmiemy amplitudy drgań A_1 i A_2 obu mas układu i potraktujemy je jako składowe wektora \bar{A} stanu układu. Wskaźnik jakości możemy więc przedstawić w postaci pewnej funkcji zmiennych A_1 i A_2 . Odpowiedni dobór tej funkcji z jednej strony warunkuje własności układu optymalnego, z drugiej zaś decyduje o pracochłonności obliczeń. Właściwą ocenę różnych kryteriów jakości można przeprowadzić tylko w oparciu o wyniki optymalizacji uzyskane na podstawie tych kryteriów. Z tego też powodu w dalszym ciągu przedstawiono cztery różne podejścia do tego samego zagadnienia.

2. Macierz transmitancji

Ruch układu przedstawionego na rys. 1 opisany jest układem równań różniczkowych

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \alpha m \ddot{x}_1 + r_{11} x_1 + r_{12} x_2 &= P_1(t), \\ (1 - \alpha) m \ddot{x}_2 + r_{21} x_1 + r_{22} x_2 &= P_2(t), \end{aligned}$$



Rys. 1

gdzie r_{ik} ($i, k = 1, 2$) jest reakcją sprężystą układu w punkcie i , wywołaną jednostkowym przemieszczeniem w punkcie k . Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.2) \quad \begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = cR_0, & M &= mM_0, \\ \bar{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, & \bar{P}(t) &= \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie dla układu z rys. 1

$$(2.3) \quad R_0 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

$$(2.4) \quad c = \frac{6EI}{7l^3}, \quad m = m_1 + m_2, \quad \alpha = \frac{m_1}{m},$$

możemy układ równań (2.1) zapisać w postaci macierzowej

$$(2.5) \quad M\ddot{\bar{x}} + R\bar{x} = \bar{P}(t).$$

Dla harmonicznego sygnału wejściowego (wymuszenia) $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \sin \theta t$ odpowiedź układu (ruch mas) w stanie ustalonym $\bar{x}(t) = \bar{A} \sin \theta t$ określimy wykorzystując jego macierz transmitancji wyznaczoną na podstawie równania ruchu (2.5).

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.6) \quad \bar{a} = \frac{\bar{A}}{l}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{P}_0}{cl}, \quad \lambda = \vartheta^2 = \frac{m}{c} \theta^2 = \frac{7ml^3}{6EI} \theta^2,$$

transmitancja ta wyraża się wzorem

$$(2.7) \quad G = (R_0 - \lambda M_0)^{-1} = W^{-1} G_0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad W = \alpha(1-\alpha)\lambda^2 - 2(1+7\alpha)\lambda + 7$$

jest wielomianem charakterystycznym macierzy $R - \theta^2 M$, zaś

$$(2.9) \quad G_0 = \begin{pmatrix} 16 - \lambda(1-\alpha) & 5 \\ 5 & 2 - \lambda\alpha \end{pmatrix}.$$

Związek między bezwymiarowymi wektorami \bar{a} i \bar{b} można teraz zapisać w postaci

$$(2.10) \quad \bar{a} = G\bar{b}.$$

W dalszych rozważaniach zajmiemy się przypadkiem szczególnym, gdy $\bar{b} = (1, 0)$. Na podstawie (2.7), (2.9) i (2.10) otrzymujemy w tym przypadku

$$(2.11) \quad \bar{a} = W^{-1} \begin{pmatrix} 16 - \lambda(1-\alpha) \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Minimalizacja energii

Zadanie nasze będzie teraz polegać na zminimalizowaniu wektora odpowiedzi \bar{a} . Minimalizacja ta może być przeprowadzona na różne sposoby w zależności od przyjętego kryterium jakości.

W pierwszym wariantcie obliczenia przyjmijmy, że funkcją, którą będziemy minimalizować, jest maksymalna energia sprężysta układu

$$U = \frac{1}{2} \bar{A}' R \bar{A} = \frac{1}{2} c l^2 \bar{a}' R_0 \bar{a} = c l^2 W^{-2} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 7(1-\alpha)\lambda + 56].$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie posługiwać się energią bezwymiarową

$$(3.1) \quad z = \frac{U}{cI^2} = W^{-2}[(1-\alpha)^2\lambda^2 - 7(1-\alpha)\lambda + 56].$$

Dla jakościowego zbadania funkcji $z(\alpha, \lambda)$ wykorzystamy wyrażenia dla jej pochodnych cząstkowych.

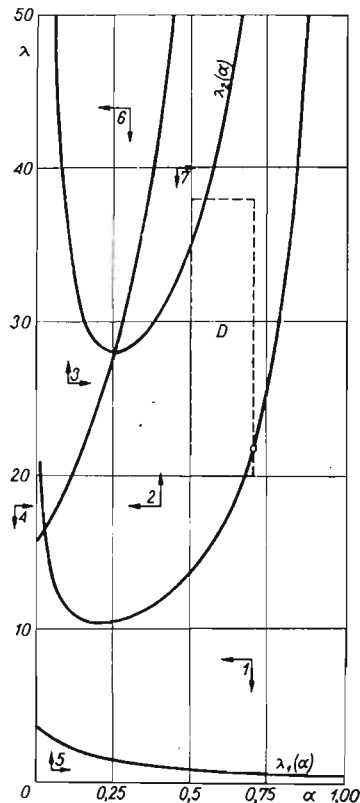
$$(3.2) \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 2\lambda W^{-3}[-2(1-\alpha)^3\lambda^3 + (1-\alpha)(46 - 21\alpha)\lambda^2 - 336(1-\alpha)\lambda + 1617],$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2W^{-3}[-2\alpha(1-\alpha)^3\lambda^3 + 21\alpha(1-\alpha)^2\lambda^2 - 336\alpha(1-\alpha)\lambda + 175 + 1617\alpha].$$

Wykreślając na płaszczyźnie parametrów (α, λ) krzywe określone równaniami

$$W = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

otrzymujemy podział tej płaszczyzny na obszary charakteryzujące się stałością znaków obu składowych wektora grad z . Kierunki tych składowych dla poszczególnych obszarów



Rys. 2

płaszczyzny (α, λ) przedstawiono na rys. 2. Zauważyć należy, że równanie $W = 0$ określa dwie krzywe $\lambda_1(\alpha)$ i $\lambda_2(\alpha)$ obrazujące zależności bezwymiarowych częstości drgań własnych λ_1 i λ_2 od parametru α . Wzdłuż obu tych krzywych $z = \infty$.

4. Minimalizacja kwadratu normy $|\bar{a}|^2$ wektora \bar{a}

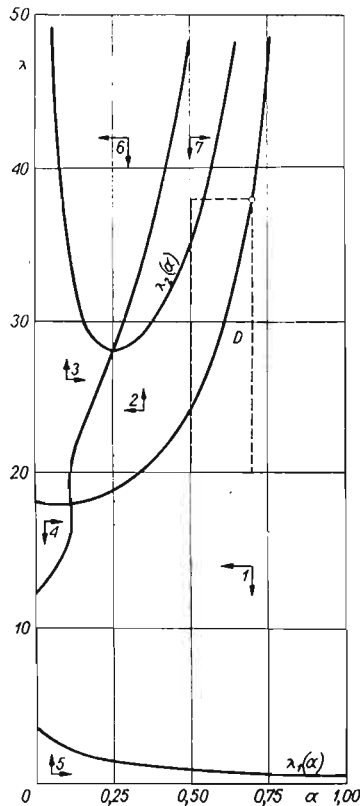
Minimalizację odpowiedzi układu możemy również przeprowadzić wychodząc z rozważań czysto geometrycznych. Przyjmijmy za kryterium jakości funkcję $z(\alpha, \lambda)$ określoną jako kwadrat normy wektora (2.11):

$$(4.1) \quad z = |\bar{a}|^2 = W^{-2}[(1-\alpha)^2\lambda^2 - 32(1-\alpha)\lambda + 281],$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 2\lambda W^{-3}[-(1-\alpha)^3\lambda^3 + 48(1-\alpha)^2\lambda^2 - (768 - 793\alpha)\lambda + 4046],$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2W^{-3}[-\alpha(1-\alpha)^3\lambda^3 + 48\alpha(1-\alpha)^2\lambda^2 - (1-\alpha)(25 + 793\alpha)\lambda + 450 + 4046\alpha].$$

Podział płaszczyzny (α, λ) na obszary monotoniczności funkcji $z(\alpha, \lambda)$ pokazano na rys. 3. W porównaniu z rys. 2 stwierdzamy pewne podobieństwo obu podziałów. Podobieństwo



Rys. 3

to wynika stąd, że oba kryteria jakości są odpowiednimi formami kwadratowymi współrzędnych wektora odpowiedzi \bar{a} .

W wyrażeniu (4.1) dla funkcji kryterialnej kwadraty obu współrzędnych wektora \bar{a} występują z jednakowymi współczynnikami równymi jedności. Z tego też powodu obie amplitudy drgań a_1 i a_2 minimalizowane są w równym stopniu. W przypadkach, kiedy

zależy nam na tym, aby jedna z amplitud była minimalizowana skuteczniej niż druga, należy posłużyć się ogólniejszym kryterium jakości o postaci $z = c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2$ z odpowiednio dobranymi dodatnimi współczynnikami c_1 i c_2 . Z przypadkiem takim spotykamy się na przykład wówczas, kiedy w poziomie jednej z mas istnieje ostrzejsze ograniczenie dla amplitudy.

5. Minimalizacja normy $z = |a_1| + |a_2|$

Przyjmijmy teraz za kryterium jakości normę wektora \bar{a} o postaci $z = |a_1| + |a_2|$. Na podstawie wzoru (2.11) otrzymujemy

$$(5.1) \quad z(\alpha, \lambda) = \begin{cases} z_1 = |W|^{-1}[21 - (1-\alpha)\lambda], & \text{gdy } a_1 = 16 - (1-\alpha)\lambda > 0, \\ z_2 = |W|^{-1}[(1-\alpha)\lambda - 11], & \text{gdy } a_1 = 16 - (1-\alpha)\lambda < 0, \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = \lambda W^{-1} |W|^{-1} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - (37 - 42\alpha)\lambda + 301],$$

$$(5.3) \quad \frac{\partial z_2}{\partial \alpha} = -\lambda W^{-1} |W|^{-1} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - (27 - 22\alpha)\lambda + 161],$$

$$(5.4) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \lambda} = W^{-1} |W|^{-1} [\alpha(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 42\alpha(1-\alpha)\lambda + 35 + 301\alpha],$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial z_2}{\partial \lambda} = -W^{-1} |W|^{-1} [\alpha(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 22\alpha(1-\alpha)\lambda + 15 + 161\alpha].$$

Obszary monotoniczności funkcji $z(\alpha, \lambda)$ pokazano na rys. 4. Zamiast przyjętego kryterium można i w tym przypadku posłużyć się kryterium ogólniejszym $z = c_1 |a_1| + c_2 |a_2|$.

6. Minimalizacja normy $z = \max(|a_1|, |a_2|)$

Jako ostatni rozważymy przypadek minimalizacji na podstawie kryterium jakości $z = \max(|a_1|, |a_2|)$. Wykorzystując wzór (2.11) stwierdzamy, że

$$|a_1| \leq |a_2|, \quad \text{gdy } \frac{11}{1-\alpha} \leq \lambda \leq \frac{21}{1-\alpha},$$

$$|a_1| \geq |a_2|, \quad \text{gdy } \lambda \leq \frac{11}{1-\alpha} \quad \text{lub} \quad \lambda \geq \frac{21}{1-\alpha}.$$

Dzięki temu rozważane kryterium przybiera postać

$$(6.1) \quad z(\alpha, \lambda) = \begin{cases} |a_1| = |W|^{-1}|16 - (1-\alpha)\lambda|, & \text{gdy } \lambda \leq \frac{11}{1-\alpha} \quad \text{lub} \quad \lambda \geq \frac{21}{1-\alpha}, \\ |a_2| = 5|W|^{-1}, & \text{gdy } \frac{11}{1-\alpha} \leq \lambda \leq \frac{21}{1-\alpha}, \end{cases}$$

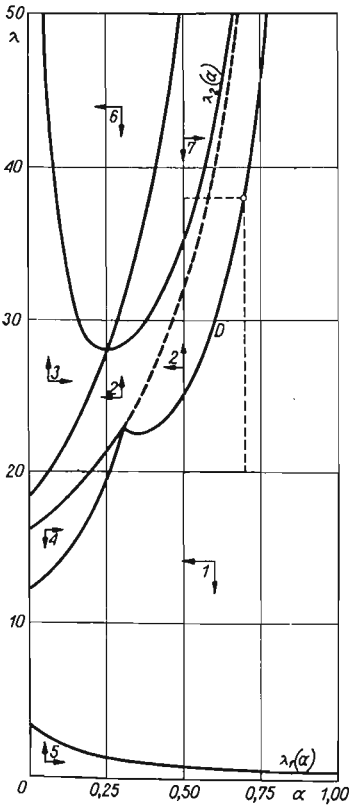
$$(6.2) \quad \frac{\partial |a_1|}{\partial \alpha} = \lambda a_1 |a_1|^{-1} W^{-2} [(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 32(1-\alpha)\lambda + 231],$$

$$(6.3) \quad \frac{\partial |a_2|}{\partial \alpha} = -5\lambda W^{-1} |W|^{-1} [(1-2\alpha)\lambda - 14],$$

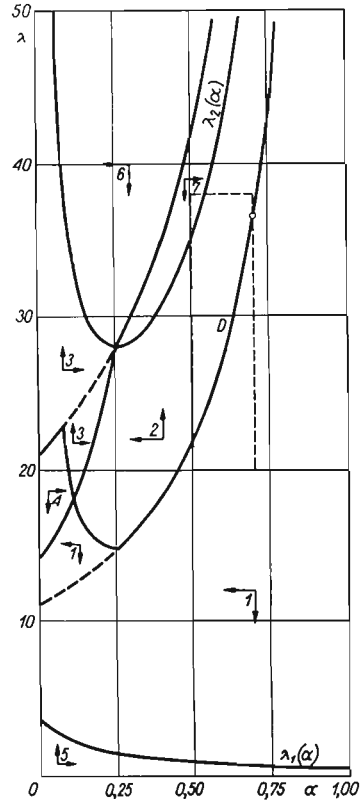
$$(6.4) \quad \frac{\partial |a_1|}{\partial \lambda} = a_1 |a_1|^{-1} W^{-2} [\alpha(1-\alpha)^2 \lambda^2 - 32\alpha(1-\alpha)\lambda + 25 + 231\alpha],$$

$$(6.5) \quad \frac{\partial |a_2|}{\partial \lambda} = -10W^{-1} |W|^{-1} [\alpha(1-\alpha)\lambda - (1+7\alpha)].$$

Wyniki analizy ilustruje rys. 5. Podobnie jak i w poprzednich przypadkach rozważane kryterium można uogólnić do postaci $z = \max(c_1|a_1|, c_2|a_2|)$.



Rys. 4



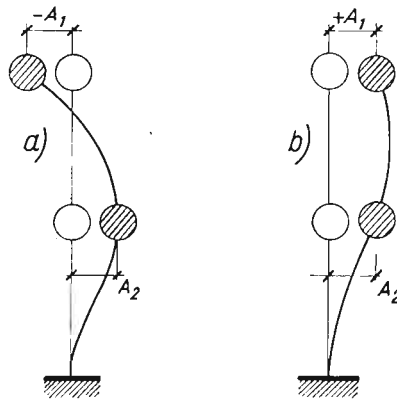
Rys. 5

7. Wnioski

Wyniki przeprowadzonej analizy przedstawione graficznie na rys. 2, 3, 4 i 5 pozwalają ustalić pewne fakty oraz wyciągnąć wnioski istotne dla praktycznego wykorzystania uzyskanych rezultatów.

Przede wszystkim jest sprawą oczywistą, że wyniki optymalizacji przeprowadzonej przy tych samych ograniczeniach, ale na podstawie różnych kryteriów jakości, mogą różnić się od siebie. Porównywanie tych wyników może mieć sens jedynie z punktu widzenia pewnego nowego kryterium. Porównywanie z punktu widzenia kryteriów zastosowanych

wanych przy optymalizacji jest pozbawione sensu, gdyż każdy z wyników jest optymalny, choć każdy w innym sensie. Tak więc wyniki otrzymane na podstawie rys. 2, 3, 4 i 5 można by na przykład porównywać z punktu widzenia stateczności wartości $z_{\min} = z(\alpha_0, \lambda_0)$ względem wariacji parametrów α i λ . Problem stateczności nabiera szczególnej wagi w momencie, gdy deterministyczny model rozważanego układu zastąpimy modelem probabilistycznym uwzględniającym np. warunki wykonawstwa budowlanego. Rozważając wykresy z rys. 2, 3, 4 i 5 z tego punktu widzenia spostrzegamy od razu, że wyniki optymalizacji odznaczające się największą statecznością względem wariacji α i λ , otrzymuje się na podstawie kryterium energetycznego (rys. 2). Rozważmy bowiem na przykład obszar dopuszczalny D określony nierównościami: $0,5 \leq \alpha \leq 0,7$; $20 \leq \lambda \leq 38$. Na podstawie kryterium energetycznego otrzymujemy w tym przypadku rozwiązanie $(\alpha_0, \lambda_0) = (0,7; 21,9)$, zaś na podstawie pozostałych trzech kryteriów geometrycznych odpowiednio rozwiązania: $(0,7; 38,0)$, $(0,7; 38,0)$, $(0,7; 36,6)$.[§] Pomimo dużej zgodności



Rys. 6

trzech ostatnich wyników, wynik pierwszy wydaje się być najlepszy z punktu widzenia stateczności. Rozwiązanie $(0,7; 21,9)$ znajduje się bowiem w obszarze małego gradientu funkcji kryterialnej, podczas gdy pozostałe rozwiązania wypadają zbyt blisko krzywej $\lambda_2(\alpha)$ wzdłuż której $z = \infty$.

O wyższości kryterium energetycznego nad omówionymi trzema kryteriami geometrycznymi świadczy również fakt następujący. Minimalizacja energii układu jest równoważna nie tylko minimalizacji amplitud drgań tego układu, lecz również minimalizacji momentów zginających występujących w tym układzie. Z geometrycznego punktu widzenia, reprezentowanego przez kryteria geometryczne, oba przypadki przedstawione na rys. 6 są całkowicie równoważne, podczas gdy podejście energetyczne zdecydowanie kwalifikuje przypadek a) jako niekorzystniejszy ze względu na znacznie większe momenty zginające.

Kryteria geometryczne w omawianym aspekcie energetycznym reprezentują więc podejście czysto formalne i nie uwzględniające bardzo istotnych czynników. Z powyższych rozważań wynika ponadto, że można by również sformułować takie kryteria jakości,

które pozwoliłyby minimalizować siły wewnętrzne układu np. w określonych jego przekrojach.

Wyznaczanie optymalnych wartości parametrów α i λ polega, jak wiadomo, na poszukiwaniu takiego punktu danego obszaru dopuszczalnego D , w którym funkcja kryterialna $z(\alpha, \lambda)$ przybiera wartość najmniejszą $z_{\min} = z(\alpha_0, \lambda_0)$. Jeżeli optymalizację przeprowadzamy dla prostokątnych obszarów dopuszczalnych D korzystając z odpowiedniego wykresu (rys. 2, 3, 4 lub 5), wówczas mogą mieć miejsce dwa przypadki. W przypadku pierwszym istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia: α_0 i λ_0 . W przypadku drugim mamy do czynienia z niejednoznacznością rozwiązania spowodowaną występowaniem kilku minimów lokalnych funkcji $z(\alpha, \lambda)$. Niejednoznaczność tę usuwamy obliczając wartości wszystkich minimów i przyjmując za α_0 i λ_0 współrzędne tego punktu, dla którego $z = z_{\min}$. Dla obszarów dopuszczalnych D o dowolnym kształcie rozwiązanie zagadnienia wymaga zastosowania metod programowania nieliniowego [3].

Na podstawie uzyskanego rozwiązania optymalnego α_0, λ_0 możemy już bezpośrednio obliczyć optymalne wartości obu mas m_1 i m_2 układu z rys. 1. Wykorzystując związki (2.4) otrzymujemy

$$m_1 = \alpha_0 \lambda_0 \frac{c}{\theta^2}, \quad m_2 = (1 - \alpha_0) \lambda_0 \frac{c}{\theta^2}.$$

Wyznaczenie wartości obu mas m_1 i m_2 kończy omawiany proces optymalizacji. Proces ten z założenia był procesem najkorzystniejszego doboru tylko dwóch wybranych parametrów przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów układu. Jasne jest, że takie ujęcie zagadnienia prowadzi do wyników, które mogą nie być zadowolające z bardziej ogólnego punktu widzenia. I tak, na przykład, ujmując sprawę optymalizacji kompleksowo można by zażądać dla układu z rys. 1 optymalnego doboru wszystkich jego parametrów przy spełnieniu wszystkich istotnych warunków, ograniczających amplitudy drgań, naprężenia itp. Jednak takie sformułowanie zagadnienia, jakkolwiek możliwe i celowe, wykraczałoby znacznie poza ramy niniejszej pracy. Jej głównym celem jest porównanie czterech wybranych kryteriów jakości w oparciu o uzyskane wykresy pozwalające przeprowadzić optymalizację przy danym obszarze dopuszczalnym. Takie graficzne przedstawienie wyników analizy jest możliwe jedynie przy optymalizacji dwuparametrowej, co było jednym z głównych powodów ograniczenia rozważań do dwóch zmiennych niezależnych.

Pewnego omówienia wymaga również kwestia przyjmowania obszarów dopuszczalnych. W rozważaniach ograniczono się do przypadku obszarów prostokątnych ze względu na to, że obszary takie otrzymuje się przez niezależne określenie dopuszczalnych przedziałów zmienności dla obu parametrów optymalizacji. Określenie tych przedziałów, które mogą być także nieograniczone, wynika z warunków wytrzymałościowych, konstrukcyjnych i innych jakie musi spełniać rozważany układ.

Przeprowadzona w p. 3 analiza ma również znaczenie praktyczne. Minimalizacja odpowiedzi układu na dane wymuszenie harmoniczne jest procesem strojenia, a raczej rozstrajania tego układu z uwagi na zjawiska rezonansowe. W naszym przypadku rozstrajanie odbywa się na drodze właściwego doboru mas. Znajomość rozwiązania najkorzyst-

niejszego z dynamicznego punktu widzenia, dla istniejącej, ale nie optymalizowanej konstrukcji, pozwala poprawiać jej dynamiczną pracę w przypadku, gdy nie jest ona zadowalająca. Ponieważ zmianę mas układu, w granicach określonych warunkami wytrzymałościowymi, można realizować w stosunkowo prosty sposób, zatem rezultaty omawianej analizy można z dużym powodzeniem wykorzystać w zagadnieniach czysto praktycznych. Zauważmy również, że do schematu z rys. 1 można sprowadzić jednonawowy płaski układ ramowy piętrowej hali przemysłowej wykonującej drgania antysymetryczne wymuszone harmonicznie. Źródłem wymuszenia może być np. wentylator zamocowany na konstrukcji dachu. Nawiasem trzeba tu nadmienić, że właśnie problemy praktyczne omawianego typu stały się bodźcem do napisania niniejszej pracy.

Pomimo dość zawężonego ujęcia omawiania optymalizacja jest jednak procesem bezpośredniego kształtowania własności dynamicznych układu na podstawie przyjętego kryterium jakości. Uogólnienie tego procesu przez odpowiednie powiększenie liczby parametrów biorących w nim udział oraz uwzględnienie wszystkich istotnych ograniczeń można uważać za nową metodę racjonalnego projektowania konstrukcji i ich elementów na obciążenia zmienne w czasie. Nowość metody należy oczywiście rozumieć w tym sensie, że opiera się ona na koncepcjach teorii sterowania i optymalizacji, które jak dotąd właściwie nie znalazły zastosowania w dynamice konstrukcji.

Problem optymalizacji liniowego układu drgającego jest jednak, jak widzieliśmy, problemem niestety nieliniowym z zakresu programowania matematycznego [3] i jego dostatecznie ogólne ujęcie wiąże się z poważnymi trudnościami matematycznymi. Dlatego też wydaje się, że zastosowanie optymalizacji jako ogólnej i powszechnej metody projektowania układów drgających jest dopiero sprawą przyszłości.

Literatura cytowana w tekście

1. C. W. MERRIAM III, *Teoria optymalizacji i projektowanie układów sterowania automatycznego*, WNT, Warszawa 1967.
2. J. T. TOU, *Nowoczesna teoria sterowania*, WNT, Warszawa 1967.
3. G. HADLEY, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, London 1964.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Рассматривается система, в виде консольного стержня, с двумя сосредоточенными массами m_1 и m_2 подверженного гармоническому вынуждению силой $P_0 \sin \theta t$, действующей на конце консоли (Рис. 1). В качестве параметров, подверженных оптимализации принимается соотношение масс m_1 , m_2 и их суммарное значение. Применяется четыре разные критерия оптимизации, связанные с амплитудами колебаний системы. Проводится качественный анализ полученных результатов.

S u m m a r y

OPTIMUM DYNAMIC DESIGN OF STRUCTURAL ELEMENTS

An elastic cantilever rod with two concentrated masses m_1, m_2 is subject to harmonic vibrations under the action of the force $P_0 \sin \theta t$ applied to the free end of the rod (Fig. 1). The variable parameters of the optimization process are the total value and the proportions of masses m_1, m_2 . Four different optimization criteria connected with the amplitudes of vibrations of the system have been adopted. Qualitative discussion of the results has been presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 grudnia 1968 r.

STATECZNOŚĆ NIEPRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW W STRUMIENIU PŁYNU

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Rozwój współczesnych metod budowy maszyn, rozwój lotnictwa i techniki raketowe istotnie rozszerzył klasę badanych dotychczas obciążeń elementów konstrukcji, głównie na tak zwane obciążenia niezachowawcze, a więc nie posiadające potencjału. Wśród nich wiele uwagi poświęcono obciążeniu elementów konstrukcji ciśnieniem wywieranym przez poruszający się z dużą prędkością strumień płynu.

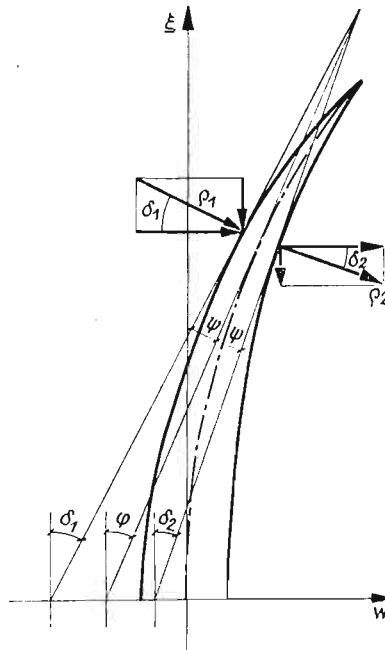
W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem stateczności pręta (płytki) niepryzmatycznego, jednostronnie utwierdzonego, umieszczonego w strumieniu płynu. Prędkość płynu jest równa U , a jej kierunek równoległy do nieodkształconej osi pręta. Ciśnienie boczne wywierane przez strumień płynu obliczymy z możliwie najprostszego prawa opływu, z podanego przez ILIUSZYNA [10] oraz ASHLEYA i ZARTARIANA [1], tzw. prawa *tłokowego*. Prawo to i zakres jego stosowania omawia w elementarny sposób WOLMIR [18], a ściślej wyprowadzenie zamieszczone jest w pracy ILIUSZYNA [10], w której autor formułuje tzw. hipotezę *plaskich przekrojów*. Przyjmując prawo tłokowe BOŁOTIN [3] bada stateczność płyty w strumieniu gazu, a MOWCZAN [16], [17] drgania wspornikowej płyty o nieskończonej szerokości, poruszającej się w gazie z dużą prędkością naddźwiękową, w kierunku od utwierdzenia do swobodnego brzegu, oraz stateczność pokrycia skrzydła samolotu poruszającego się w gazie. Ponadto prawo tłokowe jest wykorzystane w pracach HEDGEPEETHA [9], BIOTA [2] i innych, a w Polsce przez KORDAS [14], która zbadała stateczność pręta wspornikowego opływającego równoległym strumieniem płynu, z równoczesnym uwzględnieniem działania siły śledzącej. Znacznie ściślejsze prawa opływu, oparte na założeniu istnienia potencjału prędkości, są wykorzystane w pracach KACPRZYŃSKIEGO i KALISKIEGO [11], DŻYGADŁY [5], [6], KALISKIEGO i SOLARZA [12], KALISKIEGO i WOROSZYŁA [13], oraz w innych pracach tych samych autorów. Na ogół dotyczą one drgań samowzbudnych (typu flatteru) powłok cylindrycznych i stożkowych opływanych strumieniem płynu oraz stateczności drgań raket sprężystych. Przyjęty tu rozkład sił aerodynamicznych jest zgodny z podaną przez DORRANCE'A [4] i MILESA [15] teorią opływu ciał smukłych. Ponadto w pracach tych porównano rozwiązania uzyskane w oparciu o prawo tłokowe z rozwiązaniami ściślejszymi.

Celem niniejszej pracy jest znalezienie rozwiązań jak najprostszych, które, chociaż nieściśle, pozwolą ocenić wpływ niepryzmatyczności pręta na prędkość krytyczną strumienia

gazu. Założymy, że utrata stateczności następuje przez wyboczenie i będziemy stosowali tylko statyczne kryterium stateczności.

2. Założenia upraszczające i równania podstawowe

Pręt (płytkę) niepryzmatyczny, jednostronnie utwierdzony, znajduje się w strumieniu płynu. Prędkość płynu jest równa U i jest równoległa do nieodkształconej osi pręta. Zakładając, że mamy do czynienia z opływem stacjonarnym przyjmujemy, że ciśnienie boczne jest określone prawem *tłokowym*. W przypadkach pręta niepryzmatycznego ciśnienie z jednej jego strony jest większe od ciśnienia płynu w obszarze niezaburzonym (w nieskończoności), a z drugiej mniejsze, przy czym po obu stronach jest prostopadłe do odpowiednich ścianek pręta.



Rys. 1

Wielkość tych ciśnień jest, zgodnie z prawem *tłokowym*, proporcjonalna do prędkości płynu i do kąta nachylenia ścianki względem osi pręta nieodkształconego. Ograniczając się do badania utraty stateczności przez wyboczenie, rozważymy działanie sił statycznych na niepryzmatyczny pręt, przedstawiony na rys. 1. Na jedną stronę pręta działa ciągle obciążenie na jednostkę długości równe

$$(2.1) \quad p_1 = BUb(x)\delta_1,$$

gdzie $B = p_0\kappa/c_0$ jest stałą charakteryzującą własności płynu. Dla gazu c_0 , p_0 i U oznaczają odpowiednio: prędkość dźwięku, ciśnienie i prędkość płynu w obszarze niezaburzonym, κ — wykładnik politropy. Dla cieczy stałą B należy wyznaczyć doświadczalnie. Funkcja

$b(x)$ określa zmienną szerokość pręta (płytki) w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wybożenia, a kąt δ_1 jest zawarty między osią x i styczną do pręta.

Podobnie na drugą stronę działa ciągłe obciążenie

$$(2.2) \quad p_2 = BU b(x) \delta_2.$$

Jak widać z rysunku, kąty δ_1 i δ_2 zależą od ugięcia pręta oraz od stopnia zbieżności pręta

$$(2.3) \quad \delta_1 = \varphi + \psi, \quad \delta_2 = \varphi - \psi,$$

gdzie φ jest kątem zawartym między osią pręta po ugięciu i osią pręta nieodkształconego, ψ — kątem zawartym między osią pręta i styczną do powierzchni. Obciążenia p_1 i p_2 należy rozłożyć na składowe poziome i pionowe, co w rezultacie daje wypadkowe obciążenie poziome równe

$$(2.4) \quad p = p_1 \cos \delta_1 + p_2 \cos \delta_2$$

oraz obciążenie pionowe równe

$$(2.5) \quad q = p_1 \sin \delta_1 + p_2 \sin \delta_2.$$

Ograniczymy się w dalszym ciągu do małych kątów δ_1 i δ_2 , tzn. do teorii małych ugięć ($\varphi \ll 1$) oraz do prętów smukłych ($\psi \ll 1$). Rozwijając (2.4) i (2.5) w szeregi typu Maclaurina, otrzymujemy po wykorzystaniu (2.2) i (2.3)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p &= 2BUb(x)\varphi \left(1 - \frac{3}{2} \psi^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots \right), \\ q &= 2BUb(x)(\varphi^2 + \psi^2 + \dots). \end{aligned}$$

Ponadto przyjmiemy, że na końcu pręta działa siła P , której kierunek jest styczny do odkształconej osi na końcu swobodnym, tzn. że jest ona siłą śledzącą. Uwzględniając ciągłe obciążenie pionowe, równanie ugiętej osi pręta przybiera postać

$$(2.7) \quad (EJw'')'' + \left[P + \int_{\xi}^l q(\eta) d\eta \right] y'' - q(\xi) y' = p(\xi),$$

skąd otrzymujemy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} (EJw'')'' + \left[P + 2BU \int_{\xi}^l b(\eta)(\varphi^2 + \psi^2 + \dots) d\eta \right] y'' - \\ - 2BUb(\xi) \left(1 + \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \psi^2 + \dots \right) y' = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ do dalszych rozważań przyjmiemy tylko pręty smukłe, więc, jak wynika z rysunku oraz równania (2.8), nie popełniając większego błędu możemy pominąć wyrazy zawierające drugie i wyższe potęgi kątów φ i ψ .

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne $y = w/l$ i $x = \xi/l$, bezwymiarowe obciążenia

$$(2.9) \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0 J_0}, \quad \alpha = \frac{Bb_0 Ul^3}{E_0 J_0}$$

oraz zakładając, że sztywność zmienia się według wzoru $EJ = E_0 J_0 g(x)$, a szerokość pręta $b = b_0 f(x)$, przekształcimy równanie (2.8) do postaci

$$(2.10) \quad [g(x)y'']'' + \beta y'' - 2\alpha f(x)y' = 0.$$

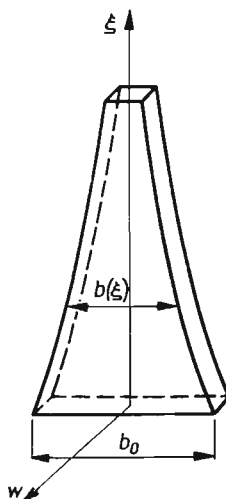
Do równania tego dołączamy warunki brzegowe, wynikające z założenia, że siła czołowa ma charakter siły śledzącej oraz z warunków utwierdzenia

$$(2.11) \quad y(0) = y'(0) = g(1)y''(1) = [(gy'')]_{x=1} = 0.$$

Przejdziemy obecnie do podania rozwiązań dla dwóch typów prętów: płasko-zbieżnego o stałej wysokości przekroju poprzecznego, wybaczonego się z płaszczyzny zbieżności, oraz płasko-zbieżnego o stałej szerokości $b = b_0$, wybaczonego się w płaszczyźnie zbieżności. W pierwszym przypadku stosowność prawa tłokowego jest nie mniej uzasadniona niż w zagadnieniach stateczności prętów (płytek) przyrządnych, natomiast w drugim popełniamy większe błędy z powodu odrzucenia składowych pionowych ciśnienia. Jednakże przy założeniu małego kąta ψ (niewielkiej zbieżności pręta), również i tu stosowanie prawa tłokowego wydaje się uzasadnione.

3. Stateczność pręta płaskiego o wykładniczo zmiennej szerokości

Pręt jednostronnie utwierdzony, przedstawiony na rys. 2, poddany jest działaniu ciśnienia bocznego na ściankę o zmiennej szerokości $b(x) = b_0 f(x)$. Założymy, że wysokość przekroju pręta jest stała i znacznie mniejsza niż szerokość oraz że opór czołowy jest pomijalnie mały w porównaniu z ciśnieniem bocznym, $\beta = 0$. To ostatnie założenie jest, jak widać z rysunku, uzasadnione w przypadku małej powierzchni przekroju poprzecznego swobodnego końca pręta.



Rys. 2

Moment bezwładności jest tu zmienny w taki sam sposób jak szerokość pręta: $J = J_0 f(x)$ i równanie (2.10) ulega uproszczeniu

$$(3.1) \quad [f(x)y'']'' - 2\alpha f(x)y' = 0 \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{Bb_0 U l^3}{E_0 J_0}.$$

Założymy w dalszym ciągu, że szerokość pręta zmienia się wykładniczo, tzn.

$$(3.2) \quad f(x) = e^{\varepsilon x},$$

gdzie ε jest dowolną stałą, określającą stopień zbieżności pręta. Podstawiając (3.2) do równania (3.1) otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe czwartego rzędu o stałych współczynnikach

$$(3.3) \quad y^{IV} + 2\varepsilon y''' + \varepsilon^2 y'' - 2\alpha y' = 0.$$

Poszukując rozwiązania tego równania w postaci

$$(3.4) \quad y(x) = C e^{\lambda x},$$

dostajemy równanie charakterystyczne

$$(3.5) \quad \lambda^4 + 2\varepsilon \lambda^3 + \varepsilon^2 \lambda^2 - 2\alpha \lambda = 0,$$

którego jeden pierwiastek jest równy zero, $\lambda_1 = 0$, a pozostałe określone są wzorami Cardana. Przez podstawienie $\lambda = z - 2/3\varepsilon$ sprowadzamy równanie (3.5) do postaci kanonicznej

$$(3.6) \quad z^3 - \frac{1}{3} \varepsilon^2 z - \left(\frac{2}{27} \varepsilon^3 + 2\alpha \right) = 0.$$

Ponieważ $\Delta = \alpha(\alpha + 2/27\varepsilon^3) > 0$ przynajmniej dla dodatnich ε (jak okaże się później również dla dowolnych ujemnych), więc

$$(3.7) \quad \lambda_2 = -2\mu - 2\varepsilon, \quad \lambda_3 = \mu + i\gamma, \quad \lambda_4 = \mu - i\gamma,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(3.8) \quad \mu = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} - \sqrt{\Delta}} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon,$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{\alpha + \frac{\varepsilon^3}{27} - \sqrt{\Delta}} \right).$$

Całką ogólną równania (3.3) jest więc funkcja

$$(3.9) \quad y(x) = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\mu x} \sin \gamma x + C_4 e^{\mu x} \cos \gamma x,$$

w której dowolne stałe $C_1 \dots C_4$ należy wyznaczyć z warunków brzegowych (2.11).

Po wstawieniu (3.9) do (2.1) otrzymujemy układ równań liniowych i jednorodnych ze względu na stałe C_i , który ma niezerowe rozwiązanie tylko wtedy, gdy jego wyznacznik główny jest równy zero. Obliczając ten wyznacznik, dostajemy po przekształceniach równanie przestępne na poszukiwaną bezwymiarową prędkość strumienia α w zależności od parametru ε

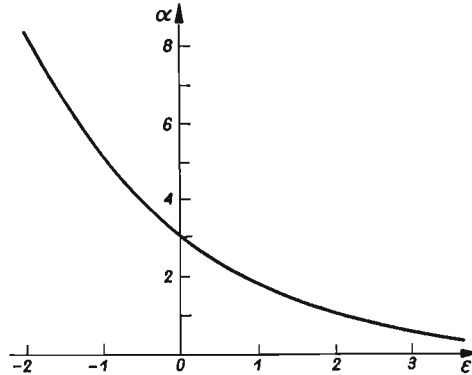
$$(3.10) \quad 2(\mu + \varepsilon) e^{-3\mu - 2\varepsilon} [(3\mu^2 - \gamma^2 + 2\varepsilon\mu) \sin \gamma + 2\gamma(2\mu + \varepsilon) \cos \gamma] + \gamma(\mu^2 + \gamma^2) = 0.$$

W przypadku, gdy $\varepsilon = 0$ otrzymujemy równanie podane już przez MOWCZANA [17], BIOTA [2], BOŁOTINA [3] i KORDASA [14]

$$(3.11) \quad 2e^{-3\mu_0} \cos(-\sqrt{3}\mu_0) + 1 = 0, \quad \text{gdzie} \quad \mu_0 = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{2\alpha}.$$

Pierwiastki równania przestępnego (3.10) obliczono dla czterech wartości ε , mianowicie: dla $\varepsilon = -2$, $\alpha = 8,325$; dla $\varepsilon = -1$, $\alpha = 5,239$; dla $\varepsilon = 0$, $\alpha = 3,1651$, dla $\varepsilon = +3$, $\alpha = 0,544$ i na tej podstawie sporządzono wykres (rys. 3).

Należy zaznaczyć, że problem optymalizacji parametrycznej (jak w [7]) nie może być w tym przypadku w ogóle postawiony, ponieważ ze zmniejszeniem się parametru ε rośnie



Rys. 3

prędkość krytyczna. Przy przekroju zmieniającym się według funkcji typu $\delta(x)$ Diraca, prędkość krytyczna jest nieskończenie wielka.

4. Stateczność prętów niepryzmatycznych o stałej szerokości

Jako drugi przypadek rozważymy pręt wspornikowy umieszczony w strumieniu płynu, o stałej szerokości ściany bocznej, prostopadłej do płaszczyzny wyboczenia (rys. 4). Zakładając, że ściana boczna w płaszczyźnie wyboczenia jest bardzo wąska, tym bardziej możemy pominąć obciążenie pionowe pochodzące od parcia płynu. Uwzględnimy tu natomiast opór czołowy, scharakteryzowany współczynnikiem β . W równaniu (2.10), założymy wobec tego, że $f(x) \equiv 1$, otrzymując

$$(4.1) \quad [g(x)y']'' + \beta y'' - 2\alpha y' = 0.$$

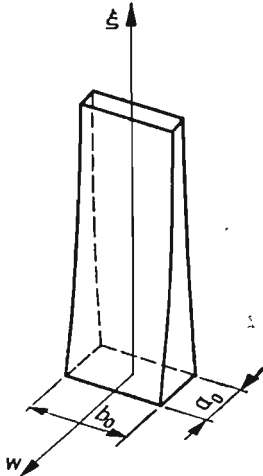
Nawet przy założeniu najprostszych funkcji $g(x)$, całkę ogólną tego równania jest bardzo trudno znaleźć. Można jednak postąpić inaczej, mianowicie zastosować metodę odwrotną, tzn. założyć ściśłą postać równania linii ugięcia $y(x)$, spełniającą warunki brzegowe (2.11), a obliczać nieznaną rozkład sztywności $g(x)$. Całkując jednokrotnie (4.1) otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu na funkcję $g(x)$

$$(4.2) \quad g' + \frac{y'''}{y''} g = \frac{C_1 + 2\alpha y - \beta y'}{y''},$$

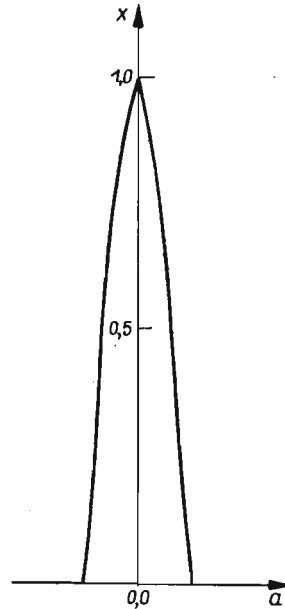
gdzie C_1 — stała dowolna. Całka ogólna tego równania może być zapisana w postaci

$$(4.3) \quad g(x) = \frac{1}{y''} \left[C_1 x + C_2 - \beta y + 2\alpha \int y(x) dx \right].$$

Kształt pręta w sposób istotny zależy będzie od przyjętej funkcji $y(x)$; najprostsze rozwiązanie otrzymamy wtedy, gdy przyjmiemy, $y(x) = Ax^2$. Spełnia ona tylko dwa geometryczne warunki brzegowe (2.11), dwa pozostałe muszą być spełnione poprzez funkcję $g(x)$. Z warunków statycznych na końcu pręta, wobec $y''(1) \neq 0$ wynika, że $g(1) = 0$



Rys. 4



Rys. 5

i $g'(1) = 0$. Dodatkowe założenie, że sztywność w przekroju utwierdzonym jest równa J_0 , tzn. $g(0) = 1$, pozwala wyrazić związek między obciążeniami α i β . Po prostych przeliczeniach otrzymujemy z (4.3)

$$(4.4) \quad g(x) = (1-x) + \frac{1}{2} \beta x(1-x) - \frac{1}{3} \alpha x(1-x^2), \quad \alpha = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \beta.$$

Przy braku siły czołowej (jest to uzasadnione w tym przypadku z uwagi na $g(1) = 0$ i $g'(1) = 0$) mamy

$$(4.5) \quad g(x) = \frac{1}{2} (x^3 - 3x + 2), \quad \alpha = \frac{3}{2}.$$

Kształt pręta pokazano na rys. 5.

Cały szereg innych rozwiązań, o niezerowych przekrojach końcowych, można otrzymać zakładając postać linii ugięcia w następujący sposób, zapewniający spełnienie dwóch statycznych warunków brzegowych na swobodnym końcu pręta

$$(4.6) \quad y'' = (1-x)^2 \sum_{n=0}^N a_n (1-x)^n = \sum_{n=0}^N a_n (1-x)^{n+2},$$

gdzie a_n i N są to dowolne współczynniki.

Całkując (4.6) dwukrotnie i uwzględniając geometryczne warunki brzegowe otrzymujemy linię ugięcia, spełniającą wszystkie warunki brzegowe

$$(4.7) \quad y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} (1-x)^{n+4} - (1-x) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4}.$$

Wstawiając (4.7) do (4.3) określimy sztywność pręta wzorem

$$(4.8) \quad g(x) = \frac{C_1(1-x) + C_2 - \beta \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} (1-x)^{n+4} - (1-x) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4} \right] - 2\alpha \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)(n+5)} (1-x)^{n+5} - \frac{1}{2} (1-x)^2 \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + (1-x) \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4} \right]}{(1-x)^2 \sum_{n=0}^N a_n (1-x)^n}.$$

Wyrażenie to posiada osobliwość w punkcie $x = 1$, i aby uniknąć nieskończonych przekrojów na końcu pręta, należy ją usunąć przez odpowiedni dobór stałych C_1 i C_2 . Musimy zażądać, aby wartość $x = 1$ była podwójnym zerem licznika wzoru (4.8). Jak łatwo sprawdzić, gdy

$$C_1 = -\beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} + 2\alpha \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4} \quad \text{i} \quad C_2 = \beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+4},$$

można licznik wzoru (4.8) podzielić przez $(1-x)^2$. Uwzględniając ponadto dodatkowe założenie $g(0) = 1$ otrzymujemy następujący rozkład sztywności pręta oraz związek między bezwymiarowymi obciążeniami

$$(4.9) \quad g(x) = \frac{\alpha \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+3} - 2 \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)(n+5)} (1-x)^{n+3} \right] - \beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)} (1-x)^{n+2}}{\sum_{n=0}^N a_n (1-x)^n},$$

$$(4.10) \quad \alpha \sum_{n=0}^N \frac{n^2 + 9(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)} a_n = \sum_{n=0}^N a_n + \beta \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(n+3)(n+4)}.$$

Korzystając z powyższych wzorów możemy znaleźć dowolnie wiele rozwiązań podanego problemu stateczności. Oczywiście jesteśmy tu, wobec stosowania metody odwrotnej, «skazani» na rozwiązanie takie, jakie otrzymamy przy założonej linii ugięcia pręta. Mimo to, mając do dyspozycji ogromną ilość możliwości doboru parametrów a_n , możemy (co prawda z dużym nakładem pracy) starać się przybliżyć otrzymany kształt pręta do danego z góry.

Przechodząc do przykładu przyjmijmy $N = 0$, $a_0 \neq 0$ ($\alpha_i = 0$ dla $i > 0$); wobec czego

$$(4.11) \quad g(x) = \alpha \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{30} (1-x)^3 \right] - \frac{1}{12} \beta (1-x)^2, \quad 18\alpha = 60 + 5\beta.$$

Przy sile czołowej równej zeru otrzymujemy pręt bardzo zbliżony do pryzmatycznego

$$(4.12) \quad g(x) = \frac{1}{9} [10 - (1-x)^3], \quad \alpha = \frac{10}{3} = 3,3333$$

(wobec $\alpha = 3,1651$ dla pręta pryzmatycznego).

Na zakończenie należy zauważyć, że przyjęcie prędkości strumienia płynu równej zeru nie prowadzi do rozwiązań ($\beta < 0$), ponieważ stosowane przez nas statyczne kryterium stateczności nie może określić śledzącej siły krytycznej.

5. Sformułowanie problemu optymalnego kształtu pręta niepryzmatycznego o stałej szerokości, opływanego strumieniem płynu

Opierając się na metodzie Czencowa szczegółowo przedstawionej w pracy [8] i równaniu (4.1), w którym $\beta = 0$, możemy sformułować problem optymalizacji kształtu pręta pokazanego na rys. 4.

Do równania ugiętej osi pręta

$$(5.1) \quad [g(x)y'']'' - 2\alpha y' = 0$$

wprowadzimy nową zmienną zależną określoną wzorem

$$(5.2) \quad y' = t'',$$

$$(5.3) \quad [g(x)t''']'' - 2\alpha t'' = 0.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu (5.3) mamy

$$(5.4) \quad g(x)t'''' - 2\alpha t = C_1x + C_2,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, oraz po nowym podstawieniu

$$(5.5) \quad t = v - \frac{C_1x + C_2}{2\alpha},$$

otrzymujemy

$$(5.6) \quad g(x)v'''' - 2\alpha v = 0.$$

Z równania (5.6) obliczamy funkcję $g(x)$ i wstawiamy ją do wzoru na objętość pręta

$$(5.7) \quad V = A_0 l \int_0^1 g^{1/3} dx = A_0 l (2\alpha)^{1/3} \int_0^1 \left(\frac{v}{v''''} \right)^{1/3} dx = A_0 l (2\alpha)^{1/3} \int_0^1 F(v, v''') dx.$$

Pisząc równanie Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału (5.7) otrzymujemy

$$(5.8) \quad \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial v''''} \right) - \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

$$(5.9) \quad \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{v}{v''''^2} \left(\frac{v}{v''''} \right)^{-2/3} \right] + \frac{1}{v''''} \left(\frac{v}{v''''} \right)^{-2/3} = 0,$$

a stąd ostatecznie

$$(5.10) \quad v\varphi'''' + v''''\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{v^{1/3}}{v''''^{4/3}}.$$

Rozwiązanie równań (5.10) wydaje się bardzo trudne bez użycia maszyn cyfrowych.

Na zakończenie należy stwierdzić, że uzyskane rozwiązania są obarczone błędami, wynikającymi z przybliżonego charakteru stosowanego prawa opływu. Dalsze uściślenie wyników powinno polegać na zwiększeniu dokładności i uogólnieniu tego prawa.

Pragnę tu również wyrazić podziękowanie prof. dr inż. MICHAŁOWI ŻYCZKOWSKIEMU za cenne wskazówki, udzielone mi podczas wykonywania tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. H. ASHLEY, C. ZARTARIAN, *Piston theory — a new aerodynamics tool for the aeroelastician*, J. Aeronaut. Sci., 12, 23 (1956), 1109–1118.
2. M. A. ВЮТ, *The divergence of supersonic wings including chord wise bending*, Report No 67, Cornell Aeronautical Lab., 1954.
3. В. В. БОЛОТИН, *К вопросу об устойчивости пластинки в потоке сжимаемого газа*, Вопросы прочности материалов и конструкций, Изд. А. Н. СССР, Москва 1959, 194–204.
4. W. H. DORRANCE, *Nonsteady supersonic flow about pointed bodies of revolution*, JAS, 8, 18 (1951), 505–511.
5. Z. DŻYGADŁO, *Drgania samowzbudne powłoki cylindrycznej o skończonej długości w opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 8, 10 (1961).
6. Z. DŻYGADŁO, *Drgania samowzbudne zaostrej powłoki stożkowej w opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 7, 10 (1961).
7. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności* (w druku).
8. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna*, Rozpr. Inż., 2, 17 (1969).
9. J. M. HEDGERETH, *On the flutter of panels at high Mach number*, JAS, 6, 23 (1956), 609–610.
10. А. А. ИЛЮШИН, *Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей*, Прикл. мат. и мех., 6, 20 (1956), 733–755.
11. J. KACPRZYŃSKI, S. KALISKI, *Flutter odkształcalnej rakiety w opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 8, (97), 9 (1960), 3–19.
12. S. KALISKI, L. SOLARZ, *Drgania aerosprężyste i stateczność wirującej rakiety odkształcalnej w opływie zlinearyzowanym*, Biul. WAT, 7, (107), 10 (1961).
13. S. KALISKI, S. WOROSZYŁ, *Flutter odkształcalnej rakiety w opływie naddźwiękowym wg drugiego przybliżenia asymptotycznego*, Biul. WAT, 8 (144), 13 (1964).
14. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływanego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inż., 1, 13 (1965), 19–41.
15. J. W. MILES, *The potential theory of unsteady supersonic flow*, Cambridge 1959.
16. А. А. МОВЧАН, *О колебаниях пластинки, движущейся в газе*, Прикл. мат. и мех., 2, 20 (1956), 231–222.
17. А. А. МОВЧАН, *Об устойчивости панели, движущейся в газе*, Прикл. мат. и мех., 2, 21 (1957), 211–243.
18. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Опираясь на прямой поршневого закон и статический критерий устойчивости, в работе получены несколько решения проблемы устойчивости непризматического стержня, находящегося в потоке жидкости. После формулировки задачи и обсуждения принятых предположений опре-

делена критическая величина скорости потока, для плоского стержня, с экспоненциально изменяющейся шириной. Применяя обратный метод, получены формы плоских стержней, для выше предположенных линий прогиба. В заключении определена проблема оптимальной формы непризматического стержня с постоянной шириной, обтекаемого потоком жидкости и даются дифференциальные уравнения обсуждаемой задачи. Результаты работы надо принимать как приближенные, так как принятый закон не является точным.

S u m m a r y

STABILITY OF NONPRISMATIC BARS IN FLUID FLOW

Applying a simple law of flow about a bar (plate) i.e. «piston theory» (plane section law), some solutions of the stability problem of nonprismatic bars in parallel fluid flow were obtained in this paper.

After formulation of the problem and discussion of simplifying assumptions, the critical velocity value was determined for a flat bar with exponentially varying width.

By a further application of the inverse method, the shapes of flat bars were found under the assumed deflection lines.

Finally, the problem of optimization of a nonprismatic bar shape of constant width in fluid flow was formulated.

Results of this work cannot be treated as exact ones inasmuch as the «piston theory» is an approximate one.

OLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 stycznia 1969 r.



O PEWNEJ METODZIE WYZNACZANIA KRYTERIUM ZNISZCZENIA POLIMERÓW

ANDRZEJ DRESCHER (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Stosowane coraz szerzej w konstrukcjach inżynierskich wielkocząsteczkowe tworzywa sztuczne (w stanie stałym) są materiałami o wyraźnych cechach lepkosprężystych. Badaniu tych cech, w zależności od różnych programów obciążania jak i temperatury, poświęcono znaczną liczbę doświadczeń. Doświadczenia te wykazały m.in., że poza obszarem lepkosprężystym pojawiają się w materiale, przed samym momentem zniszczenia, cechy nieodwracalne plastyczne. Z inżynierskiego punktu widzenia moment pojawienia się znacznych odkształceń plastycznych może być w tych materiałach utożsamiany z początkiem zniszczenia. O ile własnościom lepkosprężystym polimerów poświęcona jest obszerna literatura to zagadnienie kryterium zniszczenia lub uplastycznienia pozostaje mało zbadane. Odnosi się to w szczególności do badań w złożonym stanie naprężenia. Nieliczne prace rozpatrujące to zagadnienie wykorzystują metodykę opracowaną i szeroko stosowaną w badaniach metali. Jako jedno z podstawowych doświadczeń należy tu wymienić badania cienkościennych rurek poddanych rozciąganiu, skręcaniu czy ciśnieniu wewnętrznemu. Analogiczną metodykę zastosowali w badaniach cech lepkosprężystych polimerów m.in. LIFSHITZ i KOLSKY [1], ONARAN i FINDLEY [2,3] a cech plastycznych THORKILDSEN [4]. Odmiennej schemat doświadczenia, polegający na rozciąganiu płyty przy równoczesnym poprzecznym jej ściskaniu pomiędzy dwoma stemplami, zastosowali BOWDEN i JUKES [5]. Wyniki THORKILDSENA uzyskane dla polimetakrylanu metylu wskazują na postać kryterium uplastycznienia zbliżoną do warunku Hubera-Misesa. Odmienne rezultaty dla tego samego materiału uzyskali BOWDEN i JUKES. Stwierdzili oni, że zachowanie się materiału opisuje warunek Coulomba-Mohra, co odpowiada wpływowi pierwszego niezmiennika stanu naprężenia na stan uplastycznienia. W obu cytowanych pracach realizowano jedynie płaski stan naprężenia. Przytoczone powyżej rezultaty wskazują, że nawet dla badanego polimetakrylanu metylu niemożliwe jest w chwili obecnej sformułowanie poprawnego kryterium uplastycznienia. Dodatkową trudność stwarza zależność cech plastycznych polimerów od historii naprężeń czy odkształceń w obszarze lepkosprężystym (materiały sprężysto-lepkoplastyczne).

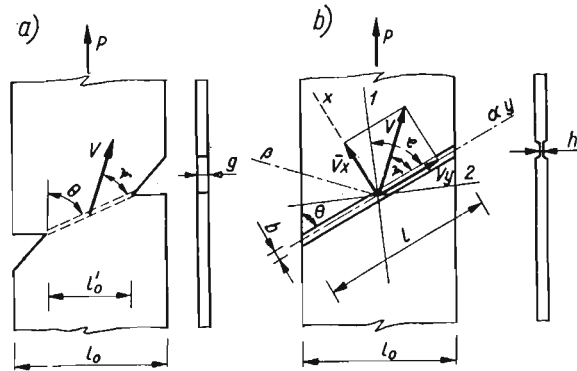
W niniejszej pracy przedstawiono wyniki wstępnych badań dotyczących kryterium zniszczenia polichlorku winylu przy wykorzystaniu metody doświadczalnej zaproponowanej przez HILLA [6]. Metoda ta polega na rozciąganiu płaskich próbek z naciętymi

bruzdami, w których, w momencie uplastycznienia, pojawia się płaski stan naprężenia. Metodę tą zastosowali do metali HUNDY i GREEN [7], LIANIS i FORD [8], oraz ELLINGTON [9].

2. Podstawy teoretyczne metody

W pracy [6], będącej kontynuacją wcześniejszych rozważań [10], HILL podał podstawy teoretyczne nowej metody określania warunku plastyczności materiałów idealnie plastycznych. Metoda ta opiera się na analizie możliwości wystąpienia lokalnej linii nieciągłości prędkości oddzielającej obszary sztywne.

Rozważmy cienkie pasmo o grubości g i szerokości $l_0 \gg g$, w którym wykonano dwa ostre karby niesymetrycznie umieszczone (rys. 1a) lub nacięto po obu stronach dwie bruzdy o szerokości b i grubości h i nachyleniu θ (rys. 1b). Jeżeli pasmo to zostanie poddane jednoosiowemu rozciąganiu równoległe do krawędzi, to w części materiału łączącej dna karbów lub w bruzdzie pojawią się, przy odpowiedniej wartości siły rozciągającej P , zlokalizowane odkształcenia plastyczne, a deformacja będzie miała charakter ukośnej



Rys. 1

szyjki. Części materiału przylegające do szyjki będą w stanie sprężystym, który przy małych wartościach odkształceń może być rozumiany jako stan sztywny. Wzajemny ruch obu części sztywnych określony jest przez wektor przemieszczenia lub prędkości przemieszczenia V nachylony do linii szyjki pod kątem ψ (rys. 1). Nacięcie karbów lub bruzd zmusza materiał do deformacji w odpowiednio nachylonej strefie, czego konsekwencją jest, w zależności od własności materiału, pewien kierunek względnego przemieszczenia części sztywnych. Jeżeli $\psi = 0$, zachodzi jedynie wzajemny prześlizg. Analogiczny mechanizm deformacji ma czasami miejsce przy rozciąganiu płaskich, nieosłabionych próbek [11], gdzie jednakże nachylenie szyjki jest niezależne od woli eksperymentatora¹⁾. Jeżeli szerokość szyjki b jest znacznie mniejsza od długości l , to kierunek wzdłuż szyjki i kierunek prostopadły do wektora V można uważać za nierozciągliwe. W teorii ciała idealnie plastycznego kierunki takie są kierunkami charakterystyk prędkości. Przyjmuąc układ x, y , jak na rys. 1b, składowe wektora prędkości V wyniosą odpowiednio

$$(2.1) \quad V_x = V \sin \psi, \quad V_y = V \cos \psi,$$

¹⁾ Zjawisko ukośnego formowania się szyjki zaobserwowali i wykorzystali przy analizie anizotropii granicy plastyczności w walcowanej folii polietylenowej BRIDLE, BUCKLEY i SCANLAN [12].

a składowe tensora prędkości odkształceń

$$(2.2) \quad \dot{\epsilon}_x = \frac{V \sin \psi}{b}, \quad \dot{\epsilon}_y = 0, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{V \cos \psi}{b}.$$

Główne prędkości odkształceń w płaszczyźnie pasma wyrażą się przez zależności

$$(2.3) \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{V}{2b} (1 + \sin \psi), \quad \dot{\epsilon}_2 = -\frac{V}{2b} (1 - \sin \psi), \quad (\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2).$$

Z zależności (2.3) wynika, że znając z doświadczeń kąt ψ można określić główne prędkości w płaszczyźnie pasma z dokładnością do prędkości V . Trzecia główna prędkość odkształcenia może być wyznaczona z warunku zmian objętości materiału w stanie plastycznym, i np. dla materiału nieściśliwego wynosi

$$(2.4) \quad \dot{\epsilon}_3 = -\frac{V}{b} \sin \psi.$$

Kierunki główne prędkości nachylone są do kierunku szyjki pod kątami $\varphi = \pi/4 \pm \psi/2$. Stan naprężenia w szyjce, wobec nieznaczonej grubości pasma lub bruzdy, można przyjąć za płaski. Stan ten jest statycznie niewyznaczalny, z wyjątkiem przypadku kiedy wiadomo, że badany materiał jest izotropowy, tzn. spełniona jest współosiowość kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia. W tym ostatnim przypadku rozpatrując równowagę elementu wyciętego w szyjce otrzymamy następujące wyrażenia na naprężenia główne

$$(2.5) \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_0}{\cos \psi} [\sin(\theta - \psi) + \cos \theta], \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{\cos \psi} [\sin(\theta - \psi) - \cos \theta], \quad \sigma_3 = 0,$$

gdzie $\sigma_0 = P/hl$ jest naprężeniem działającym pomiędzy obszarem sztywnym a brzegiem szyjki. Należy zaznaczyć, że stan (2.5) nie spełnia warunków brzegowych na krawędziach pasma; jest ważny tylko dla szerokiego pasma. Wszystkie przytoczone zależności opierają się ponadto na założeniu, że deformacja w szyjce jest jednorodna, kształt szyjki nie wywołuje spiętrzenia naprężeń (efekt karbu) i materiał ma nieznaczone wzmocnienie. Dla materiału o wyraźnym wzmocnieniu obszar deformacji plastycznej wykracza poza bruzdę, co prowadzi do niejednorodnego stanu odkształceń i naprężeń. Ograniczenia te wskazują, że doświadczenie daje prawdziwe wyniki tylko w chwili pierwszego uplastycznienia.

Z powyższych rozważań wynika, że dla materiału izotropowego w płaszczyźnie pasma, znając na podstawie doświadczeń kierunek nieciągłości prędkości V dla szeregu próbek o różnym nachyleniu bruzdy θ , oraz wartości siły rozciągającej w momencie uplastycznienia, można obliczyć naprężenia główne, a zatem zbudować na płaszczyźnie (σ_1, σ_2) geometryczną interpretację warunku plastyczności. Wadą metody jest, że kąt ψ nie może być dany, a jedynie wynika z własności badanego materiału. W rezultacie nie można przewidzieć jaką część warunku plastyczności otrzyma się z doświadczeń. W szczególnym przypadku dla $\theta > \pi/4$ może zdarzyć się, że będzie spełniona zależność $\psi = 2\theta - \pi/2$, co odpowiada jednemu punktowi $\sigma_1 = P/hl_0$, $\sigma_2 = 0$, na płaszczyźnie (σ_1, σ_2) . Niemożliwe jest również sprawdzenie w trakcie doświadczenia izotropii materiału.

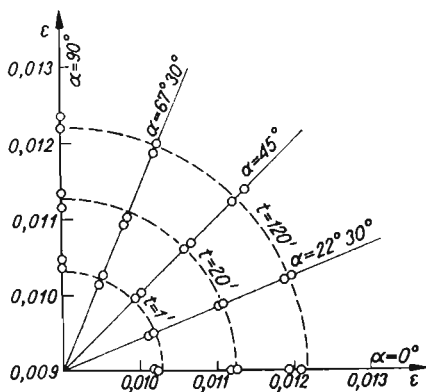
Przedstawione wady i ograniczenia metody Hilla nie są równoznaczne z jej nieprzydatnością, czego dowodem są wyniki badań dla metali uzyskane przez HUNDY'EGO

i GREENA [7], LIANISA i FORDA [8] — próbki z karami, oraz ELLINGTONA [9] — próbki z bruzdami. Autorzy ci uzyskali wyniki potwierdzające słuszność warunku plastyczności Hubera–Misesa i potencjalnego prawa płynięcia Levy–Misesa. Sprawdzenie słuszności prawa Levy–Misesa jest w powyższej metodzie stosunkowo proste (por. p. 4).

Podstawy teoretyczne metody wskazują, że może być ona użyta do innych materiałów niż metale, jeżeli materiały te wykazują własności plastyczne bez wyraźnego wzmocnienia. Za takie materiały można uznać twarde tworzywa wielkocząsteczkowe. Zaletą metody, oprócz jej prostoty, wydaje się także fakt, że wykorzystuje się w niej efekt lokalizacji odkształceń plastycznych, mający ujemny wpływ w badaniach polimerów na rurkach. Występująca często lokalna utrata stateczności rurki w momencie uplastycznienia uniemożliwia dokonanie pomiaru pola deformacji; naglej zmianie ulega też stan naprężenia.

3. Opis i wyniki doświadczeń

Do doświadczeń użyto polichlorku winylu w postaci płyty o grubości 2,0 mm. Celem stwierdzenia, czy badany materiał nie wykazuje anizotropii własności mechanicznych, wywołanej procesem formowania, przeprowadzono wstępną serię doświadczeń. W tym celu wycięto z płyty 10 gładkich próbek, o wymiarach identycznych z próbkami do badań właściwych, zorientowanych względem pewnego przyjętego kierunku pod kątami $\alpha = 0^\circ$,

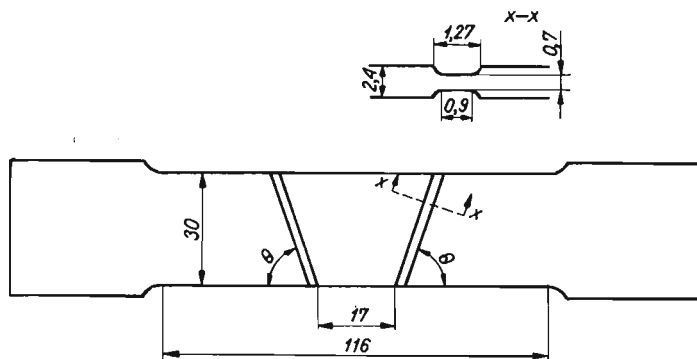


Rys. 2

22°30', 45°, 67°30', 90°, otrzymując dla każdego kierunku po dwie próbki. Próbki, po wygrzaniu w temp. 87°C przez czas 22 godz., poddano jednoosiowemu rozciąganiu przy stałej sile — pelzaniu, wykorzystując do tego celu maszynę wytrzymałościową, na której wykonano również badania właściwe. Zastosowano jedną wartość siły dającą naprężenie $\sigma = 300 \text{ kG/cm}^2$. Obserwacje wydłużeń osiowych, mierzonych czujnikiem Amslera o dokładności 0,01 mm na bazie 78,5 mm, prowadzono przez czas 120 min. Na rys. 2 przedstawiono otrzymane wartości odkształceń osiowych dla kilku czasów t w zależności od wartości kąta α . Niewielkie odchylenia położenia punktów doświadczalnych w stosunku do okręgów wskazują, że własności materiału w płaszczyźnie płyty można uznać za izotropowe. Badanie anizotropii ograniczono jedynie do płaszczyzny płyty ze względu na

jej niewielką grubość uniemożliwiająca wykonanie próbek na rozciąganie w kierunku prostopadłym do płyty. Ewentualne badanie na ściskanie cienkich krążków uznano za nieprzekonywające z uwagi na możliwość różnic we własnościach przy ściskaniu i rozciąganiu.

Próbki do badań właściwych wycięto z tej samej płyty, dla której wykonano badania anizotropii, przy zachowaniu stałego kierunku wycinania $\alpha = 0^\circ$. Z dwóch możliwych rodzajów próbek przyjęto próbki z bruzdami. Wstępne badania na próbkach z karami wykazały, że przed utworzeniem się ukośnej szyjki materiał przylegający do dna karmów ulegał zniszczeniu (pęknięcie). Kształt próbek i wymiary przedstawiono na rys. 3. Bruzdy wykonano symetrycznie względem połowy długości próbki celem zmniejszenia możliwego zginania. Dla kolejnych wartości kąta $\theta = 45^\circ, 55^\circ, 60^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 75^\circ, 85^\circ$, wykonano po 5–6 próbek. W wyniku zastosowanej technologii nacinania bruzd (struganie) otrzymano pewne nieznaczne różnice w ich wymiarach i nachyleniu. Różnice te uwzględniono przy analizie danych. Na jednej powierzchni próbki naniesiono siatkę rys równoległe i prostopadle do kierunku dłuższego boku próbki. Porównanie położenia siatki rys przed i po doświadczeniu pozwoliło wyznaczyć kierunek względnego przesunięcia części nieupla-

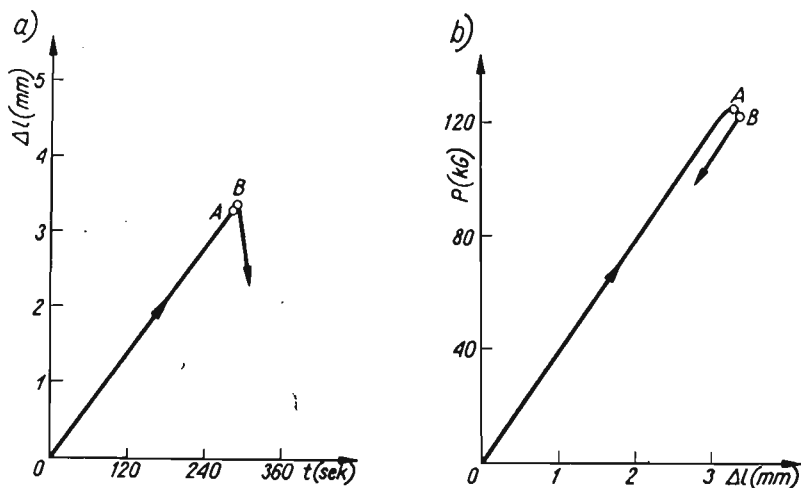


Rys. 3

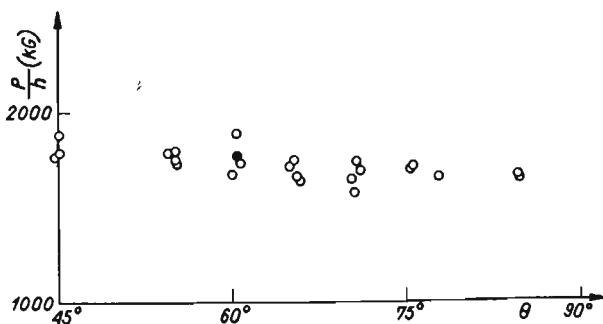
stycznionych. Przygotowane próbki poddano wygrzewaniu przez czas 22 godzin w temperaturze 87°C i powolnemu stygnięciu. Zabieg ten miał na celu zmniejszenie ewentualnych naprężeń własnych. Doświadczenia przeprowadzono przy stałej prędkości wydłużenia $\Delta l/\Delta t = 0,7$ mm/min w prostej maszynie wytrzymałościowej przeznaczonej zasadniczo do prób pełzania. Maszyna ta, po zablokowaniu dźwigni, pozwala, dzięki układowi przekładni połączonych z dolną szczęką, na przeprowadzanie prób przy stałych prędkościach wydłużania. Dla dokładnego pomiaru sił w momencie uplastycznienia, między przekładnię a dolną szczękę wstawiono dynamometr pałkowy z naklejonymi tensometrami elektrooporowymi, których wskazania przekazywano na samopiszący rejestrator.

Na rys. 4 przedstawiono realizowany w doświadczeniach program wydłużania i odpowiadający mu typowy wykres $P = P(\Delta l)$. Oba wykresy odpowiadają wydłużeniom końców próbki, co nie jest równoznaczne wydłużeniom bruzd i części nieosłabionych. Ze względu na mniejszy przekrój bruzd ich wydłużenia są zawsze większe od wydłużeń nieosłabionych części próbek. Z porównania obu wykresów widać, że w chwili oznaczonej punktem *A* obciążenie w próbce gwałtownie maleje mimo, że próbka jest w dalszym ciągu

rozciągana ze stałą prędkością. Punktowi A odpowiada początek rozwoju znacznych odkształceń plastycznych w bruzdzie, co w efekcie prowadzi do spadku siły rozciągającej. Moment ten charakteryzował się początkiem wyraźnego zbielenia materiału w bruzdzie wywołanego powstaniem mikropęknięć. Dla łatwiejszego zarejestrowania kierunku poślizgu w bruzdzie proces wydłużania prowadzono nieco poza punkt A . Dla zapobieżenia zerwaniu próbki, w momencie oznaczonym punktem B , włączano przeciwnie pracujący silnik o znacznie wyższych obrotach wywołując szybkie odciążenie próbki. Po wyjęciu



Rys. 4

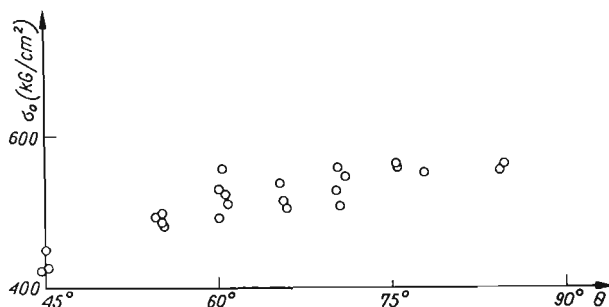


Rys. 5

próbek z maszyny pozostawiano je na okres 14 dni w stanie nieobciążonym dla umożliwienia zakończenia procesu nawrotu opóźnionych odkształceń sprężystych (retardacji). Mierzone następnie na mikroskopie zmiany położenia siatki rys dały informacje o kierunku poślizgu odpowiadającego jedynie odkształceniom plastycznym. Wydłużenie bruzd między punktami A i B nie było identyczne dla każdej próbki, jednakże po wykonaniu pomiarów kąta ψ stwierdzono, że obserwowany rozrzut nie jest zależny od wielkości tego wydłużenia. Na podstawie wykresu 4b i niezależności kąta ψ od wydłużenia można

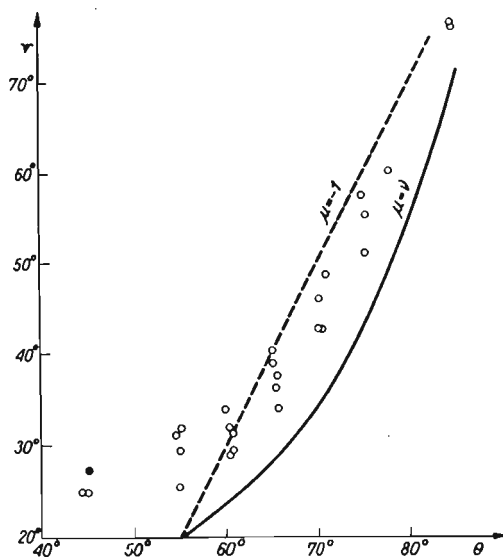
przyjąć, że badany materiał zachowuje się, poza punktem A , podobnie do materiału plastycznego bez wyraźnego wzmocnienia.

Rysunek 5 przedstawia zależność siły rozciągającej w punktach A , odniesionej do grubości bruzdy, od nachylenia θ . Siła ta maleje nieznacznie ze wzrostem kąta θ . Wartości



Rys. 6

średniego naprężenia rozciągającego $\sigma_0 = P/hl$ przedstawia rys. 6. Otrzymane z pomiarów wartości kąta ψ w funkcji θ zamieszczono na rys. 7. Widoczny na wszystkich rysunkach rozrzut wyników może wskazywać na różnice własności poszczególnych próbek lub różnie rozmieszczone mikrodefekty. Jest faktem dobrze znanym, że badania wytrzymałościowe

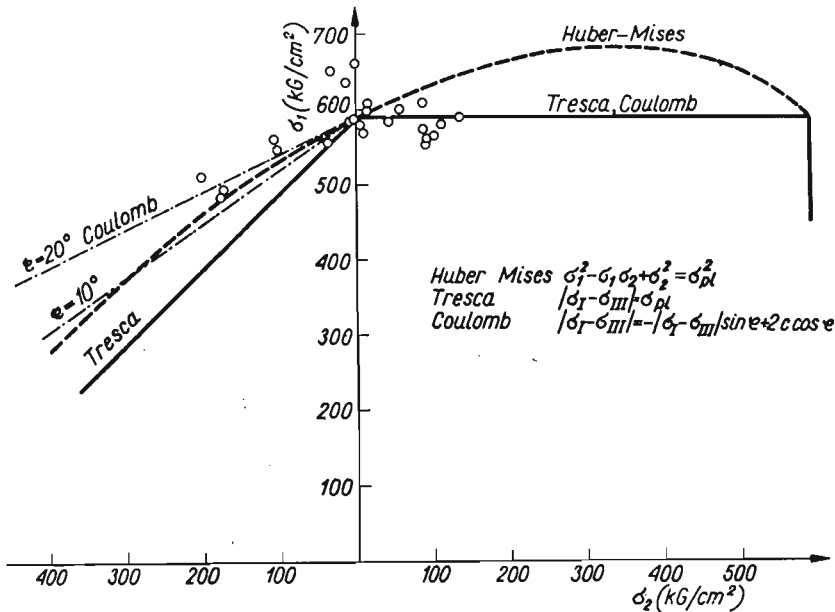


Rys. 7

mające na celu wyznaczenie cech materiałów w momencie zniszczenia dają znaczny rozróżnienie spowodowany wadami materiału. Punkty doświadczalne na rys. 5, 6 i 7 odpowiadają próbkom, w których nie występowało zginanie.

4. Analiza wyników

W oparciu o przedstawione na rys. 6 i 7 wyniki badań obliczono dla każdej próbki, ze związków (2.5), wartości naprężeń głównych. Rezultaty naniesiono na płaszczyznę (σ_1, σ_2) , rys. 8. Na rysunku tym wykreślono dla porównania geometryczną postać warunków plastyczności Hubera–Misesa, Treski oraz Coulomba–Mohra. Położenie punktów doświadczalnych, zarówno ze względu na rozrzut jak i zgrupowanie się w pobliżu stanu jednoosiowego rozciągania, uniemożliwia jednoznaczne określenie postaci warunku plastyczności. Rozpatrując jednakże punkty w ćwiartce dodatnich wartości naprężeń wydaje się, że leżą one bliżej warunku Treski lub Coulomba niż Hubera–Misesa. Punkty



Rys. 8

w ćwiartce przeciwnych znaków naprężeń leżą z kolei bliżej warunku Hubera–Misesa lub Coulomba niż Treski. Porównanie obu ćwiartek wykresu sugeruje zatem postać warunku plastyczności zbliżoną do Coulomba–Mohra, przy wartości φ około 20° . Podobny jakościowo wynik otrzymali BOWDEN i JUKES [5] dla polimetakrylanu metylu.

Przedstawione na rys. 8 porównanie jest ważne jedynie dla materiału izotropowego. Brak informacji o własnościach badanego materiału w kierunku prostopadłym do płyty nie pozwala na ocenę tego założenia. Przyjmując anizotropię poprzeczną materiału warunek plastyczności Hubera–Misesa można przedstawić za HILLEM [13] w postaci

$$(4.1) \quad (G+H)\sigma_1^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 + (G+H)\sigma_2^2 = 1,$$

gdzie G i H są parametrami anizotropii, wyrażającymi się dla rozpatrywanego przypadku za pomocą granic plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu w płaszczyźnie i prostopadle do niej σ'_{pl} , σ''_{pl} przez związki

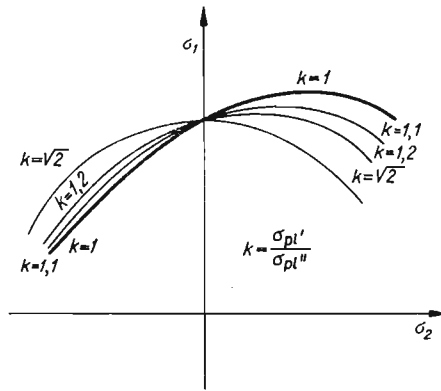
$$(4.2) \quad G = \frac{1}{2\sigma'_{pl}{}^2}, \quad H = \frac{1}{\sigma''_{pl}{}^2} - \frac{1}{2\sigma'_{pl}{}^2}.$$

Wstawiając (4.2) do (4.1) alternatywną postacią warunku Hubera–Misesa jest

$$(4.3) \quad \frac{1}{\sigma_{pl}^{\prime 2}} \sigma_1 - \left(\frac{2}{\sigma_{pl}^{\prime 2}} - \frac{1}{\sigma_{pl}^{\prime \prime 2}} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_{pl}^{\prime 2}} \sigma_2^2 = 1.$$

Dla przypadku $\sigma_{pl}^{\prime} > \sigma_{pl}^{\prime \prime}$ otrzymamy zbiór przekrojów powierzchni plastyczności przedstawiony na rys. 9. Porównując położenie punktów doświadczalnych z kształtem krzywych z rys. 9 widać, że możliwa jest wzajemna dobra zgodność. Wskazywałoby to zatem na możliwość anizotropii poprzecznej materiału. Dla wyjaśnienia tego zagadnienia konieczne są dalsze badania.

Zaproponowana przez HILIA metoda pozwala sprawdzić słuszność równań plastycznego płynięcia Levy–Misesa dla izotropowego, plastycznie nieściśliwego materiału. Równania te zakładają proporcjonalność dewiatorów naprężenia i prędkości odkształcenia.



Rys. 9

Proporcjonalność ta jest równoważna proporcjonalności promieni kół Mohra dla stanu naprężenia i prędkości odkształcenia, co może być wyrażone równością parametrów Lodego $\mu = \nu$ gdzie

$$(4.4) \quad \mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \nu = \frac{2\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3}.$$

Zgodnie z zależnościami (2.3), (2.4) i (2.5), dla $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, $\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_3$ związki (4.4) przyjmą prostą postać

$$(4.5) \quad \mu = -\frac{3 \cos \theta - \sin(\theta - \psi)}{\cos \theta + \sin(\theta - \psi)}, \quad \nu = -\frac{3(1 - \sin \psi)}{1 + 3 \sin \psi}.$$

Z (4.5) wynika, że dla sprawdzenia słuszności równań Levy–Misesa wystarczające jest określenie kąta ψ w funkcji θ . Równość $\mu = \nu$ dla $\theta > 54^\circ 44'$ [6] jest spełniona gdy

$$(4.6) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \theta.$$

Zależność (4.6) przedstawiono na rys. 7 linią ciągłą. Linia prosta przerywana odpowiada zależności $\psi = 2\theta - \pi/2$, dla której stan naprężenia w bruzdzie jest jednoosiowym rozciąganiem. Położenie punktów doświadczalnych odbiega od obu linii. Należy jednakże

zaznaczyć, że równość $\mu = \nu$ nie obowiązuje dla warunku Treski i Coulomba. Analiza prawa plastycznego płynięcia oparta o porównanie μ i ν nie oznacza jednakże jednoznacznie jego ważności. Dla materiału anizotropowego w zależności od postaci anizotropii może zachodzić przypadek $\mu \neq \nu$, lub jak wykazał PUGH [14] $\mu = \nu$. Ponadto związki (4.5) ważne są tylko dla materiału nieściśliwego. Dla badanego materiału można przypuszczać, że powstaniu mikropęknięć w stanie plastycznym towarzyszy zmiana objętości. Weryfikację potencjalnego prawa płynięcia daje porównanie położenia wektorów przyrostów odkształceń względem powierzchni plastyczności. Wyznaczenie przyrostów odkształceń plastycznych wymaga w omawianej metodzie rejestracji odkształceń w bruzdzie zarówno w płaszczyźnie pasma jak i kierunku prostopadłym, czego w doświadczeniach nie realizowano.

Powyższe rozważania nie uwzględniały zależności cech badanego materiału od historii obciążenia czy odkształcenia. Własności reologiczne polichloru winylu powodują, że otrzymane wartości naprężeń w stanie plastycznym odpowiadają jedynie zrealizowanemu programowi wydłużania ze stałą, jedną prędkością. Inne wartości naprężeń wystąpią np. w próbie pełzania. Analogicznie położenie wektorów przyrostów odkształceń plastycznych może być zależne od czasu, co np. dla przyrostów odkształceń lepkosprężystych wykazali doświadczalnie ONARAN i FINDLEY [3].

Przedstawiona złożoność problemu kryterium uplastycznienia (zniszczenia) oraz praw płynięcia tworzyw sztucznych wskazuje na konieczność dalszych badań.

Literatura cytowana w tekście

1. J. M. LIFSHITZ, H. KOLSKY, *Non-linear viscoelastic behavior of polyethylene*, Int. J. Sol. Struct., 3 (1967), 383.
2. K. ONARAN, W. N. FINDLEY, *Combined stress-creep experiments on a nonlinear viscoelastic material to determine the kernel functions for a multiple integral representation of creep*, Trans. Soc. Rheol., 9 (1962), 299.
3. K. ONARAN, W. N. FINDLEY, *Creep experiments and examples for viscoelastic material under combined stress with abrupt changes in state of stress*, Poly. Eng. Sci., 5 (1965), 213.
4. R. L. THORKILDSEN, *Engineering Design for Plastics*, ed. E. Baer, Reinhold, New York (1964), 277.
5. P. B. BOWDEN, J. A. JUKES, *The plastic yield behaviour of polymethylmethacrylate*, J. Mat. Sci., 3 (1968), 183.
6. R. HILL, *A new method for determining the yield criterion and plastic potential of ductile metals*, J. Mech. Phys. Sol., 1 (1953), 271.
7. B. B. HUNDY, A. P. GREEN, *A determination of plastic stress-strain relations*, J. Mech. Phys. Sol., 3 (1954), 16.
8. G. LIANIS, H. FORD, *An experimental investigation of the yield criterion and stress-strain law*, J. Mech. Phys. Sol., 5 (1957), 215.
9. J. P. ELLINGTON, *An investigation of plastic stress-strain relationships using grooved tensile specimens*, J. Mech. Phys. Sol., 7 (1958), 276.
10. R. HILL, *On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets*, J. Mech. Phys. Sol., 1 (1952), 19.
11. A. NADAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, McGraw-Hill, New York 1950, 319.
12. C. BRIDLE, A. BUCKLEY, J. SCANLAN, *Mechanical anisotropy of oriented polymers. Part 1*, J. Mat. Sci., 3 (1968), 622.
13. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950, 319.
14. H. L. D. PUGH, *A note on a test of the plastic isotropy of metals*, J. Mech. Phys. Sol., 1 (1953), 284.

Резюме

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ

В работе анализируется возможность применения, к определению критерия приведения в пластическое состояние полимеров, экспериментального метода, предложенного Р. Хиллем и состоящим в растяжении плоских образцов с надрезанными косыми бороздами. В момент приведения в пластическое состояние, в борозде возникает плоское напряженное состояние. С целью проверки метода, проведено серию экспериментов на полихлор винила. Констатируется, что при предположении полной изотропии материала условие пластичности имеет вид похожий на условие Кулона-Мора. Обсуждается влияние поперечной анизотропии и реологических свойств материала. Рассмотренная в работе сложность проблемы критерия приведения в пластическое состояние (разрушения) полимеров, указывает на необходимость дальнейших исследований.

Summary

ON A CERTAIN METHOD OF DETERMINATION OF A FRACTURE CRITERION FOR POLYMERS

A possibility of application to polymers of the experimental method proposed by R. Hill [6] for determination of a yield criterion has been analysed in the paper. The method consists in stretching of flat samples with oblique grooves in which a plane state of stress occurs at the moment of plastic yielding. To verify the method, some series of experiments for polyvinyl chloride (PVC) has been performed.

It is shown that, under the assumption of full isotropy of a material, the corresponding yield condition takes a form approaching the Coulomb-Mohr condition. The influence of transversal anisotropy as well as rheological properties of a material is also discussed. The complexity of the problem considered points to necessity of further detailed investigations.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1969 r.

ANALIZA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ ROZCIĄGANEGO PASMA Z OTWORAMI

JÓZEF MIASTKOWSKI, WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W ostatnich latach ukazało się wiele prac poświęconych analizie nośności granicznej elementów o złożonych kształtach opartej na założeniach teorii plastyczności. Analiza taka ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ stosowane metale konstrukcyjne mają zwykle dobre własności plastyczne i zniszczenie powstaje w nich dopiero po rozwinięciu się dużych odkształceń plastycznych.

Teoretyczne obliczenie nośności granicznej możliwe jest przy założeniu, że materiał pręta nie wykazuje wzmocnienia. Jeżeli w warunkach plastyczności przyjmiemy, że granica plastyczności ciała idealnie plastycznego pokrywa się z granicą plastyczności rzeczywistego materiału, to jako nośność graniczną otrzymamy wielkość siły uplastycznienia P_{pl} . Wyznaczenie siły P_{pl} ma dla konstruktora zasadnicze znaczenie z tych względów, że przy obciążeniu $P = P_{pl}$ pręt doznaje odkształceń i praktycznie traci swoją wartość użytkową zwłaszcza w konstrukcjach maszynowych. Z tych też względów zapas pewności powinno się odnosić do siły uplastycznienia P_{pl} .

Dla płaskich prętów osłabionych obustronnie korbami, teoretyczna nośność graniczna może być wyznaczona dla płaskiego stanu odkształcenia lub dla płaskiego stanu naprężenia.

Kompletne rozwiązanie dla płaskiego stanu odkształcenia jest możliwe tylko dla takich przypadków, w których pola linii poślizgów leżą całkowicie wewnątrz konturu pręta. Jeżeli jednak szerokość pręta nad korbą jest zbyt mała w stosunku do wymiaru osłabionego wycięciem, kompletne rozwiązanie jest nadal nieznaną. Możliwe jest jedynie określenie górnej i dolnej oceny nośności granicznej.

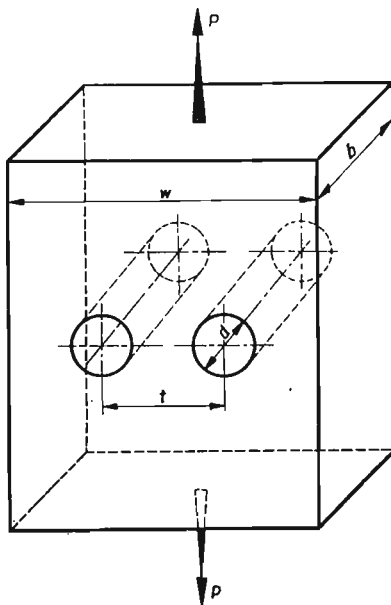
W chwili obecnej teoria nie jest w stanie dać odpowiedzi jaka będzie nośność graniczna elementów o pośrednich grubościach spotykanych często w rzeczywistych konstrukcjach. Teoretyczną analizę tego zagadnienia w oparciu o graniczne twierdzenia teorii plastyczności można znaleźć w pracy [2]. Polega ona na doborze odpowiednich pól kinematycznie lub statycznie dopuszczalnych i jest w stanie dostarczyć jedynie przybliżoną wartość grubości elementu, niezbędnej dla powstania w nim stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. Bardziej pewne informacje dotyczące nośności granicznej prętów osłabionych wycięciami mogą być uzyskane jedynie w sposób doświadczalny [3—10].

Obszerny przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem został podany w pracy [11].

Wykorzystując pewne rozwiązania otrzymane dla prętów osłabionych wycięciami okrągłymi oraz na podstawie analizy różnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów plastycznego zniszczenia w poniższej pracy zajęto się analizą nośności granicznej pasma z otworami.

2. Nośność graniczna pasma z dwoma otworami

2.1. Analiza teoretyczna. Rozpatrzmy początkowo przypadek rozciąganego pasma osłabionego dwoma otworami pokazanego na rys. 2.1.



Rys. 2.1

Granica plastyczności jest tu zależna od trzech niezależnych parametrów

$$0 \leq \left(\mu = \frac{d}{t-d} \right) \leq \infty,$$

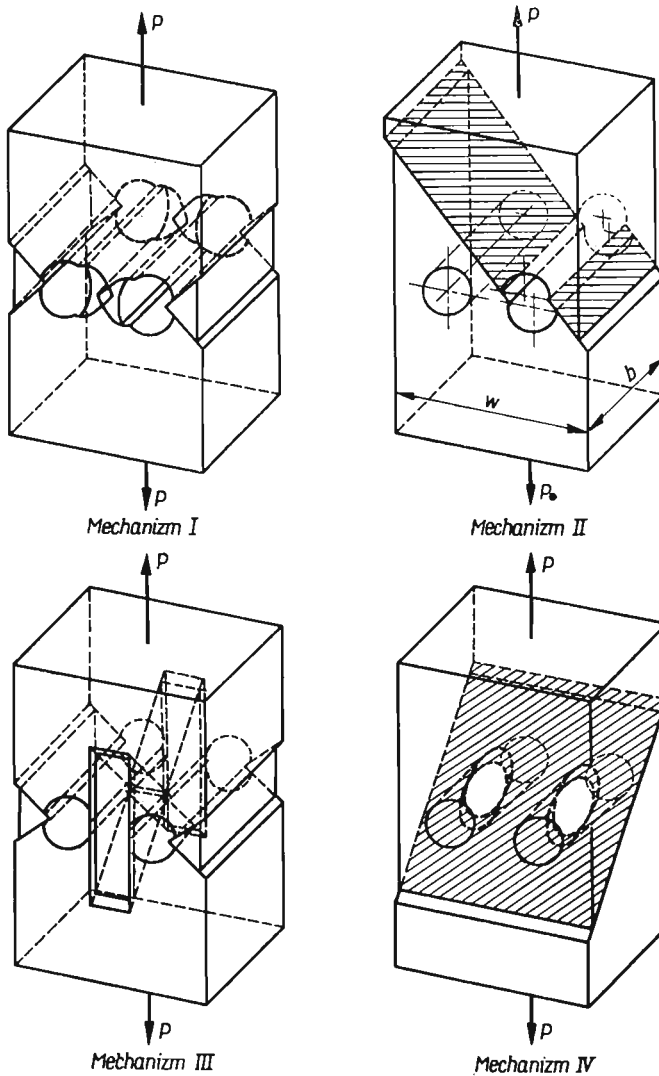
$$1 + 2\mu \leq \left(\kappa = \frac{w}{t-d} \right) \leq \infty,$$

$$0 \leq \left(\lambda = \frac{b}{t-d} \right) \leq \infty.$$

Dla określenia nośności granicznej pasma poddano analizie cztery różne, kinematycznie dopuszczalne, mechanizmy plastycznego zniszczenia pokazane na rys. 2.2.

Wszystkie wzory na górną ocenę nośności granicznej f_g określone zostały przy założeniu warunku plastyczności Treski.

Mechanizm I przedstawia rozwiązanie metodą linii poślizgów [13] z uwzględnieniem płynięcia w pasach na zewnątrz od otworów. Wykorzystując rozwiązania w płaskim stanie odkształcenia dla określenia współczynnika wzmocnienia $f^{I'}$ w prętach osłabio-



Rys. 2.2

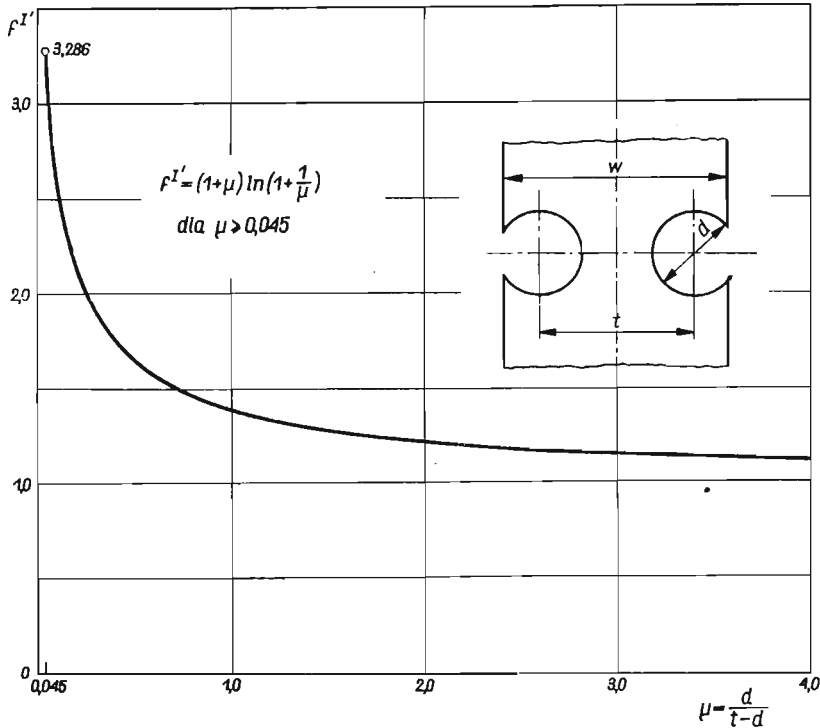
nych wycięciami okrągłymi, można określić górną ocenę nośności granicznej dla pasma z dwoma otworami w postaci wzoru

$$(2.1) \quad f_{\theta}^I = \frac{1}{\kappa - 2\mu} (f^{I'} - 1) + 1 \quad \text{dla} \quad \begin{array}{l} 0,045 \leq \mu \leq \infty \\ 1 + 2\mu \leq \kappa \leq \infty \end{array}$$

gdzie

$$(2.2) \quad f^{I'} = (1 + \mu) \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

Wykres zależności $f^{I'}$ w funkcji μ podano na rysunku 2.3.



Rys. 2.3

Mechanizm II [14] jest prostym ścinaniem wzdłuż zakreskowanej płaszczyzny pokazanej na rys. 2.2. Optymalną wartość górnej oceny granicy plastyczności otrzymujemy dla płaszczyzny przekroju tworzącej z osią pręta kąt 45° i załamanej w otworze, jak to pokazano na rys. 2.2. Dla tego sposobu zniszczenia, wzór na górną ocenę współczynnika obciążenia przyjmuje postać

$$(2.3) \quad f_g^{II} = \frac{\kappa - \mu}{\kappa - 2\mu}.$$

Mechanizm III [2] pokazany na rysunku 2.2 polega na tworzeniu się czterech sztywnych kostek utworzonych przez płaszczyzny poprowadzone pod kątem 45° do osi pręta oraz przez dwie płaszczyzny równoległe do osi pręta przechodzące między otworami. Dla tego sposobu zniszczenia, górną ocenę f określamy ze wzoru

$$(2.4) \quad f_g^{III} = 1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{2}(\kappa - 2\mu)}.$$

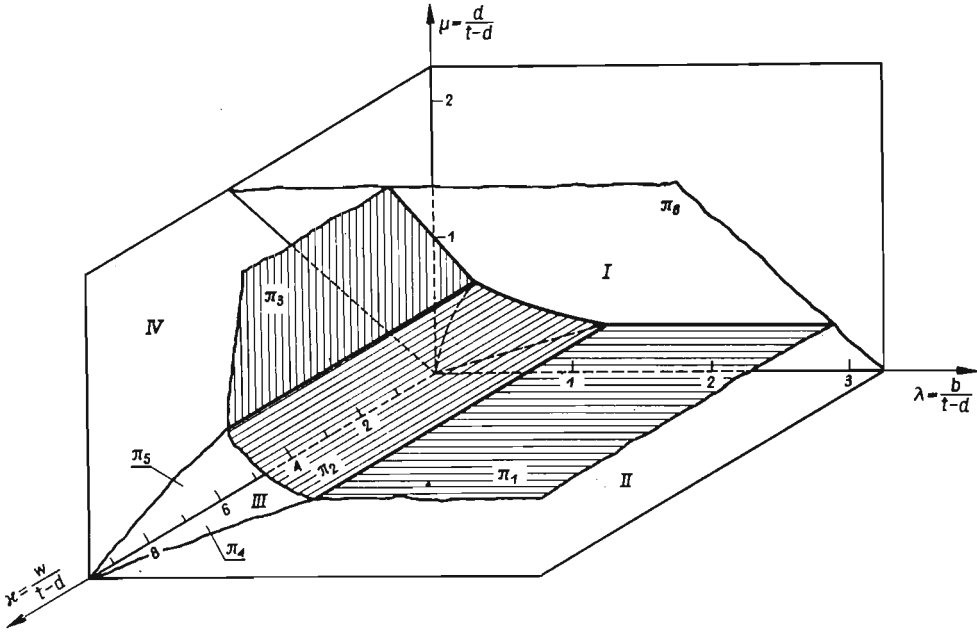
Mechanizm *IV* przedstawia prosty przekrój wzdłuż płaszczyzny zakreskowanej, tworzącej kąt 45° z osią pręta. Płaszczyzna przekroju jest pokazana na rys. 2.2. W zależności od szerokości pasma, wyrażonej przez stosunek λ/μ , rozróżnia się dwa przypadki, dla których wzory na współczynnik obciążenia przyjmują odpowiednie formy

$$(2.5) \quad f_{g}^{IVa} = \frac{\kappa\lambda - \pi/2\mu^2}{\lambda(\kappa - 2\mu)} \quad \text{dla} \quad \lambda \geq \mu$$

oraz

$$(2.6) \quad f_{g}^{IVb} = \frac{\lambda(\kappa - \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) - \mu^2 \arcsin \lambda/\mu}{\lambda(\kappa - 2\mu)} \quad \text{dla} \quad \lambda \leq \mu.$$

Na rysunku 2.4 pokazano w przestrzeni κ, μ, λ obszary, w których poszczególne mechanizmy plastycznego zniszczenia z rys. 2.2 dają najmniejszą ocenę współczynnika obciążenia. Każdy obszar jest oznaczony numerem odpowiadającym oznaczeniom mechanizmów zniszczenia z rys. 2.2.



Rys. 2.4

Płaszczyzna π_1 oddziela obszary *I* i *II*. Jest ona równoległa do płaszczyzny κ, λ i określona równaniem

$$(2.7) \quad \mu - 0,58 = 0.$$

Przez π_2 oznaczono powierzchnię oddzielającą obszary *I* i *III*. Równanie jej można przedstawić w formie

$$(2.8) \quad (1 + \mu) \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \lambda - 1 = 0.$$

Powierzchnię między obszarami *I* i *IV* określono jako π_3 o równaniu

$$(2.9) \quad (1+\mu) \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) - 2\mu + \sqrt{\mu^2 - \lambda^2} + \frac{\mu^2}{\lambda} \arcsin \frac{\lambda}{\mu} - 1 = 0.$$

Dla powierzchni π_4 dzielącej obszary *II* i *III* równanie ma postać

$$(2.10) \quad 2\sqrt{2}\mu - \lambda = 0.$$

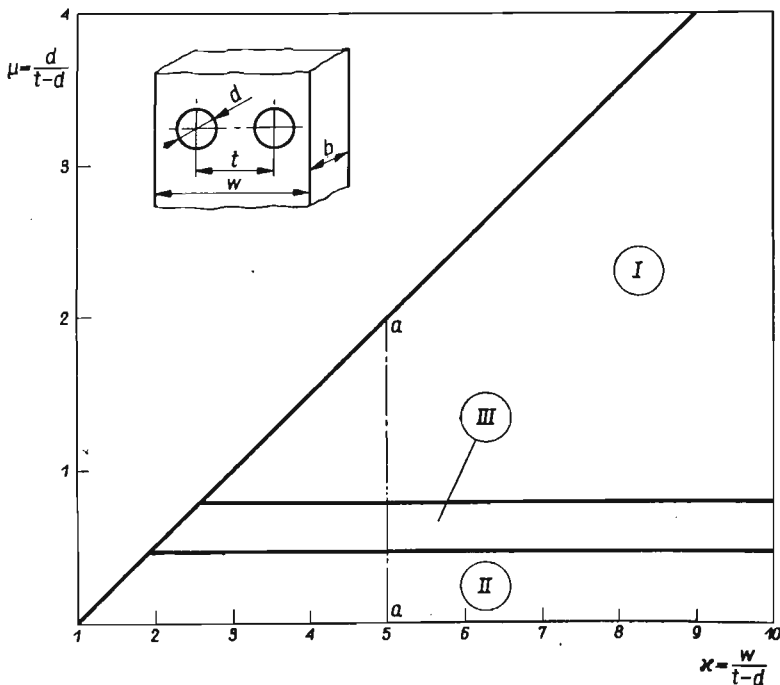
Wreszcie powierzchnia π_5 rozdzielająca obszary *III* i *IV* określona jest przez równanie

$$(2.11) \quad \lambda\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} + \mu^2 \arcsin \frac{\lambda}{\mu} - 2\mu\lambda + \frac{\lambda^2}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Jeżeli chodzi o płaszczyznę π_6 , to jej położenie wynika z zależności

$$(2.12) \quad \kappa - 2\mu - 1 = 0.$$

Ponieważ we wzorach (2.7)—(2.11) nie występuje parametr κ , obszary ważności poszczególnych mechanizmów plastycznego zniszczenia układają się w przestrzeni κ, μ, λ równoległe do osi κ (rys. 2.5). Rozmieszczenie obszarów pokazane na rys. 2.6 jest stałe z wyjątkiem górnego ograniczenia linią *ABC*, której przebieg wyznacza zależność (2.12).



Rys. 2.5

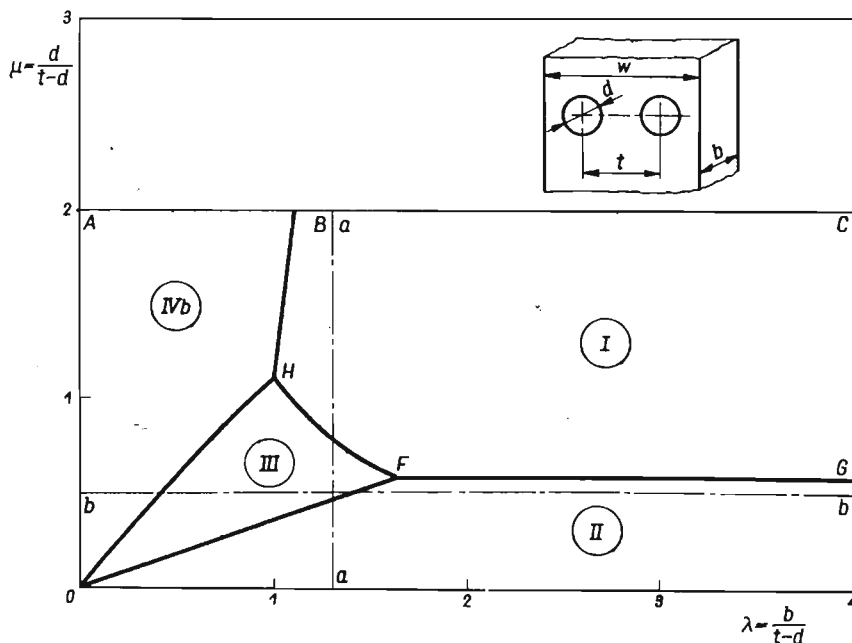
2.2. Wyniki doświadczalne. Doświadczenia przeprowadzono na dwóch seriach próbek. Jedną serię wykonano ze stopu aluminium PA2 (Al Mg3) w stanie miękkim, drugą natomiast ze stopu aluminium PA9 (Al Cu2 Mg1 Fe1 Ni1). Stop PA2 cechuje się bardzo dobrymi własnościami plastycznymi i ma szerokie zastosowanie na średnio obciążone elementy konstrukcji lotniczych, okrętowych i pojazdów mechanicznych. Ma on również

szerokie zastosowanie na urządzenia przemysłu chemicznego, spożywczego oraz na elementy konstrukcji budowlanych.

Stop PA9 ma podobne własności mechaniczne jakie posiada stop PA2. Nadaje się do kucia i prasowania na gorąco. Ma zastosowanie na części silnie obciążone i odporne na wysokie temperatury np. tłoki.

Badania próbek przeprowadzono na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej. Odształcenia mierzono przy użyciu dwóch tensometrów mechanicznych umieszczonych po obu stronach próbki na bazie pomiarowej 60 mm. Odczyty pomiarów odształceń prowadzono z dokładnością do 0,01 mm. Mierzenie odształceń na dwóch przeciwległych powierzchniach próbki pozwalało sprowadzić do minimum efekty wynikające z ewentualnego zginania próbki. Wydłużenie ustalono następnie jako wartość średnią wskazań obu tensometrów.

Stwierdzono, że powyższa metoda przeprowadzenia doświadczeń zapewniała otrzymywanie dobrych wyników doświadczalnych. Otrzymane w ten sposób krzywe obciążenie-odkształcenie cechują się dużą regularnością przebiegu.



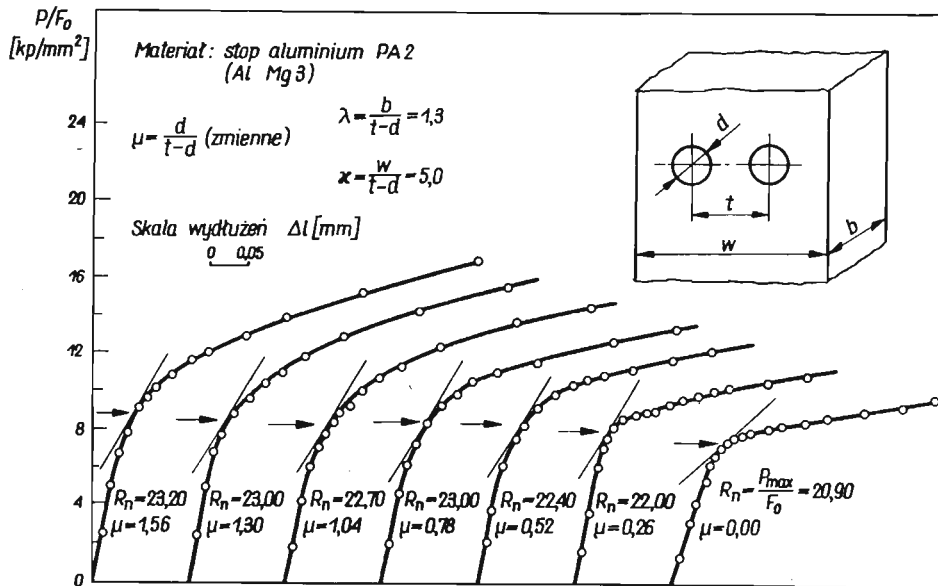
Rys. 2.6

Z zamieszczonych krzywych obciążenie-odkształcenie widzimy, że moment pełnego uplastycznienia przekroju próbki jest mało widoczny. W związku z tym w pracy przyjęto umowną granicę plastyczności utożsamiając ją z punktem, w którym moduł stycznej osiągał wartość $0,3 \operatorname{tg} \alpha$. Przez α oznaczono kąt jaki tworzy początkowa prostoliniowa część wykresu z osią wydłużeń.

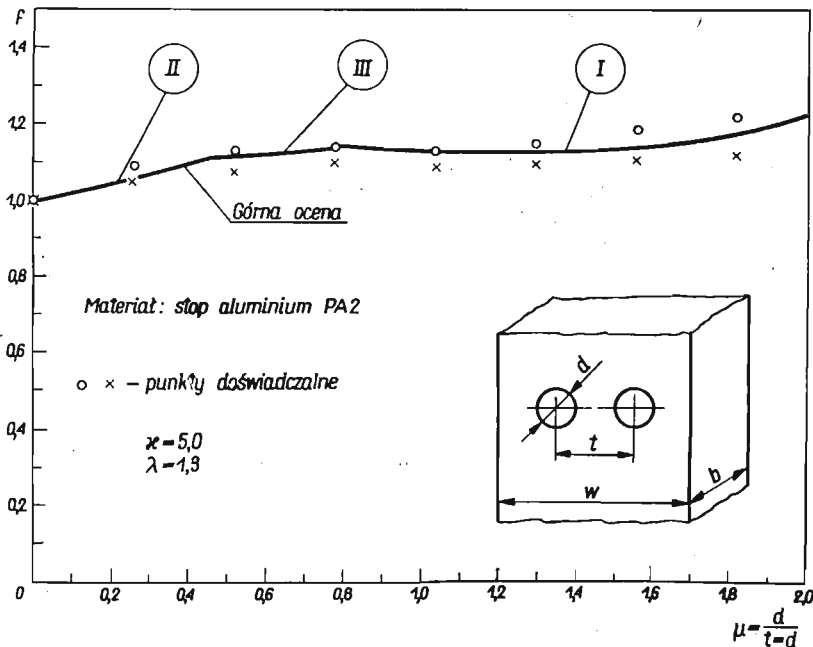
Wyniki badań pierwszej serii próbek wykonanych ze stopu PA2 pokazano na rysunkach 2.7 i 2.8. Próbki w tej serii miały wszystkie jednakową grubość $\lambda = 1,3$ i stałą sze-

rokość $\kappa = 5$. Zmienna była jedynie średnica otworów opisana zmiennym parametrem $\mu = d/t - d$ przy stałej wartości różnicy $t - d$. Parametrom tym odpowiadają przerywane linie $a-a$ na rysunkach 2.5 i 2.6.

Na rys. 2.7 podano początkowe części wykresów naprężenia P/F_0 w funkcji wydłużenia oraz wartości naprężeń nominalnych $R_n = P_{\max}/F_0$, gdzie F_0 jest polem początko-

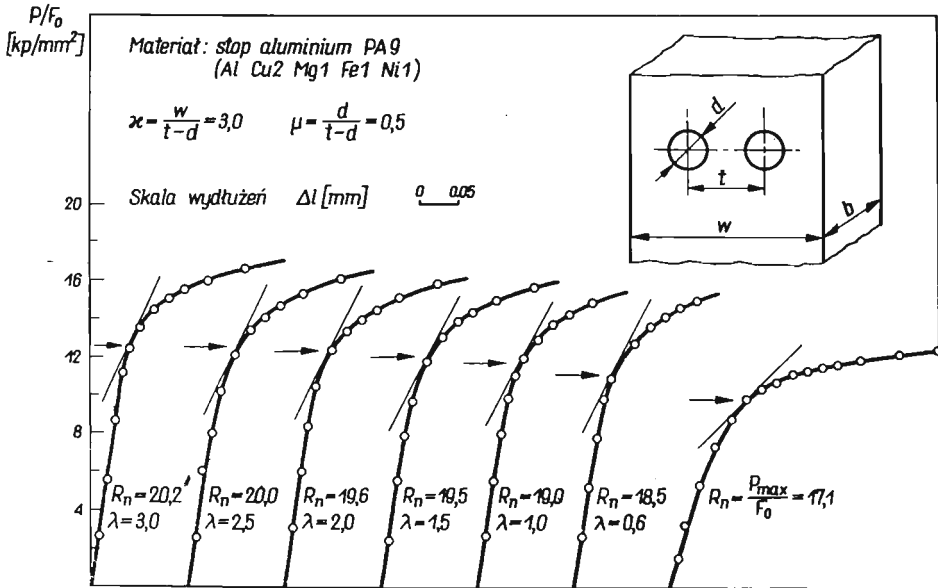


Rys. 2.7

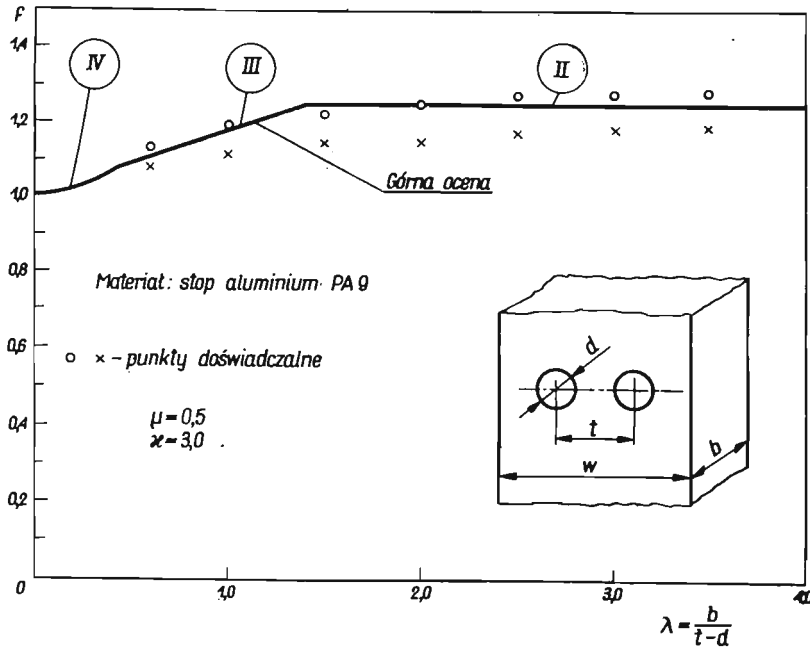


Rys. 2.8

wego przekroju poprzecznego próbki w osłabionym miejscu. Teoretyczną zależność granicy plastyczności od parametru μ pokazano na rys. 2.8. Punkty oznaczone kółkami odpowiadają doświadczalnym wartościom współczynnika obciążenia granicznego dla pasma z otworami. Otrzymano je dzieląc wartość granicy plastyczności próbek z otworami przez ustaloną wartość granicy plastyczności próbki bez otworu.



Rys. 2.9



Rys. 2.10

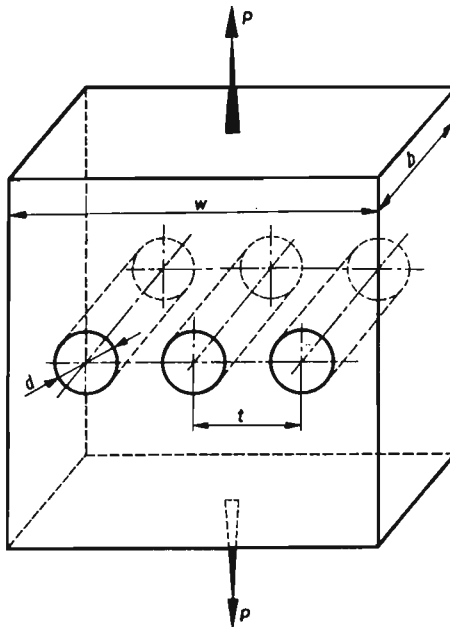
Najlepszą górną ocenę nośności granicznej dla tych parametrów otrzymujemy z mechanizmów *II-III-I*.

Nieco odmienne parametry miały próbki badane w drugiej serii. Przy ustalonych wartościach μ i κ zmienna była grubość próbek określona parametrem $\lambda = b/t-d$. Próbkę wykonano ze stopu PA9. Wyniki doświadczeń pokazano na rysunkach 2.9 i 2.10. Parametrom tych próbek odpowiada przekrój $b-b$ oznaczony linią przerywaną na rys. 2.6.

Najlepsze górne oceny dla tego przypadku wynikają z mechanizmów zniszczenia plastycznego *IV-III-II*.

3. Nośność graniczna pasma z trzema otworami

3.1. Analiza teoretyczna. Analizę teoretyczną nośności granicznej pasma z trzema otworami (rys. 3.1) przeprowadzono, podobnie jak w rozdziale 2, na czterech mechanizmach plastycznego zniszczenia zamieszczonych na rys. 2.2.



Rys. 3.1

Granica plastyczności pasma z trzema otworami jest zależna od trzech parametrów

$$2 + 3\mu \leq \left(\kappa = \frac{w}{t-d} \right) \leq \infty,$$

$$0 \leq \left(\mu = \frac{d}{t-d} \right) \leq \infty,$$

$$0 \leq \left(\lambda = \frac{b}{t-d} \right) \leq \infty.$$

Podobnie jak to pokazano dla pasma z dwoma otworami, obszary te przebiegają równoległe do osi x . Rozmieszczenie ich pokazane na rys. 3.2 jest stałe dla wszystkich wartości x z wyjątkiem linii ABC powstałej z przecięcia powierzchni płaszczyzną o równaniu

$$(3.6) \quad x - 3\mu - 2 = 0.$$

Pozostałe linie są śladami powierzchni o równaniach

Linia FG

$$(3.7) \quad \mu - 0,58 = 0.$$

Linia EF

$$(3.8) \quad (1 + \mu) \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}} - 1 = 0.$$

Linia DE

$$(3.9) \quad (1 + \mu) \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{3\pi}{8\lambda} \mu^2 - 1,5\mu - 1 = 0.$$

Linia BD

$$(3.10) \quad \lambda \left[4(1 + \mu) \ln \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) - 6\mu + 3\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} - 4 \right] + 3\mu^2 \arcsin \lambda/\mu = 0.$$

Linia OF

$$(3.11) \quad 2\sqrt{2}\mu - \lambda = 0.$$

Linia OD

$$(3.12) \quad \mu - \lambda = 0.$$

Linia OE

$$(3.13) \quad \mu^2 - \frac{4}{\pi} \lambda \mu + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \lambda^2 = 0.$$

3.2. Wyniki doświadczalne. Podobnie jak w przypadku badania pasma z dwoma otworami, doświadczenia przeprowadzono na dwóch seriach próbek wykonanych ze stopów aluminium PA2 i PA9. Wyniki badań pierwszej serii próbek wykonanych ze stopu PA2 pokazano na rysunkach 3.3 i 3.4.

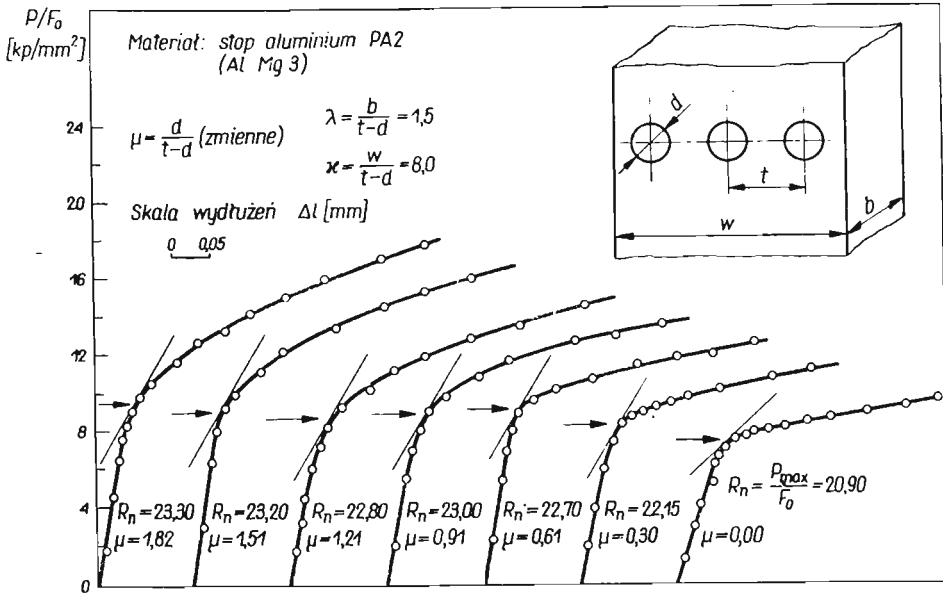
Przebieg badania próbek i sposób pomiaru odkształceń był identyczny jak przy badaniu próbek z dwoma otworami podany w punkcie 2.2.

Parametrom pierwszej serii próbek odpowiada przekrój $a-a$ na rys. 3.2.

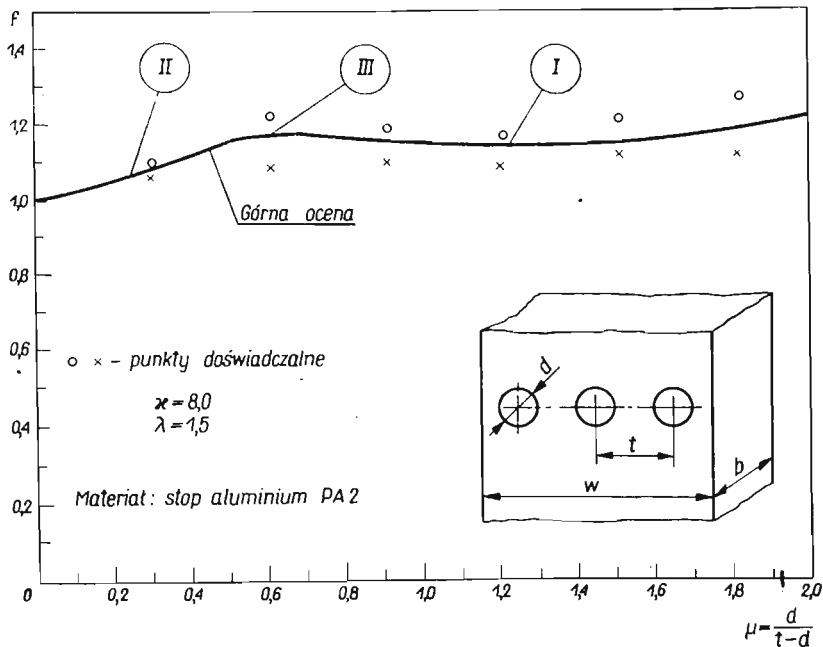
Wyniki badań drugiej serii próbek wykonanych ze stopu PA9 podano na rysunkach 3.5 i 3.6. Parametrom charakterystycznym dla tej serii próbek odpowiada przekrój $b-b$ na rys. 3.2.

Przedstawiona w pracy teoretyczna analiza nośności granicznej odnosi się tylko do granicy plastyczności. Jednakże na rysunkach 2.8, 2.10, 3.4 i 3.6 oprócz punktów odpowiadających granicy plastyczności naniesiono gwiazdkami punkty dla naprężeń nomi-

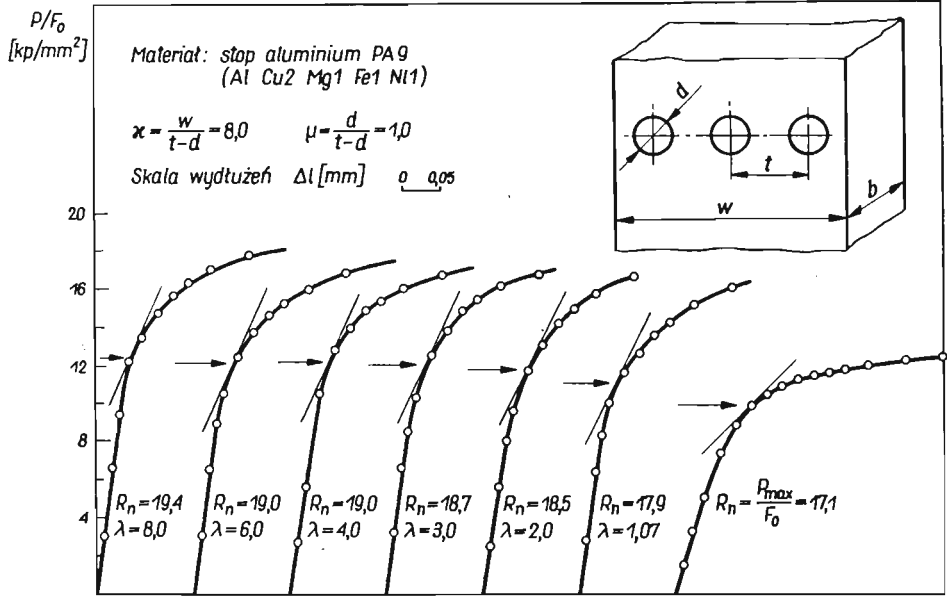
nalnych $R_n = P_{\max}/F_0$. Punkty te otrzymano przez odniesienie wartości R_n próbek z otworami do wielkości R_n próbki bez otworów. Dla wszystkich badanych próbek stosunek ten jest większy od jedności ale mniejszy od odpowiednich współczynników obciążenia granicznego obliczonych dla granicy plastyczności. Na rysunkach punkty oznaczone gwiazdkami leżą poniżej punktów otoczonych kółeczkami.



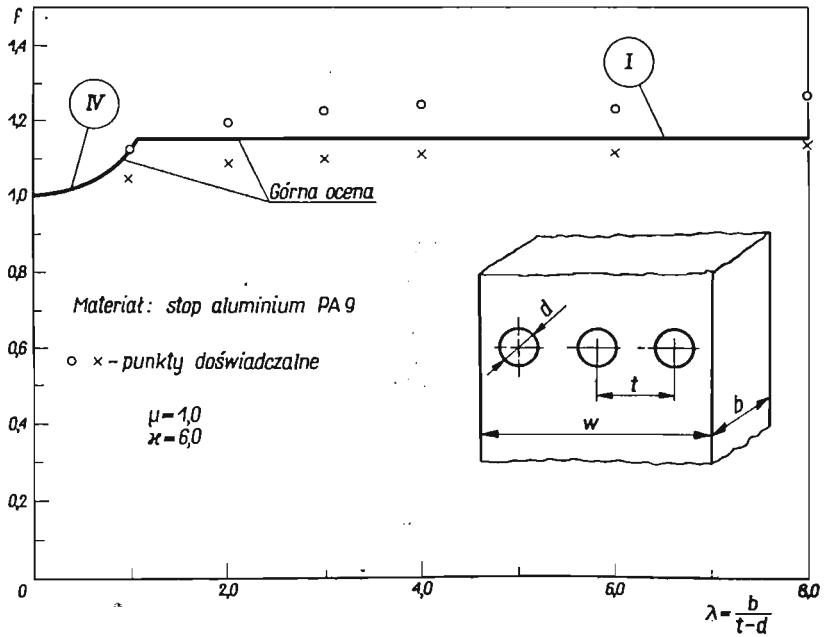
Rys. 3.3



Rys. 3.4



Rys. 3.5



Rys. 3.6

4. Nośność graniczna pasma osłabionego dowolną ilością otworów

Postępując podobnie jak w poprzednich rozdziałach, można wyprowadzić wzory na nośność graniczną pasma o dowolnej ilości otworów.

Granica plastyczności jest zależna od trzech parametrów ograniczonych następującymi nierównościami

$$\begin{aligned}(n-1)+n\mu &\leq \left(\kappa = \frac{w}{t-d} \right) \leq \infty, \\ 0 &\leq \left(\mu = \frac{d}{t-d} \right) \leq \infty, \\ 0 &\leq \left(\lambda = \frac{b}{t-d} \right) \leq \infty.\end{aligned}$$

Dla mechanizmu *I* wzór na górną ocenę nośności granicznej, uogólniony na pasmo z dowolną ilością otworów n , ma postać

$$(4.1) \quad f_g^I = (f^{I'} - 1) \frac{n-1}{\kappa - n\mu} + 1 \quad \text{dla} \quad \begin{aligned} (n-1)+n\mu &\leq \kappa \leq \infty \\ 0,262 &\leq \mu \leq \infty. \end{aligned}$$

gdzie $f^{I'}$ jest określone wzorem (2.2).

Z mechanizmu *II* określono górną ocenę współczynnika obciążenia w postaci wzoru

$$(4.2) \quad f_g^{II} = \frac{\kappa - \mu}{\kappa - n\mu}.$$

Podobnie dla *III* sposobu plastycznego zniszczenia nośność graniczną obliczamy ze wzoru

$$(4.3) \quad f_g^{III} = 1 + \frac{(n-1)\sqrt{2}}{4} \frac{\lambda}{\kappa - n\mu}.$$

W przypadku mechanizmu *IV*, odpowiednie wzory przyjmują postać

$$(4.4) \quad f_g^{IVa} = \frac{4\lambda\kappa - n\pi\mu^2}{4\lambda(\kappa - n\mu)} \quad \text{dla} \quad \lambda \geq \mu$$

oraz

$$(4.5) \quad f_g^{IVb} = \frac{\lambda(2\kappa - n\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}) - n\mu^2 \arcsin \lambda/\mu}{2\lambda(\kappa - n\mu)} \quad \text{dla} \quad \lambda \leq \mu.$$

Rozpatrzmy teraz, dla przypadku pasma o dowolnej ilości otworów n , podział przestrzeni μ , κ , λ (rys. 2.4) na sfery działania poszczególnych mechanizmów plastycznego zniszczenia. Granica między obszarem *I* i *II* wyraża się równaniem

$$(4.6) \quad \mu = 0,58.$$

Widzimy, że jest ona niezależna od ilości otworów.

Podział przestrzeni na obszary *II* i *III* określa się wzorem

$$(4.7) \quad \sqrt{2}\lambda - 4\mu = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$

Między obszarami *I* i *III* przebiega powierzchnia o równaniu

$$(4.8) \quad 4(f''-1) - \sqrt{2}\lambda = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$

Z powyższych wzorów wynika, że linie *FG*, *OF* i *EF* na rys. 3.2 są stałe dla pasma o dowolnej ilości otworów *n*.

Nieco inaczej przedstawia się podział między pozostałymi obszarami. Granica między *I* i *IVb* wyraża się równaniem, do którego wchodzi parametr *n* określający ilość otworów pasma.

$$(4.9) \quad n[2\lambda(f''-\mu-1) + \lambda\sqrt{\mu^2-\lambda^2} + \mu^2 \arcsin \lambda/\mu] - 2\lambda(f''-1) = 0 \\ \text{dla} \quad \mu \geq \lambda.$$

Linia *DB* (rys. 3.2) będzie więc ulegać zmianie w zależności od ilości otworów.

Porównując rys. 3.2 z rys. 2.6 widzimy różnicę w podziale między obszarami *III* i *IV*. Na rys. 2.6 nie występuje obszar *IVa*. Z dokładnej analizy ogólnych wzorów wynika, że układ pól pokazany na rys. 2.6 jest szczególnym przypadkiem dla pasma z dwoma otworami, gdzie linię *OH* określa wzór (2.11). Dla wszystkich pozostałych przypadków charakterystyczny jest podział na obszary *III* i *IVa* wg rys. 3.2. Przebieg linii *OE* dla ogólnego przypadku określa wzór (4.10)

$$(4.10) \quad n(\pi\mu^2 + \sqrt{2}\lambda^2 - 4\mu\lambda) - \sqrt{2}\lambda^2 = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 3.$$

Jest oczywiste, że równanie (3.12) określające położenie linii *OD* jest słuszne dla dowolnego *n*.

Przebieg linii *DE* dzielącej obszary *I* i *IVa* wyznacza zależność

$$(4.11) \quad n(4\lambda f'' + \pi\mu^2 - 4\lambda\mu - 4\lambda) - 4\lambda(f''-1) = 0 \quad \text{dla} \quad n \geq 3.$$

Jeżeli chodzi o górne ograniczenie linią *ABC*, to jest ona funkcją dwóch zmiennych parametrów *x* i *n* wyrażoną w postaci

$$(4.12) \quad x = n\mu + n - 1.$$

Widzimy więc, że dla pasm z ilością otworów $n \geq 3$ rozkład pól odpowiadających poszczególnym mechanizmom plastycznego zniszczenia jest stały zgodnie z rys. 3.2. Granice między poszczególnymi obszarami z wyjątkiem linii *OE*, *ED* i *DB* są również stałe, niezależne od parametru *n*. Dla pasma z dwoma otworami, układ obszarów pokazany jest na rys. 2.6.

5. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy stwierdzono, że górne oceny wynikające z prostych mechanizmów odkształcenia, przedstawionych na rys. 2.2, mają praktyczne znaczenie i można je stosować do analizy nośności elementów wykonanych z niektórych metali technicznych.

Z wykresów na rysunkach 2.8 i 3.4 wynika wniosek praktyczny dotyczący podziałki *t* dla szeregu otworów o danej średnicy. Obserwuje się bowiem ciągły wzrost obciążenia granicznego wraz ze wzrostem parametru *μ*.

Певием wniosек практычны выніка з wykresów zamieszczonych на rysunkach 2.10 i 3.6. Wraz ze wzrostem grubości wzrasta również współczynnik nośności granicznej, ale dla $\lambda \geq 3$ przyrost ten jest minimalny. Można więc sądzić, że dla $\lambda > 3$ w centralnej części pasm osłabionych otworami praktycznie realizuje się płaski stan odkształcenia.

Stwierdzono również, że stosunek naprężenia nominalnego R_n próbek z otworami do wartości R_n próbki bez otworu jest większy od jedności, ale mniejszy od odpowiednich współczynników określonych dla granicy plastyczności.

Literatura cytowana w tekście

1. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 2, 1953, 43–53.
2. D. C. DRUCKER, *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485–488.
3. В. С. Жуковский, *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемностью напряженного состояния*, Проблемы прочности в машиностроении, Вып. 2, Изд. АН СССР, Москва 1959.
4. В. С. Жуковский, *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 1958, 116–119.
5. В. С. Жуковский, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, Вып. 9, Машгиз., Москва 1963, 231–252.
6. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inżyn., 13 1965, 637–652.
7. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER, *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., Vol. 32, 1965, 493–503.
8. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *Plastic straining of notched bars with intermediate thickness and small shoulder ratio*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 3, 1967, 83–97.
9. J. MIASTKOWSKI, *Nośność graniczna rozciąganych prętów z karbami kątowymi o dowolnych wymiarach części nad karbem*, Mech. Teoret. Stosow. 1, 7, 1969.
10. J. MIASTKOWSKI, *Nośność graniczna rozciąganych elementów o przekroju kwadratowym z wycięciami*, Rozprawy Inżynierskie, 1969, (w druku).
11. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych prętów z karbem*, Mech. Teoret. Stosow., 3, 3, 1965, 51–78.
12. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *Extended limit design theorems for continuous media*, Q. Appl. Math., Vol. 9, 1952, 381–389.
13. R. HILL, *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 2, 1949, 40.
14. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley Inc., New York 1951, 215–216.

Резюме

АНАЛИЗ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОЛОСЫ С ОТВЕРСТИЯМИ, ПОДВЕРГАЕМОЙ РАСТЯЖЕНИЮ

В работе представлен теоретический и экспериментальный анализ несущей способности полосы с отверстиями, подвергаемой растяжению. Экспериментальные исследования проводились на двух сплавах алюминия РА2 и РА9. Констатируется, что действительные силы, соответствующие

ющие началу пластического течения, хорошо согласуются с верхними оценками несущей способности для обоих сплавов, обладающих очень хорошими пластическими свойствами.

В работе проводится, также, исследование влияния толщины на несущую способность полосы с отверстиями. Из этого вытекает, что для $\lambda > 3$, реализуется практически плоское деформированное состояние.

S u m m a r y

LIMIT ANALYSIS OF STRIP WITH HOLES

Theoretical and experimental limit analysis of strip with holes are presented. Two aluminium alloys PA2 and PA9 were tested. It was found that the yield point load generally coincides with the theoretical upper bound for both aluminium alloys displaying good ductility.

Presented is also investigation of the influence of thickness on the limit of strip with holes. Experimental results show that for $\lambda > 3$ practically the plane state of strain exists.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1969 r.

ZAGADNIENIE OSIOWO-SYMETRYCZNE DLA OBSZARÓW SPRĘŻYSTYCH NIEŚCIŚLIWYCH OGRANICZONYCH KULISTYMI POWIERZCHNIAMI

ELENA ZŁATANOWA (WARSZAWA)

Niniejsza praca przedstawia ogólne rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego dla obszarów kulistych nieściśliwych. Ogólne równania dla ciała sprężystego nieściśliwego są wyprowadzone na podstawie klasycznej teorii sprężystości przy założeniu w jej równaniach współczynnika Poissona $\nu = 0,5$ [1]. Z takimi zagadnieniami spotykamy się w przypadkach, gdy zmianę objętości materiału można pominąć.

W pracy [2] dokonano obszernej analizy istniejących rozwiązań pokrewnych zagadnień dla obszarów ściśliwych. W analizie tej główne miejsce zajmuje rozwiązanie Thomsona dla równowagi sprężystej ściśliwej kuli i zagadnienie Goodiera koncentracji naprężeń wokół pustki kulistej lub wtrącenia kulistego przy jednorodnym rozciąganiu lub ściskaniu. Sama praca [2] przedstawia uogólnienie rozwiązania Goodiera dla problemów osiowo-symetrycznych. Przyjęte zostały zmodyfikowane równania Thomsona.

W niniejszej pracy jest rozwiązany taki problem przy założeniu nieściśliwości.

1. Podstawowe równania

Dla ciała sprężystego nieściśliwego, dla którego jest spełnione prawo Hooke'a zakładamy, że $\nu = 0,5$, skąd $E = 3G$. Otrzymujemy

$$(1.1) \quad \begin{aligned} 3G\varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z), \\ 3G\varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x), \\ 3G\varepsilon_z &= \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenie $p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, otrzymamy następnie

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + p, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + p, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + p, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}, \end{aligned}$$

przy czym $p(x, y, z)$ jest dowolną funkcją.

Jeżeli $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ są funkcjami przemieszczeń, to z równań (1.2), równań równowagi i z warunku nieściśliwości

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

otrzymamy układ równań w przemieszczeniach dla ośrodków nieściśliwych w postaci

$$(1.4) \quad \begin{aligned} GV^2u + \frac{\partial p}{\partial x} + X &= 0, \\ GV^2v + \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0, \\ GV^2w + \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned}$$

Tu $V^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, a X, Y, Z są siłami masowymi na jednostkę objętości.

2. Ogólne zależności dla obszarów kulistych

Wprowadzamy następujące funkcje przemieszczeń (por. [3]):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2Gu &= \varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + x\omega, \\ 2Gv &= \varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y\omega, \\ 2Gw &= \varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + z\omega, \end{aligned}$$

gdzie $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Psi &= \sum_{\lambda} A_{\lambda} \Psi_{\lambda}(x, y, z), \\ \omega &= \sum_{\lambda} B_{\lambda} \Psi_{\lambda}(x, y, z), \\ \Phi &= \sum_{\lambda} \Phi_{\lambda}(x, y, z), \end{aligned}$$

przy czym A_{λ}, B_{λ} są stałymi, a $\Psi_{\lambda}, \Phi_{\lambda}$ są jednorodnymi harmonicznymi funkcjami rzędu λ . Funkcje takie spełniają następujące tożsamości

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x \frac{\partial \Psi_{\lambda}}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi_{\lambda}}{\partial y} + z \frac{\partial \Psi_{\lambda}}{\partial z} &= \lambda \Psi_{\lambda}, \\ x \frac{\partial \Phi_{\lambda}}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_{\lambda}}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi_{\lambda}}{\partial z} &= \lambda \Phi_{\lambda}. \end{aligned}$$

Działając na (2.1) operatorem Laplace'a, otrzymujemy

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 2G\nabla^2 u &= \nabla^2 \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \nabla^2(x\omega), \\ 2G\nabla^2 v &= \nabla^2 \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \nabla^2(y\omega), \\ 2G\nabla^2 w &= \nabla^2 \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \nabla^2(z\omega). \end{aligned}$$

Uwzględniając teraz fakt, że dla funkcji harmonicznyc zachodzą zależności

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 \Phi = 0, \\ \nabla^2(x\omega, y\omega, z\omega) &= \left(2 \frac{\partial \omega}{\partial x}, 2 \frac{\partial \omega}{\partial y}, 2 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right), \\ \nabla^2(\varrho^2 \Psi) &= 2(2\lambda + 3)\Psi, \end{aligned}$$

możemy przekształcić pierwsze wyrazy po prawej stronie równości (2.4).

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) &= \nabla^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (\varrho^2 \Psi) - 2x\Psi \right] = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2(\varrho^2 \Psi) - \nabla^2 2x = 2(2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \nabla^2 \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) &= \nabla^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varrho^2 \Psi) - 2y\Psi \right] = 2(\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \nabla^2 \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) &= \nabla^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} (\varrho^2 \Psi) - 2z\Psi \right] = 2(\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ostatecznie (2.4) można przedstawić w następującej postaci

$$(2.6) \quad \begin{aligned} G\nabla^2 u &= (2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ G\nabla^2 v &= (2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ G\nabla^2 w &= (2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z}. \end{aligned}$$

Podstawiając teraz (2.6) do (2.4) otrzymamy ostatecznie układ trzech równań różniczkowych na funkcje p , Ψ , ω .

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= - \left[(2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} + X \right], \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= - \left[(2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + Y \right], \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= - \left[(2\lambda + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z} + Z \right]. \end{aligned}$$

Układ ten jest niesprzeczny, jeśli są spełnione warunki całkowości, które w przypadku układu (2.7) sprowadzają się do

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Jeśli więc pole sił masowych jest polem potencjalnym, to możemy w jednoznacznie wyznaczyć funkcję $p(x, y, z)$

$$p = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (GV^2 u + X) dx + (GV^2 v + Y) dy + (GV^2 w + Z) dz.$$

W szczególnym przypadku kiedy nie ma sił masowych ($X = Y = Z = 0$), otrzymujemy stąd

$$(2.8) \quad p(x, y, z) = - \sum_{\lambda} [(2\lambda + 1)A_{\lambda} + B_{\lambda}] \Psi_{\lambda}.$$

Z (2.1) można łatwo wyprowadzić następujące wzory:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} (2\Psi + \omega) + \omega, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial y} (2\Psi + \omega) + \omega, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} (2\Psi + \omega) + \omega, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 2y \frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2x \frac{\partial \Psi}{\partial y} + y \frac{\partial \omega}{\partial x} + x \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + 2z \frac{\partial \Psi}{\partial y} + 2y \frac{\partial \Psi}{\partial z} + z \frac{\partial \omega}{\partial y} + y \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} + 2x \frac{\partial \Psi}{\partial z} + 2z \frac{\partial \Psi}{\partial x} + x \frac{\partial \omega}{\partial z} + z \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned}$$

Dla problemu osiowo-symetrycznego we współrzędnych kulistych

$x = \varrho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \varrho \cos \theta$, a $\Phi = \Phi(\varrho, \theta)$, $\psi = \Psi(\varrho, \theta)$,
przemieszczenia i odkształcenia przedstawiają się następująco

$$(2.10) \quad \begin{aligned} u_{\varrho} &= \frac{1}{2G} \left(\varrho^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \varrho \omega \right), \\ v_{\varphi} &= 0, \\ w_{\theta} &= \frac{1}{2G} \left[\varrho \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Psi + \frac{1}{\varrho^2} \Phi \right) \right]; \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \varrho} = \frac{1}{2G} \left[\varrho^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} (2\Psi + \omega) + \omega \right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2G} \left[\varrho \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left(\Psi + \frac{1}{\varrho^2} \Phi \right) + \omega \right], \end{aligned}$$

$$\varepsilon_\varphi = -(\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta)$$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \gamma_{\rho\theta} &= \frac{\partial w_\theta}{\partial \varrho} - \frac{w_\theta}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} = \frac{1}{2G} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(2\varrho \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} + \omega \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - \frac{\Phi}{\varrho^2} \right) \right]; \\ \sigma_\rho &= 2G\varepsilon_\rho + p, \\ \sigma_\varphi &= 2G\varepsilon_\varphi + p, \\ \sigma_\theta &= 2G\varepsilon_\theta + p. \end{aligned}$$

Z warunku nieściśliwości (1.3) podstawiając (2.9), otrzymamy

$$\frac{1}{2G} \left[\varrho^2 \nabla^2 \Psi + \nabla^2 \Phi + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (2\Psi + \omega) + 3\omega \right] = 0.$$

Warunek ten jest spełniony, gdy

$$(2.13) \quad \frac{A_\lambda}{B_\lambda} = -\frac{\lambda+3}{2\lambda}.$$

Zachodzi to jeśli przyjmiemy na przykład

$$(2.14) \quad A_\lambda = \lambda+3, \quad B_\lambda = -2\lambda.$$

Można wykazać, że (2.14) wyczerpuje wszystkie rozwiązania.

3. Zagadnienie zewnętrzne

Istotne znaczenie dla obliczeń ma fakt, czy punkty $\varrho = 0$ i $\varrho = \infty$ należą do rozpatrywanego obszaru czy nie. W związku z tym traktujemy oddzielnie przypadek a), dla którego wszystkie promienie ϱ są większe od pewnej ustalonej wielkości R , $\varrho > R$ i przypadek b), dla którego wszystkie promienie ϱ są mniejsze od pewnej ustalonej wielkości R , $\varrho < R$. Zagadnienie a) nazywamy dalej zagadnieniem zewnętrznym, a zagadnienie b) zagadnieniem wewnętrznym. Podamy tutaj podstawowe równania dla obu przypadków, zaczynając od zagadnienia zewnętrznego $\varrho > R$. Sytuacja taka zachodzi na przykład przy rozpatrywaniu pustki kulistej.

Funkcje przemieszczeń mają postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Psi &= \sum_n A_{z,n} a_n S^{n+1} P_n(t), \\ \omega &= \sum_n B_{z,n} a_n S^{n+1} P_n(t), \\ \Phi &= R^2 \sum_n b_n S^{n+1} P_n(t). \end{aligned}$$

gdzie $S = \frac{R}{\varrho}$, $t = \cos\theta$, zaś $P_n(t)$ jest wielomianem Legendre'a [4,5]; rząd jednorodności $\lambda = -(n+1)$. Zgodnie z (2.14) $A_{z,n} = -n+2$, $B_{z,n} = 2(n+1)$.

Wprowadzając za pracą [2] oznaczenia¹

$$\begin{aligned}
 C_{z,n}^*(S) &= n(n+1)S^{n+1}a_n - (n+1)S^{n+3}b_n, \\
 D_{z,n}^*(S) &= (2-n)S^{n+1}a_n + S^{n+3}b_n, \\
 F_{z,n}^*(S) &= -n^2(n+1)S^{n+1}a_n + (n+1)(n+2)S^{n+3}b_n, \\
 N_{z,n}(S) &= -n(2n-1)S^{n+1}a_n, \\
 H_{z,n}^*(S) &= n(n+1)(n-1)S^{n+1}a_n - (n+1)^2S^{n+3}b_n, \\
 K_{z,n}^*(S) &= (n^2-1)S^{n+1}a_n - (n+2)S^{n+3}b_n,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

zgodnie z (3.1), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 u_\rho &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n C_{z,n}^*(S) P_n(t), \\
 w_\theta &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n D_{z,n}^*(S) \frac{dP_n(t)}{d\theta}, \\
 p &= \sum_n N_{z,n}(S) P_n(t);
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\rho &= \frac{1}{2G} \sum_n F_{z,n}^*(S) P_n(t), \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2G} \sum_n C_{z,n}^*(S) P_n(t) + D_{z,n}^*(S) \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} \sum_n H_{z,n}^*(S) P_n(t) - D_{z,n}^*(S) \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2},
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{2G} \sum_n K_{z,n}^*(S) \frac{dP_n(t)}{d\theta}; \\
 \sigma_\rho &= \sum_n [F_{z,n}^*(S) + N_{z,n}(S)] P_n(t), \\
 \sigma_\theta &= \sum_n [C_{z,n}^*(S) + N_{z,n}(S)] P_n(t) + D_{z,n}^*(S) \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \sigma_\varphi &= \sum_n [H_{z,n}^*(S) + N_{z,n}(S)] P_n(t) - D_{z,n}^*(S) \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \tau_{\rho\theta} &= \sum_n K_{z,n}^*(S) \frac{dP_n(t)}{d\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

¹ Oznaczenia przyjęto jak w pracy [2]

4. Zagadnienie wewnętrzne

Rozpatrujemy teraz zagadnienie wewnętrzne, $\varrho < R$. Sytuacja taka zachodzi na przykład w przypadku pełnej kuli o skończonym promieniu. Funkcje przemieszczeń mają postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Psi &= \sum_n A_{w,n} c_n q^n P_n(t), \\ \omega &= \sum_n B_{w,n} c_n q^n P_n(t), \\ \Phi &= R^2 \sum_n d_n q^n P_n(t), \end{aligned}$$

gdzie $q = \frac{\varrho}{R}$, $t = \cos \theta$, $P_n(t)$ jest wielomianem Legendre'a, rząd jednorodności $\lambda = n$.

Zgodnie z (2.14) $A_{w,n} = n+3$, $B_{w,n} = -2n$.

Wprowadzając oznaczenia

$$(4.2) \quad \begin{aligned} C_{w,n}^*(q) &= n(n+1)c_n q^n + n d_n q^{n-2}, \\ D_{w,n}^*(q) &= (n+3)c_n q^n + d_n q^{n-2}, \\ N_{w,n}(q) &= 2n - (2n+1)(n+3)c_n q^n, \\ F_{w,n}^*(q) &= n(n+1)^2 c_n q^n + n(n-1)d_n q^{n-2}, \\ H_{w,n}^*(q) &= -n(n+1)(n+2)c_n q^n - n^2 d_n q^{n-2}, \\ K_{w,n}^*(q) &= n(n+2)c_n q^n + (n-1)d_n q^{n-2}, \end{aligned}$$

zgodnie z (4.1), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), otrzymamy:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n C_{w,n}^*(q) P_n(t), \\ w_\theta &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n D_{w,n}^*(q) \frac{dP_n(t)}{d\theta}, \\ p &= \sum_n N_{w,n} P_n(t); \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1}{2G} \sum_n F_{w,n}^*(q) P_n(t), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2G} \sum_n C_{w,n}^*(q) P_n(t) + D_{w,n}^* \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} \sum_n H_{w,n}^*(q) P_n(t) - D_{w,n}^* \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= 2G\varepsilon_\rho + p = \sum_n [F_{w,n}^*(q) + N_{w,n}(q)] P_n(t), \\
 \sigma_\theta &= 2G\varepsilon_\theta + p = \sum_n [C_{w,n}^*(q) + N_{w,n}(q)] P_n(t) + D_{w,n}^* \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \sigma_\varphi &= 2G\varepsilon_\varphi + p = \sum_n [H_{w,n}^*(q) + N_{w,n}(q)] P_n(t) - D_{w,n}^* \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \tau_{\rho\theta} &= G\gamma_{\rho\theta} = \sum_n K_{w,n}^*(q) \frac{dP_n(t)}{d\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

5. Grubościenna powłoka kulista nieściśliwa

Przez sumowanie stanu napięcia dla zagadnienia zewnętrznego i wewnętrznego można uzyskać stan napięcia dla grubościennej powłoki o promieniach wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 , a więc dla $R_1 < \varrho < R_2$. Funkcje przemieszczeń w tym przypadku będą mieć postać

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \sum_n [A_{z,n} a_n S^{n+1} + A_{w,n} c_n q^n] P_n(t), \\
 \omega &= \sum_n [B_{z,n} a_n S^{n+1} + B_{w,n} c_n q^n] P_n(t), \\
 \Phi &= \sum_n [R_1^2 b_n S^{n+1} + R_2^2 d_n q^n] P_n(t).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Następnie

$$\begin{aligned}
 u_\rho &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n [C_{z,n}^*(S) + C_{w,n}^*(q)] P_n(t), \\
 w_\theta &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n [D_{z,n}^*(S) + D_{w,n}^*(q)] P_n(t), \\
 p &= \sum [N_{z,n}(S) + N_{w,n}(q)] P_n(t); \\
 \varepsilon_\rho &= \frac{1}{2G} \sum_n [F_{z,n}^*(S) + F_{w,n}^*(q)] P_n(t), \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2G} \sum_n [C_{z,n}^*(S) + C_{w,n}^*(q)] P_n(t) + [D_{z,n}^*(S) + D_{w,n}^*(q)] \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} \sum_n [H_{z,n}^*(S) + H_{w,n}^*(q)] P_n(t) - [D_{z,n}^*(S) + D_{w,n}^*(q)] \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \gamma_{\rho\theta} &= \frac{1}{G} \sum_n [K_{z,n}^*(S) + K_{w,n}^*(q)] \frac{dP_n(t)}{d\theta};
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

(5.3)

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= \sum_n [F_{z,n}^*(S) + F_{w,n}^*(q) + N_{z,n}(S) + N_{w,n}(q)] P_n(t), \\
 \sigma_\theta &= \sum_n [C_{z,n}^*(S) + C_{w,n}^*(S) + N_{w,n}(S) + N_{w,n}(q)] P_n(t) + [D_{z,n}^*(S) + D_{w,n}^*(q)] \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \sigma_\varphi &= \sum_n [H_{z,n}^*(S) + H_{w,n}^*(S) + N_{z,n}(S) + N_{w,n}(q)] P_n(t) + [D_{z,n}^*(S) + D_{w,n}^*(q)] \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \tau_{\rho\theta} &= \sum_n [K_{z,n}^*(S) + K_{w,n}^*(q)] \frac{dP_n(t)}{d\theta},
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

gdzie oznaczenia są określone wzorami (3.2) i (4.2).

6. Pełna kula nieściśliwa poddana działaniu dwóch sił skupionych

Zastosujemy wzory wyprowadzone w p. 4 dla wyznaczenia rozkładu naprężeń i przemieszczeń w pełnej kuli nieściśliwej, obciążonej dwiema siłami skupionymi.

Mamy dla przemieszczeń następujące wzory

$$\begin{aligned}
 u_\rho &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n [n(n+1)c_n q^n + nd_n q^{n-2}] P_n(t), \\
 w_\theta &= \frac{1}{2G} \varrho \sum_n [(n+3)c_n q^n + d_n q^{n-2}] \frac{dP_n(t)}{d\theta}.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Okazuje się celowe przedstawienie naprężeń w następującej postaci

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= \sum_n [\alpha_{w,n} c_n q^n + n(n-1)d_n q^{n-2}] P_n(t), \\
 \sigma_\theta &= \sum_n [\beta_{w,n} c_n q^n + nd_n q^n] P_n(t) + \sum_n [(n+3)c_n q^n + d_n q^{n-2}] \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \sigma_\varphi &= \sum_n [\gamma_{w,n} c_n q^n - n^2 d_n q^n] P_n(t) - \sum_n [(n+3)c_n q^n + d_n q^{n-2}] \frac{d^2 P_n(t)}{d\theta^2}, \\
 \tau_{\rho\theta} &= \sum_n [\delta_{w,n} c_n q^n + (n-1)d_n q^{n-2}],
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\begin{aligned}
 \alpha_{w,n} &= n^3 - 4n - 3, & \beta_{w,n} &= -n^2 - 4n - 3, \\
 \gamma_{w,n} &= -n^3 - 5n^2 - 7n - 3, & \delta_{w,n} &= n(n+3),
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

$q = \frac{\varrho}{R}$, R — promień kuli.

Współczynniki c_n i d_n w powyższych równaniach są niewiadome. Określamy je z warunków brzegowych. Neuber interpretuje działanie sił skupionych na powierzchni kuli w następujący sposób

$$\sigma_\rho^0 = \lim \sigma_\rho^0(n) \quad \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\theta}^0(n) = 0,
 \tag{6.4}$$

gdzie σ_ρ^0 i $\tau_{\rho\theta}^0$ oznaczają naprężenia na brzegu, a

$$\sigma_\rho^0(n) = -\frac{P}{nR^2} (n+1)t^{2n}, \quad (t = \cos \theta).$$

Autor pracy [6] za pomocą szeregu wielomianów Legendre'a

$$t^{2n} = \frac{1}{2n+1} P_0(t) + \sum_{k=1}^n (4k+1) \frac{2n(2n-2)\dots(2n-2k+2)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+1)} P_{2k}(t),$$

znajduje, przez przechodzenie do granicy dla $n \rightarrow \infty$, nową postać stanu naprężenia, odpowiadającą działaniu dwóch sił

$$(6.5) \quad \sigma_\rho^0 = \frac{1}{2} \sigma_s \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) P_{2k}, \quad \tau_{\rho\theta}^0 = 0 \quad \left(\sigma_s = -\frac{P}{nR^2} \right)$$

i udowadnia, że

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \sigma_\rho^0 &= 0 & \text{dla } \theta &\neq 0, \pi, \\ \sigma_\rho^0 &= -\infty & \text{dla } \theta &= 0, \pi. \end{aligned}$$

W rozpatrywanym przypadku warunki brzegowe dla $q = \varrho/R = 1$ są

$$(6.7) \quad \sigma_\rho - \sigma_\rho^0 = 0, \quad \tau_{\rho\theta} - \tau_{\rho\theta}^0 = 0 \quad \text{dla } \theta \neq 0, \pi,$$

a więc na podstawie (6.5) i (6.2) otrzymamy układ równań algebraicznych, za pomocą którego wyznaczymy współczynniki

$$(6.8) \quad \alpha_{w,2k} c_{2k} q^{2k} + 2k(2k-1) d_{2k} = \frac{4k+1}{2} \sigma_s,$$

$$\delta_{w,2k} c_{2k} q^{2k} + (2k-1) d_{2k} = 0,$$

$$(6.9) \quad c_{2k} = \frac{4k+1}{2} \cdot \frac{1}{M_{2k}} \sigma_s, \quad d_{2k} = -\frac{4k+1}{2} \frac{1}{M_{2k}} L_{w,2k} \sigma_s,$$

gdz

$$M_{w,2k} = -8k^2 - 8k - 3, \quad L_{w,2k} = \frac{\delta_{w,2k}}{2k-1}.$$

Wartości współczynników dla $k = 0, 1, \dots, 7$ są podane w tablicy 1.

Na podstawie równań (6.1) i (6.2) oraz (6.9) stan naprężenia w pełnej nieściśliwej kuli możemy przedstawić w postaci

$$(6.10) \quad u_\rho = \frac{\sigma_s}{4G} \varrho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{M_{w,2k}} [2k(2k+1)q^{2k} - 2kL_{w,2k}q^{2k-2}] P_{2k}(t),$$

$$w_\theta = \frac{\sigma_s}{4G} \varrho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{M_{w,2k}} [(2k+3)q^{2k} - L_{w,2k}q^{2k-2}] \frac{dP_{2k}(t)}{dt}.$$

Tablica 1

k	$M_{w,2k}$	$\delta_{w,2k}$	$L_{w,2k}$	c_{2k}/σ_s	d_{2k}/σ_s
0	-3,0000	0,0000	0,0000	-0,3333	0,0000
1	-17,0000	8,0000	8,0000	-0,4471	1,1768
2	-51,0000	24,0000	8,0000	-0,0882	0,7056
3	-99,0000	48,0000	9,6000	-0,0656	0,6388
4	-163,0000	80,0000	11,4267	-0,0521	0,5953
5	-243,0000	120,0000	13,3333	-0,0432	0,5761
6	-339,0000	168,0000	15,2727	-0,0368	0,5620
7	-451,0000	224,0000	17,2308	-0,0321	0,5531

$$(6.11) \quad \frac{\sigma_\rho}{\sigma_s} = \frac{1}{2} + \frac{40}{19} P_2(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} \alpha_{w,2k} q^{2k} P_{2k}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{4k+1}{2M_{w,2k}} L_{w,2k} (2k-1) 2k q^{2k-2} P_{2k}(t),$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_s} = \frac{1}{2} - \frac{40}{19} P_2(t) + \frac{20}{19} \frac{d^2 P_2(t)}{d\theta^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} \beta_{w,2k} q^{2k} P_{2k}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{4k+1}{2M_{w,2k}} 2k L_{w,2k} q^{2k-2} P_{2k}(t) + \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{4k+1}{2M_{w,2k}} L_{w,2k} q^{2k-2} \frac{d^2 P_{2k}(t)}{d\theta^2},$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_s} = \frac{1}{2} - \frac{80}{19} P_2(t) - \frac{20}{19} \frac{d^2 P_{2k}(t)}{d\theta^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} \gamma_{w,2k} q^{2k} P_{2k}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} (2k+3) q^{2k} \frac{d^2 P_{2k}(t)}{d\theta^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} L_{w,2k} q^{2k-2} \frac{d^2 P_{2k}(t)}{d\theta^2},$$

$$\frac{\tau_{\rho\theta}}{\sigma_s} = \frac{20}{19} \frac{dP_2(t)}{d\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} \delta_{w,2k} \frac{dP_{2k}(t)}{d\theta} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k+1}{2M_{w,2k}} (2k-1) L_{w,2k} q^{2k-2} \frac{dP_{2k}(t)}{d\theta}.$$

Напряжения в  rodku kuli wynoszą zatem

$$\sigma_p^* = \left[\frac{1}{2} + \frac{40}{19} P_2(t) \right] \sigma_s,$$

$$\sigma_\theta^* = \left[\frac{1}{2} + \frac{40}{19} P_2(t) + \frac{20}{19} \frac{d^2 P_2(t)}{d\theta^2} \right] \sigma_s,$$

$$\sigma_\varphi^* = \left[\frac{1}{2} - \frac{80}{19} P_2(t) - \frac{20}{19} \frac{d^2 P_2(t)}{d\theta^2} \right] \sigma_s,$$

a g owne naprężenia w  rodku kuli ($\theta = 0$)

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* = \frac{21}{38} \frac{P}{\pi R^2}, \quad \sigma_3^* = -\frac{99}{38} \frac{P}{\pi R^2}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. J. GOLECKI, *On the foundations of the theory of elasticity of plane incompressible non-homogeneous bodies* Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Warszawa 1958.
2. J. GOLECKI, *Pewne zagadnienia osiowo-symetryczne dla obszarów sprężystych ograniczonych kulistym powierzchniami*, Arch. Mech. Stos., 2, 7 (1955).
3. A. E. LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge 1906.
4. Н. Н. ЛЕБЕДЕВ, *Специальные функции и их приложения*, Москва 1953.
5. E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge 1931.
6. J. GOLECKI, *Concentrated force acting on a spherical surface*, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. VI, 1958,

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОЙ ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Получены выражения для перемещений и напряжений в упругих несжимаемых областях ограниченных сферическими поверхностями. Рассматривается: 1) внешняя задача, 2) внутренняя задача, 3) толстостенная сферическая оболочка. Выведенные выражения применяются к расчету полной сферы нагруженной двумя сосредоточенными силами. Даются выражения на перемещения и напряжения.

Summary

AXI-SYMMETRIC PROBLEM FOR INCOMPRESSIBLE ELASTIC REGIONS BOUNDED BY SPHERICAL SURFACES

The displacements and stresses in incompressible elastic regions bounded by spherical surfaces have been derived in the three particular cases: 1) External problem (spherical cavity); 2) Internal problem (solid sphere); 3) Thick-walled spherical shell. The formulae derived in the paper are applied to the case of a solid sphere compressed by two concentrated forces. Explicit expressions for displacements and stresses are given.

POLITECHNIKA W SOFII

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1969 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

DZIESIĘCIOLECIE POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

W dniach 5 i 6 listopada 1968 roku odbył się w Warszawie, z okazji dziesięciolecia PTMTS, uroczysty Zjazd Członków Towarzystwa połączony z Sesją Naukową. W Zjeździe wzięło udział 156 członków Towarzystwa oraz wiele osób spoza PTMTS, zaproszonych na uroczystości. W szczególności w obradach uczestniczyli następujący goście zagraniczni: Prof. dr A. Ju. ISZLIŃSKI i Prof. dr W. W. SOKOŁOWSKI (z żoną) — Członkowie Akademii Nauk ZSSR, Dr Tibor CZIBERE — Węgry, Dr Joachim FÖRSTE i Dr Günter SCHMIDT — NRD, Prof. Marin Marinow KOZAROW — Bułgaria.

W pierwszym dniu Zjazdu o godz. 11, w sali im. Rudniewa Pałacu Kultury i Nauki, za stołem przewodzącym zasiadli: Przewodniczący Komitetu Honorowego X-lecia PTMTS, Prezes Polskiej Akademii Nauk — Prof. dr Janusz GROSZKOWSKI oraz Członkowie Komitetu Honorowego: prof. dr Witold NOWACKI — Sekretarz Naukowy PAN, Prof. dr Jerzy MUTERMILCH — Przewodniczący PTMTS, prof. dr Wacław OLSZAK — Dyrektor Instytutu Podstawowych Problemów Techniki i prof. dr Dionizy SMOLEŃSKI — Rektor Politechniki Warszawskiej, a także reprezentujący Wicepremiera Eugeniusza SZYRA — Przewodniczącego Komitetu Nauki i Techniki — prof. dr Jan KACZMAREK — Pierwszy Zastępca Przewodniczącego KNIiT.

Obrady zagał Przewodniczący PTMTS — prof. dr Jerzy MUTERMILCH, który powitał przybyłych gości i członków Towarzystwa oraz omówił pokrótce genezę i cel Zjazdu.

Następnie głos zabrał Przewodniczący Komitetu Honorowego, prof. dr Janusz GROSZKOWSKI, który w swym przemówieniu stwierdził między innymi: «Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej prowadzi działalność naukową w zakresie dyscypliny m e c h a n i k a w bardzo szerokim znaczeniu tego słowa. Różnorodność tematyki naukowej stwarza duże możliwości przed Towarzystwem, gdyż pozwala na poznanie różnorodnych metod badań naukowych, a także na znajdowanie zagadnień leżących na pograniczu poszczególnych dyscyplin. Jednocześnie ten szeroki wachlarz zagadnień, jaki obejmuje zakres zainteresowań PTMTS, powinien być przeanalizowany z punktu widzenia koncentracji działalności naukowej na pewnych wybranych kierunkach istotnych z punktu widzenia przyszłości nauki oraz rozwoju naszego kraju.

Ten punkt widzenia naświetlony został w tezach na V Zjazd PZPR, przewidujących konieczność skupienia działalności naukowo-badawczej na pewnej ograniczonej liczbie tematów, których wyniki mają szczególne znaczenie dla gospodarki narodowej.

Przed PTMTS stoi więc bardzo ważne i wdzięczne zadanie włączenia się do akcji poszukiwania tych najważniejszych tematów i pomocy w tym zakresie odpowiednim organom państwowym, placówkom naukowo-badawczym i zakładom przemysłowym.

Można by krótko scharakteryzować działalność Towarzystwa przez stwierdzenie, że pierwsze dziesięciolecie jego działalności obejmowało wzajemne poznanie się środowiska i uaktywnianie działalności naukowej, zwłaszcza w ośrodkach mniejszych lub mających mniejsze tradycje w tym zakresie.

Następne dziesięciolecie powinno natomiast pozostawać pod znakiem pewnego ukierunkowania działalności naukowej reprezentowanej przez członków Towarzystwa, wskazywanie drogi do koncentracji badań oraz przenoszenia metod jednej dyscypliny naukowej do innych dyscyplin. Wydaje się również, że działalność Towarzystwa powinna się bardziej zbliżyć do przemysłu. Przede wszystkim więc należałoby w większym stopniu wciągnąć do prac Towarzystwa pracowników resortowych instytutów naukowo-badawczych, biur projektowych itp. Poza tym, pożądanym jest ściślejszy kontakt ze stowarzyszeniami technicznymi zgrupowanymi w NOT, przy czym Towarzystwo może oferować tutaj atrakcyjną formę w postaci odczytów, sympozjów i kursów specjalnych.

Należy także zwrócić uwagę na współpracę z innymi krajowymi towarzystwami naukowymi, która może przynieść bardzo dobre rezultaty, gdyż pozwoli na wskazanie dróg do jeszcze szerszej integracji i koncentracji działalności naukowej. Wreszcie istotnym czynnikiem dla dalszego rozwoju Towarzystwa są jego kontakty międzynarodowe. Kontakty takie istnieją już obecnie, powinny one jednak być nie tylko kultywowane, lecz zintensyfikowane.»

Prof. GROSZKOWSKI zakończył swe przemówienie wyrażeniem uznania Towarzystwu dla dotychczasowych jego osiągnięć oraz życzeniami dalszego rozwoju ku pożytkowi nauki polskiej.

Prof. dr Jerzy MUTERMILCH rozpoczął swój referat pt. «Dziesięciolecie Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej» od nawiązania do chlubnych tradycji towarzystw naukowych, które zakładane były dla podobnych celów co PTMTS.

Przypomniał on, że w istniejącym w latach 1830—31 «Warszawskim Towarzystwie Przyjaciół Nauk» powstały już w 1826 r. w Dziale Umiejętności Matematycznych: Sekcja Mechaniki i Sekcja Budownictwa, a w Dziale Umiejętności Ekonomicznych — Sekcja Technologiczna, jako pierwsze wyodrębnione placówki nauk technicznych. Towarzystwo interesowało się bardzo żywo zagadnieniami techniki, a w naukach matematyczno-przyrodniczych starało się o ścisły ich związek z techniką. Niestety, z upadkiem powstania listopadowego skończyła się działalność tak bardzo zasłużonego dla kultury polskiej Towarzystwa, które skupiło najświatlejsze umysły owego okresu z wieloletnim prezesem Stanisławem STASZICEM na czele i kładło m.in. wielki nacisk na nauki ścisłe i zużytkowanie ich zdobyczy dla gospodarki krajowej.

W pierwszych latach szóstego dziesiątka ubiegłego wieku zawiązało się we Lwowie półprywatne «Towarzystwo dla pielęgnowania i rozpowszechniania wiadomości technicznych, przemysłowych i przyrodniczych», z którego w 1876 r. powstało «Towarzystwo Ukończonych Techników», przekształcone w dwa lata później na «Towarzystwo Politechniczne we Lwowie». Jednym z największych osiągnięć tego Towarzystwa było podjęcie myśli zwołania I Zjazdu Techników Polskich z całego kraju. Myśl tę przyjęło z aplauzem «Towarzystwo Techniczne Krakowskie», jak również technicy z Królestwa Polskiego, którzy nie mogli mieć wówczas swej organizacji i w imieniu których inicjatywę lwowską poparł F. KUCHARZEWSKI. Zjazd ten odbył się, jak wiadomo, dopiero w 1882 r. i stał się ważnym wydarzeniem dla rozwoju polskiej myśli technicznej i życia organizacyjnego w tej dziedzinie.

W 1870 r. powstało w Paryżu, dzięki inicjatywie i środkom finansowym DZIAŁYŃSKIEGO, «Towarzystwo Nauk Ścisłych», które cel swój określało jako «zebranie i spożytkowanie dla kraju sił naukowych, poza jego granicami znajdujących się». W latach 1870—82 wydawano «Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych», w którym ogłaszane były w języku polskim prace czysto naukowe, a także odnoszące się do zastosowań nauk ścisłych. Równie ważne znaczenie miały wydawane przez Towarzystwo podręczniki akademickie, a wśród nich «Wykład Wytrzymałości i Stałości Budowli» W. KLUGERA oraz «Wykład hydrauliki wraz z teorią machin wodnych poprzedzony wiadomościami wstępnymi z mechaniki analitycznej ciał płynnych», F. KUCHARZEWSKIEGO i W. KLUGERA — pierwsze z tych dziedzin podręczniki polskie.

Przechodząc do czasów nowszych, wymienić trzeba «Warszawskie Towarzystwo Politechniczne» powołane do życia w 1920 r., które wyrosło z «Koła Inżynierów przy Politechnice Warszawskiej», powstałego w roku 1918. Działalność tego Towarzystwa dotyczyła w znacznej mierze mechaniki i jej zastosowań. Pierwszym prezesem WTP był H. CZOPOWSKI, po nim zaś godność tę piastował M. T. HUBER. Celem Towarzystwa było popieranie rozwoju nauk technicznych i związanych z nimi nauk matematycznych i przyrodniczych oraz szerzenie tych nauk wśród społeczeństwa.

Następnym etapem było utworzenie w 1930 r. w «Towarzystwie Naukowym Warszawskim» (powstałym w 1907 r.) Wydziału Nauk Technicznych. Długoletnim przewodniczącym tego Wydziału był Aleksander

WASIUTYŃSKI, a od 1950 r. Konstanty ŻORAWSKI, na listach zaś członków znajdujemy takie nazwiska, jak Stanisław ZWIERZCHOWSKI, Stefan BRYŁA, Czesław WITOSZYŃSKI, Witold WIERZBICKI i wielu innych. Towarzystwo zapisało piękną kartę w dziejach polskiej nauki, działając równoległe z powstałą w 1920 r. Akademią Nauk Technicznych. Ogniskowało się w nim życie umysłowe i moralne — pisze historyk o tym Towarzystwie — musiał więc być na nie w 1939 r. przez hitlerowców wydany wyrok śmierci. W czasie okupacji kielkowała w Towarzystwie nie zrealizowana przed wojną myśl utworzenia Polskiej Akademii Nauk jako organizacji jednoczącej całą naukę polską. Odrodzone po wojnie Towarzystwo opracowało w 1950 r. odpowiedni projekt i prowadziło swą działalność aż do powstania PAN.

Dalsza część referatu prof. J. MUTERMILCHA omawiająca działalność PTMTS w okresie 10 lat jego istnienia została opublikowana w zeszycie specjalnym 3/68 «Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej» (s. 243—250).

Jako pierwszy wygłosił przemówienie powitalne prof. dr Jan KACZMAREK. Zaznaczył on na wstępie, że występuje na Zjeździe nie tylko jako osoba oficjalna reprezentująca Komitet Nauki i Techniki, ale jako kolega — członek Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Nawiązując do tego na V Zjazd PZPR, zwrócił m.in. uwagę na potrzebę szybkiego wdrażania osiągnięć naukowych do praktyki, przekazywania konkretnych opracowań gospodarce narodowej i ściślejszego powiązania nauki z przemysłem.

Prof. dr Waclaw OLSZAK podkreślił zasługi Towarzystwa w zakresie ożywienia działalności naukowej oraz złożył życzenia dalszych sukcesów. Prof. OLSZAK podkreślił, że przemawia nie tylko jako przedstawiciel IPPT i Członek Założyciel PTMTS, ale również jako reprezentant IUTAM, do czego upoważniony jest wspólnie z Prof. dr W. NOWACKIM.

Z kolei zabrał głos członek Akademii Nauk ZSRR, prof. dr W. W. SOKOŁOWSKI, który w ciepłych słowach scharakteryzował dotychczasowe żywe kontakty naukowe pomiędzy uczonymi obu naszych narodów. Wymienił szereg nazwisk polskich twórców w dziedzinie mechaniki, których osiągnięcia znane są szeroko poza granicami Polski. Polskiemu Towarzystwu MTiS przekazał serdeczne pozdrowienia od uczonych radzieckich, a w imieniu wszystkich zagranicznych delegacji uczestniczących w Zjeździe złożył życzenia owocnych obrad. Na koniec prof. SOKOŁOWSKI wręczył prof. J. MUTERMILCHOWI podarek Akademii Nauk Związku Radzieckiego dla PTMTS w postaci statuetki z modelem «sputnika».

W imieniu bratniej organizacji Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej przekazał Zjazdowi pozdrowienia i życzenia Wiceprzewodniczący PTETS, prof. Tadeusz CHOLEWICKI.

Następnie prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI, przewodniczący Komitetu Organizacyjnego Zjazdu, odczytał pisma i depeche, które wpłynęły do Prezydium. Nadesłali je m.in. członkowie Komitetu Honorowego: prof. dr Henryk JABŁOŃSKI — Minister Oświaty i Szkolnictwa Wyższego oraz prof. dr Włodzimierz BURZYŃSKI i prof. dr Bohdan STEFANOWSKI — członkowie honorowi PTMTS, a także prof. dr Tadeusz KOZŁOWSKI i prof. dr Zdzisław PARSZEWSKI — Przewodniczący Oddziału PTMTS w Łodzi.

Na koniec członek Akademii Nauk ZSRR, prof. dr A. Ju. ISZLIŃSKI, w krótkim przemówieniu wskazał na potrzebę międzynarodowej współpracy naukowej i rozwijanie wzajemnych kontaktów.

Po przerwie prof. dr Witold NOWACKI wygłosił referat pt. «Kierunki rozwojowe i zadania badawcze w dziedzinie mechaniki ciała stałego» (MTiSt., 1968, 6, nr 3, 251–158). W dyskusji, w której wzięli udział prof. dr Sylwester KALISKI, doc. dr Zbigniew KOWAL, prof. dr Jan SZMELTER, dr inż. Marian CHRZANOWSKI, prof. dr Adam MORECKI, mówiono między innymi o konieczności wiązania badań podstawowych z konkretnymi zastosowaniami technicznymi, o metodach probabilistycznych w mechanice, o rozwoju metod numerycznych itp. Referent ustosunkował się do głosów dyskutantów, stwierdzając w szczególności, że należałoby dążyć do takiej sytuacji, w której wszelkie badania teoretyczne mogłyby być wsparte doświadczeniami własnymi.

Przewodnictwo obrad popołudniowych objął prof. dr Marian JANUSZ. Po zagajeniu Przewodniczącego referaty o polskich osiągnięciach w zakresie mechaniki ciała stałego odkształcalnego w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej wygłosili:

- doc. dr Gwidon SZEFER na temat rozwoju teorii sprężystości, (MTiSt. 1968, 6, nr 3, 313–359),
- prof. dr Michał ŻYCZKOWSKI na temat rozwoju teorii plastyczności i wyciężenia (MTiSt., 1968, 6, nr 3, 361–400).
- prof. dr Igor KISIEL na temat rozwoju reologii (MTiSt., 1968, 6, nr 3, 269–298).

W referatach tych oprócz syntetycznego ujęcia poruszanej problematyki podano ciekawe dane statystyczne dotyczące liczby publikacji, jakie ukazały się w danej dziedzinie w minionym dziesięcioleciu z uwzględnieniem podziału tematycznego i podziału na ośrodki naukowe.

Po referatach rozwinęła się dyskusja, w której zabrali głos kolejno prof. dr Stanisław GOŁĄB, dr Jacek WOJCIECHOWSKI, doc. dr Zbigniew OSIŃSKI, prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI, prof. dr Igor KISIEL, prof. dr Marian JANUSZ, prof. dr Tadeusz KOCHMAŃSKI, prof. dr Roman CIESIELSKI, prof. dr Władysław KUCZYŃSKI, prof. dr Janusz MURZEWSKI oraz prof. dr Michał ŻYCZKOWSKI.

W dyskusji postulowano m.in. wzrost roli i udziału badań doświadczalnych w ogólnej tematyce przyszłych prac naukowych w mechanice ciała stałego. Zwrócono także uwagę na potrzebę odpowiedniego zabezpieczenia priorytetu naukowego poprzez publikacje prac w periodykach naukowych, a nie przedstawianie na zamieszczaniu ich w rozmaitych wydawnictwach ukazujących się na prawach rękopisu.

W godzinach wieczornych odbyła się w restauracji Hotelu BRISTOL kolacja koleżeńska, w czasie której Przewodniczący Zarządu Głównego PTMTS, prof. dr Jerzy MUTERMILCH wniósł toast za dalszy rozwój Towarzystwa i pomyślność jego Członków.

We środę, 6 listopada 1968 roku, obrady rozpoczęły się o godz. 10. Przewodnictwo objął prof. dr Jan MADEJSKI. Zgodnie z programem prof. dr Jerzy BUKOWSKI wygłosił referat pt. «Kierunki rozwoju prac w zakresie mechaniki płynów w dziesięcioleciu 1958–1968» napisany wspólnie z prof. dr. Włodzimierzem PROSNAKIEM (MTiSt. 1969, 7, nr 3), a następnie prof. dr Edmund KARAŚKIEWICZ przedstawił referat opracowany wspólnie z prof. dr Władysławem BOGUSZEM i Doc. dr Stanisławem WIŚNIEWSKIM pt. «Rozwój mechaniki układów dyskretnych w ostatnim dziesięcioleciu w Polsce» (MTiSt., 1968, 6, nr 3, 259–267). Trzeci z referatów pt. «Termodynamika techniczna w Polsce w okresie ostatniego dziesięciolecia», opublikowany w MTiSt., 1968, 6, nr 3, 299–311, nie został wygłoszony ze względu na nieobecność autora, prof. dra Stanisława OCHĘDUSZKI.

W dyskusji nad referatami zabrali głos kolejno: prof. dr Jan ODERFELD, prof. dr Igor KISIEL, doc. dr Zbigniew OSIŃSKI, Prof. Kazimierz KUTARBA, prof. dr Adam MORECKI, doc. dr Antoni JAKUBOWICZ, prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI, prof. dr Stanisław GOŁĄB, prof. Jerzy BUKOWSKI, doc. dr Kazimierz WRZEŚNIEWSKI, doc. dr Bohdan KRAJEWSKI i prof. dr Edmund KARAŚKIEWICZ. Dyskutanci zwrócili uwagę na pewne luki w referatach i uzupełnili je informacjami na temat pominiętych dziedzin, takich np. jak biomechanika. Postulowano także koncentrację wysiłków badawczych na pewnych szczególnie ważnych kierunkach mechaniki.

Następnie prof. dr J. MADEJSKI udzielił głosu prof. dr J. MUTERMILCHOWI, który dokonał podsumowania całej sesji naukowej. Zamykając Jubileuszowy Zjazd członków PTMTS, prof. J. MUTERMILCH wyraził serdeczne podziękowanie:

wszystkim autorom za opracowanie bardzo interesujących i pożytecznych referatów przeglądowych, których przygotowanie wymagało ogromnej ilości czasu i pracy,

Redakcji czasopisma «Mechanika Teoretyczna i Stosowana» za terminowe wydanie zeszytu specjalnego o starannej szacie graficznej,

Przewodniczącym posiedzeń roboczych sesji za sprawne prowadzenie obrad,

wszystkim uczestnikom Zjazdu, a szczególnie dyskutantom, za żywy udział w obradach,

Przewodniczącemu Komitetu Organizacyjnego prof. dr. Zbigniewowi KĄCZKOWSKIEMU i członkom tego Komitetu — Dr Kazimierzowi BORSUKOWI, Doc. dr. Zbigniewowi OSIŃSKIEMU, Mgr inż. Edwardowi RADWAŃSKIEMU, Prof. dr. Bogumiłowi STANISZEWSKIEMU, Dr Zbigniewowi WASILEWSKIEMU i Mgr inż. Markowi ŻYSZKO — za duży wkład w przygotowanie Zjazdu oraz czuwanie przez cały czas jego trwania nad sprawnym przebiegiem,

obsłudze administracyjnej Zjazdu, a w szczególności Kierownicze Biura PTMTS, P. Halinie ROŚNIEWSKIEJ za bardzo ofiarną pracę przed i w czasie Zjazdu, dzięki której wszystkie sprawy organizacyjno-administracyjne, sprawy finansowe itp. były załatwiane niezwykle szybko i sprawnie ku zadowoleniu wszystkich zainteresowanych,

Panom Dr. Romanowi DOROSZKIEWICZOWI i Dr. Jerzemu WEHROWI z IPPT, Mgr. inż. Lechowi SŁOWAŃSKIEMU z ITB oraz Mgr. inż. Edwardowi RADWAŃSKIEMU z ITC za udostępnienie uczestnikom Zjazdu laboratoriów i pracowni badawczych.

W godzinach popołudniowych ponad 60 osób zwiedzało laboratoria.

SYMPOZJON POŚWIĘCONY MODELOWANIU W MECHANICE

Szczyrk, 17–23 luty 1969 r.

W dniach 17–23 lutego 1969 roku odbył się w Szczyрку sympozyjon pod hasłem «Modelowanie w mechanice» zorganizowany staraniem Oddziału Gliwickiego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. W sympozyjnie uczestniczyły 83 osoby reprezentujące uczelnie techniczne oraz instytuty naukowo-badawcze z całej Polski. Na sympozyjnie wygłoszono 23 referaty spośród 26 zgłoszonych. Trzy referaty nie zostały przedstawione uczestnikom ze względu na chorobę referentów. Obszerne streszczenia prac zostały wydrukowane i rozesłane uczestnikom w postaci specjalnego zeszytu Politechniki Śląskiej (124 stron) przed rozpoczęciem sympozyjonu. W dyskusji nad referatami zabierało głos 71 dyskutantów. Wygłoszone zostały następujące referaty:

1. L. MÜLLER, *Zastosowanie analizy wymiarowej.*
2. Z. DYLAŁG, ZB. ORŁOŚ, *Podobieństwo modelowe w zagadnieniach doświadczalnej analizy naprężeń na przykładzie badań modelu silnika.*
3. W. BOGUSZ, *Modelowanie maszyn układami dyskretnymi.*
4. J. HONCZARENKO, *Zastosowanie analogii elektromechanicznej do badania własności dynamicznych napędu głównego obrabiarki.*
5. T. KOLENDOWICZ, *Problem spełnienia warunków podobieństwa w modelowaniu układów prętów przestrzennych.*
6. E. BIELEWICZ, J. FILIPKOWSKI, *Modelowanie konstrukcji powłokowych przy użyciu plexiglasu.*
7. K. LENIK, Z. WUSATOWSKI, *Próby modelowego walcowania przy nierównych średnicach walców.*
8. J. WANDRASZ, *Badania modelowe ustalonego pola temperatury za pomocą wanny elektrolitycznej.*
9. A. STRUPCZEWSKI, *Ocena błędów popełnianych przy modelowaniu problemów cieplnych przy pomocy oporowych układów analogowych.*
10. R. SZYMANIK, *Wykorzystanie metody modelowania analogowego do określania parametrów termodynamicznych obiegu porównawczego dwuprzepływowych silników odrzutowych.*
11. A. MUSZYŃSKA, *O pewnych modelach wału wirującego.*
12. A. LESIKIEWICZ, ST. WIŚNIEWSKI, *Modelowanie procesów spalania.*
13. J. WANDRASZ, *Modelowanie przepływu dmuchu i spalin w nagrzewnicy wielkopiecowej.*
14. ST. MIERZWIŃSKI, *Modelowanie wentylacji pomieszczeń.*
15. M. LURSKI, *Modelowanie w zagadnieniach reologicznych.*
16. R. KOZUBOWSKI, E. GAŁKA, *Modelowanie w badaniach aerodynamicznych turbin osiowych.*
17. A. WSZELACZYŃSKI, *Podobieństwo geometryczne w modelowych badaniach wentylatorów.*
18. J. KRZYŻANOWSKI, *Niektóre problemy modelowania przepływu w ostatnich stopniach turbin parowych.*
19. J. ŚWIĘCH, *Modelowanie zjawiska wirującego oderwania w pierścieniowych palisadach sprzężających.*
20. Z. SZCZEPANIAK, *Badania modelowe niektórych obudów murowych, żelbetowych i stalowych stosowanych w wyrobiskach górniczych.*
21. R. PUZYREWSKI, S. KRZECZKOWSKI, A. GARDZILEWICZ, *Kryteria podobieństwa w procesach rozdrabniania cieczy.*
22. R. KAPAŁA, W. KASPRZAK, B. ŁYSIK, *Sprzężone modele fizyczno-matematyczne w zastosowaniu do badań wytrzymałościowych konstrukcji mechanicznych.*
23. H. ŁUKASZCZYK, A. MAJDANIK, Z. WUSATOWSKI, *Próby stosowania siatek fotograficznych do przedstawienia odkształceń plastycznych.*

Tematyka sympozyjonu była poświęcona problemom ogólnej teorii podobieństwa i modelowania fizycznego, które wyłoniły się podczas wykonywania konkretnych badań modelowych w różnych dziedzinach mechaniki, jak statyce, dynamice, termodynamice, hydromechanice, reologii. Pominięto natomiast zagadnienie modelowania matematycznego, którym było poświęcone jedno z poprzednich konwersatoriów.

W referatach ogólnych i szerokiej dyskusji zajęto się zastosowaniem analizy wymiarowej w badaniach modelowych, określeniu kryteriów podobieństwa występujących w poszczególnych działach mechaniki. Dużo wagi poświęcono problemom wyboru wielkości fizycznych i ich postaci właściwie charakteryzujących

badane zjawisko. Zajęto się sposobami spełnienia warunków podobieństwa, oceną błędów powstałych z pominięcia lub niespełnienia niektórych kryteriów, problemami wynikającymi z modelowania przybliżonego, modelowania warunków początkowych i granicznych. Przedstawiono sposoby bezpośredniego określania skali poszczególnych wielkości fizycznych, charakteryzujących badane zjawisko w oparciu o analizę wymiarową.

W dyskusji zwrócono uwagę na to, że metoda podobieństwa i modelowania jest tylko jedną z wielu metod pozwalających na poznanie fizycznego zjawiska.

Oprócz referatów o charakterze ogólnym wygłoszone zostały referaty omawiające problemy praktycznej realizacji badań modelowych. Referaty te były poświęcone przede wszystkim modelowaniu częściowemu, chociaż niektóre z nich omawiały trudne problemy modelowania zupełnego występujące np. w modelowaniu procesów spalania.

W referatach tych wykazano, że umiejętne zastosowanie teorii podobieństwa i metod modelowania pozwala z dużą dokładnością uogólnić wnioski wypływające ze znajomości jednego zbadanego procesu lub zjawiska na całą grupę procesów lub zjawisk podobnych. Badania modelowe są szczególnie ważne w tych dziedzinach, w których następuje szybki postęp techniki warunkowany skróceniem okresu opracowywania nowych rozwiązań konstrukcyjnych. Ma to doniosłe znaczenie dla gospodarki narodowej i stąd szerokie zainteresowanie tematyką sympozjonu ze strony pracowników różnych ośrodków naukowo-badawczych z całej Polski.

Referaty były przeglądem aktualnej tematyki prac naukowo-badawczych w zakresie modelowania w mechanice i wykazały podobnie jak dyskusja duże przygotowanie teoretyczne uczestników. Wszystkie referaty prowadzono w oparciu o nowoczesne środki audiowizualne. W poszczególnych dniach obradom przewodniczyli: T. KOCHMAŃSKI, R. SZYMANIK, ZB. ORŁOŚ, W. BOGUSZ, T. OPOLSKI, ZB. OSIŃSKI, ZB. OLESIAK.

W zakończeniu zebrani podkreślili celowość i doniosłe znaczenie tego rodzaju sympozjów i wstępnie zaproponowali hasło przyszłorocznego sympozjonu: «Procesy statystyczne w mechanice». Poza obradami program przewidywał odczyty o charakterze popularnym i wypoczynek w różnych postaciach, co nadało sympozjonowi przyjemny charakter.

Jerzy Antoniak (Gliwice)

KONFERENCJA O STRUKTURZE I MECHANICE MATERIAŁÓW (SOUTHAMPTON)

W dniach 21—25 kwietnia 1969 r. odbywała się na Uniwersytecie w Southampton Międzynarodowa Konferencja nt. Struktury, Mechaniki i Projektowania Materiałów w Budownictwie Lądowym (International Conference on Structure, Solid Mechanics and Engineering Design in Civil Engineering Materials). Protektorami tej Konferencji był Uniwersytet w Southampton, Towarzystwo Betonu (The Concrete Society) i Unia Międzynarodowa Laboratoriów Badań Materiałów (RILEM). Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego był prof. P. B. MORICE, a sekretarzem M. TE'ENI z Uniwersytetu w Southampton. Konferencja zgromadziła około 350 specjalistów sponad 20 krajów, referatów zgłoszono ponad 100. Z Polski zgłoszono i przyjęto do programu Konferencji 3 referaty: prof. W. OLSZAKA, prof. J. LITWINISZYNA i prof. J. MURZEWSKIEGO. Jedynym reprezentantem PRL obecnym na Konferencji był prof. J. MURZEWSKI. Ilość delegatów z krajów socjalistycznych nie przekraczała 10 osób.

Celem konferencji była konfrontacja obecnej wiedzy i hipotez na temat struktury materiałów budowlanych, wpływu struktury na zachowanie się materiału pod obciążeniem i zastosowań tej wiedzy do projektowania konstrukcji. Reprezentowane były różne podejścia: matematyczne, fizyczne, inżynierskie. Nacisk położony został na prace z dziedziny mikro-mechaniki rozumianej w sensie systemów pośrednich między tymi, które analizuje się w badaniach mikroskopowych a tymi które są przedmiotem mechaniki technicznej. Gdy organizatorzy Konferencji już po terminie zgłoszeń referatów i wstępnym ustaleniu programu (wiosną 1968 r.) zorientowali się, że prac z tej właśnie dziedziny jest niewiele, rozesłali ankietę prosząc korespon-

dentów o wskazanie ewentualnych autorów z dziedziny mikromechaniki, a w szczególności z zakresu struktur losowych i efektu skali. Na tej podstawie uzyskali dodatkowe zgłoszenia. Między innymi autor tej notatki przesłał referat pt. «Losowa struktura materiału quasi-jednorodnego». W rezultacie, w czasie sesji i dyskusji na Konferencji obok tradycyjnych zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych i zagadnień technologicznych przewijały się w równej mierze kwestie mechaniki mikro-struktur rozmaicie definiowanej (mini-mechanika, mezo-mechanika, submakro-mechanika) i różne aspekty mikro-niejednorodności nazywanej niehomogenicznością, inhomogenicznością, heterogenicznością.

Referaty przygotowane na Konferencję uprzednio wydrukowano; odbitki zostały rozesłane częściowo przed Konferencją, a częściowo rozdane w czasie jej trwania. Z tej racji zrezygnowano z wygłoszenia referatów, a przyjęto system referatów generalnych. Referenci generalni nie streszczali prac, ale poruszali najważniejsze dyskusyjne sprawy w nich zawarte. W ten sposób każdy z autorów czuł się zobowiązany do zabrania głosu i głosu tego mu udzielano, niezależnie od tego, że odpowiadał następnie na pytania i uwagi napływające z sali.

Obrady trwały 5 dni i podzielone były na 8 kolejnych sesji przed- i popołudniowych.

Konferencję otworzył dr A. R. COLLINS, dyrektor Stowarzyszenia Badań i Informacji Przemysłu Budowlanego W. Brytanii. Pełnił on honory przewodniczącego całej Konferencji.

Tematyka poszczególnych sesji była następująca:

Sesja I — Referaty wstępne. Dotyczyły one odkształceń mikro-struktury, pęknięć i analizy konstrukcji z uwzględnieniem rzeczywistego zachowania się materiałów. Wygłosili je: prof. S. DUNDURS (North-western University, USA), dr D. McLEAN (National Physical Laboratory, W. Brytania) i prof. O. C. ZIENKIEWICZ (University of Wales, W. Brytania).

Sesja II — pod hasłem «Struktura wewnętrzna i mikromechanika — ogólne zjawiska». Przewodniczył prof. A. A. WELLS (Queen's University of Belfast, W. Brytania), a referentem generalnym był prof. Z. HASHIN (University of Pennsylvania, USA).

Sesja III — «Struktura wewnętrzna i mikromechanika — w układach materialnych». Przewodniczący — prof. F. J. MCGARRY (Massachusetts Institute of Technology, USA), referent generalny — prof. F. A. McCLINTOCK (również MIT, USA).

Sesja IV — «Reologia teoretyczna». Przewodniczył prof. M. L. WILLIAMS (University of Utah, USA) w zastępstwie nieobecnego na Konferencji prof. W. OLSZAKA. Referent generalny — prof. F. ROLL (University of Pennsylvania, USA).

Sesja V — «Charakterystyki odkształcenia i zjawiska pełzania w układach materialnych». Przewodniczący — dr A. KELLY (National Physical Laboratory, W. Brytania), referent generalny — dr D. McLEAN (jw).

Sesja VI — «Teoria wyciężenia i kryteria wytrzymałościowe». Przewodniczący — prof. J. C. JAEGER (Australian National University, Australia), referent generalny — prof. M. L. WILLIAMS (jw).

Sesja VII — poświęcona była ogólnej dyskusji, której przewodniczył prof. O. C. ZIENKIEWICZ (jw).

Sesja VIII — «Zastosowania do projektowania inżynierskiego» Przewodniczył prof. E. T. ONAT (Yale University, USA), referentem generalnym był prof. H. TOTTENHAM (University of Southampton, W. Brytania).

Konferencję zamknął prof. P. B. MORICE. We wnioskach końcowych postanowiono co kilka lat ponawiać konferencję na temat materiałów. Wszystkie referaty, dyskusje oraz sprawozdania z konferencji zostaną opublikowane przez firmę wydawniczą John Wiley & Sons Ltd pod redakcją M. TE'ENI z końcem 1969 r.

W salach Nuffield Theatre w Southampton, gdzie odbywały się obrady, była urządzona wystawa na temat badań laboratoryjnych, w szczególności — badań mikrostruktury oraz nowych zespolonych tworzyw. Pierwszego dnia obrad, wieczorem, kwartet uniwersytecki dał koncert kameralny, trzeciego dnia odbył się bankiet w Top Rank Suite — największej sali balowej w Southampton.

Na bankiecie, po pierwszym toaście wzniesionym przez dr A. R. COLLINSA, wygłosili rzeczowe, ale nacechowane angielskim poczuciem humoru, przemówienia Sir MICHEL CARY — stały sekretarz Ministerstwa Budownictwa i Robót Publicznych, prof. A. M. NEVILLE z Leeds, i prof. J. C. JAEGER z Australii.

INFORMACJA

Oddział Gliwicki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zorganizował dwuletni cykl wykładów poświęconych podstawom mechaniki ośrodka ciągłego odkształcalnego. Wykłady te prowadzone są systemem semestralnym począwszy od 18.03.1969 r., raz w tygodniu (wtorek) w godzinach 16¹⁵–18, w Wydziale Górniczym Politechniki Śląskiej, w sali 828.

Wykłady przewidziane są dla tych, którzy zamierzają poświęcić się pracy naukowej w dziedzinie teorii konstrukcji budowlanych, maszynowych itp.

Program wykładów obejmuje: podstawy algebry i analizy pojedynczych i podwójnych pól tensorowych, stan odkształcenia, kinematykę ośrodka odkształcalnego, stan naprężenia, podstawy termodynamiki procesów odwracalnych i nieodwracalnych, równania konstytutywne.

Akcja ta ma na celu programowanie współczesnego stanu wiedzy z mechaniki ośrodka odkształcalnego dla jak najogólniej sformułowanych problemów.

Wykłady prowadzone są przez dra hab. S. BORKOWSKIEGO, który kieruje również seminariami z matematyki stosowanej.

W wykładach bierze udział ok. 40 słuchaczy, w większości pracowników naukowo-dydaktycznych Politechniki Śląskiej. Wszyscy uczestnicy otrzymali szczegółowy program zajęć wraz z wykazem literatury pomocniczej, która stanowi uzupełnienie wykładów.

Przewodniczący Gliwickiego Oddziału PTMST

(—) Prof. dr inż. Kochmański

WYKAZ

REFERATÓW WYGŁOSZONYCH W POLSKIM TOWARZYSTWIE
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W CIĄGU ROKU 1968

I. ZEBRANIA NAUKOWE

Lp.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				ucze- stników	dysku- tantów
Oddział w Gdańsku					
1	18.04.68	Mgr inż. F. Grabarski	Pręt cienkościenny poddany dużemu skręcaniu z narzuconą osią obrotu	18	6
2	25.06.68	Dr B. Karakiewicz	Metoda charakterystyk w procesach falowych	40	6
3	26.11.68	Doc. dr K. Wysiatycki	Macierzowe ujęcie statyki budowli	29	12
4	23.10.68	Mgr inż. Cz. Branicki	O modelu dyskretnym i ciągłym przestrzennych siatek ciągnowych	17	8
Oddział w Gliwicach					
5	10.04.68	Prof. dr J. Szargut	Optymalizacja rekuperatorów do pieców grzejnych	26	4
6	22.05.68	Mgr inż. A. Witkowski	Quasi trójwymiarowa analiza pola prędkości i ciśnień w wieńcu sprężającym z merydionalnym przyśpieszeniem czynnika	6	3
7	10.10.68	Prof. dr T. Kochmański	Ruchy górotworu nad eksploatacją i wnioski dla obiektów i planowania przestrzennego	28	20
8	24.10.68	Dr T. Bes	Zdolność akumulowania energii w ciele stałym grzonym i chłodzonym okresowo	10	10
9	28.11.68	Dr T. Bes i Doc. dr St. Gdula	Oscylacje temperatury w wypełnieniu regeneratora	9	8

Lp.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
10	12.12.68	Mgr inż. J. Kubik	Propagacja fali w ośrodkach reologicznych — zagadnienie jednowymiarowe, niejednorodne	8	6
11	19.12.68	Prof. dr T. Kochmański (zebranie odbyło się w Częstochowie)	Problemy mechaniki górotworu w świetle pomiarów geodezyjnych	24	24
Oddział w Krakowie					
12	06.03.68	Dr St. Weiss	Stateczność cienkościennych prętów zespolonych	11	6
13	08.05.68	Prof. J. Lepik (Estońska SRR)	Pewne problemy teorii niesprężystych płyt i powłok	17	4
14	31.05.68	Prof. W. Noll (Pittsburgh USA)	Mechanics and thermodynamics based on neo-classical spacetime	10	3
15	04.07.68	Prof. W. Nash (USA)	Dynamics of a spherical shell loaded by a concentrated force	9	3
16	18.12.68	Prof. St. Chrzanowski	Kierunki polskich prac naukowych w dziedzinie termodynamiki		
17	„ „ „	Prof. M. Życzkowski	Sprawozdanie z XII Kongresu Mechaniki IUTAM (Stanford, USA)		
18	„ „ „	Prof. J. Murzewski	Uwagi o zastosowaniach probabilistyki w mechanice stosowanej ZSRR	19	14
Oddział w Łodzi					
19	24.10.68	Dr Z. Kazimierski	Doświadczenia numeryczne przy rozwiązywaniu zagadnień nieustalonych dwuwymiarowych przepływu gazu		
20	31.10.68	Dr M. Królak	Stateczność ściskanej ortotropowej powłoki stożkowej		

Lp.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Łodzi					
21	28.11.68	Prof. dr Z. Orzechowski	Pomiary parametrów rozpylonej strugi cieczy	26	8
22		Mgr M. Hincz	Metody wyznaczania prędkości krytycznych wyższych rzędów i odpowiadających im postaci ugięcia w zastosowaniu do wałów turbogeneratorów	15	5
Oddział w Poznaniu					
23	17.01.68	Mgr J. Gołaś	Zagadnienie statyczne trójwarstwowej płyty kołowej	18	6
24	14.01.68	Dr C. Cempel	Drgania płaskich układów prętowych o sztywnych węzłach z nieliniowymi warunkami brzegowymi	11	3
25	04.04.68	Dr S. Augustyniak	Współczesna teoria zasady Huygensa	12	3
26	25.04.68	Doc. dr G. Szefer	Kontaktowe problemy teorii sprężystości i ciał niesprężystych	18	3
27	09.05.68	Doc. dr H. Mikołajczak	Nieograniczona płyta trójwarstwowa spoczywająca na podłożu sprężystym obciążona siłą skupioną	17	2
28	28.11.68	Dr J. Stefaniak	O uogólnieniu funkcji Galerkina dla niesymetrycznej termosprężystości	13	9
29	06.12.68	Doc. dr Z. Osiński (Warszawa)	Zastosowanie metody asymptotycznej do rozwiązania równań nieliniowych	15	8
30	12.12.68	Prof. dr Wł. Bogusz (Kraków)	Modelowanie maszyn	14	6

Lp.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Szczecinie					
31	17.01.68	Dr J. Boczar	Zjawisko dyfuzji turbu- lentnej w ośrodku wodnym	15	6
32	06.03.68	Dr B. Kuźniewski	Wpływ tarcia na odkształ- cenie napędu posuwu wzdłużnego poziomej fre- zarki wspornikowej	11	4
33	31.05.68	Dr M. Wizmur	Pewne zagadnienia teore- tyczne i projektowe wiszą- cych powłok tekstylnych	34	7
34	16.10.68	Doc. dr J. Mierzejew- ski	Analiza reakcyjnego mo- mentu skręcającego w po- łączeniu ciernym śruby okrętowej z wałem przy ruchu nieustalonym	14	2
35	09.12.68	Doc. dr E. Bielewicz (Gdańsk)	Pewne problemy pełzania powłok	16	6
Oddział w Warszawie					
36	22.01.68	Prof. dr J. Dowkontt	O superpozycji sił w ruchu przyśpieszonym	32	8
37	05.02.68	Prof. dr A. Morecki	Niektóre zagadnienia ana- lizy i syntezy biomanipu- latorów	17	7
38	26.02.68	Doc. dr J. Rutkowski	Propozycje obiektywnej symboliki i kilku nowych pojęć teorii pola fizycznego	18	6
39	24.06.68	Prof. P. Wiśniewski (z British Columbia University)	Rola teorii, doświadczeń i praktyki w wytrzymałości materiałów i mechanice budowli	25	6
40	16.12.68	Doc. St. Kowalski	Przekładnie hydrostatyczne	33	5
Oddział we Wrocławiu					
41	11.03.68	Dr H. Borocho	Matematyczne podstawy dynamicznych obliczeń taśmowych, cz. II.	11	5

Lp.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Warszawie					
42	25.03.68	Dr B. Okołów	Programowanie obliczeń powłok walcowych	8	3
43	29.04.68	Doc. dr T. Kolendowicz	Metody interferencyjne w pomiarach odkształceń płyt	19	4
44	29.04.68	Doc. dr W. Kasprzak	Układ pomiarowoprzetwarzający do badań f-my „Prodera”	20	5
45	14.10.68	Dr W. Mironowicz	Zastosowanie teorii układów dyskretnych w zagadnieniu drgań własnych płaskich konstrukcji prętowych	8	2
46	16.12.68	Dr R. Pilujski	Problemy modelowania nawierzchni drogowych i lotniskowych	14	5
Razem				844	274

II. SYMPOZJA

1. Konwersatorium Oddziału Gliwickiego nt. Zagadnienia optymalizacji w mechanice

- 47/1. T. Bes: *Optymalizacja wskaźnika zużycia ciepła w instalacji do odsalania wód kopalnianych*
- 48/2. M. Bierowski: *Zastosowanie macierzy wielowymiarowych w zagadnieniach optymalizacji*
- 49/3. E. Brzuchowski: *Optymalny zespół cech konstrukcji na przykładzie regulatora poziomu cieczy*
- 50/4. A. Czajka: *Optymalizacja zawieszenia pojazdu i posadowienia kierowcy*
- 51/5. Z. Dyląg, Z. Orłoś, W. Poniż: *Optymalizacja ukształtowania profilu stali zbrojeniowej*
- 52/6. J. Goliński: *Pewien proces błędzenia zastosowany do poszukiwania ekstremów w zadaniach mechaniki technicznej*
- 53/7. R. Janiczek: *Ściskane osiowo pręty o minimalnej masie*
- 54/8. St. Jendo: *Optymalizacja kształtu powierzchniowych ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych według kryterium minimum ciężaru*
- 55/9. St. Kasprzyk, J. Myjak: *Optymalny dobór charakterystyk sprężystych i tłumienia zapewniający drganie bezoscyłacyjne pewnego układu mechanicznego*
- 56/10. T. Kasprzyk: *Pewne zagadnienia optymalizacji zawiesznień samochodów*
- 57/11. J. Kolenda: *O optymalizacji parametrycznej wibromotów*
- 58/12. J. Krzyżanowski, R. Kozubowski, E. Gałka, T. Jankowski: *O pewnych problemach związanych z optymalizacją stopni mocy granicznej ciepłych turbin osiowych*
- 59/13. M. Kulig: *Optymalizacja wytwornicy pary silowni jądrowej z reaktorem wodnym ciśnieniowym*

- 60/14. A. Lesikiewicz: *Optymalizacja rozdziału ciągu w konstrukcjach dwuprzepływowych silników odrzutowych*
- 61/15. W. Markus: *O kształtowaniu konstrukcji pod działaniem wielu stanów obciążenia*
- 62/16. Lia Georgiewna Muchadze: *Wyznaczenie kształtu wstępnie naprężonych ustrojów ciągnowych*
- 63/17. St. Owczarek: *Wybór optymalnego kształtu słupa mimośrodowo ściskanego monolitycznie połączonego z belką na podstawie elastooptycznych badań modelowych*
- 64/18. R. Puzyrewski: *Sformułowanie problemu optymalnej ekspansji czynnika dwufazowego ze względu na straty rozpadania kropel*
- 65/19. Wł. Sikora: *Przybliżone określenie optymalnej średniej temperatury doprowadzenia ciepła w obiegu roboczym elektrowni jądrowych z reaktorami wodnymi ciśnieniowymi*
- 66/20. Z. Smalko: *Niektóre aspekty optymalnego wyznaczania cykli napraw obiektów mechanicznych*
- 67/21. B. Staniszewski: *Niektóre problemy optymalizacji parametrów silników cieplnych*
- 68/22. B. Staniszewski: *Zagadnienie optymalnego sterowania zespołem silników cieplnych*
- 69/23. J. Szargut: *Optymalny rozdział kosztów inwestycyjnych związanych z wykorzystaniem ciepła odpadowego*
- 70/24. R. Szymanik: *O możliwości wykorzystania metody egzergetycznej do optymalnego wyboru typu lotniczego zespołu napędowego*
- 71/25. K. Taramina: *Metody optymalizacji procesu spalania w kotłach parowych opalanych węglem kamiennym i brunatnym*
- 72/26. A. Wieczyński, B. Seredyński: *Wykorzystanie wielomianowych modeli eksperymentalnych do optymalizacji procesów*

2. IV Sympozjum Oddziału Poznańskiego nt. Teorii drgań (liniowych i nieliniowych)

- 73/27. Z. Engel: *Linearyzacja różniczkowego równania ruchu układu drgającego wymuszonego dwiema siłami*
- 74/28. J. Giergiel: *Wpływ efektu Poissona na straty energii w nieruchomych połączeniach*
- 75/29. A. Muszyńska: *O ograniczoności rozwiązań pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych*
- 76/30. N. Nadolski: *Modelowanie przekładni zębatych jednostopniowych*
- 77/31. J. Osiecki: *Zagadnienie budowy dyskretnego modelu drgań obiektu rzeczywistego oraz słabych sprzężeń drgań w praktycznej analizie dynamiki maszyn*
- 78/32. Z. Osiński: *Wpływ tarcia konstrukcyjnego na drgania wymuszone*
- 79/33. St. Ziemba, A. Różycki: *Układ o dwóch stopniach swobody ze szczególnym przypadkiem liniowego tłumienia jako dynamiczny izolator drgań*
- 80/34. St. Ziemba, B. Radziszewski: *O pewnych szczególnych przypadkach uogólnionych potencjałów Lagrange'a*
- 81/35. J. Adamczyk: *Wpływ zmiennej masy na stateczność pewnego układu mechanicznego*
- 82/36. C. Broniarek, Z. Tym: *Stateczność ruchu wirnika o niejednakowych głównych momentach bezwładności podpartego sprzężycie*
- 83/37. Cz. Campel: *Drgania układów prętowych z nieliniowymi warunkami brzegowymi*
- 84/38. A. Czubak: *Podstawy projektowania elektromagnetycznych polajników wibracyjnych*
- 85/39. J. Giergiel, A. Klich: *Dynamiczne problemy kopalnianych układów napędowych urządzeń zabezpieczających*
- 86/40. J. Osiecki: *Równania drgań i analiza obciążeń dynamicznych układu napędowego ze sprzęgłami typu Alsthom*
- 87/41. Z. Osiński, W. Szafranski: *Wpływ nieliniowej charakterystyki sprzęgła na przenoszenie impulsów w układzie napędowym*
- 88/42. J. Piotrowski: *Drgania skrętne układów mechanicznych ze sprzężystymi sprzęgłami Cardana*
- 89/43. T. Rożnowski: *Niestacjonarne pola temperatury w długim walcu wywołanym nieliniowymi warunkami brzegowymi*
- 90/44. T. Szucki: *Drgania masy osadzonej na wirującym wale łożyskowym w łożyskach kulkowych*
- 91/45. W. Bogusz: *Stateczność techniczna układów stochastycznych*

- 92/46. J. Nizioł: *Wymuszone przyładowo drgania membran*
 93/47. T. Puchatka, K. Runiatowski: *Badania pewnej klasy układów dynamicznych o wymuszeniu stochastycznym*
 94/48. M. Zabawa: *O doborze parametrów pewnych układów mechanicznych przy wymuszeniu przyładowym*
 95/49. Cz. Campel: *Pewien przypadek syntezy układów łańcuchowych*
 96/50. R. Gutowski, B. Radziszewski: *O siłach realizujących z góry dany ruch układu z punktów materialnych*
 97/51. J. M. Skowroński: *Odwrócona metoda delta w zastosowaniu do syntezy dyskretnych układów nieliniowych*
 98/52. W. Lenkiewicz: *Niektóre postacie drgań samowzbudnych powstających w procesach tarcia ślizgania technicznie suchego*
 99/53. T. Kołacin: *Stanowisko do badania drgań samowzbudnych tulejek porowatych spiekanych z proszków*
 100/54. K. Marchelek: *Analiza dynamiczna napędu głównego obrabiarki*

3. Oddział Warszawski wspólnie z Zarządem Głównym – Sesja naukowa z okazji dziesięciolecia PTMTS

- 101/55. J. Mutermilch: *Dziesięciolecie Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*
 102/56. W. Nowacki: *Kierunki rozwojowe i zadania badawcze w dziedzinie mechaniki ciała stałego*
 103/57. W. Bogusz, E. Karaśkiewicz, S. Wiśniewski: *Rozwój mechaniki układów dyskretnych w ostatnim dziesięcioleciu w Polsce*
 104/58. J. Kisiel: *Rozwój reologii w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*
 105/59. S. Ochęduszek: *Termodynamika techniczna w Polsce w okresie ostatniego dziesięciolecia* (referat wydrukowany w materiałach, ale nie wygłoszony podczas zjazdu ze względu na nieobecność referenta)
 106/60. G. Szefer: *Rozwój teorii sprężystości w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*
 107/61. M. Życzkowski: *Rozwój teorii plastyczności i wyężenia w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*
 U w a g a: Wszystkie referaty przygotowane na sesję naukową wydrukowane były w jubileuszowym zeszycie MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ Tom 6, zeszyt 3/68.

III. KONKURSY NAUKOWE

1. **Oddział w Warszawie.** Konkurs na najlepszą teoretyczną pracę naukową z zakresu konstrukcji maszynowych i budowlanych:
- 108/1. H. Frąckiewicz, A. Legat, J. Lewiński: *Geometryczna zmienność wielosegmentowych, niegładkich konstrukcji powierzchniowych*
 109/2. Z. Waszczyszyn: *Ścisłe równania i obliczanie skończonych sprężysto-plastycznych ugięć ortotropowych powłok obrotowo-symetrycznych*
 110/3. E. Włodarczyk: *Rozprzestrzenianie się i odbicie kulistej fali obciążenia od gładkiej nieodkształcalnie płaskiej przegrody w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym*
2. **Oddział we Wrocławiu.** Konkurs na prace doświadczałne z dziedziny mechaniki:
- 111/4. A. Jakowluk: *Badanie wpływu różnych parametrów na proces wibropelzania w metalach*
 112/5. R. S. Doroszkiewicz: *Metoda badania naprężeń w budowlach poddanych ciężarowi własnemu*
 113/6. E. Maciąg: *Drgania własne rusztów cylindrycznych w oparciu o wyniki badań modelowych*
 114/7. St. Wójcik: *Modelowe wyznaczanie obciążeń oraz przemieszczeń ustrojów prętowych w stanie nośności granicznej*
 U w a g a: Wymienione zostały tylko prace nagrodzone.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- S. ZANORSKI, Ciecze nienewtonowskie w świetle mechaniki kontinuum
Ненютоновские жидкости в свете механики сплошных сред
Non-Newtonian liquids in the light of continuum mechanics
- A. LISOWSKI, Sposób elektrycznego modelowania równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych o współczynnikach stałych i członach rzędu parzystego
Метод электрического моделирования обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частным производным с постоянными коэффициентами и членами четного порядка
Electric network models of ordinary and partial differential equations with constant coefficients and even order terms
- A. LISOWSKI, Przykłady modelowania elektrycznego warunków brzegowych i początkowych równań różniczkowych występujących w zagadnieniach mechaniki
Примеры электрического моделирования краевых и начальных условий дифференциальных уравнений для вопросов механики
Examples of electrical network models simulating the initial and boundary value problems of applied mechanics
- E. MACIĄG, Doświadczalna analiza drgań własnych rusztów cylindrycznych
Экспериментальный анализ собственных колебаний цилиндрических решеток
Experimental analysis of free vibrations of cylindrical grids
- T. GIBCYŃSKA, M. ŻYCZKOWSKI, Równania statyki dwurzędowego kulkowego łożyska wieńcowego
Уравнения статики для двухрядного шарикового подшипника
Equations of statics of double-row radial-thrust ball bearing
- A. JAKOWLUK, Wpływ poziomu naprężenia i współczynnika amplitudy naprężenia na proces wibropełzania
Влияние уровня напряжения и коэффициента амплитуды напряжения на процесс ползучести
The effect of stress level and the stress amplitude coefficient on the process of vibrationa creep
- A. JAKOWLUK, Wpływ częstotliwości wibracji na proces wibropełzania
Влияние частоты вибрации на процесс виброползучести
The effect of vibration frequency on the vibrational creep process

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)