

J. II. 420  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 7 · ZESZYT 1



531

Pw<sup>a</sup>

WARSZAWA 1969  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

<p>J. ZIÓŁKOWSKI, Stan naprężeń i odkształceń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych          Напряженное и деформированное состояния в роторе с малым числом боковых радиальных лопаток          State of stress and strain in a rotor with a small number of radial side blades</p>	3
<p>Z. SOBZYŃSKA, Działanie ruchomego, punktowego źródła ciepła w przestrzeni nieograniczonej          Воздействие подвижного точечного теплового источника на неограниченное пространство          Action of a moving concentrated heat source in elastic space</p>	21
<p>S. MAZURKIEWICZ, Dynamiczne badania własności mechanicznych poliamidu Tarlon X-A          Динамические исследования механических свойств полиамида Тарлон X-A          Dynamic investigation of mechanical properties of polyamide Tarlon X-A</p>	25
<p>H. KORECKI, Stan sprężysto-plastyczny i pełzanie geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej          Упруго-пластическое состояние и ползучесть геометрически нелинейной конической оболочки          Elasto-plastic state and creep of a geometrically non-linear conoidal shell</p>	39
<p>J. MARYNIAK, Uproszczona analiza stateczności bocznej szybowca holowanego na linie          Упрощенный анализ боковой устойчивости планера буксируемого на канате          Simplified analysis of lateral stability of towed glider</p>	55
<p>J. SAMBORSKI, Drgania grubościennej rury przy wewnętrznym i zewnętrznym przepływie cieczy          Колебания толстостенной трубы обтекаемой внутри и снаружи жидкостью          Vibrations of a thick-walled tube in internal and external flows of fluids</p>	73
<p>J. MIASTKOWSKI, Nośność graniczna rozciąganych prętów z karami kątowymi o dowolnych wymiarach części nad karami          Несущая способность растягиваемых стержней с угловыми надрезами и произвольной шириной вне надрезов          Plastic yielding of tensile v-notched elements with arbitrary intermediate shoulder ratio</p>	81
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	99

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 7 • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 6 9

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN — PRZEWODNICZĄCY  
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM  
MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH  
(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZA-  
WA) · STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE)  
WAĆLAW OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN  
PIĄTEK (GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

## K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR  
CZESŁAW EIMER · BARBARA SKARŻYŃSKA  
MAREK SOKOŁOWSKI · WOJCIECH SZCZEPIŃSKI

## REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 700 (579+121) egz. Arkuszy wydawn. 8,0. Arkuszy drukarskich 6;5. Papier druk. sat. III kl., 80 g, 70×100. Oddano do składu 16.X.1968 r., druk ukończono w lutym 1969 r. Zam. 1814/68. N-25. Cena zł 30.—

Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

STAN NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W KOLE WIRNIKOWYM Z MAŁĄ  
LICZBĄ BOCZNYCH ŁOPATEK PROMIENIOWYCH<sup>1)</sup>

JANUSZ ZIÓŁKOWSKI (ŁÓDŹ)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

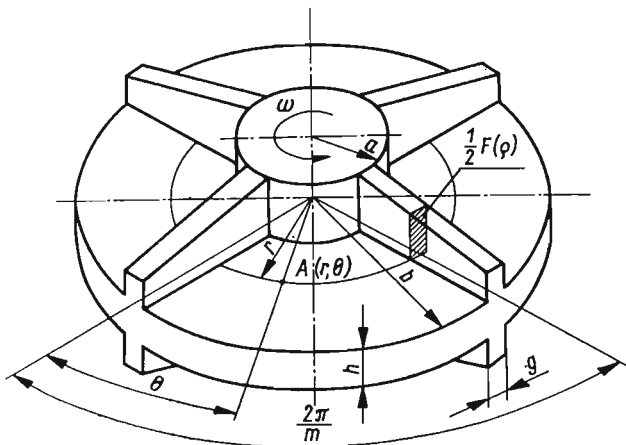
- a* promień piasty koła wirnikowego,
- A* macierz współczynników  $a_{ik}$ ,
- b* promień zewnętrzny koła wirnikowego; macierz wolnych wyrazów  $b_l$ ,
- B* macierz współczynników  $B_{in}^{(k)}$ ,
- c* stała,
- e* liczba naturalna,
- E* moduł Younga,
- F* pole przekroju poprzecznego łopatki,
- g* grubość łopatki; przyspieszenie siły ciężkości,
- h* grubość tarczy kołowej,
- H* stała,
- i, k, l* liczby naturalne,
- m* liczba łopatek,  $m = 2, 3, \dots$ ,
- n* liczba naturalna,  $n = 1, 2, \dots$ ,
- p* siła wzajemnego oddziaływania łopatki i tarczy,
- P* funkcja,
- r* współrzędna biegunowa promienia; kierunek promieniowy.
- R* funkcja,
- u* przemieszczenia promieniowe,
- v* przemieszczenia obwodowe,
- x* dotyczy rozwiązania szczególnego,
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  współczynniki,
- $\gamma$  ciężar właściwy,
- $\delta$  funkcja impulsu jednostkowego,
- $\epsilon, \eta$  współczynniki,
- $\Theta$  współrzędna biegunowa kąta, kierunek obwodowy,
- $\kappa$  współczynnik,
- $\nu$  współczynnik Poissona,
- $\rho$  bezwymiarowa współrzędna biegunowa promienia  $\rho = r/b$ ,
- $\sigma$  naprężenia normalne,
- $\tau$  naprężenia styczne,
- $\omega$  prędkość kątowa.

<sup>1)</sup> Niniejsza publikacja jest fragmentem wybranej pracy doktorskiej pod kierunkiem prof. dra inż. Jerzego Leyko

## 1. Równania podstawowe

W pracy rozwiązano zagadnienie rozkładu przemieszczeń i naprężeń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych, usytuowanych symetrycznie względem tarczy. Opracowaną metodę zilustrowano przykładem liczbowym.

Rozpatruje się tarczę kołową, wirującą, o stałej grubości z łopatkami promieniowymi umieszczonymi symetrycznie po obu stronach płaszczyzny środkowej tarczy (rys. 1). Wprowadzono oznaczenia:  $m$  — liczba łopatek,  $\varrho$  — bezwymiarowa współrzędna biegunowa promienia,  $\varrho = r/b$ .



Rys. 1

W celu rozwiązania zagadnienia dla małej liczby łopatek wyklucza się możliwość stosowania metod opartych na teorii cienkich płyt kołowych o ortotropii konstrukcyjnej. W niniejszej pracy przyjęto przeto oddziaływanie łopatki na tarczę nośną w postaci nieświadomej siły promieniowej, powierzchniowej, osiowo-niesymetrycznej  $p(\varrho, \Theta)$ .

Tak sformułowane zagadnienie sprowadzono do modelu tarczy kołowej wirującej, podlegającej płaskiemu stanowi naprężeń osiowo-niesymetrycznych, obciążonej siłami odśrodkowymi wirujących mas oraz siłami oddziaływania łopatek  $p(\varrho, \Theta)$ .

Równania równowagi wewnętrznej dla tarczy (rys. 2) mają następującą postać

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial \varrho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \Theta} = -\frac{b}{h} p(\varrho, \Theta) - \frac{\gamma}{g} b^2 \omega^2 \varrho,$$

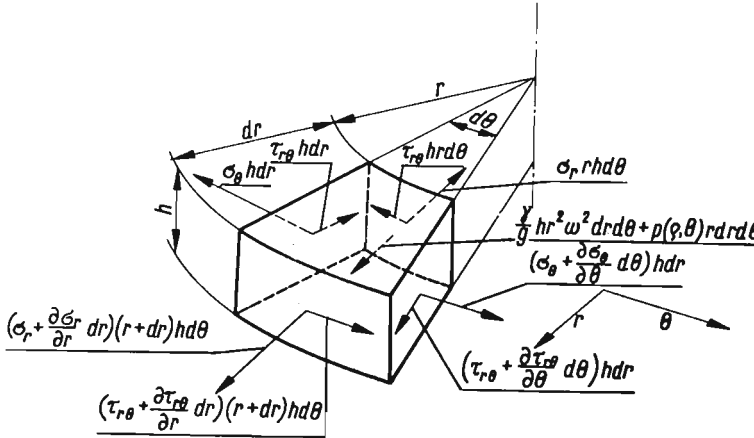
$$(1.2) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \varrho} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{\varrho} = 0.$$

Wprowadzając do równań równowagi zależności wynikające z uogólnionych praw Hooke'a, wyrażające naprężenia za pomocą odkształceń względnych oraz zależności geometryczne wiążące odkształcenia z przemieszczeniami, otrzymano dla postawionego zagadnienia układ dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych, wyrażonych w przemieszczeniach

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} =$$

$$= -\frac{(1-\nu^2)b^2}{Eh} p(\varrho, \Theta) - \frac{(1-\nu^2)\gamma\omega^2 b^3}{gE} \varrho,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = 0.$$



Rys. 2

## 2. Równania różniczkowe dla danego zagadnienia (rozkład w postaci impulsu jednostkowego) i ich rozwiązanie

Przyjmuje się, że łopatkę oddziałują na tarczę liniową siłą promieniową  $p(\varrho)$ . Ponieważ siła  $p(\varrho, \Theta)$  występująca w układzie równań (1.3) jest siłą powierzchniową przeto siłę liniową  $p(\varrho)$  rozłożono na obwodzie w postaci impulsu jednostkowego o okresie  $2\pi/m$  (rys. 3).

Dla biegunowego układu współrzędnych funkcja impulsu jednostkowego o okresie  $2\pi/m$  wyraża się w postaci następującego szeregu trygonometrycznego

$$(2.1) \quad \delta(\varrho, \Theta) = \frac{m}{\pi b} \frac{1}{\varrho} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta) \right].$$

Siłę liniową  $p(\varrho)$  można rozłożyć na powierzchni tarczy stosując przekształcenie

$$(2.2) \quad p(\varrho, \Theta) = \delta(\varrho, \Theta) p(\varrho).$$

Po podstawieniu (2.1) do (2.2) promieniowa siła powierzchniowa jest równa

$$(2.3) \quad p(\varrho, \Theta) = \frac{m}{\pi b} \frac{p(\varrho)}{\varrho} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta) \right].$$

Wprowadzając siłę (2.3) do układu równań (1.3) otrzymano

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} =$$

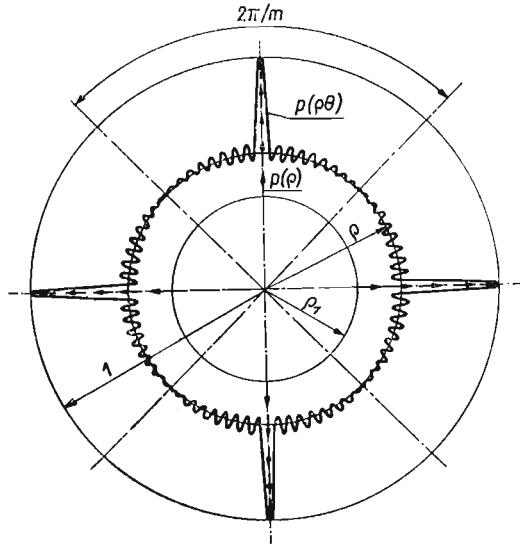
$$= \alpha_1 \frac{p(\varrho)}{\varrho} + \alpha_2 \frac{p(\varrho)}{\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta) + \alpha_3 \varrho,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = 0,$$

gdzie

$$(2.5) \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2} = - \frac{(1-\nu^2)b}{Eh} \frac{m}{2\pi},$$

$$(2.6) \quad \alpha_3 = - \frac{(1-\nu^2)\gamma\omega^2 b^3}{gE}.$$



Rys. 3

Przy założeniu, że siłę liniową oddziaływania łopatki można wyrazić wielomianem potęgowym

$$(2.7) \quad p(\varrho) = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_1,$$

podstawowy układ równań różniczkowych dla rozpatrywanego zagadnienia ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \Theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \Theta} =$$



$$(2.8) \quad = \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1} + \alpha_3 \varrho + 2 \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nm\Theta),$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \Theta} = 0.$$

Rozwiązanie ogólnie układu równań (2.8) przewiduje się w postaci

$$(2.9) \quad u(\varrho, \Theta) = u_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varrho) \cos(nm\Theta),$$

$$v(\varrho, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\varrho) \sin(nm\Theta).$$

$u_0(\varrho)$  określa tutaj rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego dla tarczy wirującej z uśrednionymi na obwodzie siłami oddziaływania łopatek. Szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\varrho) \cos(nm\Theta)$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\varrho) \sin(nm\Theta)$  przedstawiają rozwiązanie zagadnienia osiowo-niesymetrycznego, uwzględniające wpływ miejscowego oddziaływania łopatek. Podstawiając przewidywane rozwiązanie ogólne wyrażone równaniami (2.9) do układu równań różniczkowych (2.8) otrzymano:

a) dla zagadnienia osiowo-symetrycznego, równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.10) \quad \frac{d^2 u_0}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_0}{d\varrho} - \frac{u_0}{\varrho^2} = \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1} + \alpha_3 \varrho,$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(2.11) \quad u_0(\varrho) = \frac{C_1}{\varrho} + C_2 \varrho + \frac{\alpha_3}{8} \varrho^3 + \frac{\varepsilon_0}{2} \varrho \ln \varrho + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\varepsilon_k}{k^2 + 2k} \varrho^{k+1},$$

gdzie  $C_1, C_2$  — stałe znajdujące z warunków brzegowych zagadnienia;

b) dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego — układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$(2.12) \quad \frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} - \left[ 1 + \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2 \right] \frac{u_n}{\varrho^2} + \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{v_n}{\varrho^2} = 2 \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^{k-1}$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{v_n}{\varrho^2} \right] - n^2 m^2 \frac{v_n}{\varrho^2} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{u_n}{\varrho^2} - \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie układu (2.12) składa się z rozwiązania ogólnego układu równań jednorodnych oraz rozwiązania szczególnego układu pełnego. Dla układu równań jednorodnych

$$(2.13) \quad \frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} - \left[ 1 + \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2 \right] \frac{u_n}{\varrho^2} + \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{v_n}{\varrho^2} = 0,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dv_n}{d\varrho} - \frac{v_n}{\varrho^2} \right] - n^2 m^2 \frac{v_n}{\varrho^2} - \frac{3-\nu}{2} nm \frac{u_n}{\varrho^2} - \frac{1+\nu}{2} nm \frac{1}{\varrho} \frac{du_n}{d\varrho} = 0,$$

rozwiązanie przewiduje się w postaci

$$(2.14) \quad \bar{u}_n(\varrho) = A_t \varrho^t, \quad \bar{v}_n(\varrho) = \bar{A}_t \varrho^t$$

Podstawiając przewidywane rozwiązania (2.14) do układu (2.13) otrzymamy

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_t \left( t^2 - 1 - \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2 \right) + \bar{A}_t \left( \frac{1+\nu}{2} nmt - \frac{3-\nu}{2} nm \right) &= 0, \\ A_t \left( -\frac{3-\nu}{2} nm - \frac{1+\nu}{2} nmt \right) + \bar{A}_t \left[ \frac{1-\nu}{2} (t^2 - 1) - n^2 m^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia  $A_t^2 + \bar{A}_t^2 \neq 0$ , wobec tego przyrównujemy do zera wyznacznik charakterystyczny układu (2.15), a mianowicie

$$(2.16) \quad \begin{vmatrix} t^2 - 1 - \frac{1-\nu}{2} n^2 m^2; & \frac{1+\nu}{2} nmt - \frac{3-\nu}{2} nm \\ -\frac{3-\nu}{2} nm - \frac{1+\nu}{2} nmt; & \frac{1-\nu}{2} (t^2 - 1) - n^2 m^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczając wyznacznik (2.16) otrzymano równanie czwartego stopnia, którego pierwiastki są równe

$$(2.17) \quad t_{1n} = -t_{2n} = 1 - nm; \quad t_{3n} = -t_{4n} = 1 + nm,$$

albo w skróconej postaci

$$(2.18) \quad t_{ln} = (-1)^{l-1} - (l^2 - 5l + 5)nm, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Określono współczynnik

$$(2.19.1) \quad \alpha_{ln} = \frac{\bar{A}_t}{A_t} = \frac{nm[(1+\nu)t_{ln} + 3-\nu]}{(1-\nu)(t_{ln}^2 - 1) - 2n^2 m^2}$$

przyjmując wartości pierwiastków określone zależnością (2.18)

$$(2.19.2) \quad \alpha_{ln} = -\frac{3-\nu + (1+\nu)[(-1)^{l-1} - (l^2 - 5l + 5)nm]}{2(1-\nu)(-1)^{l-1}(l^2 - 5l + 5) + (1+\nu)nm}.$$

Otrzymane rozwiązania szczególne  $\varrho^{t_{ln}}$ , jak łatwo sprawdzić, są liniowo niezależne. Rozwiązanie ogólne układu równań jednorodnych (2.13) można więc przedstawić za pomocą liniowej kombinacji rozwiązań szczególnych

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \bar{u}_n(\varrho) &= \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho^{t_{ln}}, \\ \bar{v}_n(\varrho) &= \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho^{t_{ln}}, \end{aligned}$$

gdzie  $B_{ln}$  — stałe znajdujące z warunków brzegowych zagadnienia. Rozwiązania szczególne układu równań różniczkowych (2.12) znaleziono w następującej postaci.

Dla  $k+1 \neq \pm 1 + nm$

$$(2.21) \quad u_{kn}^x(\varrho) = D_{kn} \varrho^{k+1}, \quad v_{kn}^x(\varrho) = \bar{D}_{kn} \varrho^{k+1},$$

gdzie

$$(2.22) \quad D_{kn} = \frac{2[(1-\nu)k^2 + 2(1-\nu)k - 2n^2m^2]}{(1-\nu)(n^2m^2 - k^2)[n^2m^2 - (k+2)^2]} \varepsilon_k,$$

$$\bar{D}_{kn} = \frac{2[(1+\nu)k + 4]nm}{(1-\nu)(n^2m^2 - k^2)[n^2m^2 - (k+2)^2]} \varepsilon_k.$$

Dla  $k+1 = -1+nm$

$$(2.23) \quad u_{kn}^{\ddot{x}} = (H \ln \varrho + J) \varrho^{-1+nm},$$

$$v_{kn}^{\ddot{x}} = (\alpha_{2n} H \ln \varrho + J) \varrho^{-1+nm},$$

gdzie

$$(2.24) \quad H = \frac{2(1-\nu) + (1+\nu)nm}{4(1-\nu)(nm-1)} \varepsilon_k,$$

$$J = \frac{2(1-\nu) - (3-\nu)nm}{8(1-\nu)(nm-1)nm} \varepsilon_k.$$

Dla  $k+1 = 1+nm$

$$(2.25) \quad u_{kn}^{\ddot{x}} = (H_1 \ln \varrho + J_1) \varrho^{1+nm},$$

$$v_{kn}^{\ddot{x}} = (\alpha_{3n} H_1 \ln \varrho + J_1) \varrho^{1+nm},$$

gdzie

$$(2.26) \quad H_1 = \frac{2}{2 + (1-\nu)\alpha_{3n} + \frac{3-\nu}{2}(1+\alpha_{3n})nm} \varepsilon_k,$$

$$J_1 = \frac{2 \left\{ (1-\nu)\alpha_{3n} + \left[ -\frac{1+\nu}{2} + (1-\nu)\alpha_{3n} \right] nm \right\}}{(1+\nu)nm(nm+1) \left[ 2 + (1-\nu)\alpha_{3n} + \frac{3-\nu}{2}(1+\alpha_{3n})nm \right]} \varepsilon_k.$$

Otrzymano ostatecznie rozwiązanie ogólne układu równań (2.8), które jest rozwiązaniem w przemieszczeniach rozpatrywanego zagadnienia

$$(2.27) \quad u(\varrho, \Theta) = u_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} u_{kn}^{\ddot{x}}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta),$$

$$v(\varrho, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} v_{kn}^{\ddot{x}}(\varrho) \right] \sin(nm\Theta).$$

### 3. Naprężenia w tarczy i łopatkach, warunki brzegowe zagadnienia

**3.1. Naprężenia w tarczy.** Dla płaskiego stanu naprężeń w tarczy kołowej naprężenia promieniowe, obwodowe i styczne określone są zależnościami

$$(3.1.2) \quad \sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \nu \left( \frac{u}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} \right) \right],$$

$$(3.1.3) \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ \frac{u}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \Theta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \rho} \right],$$

$$(3.1.4) \quad \tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)b} \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right].$$

Podstawiając do (3.1) rozwiązanie w przemieszczeniach (2.27) oraz uwzględniając rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego (2.11) otrzymano następujące wyrażenia dla naprężeń promieniowych, obwodowych i stycznych w tarczy:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r(\rho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (-1+\nu) \frac{C_1}{\rho^2} + (1+\nu) C_2 + \frac{3+\nu}{8} \alpha_3 \rho^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} [1+(1+\nu) \ln \rho] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{N_1} \frac{k+1+\nu}{k^2+2k} \varepsilon_k \rho^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 [t_{ln} + \nu(1+nm\alpha_{ln})] B_{ln} \rho^{t_{ln}-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{N_1} \left[ \frac{du_{kn}^x}{d\rho} + \nu \left( \frac{u_{kn}^x}{\rho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\rho} \right) \right] \right] \cos(nm\Theta) \left. \right\}; \\ \sigma_{\theta}(\rho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (1-\nu) \frac{C_1}{\rho^2} + (1+\nu) C_2 + \frac{1+3\nu}{8} \alpha_3 \rho^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} [\nu+(1+\nu) \ln \rho] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\nu(k+1)+1}{k^2+2k} \varepsilon_k \rho^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 (1+nm\alpha_{ln} + \nu t_{ln}) B_{ln} \rho^{t_{ln}-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{u_{kn}^x}{\rho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\rho} + \nu \frac{du_{kn}^x}{d\rho} \right) \right] \cos(nm\Theta) \left. \right\}; \\ \tau_{r\theta}(\rho, \Theta) &= \frac{E}{2(1+\nu)b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{l=1}^4 [\alpha_{ln}'(t_{ln}-1) - nm] B_{ln} \rho^{t_{ln}-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{dv_{kn}^x}{d\rho} - \frac{v_{kn}^x}{\rho} - nm \frac{u_{kn}^x}{\rho} \right) \right] \sin(nm\Theta). \end{aligned}$$

Stałe  $C_1$ ,  $C_2$  występujące w rozwiązaniu zagadnienia osiowo-symetrycznego oraz stałe  $B_{1n}$ ,  $B_{2n}$ ,  $B_{3n}$ ,  $B_{4n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego można wyznaczyć z warunków brzegowych. Biorąc pod uwagę konstrukcję rozpatrywanego koła wirnikowego sprężarkowego (rys. 1) przyjęto w przybliżeniu sztywne zamocowanie tarczy nośnej na brzegu wewnętrznym ( $\rho = \rho_1$ ), oraz znikanie naprężeń promieniowych i stycznych w tarczy na brzegu zewnętrznym ( $\rho = 1$ ). Otrzymano stąd następujące cztery warunki brzegowe

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [u(\rho, \Theta)]_{\rho=\rho_1} &= 0, \\ [v(\rho, \Theta)]_{\rho=\rho_1} &= 0, \\ [\sigma_r(\rho, \Theta)]_{\rho=1} &= 0, \\ [\tau_{r\theta}(\rho, \Theta)]_{\rho=1} &= 0. \end{aligned}$$

Podstawiając do równań (3.3) odpowiednie rozwiązania dla przemieszczeń i naprężeń otrzymano:

a) Dla zagadnienia osiowo-symetrycznego stałe  $C_1, C_2$

$$(3.4.1) \quad C_1 = \frac{(3+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8} + \frac{\varrho_1^2 R(1) - (1+\nu)\varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

$$(3.4.2) \quad C_2 = -\frac{3+\nu+(1-\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8} - \frac{R(1) + (1-\nu)\varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

gdzie  $P(\varrho)$  i  $R(\varrho)$  określają następujące funkcje

$$(3.5.1) \quad P(\varrho) = \frac{\varepsilon_0}{2} \varrho \ln \varrho + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\varepsilon_k}{k^2+2k} \varrho^{k-1},$$

$$(3.5.2) \quad R(\varrho) = \frac{\varepsilon_0}{2} [1 + (1+\nu) \ln \varrho] + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{k+1+\nu}{k^2+2k} \varrho^k \varepsilon_k.$$

b) Dla zagadnienia osiowo-niesymetrycznego następujący układ równań

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{l=1}^4 B_{ln} \varrho_1^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} u_{kn}^x(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln} \varrho_1^{l'n} + \sum_{k=0}^{N_1} v_{kn}^x(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 [t_{ln} + \nu(1+nm\alpha_{ln})] B_{ln} + \sum_{k=0}^{N_1} \left[ \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} + \nu \left( \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\varrho} \right) \right]_{\varrho=1} = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 [\alpha_{ln}(t_{ln}-1) - nm] B_{ln} + \sum_{k=0}^{N_1} \left( \frac{dv_{kn}^x}{d\varrho} - \frac{v_{kn}^x}{\varrho} - nm \frac{u_{kn}^x}{\varrho} \right)_{\varrho=1} = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ współczynniki  $\varepsilon_k$ , określające siłę oddziaływania łopatki, są nieznanne należało układ (3.6) zastąpić układem równań, który odpowiadałby poszczególnym formom obciążenia  $k = 0, 1, \dots, N_1$ , a mianowicie

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(k)} \varrho_1^{l'n} + L_{kn}^{(1)}(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \alpha_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho_1^{l'n} + L_{kn}^{(2)}(\varrho_1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \beta_{ln} B_{ln}^{(k)} + L_{kn}^{(3)}(1) = 0, \\ & \sum_{l=1}^4 \gamma_{ln} B_{ln}^{(k)} + L_{kn}^{(4)}(1) = 0. \end{aligned}$$

W powyższym układzie równań wprowadzono oznaczenia

$$(3.8.1) \quad \beta_{ln} = t_{ln} + \nu(1 + nm\alpha_{ln}),$$

$$(3.8.2) \quad \gamma_{ln} = \alpha_{ln}(t_{ln} - 1) - nm,$$

$$L_{kn}^{(1)}(\varrho) = \frac{u_{kn}^x(\varrho)}{\varepsilon_k},$$

$$L_{kn}^{(2)}(\varrho) = \frac{v_{kn}^x(\varrho)}{\varepsilon_k},$$

(3.9)

$$L_{kn}^{(3)}(\varrho) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left[ \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} + \nu \left( \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\varrho} \right) \right],$$

$$L_{kn}^{(4)}(\varrho) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left[ \frac{dv_{kn}^x}{d\varrho} - \frac{v_{kn}^x}{\varrho} - nm \frac{u_{kn}^x}{\varrho} \right].$$

Stałe  $B_{ln}$  wyznaczone z układu równań (3.6) oraz stałe  $B_{ln}^{(k)}$  wyznaczone z układu (3.7) powiązane są zależnością

$$(3.10) \quad B_{ln} = \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k B_{ln}^{(k)}.$$

Przyjmując w obliczeniach skończoną liczbę wyrazów szeregu  $n = 1, \dots, N_2$ , z układu równań (3.7) wyznaczono macierz współczynników  $[B_{ln}^{(k)}]$  składającą się z  $4(1 + N_1)N_2$  elementów.

Otrzymane rozwiązanie dla naprężeń w kole wirnikowym określone zależnościami (3.2) zawiera rozwiązania dla samej tarczy wirującej oraz dla tarczy w spoczynku obciążonej oddziaływaniem łopatek. Naprężenia promieniowe i obwodowe w wirującej tarczy bez łopatek mają postać

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ (-1+\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + \frac{3+\nu}{8} \alpha_3 \varrho^2 \right], \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left[ (1-\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + \frac{1+3\nu}{8} \alpha_3 \varrho^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.12.1) \quad \bar{C}_1 = \frac{(3+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8},$$

$$(3.12.2) \quad \bar{C}_2 = \frac{3+\nu+(1-\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{\alpha_3}{8}.$$

Naprężenia promieniowe, obwodowe i styczne w tarczy obciążonej oddziaływaniem łopatek wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_r(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (-1+\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + R(\varrho) + \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_2} \left[ \sum_{l=1}^4 \beta_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho^{l_{in}-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + L_{kn}^{(3)}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta) \right\}, \\
 \bar{\sigma}_\theta(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{(1-\nu^2)b} \left\{ (1-\nu) \frac{\bar{C}_1}{\varrho^2} + (1+\nu) \bar{C}_2 + Q(\varrho) + \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_2} \left[ \sum_{l=1}^4 \delta_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho^{l_{in}-1} + \right. \right. \\
 (3.13) \quad &\quad \left. \left. + M_{kn}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta) \right\}, \\
 \bar{\tau}_{r\theta}(\varrho, \Theta) &= \frac{E}{2(1+\nu)b} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_2} \left[ \sum_{l=1}^4 \gamma_{ln} B_{ln}^{(k)} \varrho^{l_{in}-1} + L_{kn}^{(4)}(\varrho) \right] \sin(nm\Theta),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14.1) \quad \bar{C}_1 = \frac{\varrho_1^2 R(1) - (1+\nu) \varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

$$(3.14.2) \quad \bar{C}_2 = -\frac{R(1) + (1-\nu) \varrho_1 P(\varrho_1)}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2},$$

przy czym wprowadzono dodatkowo oznaczenia

$$(3.15) \quad \delta_{ln} = 1 + nm\alpha_{ln} + \nu l_{in},$$

$$(3.16) \quad M_{kn}(\varrho) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left[ \frac{u_{kn}^x}{\varrho} + nm \frac{v_{kn}^x}{\varrho} + \nu \frac{du_{kn}^x}{d\varrho} \right],$$

$$(3.17) \quad Q(\varrho) = \frac{\varepsilon_0}{2} [\nu + (1+\nu) \ln \varrho] + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\nu(k+1)+1}{k^2+2k} \varepsilon_k \varrho^k.$$

Naprężenia promieniowe sumaryczne w tarczy wynoszą

$$(3.18) \quad \sigma_r(\varrho, \Theta) = \bar{\sigma}_r(\varrho) + \bar{\sigma}_r(\varrho, \Theta);$$

podobne związki zachodzą dla naprężeń obwodowych i stycznych ( $\bar{\tau}_{r\theta} = 0$ ).

**3.2. Naprężenia i przemieszczenia w łopatkach.** Łopatkę traktowano jako element liniowy podlegający jednokierunkowemu stanowi naprężeń. Na wycięty element łopatki, symetryczny względem płaszczyzny środkowej tarczy (rys. 4), działa siła odśrodkowa wirującej masy łopatki oraz siła liniowa oddziaływania tarczy  $p(\varrho)$ .

Równanie równowagi wewnętrznej łopatki ma postać

$$(3.19) \quad \frac{d[F(\varrho)\sigma_{rt}]}{dr} = p(\varrho) - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r F(\varrho).$$

Po podstawieniu do powyższego równania:

a) naprężeń w łopatkce wyrażonych za pomocą przemieszczeń

$$(3.20) \quad \sigma_{r,t} = E \frac{du}{dr};$$

b) siły liniowej wzajemnego oddziaływania tarczy na łopatkę określoną zależnością (2.7)

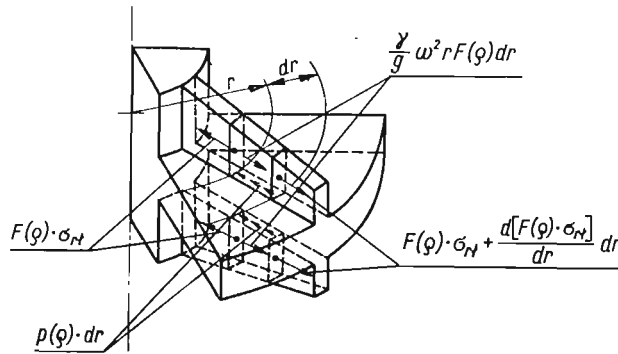
$$p(\varrho) = -\frac{2\pi Eh}{(1-\nu^2)bm} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^k;$$

c) pola przekroju poprzecznego łopatkki wyrażonego liniową funkcją promienia

$$(3.21) \quad F(\varrho) = F_1 + F_2 \varrho$$

otrzymano następujące równanie różniczkowe dla przemieszczeń łopatkki

$$(3.22) \quad \frac{d}{d\varrho} \left[ (F_1 + F_2 \varrho) \frac{du}{d\varrho} \right] = -\frac{2\pi b h}{m(1-\nu^2)} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \varrho^k - \frac{\gamma \omega^2 b^3}{gE} \varrho (F_1 + F_2 \varrho).$$



Rys. 4

Warunki brzegowe łopatkki wyrażają sztywne zamocowanie łopatkki na obwodzie wewnętrznym ( $\varrho = \varrho_1$ ) oraz znikanie naprężeń na obwodzie zewnętrznym ( $\varrho = 1$ )

$$(3.23) \quad u(\varrho_1) = 0, \quad \left( \frac{du}{d\varrho} \right)_{\varrho=1} = 0.$$

Rozwiązując równanie (3.22) z uwzględnieniem warunków (3.23) otrzymano zależności:

a) dla przemieszczeń łopatkki

$$(3.24) \quad u_t = \sum_{k=0}^{N_1} d_k(\varrho) \varepsilon_k + N(\varrho),$$

gdzie

$$(3.25) \quad d_k(\varrho) = \frac{\eta_1}{\eta_0} \frac{1}{k+1} \left\{ \sum_{e=0}^k \frac{\varrho^{k+1-e} - \varrho_1^{k+1+e}}{k+1-e} (-\varkappa)^e \cdot [1 + (-1)^k \varkappa^{k+1}] \ln \frac{\varrho + \varkappa}{\varrho_1 + \varkappa} \right\},$$



$$(3.26) \quad N(\varrho) = -\frac{\eta_2 b}{6} \left[ \frac{2}{3} (\varrho^3 - \varrho_1^3) + \frac{\kappa}{2} (\varrho^2 - \varrho_1^2) - \kappa^2 (\varrho - \varrho_1) + (\kappa^3 - 3\kappa - 2) \ln \frac{\varrho + \kappa}{\varrho_1 + \kappa} \right]$$

oraz

$$(3.27) \quad \eta_0 = \frac{1}{\kappa} = \frac{F_1}{F_2}; \quad \eta_1 = -\frac{2\pi b h}{(1-\nu^2)mF_1}; \quad \eta_2 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \frac{1}{E},$$

b) dla naprężeń w łopatkce

$$(3.28) \quad \sigma_{r,l} = \frac{2\pi h E}{(1-\nu^2)m} \frac{1}{F(\varrho)} \sum_{k=0}^N \frac{\varepsilon_k}{k+1} (1-\varrho^{k+1}) + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \frac{F_1}{F(\varrho)} (1-\varrho^2) + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 \frac{F_2}{F(\varrho)} (1-\varrho^3).$$

#### 4. Wyznaczanie siły oddziaływania metodą najmniejszych kwadratów — metoda rozwiązania

Siła liniowa  $p(\varrho)$  oddziaływania tarcza-łopatkka została przyjęta w postaci wielomianu potęgowego (2.7). Niewiadome współczynniki tego wielomianu wyznaczono z porównania przemieszczeń promieniowych tarczy i łopatki. Rozwiązania dla przemieszczeń promieniowych należało więc wyrazić w postaci liniowej względem niewiadomych współczynników  $\varepsilon_k$ . Uwzględniając w rozwiązaniach dla przemieszczeń promieniowych tarczy określonych zależnościami (2.11) i (2.27) warunki brzegowe zagadnienia wyrażone równaniami (3.3) otrzymano

$$(4.1) \quad u(\varrho, \Theta) = a_0(\varrho)\varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k(\varrho)\varepsilon_k + K(\varrho) + \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(k)} \varrho^{l'n} + L_{kn}^{(1)}(\varrho) \right] \cos(nm\Theta),$$

gdzie

$$(4.2) \quad a_0(\varrho) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^2 \ln \varrho_1}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{1}{\varrho} - \frac{1+(1-\nu)\varrho_1^2 \ln \varrho_1}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \varrho + \varrho \ln \varrho \right],$$

$$(4.3) \quad a_k(\varrho) = \frac{(k+1+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^{k+2}}{[1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2](k^2+2k)} \frac{1}{\varrho} - \frac{(1-\nu)\varrho_1^{k+2} + k+1+\nu}{[1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2](k^2+2k)} \varrho + \frac{1}{k^2+2k} \varrho^{k+1},$$

$$(4.4) \quad K(\varrho) = \frac{\alpha^3}{8} \left[ \frac{(3+\nu)\varrho_1^2 - (1+\nu)\varrho_1^4}{1-\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \frac{1}{\varrho} - \frac{3+\nu+(1-\nu)\varrho_1^4}{1+\nu+(1-\nu)\varrho_1^2} \varrho + \varrho^3 \right].$$

Porównując przemieszczenia promieniowe tarczy określone zależnością (4.1) dla  $\Theta = 0$  z przemieszczeniami łopatki (3.24) otrzymano związek, który powinien być spełniony dla każdego punktu styku łopatki z tarczą, w postaci

$$(4.5) \quad \left\{ a_0(\varrho) - d_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(0)} \varrho^{l'n} + L_{0n}^{(1)}(\varrho) \right] \right\} \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ a_k(\varrho) - d_k(\varrho) + \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \sum_{l=1}^4 B_{ln}^{(k)} \varrho^{l'n} + L_{kn}^{(1)}(\varrho) \right] \right\} \varepsilon_k + K(\varrho) - N(\varrho) = 0, \quad \text{dla } \varrho_1 \leq \varrho \leq 1.$$

Praktycznie otrzymano liczbę równań  $1+N$ , równą liczbie punktów zgodności przemieszczeń łopatki i tarczy z  $1+N_1$  niewiadomymi ( $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N_1}$ ). Ponieważ  $1+N > 1+N_1$ , układ ten rozwiązano metodą najmniejszych kwadratów błędów.

W zapisie macierzowym otrzymany układ przyjmie postać

$$(4.6) \quad [A][\varepsilon] = [b],$$

gdzie  $[A]$  — macierz współczynników  $a_{ik}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$ ,  $[\varepsilon]$  — macierz kolumnowa niewiadomych  $\varepsilon_k$ ,  $[b]$  — macierz wolnych wyrazów  $b_i$ .

Można udowodnić, że postępowanie prowadzące do znalezienia macierzy kolumnowej niewiadomych  $[\varepsilon]$  metodą najmniejszych kwadratów odpowiada rozwiązaniu układu  $1+N_1$  równań z  $1+N_1$  niewiadomymi, otrzymanego w wyniku lewostronnego pomnożenia równania macierzowego przez macierz transponowaną  $[A^T]$ .

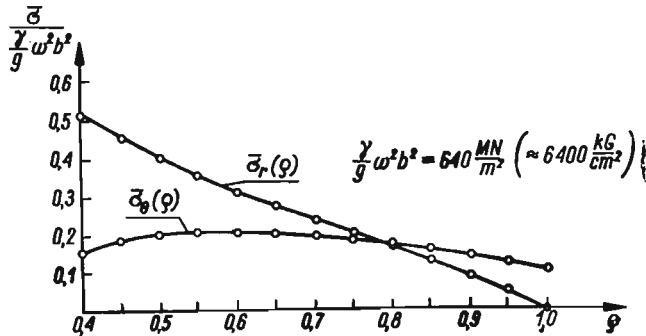
$$(4.7) \quad [A^T][A][\varepsilon] = [A^T][b].$$

Przy założeniu, że  $\det(A^T A) \neq 0$ , z równania (4.7) otrzymano macierz kolumnową niewiadomych  $[\varepsilon]$ .

### 5. Przykład

Opracowaną metodę określenia stanu przemieszczeń i naprężeń w kole wirnikowym z małą liczbą bocznych łopatek promieniowych zilustrowano następującym przykładem liczbowym.

Promień zewnętrzny tarczy kołowej  $b = 13,5$  cm, promień piasty  $a = 5,4$  cm, grubość tarczy  $h = 0,8$  cm, grubość łopatki  $g = 0,4$  cm, pole przekroju poprzecznego łopatki



Rys. 5

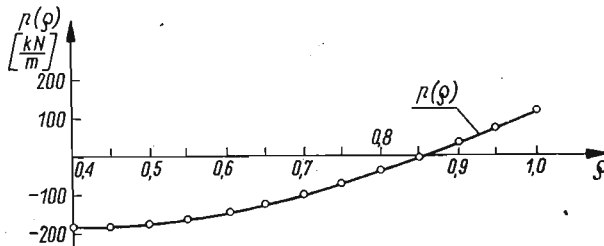
$F(\rho) = (3,2 - 2\rho)10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $0,4 \leq \rho \leq 1,0$ , liczba łopatek  $m = 4$ , prędkość kątowa  $\omega = 2095 \text{ rd/s}$ , masa właściwa tarczy i łopatki  $\gamma/g = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 (\approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ kG/s}^2 \text{ cm}^4)$  moduł Younga  $E = 0,21 \text{ TN/m}^2 (\approx 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2)$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ .

Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w wirującej tarczy bez łopatek obliczony ze wzorów (3.11), pokazano na rys. 5. Współczynniki macierzy  $[B_{in}^{(k)}]$  obliczono z układu równań (3.7).

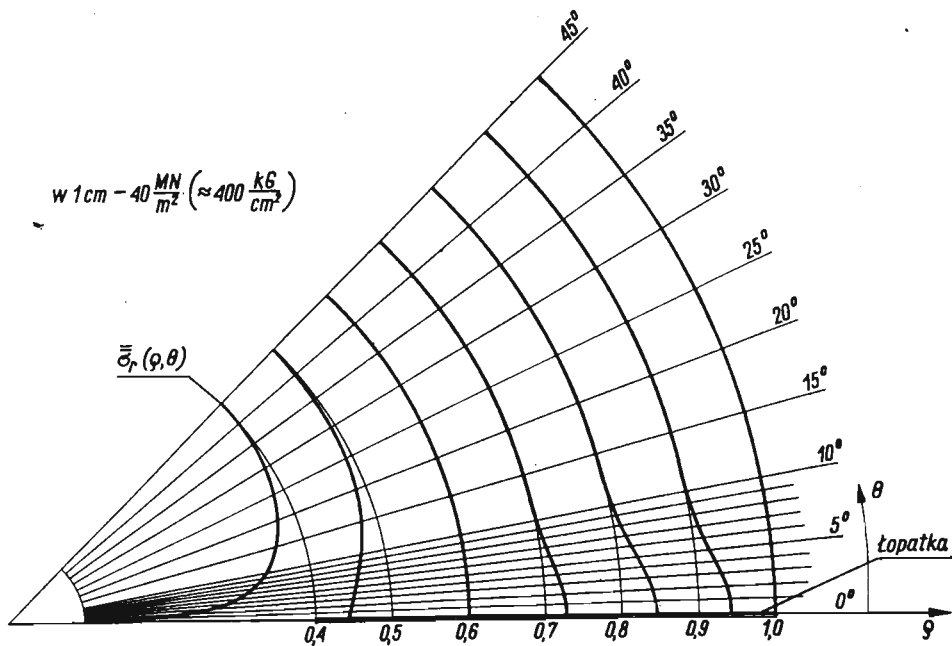
W celu znalezienia współczynników  $\varepsilon_k$ , występujących w wielomianie potęgowym (2.7), porównywano przemieszczenia promieniowe łopatki i tarczy w 29 punktach roz-

mieszczonych wzdłuż łopatki. Otrzymany układ równań rozwiązano metodą najmniejszych kwadratów.

Rozkład siły liniowej  $p(\varrho)$  wzajemnego oddziaływania łopatki i tarczy przybliżono wielomianami potęgowymi czwartego i piątego stopnia. W obu przypadkach błąd względ-



Rys. 6

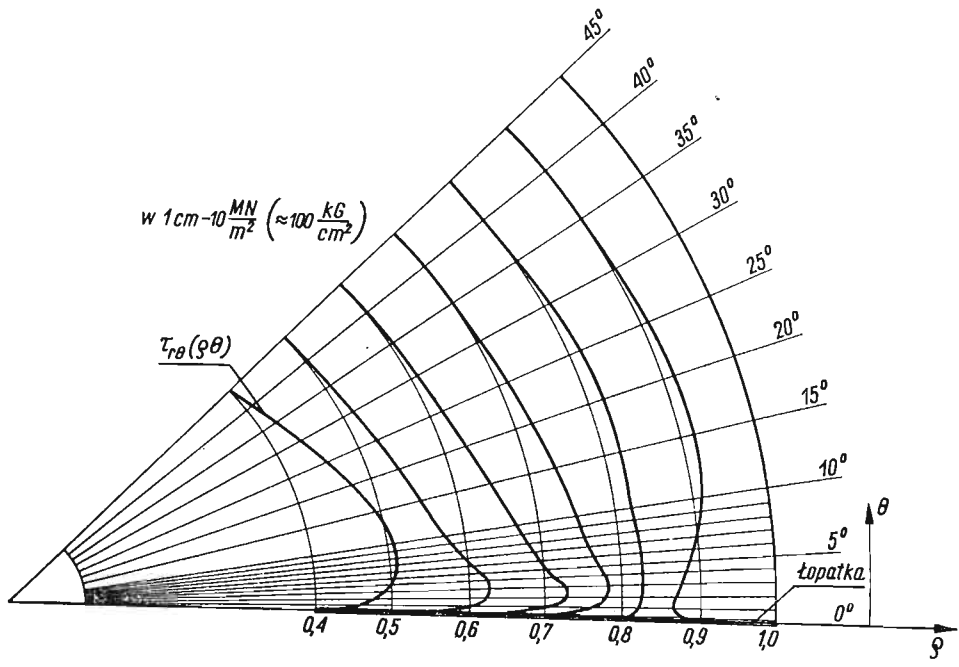


Rys. 7

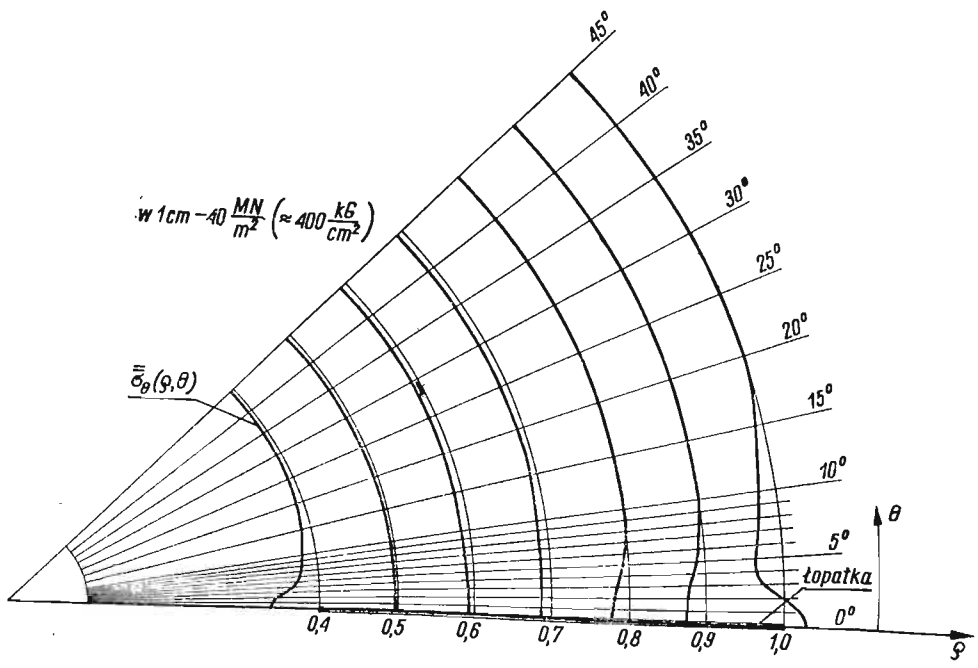
ny nie przekraczał 8%. Do obliczeń końcowych przyjęto rozkład siły liniowej  $p(\varrho)$  w postaci wielomianu potęgowego piątego stopnia ( $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) i pokazano na rys. 6.

Sumy szeregów nieskończonych występujące we wzorach (3.2) na naprężenia promieniowe, obwodowe i styczne przybliżano uwzględniając skończoną liczbę wyrazów  $N_2 = 15$  i  $N_2 = 25$ . Otrzymane wyniki różniły się o niespełna 2%. W obliczeniach końcowych naprężenia promieniowe (rys. 7), obwodowe (rys. 8) i styczne (rys. 9) liczono ze wzorów (3.13), przyjmując skończoną liczbę wyrazów szeregu  $n = 1, 2, 3, \dots, 15$ . Rozkład naprężeń w łopatce liczony ze wzoru (3.28), pokazano na rys. 10.

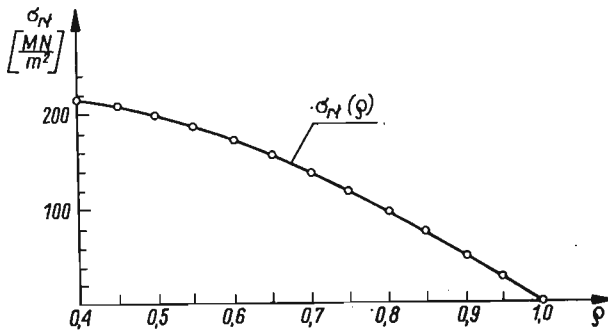
Obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej ZAM Beta 2.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

### 6. Wnioski końcowe

Opracowana metoda wyznaczania stanu przemieszczeń i naprężeń może być stosowana do ściśle określonego typu kół wirnikowych. Poczynione założenie dotyczące symetrycznego usytuowania łopatek promieniowych z obu stron tarczy ogranicza rozwiązanie do kół wirnikowych, sprężarkowych, z dwustrumieniowym przepływem czynnika.

W przeciwieństwie do obecnie stosowanych metod [1, 2, 3, 4, 5, 6], opracowana metoda pozwala na:

- uwzględnienie naprężeń w tarczy pochodzących od miejscowego oddziaływania łopatek;
- uwzględnienie kształtu łopatki wyrażonego dowolną funkcją promienia;
- wyznaczenie siły liniowej  $p(\varrho)$  wzajemnego oddziaływania łopatki na tarczę;
- określenie stanu naprężeń w łopatce.

Podane rozwiązanie dla przemieszczeń (2.27) i naprężeń (3.2) może być zastosowane również dla tarczy pełnej z promieniowymi łopatkami zaczynającymi się w środku tarczy. W tym przypadku wzory na przemieszczenia i naprężenia upraszczają się, ponieważ należy przyjąć  $B_{1n}^{(k)} = 0$  oraz  $B_{4n}^{(k)} = 0$ . Warunki brzegowe wyrażone równaniami (3.3) ograniczają się wówczas do dwóch warunków dla naprężeń promieniowych i stycznych na brzegu zewnętrznym tarczy ( $\varrho = 1$ ), natomiast dwa pozostałe warunki dla przemieszczeń promieniowych i obwodowych w środku tarczy ( $\varrho = 0$ ) spełnione są tożsamościowo.

### Literatura cytowana w tekście

1. И. А. БИРГЕР, *Круглые пластинки и оболочки вращения*, Оборонгиз, Москва 1962.
2. А. С. БОНДАРЧУК, *Изгиб во вращающемся диске с боковыми лопатками*. Труды Киевского-Автомоб.-Дорожного Института, вып. 7, Киев 1960.
3. J. LEYKO, *Stan naprężeń w wirniku o promieniowych łopatkach położonych po jednej stronie*. Arch. Bud. Masz., PAN, Warszawa, 3, 7 (1960).
4. Ц. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластинки*, Москва 1947.
5. K. LÖFFLER, *Die Berechnung von rotierenden Scheiben und Schalen*, Springer-Verlag, Berlin 1961.
6. Э. С. Уманский, *Растяжение круглых дисков силами действующими в средней плоскости вдоль радиусов*. Известия Киевского Политехнического Института, т. X, Машгиз, Москва 1950.

## Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ В РОТОРЕ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ  
БОКОВЫХ РАДИАЛЬНЫХ ЛОПАТОК

В работе даются общие дифференциальные уравнения, описывающие перемещения во вращающемся диске постоянной толщины, закрепленном на недеформируемой ступице и нагруженном собственными центробежными силами, а также поверхностными, направленными радиально и несимметрично расположенными силами  $p(\varrho, \Theta)$ , изображающими воздействие лопаток.

При решении дифференциальных уравнений радиальные силы воздействия лопаток приняты в виде полинома и распределены по окружности в виде тригонометрической последовательности с периодом  $2\pi/m$  — число лопаток). Неизвестные коэффициенты полинома определяющего линейную силу  $p(\varrho)$  были найдены путем сравнения радиальных перемещений диска и лопатки в нескольких десятках точек расположенных вдоль лопатки. Предложенный метод расчета иллюстрируется численным примером.

## Summary

STATE OF STRESS AND STRAIN IN A ROTOR WITH A SMALL  
NUMBER OF RADIAL SIDE BLADES

The general system of differential displacement equations is given, describing the problem of a rotating circular disc of constant thickness and a rigid hub loaded by centrifugal forces and by radial, axially non-symmetric surface forces  $p(\varrho, \Theta)$  representing the action of side blades (Fig. 1).

The radial force is assumed in the form of a polynomial and expanded in the circumferential direction into a trigonometric series of period  $2\pi/m$  ( $m$  — number of blades). The unknown coefficients appearing in the polynomial describing the line force  $p(\varrho)$  are found by equating the radial displacements of the disc and the blade in about 30 points located along the blade. This method is illustrated by a numerical example.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1968 r.*

DZIAŁANIE RUCHOMEGO PUNKTOWEGO ŹRÓDŁA CIEPŁA W PRZESTRZENI  
NIEOGRANICZONEJ

ZOFIA SOB CZY ŃSKA (POZNAŃ)

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie pola temperatury i pola przemieszczeń w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, wywołanych działaniem chwilowego, punktowego źródła ciepła  $Q = Q_0 \delta(x_i) \delta(t)$ . Źródło to porusza się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x_3$  przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych.

Rozwiązaniem podobnego zagadnienia zajmowali się już NOWACKI [3] i ROSENTHAL [4]. Wyznaczyli oni funkcje określające pole temperatury oraz przemieszczenia dla źródła ruchomego punktowego o stałej wydajności pomijając w równaniu przewodnictwa cieplnego pochodną lokalną funkcji pola temperatury.

W niniejszej pracy pochodnej tej pomijać nie będziemy.

Rozważane zagadnienie opisuje następujący układ równań: równania przemieszczeniowe

$$(1) \quad \mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \varepsilon_{,i} = \alpha_i (2\mu + 3\lambda) \Theta_{,i}$$

i równanie przewodnictwa cieplnego

$$(2) \quad \nabla^2 \Theta - \frac{1}{\kappa} \dot{\Theta} = -\frac{Q_0}{\kappa} \delta(x_i) \delta(t); \quad \kappa = \frac{\lambda_1}{c\rho}.$$

W równaniach tych  $u_i$  oznaczają składowe wektora przemieszczenia,  $\Theta$  — pole temperatury,  $Q_0$  jest wydajnością źródła;  $\lambda_1$  oznacza współczynnik wewnętrznej przewodności cieplnej,  $\rho$  jest gęstością ośrodka, a  $c$  ciepłem właściwym;  $\delta(x_i)$  i  $\delta(t)$  są funkcjami Diraca względem miejsca i czasu.

Zakładamy, że w chwili  $t = 0$  składowe wektora przemieszczenia oraz pole temperatury równe są zeru.

Przypuśćmy, że ze źródłem związany jest ruchomy układ współrzędnych  $\xi_i$  równoległy do stałego układu współrzędnych  $x_i$  i taki, że

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2 \quad \text{i} \quad \xi_3 = x_3 - vt.$$

Po przeprowadzeniu zamiany zmiennych równanie przewodnictwa cieplnego (2) będzie miało postać

$$(3) \quad \nabla^2 \Theta = \frac{1}{\kappa} \left( \dot{\Theta} - v \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_3} \right) - \frac{Q_0}{\kappa} \delta(\xi_i) \delta(t).$$

Stosując transformację Laplace'a do równań przemieszczeniowych (1) i do równania (3) otrzymamy

$$(4) \quad \mu \nabla^2 u_{L,i} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{L,i} = \alpha_i (2\mu + 3\lambda) \Theta_{L,i},$$

$$(5) \quad \nabla^2 \Theta_L = \frac{1}{\kappa} \left( s \Theta_L - v \frac{\partial \Theta_L}{\partial \xi_3} \right) - \frac{Q_0}{\kappa} \delta(\xi_i).$$

Po uwzględnieniu przedstawienia całkowego funkcji Diraca we współrzędnych walcowych, rozwiązanie równania (5) otrzymujemy w postaci

$$(6) \quad \Theta_L = \frac{Q_0}{4\pi\kappa\sqrt{r^2 + \xi_3^2}} \exp \left[ -\frac{v\xi_3}{2\kappa} - \sqrt{(r^2 + \xi_3^2)} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{v^2}{4\kappa} + s \right) \right],$$

przy czym

$$r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Po odwróceniu transformacji Laplace'a pole temperatury określa wzór

$$(7) \quad \Theta = \frac{Q_0}{8\sqrt{\kappa^3}\sqrt{\pi^3}\sqrt{t^3}} \exp \left[ -\frac{v\xi_3}{2\kappa} - \frac{v^2 t}{4\kappa} - \frac{r^2 + \xi_3^2}{4\kappa t} \right].$$

Ponieważ mamy do czynienia z przestrzenią nieograniczoną, pole przemieszczeń musi posiadać potencjał zdefiniowany związkami

$$(8) \quad u_i = \Phi_{,i}.$$

Równania przemieszczeniowe (1), po uwzględnieniu związków (8), zredukują się wówczas do jednego równania Poissona

$$(9) \quad \nabla^2 \Phi = m\Theta; \quad m = \frac{1+v}{1-v}.$$

Rozwiązanie tego równania otrzymamy wykorzystując rozwiązanie (7) oraz uwzględniając fakt, że w punkcie, w którym aktualnie znajduje się źródło, to jest dla  $r = \xi_3 = 0$ , funkcja potencjału równa się zeru.

Rozwiązanie to ma postać

$$(10) \quad \Phi = \frac{mQ_0}{4\pi\sqrt{r^2 + \xi_3^2}} \exp \left( -\frac{v^2 t}{4\kappa} - \frac{v\xi_3}{2\kappa} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^2 + \xi_3^2}{\kappa t}} \right).$$

Możemy teraz w oparciu o związki (8) wyznaczyć przemieszczenia drogą prostego różniczkowania. Mamy

$$(11) \quad u_r = -\frac{mQ_0 r}{4\pi(r^2 + \xi_3^2)} \exp \left( -\frac{v^2 t}{4\kappa} - \frac{v\xi_3}{2\kappa} \right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + \xi_3^2}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^2 + \xi_3^2}{\kappa t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\kappa t}} \exp \left[ -\frac{r^2 + \xi_3^2}{4\kappa t} \right] \right\};$$



$$(12) \quad u\xi_3 = -\frac{mQ_0\xi_3}{4\pi(r^2+\xi_3^2)} \exp\left(-\frac{v^2t}{4\kappa} - \frac{v\xi_3}{2\kappa}\right) \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{r^2+\xi_3^2}} + \frac{v}{2\kappa} \right) \operatorname{erf} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^2+\xi_3^2}{\kappa t}} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\kappa t}} \exp\left[-\frac{(r^2+\xi_3^2)}{4\kappa t}\right] \right\}.$$

Jeżeli teraz scałkowalibyśmy otrzymane wzory (7), (11), (12) względem czasu w granicach  $0 < \tau < \infty$ , otrzymane rozwiązania będą odpowiadały rozwiązaniom NOWACKIEGO [3] dla ruchomego źródła ciepła o stałej wydajności.

Pokażemy to na przykładzie pola temperatury

$$(13) \quad \bar{\Theta} = \int_0^\infty \Theta(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty \frac{Q_0}{8\sqrt{\pi^3}\sqrt{\kappa^3}\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[-\frac{v\xi_3}{2\kappa} - \right. \\ \left. - \frac{v^2(t-\tau)}{4\kappa} - \frac{(r^2+\xi_3^2)}{4\kappa(t-\tau)}\right] d\tau = \frac{Q_0}{4\pi\kappa\sqrt{r^2+\xi_3^2}} \exp\left[-\frac{v}{2\kappa}(\xi_3+\sqrt{r^2+\xi_3^2})\right].$$

Jeżeli natomiast we wzorach (7), (11) i (12) przyjmiemy  $v = 0$  to otrzymamy dobrze znane wzory dla nieruchomego punktowego źródła ciepła [3].

Na zakończenie należy podkreślić, że wzory (7), (11) i (12) otrzymane w niniejszej pracy są dla  $Q_0 = 1$  funkcjami Greena i jako takie mogą być wykorzystane do budowy rozwiązań dla dowolnego rozkładu źródeł.

Literatura cytowana w tekście

[1] В. А. ДИТКИН, П. И. КУЗНЕЦОВ, *Справочник по операционному исчислению*, Гос. Тех.-Геор. Лит., Москва 1951.  
 [2] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F. G. TRICOMI, *Tables of integral transforms*, McGraw-Hill, 1954.  
 [3] W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, 1962.  
 [4] D. ROSENTHAL, *The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments*, Transactions of the ASME 11, 1946.

Резюме

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОГО ТОЧЕЧНОГО ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА НА НЕОГРАНИЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

В работе решается задача определения температурного поля и поля перемещений в упругом бесконечном пространстве, подверженном воздействию теплового источника  $Q = Q_0\delta(x_1)\delta(t)$ . Этот источник перемещается с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x_1$ . В решении используется трансформация Лапласа. Компоненты перемещений определяются при помощи функции потенциала термического перемещения. Полученное решение является функцией Грина для  $Q_0 = 1$  и может быть использовано для построения решения задачи при произвольном распределении источников.

## S u m m a r y

## ACTION OF A MOVING CONCENTRATED HEAT SOURCE IN ELASTIC SPACE

The aim of the paper is to determine the temperature and displacement field in an infinite elastic space acted on by the heat source  $Q = Q_0 \delta(x_i) \delta(t)$ . The heat source moves at constant velocity  $v$  along the  $x_3$ -axis. The displacement components are expressed in terms of the thermo-elastic displacement potential, Laplace transforms being applied to the basic equations. The solution for  $Q_0 = 1$  represents the Green function of the problem and can be applied to cases with arbitrary distributions of heat sources.

KATEDRA MECHANIKI  
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1968 r.*

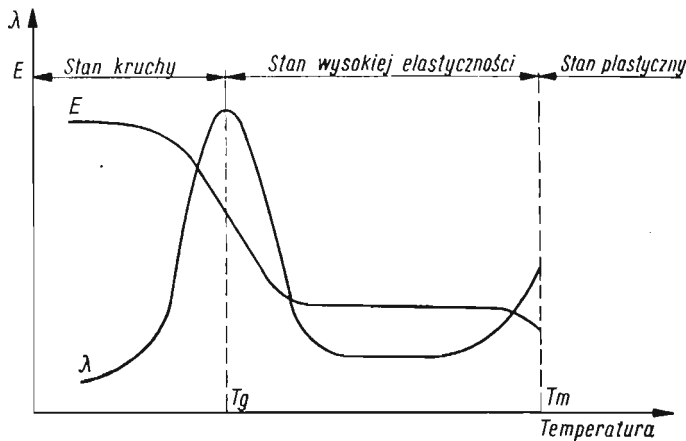
---

DYNAMICZNE BADANIA WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH POLIAMIDU TARLON X-A

STANISŁAW MAZURKIEWICZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

Własności mechaniczne tworzyw sztucznych zależą w istotny sposób od temperatury i czasu. W zależności od temperatury tworzywo może znajdować się w stanie szklanym, wysokoelastycznym lub lepkoplastycznym. W stanie szklanym tworzywa występują w niskich temperaturach. W stanie wysokoelastycznym występują wyraźne efekty reologiczne, co jest wynikiem znacznej giętkości łańcucha cząsteczki. Temperatura rozgraniczająca oba stany, oznaczona jako  $T_g$ , nie jest stałą fizyczną, lecz zależy od szybkości działania bodźców zewnętrznych. W strefie przejścia ze stanu szklanego w stan wysokoelastyczny

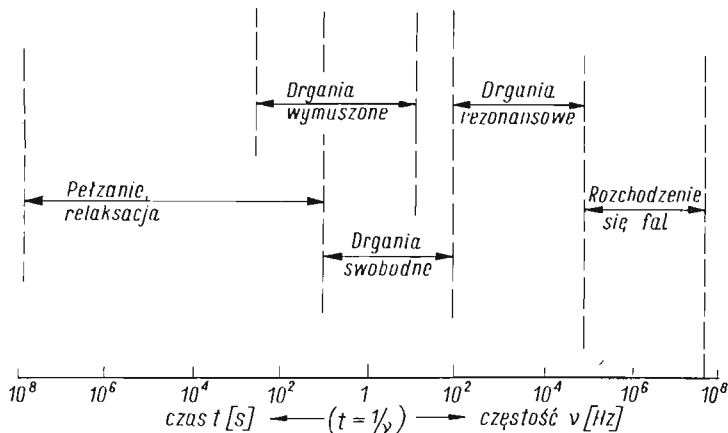


Rys. 1. Stany fizyczne tworzywa:  $E$  — moduł sprężystości,  $\lambda$  — logarytmiczny dekrement drgań

występuje maksimum tłumienia oraz duży spadek modułu sprężystości (rys. 1). W stanie lepkoplastycznym występują odkształcenia nieodwracalne, wywołane trwałymi przemieszczeniami cząsteczek.

Zespolony moduł sprężystości tworzywa zależy nie tylko od temperatury, lecz również od czasu trwania przyłożonego obciążenia. W celu określenia zależności modułu sprężystości od czasu, stosuje się szereg metod, które schematycznie przedstawia rys. 2 [5].

Skala czasu pomiarów pełzania i relaksacji ograniczona jest od strony krótkich czasów na skutek efektów bezwładności, jak również na skutek niemożliwości uzyskania istotnie chwilowego przyłożenia naprężeń czy odkształceń. W celu uzyskania informacji o własnościach mechanicznych tworzywa dla krótkich czasów, przeprowadzamy badania przy



Rys. 2. Metody mechaniczne pomiaru modułu sprężystości i tłumienia na logarytmicznej osi czasu

obciążeniach okresowo-zmiennych. Naprężenia zmieniamy zazwyczaj sinusoidalnie z częstotliwością  $\nu$  cykli na sekundę. W doświadczeniach tych zarówno odkształcenie, jak i naprężenie jest sinusoidalną funkcją czasu

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) = \varepsilon_0 [E' \sin \omega t + E'' \cos \omega t],$$

gdzie  $\omega$  — kołowa częstość drgań,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\delta$  — fazowy kąt między naprężeniem i odkształceniem,  $E'$  i  $E''$  — składowa rzeczywista i składowa urojona zespolonego modułu sprężystości.

Miarą dysypowanej energii może być tzw. tangens kąta stratności  $\tan \delta = E''/E'$ .

## 2. Badane tworzywo

Badania przeprowadzono na poliamidzie produkcji krajowej Tarlon X-A. Poliamidy należą do grupy tworzyw termoplastycznych, liniowo spolimeryzowanych, o ciężarze cząsteczkowym 25 ÷ 30 tysięcy. Struktura poliamidów jest częściowo krystaliczna o stopniu krystaliczności dochodzącym do 50%. Własności poliamidów uzależnione są od silnego oddziaływania międzycząsteczkowego (wiązania wodorowe, oddziaływanie dipolowe), które w znacznym stopniu wpływają na tendencję do krystalizacji, oraz od giętkości łańcucha cząsteczki.

Cechą ogólną wszystkich poliamidów jest to, że zawierają one w makrocząsteczce ugrupowania amidowe —CO—NH—. Występują dwa, o dwóch różnych barierach rotacji wiązania łańcucha: wiązania C—C o niskiej barierze rotacji oraz wiązania C—N, działające usztywniająco na łańcuch poliamidu. Niektóre własności fizyczne Tarlonu X-A przedstawia tablica 1.

Tablica 1

Rodzaj badania	Jednostka miary	Tarlon X-A
Wytrzymałość na zginanie	kG/cm <sup>2</sup>	1100
Udarność z karbem	cm kG/cm <sup>2</sup>	25
Wytrzymałość na rozciąganie	kG/cm <sup>2</sup>	700
Wydłużenie przy zerwaniu	%	120
Wytrzymałość na ściskanie	kG/cm <sup>2</sup>	1000
Twardość wg Brinella	kG/cm <sup>2</sup>	16
Odporność cieplna wg Martensa	°C	48
Odporność cieplna wg Vicata	°C	180
Ciężar właściwy	g/cm <sup>3</sup>	1,11
Ciepło właściwe	cal/°C.g	0,5
Zawartość wilgoci	%	0,5

### 3. Drgania swobodne giętne z zawieszoną masą

Metoda ta, stosunkowo prosta z punktu widzenia przygotowania aparatury, jest szeroko rozpowszechniona. Daje ona zadowalające rezultaty dla  $\text{tg } \delta < 0,3$  [5]. Odpowiednie wyrażenia na moduł zachowawczy, moduł stratności i tangens kąta stratności mają postać [5]:

$$(3.1) \quad E' = \left( \omega^2 \frac{m}{b} \right) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right),$$

$$(3.2) \quad E'' = \left( \omega^2 \frac{m}{b} \right) \frac{\lambda}{\pi},$$

$$(3.3) \quad \text{tg } \delta \approx \frac{\lambda}{\pi},$$

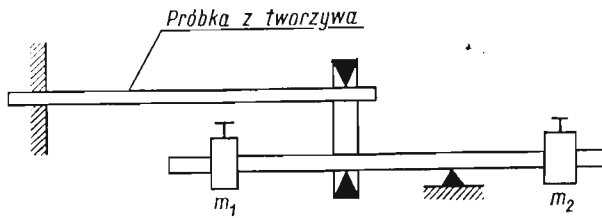
gdzie  $\lambda$  — logarytmiczny dekrement drgań,  $m$  — masa zawieszona na próbce,  $b$  — współczynnik kształtu, zależny od szczegółów urządzenia.

Dla belki o przekroju prostokątnym zamocowanej jednym końcem  $b = cd^3/4L^3$ , przy czym  $c$  — szerokość,  $d$  — grubość,  $L$  — długość.

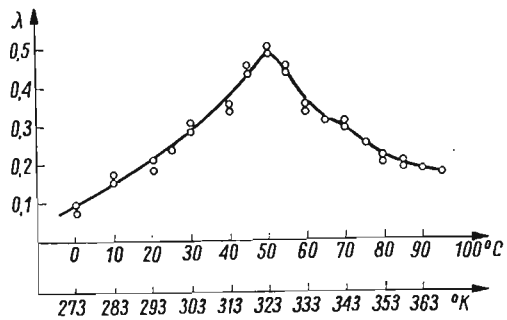
Do badań użyto próbek płaskich o wymiarach nominalnych  $120 \times 15 \times 5$  mm, wykonanych na wtryskarce. Pomiarów dokonywano przy pomocy tensometru elektrooporowego naklejonego na próbkę.

W celu uzyskania określonej temperatury cały przyrząd umieszczono w komorze grzewczej. Dla uzyskania zmiany częstości drgań własnych zastosowano urządzenie, którego schemat przedstawia rys. 3. W urządzeniu tym zmieniając odległości mas  $m_1$  i  $m_2$  można uzyskać różne wartości masy, zredukowanej do swobodnego końca próbki.

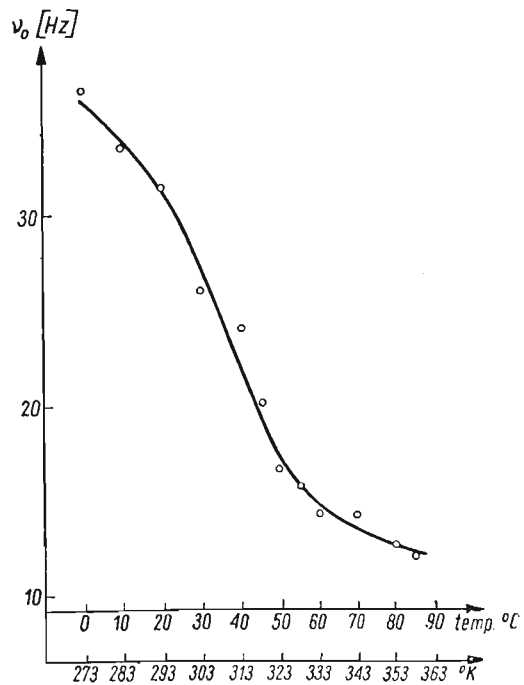
Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów sporządzono wykres zależności logarytmicznego dekrementu drgań od temperatury (rys. 4) oraz odpowiadający mu, przy



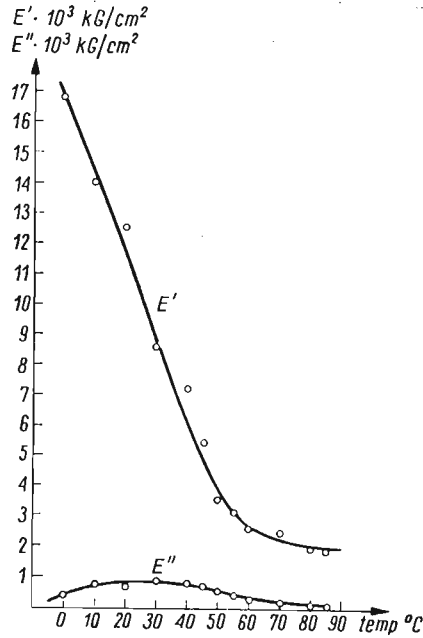
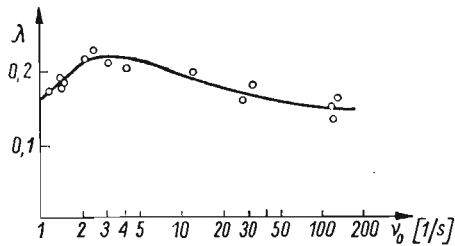
Rys. 3. Schemat urządzenia służącego do zmiany częstości drgań własnych



Rys. 4. Zmiana logarytmicznego dekrementu drgań  $\lambda$  z temperaturą



Rys. 5. Zmiana częstości drgań własnych  $\nu$  z temperaturą

Rys. 6. Zmiana modułu  $E'$  i  $E''$  z temperaturą

Rys. 7. Zmiana dekrementu drgań w funkcji częstotliwości dla temperatury 20°C

stałej  $m$ , wykres zmiany częstotliwości drgań własnych ze zmianą temperatury (rys. 5). Obliczone z pomiarów według wzorów (3.1) i (3.2) wartości modułu rzeczywistego  $E'$  oraz modułu urojonego  $E''$  — dla różnych temperatur przedstawia rys. 6. Dla temperatury 20°C sporządzono w układzie półlogarytmicznym wykres zmiany logarytmicznego dekrementu drgań w funkcji częstotliwości drgań własnych (rys. 7).

#### 4. Drgania rezonansowe

Przy częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$  znika składnik urojony i siła jest w fazie z prędkością. Przy założeniu  $E'' \ll E'$  [6] mamy

$$(4.1) \quad E' = \omega_0^2 \frac{m}{b},$$

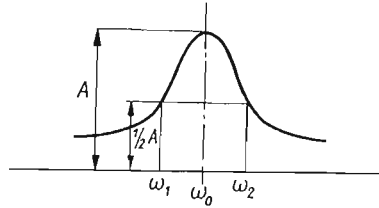
gdzie  $b$  — współczynnik kształtu, wynoszący w przypadku rozciągania  $A/L$ ,  $A$  — przekrój poprzeczny próbki,  $L$  — długość próbki.

Natomiast

$$(4.2) \quad E'' = E' \frac{\Delta\omega}{\omega_0 \sqrt{3}},$$

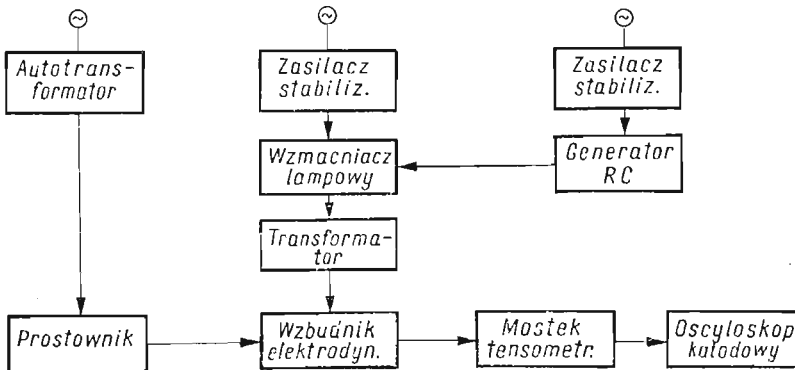
gdzie  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  (por. rys. 8).

Do pomiaru drgań zastosowano urządzenie, którego schemat blokowy przedstawia rys. 9. W układzie tym generator RC zasilany jest prądem z sieci. Stałe napięcie zasilania



Rys. 8. Schemat krzywej rezonansu

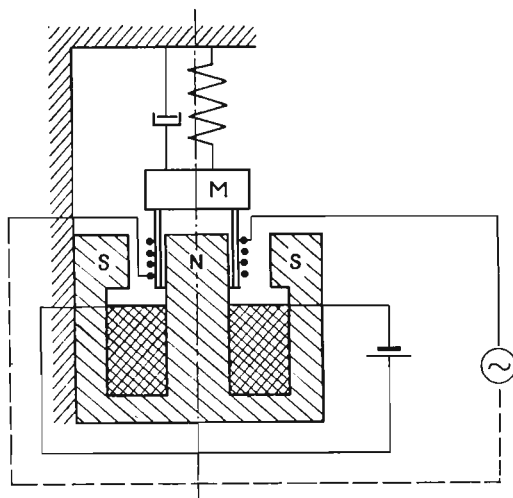
uzyskiwane jest za pomocą stabilizatora napięcia. Generator wytwarza sinusoidalne impulsy elektryczne o żądanej częstotliwości. Impulsy te wzmacniane są przez zbudowany specjalnie do badań wzmacniacz lampowy, a następnie poprzez transformator dopasowujący doprowadzane są do cewki wzbudnika elektrodynamicznego. Cewka znajduje się w stałym polu magnetycznym, uzyskiwanym za pomocą uzwojenia stojana wzbudnika,



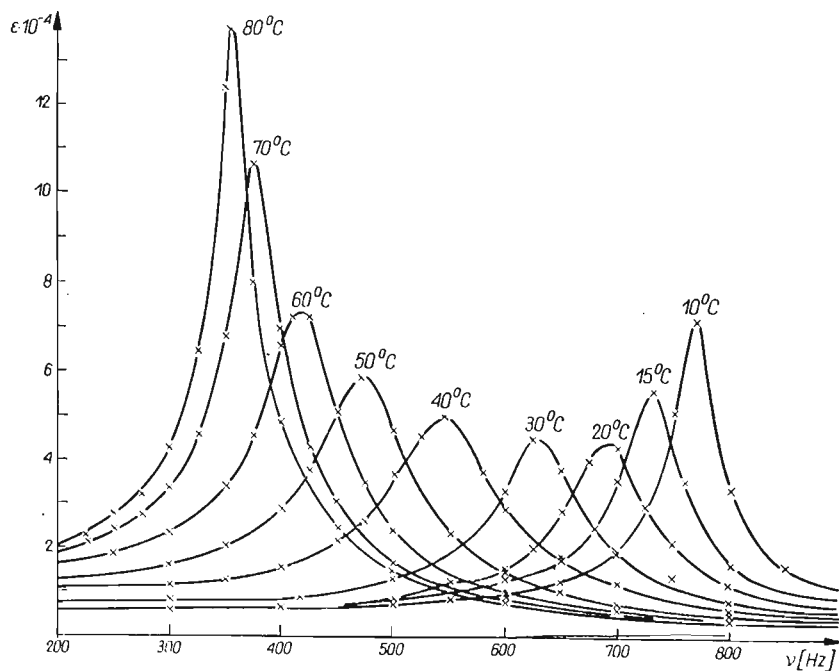
Rys. 9. Schemat blokowy urządzenia do pomiaru drgań metodą rezonansu

do którego w tym celu doprowadzany jest prąd z sieci poprzez prostowniki diodowe, w układzie Gretza. Cewka przymocowana jest do próbki. Próbka drugim końcem utwierdzona jest do sztywnego korpusu. Odształcenia próbki mierzono tensometrem elektrooporowym naklejonym na niej, pracującym w skompensowanym układzie mostka Wheatstone'a, przy zastosowaniu wzmacniacza firmy CHEMITER. Przebiegi rejestrowano za pomocą oscyloskopu katodowego OK-11. Cechowania dokonywano za pomocą urządzenia kali-



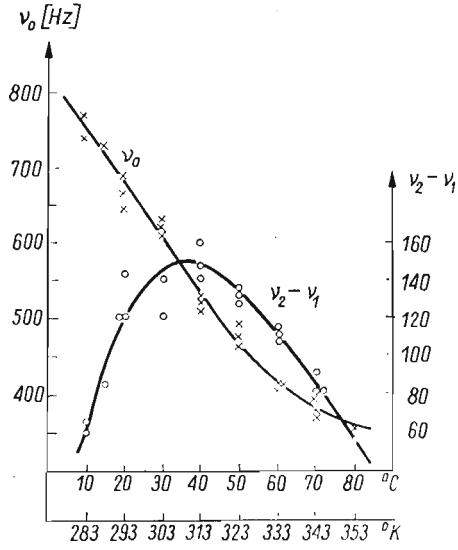


Rys. 10. Schemat wzбудnika elektrodynamicznego

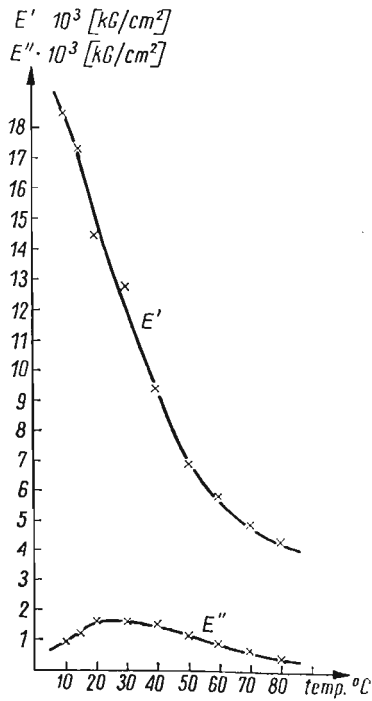


Rys. 11. Krzywe rezonansu dla różnych temperatur

brującego wbudowanego we wzmacniacz. Wzбудnik elektrodynamiczny wraz z próbką umieszczony był w komorze grzewczej, z kontrolowaną temperaturą pomiaru. Schemat wzбудnika elektrodynamicznego przedstawia rys. 10.

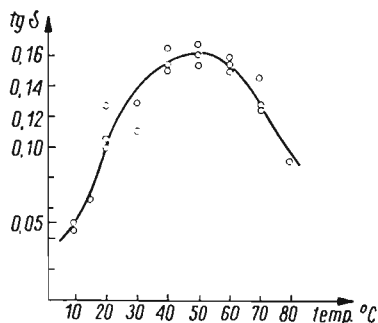


Rys. 12. Zależność częstotliwości rezonansowej  $\nu_0$  oraz różnicy  $\nu_2 - \nu_1$  od temperatury



Rys. 13. Zmiana modułu  $E'$  i  $E''$  z temperaturą

Próbki o kształcie rurowym średnicy zewnętrznej 20 mm, wewnętrznej 18 mm i długości 70 mm wykonano na wtryskarce. Sposób wtrysku («od czoła») podyktowany był tym, aby wyeliminować powstawanie niejednorodności próbki na obwodzie. Wykonanie próbek przez wtrysk ma szereg zalet w porównaniu z wykonaniem przez obróbkę skra-



Rys. 14. Zmiana  $\text{tg } \delta$  z temperaturą

waniem (duża gładkość), wadą natomiast jest tworzenie się na powierzchni próbki cienkiej warstwy alifatycznej (na ogół poniżej 0,1 mm [12]) o strukturze odmiennej niż wewnątrz materiału.

Przy ustalonym napięciu zasilania generatora, zmieniając częstość drgań generatora, doprowadzono do rezonansu układu drgającego, tj. próbki z podwieszoną cewką. Na ekranie oscyloskopu odczytywano amplitudy odkształceń w obszarze rezonansu. Pomiarów dokonywano dla temperatur od 10°C do 80°C. Krzywe rezonansu dla jednej z badanych próbek przedstawia rys. 11.

Na podstawie otrzymanych pomiarów sporządzono wykresy zmiany z temperaturą: częstości rezonansowej (rys. 12), dynamicznego modułu sprężystości [ $E'$  i  $E''$ ] obliczone wg wzorów (4.1), (4.2)] (rys. 13), oraz tangensa kąta stratności (rys. 14). Pomiarzy przeprowadzono przy stałej masie  $m$  zawieszanej na próbce.

## 5. Wnioski

Z pomiarów metodą drgań swobodnych wynika, że badane tworzywo wykazuje maksimum tłumienia zarówno dla określonej częstości (przy stałej temperaturze) jak i temperatury (dla badanego zakresu częstości). Maksimum tłumienia występuje przy temperaturze ok. 50°C. ALBRECHT [1] tłumaczy występowanie tego maksimum dla poliamidów ruchami cząsteczkowymi, które związane są z przejściem tworzywa w stan szklisty.

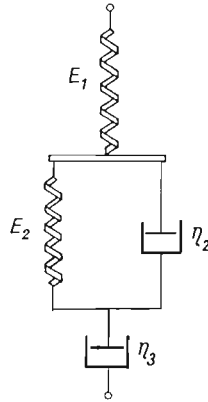
Wpływ częstości drgań na zmianę tłumienia w materiałach wykazujących własności reologiczne był przedmiotem szeregu badań doświadczalnych. W niektórych doświadczeniach, np. [4, 7], stwierdzono wzrost dekrementu drgań z częstością, w innych np. [3] nie stwierdzono jego zmiany. Teoretyczną stroną tego zagadnienia zajmował się ZENER [13]. Uogólnieniem wyników badań doświadczalnych zajmował się OSIŃSKI [10]. W większości przeprowadzonych doświadczeń zakres stosowanych częstości był mały tak, że otrzymywano tylko wycinek pełnego widma tłumienia.

Interpretację wyników otrzymanych w doświadczeniu przeprowadzimy w oparciu o czteroparametrowy model Burgersa (rys. 15). Przy występowaniu sinusoidalnego naprężenia  $\sigma = \sigma_0 \cos \omega t$  z częstotliwością  $\omega$ , odkształcenie próbki opisane będzie następującym równaniem [2]:

$$(5.1) \quad \varepsilon_{(t)} = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_1} \cos \omega t + \frac{\sin(\omega t - \delta)}{\sqrt{\omega^2 \eta_2^2 + E_2^2}} + \frac{1}{\omega \eta_3} \sin \omega t \right],$$

gdzie  $\delta = \text{tg}^{-1}(-E_2/\omega \eta_2)$ .

Pierwszy człon wyrażenia charakteryzuje natychmiastową sprężystą deformację będącą w fazie z naprężeniem. Drugi człon odpowiada opóźnionej sprężystości deformacji, przesuniętej w fazie o kąt  $\delta$ . Trzeci człon odpowiada lepkiemu płynięciu, które przesunięte jest



Rys. 15. Model reologiczny Burgersa

w fazie względem naprężenia o kąt  $\pi/2$ . Natychmiastowa sprężysta deformacja nie jest związana ze stratą energii. Lepkie płynięcie związane jest z ciągłą dysypacją energii zamienianej na ciepło. Natomiast wartość rozproszonej energii przez człon reprezentujący opóźnioną sprężystą deformację wyraźnie zależy od częstotliwości, określającej wartość kąta przesunięcia fazowego  $\delta$ , jak również od amplitudy deformacji. Ponieważ deformacje w opisywanym doświadczeniu były małe, zajmiemy się w dalszym ciągu jedynie analizą wpływu częstotliwości  $\omega$  na wartość dysypowanej energii. W przypadku granicznie małych częstotliwości, kąt przesunięcia fazowego będzie zbliżał się do wartości  $-\pi/2$  i człon opisujący spóźnioną sprężystą deformację będzie w fazie z naprężeniem. Przy bardzo wysokich częstotliwościach kąt  $\delta$  będzie się zbliżał do wartości 0. W miarę wzrostu częstotliwości, gdy  $1/\omega$  będzie osiągać wartość odpowiadającą czasowi retardacji  $\tau_2$  kąt przesunięcia fazowego będzie miał wartość pośrednią w porównaniu z omawianymi powyżej przypadkami granicznymi. Dla tych częstotliwości obserwujemy maksimum dysypacji energii.

Na ogół dla twardych polimerów, gdy lepkość  $\eta_3$  jest duża, człon opisujący lepkie płynięcie można pominąć. Wówczas równanie (5.1) można przedstawić w innej postaci:

$$(5.2) \quad \varepsilon_{(t)} = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E'} \cos \omega t + \frac{1}{E''} \sin \omega t \right],$$

gdzie  $E'$  rzeczywista, a  $E''$  urojona składowa zespolonego modułu sprężystości.

Dla rozpatrywanego modelu wyrażają się one wzorami

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2(\omega^2 \tau^2 + 1)}; \quad \frac{1}{E''} = \frac{\omega \tau}{E_2(\omega^2 \tau^2 + 1)}.$$

Dla niskich częstości materiał zachowuje się jak ciało sprężyste o module sprężystości:  $1/E = 1/E_1 + 1/E_2$ , zaś dla wysokich częstości — jak ciało o module równym  $E_1$ .

Z pomiarów wynika (rys. 7), że maksimum (lokalne) widma czasu opóźnienia występuje dla  $t = 1/3$  sek.

Wyniki otrzymane przy zastosowaniu opisanej metody drgań swobodnych giętnych wymagają pewnego krytycznego omówienia. Wiadomo bowiem, że za miarę dysypacji można uważać logarytmiczny dekrement drgań, o ile układ drgający jest dokładnie odizolowany od upływu energii na zewnątrz. Zamocowanie próbki jednym końcem takiego zabezpieczenia nie daje. Występuje bowiem wówczas tzw. tarcie konstrukcyjne, które jest sumą tarcia wewnętrznego układu oraz tarcia coulombowskiego, wynikającego ze ślizgania się po sobie warstwy powierzchniowej próbki i elementu mocującego. KIMBALL i LOVELL [8] dowiedli, że dla większości materiałów tarcie konstrukcyjne jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy drgań i nie zależy od częstości drgań. Badaniem wpływu zamocowania na drgania układu o jednym stopniu swobody zajmowali się także BOGUSZ i GIERGIEL [3]. W badaniach tych stwierdzono, że wpływ tarcia suchego rośnie ze wzrostem amplitudy drgań. Stwierdzono istnienie docisku krytycznego, po przekroczeniu którego tarcie suche maleje. Drugim czynnikiem utrudniającą ilościową analizę otrzymanych wyników jest niejednorodny stan naprężeń wzdłuż próbki oraz wzdłuż przekroju poprzecznego próbki. Jeżeli znana byłaby zależność tarcia wewnętrznego od naprężenia, to, jak wykazał PANOWKO [11], można obliczyć ilość dysypowanej energii na jednostkę objętości materiału również dla przypadku niejednorodnego stanu naprężenia w badanej próbce.

Tak więc otrzymane z powyższych pomiarów zależności dekrementu drgań od częstości i temperatury są obarczone błędem wynikającym z wpływu tarcia konstrukcyjnego na wyniki pomiarów. Niemniej dzięki zastosowaniu metody drgań swobodnych można wyciągnąć szereg ważnych wniosków odnośnie własności badanego tworzywa:

a) wartość dekrementu drgań mierzona w temperaturze  $20^\circ\text{C}$  osiąga maksimum dla czasów  $t = 1/3$  sek. Wskazuje to na występowanie w badanym tworzywie czasów opóźnienia rzędu  $10^{-1}$  sek,

b) ze wzrostem temperatury wartość dekrementu drgań rośnie, osiągając maksimum dla temperatury ok.  $50^\circ\text{C}$ , dalszy wzrost temperatury powoduje ponowny spadek dekrementu drgań. Taki charakter zmian tłumienia wskazuje, że w temperaturze w ok.  $50^\circ\text{C}$  występuje przejście tworzywa ze strefy stanu kruchego do strefy stanu wysokiej elastyczności,

c) moduł sprężystości maleje wraz ze wzrostem temperatury, przy czym urojona składowa część zespolonego modułu sprężystości osiąga maksimum w temperaturze ok.  $30^\circ\text{C}$ .

Z badań metodą rezonansu wynika, że wraz ze wzrostem temperatury wartość częstości rezonansowej maleje, natomiast wartości amplitud drgań rezonansowych wykazują minimum w temperaturze  $20 \div 30^\circ\text{C}$  (rys. 11). Zmienia się również kształt krzywych rezonansu. Na rys. 12 zestawiono otrzymane wartości różnicy częstotliwości  $\nu_2 - \nu_1$ , przy których

wartość amplitudy osiąga 1/2 wartości amplitudy rezonansowej, dla różnych temperatur pomiaru. Jak wynika z tego rysunku, najbardziej «płaskie» krzywe rezonansowe występują w temperaturze ok. 40°C. Charakter tych zmian uwidacznia się na wykresach  $E'$  i  $E''$  oraz  $\operatorname{tg} \delta$  (rys. 13 i 14). Wartość składowej rzeczywistej zespolonego modułu sprężystości maleje szybko ze wzrostem temperatury, natomiast składowa urojona zespolonego modułu sprężystości osiąga maksimum dla temperatury ok. 30°C (rys. 13). Również tangens kąta stratności osiąga maksimum w temperaturze ok. 50°C (rys. 14).

Ponieważ  $\operatorname{tg} \delta = \lambda/\pi$ , gdzie  $\lambda$  — logarytmiczny dekrement drgań, zatem otrzymana na rys. 14 zależność  $\operatorname{tg} \delta$  od temperatury jest równocześnie obrazem zmian z temperaturą logarytmicznego dekrementu drgań. Porównując tę zależność z rys. 4, na którym przedstawiono analogiczną zależność otrzymaną dla drgań swobodnych, przy częstościach o jeden rząd niższych niż zastosowanych w metodzie rezonansowej, wynika, że wzrost częstości drgań o jeden rząd wartości nie powoduje jeszcze żadnej wyraźnej zmiany wartości temperatury  $T_g$  — rozgraniczającej strefy stanu kruchego i stanu wysokiej elastyczności badanego tworzywa.

Również wartości logarytmicznego dekrementu drgań dla poszczególnych temperatur, wyznaczone w obu doświadczeniach, nie wykazują wyraźnej różnicy. Zwrócić natomiast należy uwagę, że obie krzywe (na rys. 4 i na rys. 14) różnią się kształtem w okolicy strefy przejścia (temp. 50°C). Dla drgań swobodnych (niskie częstości) temperatura przejścia zaznacza się wyraźnym wzrostem tłumienia, natomiast dla drgań rezonansowych zmiana tłumienia z temperaturą w tej strefie przebiega znacznie łagodniej. Można by z tego wyciągnąć wniosek, że dla wyższych częstości przejście tworzywa ze stanu kruchego w stan wysokiej elastyczności odbywa się w sposób ciągły w szerszym zakresie temperatur, niż to ma miejsce dla niskich częstości.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. ALBRECHT i in., *Poliamidy*, WNT, 1964.
2. T. Jr. ALFREY, *Mechanical behaviour of high polymers*, New York-London 1948.
3. W. BOGUSZ, J. GIERGIEL, *Wpływ rodzaju zamocowania na drgania układu o jednym stopniu swobody*, Mat. Ogólnopolskiego Sympozjum Drgań Nieliniowych, Poznań 1965.
4. В. В. ХИЛЬЧЕВСКИЙ, И. М. ШЕМЕГАН, *Влияние пластмассового покрытия на затухание свободных колебаний стержней*, Вестник машиностроения, № 9, 1965.
5. Р. ХОВИНК, А. СТАВЕРСМАН, *Химия и технология полимеров*, Москва 1965.
6. J. D. FERRY, *Viscoelastic properties of polymers*, New York 1961.
7. П. И. ГАЛКА, А. А. БОУНДАРЕНКОВ, *Про диссипативны властивости пластмасс*, АН СССР, Прикладная Механика, т. 7, вып. 4.
8. A. J. KIMBALL, D. E. LOVELL, *Internal friction in solids*, Physical Review, 1927.
9. S. MAZURKIEWICZ, A. PIĄTKOWSKI, *Możliwości zastosowania poliamidów jako surowca do wyrobów połączeń śrubowych*, Czas. Techn., Nr 12 (1965).
10. Z. OSIŃSKI, *Próba nieliniowego przedstawienia zjawisk tarcia wewnętrznego i relaksacji*, PW, Warszawa 1961.
11. И. Г. ПАНОВКО, *Внутреннее трение при колебании упругих систем*, Москва 1960.
12. A. PETRYKOWSKI, *Elementy maszyn z poliamidów*, Przegląd Mechaniczny, 15 (1959).
13. C. ZENER, *Elasticity and anelasticity of metals*, Chicago 1948.

## Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИАМИДА  
ТАРЛОН X-A

В статье представлены результаты исследования механических свойств полиамида Тарлон X-A отечественного производства. Испытания велись по методу свободных и резонансных колебаний. Составлены графики иллюстрирующие изменение модуля упругости и декремента колебаний этого материала в зависимости от изменения температуры, а также график зависимости декремента колебаний от частоты при температуре 20°C. Анализ результатов испытаний проводился на основе четырехпараметровой реологической модели Бюргерса.

## Summary

## DYNAMIC INVESTIGATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF POLYAMIDE TARLON X-A

Mechanical properties of polyamide Tarlon X-A (produced in Poland) are investigated applying the methods of free and resonance vibrations. The plots included in the paper present the modulus of elasticity and the decrement of vibrations versus temperature as well as the same decrement versus frequency for the constant temperature 20°C. The results obtained are interpreted on the basis of the rheological Burgers model with four parameters.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1968 r.*

---





## STAN SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY I PEŁZANIE GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ

HENRYK KOPECKI (RZESZÓW)

### 1. Wstęp

Reologiczne zagadnienia geometrycznie nieliniowych powłok (przy założeniach upraszczających: obrotowej symetrii i braku stanu giętnego) było przedmiotem rozważań autora w pracy [11]. W pracy tej została uogólniona na zakres powłok obrotowo-symetrycznych w stanie błonowym podana przez BYCHAWSKIEGO [1] metoda rozwiązania problemu złożonej deformacji sprężysto-plastycznej i pełzania płaskiej membrany kołowej. Jednym z rozwiązań szczegółowych podanych przez autora w pracy [11] było analityczne rozwiązanie problemu deformacji sprężysto-plastycznych oraz pełzania powłoki stożkowej o małej wyniosłości, przy czym proces pełzania opisywało równanie konstytutywne odpowiadające prawu pełzania metali ODQVISTA [12].

Obecna praca stanowi rozszerzenie wyżej wspomnianego zagadnienia geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej dla przypadku, gdy materiał powłoki podlega pełzaniu zgodnie z równaniem konstytutywnym nieliniowej teorii dziedziczenia podanej w pracach [4, 5].

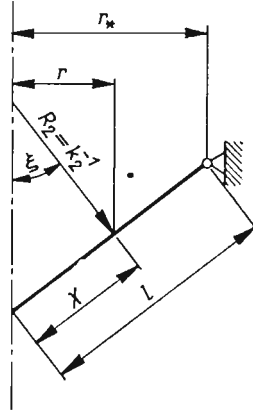
### 2. Podstawowe zależności geometryczne, związki fizykalne oraz warunki równowagi

**Zależności geometryczne.** Rozważamy cienką powłokę w kształcie stożka obrotowo-symetrycznego, obciążoną wewnętrznym ciśnieniem zmiennym w czasie. Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych krzywoliniowych związanych z liniami krzywizn (rys. 1) oraz zależności geometryczne odpowiadające teorii geometrycznie nieliniowej przy następujących założeniach: odkształcenia są nieskończenie małe; składowa pomieszczenia prostopadła do powierzchni środkowej powłoki ma wartość skończoną rzędu grubości powłoki; obowiązujące jest założenie Kirchhoffa-Love'a; grubość powłoki nie ulega zmianie w procesie deformacji.

Związki geometryczne między składowymi tensora odkształcenia a składowymi przemieszczeń przy spełnieniu powyższych założeń wyrażają się zależnościami

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{u}{r} \cos \xi + k_2 w, \end{aligned}$$

gdzie  $u$  jest przemieszczeniem południkowym,  $w$  oznacza ugięcie, zaś  $k_2$  krzywiznę, którą w dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali jako funkcję czasu. Jest to uzasadnione tym, że w stanach błonowych płyt i powłok wykonanych z materiału o własnościach reologicznych naprężenia wykazują zmienność w czasie. Zatem, aby spełnione było równanie



Rys. 1

równowagi (suma rzutów sił na kierunek normalnej do elementu powłoki) w dowolnej chwili czasu  $t$ , krzywiznę  $k_2$  traktujemy jako funkcję czasu przyjmując, że zmienia się ona zgodnie z formułą

$$(2.2) \quad k_2 = k_2^0 \psi(t),$$

gdzie  $k_2^0$  oznacza krzywiznę  $k_2$  w chwili  $t = 0$ , zaś  $\psi(t)$  jest funkcją zależną tylko czasu spełniającą warunek początkowy

$$(2.3) \quad \psi(t) \Big|_{t=0} = 1.$$

**Związki fizyczne.** Ogólna forma prawa fizycznego jakie przyjmujemy dla materiału powłoki opiera się na teorii nieliniowej lepkosprężystości podanej w pracach [4, 5]. Teoria ta obejmuje szeroką klasę materiałów, zarówno metale, jak i niemetale. Podaje ona prawo konstytutywne w postaci nieliniowego operatora całkowego, który uzyskany został na bazie zasady superpozycji odkształceń w czasie uogólnionej na zakres nieliniowy. Podstawowe założenia teorii są następujące: materiał jest izotropowy, jednorodny i nieściśliwy; pełzanie materiału charakteryzuje uogólniona funkcja pełzania; proces nieliniowego pełzania zachodzi wtedy, gdy intensywność naprężenia osiąga w małym obszarze ciała wartość krytyczną; deformacja natychmiastowa w ogólnym przypadku jest nieliniowa.

W oparciu o powyższe założenia uogólniona zasada superpozycji ujęta została w formę całki Stieltjesa. Całka ta istnieje przy założeniu ograniczonej wariacji składowych stanu naprężenia, a przy spełnieniu warunku całkowalności pochodnych tych składowych przechodzi w całkę Riemanna. W wyniku tego związek między składowymi tensora odkształcenia  $\epsilon_{ij}$  i składowymi dewiatora naprężenia  $s_{ij}$  przedstawia się w postaci

$$(2.4) \quad \epsilon_{ij} = L[s_{ij}],$$

gdzie

$$(2.5) \quad L[s_{ij}] = F_e[s(t)]s_{ij} - \int_{t^*}^t s_{ij}(\tau) \frac{d}{d\tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] d\tau.$$

W równaniu (2.5) oznaczają:  $F_e$  — nieliniową funkcję deformacji natychmiastowej;  $\bar{H}$  — uogólnioną funkcję pełzania;  $s$  — intensywność naprężenia;  $t$  — czas (chwila obserwacji);  $\tau$  — czas bieżący;  $t^*$  — chwilę początkową.

W myśl omawianej teorii jedną z możliwych form przedstawienia uogólnionej funkcji pełzania jest postać wynikająca ze związku

$$(2.6) \quad \frac{d}{d\tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] = F_c[s(\tau)] \frac{d}{d\tau} \bar{C}(t-\tau),$$

gdzie  $\bar{C}(t-\tau)$  jest współczynnikiem pełzania, zaś  $F_c[s]$  współczynnikiem zwiększającym.

W szczególnym przypadku, gdy współczynnik  $\bar{C}(t-\tau)$  jest liniową funkcją czasu, wówczas

$$(2.7) \quad \frac{d}{d\tau} \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] = -F_c[s(\tau)],$$

zaś na podstawie (2.5) otrzymujemy

$$(2.8) \quad L[s_{ij}] = F_e[s(t)]s_{ij}(t) + \int_0^t s_{ij}(\tau) F_c[s(\tau)] d\tau,$$

(przyjmujemy, że chwila początkowa  $t^* = 0$ ). Powyższe równanie (2.8) jest analogiczne do prawa podanego przez ODQVISTA [12] dla stanu nieustalonego pełzania metali.

W niniejszej pracy będziemy opierali się na zależności (2.5) przy założeniu, że uogólniona funkcja pełzania spełnia związek (2.6), czyli

$$(2.9) \quad L[s_{ij}] = F_e[s(t)]s_{ij}(t) - \int_0^t s_{ij}(\tau) F_c[s(\tau)] \frac{d}{d\tau} \bar{C}(t-\tau) d\tau.$$

Funkcje  $F_e$  i  $F_c$  uzależnione od aktualnego stanu naprężenia przyjmujemy w postaci dwuparametrowych związków potęgowych

$$(2.10) \quad F_e[s] = \frac{3}{2} A s^{m-1}, \quad F_c[s] = \frac{3}{2} B s^{n-1},$$

gdzie  $A, B$  oznaczają stałe fizyczne materiału, zaś  $m, n$  są liczbami naturalnymi charakteryzującymi stopień nieliniowości związków.

Związki dla odkształceń (2.1) po wyeliminowaniu przemieszczenia  $u$  możemy sprowadzić do jednego równania, otrzymując w ten sposób warunek nierozdzielności odkształceń, który po uwzględnieniu równania konstytutywnego (2.9) oraz po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych przyjmuje postać

$$(2.11) \quad \bar{x} \frac{d}{d\bar{x}} \{L[s_2]\} + \{L[s_2] - L[s_1]\} - \frac{h}{l} \left\{ \operatorname{tg} \xi \frac{d}{d\bar{x}} [\psi(t)\bar{w}] + \frac{1}{2} \frac{h}{l} \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right)^2 \right\} = 0.$$

Tutaj przez  $h$  oznaczono grubość powłoki, zaś

$$(2.12) \quad \bar{x} = x/l, \quad \bar{w} = w/h, \quad s_1 = s_{11}, \quad s_2 = s_{22}.$$

**Warunki równowagi.** W celu określenia warunków równowagi podanych w formie związków różniczkowych rozpatrzmy stan równowagi elementu powłoki odkształconej. Rzutując siły działające na element powłoki na kierunek stycznej do południka  $x$  oraz normalnej do odkształconego elementu powłoki otrzymujemy układ dwóch równań, który po wprowadzeniu funkcji naprężeń  $z$  w postaci

$$(2.13) \quad z = \frac{\bar{x}\sigma_1}{C}, \quad \text{gdzie} \quad C = \frac{p}{4} \left( \frac{r_*}{h} \right)^2,$$

sprowadza się do równania różniczkowego

$$(2.14) \quad z \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{dz}{d\bar{x}} \left\{ \frac{l}{h} \operatorname{tg} \xi \psi(t) - \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \operatorname{tg}^2 \xi [\psi(t)]^2 \frac{\bar{w}}{\bar{x}} \right\} = \frac{p}{C} \left( \frac{l}{h} \right)^2 \bar{x}.$$

Równanie równowagi (2.14) oraz równanie nierozdzielności odkształceń (2.11) stanowią wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi układ równań opisujący problem złożonej deformacji sprężysto-plastycznej i pełzania geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej.

### 3. Metoda rozwiązania

Metoda rozwiązania problemu deformacji złożonej (stan sprężysto-plastyczny i pełzanie) dla zagadnień obrotowo-symetrycznych, nie wprowadzających osobliwości z tytułu kształtu powłoki, została omówiona w pracy [11] oraz szczegółowo zilustrowana w zastosowaniu do płaskiej membrany kołowej oraz powłoki kulistej w stanie błonowym w pracach [7, 11]. Metoda ta polega na przyjęciu funkcji rozwiązujących  $z$  i  $\bar{w}$  w postaci podwójnych szeregów potęgowych zmiennej  $\bar{x}$  oraz małego parametru  $\alpha^{(1)}$  ujmującego wpływ pełzania w procesie odkształcenia. Rozwiązanie to możemy traktować jako małe zaburzenie stanu natychmiastowego (sprężysto-plastycznego) spowodowane procesem pełzania. Rozwiązaniem podstawowym w tej metodzie jest zatem rozwiązanie dla stanu natychmiastowego.

W przypadku powłoki stożkowej, ze względu na osobliwość w punkcie  $x = 0$ , rozwinięcie względem  $\bar{x}$  nie pozwala na określenie współczynników szeregów potęgowych, dając w wyniku zerowe wartości wszystkich współczynników. W tym przypadku możemy przedstawić rozwiązanie w formie szeregów potęgowych o postaci<sup>(2)</sup>

$$(3.1) \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_{ik} \bar{y}^i \alpha^k, \quad \bar{w} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} w_{ik} \bar{y}^{i+1} \alpha^k,$$

gdzie  $\bar{y} = 1 - \bar{x}$ .

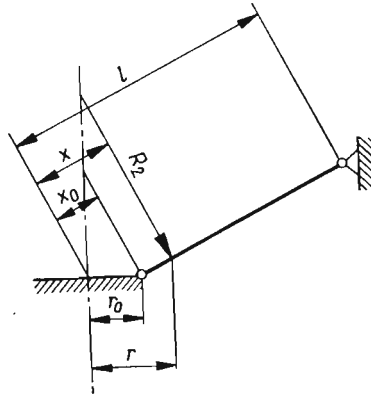
<sup>(1)</sup> Parametr  $\alpha$  wyraża się przez stałe materiałowe (por. [6, 7, 11]).

<sup>(2)</sup> Rozwinięcie względem  $\bar{y} = 1 - \bar{x}$  odpowiada przedstawieniu rozwiązania holomorficznego w otoczeniu punktu położonego na brzegu rozważanego obszaru. Tego rodzaju rozwinięcie zostało zastosowane przez Bychawskiego i Siennickiego [8] do zagadnienia deformacji natychmiastowej i pełzania tarczy kołowej.

Zakładając  $\alpha = 0$  otrzymujemy z powyższych związków pojedyncze szeregi potęgowe, będące rozwiązaniem dla stanu natychmiastowego

$$(3.2) \quad z_0 = \sum_{v=0}^{\infty} z_{v0} \bar{y}^v, \quad \bar{w}_0 = \sum_{v=0}^{\infty} w_{v0} \bar{y}^{v+1},$$

które jest rozwiązaniem podstawowym dla zagadnienia deformacji złożonej. Rozwiązanie to przedstawimy poniżej szczegółowo, przy czym ograniczymy się do powłoki o kształcie mało wyniosłego stożka ściętego. Przyjmujemy, że powłoka jest sztywno zamocowana obustronnie i poddana działaniu stałego ciśnienia wewnętrznego (rys. 2). Zakładamy dalej,



Rys. 2

że materiał powłoki zachowuje się w procesie deformacji zgodnie z równaniem konstytutywnym (2.9).

Układ równań podstawowych dla rozważanej powłoki otrzymamy ze związków (2.11) i (2.14) kładąc w nich

$$(3.3) \quad x \approx r, \quad x_0 \approx r_0, \quad \operatorname{tg} \xi \approx \xi \approx \operatorname{const}$$

oraz uwzględniając, że  $0 \leq \bar{y} \leq 1 - \bar{r}_0$ , gdzie  $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{l}$ . Otrzymujemy w ten sposób

$$(3.4) \quad (\bar{y}-1) \frac{d}{d\bar{y}} \{L[s_2]\} + \{L[s_2] - L[s_1]\} + \frac{h}{l} \xi \left[ \psi(t) \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \right)^2 = 0,$$

$$(3.5) \quad \frac{h}{l} (\bar{y}-1) \bar{z} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{y}^2} + \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}] \left[ \xi \psi(t) + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}}{d\bar{y}} \right] = \frac{l}{h} (1-\bar{y}).$$

W powyższych wzorach oznaczają:

$$\bar{z} = \frac{\sigma_1}{p}, \quad \bar{z} + (\bar{y}-1) \bar{z}' = \frac{\sigma_2}{p}, \quad \bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}},$$

$$(3.6) \quad s_1 = \frac{1}{3} p [\bar{z} + (\bar{y}-1) \bar{z}'], \quad s_2 = \frac{1}{3} p [\bar{z} + 2(\bar{y}-1) \bar{z}'],$$

$$s^2 = p^2 \bar{\Omega}, \quad \bar{\Omega} = \bar{z}^2 + (\bar{y}-1) \bar{z} \bar{z}' + (\bar{y}^2 - 2\bar{y} + 1) \bar{z}'^2.$$

Przyjmujemy jednorodne warunki brzegowe

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=0} &= 0, & \bar{w}(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=0} &= 0, \\ u(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} &= 0, & \bar{w}(\bar{y})\Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} &= 0, \end{aligned}$$

a za stan początkowy dla procesu pełzania przyjmujemy stan natychmiastowy, co zapisujemy formułami

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{z}(t)\Big|_{t=0} &= \bar{z}_0, & \bar{\Omega}(t)\Big|_{t=0} &= \bar{\Omega}_0, & \bar{w}(t)\Big|_{t=0} &= \bar{w}_0, \\ L[s]\Big|_{t=0} &= L_0[s_0], & s(t)\Big|_{t=0} &= s_0. \end{aligned}$$

Uwzględniając zależności (3.8) układ równań podstawowych opisujących stan natychmiastowy możemy ostatecznie przedstawić w postaci

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} A p^m (\bar{y}-1) \left\{ [6\bar{z}'_0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}''_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_0 + \right. \\ \left. + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-3)} \bar{\Omega}'_0 \right\} + \frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} \right)^2 = 0,$$

$$(3.10) \quad \frac{h}{l} (\bar{y}-1) \frac{d}{d\bar{y}} \left( \bar{z}_0 \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} \right) + \bar{z}_0 \left( \xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} \right) + \xi (\bar{y}-1) \bar{z}'_0 = \frac{l}{h} (1-\bar{y}).$$

#### 4. Rozwiązanie dla stanu natychmiastowego

Jak wykazaliśmy w przyjętej metodzie rozwiązania problemu złożonej deformacji, rozwiązanie dla stanu natychmiastowego jest rozwiązaniem podstawowym. W dalszych rozważaniach wykazemy, że rozwiązanie to jest również rozwiązaniem podstawowym w procesie odkształcenia, w którym efekty sprężyste uwzględniane są w chwili  $t = 0$ , zaś dla czasów  $t > 0$  pominięte, jako małe w porównaniu z odkształceniami pełzania.

Rozwiązanie dla stanu natychmiastowego polega na podstawieniu szeregów (3.2) do równań (3.9) i (3.10). Otrzymujemy w ten sposób dwa układy równań algebraicznych w postaci rekurencyjnej, z których wyznaczamy kolejne współczynniki szeregów. I tak, z równania nierozdzielności odkształceń (3.9) otrzymujemy warunek, który musi być spełniony dla dowolnego  $\bar{y}$

$$(4.1) \quad \frac{1}{2} A p^m \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} m_v \bar{y}^{v+1} - \sum_{v=0}^{\infty} m_v \bar{y}^v + \frac{1}{2} (m-1) \left[ \sum_{v=0}^{\infty} p_v \bar{y}^{v+1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{v=0}^{\infty} p_v \bar{y}^v \right] \right\} + \sum_{v=0}^{\infty} \left[ \frac{h}{l} \xi (v+1) w_{v0} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 q_v \right] \bar{y}^v = 0.$$

Drogą tożsamościowego przyrównania wyrażeń przy jednakowych potęgach  $\bar{y}$  dochodzi-  
my do układu równań algebraicznych w postaci

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} Ap^m \left\{ -m_0 - \frac{1}{2} (m-1)p_0 \right\} + \xi \frac{h}{l} w_{00} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 q_0 = 0, \\ & \frac{1}{2} Ap^m \left\{ m_0 - m_1 + \frac{1}{2} (m-1)(p_0 - p_1) \right\} + 2\xi \frac{h}{l} w_{10} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 q_1 = 0, \\ & \frac{1}{2} Ap^m \left\{ m_1 - m_2 + \frac{1}{2} (m-1)(p_1 - p_2) \right\} + 3\xi \frac{h}{l} w_{20} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 q_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Równanie równowagi (3.10) w wyniku podstawienia szeregów (3.2) daje warunek

$$(4.3) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \frac{h}{l} [v\bar{A}_v - (v+1)\bar{A}_{v+1}] + \xi z_{v0} + \frac{h}{l} \bar{A}_v + \xi v z_{v0} - \xi (v+1) z_{v+1,0} \right\} \bar{y}^v = \frac{l}{h} (1 - \bar{y}),$$

z którego otrzymujemy układ równań

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & -\frac{h}{l} \bar{A}_1 + \xi z_{00} + \frac{h}{l} \bar{A}_0 - \xi_0 z_{10} = \frac{l}{h}, \\ & 2\frac{h}{l} (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) + 2\xi(z_{10} - z_{20}) = -\frac{l}{h}, \\ & \frac{h}{l} (\bar{A}_2 - \bar{A}_3) + \xi(z_{20} - z_{30}) = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Występujące w powyższych równaniach współczynniki obliczamy z zależności:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} q_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)(k-v+1)w_{v0}w_{k-v,0}, & m_k &= \sum_{v=0}^k l_v h_{k-v}, \\ & \dots + 1)z_{k+1,0} + 2k(k+1)z_{k+1,0} - 2(k+1)(k+2)z_{k+2,0}, & h_0 &= g_0^{1/2(m-1)}, \\ h_k &= \frac{1}{kg_0} \sum_{v=1}^k \left[ \frac{1}{2}(m+v) - k \right] g_v h_{k-v}, & g_k &= a_k + b_k - c_k + d_k - 2e_k + f_k, \\ a_k &= \sum_{v=0}^k z_{v0}z_{k-v,0}, & b_k &= \sum_{v=0}^k v z_{v0}z_{k-v,0}, & c_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)z_{v+1,0}z_{k-v,0}, \\ d_k &= \sum_{v=0}^k v(k-v)z_{v+1}z_{k-v,0}, & e_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)(k-v)z_{v+1}z_{k-v,0}, \\ f_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)(k-v+1)z_{v+1,0}z_{k-v+1,0}, & p_k &= \sum_{v=0}^k n_v K_{k-v}, \\ n_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)g_{v+1}j_{k-v}, & j_0 &= g_0^{1/2(m-3)}, & j_k &= \frac{1}{kg_0} \sum_{v=1}^k \left[ \frac{1}{2}(m-1) - k \right] g_v j_{k-v}, \\ \bar{A}_k &= \sum_{v=0}^k (v+1)w_{v0}z_{k-v,0}, & Q_k &= \sum_{v=0}^k K_v, & K_k &= z_{k0} + 2kz_{k0} - 2(k+1)z_{k+1,0}. \end{aligned}$$

Pierwsze z równań (4.2) pozwala na wyznaczenie współczynnika  $z_{20}$  jako funkcji  $z_{00}$  i  $z_{10}$ . Współczynnik  $z_{10}$  wyznaczmy z pierwszego z warunków brzegowych (3.7), który na mocy związków geometrycznych (2.1) możemy przedstawić w postaci równania

$$(4.6) \quad \varepsilon_{20} = \left|_{\bar{y}=0} L_0[s_{20}] \right|_{\bar{y}=0} = [z_0 + 2(\bar{y}-1)z'_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} \Big|_{\bar{y}=0} = 0,$$

skąd po podstawieniu pierwszego z szeregów potęgowych (3.2) otrzymujemy

$$(4.7) \quad z_{10} = \frac{z_{00}}{2}.$$

Z równań (4.2) otrzymujemy kolejno

$$(4.8) \quad z_{20} = \frac{3}{4} z_{00} - \frac{\frac{h}{l} w_{00} \left( \xi + \frac{1}{2} \frac{h}{l} w_{00} \right)}{2Ap^m \left( \frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)} z_{00}^{m-1}},$$

$$(4.8) \quad z_{30} = \frac{1}{16} (3m-7)z_{00} - \frac{1}{24} (5m-41)z_{20} - \frac{\frac{h}{l} w_{10} \left( \xi + \frac{h}{l} w_{00} \right)}{3Ap^m \left( \frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)} z_{00}^{m-1}},$$

.....

zaś z równań (4.4) mamy

$$(4.9) \quad w_{10} = \frac{1}{4} \left( \xi \frac{l}{h} + w_{00} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{z_{00}},$$

$$(4.9) \quad w_{20} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{z_{20}}{z_{00}} \right) \left( w_{00} + \xi \frac{l}{h} \right) + w_{10} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{2z_{00}} \right],$$

$$(4.9) \quad w_{30} = \frac{1}{4z_{00}} \left[ (z_{20} - z_{30}) \left( \xi \frac{l}{h} + w_{00} \right) + 2w_{10} \left( \frac{1}{2} z_{00} - z_{20} \right) + \frac{3}{2} w_{20} z_{00} \right],$$

.....

Mając określone współczynniki szeregów (3.2) jako funkcje  $z_{00}$  i  $\bar{w}_{00}$  przejdziemy obecnie do określenia tych ostatnich, wykorzystując drugi z warunków brzegowych (3.7), który możemy przedstawić w formie równania

$$(4.10) \quad \varepsilon_{20} \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = L_0[s_{20}] \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = [z_0 + 2(\bar{y}-1)z'_0] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = 0,$$

skąd po podstawieniu szeregów (3.2) mamy

$$(4.11) \quad \sum_{v=0}^{\infty} Q_v \bar{y}^v \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = 0.$$

Z drugiej strony, funkcja ugięcia  $\bar{w}_0$  spełniać musi warunek

$$(4.12) \quad \bar{w}_0 \Big|_{\bar{y}=1-\bar{r}_0} = w_{00}(1-\bar{r}_0) + w_{10}(1-\bar{r}_0)^2 + w_{20}(1-\bar{r}_0)^3 + \dots = 0.$$

Jeżeli z kolei do równań (4.11) i (4.12) podstawimy związki (4.7), (4.8), (4.9), otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych zawierający poszukiwane niewiadome  $z_{00}$  i  $\bar{w}_{00}$ .



Stopień tych równań uzależniony jest od ilości wyrazów rozwinięcia uwzględnionych w powyższych warunkach. Na przykład, jeżeli ograniczymy się do uwzględniania dwóch wyrazów rozwinięcia w warunkach (4.11) i (4.12) otrzymamy odpowiednio

$$(4.13) \quad az_{00}^{m+2} + bz_{00}^2 + cz_{00} + d = 0,$$

$$(4.14) \quad w_{00} = 4 \frac{l}{h} \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \left( \frac{1}{2} \frac{l}{h} \frac{1}{z_{00}} - \frac{1}{4} \xi \right),$$

gdzie

$$a = \frac{2}{3} + \frac{9}{16}(1-\bar{r}_0)(m-1) - \frac{3}{4} \left[ 4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13) \right],$$

$$b = \xi^2 \frac{\left[ 4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13) \right] (1-\bar{r}_0)}{2Ap^m \left( \frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)} (5-\bar{r}_0)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \right),$$

$$(4.15) \quad c = 2\xi \frac{l}{h} \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \left( 1 - \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \right) \frac{4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13)}{2Ap^m \left( \frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)}},$$

$$d = 2 \left( \frac{l}{h} \right)^2 \left( \frac{1-\bar{r}_0}{5-\bar{r}_0} \right)^2 \frac{4 + \frac{1}{2}(1-\bar{r}_0)(3m-13)}{2Ap^m \left( \frac{3}{4} \right)^{1/2(m-1)}},$$

.....

Zatem szeregi

$$(4.16) \quad \bar{z} = z_{00} + z_{10}\bar{y} + z_{20}\bar{y}^2 + z_{30}\bar{y}^3 + \dots,$$

$$(4.17) \quad \bar{w}_0 = w_{00}\bar{y} + w_{10}\bar{y}^2 + w_{20}\bar{y}^3 + \dots,$$

stanowią rozwiązanie podstawowe dla problemu złożonej deformacji rozważanej powłoki sztywno zamocowanej na brzegach, obciążonej stałym wewnętrznym ciśnieniem.

Mając określone funkcje  $\bar{z}_0$  i  $\bar{w}_0$  obliczamy naprężenia oraz ugięcie powłoki z zależności

$$(4.18) \quad \sigma_{10} = p \sum_{v=0}^{\infty} z_{v0} \bar{y}^v,$$

$$(4.19) \quad \sigma_{20} = p \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) (z_{v0} - z_{v+1,0}) \bar{y}^v,$$

$$(4.20) \quad w_0 = h \sum_{v=0}^{\infty} w_{v0} \bar{y}^{v+1}.$$

## 5. Rozwiązanie w zakresie czystego pełzania

Podamy obecnie rozwiązanie dla powłoki stożkowej wykonanej z materiału wykazującego wyłącznie odkształcenia pełzania. Przyjmujemy, że pełzanie materiału powłoki opisuje równanie konstytutywne (2.9), w którym funkcję nieliniowej sprężystości  $F_e$  położymy równą zeru.

Układ równań podstawowych opisujących tego rodzaju stan w powłoce otrzymamy z równań (3.4) i (3.5) zakładając, że

$$(5.1) \quad L[s_{ij}]|_{F_e=0} = L_p[s_{ij}].$$

Mamy wtedy układ równań

$$(5.2) \quad (\bar{y}-1) \frac{d}{d\bar{y}} \{L_p[s_2]\} + \{L_p[s_2] - L_p[s_1]\} + \frac{h}{l} \xi \left[ \psi \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right)^2 = 0,$$

$$(5.3) \quad \frac{h}{l} (\bar{y}-1) \bar{z}_p \frac{d^2 \bar{w}_p}{d\bar{y}^2} + \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p] \left[ \xi \psi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right] = \frac{l}{h} (1-\bar{y}),$$

gdzie

$$(5.4) \quad \bar{z}_p(t) = z(t)|_{F_e=0}, \quad \bar{w}_p(t) = \bar{w}(t)|_{F_e=0}.$$

Niżej przedstawiona metoda rozwiązania opiera się na analogii fizykalno-geometrycznej do problemu natychmiastowego (nieliniowo sprężystego) podanej w pracach [3, 7, 11]. Istota rozwiązania polega na rozdzieleniu zmiennych w równaniach podstawowych (5.2) i (5.3). Aby tego dokonać należy różniczkowo-całkowe równanie nierozdzielności odkształceń (5.2) sprowadzić do równania różniczkowego. Możemy to uczynić, jeżeli współczynnikowi pełzania  $\bar{C}(t-\tau)$  nadamy konkretny kształt. Przyjmujemy tutaj, że współczynnik pełzania ma postać wykładniczą

$$(5.5) \quad \bar{C}(t-\tau) = \bar{C}_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}];$$

stąd po zróżniczkowaniu względem czasu bieżącego otrzymamy

$$(5.6) \quad \frac{d\bar{C}}{d\tau} = -\gamma \bar{C}_0 e^{-\gamma(t-\tau)}.$$

Jeżeli zależność (5.6) podstawimy do równania konstytutywnego (2.9) zakładając równocześnie, że  $F_e = 0$  otrzymamy po rozpisaniu na składowe

$$(5.7) \quad L_p[s_1] = \frac{1}{2} B \bar{C}_0 \gamma p^n \int_0^t [\bar{z}_p + (\bar{y}-1) \bar{z}'_p] \Omega_p^{1/2(n-1)} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau,$$

$$L_p[s_2] = \frac{1}{2} L \bar{C}_0 \gamma p^n \int_0^t [\bar{z}_p + 2(\bar{y}-1) \bar{z}'_p] \Omega_p^{1/2(n-1)} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau.$$

Otrzymane operatory podstawiamy do równania nierozdzielności odkształceń (5.2), a następnie na drodze różniczkowania względem  $t$  i eliminacji całek dochodzimy do równania różniczkowego w postaci

$$(5.8) \quad \frac{1}{2} B\bar{C}_0 \gamma p^n (\bar{y}-1) \left\{ [6\bar{z}'_p + 2(\bar{y}-1)\bar{z}''_p] \bar{\Omega}_p^{1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_p + 2(\bar{y}-1)\bar{z}''_p] \bar{\Omega}_p^{1/2(m-3)} \bar{\Omega}'_p \right\} = \gamma \frac{h}{l} \xi \left[ \psi \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right] + \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} \right)^2 - \frac{h}{l} \xi \left[ \dot{\psi} \frac{d\bar{w}_p}{d\bar{y}} + \psi \frac{d\dot{\bar{w}}_p}{d\bar{y}} \right].$$

Przyjmujemy rozwiązanie dla funkcji naprężeń i ugięcia w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których jedna uzależniona jest tylko od zmiennej  $\bar{y}$ , druga zaś wyłącznie od czasu  $t$

$$(5.9) \quad \bar{z}_p(\bar{y}, t) = \bar{z}_p^0(\bar{y}) \varphi(t),$$

$$(5.10) \quad \bar{w}_p(\bar{y}, t) = \bar{w}_p^0(\bar{y}) \psi(t).$$

Podstawiając zależności (5.9) i (5.10) do równań podstawowych (5.8) i (5.3) otrzymujemy odpowiednio

$$(5.11) \quad \frac{\frac{1}{2} B\bar{C}_0 p^n (\bar{y}-1)}{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right)^2} \left\{ [6\bar{z}_p^{0'} + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0''}] \bar{\Omega}_p^{0\ 1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_p^0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0'}] \bar{\Omega}_p^{0\ 1/2(m-3)} \bar{\Omega}_p^{0\prime} \right\} = \frac{-1}{\gamma \varphi^n} (-\psi^2 \gamma + 2\dot{\psi} \psi) = \lambda,$$

$$(5.12) \quad \left( \frac{h}{l} \right)^2 \bar{z}_p^0 \frac{d^2 \bar{w}_p^0}{d\bar{y}^2} + \frac{h}{l} \frac{1}{\bar{y}-1} \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p^0] \left[ \xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right] = \frac{1}{\psi \varphi} = \lambda_1,$$

gdzie  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  oznaczają stałe, które należy określić.

Zależność (5.12) przedstawia układ dwóch równań o postaci

$$(5.13) \quad \left( \frac{h}{l} \right)^2 \bar{z}_p^0 \frac{d^2 \bar{w}_p^0}{d\bar{y}^2} + \frac{h}{l} \frac{1}{\bar{y}-1} \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p^0] \left[ \xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right] = \lambda_1,$$

$$(5.14) \quad \frac{1}{\psi \varphi} = \lambda_1.$$

Równanie (5.13) jest formalnie analogiczne do równania równowagi (3.10) dla stanu natiemistowego, przy czym

$$(5.15) \quad \lambda_1 = 1.$$

Podstawiając (5.15) kolejno do równań (5.13) i (5.14) otrzymujemy odpowiednio

$$(5.16) \quad \left( \frac{h}{l} \right)^2 \bar{z}_p^0 \frac{d^2 \bar{w}_p^0}{d\bar{y}^2} + \frac{h}{l} \frac{1}{\bar{y}-1} \frac{d}{d\bar{y}} [(\bar{y}-1) \bar{z}_p^0] \left[ \xi + \frac{h}{l} \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} \right] = 1,$$

$$(5.17) \quad \psi = \frac{1}{\varphi}.$$

Jeżeli zależność (5.17) uwzględnimy w związku (5.11) otrzymamy również układ dwóch równań

$$(5.18) \quad \frac{1}{2} \overline{BC}_0 p^n \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{y}-1}{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}}\right)^2} \left\{ [6\bar{z}_p^{0'} + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0''}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (n-1) [\bar{z}_p^0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0'}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-3)} \bar{\Omega}_p^{0'} \right\} = 1,$$

$$(5.19) \quad 2 \frac{\dot{\varphi}}{\gamma \varphi} + \lambda \varphi^{n+2} = 1,$$

z których pierwsze jest formalnie analogiczne do równania nierozdzielności odkształceń dla stanu natychmiastowego (3.9). Jeżeli więc znamy rozwiązanie równania (3.9)

$$(5.20) \quad \bar{z}_0 = f(A, m, \bar{y}),$$

to rozwiązanie równania (5.18) możemy przedstawić w postaci

$$(5.21) \quad \bar{z}_p^0 = f\left(\frac{B}{\lambda}, n, \bar{y}\right).$$

Całkując równanie (5.19) otrzymujemy

$$(5.22) \quad \varphi = \left[ \sqrt[n+2]{\lambda - (\lambda \varphi_0^{n+2} - 1) e^{-\frac{n+2}{2} \gamma t}} \right]^{-1},$$

gdzie stałą  $\varphi_0 = \varphi(t)|_{t=0}$  wyznaczmy z warunku początkowego. Z równania (5.22) otrzymujemy  $\varphi_0 = 1$ .

Zatem funkcja  $\varphi(t)$  przyjmuje ostatecznie postać

$$(5.23) \quad \varphi(t) = [\lambda - (\lambda - 1) e^{-\frac{n+2}{2} \gamma (t-t_0)}]^{-\frac{1}{n+2}}.$$

W celu określenia stałej  $\lambda$  uczynimy założenie, że stan początkowy procesu pełzania określony jest przez stan natychmiastowy; w rozważanym przypadku jest nim reakcja sprężysto-plastyczna. Zatem dla  $t = 0$

$$(5.24) \quad \bar{z}_p = \bar{z}_p^0 = \bar{z}_0 \quad \text{oraz} \quad \bar{w}_p = \bar{w}_p^0 = \bar{w}_0.$$

Rozwiązanie dla takiego stanu zostało przedstawione w punkcie 4.

Dla czasów większych od zera pomijamy wpływ sprężystych własności materiału powłoki. Rozwiązanie w tym przypadku musi spełniać równocześnie równania (3.9) i (5.18). Porównując równania (3.9) i (5.18) w założeniu, że spełniona jest zależność (5.24) otrzymujemy następujący warunek dla  $\lambda$ , który musi być spełniony dla dowolnego  $\bar{y}$  w przedziale  $\bar{r}_0 \leq \bar{y} \leq 1$ .

$$(5.25) \quad \lambda = \frac{\overline{BC}_0}{A} p^{n-m} \frac{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_0}{d\bar{y}}\right)^2}{\frac{h}{l} \xi \frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(\frac{d\bar{w}_p^0}{d\bar{y}}\right)^2} \times \\ \times \frac{[6\bar{z}_p^{0'} + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0''}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-1)} + \frac{1}{2} (n-1) [\bar{z}_p^0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_p^{0'}] \bar{\Omega}_p^{0'1/2(n-3)} \bar{\Omega}_p^{0'}}{[6\bar{z}_0' + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_0''] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-1)} + \frac{1}{2} (m-1) [\bar{z}_0 + 2(\bar{y}-1)\bar{z}_0'] \bar{\Omega}_0^{1/2(m-3)} \bar{\Omega}_0'}$$

W szczególnym przypadku, gdy  $m = n$ , to znaczy, gdy nieliniowość sprężystą i nieliniowość pełzania określa identyczny wykładnik potęgowy, warunek (5.25) przyjmuje postać

$$(5.26) \quad \lambda = \frac{B\bar{C}_0}{A} = \frac{\bar{B}}{A}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{B} = B\bar{C}_0.$$

Ostatecznie funkcję naprężeń  $z_p$  możemy przedstawić w postaci

$$(5.27) \quad \bar{z}_p = \bar{z}_0(\bar{y}) \left[ \sqrt[n+2]{\lambda - (\lambda - 1)e^{-\frac{n+2}{2}\gamma t}} \right]^{-1}.$$

W granicy, gdy czas zmierza do nieskończoności, z zależności (5.27) otrzymujemy

$$(5.28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}_p = \frac{\bar{z}_0(\bar{y})}{\sqrt[n+2]{\lambda}}.$$

Funkcję ugięcia określamy z zależności (5.10). Przyjmuje ona ostatecznie postać

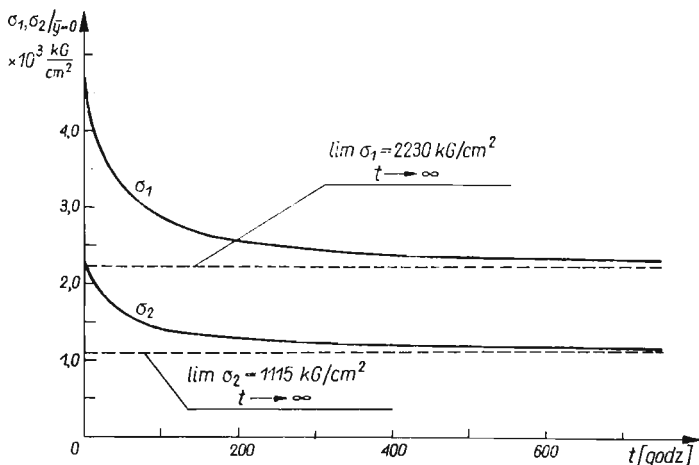
$$(5.29) \quad \bar{w}_p(\bar{y}, t) = \bar{w}_0(\bar{y}) \sqrt[n+2]{\lambda - (\lambda - 1)e^{-\gamma \frac{n+2}{2} t}}.$$

Podobnie jak w przypadku naprężeń również ugięcie ulega stabilizacji po czasie nieskończenie długim

$$(5.30) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{w}_p(\bar{y}, t) = \frac{1}{\lambda^{n+2}} \bar{w}_0(\bar{y}).$$

Stabilizację naprężeń i ugięć po czasie nieskończenie długim uzasadnia przyjęta postać współczynnika pełzania w równaniu konstytutywnym.

**Przykład liczbowy.** Rozważmy przykład liczbowy ilustrujący rozkład naprężeń w powłoce w chwili przyłożenia obciążenia oraz zmianę naprężeń i ugięć w czasie.



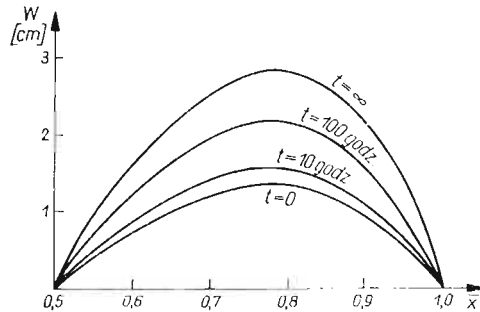
Rys. 3

Przyjmujemy następujące wartości liczbowe: stałe ciśnienie  $p = 20 \text{ kG/cm}^2$ , grubość powłoki  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $l = 100 \text{ cm}$ ,  $\xi = 10^\circ$ , wykładniki nieliniowości  $m = n = 3$ ,  $\bar{r}_0 = 0,5$ , stałe fizyczne nieliniowego prawa fizycznego (2.10) identyfikujemy w oparciu o dane

z [9] i [10]:  $A = 0,4 \cdot 10^{-12} [\text{cm}^2/\text{kG}]^3$ ,  $B = 1,6 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{cm}^2}{\text{kG}} \right]^3$ ;  $\gamma = 0,0012 \text{ godz.}^{-1}$ . Ograniczając się do dwóch wyrazów rozwinięcia warunków (4.11) i (4.12) oraz uwzględniając trzy wyrazy szeregów (4.16) i (4.17) otrzymujemy odpowiednio dla funkcji naprężeń i ugięcia następujące wyrażenia:

$$\bar{z}_0 = 232,5 + 116,25\bar{y} - 178\bar{y}^2,$$

$$\bar{w}_0 = 7,69\bar{y} - 8,22\bar{y}^2 - 14,32\bar{y}^3.$$



Rys. 4

W oparciu o (5.22) wyznaczamy funkcję czasu

$$(t) = [40 - 39e^{-0,003t}]^{-1/5}.$$

Wyniki obliczeń przedstawiamy wykreślnie. Zmianę naprężeń w czasie w punktach  $\bar{y} = 0$  powłoki ilustruje rys. 3; rys. 4 przedstawia rozkład ugięć powłoki dla różnych wartości czasu  $t$ .

## 6. Wnioski

W pracy podano układ równań podstawowych opisujących problem geometrycznie nieliniowej powłoki stożkowej w stanie błonowym, obciążonej wewnętrznym ciśnieniem.

Przyjęte równanie konstytutywne obejmuje szeroką klasę materiałów zarówno metali, jak i niemetalii określonych formą współczynnika zwiększającego oraz współczynnika pełzania. Z postaci równania wynikają przypadki szczególne: nieliniowa i liniowa deformacja natychmiastowa; prawo pełzania metali Odqvista; związki Boltzmanna dla liniowej lepkosprężystości.

Przedstawiono podstawowe rozwiązanie dla stanu natychmiastowego dla procesu deformacji złożonej mało wyniosłej powłoki o kształcie stożka ściętego sztywno zamocowanej obustronnie, ograniczając się do przedstawienia rozwiązania jakościowego. Algebraiczna postać uzyskanych współczynników szeregów potęgowych daje możliwość łatwego zaprogramowania i wykonywania obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej dla szeregu wartości liczbowych stałych materiałowych i parametrów geometrycznych powłoki.

Podano rozwiązanie dla pełzania, przedstawiając je za pomocą fizykalno-geometrycznej analogii do problemu natychmiastowego, podobnie jak to uczynił autor dla powłoki

stożkowej w pracy [11]. Stosowane jednak w pracy [11] prawo fizykalne ODQVISTA [12] opisuje w istocie stan pełzania ustalonego. Ze względu na zmianę naprężeń w czasie, stan taki w rozpatrywanej powłoce nie ma miejsca. Przyjmowanie — jak w obecnej pracy — nieliniowych teorii dziedziczenia w geometrycznie nieliniowych problemach pełzania membran, w świetle powyższego wydaje się szczególnie uzasadnione.

Z przedstawionego rozwiązania dla pełzania wynika, że naprężenia maleją, zaś ugięcia rosną w czasie. Po czasie nieskończenie długim następuje stabilizacja naprężeń i ugięć, co wynika z kształtu współczynnika pełzania, przy czym wartość naprężeń i ugięć po czasie nieskończenie długim uzależniona jest od stałych fizycznych materiału powłoki. Dla identycznego problemu przy zastosowaniu prawa ODQVISTA [12], uzyskiwano po nieskończeniu długim czasie [11] wzrost ugięć do nieskończoności przy równoczesnym spadku naprężeń do zera. Porównanie wyników otrzymanych w pracy [11] z obecnymi rezultatami pozwala wnioskować, że istnieje związek między prawem konstytutywnym opisującym fizyczne właściwości materiału powłoki a zakresem geometrycznej nieliniowości, jaki powinno się uwzględniać w podobnych problemach.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. BYCHAWSKI, *Large deflections of the elasto-creeping circular membrane*, Arch. Mech. Stos. 3, **17** (1965).
2. Z. BYCHAWSKI, *O stosowalności analogii sprężystej w zakresie nieliniowej geometrycznej teorii pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inż. 3, **13** (1965).
3. Z. BYCHAWSKI *Elastic analogue in the general case of a geometrically nonlinear membrane subject to creep*, Arch. Mech. Stos. 4, **17** (1965).
4. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Some fundamental concepts of the theory of nonlinear viscoelasticity*, Arch. Mech. Stos. 6, **18** (1966).
5. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Theory of nonlinear viscoelastic behavior*, Arch. Mech. Stos. 4, **19** (1967).
6. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Nieliniowe zagadnienia odkształceń sprężysto-plastycznych i pełzania membran kołowych*, Rozpr. Inż. 3, **15** (1967).
7. Z. BYCHAWSKI, H. KOPECKI, *Sprężysto-plastyczna deformacja i pełzanie geometrycznie nieliniowej powłoki kulistej*, Rozpr. Inż. 2, **15** (1967).
8. Z. BYCHAWSKI, H. SIENNICKI, *Zginanie tarczy kołowej w zakresie nieliniowej deformacji natychmiastowej i pełzania*, III Sympozjon poświęcony reologii, Wrocław 1966.
9. I. FINIE, W. R. HELLER, *Pełzanie materiałów konstrukcyjnych*, WNT, Warszawa 1966.
10. E. HOUDERMONT, *Handbuch der Sonderstahlkunde*, Springer, Berlin 1956.
11. H. KOPECKI, *Reologiczne zagadnienia nieliniowych deformacji powłok obrotowo-symetrycznych w stanie blonowym*, Rozprawa doktorska, Politech. Krakowska, 1967 (maszynopis).
12. F. K. G. ODQVIST, *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.
13. A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *Zagadnienia powłok niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos. 1, **1** (1963).
14. A. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.

#### Резюме

#### УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ И ПОЛЗУЧЕСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе рассматриваются напряжения и прогибы геометрически нелинейной конической оболочки, выполненной из материала обладающего свойством ползучести, в соответствии с нелинейной теорией наследственности, данной Быхавским и Фоксом.

Дана система уравнений описывающих рассматриваемую задачу. Обсужден метод решения задачи в случае, когда происходит сложное деформирование (мгновенная деформация и деформация зависящая от времени), а форма оболочки вводит особенность.

Дано основное решение (мгновенное состояние) для пологой конической оболочки, а также решение справедливое в режиме ползучести.

В заключение представлен ряд выводов.

### S u m m a r y

## ELASTO-PLASTIC STATE AND CREEP OF A GEOMETRICALLY NON-LINEAR CONOIDAL SHELL

The determination of stresses and displacements is considered for a geometrically non-linear conoidal shell subject to creep deformations. It is assumed that the material behaves according to the non-linear theory of inheritance — proposed by Bychawski and Fox [4, 5]. The corresponding set of equations is derived and the method of solution of the complex deformation problem (instantaneous deformation and time-dependent deformation) is discussed in the case of singularity in the shape of shell. The fundamental solution (instantaneous state) and the solution in the range of pure creep are presented for shallow conoidal shells. The final part of the paper includes some conclusions.

ZESPÓŁ MECHANIKI TECHNICZNEJ  
WSI W RZESZOWIE

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1968 r.*

---



UPROSZCZONA ANALIZA STATECZNOŚCI BOCZNEJ SZYBOWCA  
HOLOWANEGO NA LINIE

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

$b_1$	[m]	rozpiętość skrzydeł szybowca,
$C_n, C_t$		bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły normalnej i stycznej do liny, określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
$d$	[m]	średnica liny holowniczej,
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	przyspieszenie ziemskie,
$h_{z_1}$	[m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona pionowo względem środka ciężkości,
$J_x$	[kG/ms <sup>2</sup> ]	moment bezwładności szybowca względem osi podłużnej,
$J_z$	[kG/ms <sup>2</sup> ]	moment bezwładności szybowca względem osi pionowej,
$J_{xz}$	[kG/ms <sup>2</sup> ]	moment dewiacji szybowca,
$k_{z_1}$	[m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona poziomo względem środka ciężkości,
$m$	[kGs <sup>2</sup> /m]	masa szybowca,
$n$	[kGm]	siła aerodynamiczna normalna do liny działająca na 1 m długości,
$q$	[kGm]	ciężar jednostkowy metra bieżącego liny,
$Q_1$	[kG]	ciężar szybowca,
$S_1$	[m <sup>2</sup> ]	powierzchnia nośna skrzydeł szybowca,
$t$	[kGm]	siła aerodynamiczna styczna do liny działająca na 1 m długości,
$T$	[kG]	bieżący naciąg liny holowniczej,
$T_1$	[kG]	siła pochodząca od liny działająca na zaczepie holowniczym szybowca,
$V$	[m/s]	prędkość holowania,
$\varphi_1, \varphi_2$	[rad]	kąty nachylenia liny holowniczej w stosunku do linii lotu mierzone na zaczepach szybowca i samolotu,
$\lambda$	[1/kG]	współczynnik wydłużalności liny holowniczej,
$\rho$	[kGs <sup>2</sup> /m <sup>4</sup> ]	gęstość powietrza.

1. Wstęp

Przedstawiona praca stanowi kontynuację badania stateczności szybowców holowanych na linie; badania te są przedmiotem wcześniejszych prac autora [4, 5, 6].

Między innymi w pracy [4] rozpatrzono uproszczoną stateczność podłużną szybowca holowanego za samolotem o nieskończenie dużej masie, przy czym przy wyprowadzaniu

pochodnych linowych stateczności podłużnej niewłaściwie uwzględniono wpływ wydłużalności liny holowniczej. Wyprowadzone pochodne linowe są słuszne dla lin niewydłużalnych podłużnie, tzn. przy  $\lambda = 0$ . Ze względu na bardzo małe poprawki nie wpłynęło to jednak znacząco na wyniki liczbowe.

Praca [5] zawiera stateczność podłużną zespołu holowniczego, w którego skład wchodzi: samolot holujący, lina holownicza i szybowiec holowany. W pracy tej wyniki uzyskane dla zespołu porównano z wynikami otrzymanymi w pracy [4].

Praca [1] zawiera szereg publikacji BRYANTA, BROWNA i SWEETINGA dotyczących stateczności latawców i szybowców holowanych na linie. Brown rozpatrując pochodne linowe stateczności bocznej pominął całkowicie ciężar liny i siły aerodynamiczne działające na linę holowniczą.

NEUMARK w pracach [7, 8] rozpatrywał zagadnienia stateczności balonów na nierozciągliwej linie. Wyprowadził w [8] pochodne linowe i określił konfigurację liny nie uwzględniając pełnego obciążenia aerodynamicznego liny utrzymującej balon.

W niniejszej pracy rozpatrzono stateczność boczną szybowca holowanego na linie w ustalonym, prostoliniowym, poziomym locie. Szybowiec holowany znajdował się w płaszczyźnie pionowej zgodnej z kierunkiem lotu samolotu holującego. Linę holowniczą traktowano jako ciągnio idealnie wiotkie, podłużnie sprężyste, ciężkie, obciążone siłami aerodynamicznymi. Pominięcie momentów zginających wynikających ze sztywności poprzecznej liny (duży stosunek promienia krzywizny liny do jej średnicy) i tłumienia wewnętrznego (bardzo małe obciążenie liny w locie ustalonym, poziomym) jest dopuszczalne dla szybowcowych lin holowniczych. W pracy uwzględniono statyczne oddziaływanie liny holowniczej przy założeniu, że samolot holujący o nieskończonej masie znajdował się w ustalonym, prostoliniowym, poziomym locie. W pracy nie uwzględniono dynamicznego oddziaływania liny holowniczej, jak również zakłóceń, wynikających z odchyłeń od założonego ruchu samolotu holującego.

Do badania stateczności zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Pozwoliło to na określenie współczynników równania charakterystycznego i zastosowanie kryteriów stateczności Routha-Hurwitza [11, 12], jak również obliczenie pierwiastków równania charakterystycznego metodą Bairstowa [9].

Zagadnienie rozwiązano metodą przyjętą przy rozważaniu stateczności samolotów w locie swobodnym [2, 3, 13, 14]. Pozwoliło to na przeprowadzenie wzajemnej konfrontacji wyników odpowiadających lotowi swobodnemu i na holu, oraz na stosunkowo prostą analizę.

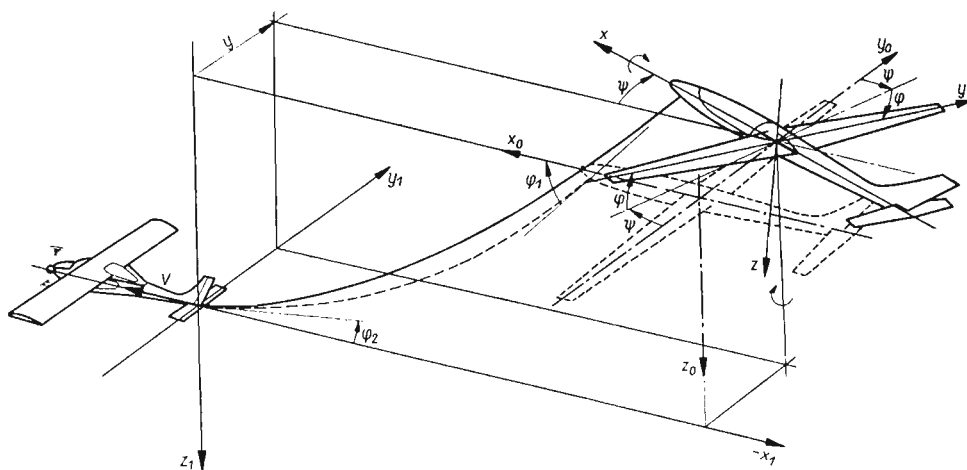
Na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER, dla produkowanego w kraju szybowca wyczynowego i obecnie stosowanego samolotu holującego dokonano analizy stateczności i wpływu na nią zmian parametrów konstrukcyjnych i holowania.

## 2. Różniczkowe równania ruchu

Równania ruchu szybowca w locie na holu wyprowadzono rozpatrując małe zakłócenia od ustalonego lotu poziomego, prostoliniowego. Pozwoliło to na linearyzację równań. Linearyzacja umożliwiła uzyskanie rozwiązania w prostej postaci, wygodniejszej do analizy

stateczności i porównanie z wynikami otrzymanymi dla szybowca w równoważnym locie swobodnym.

Założono, że przed zakłóceniem holowany szybowiec znajdował się w płaszczyźnie pionowej zgodnej z kierunkiem lotu samolotu holującego. Przy rozpatrywaniu stateczności bocznej małe zakłócenia stanowiły: liniowe przemieszczenie boczne  $y$ , zmiana kąta odchylenia  $\psi$  i zmiana kąta przechylenia  $\varphi$  (rys. 1).



Rys.1. Przyjęte układy współrzędnych i zależności geometryczne między nimi

Małe zakłócenia oznaczono na rys. 1:  $y$  — zmiana położenia środka ciężkości szybowca względem układu  $x_1, y_1, z_1$  związanego z samolotem holującym;  $\varphi$  — zmiana kąta przechylenia szybowca, obrót względem osi podłużnej  $x$  związanej z szybowcem;  $\psi$  — zmiana kąta odchylenia szybowca, obrót względem osi pionowej  $z$  związanej z szybowcem;  $v_1$  — zmiana składowej bocznej prędkości szybowca w kierunku osi  $y_1$  związanej z samolotem holującym;  $p$  — zmiana kątowej prędkości przechylenia szybowca;  $r$  — zmiana kątowej prędkości odchylenia szybowca.

Równania ruchów asymetrycznych szybowca holowanego względem układu osi  $x_1, y_1, z_1$  (rys. 1) związanych z samolotem holującym mają postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_1}{g} \dot{v}_1 &= Y_v v_1 + Y_y y + (Q_1 + Y_\varphi) \varphi + (Y_\psi - Y_v V) \psi, \\
 (2.1) \quad J_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} &= L_v v_1 + L_p p + L_r r + L_y y + L_\varphi \varphi + (L_\psi - L_v V) \psi, \\
 J_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} &= N_v v_1 + N_p p + N_r r + N_y y + N_\varphi \varphi + (N_\psi - N_v V) \psi, \\
 v_1 &= \dot{y}, \quad p = \dot{\varphi}, \quad r = \dot{\psi}.
 \end{aligned}$$

Pochodne aerodynamiczne  $Y_v, L_v, L_p, L_r, N_v, N_p,$  i  $N_r$  występujące w układzie równań (2.1) są wyprowadzone i omówione w pracy [3] i nie zajmowano się nimi w niniejszej pracy. W celu rozwiązania układu równań (2.1), wyprowadzono poniżej pochodne linowe stateczności bocznej szybowca  $Y_y, Y_\varphi, Y_\psi, L_y, L_\varphi, L_\psi, N_y, N_\varphi$  i  $N_\psi$ . Wyprowadzeniem tym jest poświęcony rozdział 4.

### 3. Współczynnik siły bocznej pochodzącej od liny holowniczej (pochodna linowa)

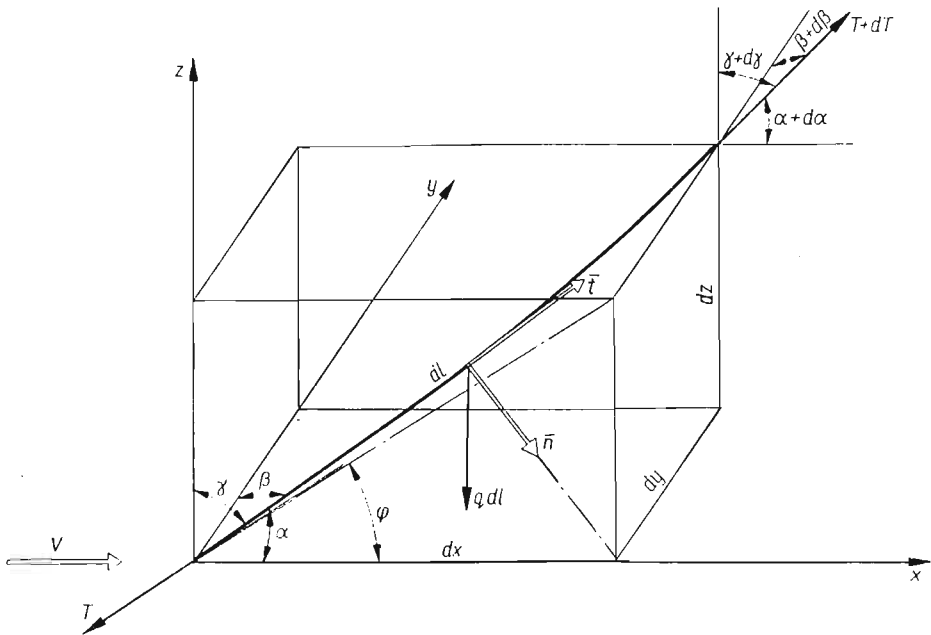
W celu określenia składowej bocznej siły działającej na zaczepie szybowca pochodzącej od liny holowniczej założono liniowy charakter zmiany siły w zależności od przemieszczenia końca liny.

Przez analogię do pochodnych aerodynamicznych, stosowanych przy rozpatrywaniu stateczności samolotów [2, 3, 13, 14], wprowadzono pochodną linową siły bocznej względem przemieszczenia bocznego zgodnie z [4, 5, 8], którą określono następująco:

$$Y_y^l = \frac{\partial Y_1}{\partial y}$$

W oparciu o prace [4, 6, 8] wyprowadzono poniżej zależność na pochodną linową  $Y_y^l$ .

Rozpatrzono przypadek holowania szybowca, gdy samolot holujący znajdował się w ustalonym, poziomym, prostoliniowym locie. Szybowiec, znajdujący się w z góry zadanym położeniu w płaszczyźnie pionowej zgodnej z linią lotu samolotu holującego, może doznawać małych przemieszczeń bocznych.



Rys.2. Zależności geometryczne i układ sił działających na element liny holowniczej

Rozpatrzono element liny holowniczej  $dl$  obciążony naciągiem liny  $T$  i  $T+dT$ , ciężarem własnym  $q dl$ , oraz siłami aerodynamicznymi: normalną  $\bar{n}$  i styczną  $\bar{t}$ . Element liny jest opływany powietrzem z prędkością  $V$  zgodną z kierunkiem osi  $x_1$  (rys. 2).

Składowe prędkości na kierunek normalny i styczny do liny otrzymano w postaci (rys. 2):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} V_n &= V \sin \alpha, \\ V_t &= V \cos \alpha. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu zależności wg [4, 6]:

$$n = \frac{1}{2} \rho dV^2 C_n,$$

$$t = \frac{1}{2} \rho dV^2 C_t,$$

gdzie  $C_n = 1,15$ ,  $C_t = 0,035$ , otrzymano zgodnie z [8] składową normalną i styczną siły aerodynamicznej działającej na element linii  $dl$ :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{n} &= n \sin^2 \alpha dl, \\ \bar{t} &= t \cos^2 \alpha dl, \end{aligned}$$

przy czym  $n$  jest siłą aerodynamiczną działającą na jednostkę długości linii umieszczonej prostopadle do przepływu,  $t$  jest siłą aerodynamiczną działającą na jednostkę długości linii umieszczonej równoległe do przepływu.

Równania równowagi elementu linii otrzymano rzutując siły działające na element linii  $dl$  (rys. 2) na kierunek osi  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ . Po przekształceniach otrzymano układ równań w postaci:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} dT \cos \alpha - T \sin \alpha d\alpha + n \sin^3 \alpha dl + t \cos^3 \alpha dl &= 0, \\ dT \cos \beta - T \sin \beta d\beta - n \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta dl + t \cos^2 \alpha \cos \beta dl &= 0, \\ dT \cos \gamma - T \sin \gamma d\gamma - n \sin \alpha \cos \alpha \cos \gamma dl + t \cos^2 \alpha \cos \gamma dl - q dl &= 0. \end{aligned}$$

Układ równań (3.3) pomnożono odpowiednio przez  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$ , dodano i po przekształceniu otrzymano:

$$(3.4) \quad dT = (q \cos \gamma - t \cos^2 \alpha) dl.$$

Po podstawieniu zależności (3.4) do dwóch pierwszych równań układu (3.3) uzyskano je w postaci:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (q \cos \gamma \cos \alpha + n \sin^3 \alpha) dl &= T \sin \alpha d\alpha, \\ (q \cos \gamma - n \sin \alpha \cos \alpha) \cos \beta dl &= T \sin \beta d\beta. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu z równań (3.5) naciągu linii  $T$ , wykorzystaniu związku zachodzącego między cosinusami kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (rys. 2)

$$\cos \gamma = \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

oraz przyjęciu, że przemieszczenia boczne  $y$  są bardzo małe, tzn.

$$\cos \gamma \approx \sin \alpha; \quad \alpha \approx \varphi; \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

otrzymano zgodnie z [8]:

$$(3.6) \quad \frac{d(\cos \beta)}{\cos \beta} = \frac{q - n \cos \varphi}{n \sin^2 \varphi + q \cos \varphi} d(\cos \varphi).$$

Po wprowadzeniu nowej stałej

$$(3.7) \quad \frac{q}{n} = 2 \operatorname{ctg} 2\psi,$$

równanie (3.6) scałkowano.

Stałą całkowania wyznaczono z warunków na zaczepie holowniczym szybowca; w wyniku otrzymano związek przedstawiający zmianę kąta  $\beta$  w zależności od kąta holu  $\varphi_1$  (rys. 2)

$$(3.8) \quad \cos \beta = \cos \beta_1 \sqrt{\frac{n\tau(\varphi_1)}{n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1}} \sqrt{\frac{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}{n\tau(\varphi)}},$$

gdzie zgodnie z pracami [4, 6, 8]

$$(3.9) \quad \tau(\varphi) = \left( \frac{\operatorname{ctg}\psi - \cos\varphi}{\operatorname{tg}\psi + \cos\varphi} \right)^{\cos 2\psi}.$$

Z zależności geometrycznych (rys. 2) wynika, że

$$(3.10) \quad dy = dl_1 \cos \beta,$$

gdzie

$$(3.11) \quad dl_1 = dl(1 + \lambda T),$$

$dl_1$  [4, 6] jest długością elementu liny obciążonego naciągiem  $T$ . Siłę  $T$  wyznaczono z równania naciągu liny, które na podstawie prac [4, 6] ma postać:

$$(3.12) \quad \frac{T e^{\eta(\varphi)}}{\tau(\varphi)} = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} = \text{const},$$

gdzie

$$(3.13) \quad \eta(\varphi) = \frac{C_t}{C_a} \cos 2\psi \left[ -\frac{2\varphi}{\sin 2\psi} + \frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\psi}} \operatorname{arctgh} \left( \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\psi}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\operatorname{ctg}^2\psi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\psi-1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\psi-1}{\operatorname{ctg}\psi+1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

przy czym

$$C_a = \frac{q}{\frac{1}{2} \rho d V^2}; \quad \tau_1 = \tau(\varphi_1); \quad \eta_1 = \eta(\varphi_1).$$

Podstawiając zależności (3.12), (3.11), (3.8) do (3.10) oraz zależność na  $dl$  przyjętą wg prac [4, 6]:

$$dl = \frac{T_1}{\tau_1} \frac{\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi} d\varphi,$$

otrzymano

$$(3.14) \quad dy = \frac{T_1 \cos \beta_1}{\sqrt{n\tau_1(n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1)}} \sqrt{\frac{n\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}} \left( 1 + \lambda T_1 \frac{\tau(\varphi)}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta} \right) d\varphi.$$

Po scałkowaniu (3.14) w granicach  $\varphi_2$  do  $\varphi_1$  [są to kąty wyznaczone na zaczepach holowniczych samolotu holującego i szybowca holowanego (rys. 1)], otrzymano

$$(3.15) \quad y = \frac{Y_1}{\sqrt{n\tau_1(n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1)}} (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \vartheta(\varphi_1); \quad \vartheta_2 = \vartheta(\varphi_2),$$

przy czym

$$(3.16) \quad \vartheta(\varphi) = \vartheta'(\varphi) + \vartheta''(\varphi),$$

$$(3.17) \quad \vartheta'(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{\frac{n\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}} d\varphi,$$

$$(3.18) \quad \vartheta''(\varphi) = \lambda \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \int_0^\varphi \tau(\varphi) e^{-\eta(\varphi)} \sqrt{\frac{n\tau(\varphi)}{n\sin^2\varphi + q\cos\varphi}} d\varphi.$$

Korzystając z (3.15) zgodnie z [8] określono pochodną linową siły bocznej  $Y_1$  względem bocznego przemieszczenia końca liny  $y$ :

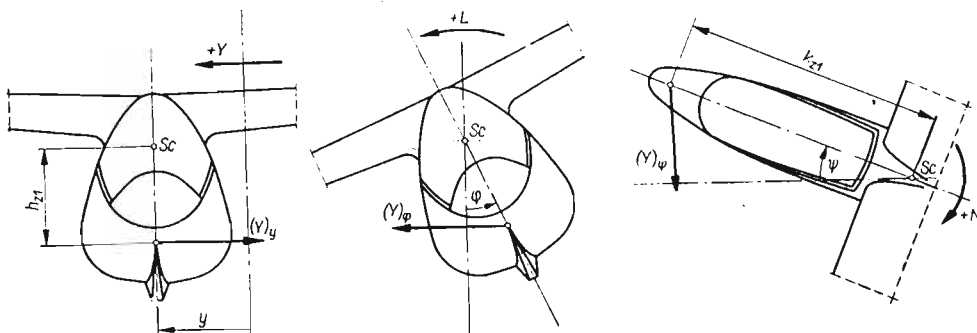
$$(3.19) \quad Y_y^l = \frac{Y_1}{y} = \frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta_2} \sqrt{n\tau_1(n\sin^2\varphi_1 + q\cos\varphi_1)}.$$

#### 4. Pochodne linowe stateczności bocznej szybowca holowanego

Pochodne linowe siły bocznej, momentów przechylających i odchylających względem przesunięcia poziomego  $y$ , kąta przechylenia  $\varphi$  i kąta odchylenia  $\psi$  szybowca, określono następująco:

$$(4.1) \quad Y_\varphi = \frac{\partial Y}{\partial \varphi}; \quad N_\psi = \frac{\partial N}{\partial \psi},$$

analogicznie oznaczono pozostałe pochodne linowe.



Rys.3. Zmiany siły bocznej wywołane przemieszczeniem bocznym, przechyleniem i odchyleniem szybowca

Zmianę siły bocznej działającej na zaczep holowniczy szybowca przedstawiono wprowadzając pochodne linowe (4.1)

$$(4.2) \quad dY = Y_y dy + Y_\varphi d\varphi + Y_\psi d\psi.$$

Korzystając z pochodnej linowej siły bocznej względem bocznego przemieszczenia końca liny (3.19) i zależności geometrycznych (rys. 3), określono zmianę siły bocznej:

$$(4.3) \quad dY = -Y_y^l dy + Y_y^l h_{z1} d\varphi - Y_y^l k_{z1} d\psi.$$

Przyrównując do siebie współczynniki przy  $dy$ ,  $d\varphi$  i  $d\psi$  w równaniach (4.3) oraz (4.2) otrzymano odpowiednie pochodne linowe siły bocznej dla szybowca:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} Y_y &= -Y'_y, \\ Y_\varphi &= Y'_y h_{z1}, \\ Y_\psi &= -Y'_y k_{z1}. \end{aligned}$$

Rozpatrując zmianę momentów przechylającego  $L$  i odchylającego  $N$  wywołanych zmianą siły bocznej  $Y$  i pionowej  $Z$ , otrzymano:

— pochodne linowe momentu przechylającego szybowca

$$(4.5) \quad \begin{aligned} L_y &= Y'_y h_{z1}, \\ L_\varphi &= -(Y'_y h_{z1} + Z_1) h_{z1}, \\ L_\psi &= Y'_y h_{z1} k_{z1}; \end{aligned}$$

— pochodne linowe momentu odchylającego szybowca

$$(4.6) \quad \begin{aligned} N_y &= -Y'_y k_{z1}, \\ N_\varphi &= Y'_y h_{z1} k_{z1}, \\ N_\psi &= -(Y'_y k_{z1} + X_1) k_{z1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.7) \quad Z_1 = X_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$

przy czym

$$(4.8) \quad X_1 = P_{x1} = \frac{1}{2} \rho S_1 V^2 C_{x1}$$

jest to opór aerodynamiczny szybowca holowanego.

Znając pochodne linowe (4.4), (4.5) i (4.6) można przystąpić do rozwiązania układu równań (2.1) i badania stateczności bocznej szybowca holowanego na linii.

### 5. Rozwiązanie różniczkowych równań ruchu i badanie stateczności

Układ równań (2.1) przekształcono do postaci bezwymiarowej, dzieląc równanie sił przez  $\rho S_1 V^2$ , równania momentów przez  $\rho S_1 V^2 b_1/2$  oraz wprowadzając następujące wyrażenia zgodnie z nazwami przyjętymi w lotnictwie [2, 3, 13, 14]:

$$\hat{t} = \frac{Q_1}{\rho S_1 V g} \quad \text{— czas aerodynamiczny,}$$

$$\mu_2 = \frac{2Q_1}{\rho S_1 g b_1} \quad \text{— względna gęstość szybowca.}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\hat{t}} \quad \text{— czas bezwymiarowy,}$$

$$j_x = \frac{2J_x g}{Q_1 b_1} \quad \text{— bezwymiarowy moment bezwładności względem osi podłużnej szybowca } x,$$

$$j_z = \frac{2J_z g}{Q_1 b_1} \quad \text{— bezwymiarowy moment bezwładności względem osi pionowej szybowca } z,$$



$$j_{xz} = \frac{2J_{xz}g}{Q_1 b_1} \quad \text{— bezwymiarowy moment dewiacji,}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{V} \quad \text{— bezwymiarowa prędkość liniowa,}$$

$$\bar{p} = p\hat{t}, \quad \bar{r} = r\hat{t} \quad \text{— bezwymiarowa prędkość kątowa przechylenia i odchylenia.}$$

Przyjęto również, że osie związane z szybowcem zostały dobrane tak, aby kierunek prędkości  $V$  przed zakłóceniem od stanu równowagi był zgodny z kierunkiem obranej osi  $x$ .

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń i przekształceniach otrzymano układ równań w postaci bezwymiarowej:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{v}_1}{dt} - y_v \bar{v}_1 - y_y \bar{y} - (y_\varphi + y_{\varphi 1}) \varphi - (y_\psi - y_v) \psi &= 0, \\ \frac{d\bar{p}}{dt} - \frac{j_{xz}}{j_x} \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{l}_v \bar{v}_1 + \bar{l}_p \bar{p} + \bar{l}_r \bar{r} + \bar{l}_y \bar{y} + \bar{l}_\varphi \varphi + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v) \psi &= 0, \\ \frac{d\bar{r}}{dt} - \frac{j_{xz}}{j_z} \frac{d\bar{p}}{dt} + \bar{n}_v \bar{v}_1 + \bar{n}_p \bar{p} + \bar{n}_r \bar{r} + \bar{n}_y \bar{y} + \bar{n}_\varphi \varphi + (\bar{n}_\psi - \bar{n}_v) \psi &= 0, \\ \bar{v}_1 = \frac{d\bar{y}}{dt}, \quad \bar{p} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \bar{r} = \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}$$

Przyjęty układ osi  $x, y, z$  związanych z szybowcem jest w locie poziomym odchylny od głównych centralnych osi bezwładności o bardzo mały kąt, co pozwala w układzie równań (5.1) pominąć człony  $j_{xz}/j_x \approx 0, j_{xz}/j_z = 0$ . Układ równań (5.1) po przekształceniach otrzymano w następującej formie:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{y}} - y_v \dot{\bar{y}} - y_y \bar{y} - (y_\varphi - y_{\varphi 1}) \varphi - (y_\psi - y_v) \psi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \bar{l}_p \dot{\varphi} + \bar{l}_r \dot{\psi} + \bar{l}_v \dot{\bar{y}} + \bar{l}_\varphi \varphi + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v) \psi + \bar{l}_y \bar{y} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \bar{n}_p \dot{\varphi} + \bar{n}_r \dot{\psi} + \bar{n}_v \dot{\bar{y}} + \bar{n}_\varphi \varphi + (\bar{n}_\psi - \bar{n}_v) \psi + \bar{n}_y \bar{y} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie bezwymiarowe pochodne linowe mają postać:

$$\begin{aligned} y_y &= \frac{Y_y b_1}{\rho V^2 S_1}, & y_{\varphi 1} &= \frac{Y_\varphi}{\rho V^2 S_1}, & y_\psi &= \frac{Y_\psi}{\rho V^2 S_1}, \\ l_y &= -\frac{\mu_2}{j_x} \frac{L_y}{\rho V^2 S_1}, & \bar{l}_\varphi &= -\frac{\mu_2}{j_x} \frac{2L_\varphi}{\rho V^2 S_1 b_1}, & \bar{l}_\psi &= -\frac{\mu_2}{j_x} \frac{2L_\psi}{\rho V^2 S_1 b_1}, \\ \bar{n}_y &= -\frac{\mu_2}{j_z} \frac{N_y}{\rho V^2 S_1}, & \bar{n}_\varphi &= -\frac{\mu_2}{j_z} \frac{2N_\varphi}{\rho V^2 S_1 b_1}, & \bar{n}_\psi &= -\frac{\mu_2}{j_z} \frac{2N_\psi}{\rho V^2 S_1 b_1}. \end{aligned}$$

Bezwymiarowe pochodne aerodynamiczne w postaci przekształconej są wyprowadzone i podane w pracy [3].

Rozwiązanie ogólne układu (5.2) równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami przewiduje się w postaci:

$$\bar{y} = y_0 e^{\lambda \bar{t}}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{\lambda \bar{t}}, \quad \psi = \psi_0 e^{\lambda \bar{t}}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności do układu równań (5.2), podzieleniu przez  $e^{\bar{\lambda}t}$  i uporządkowaniu względem  $y_0, \varphi_0, \psi_0$  otrzymano układ równań jednorodnych. Warunkiem rozwiązania tego układu jest, by wyznacznik ze współczynników przy  $y_0, \varphi_0, \psi_0$  był równy zeru. Po rozwinięciu wyznacznika i uporządkowaniu względem potęg  $\bar{\lambda}$  otrzymano następujące równanie charakterystyczne:

$$(5.3) \quad \bar{\lambda}^6 + B\bar{\lambda}^5 + C\bar{\lambda}^4 + D\bar{\lambda}^3 + E\bar{\lambda}^2 + F\bar{\lambda} + G = 0.$$

Współczynniki równania charakterystycznego (5.3) rozdzielono na części odpowiadające lotowi swobodnemu  $B_2, C_2, D_2, E_2$  wg [3] i części uwzględniające wpływ liny holowniczej  $C_2^I, D_2^I, E_2^I, F_2^I$  i  $G_2^I$ :

$$(5.4) \quad \begin{aligned} B &= B_2, \\ C &= C_2 + C_2^I, \\ D &= D_2 + D_2^I, \\ E &= E_2 + E_2^I, \\ F &= F_2^I, \\ G &= G_2^I. \end{aligned}$$

Współczynniki równania charakterystycznego w przypadku lotu swobodnego wg [3] mają postać:

$$\begin{aligned} B_2 &= \bar{l}_p + \bar{n}_r - y_v, \\ C_2 &= (\bar{n}_r - y_v)\bar{l}_p - (1 + y_v)\bar{n}_r - \bar{l}_r\bar{n}_p, \\ D_2 &= (\bar{n}_p + y_\varphi)\bar{l}_v + (\bar{l}_r\bar{n}_p - \bar{l}_p\bar{n}_r)y_v - \bar{l}_p\bar{n}_v, \\ E_2 &= (\bar{l}_v\bar{n}_r - \bar{l}_r\bar{n}_v)y_\varphi. \end{aligned}$$

Zmiany współczynników równania charakterystycznego wywołane linią holowniczą są następujące:

$$\begin{aligned} C_2^I &= \bar{l}_\varphi + \bar{n}_\psi - y_y, \\ D_2^I &= -(\bar{l}_p + \bar{n}_r)y_y - (\bar{n}_\psi + \bar{l}_\varphi)y_v + \bar{l}_\varphi\bar{n}_r - \bar{l}_r\bar{n}_\varphi + \bar{l}_p\bar{n}_\psi - \bar{l}_\psi\bar{n}_p + \bar{l}_v y_{\varphi l} + \bar{n}_v y_\psi, \\ E_2^I &= (\bar{n}_v - \bar{l}_\varphi - \bar{n}_\psi)y_y + y_\varphi\bar{l}_y + (\bar{n}_\psi - \bar{n}_v)\bar{l}_\varphi - \bar{l}_\psi\bar{n}_\psi + \bar{n}_\varphi\bar{l}_v + (y_\psi - y_v)\bar{n}_y + \\ &\quad + (\bar{n}_p\bar{l}_\psi - \bar{n}_r\bar{l}_\varphi)y_v + (\bar{n}_r y_{\varphi l} - \bar{n}_p y_\psi)\bar{l}_v + (\bar{n}_v y_\psi - \bar{n}_\psi y_v - \bar{n}_r y_y)\bar{l}_p + (\bar{n}_\varphi y_v - \bar{n}_v y_{\varphi l})\bar{l}_r, \\ F_2^I &= [(\bar{n}_v - \bar{n}_\psi)\bar{l}_p + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v)\bar{n}_p - \bar{l}_\varphi\bar{n}_r + \bar{l}_r\bar{n}_\varphi]y_y + \bar{l}_y y_{\varphi l} + (y_\varphi + y_{\varphi l})(\bar{l}_y\bar{n}_r - \bar{l}_\psi\bar{n}_v + \bar{l}_v\bar{n}_\psi) + \\ &\quad + y_\psi(\bar{l}_\varphi\bar{n}_v - \bar{l}_v\bar{n}_\varphi + \bar{l}_r\bar{n}_y - \bar{l}_y\bar{n}_p) + (\bar{l}_y\bar{n}_p - \bar{l}_p\bar{n}_y + \bar{l}_\varphi\bar{n}_v + \bar{l}_\psi\bar{n}_\varphi)y_v - \bar{l}_\varphi\bar{n}_\psi, \\ G_2^I &= [(\bar{n}_v - \bar{n}_\psi)\bar{l}_\varphi + (\bar{l}_\psi - \bar{l}_v)\bar{n}_\varphi]y_y + (\bar{l}_\varphi\bar{n}_y - \bar{l}_y\bar{n}_\varphi)y_\psi + (y_\varphi + y_{\varphi l})[(\bar{n}_\psi - \bar{n}_v)\bar{l}_y + \\ &\quad + (\bar{l}_v - \bar{l}_\psi)\bar{n}_y - \bar{l}_r\bar{n}_y] + [\bar{l}_y\bar{n}_\varphi - (\bar{n}_y + \bar{n}_v)\bar{l}_\varphi]y_v. \end{aligned}$$

W przypadku przejścia szybowca z lotu na holu do lotu swobodnego z utrzymanym sterem, zmiany współczynników równania charakterystycznego (5.3) wywołane holem znikają, tzn.  $C_2^I = D_2^I = E_2^I = F_2^I = G_2^I = 0$ .

Równanie (5.3) przechodzi w równanie charakterystyczne czwartego stopnia, otrzymane przy badaniu stateczności bocznej w locie swobodnym w pracach [2, 3, 13, 14]:

$$(5.5) \quad \bar{\lambda}^4 + B_2 \bar{\lambda}^3 + C_2 \bar{\lambda}^2 + D_2 \bar{\lambda} + E_2 = 0.$$

Przy położeniu zaczepu holowniczego w środku ciężkości szybowca holowanego, tzn. gdy  $h_{z1} = k_{z1} = 0$ , współczynnik  $G_2^I = 0$  i równanie (5.3) przechodzi w równanie charakterystyczne piątego stopnia:

$$(5.6) \quad \bar{\lambda}^5 + B \bar{\lambda}^4 + C \bar{\lambda}^3 + D \bar{\lambda}^2 + E \bar{\lambda} + F = 0.$$

Rozwiązanie równań charakterystycznych (5.3) i (5.5) przeprowadzono numerycznie metodą BAIRSTOWA [9]. Pozwoliło to na porównanie wyników stateczności bocznej w locie na holu z wynikami otrzymanymi dla równoważnego lotu swobodnego badanego szybowca. W wyniku rozwiązania równań (5.3) i (5.5) otrzymano pierwiastki w postaci

$$(5.7) \quad \bar{\lambda}_k = \bar{\xi}_k \pm i \bar{\eta}_k,$$

gdzie  $\bar{\xi}_k = \xi_k \hat{t}$  — bezwymiarowy współczynnik tłumienia,  $\bar{\eta}_k = \eta_k \hat{t}$  — bezwymiarowa częstość oscylacji.

Dla szybowca statecznego części rzeczywiste (współczynniki tłumienia) wszystkich pierwiastków muszą być ujemne,  $\bar{\xi}_k < 0$ , tzn. ruch jest tłumiony i szybowiec jest stateczny dynamicznie.

Znając współczynniki tłumienia  $\bar{\xi}_k$  i częstości oscylacji  $\bar{\eta}_k$  możemy określić okres wahań  $T$  i czas sfumienia amplitudy do połowy  $T_{1/2}$  lub czas podwojenia amplitudy  $T_2$

$$T = \frac{2\pi}{\bar{\eta}_k} \hat{t}; \quad T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\bar{\xi}_k} \hat{t}; \quad T_2 = \frac{\ln 2}{\bar{\xi}_k} \hat{t}.$$

Stosując kryteria stateczności Routha-Hurwitza, dotyczące małych zakłóceń ruchu ustalonego można przeprowadzić badania stateczności bez rozwiązania równań (5.3) i (5.5). Po przekształceniach otrzymano warunki stateczności dla równania charakterystycznego szóstego stopnia (5.3). Warunkiem jest, aby wszystkie współczynniki równania były dodatnie [11, 12]

$$(5.8) \quad B, C, D, E, F, G > 0,$$

jak również, by wyróżnik Routha był dodatni [1]

$$(5.9) \quad R = \Delta_0 \Delta_2 - \Delta_1^2 > 0.$$

W powyższym wzorze oznaczają:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ F & E & D \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ 0 & G & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ F & E & D \\ 0 & G & F \end{vmatrix}.$$

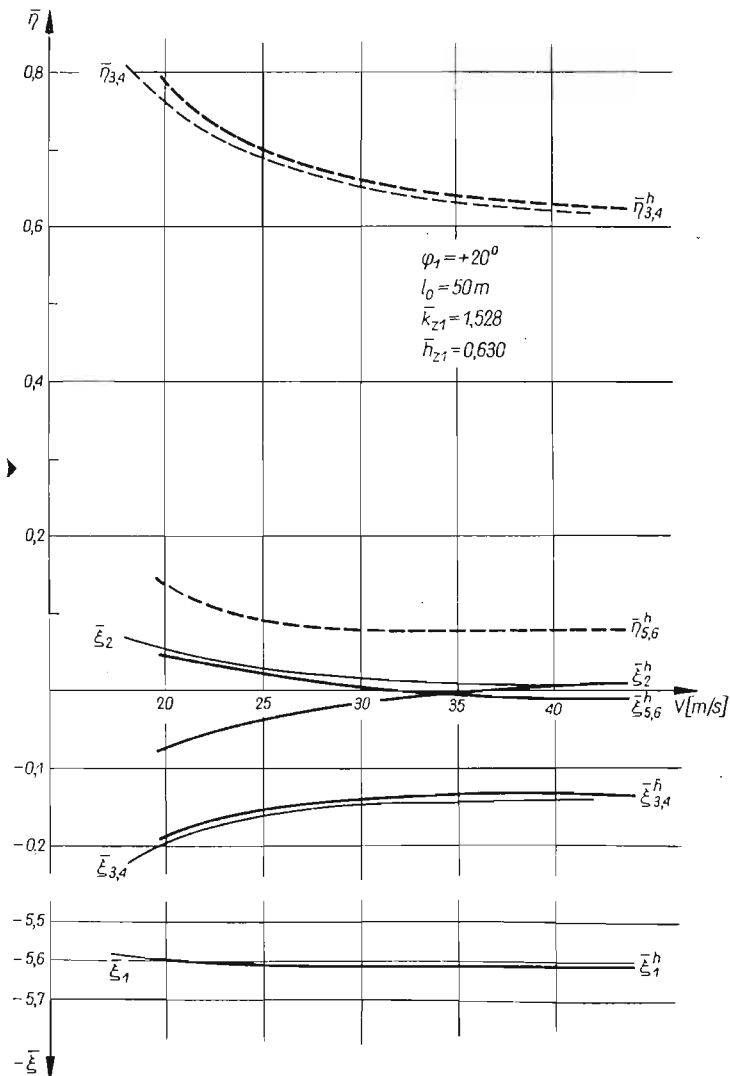
Właściwie tak sformułowane warunki (5.8) i (5.9) są przekształconymi kryteriami stateczności Lienarda i Chiparta wg [11, 12].

Stosując otrzymane powyżej związki i wzory wykonano przykładowo obliczenia numeryczne. Na ich podstawie dokonano analizy stateczności bocznej szybowca holowanego na linie.

## 6. Przykład liczbowy i wnioski

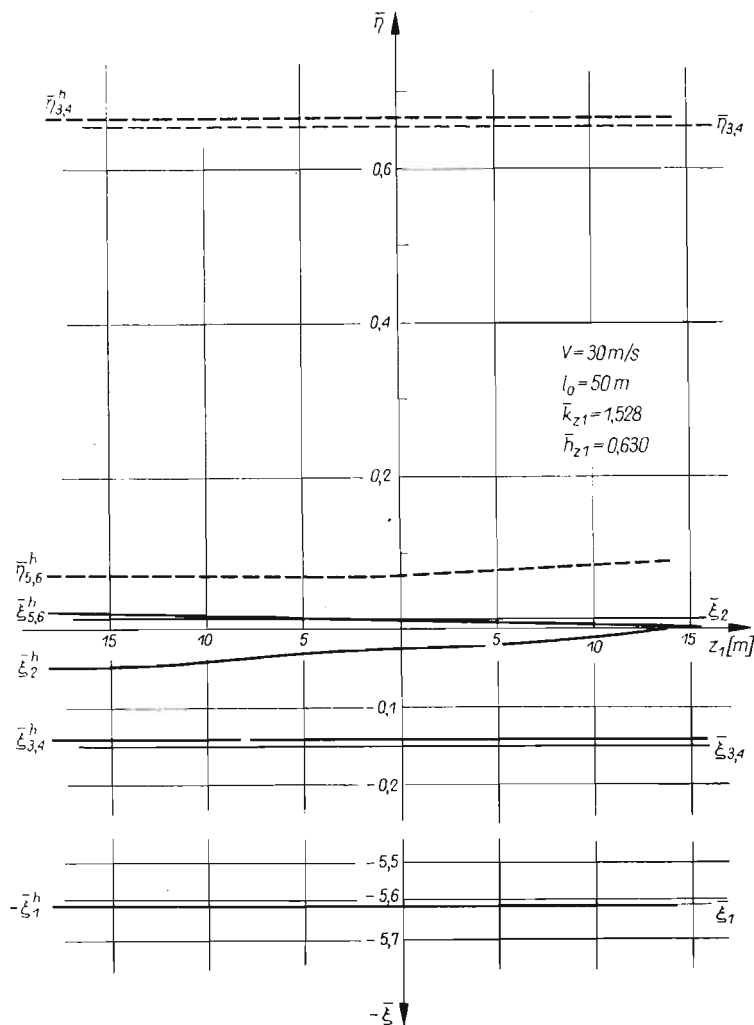
Przykładowe obliczenia numeryczne wykonano dla krajowego szybowca wyczynowego według danych projektu wstępnego.

W obliczeniach zmieniano kolejno parametry holowania: prędkość holowania, położenie szybowca względem samolotu holującego, usytuowanie zaczepu holowniczego szybowca względem jego środka ciężkości oraz długość liny holowniczej. Pozwoliło to znaleźć wpływ powyższych czynników na stateczność boczną szybowca holowanego. Jednocześnie przeprowadzono obliczenia stateczności bocznej w równoważnym locie swobodnym i porównano je z wynikami obliczeń dla szybowca holowanego.



Rys.4. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości holowania

Po numerycznym rozwiązaniu metodą Bairstowa równań charakterystycznych (5.3) i (5.5) otrzymano pierwiastki w postaci (5.7), sześć pierwiastków  $\bar{\lambda}^h$  z równania (5.3) i cztery pierwiastki  $\bar{\lambda}$  z równania (5.5). Pierwiastki  $\bar{\lambda}_k^h$  i  $\bar{\lambda}_k$  z jednakowym indeksem  $k$ , charakteryzują te same ruchy szybowca na holu i w locie swobodnym. Występują dwa pier-



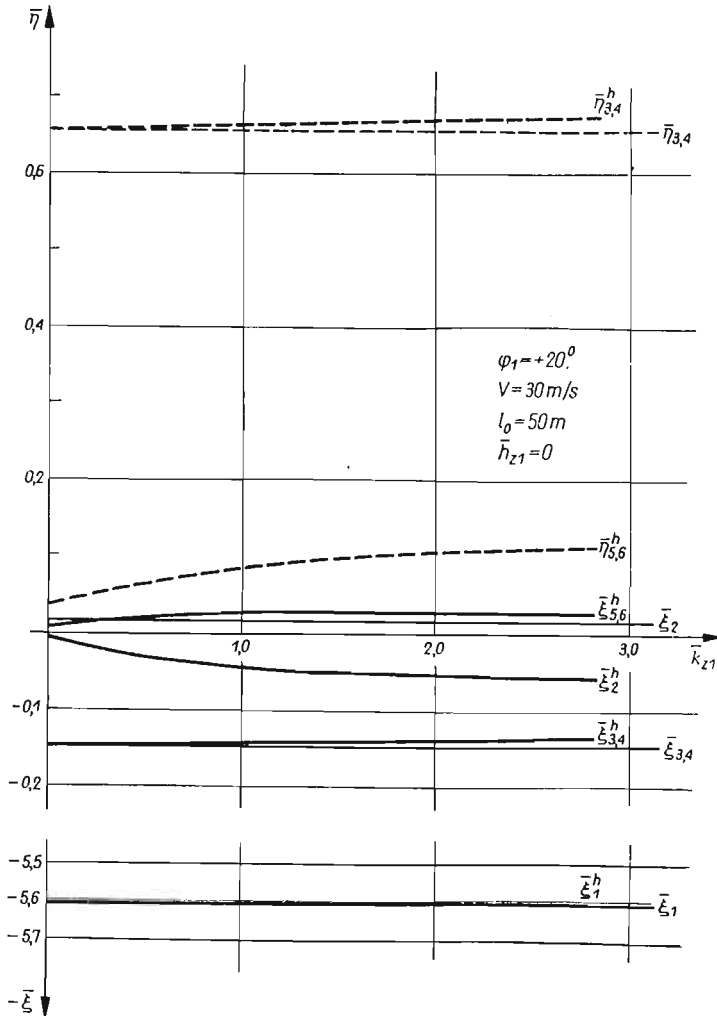
Rys.5. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego

wiastki rzeczywiste  $\bar{\lambda}_1^h = \bar{\xi}_1^h$  i  $\bar{\lambda}_2^h = \bar{\xi}_2^h$  ( $\bar{\lambda}_1 = \bar{\xi}_1$  i  $\bar{\lambda}_2 = \bar{\xi}_2$ ), odpowiadające ruchom aperiodycznym oraz dwie pary pierwiastków zespolonych sprzężonych  $\bar{\lambda}_{3,4}^h = \bar{\xi}_{3,4}^h \pm i\bar{\eta}_{3,4}$ ,  $\bar{\lambda}_{5,6}^h = \bar{\xi}_{5,6}^h \pm i\bar{\eta}_{5,6}$  ( $\bar{\lambda}_{3,4} = \bar{\xi}_{3,4} \pm i\bar{\eta}_{3,4}$ ), które odpowiadają ruchom okresowym szybowca.

Pierwiastki rzeczywiste  $\bar{\lambda}_1^h \approx \bar{\lambda}_1 < 0$  odpowiadają przechyleniu szybowca z prędkością kątową  $p$  wokół osi podłużnej  $x$ . W zakresie kątów natarcia poniżej krytycznego ruch ten jest ruchem aperiodycznym bardzo silnie tłumionym.

Ruch spiralny odpowiadający pierwiastkom  $\bar{\lambda}_2^h(\bar{\lambda}_2)$  jest złożonym ruchem bocznym opisanym i omówionym w pracy [3], polega na odchyłaniu szybowca z równoczesnym przechyleniem.

Para pierwiastków zespolonych sprzężonych  $\bar{\lambda}_{3,4}^h(\bar{\lambda}_{3,4})$  charakteryzuje ruch zwany holendrowaniem [2, 3]. Jest to ruch harmoniczny polegający na bocznych wahaniach szy-



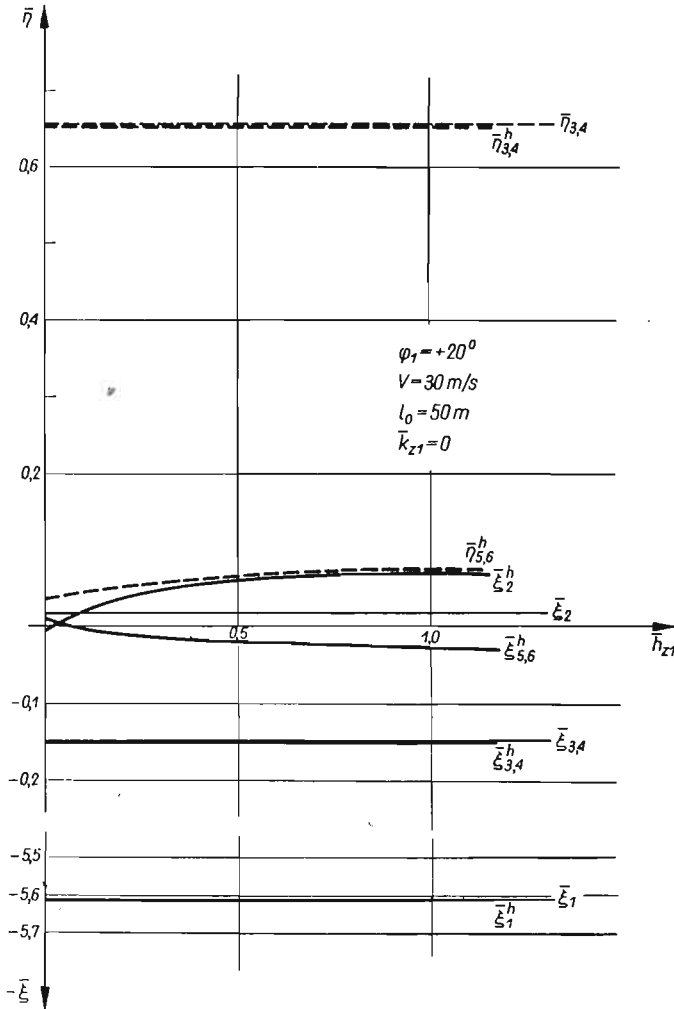
Rys.6. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji poziomego przemieszczenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca

bowca na kierunku osi poprzecznej  $y$  z równoczesnym przechyleniem harmonicznym wokół osi podłużnej  $x$ .

Dodatkowa para pierwiastków zespolonych  $\bar{\lambda}_{5,6}^h$  występująca w locie na holu, odpowiada wężykowaniu, tzn. harmonicznemu ruchom odchyłającym szybowca względem osi pionowej  $z$ , o bardzo dużym okresie wahań.

Na wykresach liniami grubymi przedstawiono zmiany współczynników odnoszących się do lotu na holu, a linie cienkie przedstawiają współczynniki w równoważnym locie swobodnym.

Do obliczeń przykładowo wybrano szybowiec, którego prototyp wykazywał na małych prędkościach holowania pewne trudności w pilotażu.

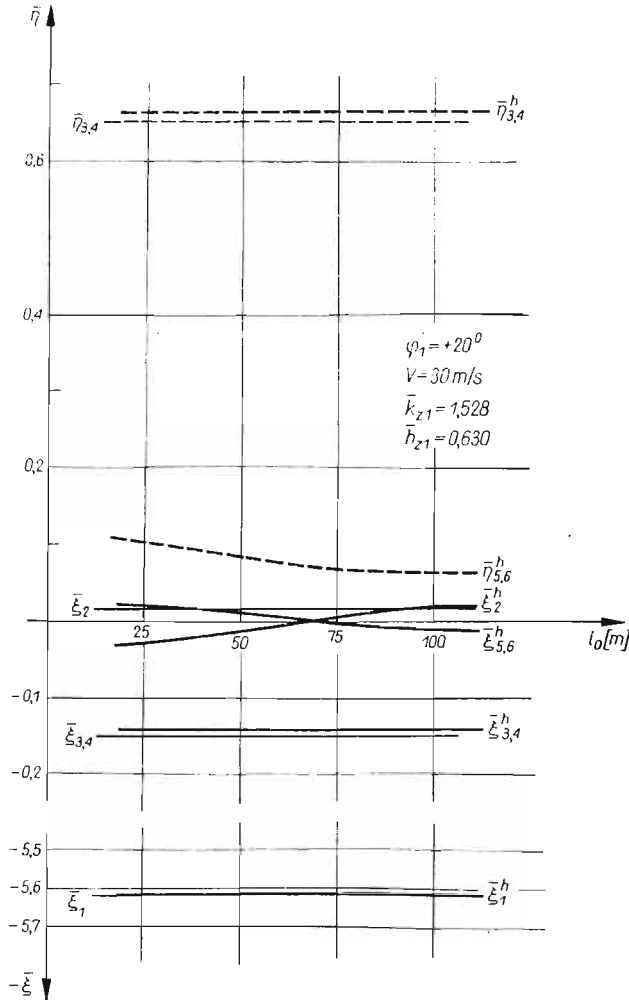


Rys. 7. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji pionowego przemieszczenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca

Wnioski wyciągnięte z obliczeń numerycznych są słuszne dla danego szybowca i nie wszystkie mogą być uogólnione. Szerokie uogólnienie wniosków wymagałoby wykonania obliczeń numerycznych dla wielu szybowców.

Wyniki uzyskane w przedstawionej pracy wskazują na to, że lot na holu rozpatrywanego szybowca jest lotem niestacynnym. Występują pierwiastki o częściach rzeczywistych

dodatnich  $\bar{\xi}_2^h > 0$  lub  $\bar{\xi}_{5,6}^h > 0$  (rys. 4–8). Słaba niestateczność spiralna lub niestateczność wężykowania zmusza pilota do interwencji sterami. W przykładowo rozpatrywanych warunkach lotu, dla położenia szybowca w linii lotu samolotu holującego (rys. 5), okres wahań wężykowania  $T = 50$  s, a czas podwojenia amplitudy  $T_2 = 28$  s. W warunkach tych pilot zdąży zareagować na zakłócenia lotu, bowiem czas reakcji złożonej pilota  $t_r$  jest  $0,20 \text{ s} < t_r \leq 0,54 \text{ s}$ . W opisanym położeniu szybowiec jest stateczny spiralnie  $\bar{\xi}_2^h < 0$ .



Rys.8. Zmiany bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji długości liny holowniczej

Wiele aparatów latających wykazuje niestateczność, jednak w ograniczonym przedziale czasu pewne rodzaje niestateczności są dopuszczalne. W związku z tym w badanym zagadnieniu jest sens mówić tylko o stateczności technicznej w ograniczonym przedziale czasu, tzn. od momentu zakłócenia do chwili interwencji pilota  $t_r$ , a nie dla  $t \rightarrow \infty$ .



Z wykonanych obliczeń można wyciągnąć następujące wnioski odnośnie stateczności bocznej rozpatrywanego szybowca holowanego na linii:

— Holowanie szybowca w niewielkim stopniu wpływa na stateczność holowania szybowca, zarówno na tłumienie  $\bar{\xi}_{3,4}^h \approx \bar{\xi}_{3,4}$ , jak i na częstość wahań  $\bar{\eta}_{3,4}^h \approx \bar{\eta}_{3,4}$  (rys. 4-8).

— Holowanie szybowca nie wpływa na aperiodyczne ruchy przechylające  $\bar{\xi}_1^h = \bar{\xi}_1$  (rys. 4-8).

— Holowanie szybowca na linii ma wpływ na tłumienie ruchów spiralnych  $\bar{\xi}_2^h$  oraz powoduje pojawienie się wężykowania. Ruchy powyższe są wzajemnie od siebie zależne, ustalenie spirale  $\bar{\xi}_2^h < 0$  powoduje niestateczność wężykowania  $\bar{\xi}_{5,6}^h > 0$  i odwrotnie (rys. 4-8).

— Korzystniejsze jest położenie szybowca w linii lotu samolotu holującego lub poniżej, gdyż zapewnia to stateczność spiralną przy słabej niestateczności wężykowania (rys. 5).

— Przemieszczenie zaczepu holowniczego do przodu względem środka ciężkości szybowca ustalenie spirale powodując równocześnie słabą niestateczność wężykowania (rys. 6). Korzystne jest położenie zaczepu dostatecznie daleko przed środkiem ciężkości bez przemieszczenia pionowego (rys. 7).

— Przemieszczenie zaczepu holowniczego pionowo w dół względem środka ciężkości szybowca, uniestalenie spirale  $\bar{\xi}_2^h > 0$  zapewniając słabe tłumienie wężykowania  $\bar{\xi}_{5,6}^h < 0$  (rys. 7).

— Ze względu na stateczność spiralną korzystne jest stosowanie lin holowniczych do długości  $l_0 = 70$  m (rys. 8).

Metody podane w niniejszej pracy oraz w pracach [4, 5, 6], dotyczących stateczności podłużnej, pozwalają na ilościowe wyznaczenie parametrów wpływających na równowagę i stateczność szybowca holowanego na linii. Pozwalają już w fazie konstrukcji szybowca na z góry określone rozwiązania lub kierunki zmian.

#### Literatura cytowana w tekście

1. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected researches on the stability kites and towed gliders*, Reports and Memoranda, Nr 2303/1942.
2. B. ETKIN, *Dynamics of flight*, New York-London 1959.
3. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
4. J. MARYNIAK, *Uproszczona stateczność podłużna szybowca w locie holowanym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Nr 1/1967.
5. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Nr 3/1967.
6. J. MARYNIAK, *Konfiguracja liny holowniczej szybowca z uwzględnieniem sil aerodynamicznych*, *Technika Lotnicza i Astronautyczna*, Nr 7/1967.
7. S. NEUMARK, *Działanie wiatru na linę balonu na uwięzi*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa, Nr 1(19), Warszawa 1936.
8. S. NEUMARK, *Equilibrium configurations of flying cables of captive balloons and cable derivatives for stability calculations*, Reports and Memoranda, Nr 3333/1963.
9. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington, Middlesex, PWN, Warszawa 1965.

10. З. И. Бурман, *Анализ влияния буксирного троса на картину флаттера планера — Исследование по теории пластин и оболочек*, Сборник II, Издательство Казанского Университета, 1964.
11. Ф. П. Гантмахер, *Теория матриц*, Издательство Наука, Москва 1966.
12. М. Ш. Косс, *Обзор доказательств теоремы Рауса-Гурвица*, Вопросы вычислительной математики, Академия Наук Узбекской ССР, Ташкент 1963.
13. И. В. Остославский, *Аэродинамика самолета*, Москва 1957.
14. И. В. Остославский, И. В. Стражева, *Динамика полета — Устойчивость и управляемость летательных аппаратов*, Издательство Машиностроение, Москва 1965.

## Р е з ю м е

## УПРОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ БОКОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНЕРА БУКСИРУЕМОГО НА КАНАТЕ

В предлагаемой работе рассмотрена боковая устойчивость планера буксируемого на канате во время стационарного прямолинейного горизонтального полета. Буксируемый планер находится в вертикальной плоскости совпадающей с направлением полета самолета-буксира. Буксирный канат рассматривается как идеально-гибкая весома нить, обладающая упругими свойствами в продольном направлении и нагруженная аэродинамическими силами.

Для исследования устойчивости была применена теория малых возмущений. Уравнения движения были получены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения шестого порядка для этой системы были найдены по методу Бэрстоу. Применялись критерии устойчивости Рут-Гурвица.

Результаты численного решения показывают как влияют на боковую устойчивость изменения скорости буксирования, расположения планера по отношению к самолету-буксиру, длины буксирного каната и расположения сцепного устройства по отношению к центру тяжести планера. Полученные результаты сравниваются с расчетами эквивалентного свободного полета планера.

## S u m m a r y

## SIMPLIFIED ANALYSIS OF LATERAL STABILITY OF TOWED GLIDER

The paper deals with the lateral stability of towed glider in steady straightline horizontal flight in the vertical plane passing through the towing airplane in the direction of its flight (route). The tow is considered as being ideally flexible, elastic in longitudinal direction, heavy and under aerodynamic forces.

The problem was treated by the method of small perturbations. The equations of motion have been derived in the form of a system of ordinary, second order differential equations with constant coefficients. The six roots of the characteristic equation have been calculated by the Birstow method, and the Routh-Hurwitz stability criteria have been also applied.

On the basis of numerical calculations, the influence on the lateral stability of such parameters as: towing speed, the relative glider-towing airplane position, the tow length and the localization of the towing hook relatively to the glider centre of gravity, has been determined. The results are compared with the similar calculations performed for the glider in equivalent free flight.

KATEDRA MECHANIKI  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1968 r.*

DRGANIA GRUBOŚCIENNEJ RURY PRZY WEWNĘTRZNYM I ZEWNĘTRZNYM  
PRZEPLYWIE CIECZY

JACEK S A M B O R S K I (WARSZAWA)

Ważniejsze oznaczenia

- $a, b$  promień wewnętrzny i zewnętrzny rury,  
 $\varrho$  gęstość materiału rury,  
 $\varrho_w, \varrho_z$  gęstość cieczy wewnętrznej i zewnętrznej,  
 $U_w, U_z$  prędkość niezaburzonego przepływu cieczy wewnętrznej i cieczy otaczającej rurę,  
 $c_w, c_z$  prędkość propagacji dźwięku w cieczy wewnętrznej i zewnętrznej przy niezaburzonym przepływie,

$V = \frac{\omega}{k}$  prędkość fazowa sprężystej fali propagowanej wzdłuż rury,

$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}$  prędkość fal podłużnych w materiale rury,

$c_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}}$  prędkość fal poprzecznych w materiale rury,

$\lambda, \mu$  stałe Lamé'go materiału rury,

$J_n(r), Y_n(r)$  funkcje Bessela  $n$ -tego rzędu pierwszego rodzaju,

$I_n(r), K_n(r)$  funkcje Bessela  $n$ -tego rzędu drugiego rodzaju,

$$\eta_w = \frac{\varrho_w}{\varrho}, \quad \eta_z = \frac{\varrho_z}{\varrho}, \quad \xi_w = \frac{c_w}{c_2}, \quad \xi_z = \frac{c_z}{c_2}.$$

1. Wstęp

Piśmiennictwo dotyczące zagadnień drgań powłok cylindrycznych w kontakcie z cieczą jest obszerne. Identyczny jak w niniejszej pracy przypadek dla cienkich powłok rozpatrzył BOŁOTIN w swojej pracy [3] i następnie powtórzył w [4]. Drgania grubych powłok cylindrycznych bez cieczy rozwiązali GAZIS [5] i MIRSKY, HERRMANN [6]. GREENSPON [7] zajął się cienkimi i grubymi powłokami zanurzonymi w nieruchomej cieczy z przyłożonym stałym ciśnieniem w środku. Wreszcie prace BOBESZKI ([2] jako kontynuacja [1]) dotyczą analogicznego zagadnienia, jak niniejsza praca, ale bez cieczy zewnętrznej. W odróżnieniu od literatury cytowanej powyżej, w niniejszej pracy uwzględniono przypadek grubej powłoki i ruch obu cieczy: wewnętrznej i zewnętrznej.

W pracy rozważamy drgania własne nieskończonej długiej rury o promieniu wewnętrznym  $a$  i zewnętrznym  $b$  (wielkości: promień  $b$  i grubość rury  $b-a$  są tego samego rzędu).

Materiał rury jest liniowo sprężysty. Rurę wewnątrz i zewnątrz opływają dwie cieczce, ściśliw i nielepkie, o gęstościach odpowiednio  $\varrho_w$  i  $\varrho_z$ . W dalszym ciągu przyjmujemy nieskończenie małe przemieszczenia punktów rury i liniowe równania ruchu dla cieczy oraz liniowe warunki brzegowe. Przepływ cieczy w stanie spoczynku rury odbywa się ze stałą prędkością równoległą do osi rury.

## 2. Podstawowe równania zagadnienia

Dla infinytezymalnych odkształceń rury, perturbacja w przepływie wywołana przez odkształcenia rury różni się infinytezymalnie od przepływu ze stałą prędkością  $U$ , a potencjał perturbacji  $\varphi$  spełnia zlinearyzowane równanie

$$(2.1) \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi = 0,$$

gdzie dla cieczy wewnętrznej należy podstawić:  $\varphi_w$ ,  $c_w$ ,  $U_w$ , a dla cieczy zewnętrznej:  $\varphi_z$ ,  $c_z$ ,  $U_z$ .

Równania ruchu punktów należących do rury mają postać

$$(2.2) \quad \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2, u_3).$$

Przedstawmy wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}$  w postaci sumy gradientu potencjału skalarne go  $\chi$  i rotacji bezźródłowego potencjału wektorowego  $\Psi$

$$(2.3) \quad \mathbf{u} = \operatorname{grad} \chi + \operatorname{rot} \Psi, \quad \operatorname{div} \Psi = 0.$$

Wprowadzamy współrzędne cylindryczne  $x, \theta, r$  (oś  $x$  pokrywa się z osią cylindra). Znając potencjały  $\chi$  i  $\Psi$ , możemy z (2.3) znaleźć pole przemieszczeń punktów rury

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u_x = u &= \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}, \\ u_\theta = v &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_x}{\partial r} - \frac{\partial \psi_r}{\partial x}, \\ u_r = w &= \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Przyjmując część liniową tensora odkształcenia Eulera, składowe pola odkształceń i naprężeń zapiszemy w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{\theta\theta} &= \frac{w}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, & e_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}, \\ e_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), & e_{xr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu e_{xx}, & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \Delta + 2\mu e_{\theta\theta}, & \sigma_{rr} &= \lambda \Delta + 2\mu e_{rr}, \\ \sigma_{x\theta} &= 2\mu e_{x\theta}, & \sigma_{xr} &= 2\mu e_{xr}, & \sigma_{\theta r} &= 2\mu e_{\theta r}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.7) \quad \Delta = (e_{xx} + e_{\theta\theta} + e_{rr}) = \nabla^2 \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}.$$

Równanie (2.2) jest spełnione, jeśli potencjały  $\chi$  i  $\psi$  spełniają równania falowe

$$(2.8) \quad \nabla^2 \chi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0,$$

$$(2.9) \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Warunki brzegowe łączące pole prędkości płynącej cieczy wewnętrznej i zewnętrznej i drgającej sprężystości rury są następujące: *warunek kinematyczny*, wymagający by były równe składowe promieniowe prędkości cząstki płynu i cząstki rury na powierzchniach  $r = a$  i  $r = b$

$$(2.10) \quad \left. \frac{\partial \varphi_w}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial u_r}{\partial t} \right|_{r=a} + U_w \left. \frac{\partial u_r}{\partial x} \right|_{r=a},$$

$$(2.11) \quad \left. \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} \right|_{r=b} = \left. \frac{\partial u_r}{\partial t} \right|_{r=b} + U_z \left. \frac{\partial u_r}{\partial x} \right|_{r=b},$$

oraz *warunek dynamiczny* zapewniający ciągłość naprężeń na granicy ośrodków

$$(2.12) \quad \sigma_{rx}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0,$$

$$(2.13) \quad \sigma_{rr}|_{r=a} = \rho_w \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + U_w \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right) \Big|_{r=a},$$

$$(2.14) \quad \sigma_{rx}|_{r=b} = \sigma_{r\theta}|_{r=b} = 0,$$

$$(2.15) \quad \sigma_{rr}|_{r=b} = \rho_z \left( \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} + U_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \Big|_{r=b}.$$

### 3. Rozwiązanie falowe

Dalsze rozważania ograniczamy do rury nieskończenie długiej. Rozwiązania równań (2.1), (2.8) i (2.9) przewidujemy w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varphi_w(r, \theta, x, t) &= f(r) \cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ \varphi_z(r, \theta, x, t) &= p(r) \cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ \chi(r, \theta, x, t) &= g(r) \cos n\theta \cos(\omega t - kx), \\ \psi_x(r, \theta, x, t) &= h_x(r) \sin n\theta \cos(\omega t - kx), \\ \psi_\theta(r, \theta, x, t) &= h_\theta(r) \cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ \psi_r(r, \theta, x, t) &= h_r(r) \sin n\theta \sin(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Przez podstawienie (3.1) do równań (2.1), (2.8) i (2.9) otrzymujemy zwyczajne równania różniczkowe na funkcje  $p, f, g, h_1 \equiv h_x, h_\theta - h_r \equiv 2h_2$  oraz  $h_\theta + h_r \equiv 2h_3$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} B_{n,ar}[f] &= 0, & B_{n,ar}[p] &= 0, & B_{n,br}[g] &= 0, \\ B_{n,\gamma r}[h_1] &= 0, & B_{n+1,\gamma r}[h_2] &= 0, & B_{n-1,\gamma r}[h_3] &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad B_{n,\varrho} = \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \left( \frac{n^2}{\varrho^2} - 1 \right),$$

$$(3.4) \quad \alpha^2 = \frac{(\omega^2 - kU_w)^2}{c_w^2} - k^2; \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2; \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2; \quad \delta^2 = \frac{(\omega - kU_z)^2}{c_z^2} - k^2.$$

Ogólne rozwiązanie (3.1) w tym przypadku ma postać

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f(r) &= A_1 Z_n(\alpha r) + A_2 W_n(\alpha r), \\ p(r) &= B_1 Z_n(\delta r) + B_2 W_n(\delta r), \\ g(r) &= C_1 Z_n(\beta r) + C_2 W_n(\beta r), \\ h_1(r) &= D_1 Z_n(\gamma r) + D_2 W_n(\gamma r), \\ h_2(r) &= E_1 Z_{n+1}(\gamma r) + E_2 W_{n+1}(\gamma r), \\ h_3(r) &= F_1 Z_{n-1}(\gamma r) + F_2 W_{n-1}(\gamma r), \end{aligned}$$

gdzie  $Z_n$  oznacza  $I_n$  lub  $J_n$ , a  $W_n$  oznacza  $K_n$  lub  $Y_n$  zgodnie z układem (w zależności czy:  $\alpha, \beta, \gamma$  lub  $\delta$  są urojone czy rzeczywiste)

$$(3.6) \quad \begin{array}{lllll} |\omega - kU_w| < kc_w & & I_n(\alpha r) & & \\ kc_w < |\omega - kU_w| & & J_n(\alpha r) & & \\ \omega < kc_2 & & I_n(\beta r) & K_n(\beta r) & I_n(\gamma r) & K_n(\gamma r) \\ kc_2 < \omega < kc_1 & & I_n(\beta r) & K_n(\beta r) & J_n(\gamma r) & Y_n(\gamma r) \\ kc_1 < \omega & & J_n(\beta r) & Y_n(\beta r) & J_n(\gamma r) & Y_n(\gamma r) \\ |\omega - kU_z| < kc_z & & & & K_n(\delta r) & \\ kc_z < |\omega - kU_z| & & & & Y_n(\delta r) & \end{array}$$

Ponieważ  $f(r)$  musi być ograniczone dla  $r = 0$ , a  $p(r) = 0$  dla  $r = \infty$ , więc będzie:  $A_2 = B_1 = 0$ . Na podstawie (2.3)<sub>2</sub>, każda z funkcji  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) może być przedstawiona w postaci kombinacji dwóch pozostałych, więc przyjmując  $h_3 = 0$  mamy:  $h_x = h_1$ ,  $h_\theta = h_2$ ,  $h_r = -h_2$ .

Pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń mogą więc być przedstawione w następującej postaci:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u_x = u &= \left( kg - h'_2 - \frac{1}{r} h_2 - \frac{n}{r} h_2 \right) \cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ u_\theta = v &= \left( -\frac{n}{r} g + h'_1 - kh_2 \right) \sin n\theta \cos(\omega t - kx), \\ u_r = w &= \left( g' - h_1 \frac{n}{r} - kh_2 \right) \cos n\theta \cos(\omega t - kx), \\ e_{xr} &= \frac{1}{2} \left[ 2kg' - h'_2 - \frac{1}{r} \left( h'_2 - \frac{1}{r} h_2 \right) - \frac{nk}{r} h_1 - k^2 h_2 \right] \cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2n}{r} \left( g' - \frac{g}{r} \right) + h'_1 - kh'_2 - \frac{h'_1}{r} + \frac{n^2}{r^2} h_1 + \frac{n+1}{r} kh_2 \right] \sin n\theta \cos(\omega t - kx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \left[ g'' - \frac{n}{r} \left( h'_1 - \frac{h_1}{r} \right) - kh^2 \right] \cos n\theta \cos(\omega t - kx), \\
\sigma_{xr} &= 2\mu e_{xr} = \mu \left[ 2kg' - h'_2 - \frac{1}{r} \left( h'_2 - \frac{1}{r} h_2 \right) - \frac{nk}{r} h_1 - k^2 h_2 \right] \cos n\theta \sin(\omega t - kx), \\
\sigma_{r\theta} &= 2\mu e_{r\theta} = \mu \left[ -\frac{2n}{r} \left( g' - \frac{g}{r} \right) + h'_1 - kh'_2 - \frac{h_1}{r} + \frac{n^2 h_1}{r^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+1}{r} kh_2 \right] \sin n\theta \cos(\omega t - kx), \\
\sigma_{rr} &= 2\mu e_{rr} + \lambda \nabla^2 \chi = \\
&= \left\{ \left[ g'' - \frac{n}{r} \left( h'_1 - \frac{h_1}{r} \right) - kh^2 \right] 2\mu - \lambda(\beta^2 + k^2)g \right\} \cos n\theta \cos(\omega t - kx),
\end{aligned}$$

gdzie primy oznaczają różniczkowanie względem  $r$ .

Wykorzystując warunki brzegowe (2.10—2.15) otrzymujemy jednorodny układ ośmiu równań na stałe  $A_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ . Układ ten ma zawsze trywialne rozwiązanie  $A_1 = B_2 = \dots = E_2 = 0$ , odpowiadające niezaburzonemu przepływowi cieczy i spoczynkowi rury. Przy pewnych warunkach możliwy jest jednak stan zaburzony odpowiadający przypadkowi, gdy nie wszystkie stałe są równe zero. Warunkiem istnienia rozwiązania niezerowego jest, aby wyznacznik charakterystyczny tego układu był równy zero. Z równań powstałych z wykorzystania warunków (2.10) i (2.11) wyznaczono  $A_1$  i  $B_2$  w zależności od pozostałych stałych, a następnie podstawiono w ten sposób otrzymane wyrażenia na  $A_1$  i  $B_2$  do pozostałych sześciu równań, dzięki czemu obniżono stopień wyznacznika do sześciu. W oparciu o wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela, warunek istnienia rozwiązań niezerowych można ostatecznie zapisać jako

$$(3.8) \quad |C_{ij}| = 0. \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \{2n(n-1) - a^2[(\gamma^2 - k^2) + 2\beta^2(\lambda_2 - 1)]\} Z_n(\beta a) + 2\lambda_2 \beta a Z_{n+1}(\beta a) + \\
&\quad + \eta_w \xi_w^2 a^2 (\alpha^2 + k^2) \frac{nZ_n(\beta a) - \lambda_2 \beta a Z_{n+1}(\beta a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a), \\
C_{12} &= 2\gamma k a^2 Z_n(\gamma a) - 2(n+1)ka Z_{n+1}(\gamma a) + \\
&\quad + \eta_w \xi_w^2 a^2 (\alpha^2 + k^2) \frac{ka Z_{n+1}(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a), \\
(3.9) \quad C_{13} &= 2n(n-1)Z_n(\gamma a) - 2n\lambda_3 \gamma a Z_{n+1}(\gamma a) + \\
&\quad + \eta_w \xi_w^2 a^2 (\alpha^2 + k^2) \frac{nZ_n(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a), \\
C_{14} &= \{2n(n-1) - a^2[(\gamma^2 - k^2) + 2\beta^2(\lambda_2 - 1)]\} W_n(\beta a) + 2\beta a W_{n+1}(\beta a) + \\
&\quad + \eta_w \xi_w^2 a^2 (\alpha^2 + k^2) \frac{nW_n(\beta a) - \beta a W_{n+1}(\beta a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{15} &= 2\lambda_3\gamma ka^2 W_n(\gamma a) - 2ka(n+1)W_{n+1}(\gamma a) + \\
&\quad + \eta_w \xi_w^2 a^2 (\alpha^2 + k^2) \frac{kaW_{n+1}(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a), \\
C_{16} &= 2n(n-1)W_n(\gamma a) - 2n\gamma a W_{n+1}(\gamma a) + \\
&\quad + \eta_w \xi_w^2 a^2 (\alpha^2 + k^2) \frac{nW_n(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a), \\
C_{21} &= -2n(n-1)Z_n(\beta a) + 2n\lambda_2 \beta a Z_{n+1}(\beta a), \\
C_{22} &= \gamma ka^2 Z_n(\gamma a) - 2(n+1)ka Z_{n+1}(\gamma a), \\
C_{23} &= -[2n(n+1) - (2\lambda_3 - 1)\gamma^2 a^2] Z_n(\gamma a) - 2\lambda_3 \gamma a Z_{n+1}(\gamma a), \\
(3.9) \quad C_{24} &= -2n(n-1)W_n(\beta a) + 2n\beta a W_{n+1}(\beta a), \\
C_{25} &= \lambda_3 \gamma ka^2 W_n(\gamma a) - 2(n+1)ka W_{n+1}(\gamma a), \\
C_{26} &= -[2n(n-1) - (2\lambda_3 - 1)\gamma^2 a^2] W_n(\gamma a) - 2\gamma a W_{n+1}(\gamma a), \\
C_{31} &= 2nka Z_n(\beta a) - 2\lambda_2 \beta ka^2 Z_{n+1}(\beta a), \\
C_{32} &= -(\gamma^2 - k^2)a^2 Z_{n+1}(\gamma a) + n\gamma a Z_n(\gamma a), \\
C_{33} &= nka Z_n(\gamma a), \\
C_{34} &= 2nka W_n(\beta a) - 2\beta ka^2 W_{n+1}(\beta a), \\
C_{35} &= \lambda_3 n\gamma a W_n(\gamma a) - (\gamma^2 - k^2)a^2 W_{n+1}(\gamma a), \\
C_{36} &= nka W_n(\gamma a).
\end{aligned}$$

Pozostałe współczynniki (od  $C_{41}$  do  $C_{66}$ ) będą miały analogiczną postać ( $C_{41}$  jak  $C_{11}$ ,  $C_{42}$  jak  $C_{12}$  itd), z tym, że należy zastąpić

$$\eta_w \rightarrow \eta_z, \quad \xi_w \rightarrow \xi_z, \quad a \rightarrow b, \quad Z_n(\alpha r) \rightarrow W_n(\delta r), \quad \alpha \rightarrow \delta,$$

a mianownik  $[nZ_n(\alpha a) - \lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)]$  zastąpić mianownikiem  $[nW_n(\delta b) - \delta b W_{n+1}(\delta b)]$ . Wielkości  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) przyjmują wartości  $+1$  lub  $-1$  (w zależności czy  $\alpha, \beta, \gamma$  są rzeczywiste czy urojone), zgodnie z tabelą

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ urojone} &\rightarrow I_n(\alpha r) & \lambda_1 &= -1, \\
\alpha \text{ rzeczywiste} &\rightarrow J_n(\alpha r) & \lambda_1 &= 1, \\
\beta \text{ urojone} &\rightarrow I_n(\beta r), K_n(\beta r) & \lambda_2 &= -1, \\
\beta \text{ rzeczywiste} &\rightarrow J_n(\beta r), Y_n(\beta r) & \lambda_2 &= 1, \\
\gamma \text{ urojone} &\rightarrow I_n(\gamma r), K_n(\gamma r) & \lambda_3 &= -1, \\
\gamma \text{ rzeczywiste} &\rightarrow J_n(\gamma r), Y_n(\gamma r) & \lambda_3 &= 1.
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

U w a g a: W pracy BOBESZKI [2] popełniono pomyłkę rachunkową przy obliczaniu współczynników  $C_{ij}$ , pomyłkę tę powtórzono prawdopodobnie za pracą GAZISA [5]. W  $C_{11}$ ,  $C_{41}$ ,  $C_{14}$  i  $C_{44}$  zamiast  $(\gamma^2 - 1)$  winno być:  $[(\gamma^2 - 1) + 2\beta^2(\lambda_2 - 1)]$ , a w  $C_{23}$ ,  $C_{26}$ ,  $C_{53}$  i  $C_{56}$  wyrażenie  $\gamma^2 k^2 a^2$  winno być pomnożone przez  $(2\lambda_3 - 1)$ .



## 4. Rozwiązania szczególne

Równanie (3.8) opisuje związki dyspersyjne dla grubościennej rury opływanej wewnątrz i na zewnątrz przez płyny. W szczególnych przypadkach ten bardzo skomplikowany warunek znacznie się upraszcza.

W przypadku fali stojącej ( $k = 0$ ) wyznacznik redukuje się do iloczynu dwóch podwyznaczników

$$(4.1) \quad D_1 D_2 = 0,$$

gdzie

$$(4.2) \quad D_1 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{14} & C_{16} \\ C_{21} & C_{23} & C_{24} & C_{26} \\ C_{41} & C_{43} & C_{44} & C_{46} \\ C_{51} & C_{53} & C_{54} & C_{56} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} C_{32} & C_{35} \\ C_{62} & C_{65} \end{vmatrix}.$$

Rozwiązania niezerowe istnieją, jeśli przynajmniej jeden z podwyznaczników jest równy zeru. Przy  $D_1 = 0$  stan odkształcenia jest płaski, przy  $D_2 = 0$  zachodzą podłużne drgania ścinające (oba rodzaje drgań niezależne od  $x$ ).

W przypadku fal osiowo-symetrycznych ( $n = 0$ ) warunek istnienia rozwiązań niezerowych (3.8) redukuje się do

$$(4.3) \quad D_3 D_4 = 0,$$

gdzie

$$(4.4) \quad D_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} \\ C_{31} & C_{32} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{44} & C_{45} \\ C_{61} & C_{62} & C_{64} & C_{65} \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} C_{23} & C_{26} \\ C_{33} & C_{36} \end{vmatrix}.$$

Przy  $D_3 = 0$  powstają fale podłużne osiowo-symetryczne (tylko przemieszczenia  $u_r$  i  $u_x$ ). Jeśli  $D_4 = 0$ , to przypadek fal skrętnych (tylko przemieszczenia  $u_\theta$ ).

## Literatura cytowana w tekście

1. A. BOBESZKO, *Sprężyste fale giętne w nieskończonej rurze przy przepływie płynu nieściśliwego*, Rozpr. Inżyn. 1, **11** (1963).
2. A. BOBESZKO, *Flexural elastic waves in infinite tube containing flowing a compressible fluid, according to the exact theory of elasticity*, Arch. Mech. Stos., 1, **16** (1964).
3. В. В. БОЛОТИН, *Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости*, Инж. Сб. 24, 1956.
4. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Москва 1961.
5. D. C. GAZIS, *Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders*, JASA, 5, **31** (1959).
6. I. MIRSKY, G. HERRMANN, *Axially symmetric motions of thick cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 1, **25** (1958).
7. J. E. GREENSPON, *Vibrations of thick and thin cylindrical shells surrounded by water*, JASA, 10, **33** (1961).

## Р е з ю м е

КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ОБТЕКАЕМОЙ ВНУТРИ И СНАРУЖИ  
ЖИДКОСТЬЮ

В работе рассмотрены собственные колебания бесконечной, упругой толстостенной трубы. Труба обтекается внутри и снаружи двумя различными сжимаемыми и невязкими жидкостями. Предполагается, что обе жидкости текут в невозмущенном состоянии трубы параллельно её оси. Сверх того, считается, что перемещения в трубе бесконечно малы и можно принять линеаризованные уравнения движения жидкости и линейные краевые условия. Окончательное решение задачи дано в виде дисперсионных соотношений. Рассмотрены два частных случая: осесимметрические колебания и волны независимые от координаты вдоль оси трубы.

## S u m m a r y

VIBRATIONS OF A THICK-WALLED TUBE IN INTERNAL AND EXTERNAL FLOWS  
OF FLUIDS

Vibrations of infinitely long, elastic and thick-walled tube are considered. The tube is assumed to be in two flows – internal and external – of two different but both compressible and non-viscous fluids. In addition, in the case of the tube in rest, both flows are assumed to be uniform with velocity parallel to the tube. Moreover, infinitesimal displacements of the tube as well as linear equations of fluids motion and linear boundary conditions are applied. The final solution of the problem in question is presented in the form of dispersion relations. The paper is illustrated by two cases: of axially symmetric vibrations and infinite wavelengths.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 czerwca 1968 r.*

---

## NOŚNOŚĆ GRANICZNA ROZCIĄGANYCH PRĘTÓW Z KARBAMI KĄTOWYMI O DOWOLNYCH WYMIARACH CZĘŚCI NAD KARBAMI

JÓZEF MIASTKOWSKI (WARSZAWA)

### 1. Wprowadzenie

Nagle zmiany wymiarów lub kształtu wzdłuż elementu wywołują w nim znaczną nierównomierność rozkładu naprężeń. Może ona być wywołana przez wszelkie karby, podtoczenia i szczeliny na powierzchni pręta, przez nacięcia gwintu, ślady po obróbce wiórowej lub inne przyczyny. Na dnie tych karbów występują zawsze znacznie większe naprężenia, niż w całym pozostałym przekroju poprzecznym.

Przy obciążeniach stałych lub zmiennych, ale o niewielkiej liczbie zmian obciążenia w całym okresie pracy elementu, o zniszczeniu będą decydować bądź to odkształcenia plastyczne, bądź to kruche pęknięcia powstające przy pewnej granicznej wielkości obciążenia. To obciążenie nazywamy nośnością graniczną. Stosowane metale konstrukcyjne mają zwykle dobre własności plastyczne i pęknięcie powstaje w nich dopiero po rozwinięciu się dużych odkształceń plastycznych. Z tego względu analiza nośności granicznej oparta na założeniach teorii plastyczności ma duże znaczenie praktyczne.

Dla płaskich prętów osłabionych obustronnie karbami, teoretyczna nośność graniczna może być wyznaczona w dwóch skrajnych przypadkach, mianowicie dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dla płaskiego stanu naprężenia.

Do warunków płaskiego stanu odkształcenia zbliżamy się, gdy grubość  $2b$  (rys. 1) pręta jest dostatecznie duża w porównaniu z wymiarem  $2h$ . Przeciwnie, gdy grubość  $2b$  jest mała, w pręcie występują warunki płaskiego stanu naprężenia. Kompletne rozwiązanie dla płaskiego stanu odkształcenia jest możliwe, o ile stosunek ramion  $c/h$  jest tak duży, że pole linii poślizgów leży całkowicie wewnątrz konturu pręta [1]. Jeżeli jednak stosunek ramion jest mały, rozwiązanie kompletne jest nadal nieznanne. Możliwe jest jedynie określenie górnej i dolnej oceny nośności granicznej.

W wielu rzeczywistych konstrukcjach wymiar  $2b$  pręta nie jest ani na tyle mały, aby powstał płaski stan naprężenia, ani na tyle duży, aby wytworzył się płaski stan odkształcenia. Niestety, obecnie teoria nie jest w stanie dać odpowiedzi, jaka będzie nośność graniczna przy pośrednich grubościach pręta. Powstaje wobec tego ważny problem, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia mogą stanowić dobre przybliżenie rzeczywistych warunków.

Próbkę teoretycznej analizy tego zagadnienia podjął DRUCKER [2] w oparciu o graniczne twierdzenia teorii plastyczności. Analiza taka, polegająca na doborze odpowiednich pól kinematycznie lub statycznie dopuszczalnych, może dać jedynie przybliżoną ocenę wielkości  $2b$ , niezbędnej dla powstania stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. Całkowicie pewne informacje mogą być uzyskane jedynie w sposób doświadczalny.

ŻUKOWSKI [3, 4, 5] badał wpływ grubości  $2b$  na nośność pręta z ostrym karbem kątowym i wykazał, że dla stosunku  $b/h > 4$ , zarówno wielkość siły zrywającej, odniesionej do jednostki powierzchni, jak i wartość naprężeń umownej granicy plastyczności praktycznie nie ulega zmianie.

W pracy SZCZEPIŃSKIEGO i MIASTKOWSKIEGO [6] badano pręty z karbem o zaokrąglonych narożach i stwierdzono, że dla stosunku  $b/h > 2$  praktycznie realizuje się płaski stan odkształcenia. Wystarczająca wartość stosunku  $b/h = 3$  wynika z badań przeprowadzonych w pracy FINDLEY'A i DRUCKERA [7], w której zajmowano się prętami z karbem ostrym i o zaokrąglonych narożach. Autorzy zaznaczają jednak, że jeszcze dla  $b/h = 6,67$  istnieje wpływ grubości  $2b$  pręta.

W pracy SZCZEPIŃSKIEGO i MIASTKOWSKIEGO [8] przeprowadzona została teoretyczna i doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych prętów z karbami okrągłymi i prostokątnymi o dowolnej grubości  $2b$  i zmiennej szerokości części nad karbem  $2c$ .

Obszerny przegląd prac doświadczalnych i teoretycznych dotyczących nośności granicznej rozciąganych płaskich i osiowo-symetrycznych prętów z karbami został podany w pracy SZCZEPIŃSKIEGO [9].

Na podstawie wyników doświadczalnych można stwierdzić, że obciążenie graniczne obliczane przy założeniu idealnie plastycznego materiału ma praktyczne znaczenie dla plastycznych metali. Wynika z nich również, że płaski stan odkształcenia realizuje się w próbkach z karbami wówczas, gdy grubość pręta  $2b$  jest kilka razy większa od wymiaru  $2h$  w najwęższym przekroju. Należy jednak zaznaczyć, że wartość  $\lambda = b/h$  jest w dużym stopniu zależna od kształtu karbu.

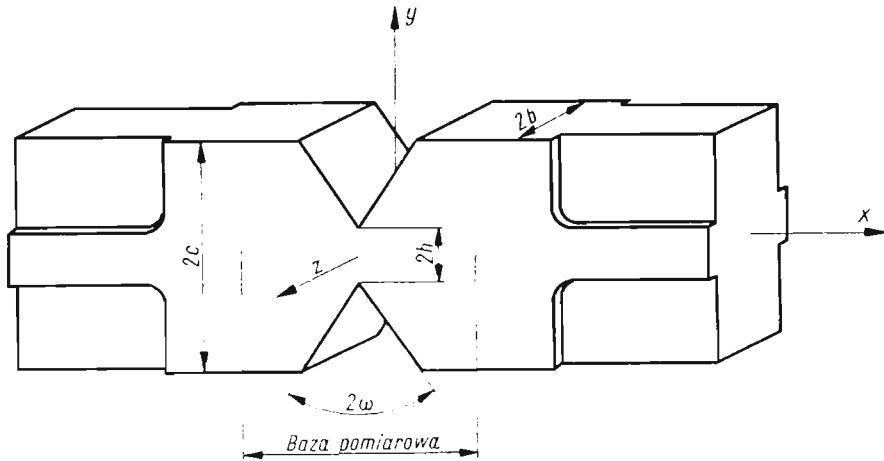
W przedstawionej pracy podano górne oceny nośności granicznej dla prętów z karbami kątowymi o pośredniej grubości i zmiennym stosunku szerokości części nad karbem  $2c$  do wymiaru  $2h$ . Dane z obliczeń porównano następnie z wynikami doświadczeń.

## 2. Sposób przeprowadzenia doświadczeń

Badania próbek przeprowadzono na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej. Próbki, w których wymiar  $2c$  był większy od  $3h$ , były specjalnie przygotowane w sposób pokazany na rysunku 1. Części przeznaczone do mocowania w uchwytach zrywarki były frezowane, aby zapewnić osiowe rozciąganie i uniknąć możliwości zginania w płaszczyźnie  $x, y$ .

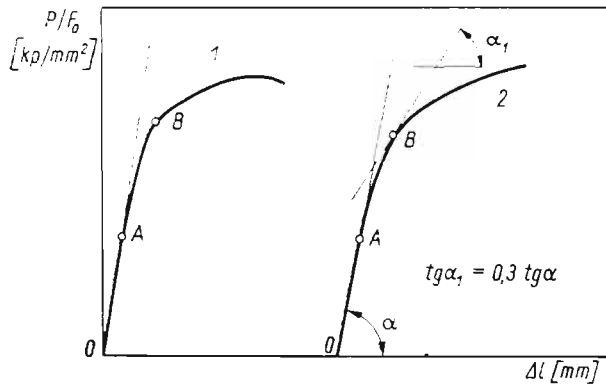
Odształcenia mierzono za pomocą dwóch tensometrów mechanicznych umieszczonych po obu stronach próbki, na bazie pomiarowej 60 mm. Odczyty pomiarów odkształceń prowadzono z dokładnością do 0,01 mm. Mierzenie odkształceń na dwóch przeciwległych powierzchniach próbki z  $= \pm b$  pozwalało sprowadzić do minimum efekty wynikające z ewentualnego zginania w płaszczyźnie  $x, z$ . Wydłużenie ustalono następnie jako wartość średnią ze wskazań obu tensometrów.

Stwierdzono, że powyższa metoda przeprowadzenia doświadczeń zapewniała otrzymywanie dobrych wyników doświadczalnych. Otrzymane w ten sposób krzywe obciążenie—odkształcenie cechują się dużą regularnością przebiegu.



Rys. 1

W zależności od kształtu i rodzaju materiału wykresy obciążenie—wydłużenie różnią się swoim przebiegiem. Typowe krzywe otrzymywane w tej pracy pokazano na rys. 2. Prosty początkowy odcinek  $OA$  każdej krzywej odpowiada pełnemu stanowi sprężystemu pręta. Nieznaczna krzywizna wykresu powyżej punktu  $A$  łączy się ze wzrostem plastycz-



Rys. 2

nych obszarów, podczas gdy sprężysta część środkowa najwęższego przekroju poprzecznego zapewnia małe całkowite wydłużenie. Swobodne plastyczne płynięcie zaczyna się w chwili, kiedy obszary plastyczne zbiegają się w osi symetrii pręta. Moment ten jest wyraźnie widoczny w punkcie  $B$  na krzywej 1. Bardzo często moment ten, w którym cały przekrój osiąga pełny stan plastyczny jest mało widoczny (patrz krzywa 2 na rys. 2).

W takich przypadkach przyjęto w pracy umowną granicę plastyczności, którą utożsamiano z punktem  $B$ , w którym moduł stycznej osiągał wartość  $0,3 \operatorname{tg} \alpha$ . Przez  $\alpha$  oznaczono kąt, który tworzy początkowa prostoliniowa część wykresu z osią wydłużeń.

### 3. Teoretyczna górna ocena nośności granicznej

Załóżmy, że  $P^*$  oznacza nieznaną rzeczywistą wartość granicy plastyczności. Górna ocena  $P_g$  tej wartości  $P^*$  może być określona przez porównanie pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną  $P$  do wewnętrznej energii dysypowanej przez dowolny, kinematycznie dopuszczalny, schemat odkształcenia plastycznego [10]. Współczynnik obciążenia granicznego dla pręta z karbem może być określony jako stosunek  $f = P^*/P_0$ , gdzie  $P_0 = 8kbh$  jest granicą plastyczności gładkiego pręta ze stałym poprzecznym przekrojem  $4bh$ . Górna ocena  $f$  jest równa:

$$(3.1) \quad f_g = P_g/P_0.$$

Na rys. 3 pokazano cztery różne, kinematycznie dopuszczalne, mechanizmy plastycznego zniszczenia prętów z kątowymi wycięciami. Jest oczywiste, że te sposoby odkształcenia można również stosować do określenia górnej oceny nośności granicznej prętów z wycięciami o innych kształtach.

Wszystkie wzory na górną ocenę  $f_g$  określone zostały przy założeniu warunku plastyczności Treski.

Mechanizm I przedstawia rozwiązania metodą linii poślizgów [11] dla płaskiego stanu odkształcenia. Dla przypadku tego ( $\lambda = b/h \rightarrow \infty$ ) jest to kompletne rozwiązanie o ile szerokość pręta wyrażona przez  $\kappa = c/h$  jest tak duża, że przedłużenie siatki linii poślizgów w karbie mieści się całkowicie wewnątrz zarysu pręta. Można łatwo wykazać, że wszystkie kinematycznie dopuszczalne warunki będą również spełnione, jeżeli szerokość pręta wyrażona przez  $\kappa = c/h$  jest mniejsza od wymaganej przez teorię i jeżeli stosunek  $\lambda = b/h$  jest ograniczony. W ten sposób rozwiązania linii poślizgów mogą być uważane jako kinematycznie dopuszczalne sposoby odkształcenia dla prętów o pośrednich stosunkach  $c/h$  i  $b/h$ , dając dla nich górną ocenę nieznannej wartości rzeczywistej granicy plastyczności.

Mechanizm II [12] stanowi proste ścinanie wzdłuż zakreskowanej płaszczyzny pokazanej na rys. 3. Górna część pręta nad płaszczyzną porusza się, jak ciało sztywne w kierunku równoległym do płaszczyzny przekroju, podczas gdy dolna część może być traktowana jako nieruchoma. Optymalną wartość górnej oceny granicy plastyczności otrzymujemy, jeżeli płaszczyzna przekroju tworzy z osią pręta kąt  $45^\circ$ . Górna ocena współczynnika obciążenia jest niezależna od stosunku  $\lambda = b/h$  i jest równa

$$(3.2) \quad f_g^{IIa} = \frac{1}{2}(\kappa + 1) \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega \leq \omega_g^{II}$$

oraz

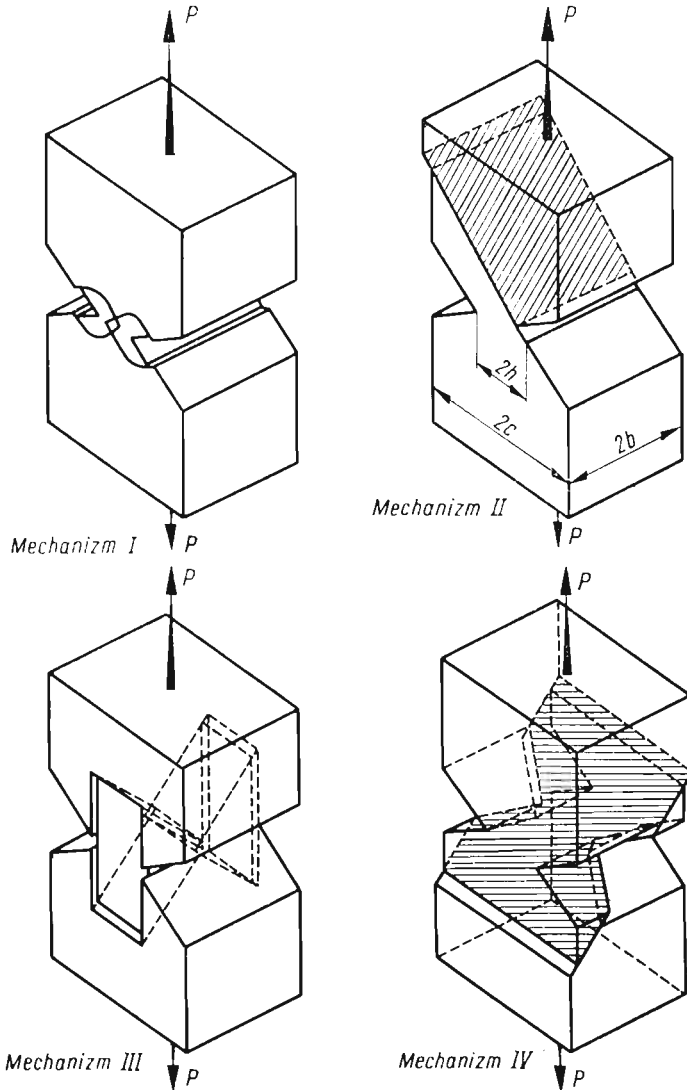
$$(3.3) \quad f_g^{IIb} = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \omega - 1} \quad \text{dla} \quad \omega_g^{II} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2},$$

gdzie  $\kappa = c/h$ .

Na kąt graniczny  $\omega_g^{II}$  łatwo można znaleźć następującą zależność

$$(3.4) \quad \omega_g^{II} = \arctg \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}.$$

Dalej pokazano, że wzór (3.2) daje najlepszą górną ocenę dla wystarczająco dużych  $\lambda$  i małych  $\kappa$ .



Rys. 3

Mechanizm III [2] pokazany na rys. 3 polega na ruchu dwóch sztywnych kostek utworzonych przez dwie płaszczyzny poprowadzone pod kątem  $45^\circ$  do osi pręta oraz przez dwie płaszczyzny równoległe do osi pręta przechodzące przez dna karbów. Dla

większości kształtów karbu, a wśród nich i dla karbów kątowych, górną ocenę wartości  $f$  określamy ze wzoru

$$(3.5) \quad f_g^{III} = 1 + \frac{1/\sqrt{2}}{4} \lambda.$$

Mechanizm IV przedstawia prosty przekrój wzdłuż płaszczyzny zakreskowanej, tworzącej kąt  $45^\circ$  z osią pręta. Płaszczyzna przekroju jest pokazana na rys. 3. Mechanizm ten daje najlepszą górną ocenę współczynnika obciążenia  $f_g^{IV}$  dla małych  $\lambda = b/h$ . Wobec tego, że powierzchnia przekroju zależy od kształtu wycięcia, górną ocenę współczynnika obciążenia  $f_g^{IV}$  musi być obliczana dla każdego szczególnego przypadku oddzielnie.

Dla karbów kątowych wzory na współczynnik obciążenia przyjmują postać

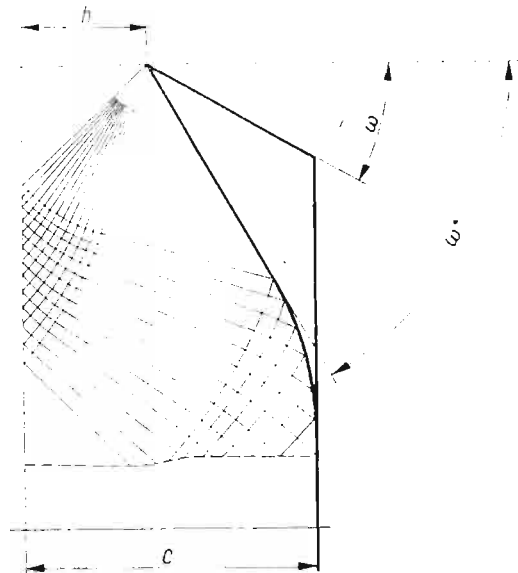
$$(3.6) \quad f_g^{IVa} = \kappa - \frac{1}{2\lambda} (\kappa^2 - 2\kappa + 1) \operatorname{tg} \omega \quad \text{dla} \quad \lambda \geq (\kappa - 1) \operatorname{tg} \omega$$

oraz

$$(3.7) \quad f_g^{IVb} = 1 + \frac{1}{2} \lambda \operatorname{ctg} \omega \quad \text{dla} \quad \lambda \leq (\kappa - 1) \operatorname{tg} \omega.$$

#### 4. Teoretyczna dolna ocena nośności granicznej

Rozważmy teraz ważny przypadek prętów z wycięciami, dla których wartość stosunku wymiarów  $\lambda \gg 1$  pozwala na analizę w płaskim stanie odkształcenia, ale mających mały

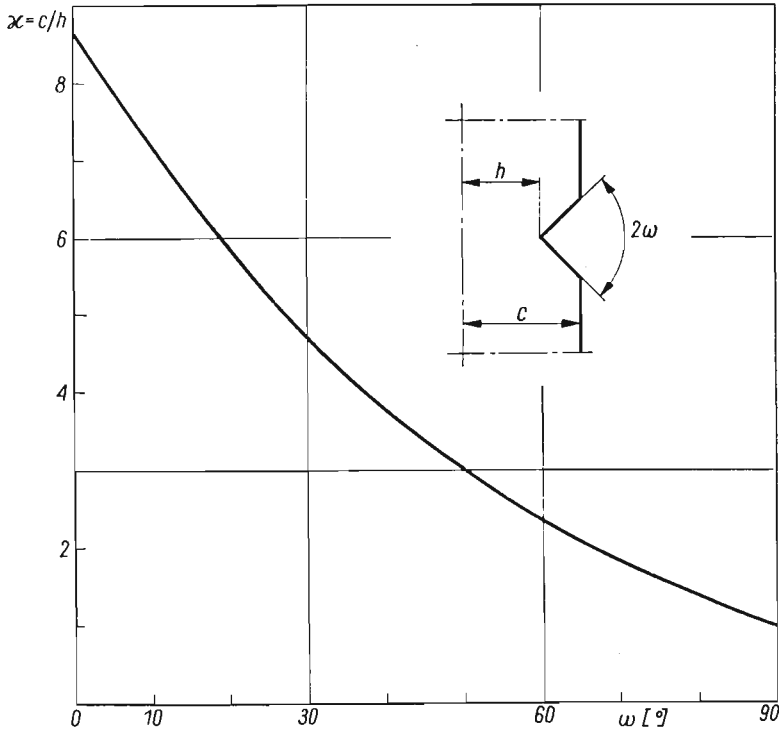


Rys. 4

współczynnik  $\kappa = c/h$ . Dla takich prętów możemy określić nie tylko górną ocenę  $f_g$  z mechanizmu II, ale także wyznaczyć orientacyjną dolną ocenę z odpowiedniego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, zakładając, że w przecie mamy płaski stan odkształcenia. Ocenę taką można wyznaczyć na przykład, na podstawie pola linii poślizgu pokazanego na rys. 4.



Rozpatrzmy przypadek pręta z karbem kątowym o kącie  $2\omega$  i małej szerokości  $2c$  (rys. 4). Jesteśmy w stanie zawsze znaleźć taki kąt  $2\omega^*$  karbu kąтового, dla którego przedłużenie pola linii poślizgu obliczone w sposób pokazany przez BISHOPA [1], leży całkowicie w konturze rozpatrywanego pręta o kącie  $2\omega$  i szerokości  $2c$ , jak pokazano na rys. 4.



Rys. 5

Przyjmując tu, że materiał na zewnątrz pola linii poślizgu jest wolny od naprężeń, możemy określić dolną wartość współczynnika obciążenia  $f_d$  równą rzeczywistej wartości tego parametru dla pręta z karbem o kącie  $2\omega^*$ . W ten sam sposób można określić dolną ocenę dla innych kształtów karbów.

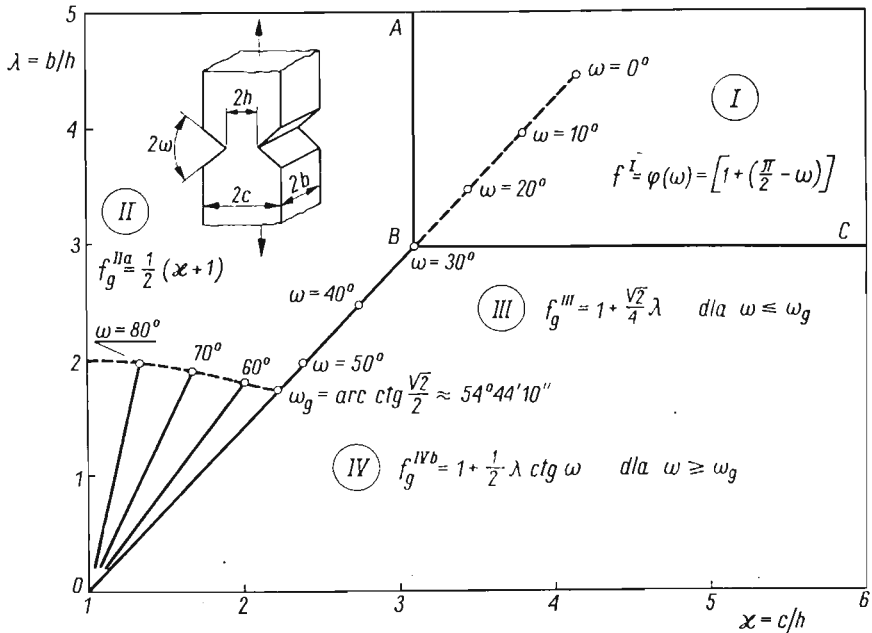
Na rys. 5 pokazano wykres, wynikający z przedłużeń Bishopa szerokości  $2c$ , wyrażonej przez parametr  $x$  w funkcji kąta  $\omega$  dla karbów kątowych, podany przez McCLINTOCKA w pracy [13].

### 5. Nośność graniczna prętów z wycięciami kątowymi

Rozważmy teraz pręt z karbem kątowym (rys. 1). Kształt karbu jest określony przez kąt  $\omega$ . Granica plastyczności w tym przypadku jest zależna od trzech niezależnych parametrów

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq (\lambda = b/h) \leq \infty, \quad 1 \leq (x = c/h) \leq \infty.$$

Na rys. 6 pokazano na płaszczyźnie  $\lambda, \kappa$  obszary, w których poszczególne mechanizmy plastycznego zniszczenia z rys. 3 dają najniższą ocenę współczynnika obciążenia. Każdy obszar jest oznaczony numerem odpowiadającym oznaczeniom odpowiednich mechanizmów na rys. 3. Rozmieszczenie odpowiednich obszarów podano na rys. 6 dla parametru  $\omega = 30^\circ$ . Dla innych wartości parametru  $\omega$  zmienia się położenie punktu  $B$  oraz ulegają zmianie wielkości poszczególnych obszarów przy niezmiennym układzie wy-



Rys. 6

kresu. Trajektoria punktu  $B$  jest pokazana linią (częściowo przerywaną), na której zaznaczono wartości  $\omega$  od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  co  $10^\circ$ . W miarę wzrostu kąta  $\omega$  od  $0^\circ$  aż do  $\omega_g$  punkt  $B$  przesuwa się po linii prostej, a następnie od położenia odpowiadającego kątowi  $\omega_g$  po linii krzywej dążąc do położenia granicznego  $\lambda = 2$  i  $\kappa = 1$  dla  $\omega \rightarrow \pi/2$ .

Obszar I odpowiada mechanizmowi linii poślizgów I i w tym zakresie  $\lambda, \kappa$  najmniejsza wartość górnej oceny współczynnika obciążenia może być określona ze wzoru HILLA [11],

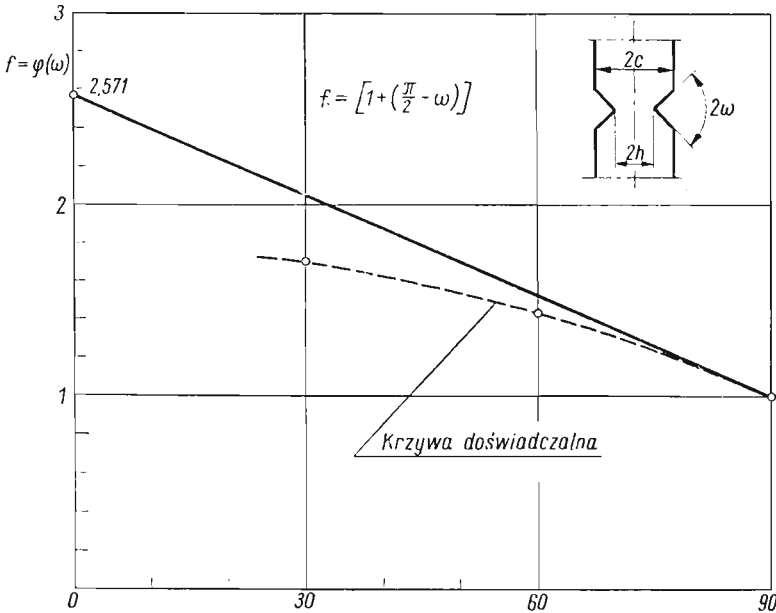
$$(5.1) \quad f_g^I = \varphi(\omega) = \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{2} - \omega \right) \right].$$

Jest to zależność liniowa, której wykres przedstawiono na rys. 7.

Górna ocena  $f$  w polu II wyznaczona dla II sposobu zniszczenia określona jest przez wzór (3.2).

W polu III, w którym najlepszą górną ocenę daje mechanizm III, współczynnik obciążenia określamy ze wzoru (3.5). Należy zwrócić uwagę, że w obszarze ograniczonym

osią  $\kappa$  i liniami  $OBC$  mechanizm III obowiązuje dla  $0 \leq \omega \leq \omega_g$ , natomiast dla  $\omega_g \leq \omega \leq \pi/2$  niższą wartość w tym obszarze daje mechanizm IV według wzoru (3.7). W prosty sposób można znaleźć, że  $\omega_g = \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 54^\circ 44'$ .



Rys. 7

Linie oddzielające poszczególne obszary na rys. 6 mają następujące równania we współrzędnych  $\lambda, \kappa$ .

Linia  $AB$

$$\kappa = 2\varphi(\omega) - 1.$$

Linia  $BC$

- a)  $\lambda = 2\sqrt{2} [\varphi(\omega) - 1]$  dla  $0 \leq \omega \leq \omega_g$ ,
- b)  $\lambda = 2[\varphi(\omega) - 1] \operatorname{tg} \omega$  dla  $\omega_g \leq \omega \leq \pi/2$ .

Linia  $OB$

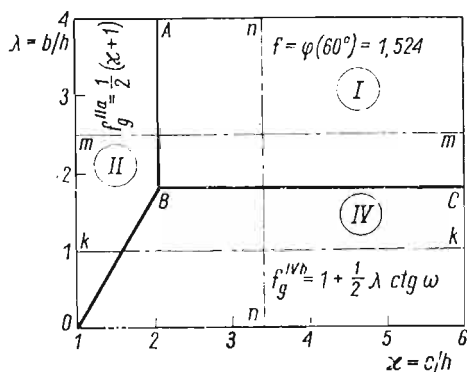
- a)  $\kappa = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$  dla  $0 \leq \omega \leq \omega_g$ ,
- b)  $\kappa = 1 + \lambda \operatorname{ctg} \omega$  dla  $\omega_g \leq \omega \leq \pi/2$ .

### 6. Wyniki doświadczalne

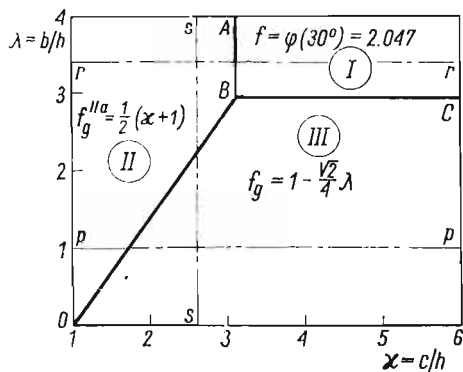
Doświadczenia przeprowadzono na sześciu seriach próbek. Trzy serie próbek z karcami o kącie  $\omega = 60^\circ$  oraz trzy serie o kącie  $\omega = 30^\circ$ . W każdej z tych serii przy zachowaniu stałej wartości  $\omega$  zmieniano parametr  $\lambda = b/h$  utrzymując stały stosunek  $\kappa = c/h$

lub zmieniano  $\kappa$  przy ustalonej wartości  $\lambda$ . Na rys. 8 i 9 podano wykresy mechanizmów plastycznego zniszczenia na płaszczyźnie  $\lambda, \kappa$  dla  $\omega = 60^\circ$  i  $\omega = 30^\circ$ . Na rysunkach tych pokazano następnie liniami przerywanymi z kropkami przecięcia, które zostały zweryfikowane doświadczalnie.

Dwie serie próbek wykonano ze stopu aluminium PA2 (Al Mg3) w stanie miękkim. Stop ten cechuje się bardzo dobrymi własnościami plastycznymi i jest stosowany na średnio obciążone elementy konstrukcji lotniczych, okrętowych i pojazdów mechanicznych.



Rys. 8



Rys. 9

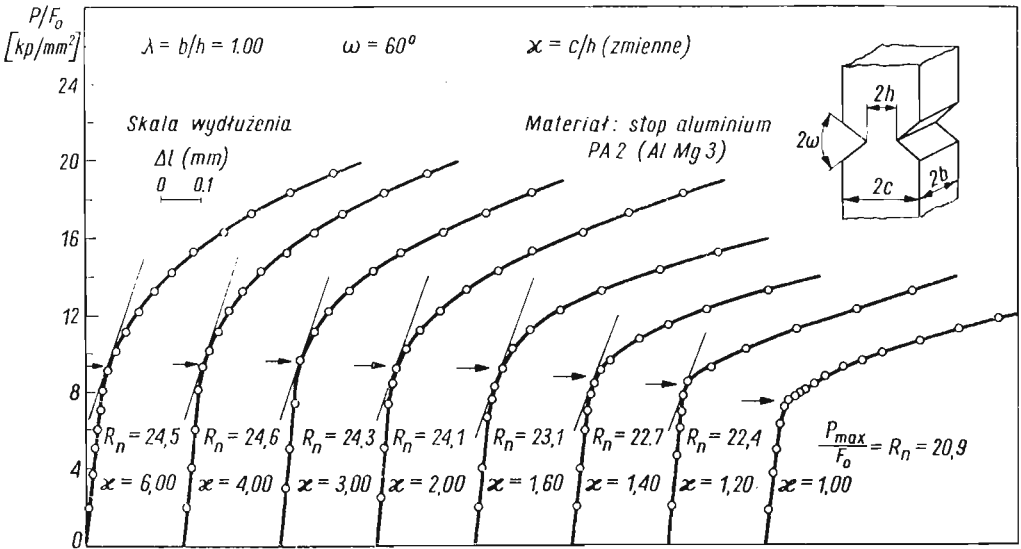
Znajduje również szerokie zastosowanie w urządzeniach przemysłu chemicznego i spożywczego oraz w elementach konstrukcji budowlanych. Pozostałe cztery serie próbek wykonano ze stopu aluminium PA4 (Al Mg1 Si1) w stanie przesyconym i stężonym. Stop ten ma dobre własności plastyczne, ale pod względem własności wytrzymałościowych różni się od stopu PA2 w sposób zasadniczy. Jest stosowany do wyrobu elementów konstrukcji lotniczych i pojazdów mechanicznych.

Przedstawiona w pracy teoretyczna analiza nośności granicznej odnosi się tylko do granicy plastyczności. Jednakże w doświadczeniach oprócz wyznaczenia granicy plastyczności, mierzono również maksymalne obciążenia zrywające  $P_{max}$ , podając przy wykresach wytrzymałość nominalną  $R_n = P_{max}/F_0$ , gdzie  $F_0$  — jest polem początkowego przekroju poprzecznego próbki w najwęższym miejscu karbu. Pomiar maksymalnych obciążeń zrywających elementów z karbami i ich analiza dostarczyły informacji o dużym znaczeniu praktycznym.

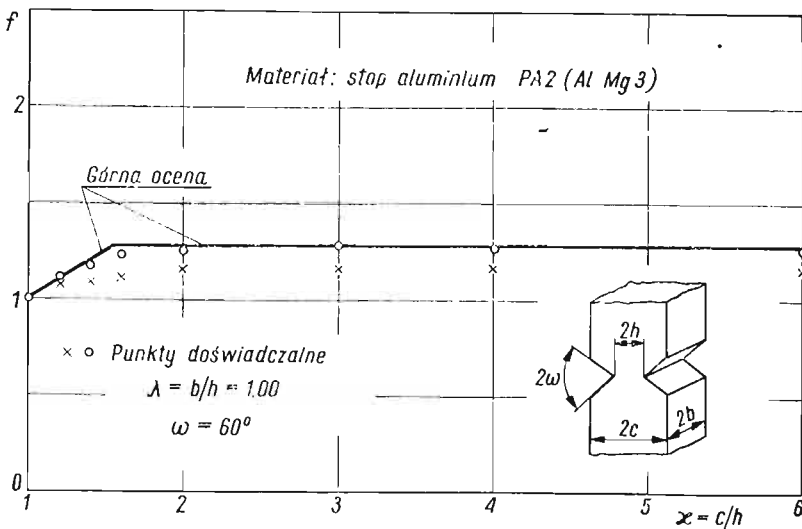
Na rys. 10 i 11 pokazano wyniki doświadczeń dla pierwszej serii próbek o stałym parametrze charakteryzującym kształt karbu  $\omega = 60^\circ$ . W serii tej stałą wartość miał również parametr  $\lambda = 1$ , przy różnych szerokościach części nad karbem wyrażonych przez  $\kappa = c/h$ . Parametrom tym odpowiada linia  $k-k$  na rys. 8. Próbkę wykonano ze stopu aluminium PA2. Na rys. 10 podano początkowe odcinki wykresów naprężenia  $P/F_0$  w funkcji wydłużenia oraz wartości naprężeń nominalnych  $R_n = P_{max}/F_0$  dla próbek z karbami o różnych  $\kappa$  oraz dla próbki bez karbu, dla której  $\kappa = 1$ .

Zależności między granicą plastyczności a parametrem  $\kappa$  są pokazane na rys. 11 razem z teoretycznymi liniami. Punkty oznaczone kółkami odpowiadają doświadczalnym wartościom współczynnika obciążenia granicznego dla prętów z karbami. Otrzymał je dzieląc

wartości granicy plastyczności dla prętów z korbami przez odpowiednią wartość granicy plastyczności dla pręta bez karbu. Z rys. 8 widzimy, że najlepsza teoretyczna górna ocena nośności granicznej dla przekroju *k-k* wynika z mechanizmów II i IV.



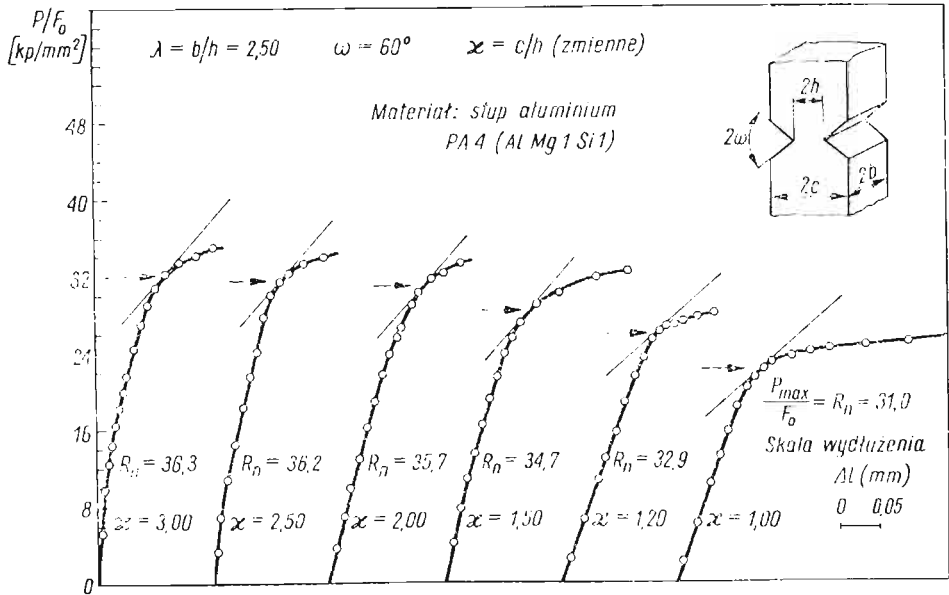
Rys. 10



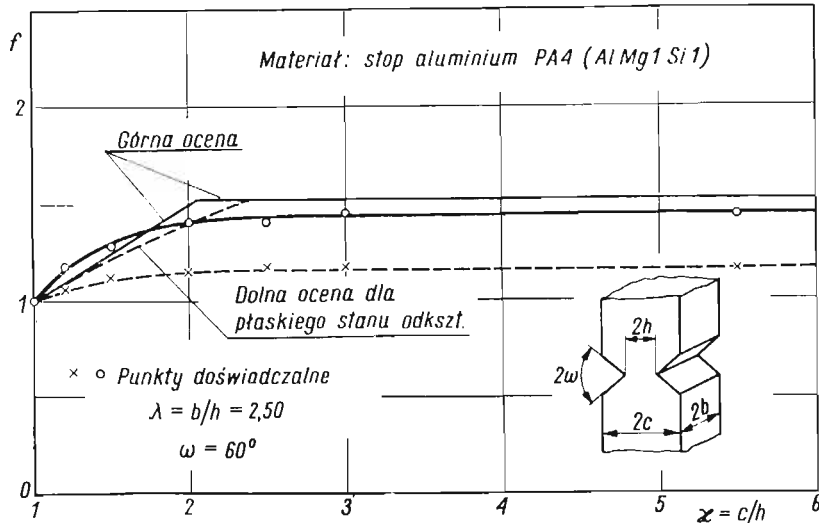
Rys. 11

Identyczne doświadczenia przeprowadzono dla drugiej serii próbek wykonanych ze stopu aluminium PA4 o parametrach wynikających z przekroju *m-m* na rys. 8. Wyniki tych badań przedstawiono na rys. 12 i 13. Najlepszą górną ocenę dla tego przypadku otrzymujemy z mechanizmów zniszczenia plastycznego II i I.

W trzeciej serii próbek dla ustalonych wartości  $\omega = 60^\circ$  i  $\kappa = 3,40$  badano wpływ grubości, określony parametrem  $\lambda = b/h$ , na nośność graniczną. Należy zwrócić uwagę, że  $\kappa$  przyjęto tu znacznie większe niż to, które wynika z teorii. Z rys. 5 widać, że dla  $\omega =$

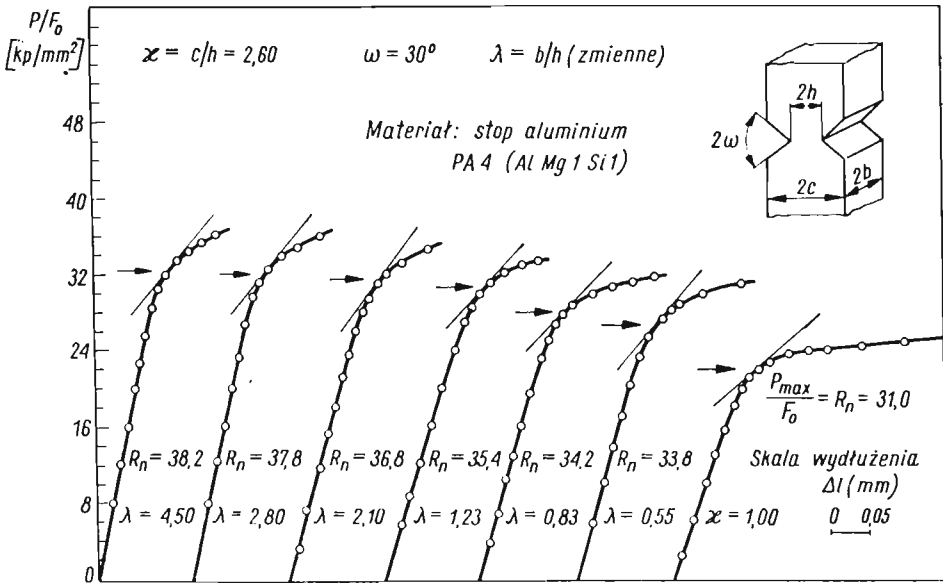


Rys. 12



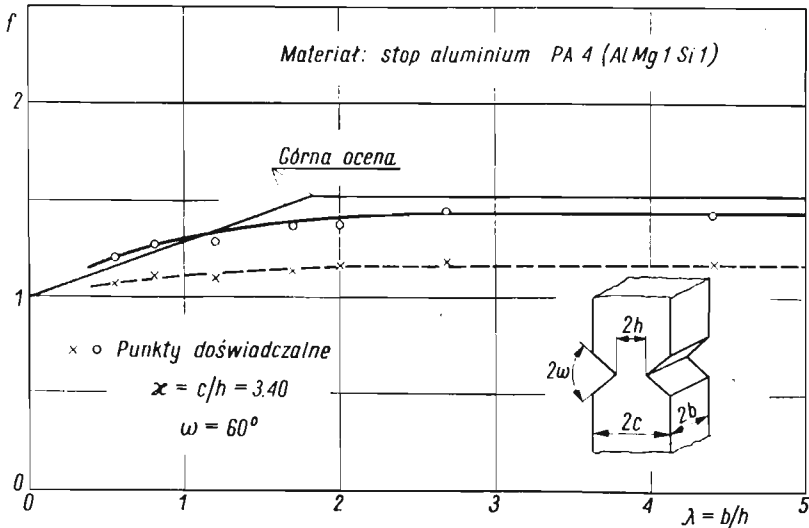
Rys. 13

$= 60^\circ$ ,  $\kappa$  winno mieć wartość 2,35. W doświadczeniu tym sprawdzono przekrój  $n-n$  na rys. 8. Wyniki badań przedstawiono na rys. 14 i 15. Najlepszą górną ocenę nośności granicznej dla tych parametrów dają nam mechanizmy IV i I.



Rys. 14

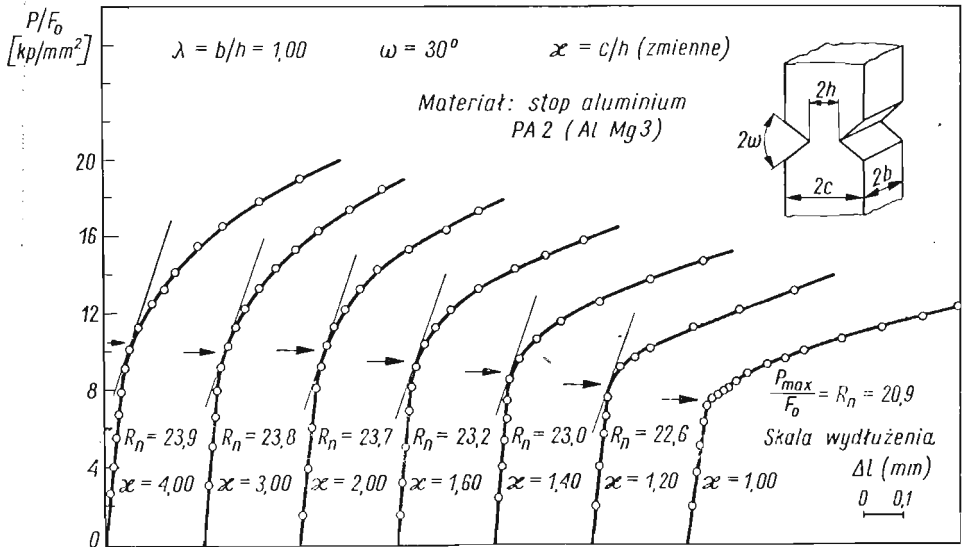
Trzy następnne serie próbek miały karby o jednakowym parametrze  $\omega = 30^\circ$ . Dla tego typu karbów, rozkład mechanizmów plastycznego zniszczenia na płaszczyźnie  $\lambda, \kappa$  pokazano na rys. 9. Weryfikację doświadczalną przekroju  $p-p$  na rys. 9 przeprowadzono na



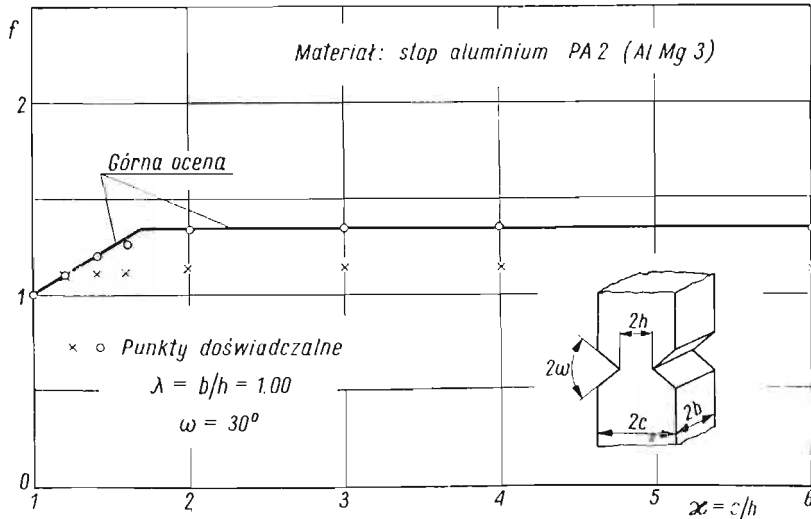
Rys. 15

próbkach wykonanych ze stopu aluminium PA2. Wyniki badań podano na rys. 16 i 17. Najlepsze górne oceny nośności granicznej wynikają dla tych parametrów z mechanizmów II i III.

W serii piątej, próbki wykonano ze stopu aluminium PA4. Cechował je znacznie większy parametr  $\lambda$  w porównaniu z próbkami serii czwartej. Odpowiada to linii  $r-r$  na rys. 9. Wyniki doświadczeń przedstawiono na rys. 18 i 19. Najlepszą górną ocenę nośności gra-



Rys. 16

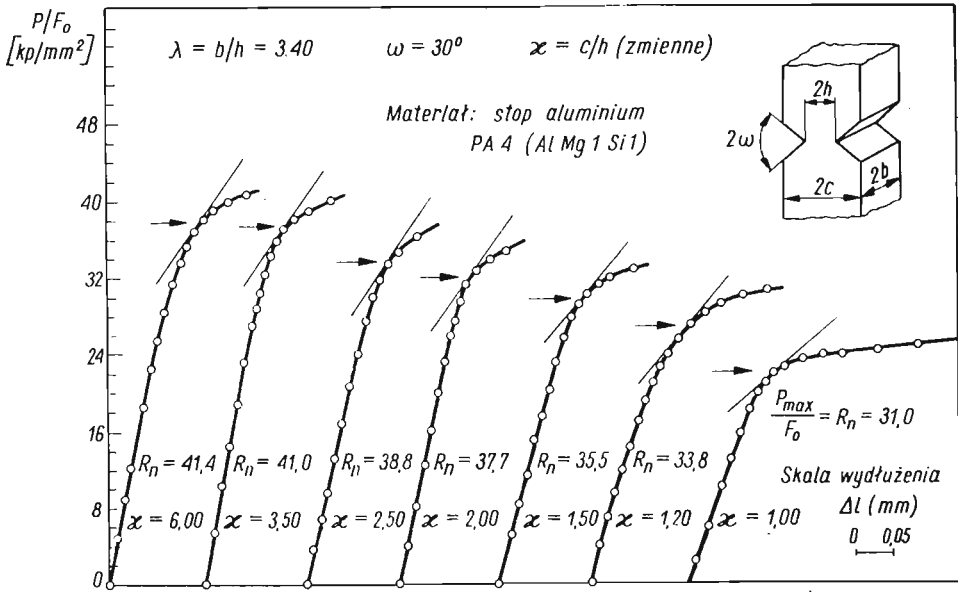


Rys. 17

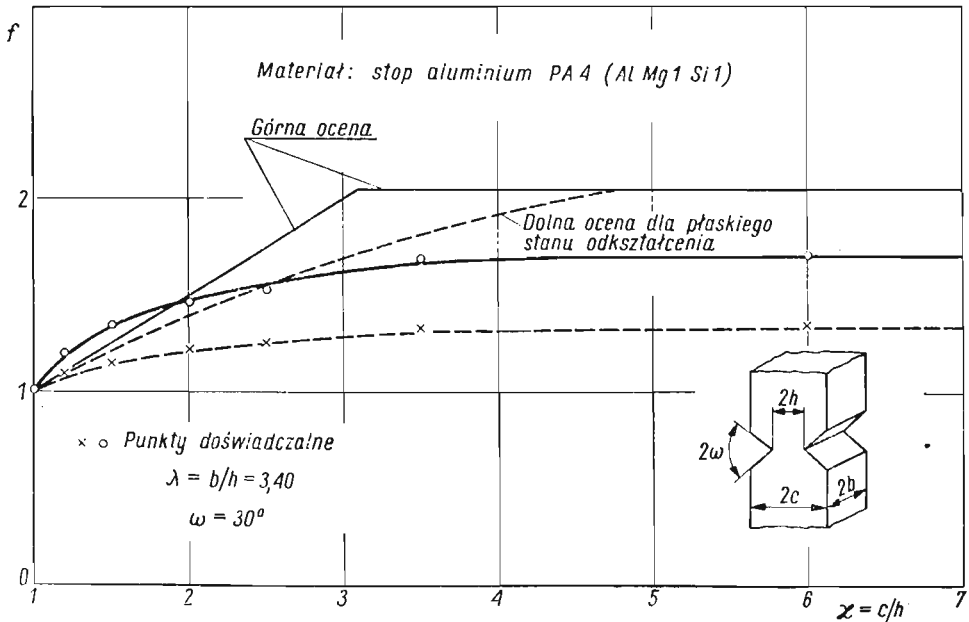
nicznej dają mechanizmy II i I. Dolną ocenę nośności' granicznej określono, tak jak dla drugiej serii, w sposób pokazany na rys. 4. Dla  $\alpha = 4,75$  dolna i górna ocena nośności granicznej dla płaskiego stanu odkształcenia pokrywają się.

W serii szóstej próbki miały stały parametr  $\omega = 30^\circ$  i stałą wartość  $\alpha = 2,60$  przy zmieniającej się grubości wyrażonej przez  $\lambda = b/h$ . Parametry te odpowiadają linii  $s-s$





Rys. 18

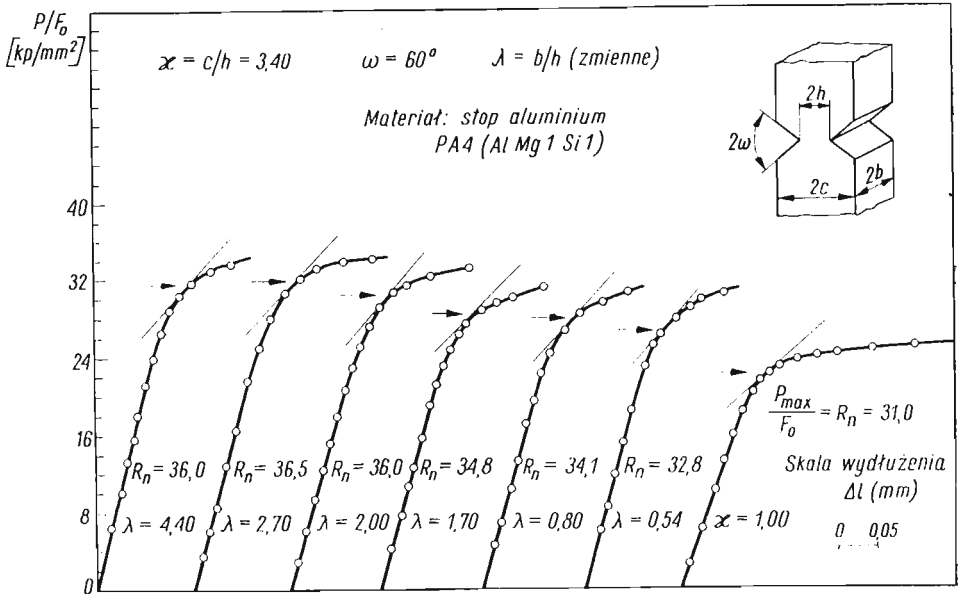


Rys. 19

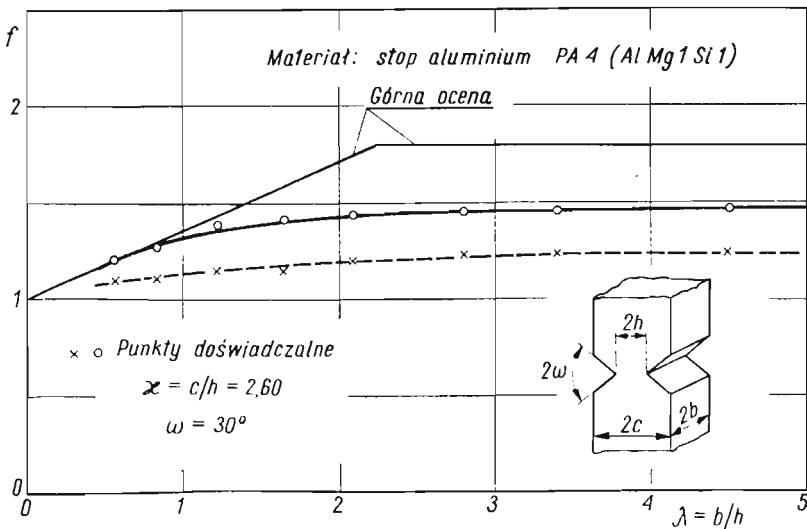
na rys. 9. Wyniki badań tej serii próbek zamieszczono na rys. 20 i 21. Jak wynika z rys. 9, najlepsze górne oceny wyznaczone zostały z mechanizmów III i II.

Porównując uzyskane wyniki na próbkach z materiału PA2 (rys. 11 i 17) z wynikami otrzymanymi na próbkach wykonanych ze stopu aluminium PA4 (rys. 13, 15, 19 i 21),

można stwierdzić, że zgodność wyników doświadczalnych jest lepsza dla materiału bardziej plastycznego, jakim jest stop PA2. Z drugiej strony widać duży wpływ samej geometrii karbu. Na rys. 7 naniesiono punkty doświadczalne odpowiadające największym wartościom rzeczywistego współczynnika nośności granicznej uzyskane dla karbów o kącie  $\omega = 30^\circ$  i  $\omega = 60^\circ$ . Widzimy, że o ile dla karbu o kącie  $\omega = 60^\circ$  różnica między wynikami teoretycznymi i doświadczalnymi wynosi  $\approx 4,5\%$ , to dla karbu o kącie  $\omega = 30^\circ$  różnica ta wynosi  $\approx 16,5\%$ .



Rys. 20



Rys. 21

Na rys. 11, 13, 15, 17, 19 i 21, oprócz punktów odpowiadających granicy plastyczności, naniesiono krzyżykami punkty dla naprężeń nominalnych  $R_n = P_{\max}/F_0$ . Punkty te otrzymano przez odniesienie wartości  $R_n$  dla próbki z karbem do wartości  $R_n$  otrzymanej dla próbki bez karbu. Dla wszystkich badanych próbek stosunek ten jest większy od jedności, ale mniejszy od odpowiednich rzeczywistych współczynników obciążenia granicznego obliczonych dla granicy plastyczności. Na wszystkich rysunkach punkty oznaczone krzyżykami leżą poniżej punktów odpowiadających granicy plastyczności. Różnica między oboma tymi współczynnikami zależy od rodzaju materiału oraz od geometrii karbu i jest tym większa, im mniej plastyczny materiał i bardziej ostry karb.

## 7. Wnioski

Wyniki doświadczeń pokazują, że zgodność między teoretyczną górną oceną granicy plastyczności a jej rzeczywistą wartością jest zupełnie dobra dla stopu aluminium o dobrych własnościach plastycznych. Jednocześnie widać wpływ geometrii karbu i własności plastycznych materiału na zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych.

Jest bardzo interesujące, że wartość naprężenia nominalnego  $R_n = P_{\max}/F_0$  wzrasta wraz ze wzrostem  $\kappa$  do pewnej określonej wartości maksymalnej i dalej już dla wzrastających  $\kappa$  nie ulega zmianie. Widać wyraźnie, że stosunek naprężenia nominalnego  $R_n$  wszystkich próbek z karbem do naprężenia  $R_n$  próbki bez karbu jest dla obu materiałów większy od jedności, ale jednocześnie mniejszy od odpowiednich stosunków obliczonych dla granicy plastyczności. Na rysunkach wyraża się to tym, że punkty oznaczone krzyżykami leżą zawsze niżej od odpowiednich punktów oznaczonych kółeczkami. Dla mniej plastycznego materiału i ostrzejszego karbu, różnica między oboma powyższymi zależnościami jest większa.

Jeżeli chodzi o wpływ grubości próbki na nośność graniczną, to z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że dla  $\lambda = b/h > 2$  zarówno przyrost granicy plastyczności, jak i maksymalnej siły zrywającej jest minimalny. Znaczy to, że w próbkach z korbami o wystarczająco dużym stosunku  $\kappa$  dla  $\lambda > 2$  realizuje się stan zbliżony do płaskiego stanu odkształcenia.

## Literatura cytowana w tekście

1. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2 (1953), 43–53.
2. D. C. DRUCKER, *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485–488.
3. В. С. Жуковский, *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемностью напряженного состояния*, Проблемы прочности в машиностроении, Вып. 2, Изд. АН СССР, Москва 1959.
4. В. С. Жуковский, *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 1958, 116–119.
5. В. С. Жуковский, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, Вып. 9, Машгиз., Москва 1963, 231–252.
6. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inżyn. 13 (1965), 637–652.

7. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER, *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., **32** (1965), 493–503.
8. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *Plastic straining of notched bars with intermediate thickness and small shoulder ratio*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **3** (1967), 83–97.
9. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych prętów z karbem*, Mech. Teoret. Stos., **3**, 3 (1965), 51–78.
10. D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *Extended limit design theorems for continuous media*, Q. Appl. Math., **9** (1952), 381–389.
11. R. HILL, *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **2** (1949), 40.
12. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley Inc., New York 1951, 215–216.
13. F. A. McCLINTOCK, *On notch sensitivity*, Welding Journal Research Supplement, May 1961.

## Р е з ю м е

### НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РАСТЯГИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ С УГЛОВЫМИ НАДРЕЗАМИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ШИРИНОЙ ВНЕ НАДРЕЗОВ

В статье излагается теоретический и экспериментальный анализ несущей способности плоских образцов с угловыми надрезами. Исследовались образцы промежуточных толщин и различных ширин вне надрезов, изготовленные из алюминиевых сплавов PA2 и PA4. Обнаружено, что действительные силы, соответствующие началу пластического течения, хорошо совпадают по величине с верхними оценками несущей способности стержней из сплава PA2, обладающего очень хорошими пластическими свойствами. В случае менее пластичного сплава PA4 это совпадение хуже. Опыты показали также, что существенное влияние на расхождение экспериментальных и теоретических данных оказывает геометрия надреза.

В работе проводились также исследование влияния толщины образца с надрезом на его несущую способность. Обнаружено, что в образцах с достаточно большим отношением  $\lambda$ , при величинах параметра  $\lambda > 2$ , реализуется плоское деформированное состояние.

## S u m m a r y

### PLASTIC YIELDING OF TENSILE V-NOTCHED ELEMENTS WITH ARBITRARY INTERMEDIATE SHOULDER RATIO

Presented is theoretical and experimental analysis of the yield load of V-notched tensile elements with intermediate thickness of various shoulder ratios. The experiments have been performed using two aluminium alloys PA2 and PA4. Experimental results show that the actual loads corresponding to initial stage of plastic flow are in good agreement with theoretical upper limits of yield load for the PA2 alloy displaying very good ductility. For less ductile material PA4 this agreement is worse. It is found, moreover, that the difference between the experimental and theoretical results depends on the angle of the notch.

The influence of the thickness on the yield load of notched elements was tested. The experimental results show that if the shoulder ratio is sufficiently large, for the thickness ratio  $\lambda > 2$  practically the plane state of strain occurs.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1968 r.

# BIULETYN INFORMACYJNY

## XII MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI STOSOWANEJ, STANFORD, CALIFORNIA, 26.VIII.-31.VIII.1968

Międzynarodowe kongresy mechaniki, obradujące co cztery lata począwszy od r. 1924, poświęcone są przeglądowi najnowszych osiągnięć z zakresu mechaniki ciał stałych, cieczy i gazów oraz nauk pokrewnych. Ostatnie dwa kongresy odbyły się w Stresie (1960) i Monachium (1964).

Tegoroczny kongres, dwunasty z rzędu, obradował w Stanford (USA) i trwał tydzień. Został on przygotowany przez 22-osobowy Komitet Kongresów Mechaniki (Polskę reprezentuje w nim prof. W. RUBINOWICZ), 8-osobowy Zarząd Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (Polskę reprezentuje prof. W. OLSZAK), Lokalny Komitet Organizacyjny, liczący 3 osoby (przewodniczący: prof. N. J. HOFF) i 8 doradców, oraz 11-osobowy Zespół Wykonawczy.

Na kongres zgłoszono blisko 1200 referatów, przyjęto do wygłoszenia 291, a mianowicie 4 godzinne wykłady ogólne, 28 referatów półgodzinnych i 259 referatów 15-minutowych. Po wykładach ogólnych nie przewidziano dyskusji, natomiast po wykładach półgodzinnych pozostawiono na dyskusję 10 minut, a po referatach 15-minutowych pozostawiono 5 minut. Obrady odbywały się w godzinach 9.00–17.20, z przerwą na obiad, wynoszącą godzinę i 40 minut.

Tak więc, po maksymalnej chyba redukcji liczby referatów dokonanej podczas poprzedniego kongresu w Monachium, dopuszczono znowu więcej prac do wygłoszenia (Bruksela – ponad 500 prac; Stresa – ponad 200; Monachium – 145; Stanford – 291). Podejście takie przyczyniło się niewątpliwie do zwiększenia liczby uczestników, która znowu wyraźnie przekroczyła 1000, podobnie, jak w Brukseli i w Stresie (w Monachium było 907 uczestników). Oficjalna lista uczestników kongresu w Stanford obejmuje mianowicie 1232 uczestników; została ona zestawiona we środę 28.VIII., a ponieważ w późniejszym terminie przybyło jeszcze kilkadziesiąt osób, więc ostatecznie ilość biorących udział w kongresie można ocenić na 1300 osób. Najliczniejsza była oczywiście delegacja gospodarzy – 815 osób (130) (w nawiasach podano dla porównania liczebność delegacji na poprzednim kongresie w Monachium), dalej, w kolejności, Wielka Brytania była reprezentowana przez 71 osób (142), Francja – 56 (70), NRF – 49 (309), ZSRR – 45 (28), Kanada – 42 (10), Holandia – 34 (47), Japonia – 19 (8). Polska była reprezentowana przez przybyłą z kraju delegację 11-osobową, do której dołączyło się jeszcze 5 osób, przebywających w USA na stażach lub kontraktach; dziewięciu członków delegacji reprezentowało Polską Akademię Nauk (prof. W. NOWACKI, przewodniczący delegacji; profesorowie: W. OLSZAK, S. KALISKA i A. SAWCZUK, docenci: M. BURNAT, P. PE-RZYNA, J. RYCHLEWSKI i S. ZAHORSKI oraz dr Z. MOSSAKOWSKA), a pozostałe dwie – Ministerstwo Oświaty i Szkolnictwa Wyższego (prof. M. ŻYCZKOWSKI i doc. S. ŁUKASIEWICZ). Ogółem delegacje reprezentowały 29 państw ze wszystkich pięciu części świata.

Spośród przyjętych referatów najwięcej wygłosili przedstawiciele Stanów Zjednoczonych (10 referatów półgodzinnych + 99 referatów 15-minutowych), ZSRR (2 + 27), Francji (3 + 24), Wielkiej Brytanii (3 + 22), NRF (3 + 21), Japonii (1 + 9), Polski (1 + 8) i Kanady (0 + 9). Przedstawiciele innych państw wygłosili nie więcej, niż 6 referatów. Ogółem referaty wygłosili przedstawiciele 27 państw.

Pewną klasyfikację tematyki referatów przeprowadzili już organizatorzy kongresu, grupując je po kilka lub kilkanaście i tytułując poszczególne obrady sekcyjne. Po dokonaniu pewnej dalszej komasacji

(np. połączeniu działu «teoria powłok» z działem «analiza powłok») oraz włączeniu referatów półgodzicznych (które nie były podciągnięte przez organizatorów pod żadną wspólną tematykę) zestawimy tematykę referatów następująco:

### I. Mechanika ciał stałych

1. Teoria i analiza powłok	25
2. Dynamika	23
3. Podstawy teorii ośrodków ciągłych	22
4. Stateczność powłok	16
5. Pełzanie, reologia	16
6. Fale sprężyste i plastyczne	15
7. Teoria sprężystości	14
8. Rozprzestrzenianie się szczelin, pękanie	12
9. Teoria plastyczności	9
10. Teoria drgań	7
11. Konstrukcje, optymalizacja	5
12. Dynamika powłok	5
razem	<u>169</u>

### II. Mechanika cieczy i gazów

1. Aerodynamika	19
2. Przewodnictwo i stateczność ruchu cieczy	12
3. Fale w cieczech	11
4. Warstwa przyścienna	11
5. Biomechanika	10
6. Mechanika płynów	10
7. Przepływy cieczy lepkich	8
8. Przepływy burzliwe	8
9. Magnetohydrodynamika	6
10. Zjawiska swobodnych powierzchni	5
11. Fale uderzeniowe	5
12. Hydrodynamika molekularna	4
razem	<u>109</u>

### III. Zagadnienia mieszane

1. Aerosprężystość	5
2. Metody matematyczne	4
razem	<u>9</u>
ogółem	<u>287</u>

Tak więc mechanice ciał stałych poświęcono wyraźnie więcej referatów, niż mechanice cieczy i gazów; podobną sytuację można było zaobserwować podczas kongresów w Brukseli i w Stresie, natomiast w Monachium obie te dziedziny były reprezentowane jednakowo. W zakresie mechaniki ciał stałych zwraca uwagę bardzo duża liczba prac poświęconych teorii powłok (ogółem 46 prac), tak, że niemal zawsze jedna z sekcji była poświęcona zagadnieniom powłok.

Obrady kongresu rozpoczęły się w poniedziałek, 26.VIII.68., o godz. 9.30, uroczystym otwarciem w amfiteatrze im. Frosta pod gołym niebem. Amfiteatr liczy 8000 miejsc, więc został zapelniony tylko

w niewielkiej części; z uwagi na dość ostre słońce uczestnicy starali się zajmować miejsca w cieniu. Wykłady ogólne zostały wygłoszone w liczącej 1700 miejsc sali, poświęconej pamięci poległych podczas I i II wojny światowej. Klimatyzacja tej sali działała bez zarzutu, natomiast w salach obrad sekcyjnych klimatyzacja nie była całkowicie sprawna, co przy fali upałów wyjątkowych nawet, jak na Kalifornię, dawało się odczuć dość nie mile. Obrady odbywały się równolegle w pięciu sekcjach, z tym, że za jedną z sekcji obrad popołudniowych uznano wycieczkę bądź do instytutu badawczego NASA (instytut aeronautyki i przestrzeni kosmicznej) bądź zwiedzanie liniowego akceleratora Uniwersytetu w Stanford (20 bilionów elektronowoltów). Program kongresu przewidywał ponadto: w sobotę 24.VIII. — zwiedzanie San Francisco; w niedzielę — całonocną wycieczkę na półwysep Monterey; w poniedziałek — przyjęcie uczestników kongresu przez rektora Uniwersytetu w Stanford, J. W. STERLINGA, w parku otaczającym jego dom; we środę — wycieczkę statkiem po zatoce San Francisco; w piątek — oficjalny bankiet, który odbył się pod gołym niebem.

Nie mając możliwości omówienia, lub choćby nawet przytoczenia tytułów wszystkich 291 referatów, poprzestaniemy na krótkim omówieniu czterech godzinnych wykładów ogólnych i 28 półgodzinnych referatów wyselekcjonowanych przez Komitet Organizacyjny Kongresu.

Wykłady ogólne miały charakter raczej popularny; ich streszczenia nie były zamieszczone w księdze streszczeń, lecz uczestnicy otrzymywali tekst oryginalny w języku angielskim lub francuskim. F. K. G. ODQVIST (Djursholm, Szwecja) wygłosił wykład «Mechanika nieliniowa: przeszłość, terażniejszość i przyszłość», szczególną uwagę zwrócono na problemy nieliniowości fizycznej, a przede wszystkim na problemy pelzania. M. A. ŁAWRENTIEW (Moskwa) w wykładzie «Schematyzacja matematyczna problemów hydrodynamiki» omówił podstawowe pojęcia tej dziedziny i zwrócił uwagę na zastosowanie metod analogii. Wykład L. GAUTHIER (Paryż) «Wyboczenie i problemy niestateczności w ujęciu elementarnym» dał obszerny przegląd historyczny od czasów Eulera i Lagrange'a; zwrócono uwagę na pewne kierunki nowoczesne, jak niekonserwatywne zagadnienia stateczności, stateczność przy pelzaniu itp. Wreszcie ostatni wykład ogólny «Fale w przepływach warstwowych» wygłosił J. W. MILES (San Diego, California).

Referaty półgodzinne omówimy w kolejności ich wygłaszania. W poniedziałek, 26.VIII., wygłoszono tylko dwa takie referaty. J. BAUMGARTE i E. KRÖNER (Darmstadt) przedstawili pracę «3N — wymiarowa mechanika uogólnionych ośrodków ciągłych»; zakładając krystaliczną budowę materii zaproponowano — przez przejście do granicy — koncepcję uogólnionego kontinuum, składającego się z  $n$  sub-kontinuów. Teorię Cosseratów otrzymuje się wtedy jako przypadek szczególny. L. E. HULBERT, G. T. HAHN, A. R. ROSENFIELD i M. F. KANNINEN (Columbus, Ohio) wygłoszili referat «Sprężysto-plastyczna analiza rozpręsztrzenia się szczeliny w tarczy o skończonej wielkości»; praca miała charakter teoretyczno-doświadczalny, ujęcie teoretyczne oparto o model Dugdale'a przy różnorodnych warunkach brzegowych.

W program obrad wtorkowych włączono sześć referatów półgodzinnych. Referat nieobecnego Ju. N. RABOTNOWA (Moskwa) «Krucze zniszczenie przy pelzaniu w warunkach koncentracji naprężeń» przedstawił H. BESSELING (Delft). Autor sugerował uwzględnienie wpływu mikropęknięć na przegrupowanie naprężeń poprzez włączenie stosownego współczynnika funkcyjnego do równań fizycznych; otrzymuje się wtedy z reguły układ równań hiperbolicznych, które można scałkować metodą charakterystyk. W. FLÜGGE i J. C. GERDEEN (Stanford, California) przedstawili pracę «Osiowo-symetryczne schematy plastycznego zniszczenia powłok w oparciu o warunek plastyczności Nakamury». Warunek Nakamury określa przybliżoną powierzchnię graniczną w czterowymiarowej przestrzeni sił wewnętrznych powłoki; autorzy wykorzystali go do analizy nośności granicznej powłoki stożkowej, poddanej obciążeniu potrójnie złożonemu. Referat L. S. WOO i F. FREUDENSTEINA (Nowy Jork) «O krzywych syntezy w zagadnieniach kinematyki płaskiej» podał ogólną metodę określania miejsc geometrycznych punktów, których tor wykazują wyższy rząd stateczności z danymi krzywymi. W. SCHIELEN i O. KOLBE (Monachium) wygłoszili referat «Uogólnienie orbit Keplera w przypadku dużych satelitów»; autorzy stwierdzili, że orbity niestateczne mogą wystąpić w przypadku satelitów o znacznej długości — ich apogeum i perigeum przestaje być ustalone w przestrzeni. E. H. MANSFIELD (Farnborough, Anglia) przedstawił pracę «Teoria pól naprężeń w membranach». Autor podał pewną metodę wariacyjną, wykazującą, jego zdaniem, zasadniczą wyższość nad dotychczas stosowanymi metodami tradycyjnymi; zwrócono również uwagę na analogię między problemami tarcz a problemami płyt. Wreszcie P. T. PEDERSEN (Kopenhaga) badał w referacie «Stateczność wałów niesymetrycznie giętko ułożyskowanych» drgania samowzbudne takich wałów; szczegółowej analizie poddano przypadek, gdy masa wału jest skupiona w jednym punkcie.

Cztery referaty półgodzinne wygłoszono we środę. Pierwszy z nich przedstawił G. I. TAYLOR (Cambridge, Anglia), uczestnik wszystkich dotychczasowych dwunastu kongresów mechaniki; jego praca «Dwa rodzaje niestateczności cieczy» podawała zarówno ogólne podstawy teoretyczne, jak i bardzo szczegółowo rozpracowane przykłady liczbowe. S. B. BERNDT (Sztokholm) wygłosił referat «W sprawie osiowo-symetrycznego dźwiękowego opływu ciał smukłych»; zaproponowano kilka różnych metod analizy, wykorzystujących metodę małego parametru w otoczeniu ciała opływanego i asymptotyczne rozwinięcie Guderley'a, ważne w dostatecznie dużym oddaleniu. A. VAN DER NEUT (Delft, Holandia) przedstawił pracę «Współzależność wybożenia lokalnego i wybożenia integralnego w przypadku ściskanych słupów cienkościennych». Autor stwierdził bardzo istotny wpływ wybożenia lokalnego na stateczność słupa jako całości, zwłaszcza w zakresie bliskich wartości sił krytycznych dla obu tych zjawisk z osobna. Ostatnia referowana praca, J. KEMPNERA i Y. N. CHENA (Brooklyn) «Stan pokrytyczny osiowo ściskanej powłoki walcowej owalnej», stanowiła rozwinięcie poprzednich prac tych autorów. Zastosowano metodę małego parametru i stwierdzono, że rzeczywista nośność badanej powłoki może być znacznie wyższa, niż w przypadku powłoki kolistej.

W program obrad czwartkowych i piątkowych włączono po sześć referatów półgodzinnych. We czwartek pierwszy referat wygłosił J. D. ROBSON (Glasgow): «Dedukcje z reakcji na przypadkowe drgania wymuszone», proponując pewne uproszczone metody analizy takich drgań. Referat J. DREXLERERA i O. KROPAČA (Letnany, Czechosłowacja) «O pewnej klasie nieliniowych stochastycznych równań różniczkowych scharakteryzowanych przez przypadkowe wymuszenie parametryczne» dotyczył badań zmęczenia pewnych konstrukcji lotniczych; podano również weryfikację doświadczalną przedstawionej teorii. P. CARRIERE, M. SIRIEIX i J. L. SOLIGNAC (Paryż) przedstawili pracę «Właściwości podobieństwa zjawisk rozwarstwiania laminarnego lub burzliwego w niejednorodnym przepływie naddźwiękowym»; rozważano przepływ płaski lub osiowo-symetryczny, a wyniki obliczeń skonfrontowano następnie z wynikami licznych doświadczeń, przeprowadzanych przy różnych liczbach Macha i Reynoldsa. Obszerną pracę doświadczalną «Moment skręcający związany z osiowo-symetrycznymi komórkami Taylora» przedstawili W. DEBLER, E. FÜNER i B. SCHAAF (Ann Arbor, Michigan); autorzy przeprowadzili ponad 100 doświadczeń nad statecznością przepływu Couette'a i wyciągnęli liczne wnioski o znacznej ogólności. K. KIRCHGÄSSNER i P. SORGER (Freiburg, NRF) wygłosili referat «Analiza stateczności rozwiązań równań Naviera-Stokesa»; podano matematycznie ścisłą teorię stateczności ruchów drugiego rzędu nieściślej cieczy lepkiej. Wreszcie W. W. RUSANOW i A. N. LUBIMOW (Moskwa) przedstawili pracę «Studia nad przepływami wokół ciał tępych przy pomocy metod numerycznych»; zbadano przepływ pomiędzy falą uderzeniową a ciałami opływanymi zarówno w zakresie pod- jak i naddźwiękowym.

Pierwszy półgodzinny referat przedstawili w piątek H. ASHLEY i S. C. McINTOSH (Stanford) «Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w aerosprężystości». Zwrócono uwagę na pewne związki z optymalnym kształtowaniem elementów drgających, podkreślając jednak całkowitą oryginalność postawionego problemu; jako przykład rozpatrzono optymalne kształtowanie prostokątnej membrany o zadanej wartości własnej flatteru. Następny referat «Przepływy pulsujące w arteriach», który wygłosili S. C. LING i H. B. ATABEK (Waszyngton), stanowił interesujący wkład do biomechaniki; autorzy przeprowadzili liczne doświadczenia i porównali je z istniejącymi teoriami. A. FAVRE, R. DUMAS i E. VEROLLET (Marsylia) przedstawili pracę «Analiza burzliwych fluktuacji temperatury i prędkości w warstwie granicznej»; badano doświadczalnie zachowanie się burzliwej warstwy granicznej przy płaskiej płycie podgrzanej oraz zaproponowano pewne ujęcie teoretyczne. R. E. KAPLAN i J. LAUFER (Los Angeles) w pracy «Obszar warstwy granicznej o nieciągłej burzliwości» podali wyniki pomiarów w obszarze, w którym ruch przechodzi z burzliwego w nieburzliwy. J. LIPKIN i R. J. CLIFTON (Providence, Rhode Island) przedstawili pracę «Doświadczalne badania złożonych podłużnych i skrętnych fal plastycznych w rurze cienkościennej». Rurki aluminiowe poddawano statycznemu skręcaniu plastycznemu, a następnie uderzeniu podłużnemu; z uwagi na występujące sprzężenie stwierdzono również pojawienie się dynamicznych odkształceń skrętnych. Ostatni w tym dniu referat wygłosił J. MANDEL (Paryż): «O różnych konsekwencjach prawa ograniczającego możliwe postacie równań stanu»; korzystając z zasad termodynamiki i badając rozprzestrzenianie się fal nieciągłości sformułowano pewne ograniczenia dotyczące ośrodków sprężysto-plastycznych.

W ostatnim dniu obrad, w sobotę, wygłoszono cztery referaty półgodzinne. C. C. MEI (Cambridge, Massachusetts) zreferował pracę «Dyfspersja jednorodnej masy w cieczy uwarstwionej»; proces podzielono na trzy stadia, z których dwa (początkowe i końcowe) zostały opisane analitycznie, natomiast nie podano



teorii stadium środkowego. W. R. B. MORRISON i R. E. KRONAUER (Brisbane, Australia) przedstawili pracę «Podobieństwo strukturalne dla ruchu czysto burzliwego w rurach gładkich»; autorzy przeprowadzili liczne pomiary wielkości charakterystycznych dla ruchu burzliwego w zakresie liczb Reynoldsa od 40000 do 150000 i wyciągnęli pewne wnioski o charakterze ogólnym. J. BEJDA (Warszawa) wygłosił referat «Rozchodzenie się dwuwymiarowych fal naprężenia w materiale sprężysto-lepkoplastycznym». Badano rozchodzenie się fal w półprzestrzeni obciążonej na brzegu w sposób dowolny; otrzymano układ sześciu semiliniowych równań hiperbolicznych, które całkowano metodą różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk. Ostatni referat półgodzinny wygłosili T. KUNIO i Y. MIYANO «Badania fotolepkosprężyste przy zastosowaniu gumy poliuretanowej»; stwierdzono, że do badanego materiału stosuje się teoria liniowej fotolepkosprężystości i wykonano dwa doświadczenia, dotyczące płyty kwadratowej z otworem w środku oraz rozchodzenia się fal w pręcie z otworem.

Polscy uczestnicy obrad zreferowali – oprócz omówionego już półgodzinnego referatu J. BEJDY – następujące prace: M. BURNAT – «Metoda niezmienników Riemanna dla wielowymiarowych układów nieeliptycznych»; J. KLEPACZKO – «Badanie prędkości odkształceń żelaza w warunkach czystego ścinania»; S. ŁUKASIEWICZ – «Równania technicznej teorii powłok przy uwzględnieniu wpływu ścinania»; W. OLSZAK i Z. BYCHAWSKI – «Energetyczne podstawy określania stanów granicznych w sprężysto-lepkoplastyczności»; P. PERZYNA – «O fizycznych podstawach lepkoplastyczności»; A. SAWCZUK – «Kresy górne obciążeń plastycznego przystosowania się powłok»; M. WNUK – «Opóźnione pękanie w ciałach sprężysto-lepkoplastycznych»; M. ŻYCZKOWSKI – «Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w reologii».

Uroczyste zamknięcie obrad odbyło się w sobotę 31.VIII., o godz. 14. Przewodniczący Komitetu Lokalnego Kongresu, prof. N. J. HOFF, podziękował wszystkim referentom i dyskutantom, a także współorganizatorom kongresu. Podał on również do wiadomości wyniki wyborów władz IUTAM; wybory te odbyły się w trakcie trwania kongresu. Na miejsce ustępującego przewodniczącego, prof. M. ROY (Francja), został wybrany dotychczasowy skarbnik, prof. W. T. KOITER (Holandia), natomiast skarbnikiem został prof. F. NIORDSON (Dania).

Propozycję zorganizowania następnego, XIII Międzynarodowego Kongresu Mechaniki, który będzie obradował w roku 1972, zgłosiły Moskwa i Delft. Miejsce i dokładny termin kongresu zostaną ostatecznie ustalone dopiero w roku 1969.

*Michał Życzkowski, Kraków*

## ZAWIADOMIENIE

Akademia Nauk ZSRR oraz Międzynarodowa Akademia Astronautyczna organizują w dniach 24—29 sierpnia 1969 r. w Nowosybirsku II Międzynarodowe Kolokwium poświęcone problemom gazodynamiki wybuchu i układów reagujących.

Przedmiotem gazodynamiki wybuchu są zagadnienia wzajemnych powiązań między procesami transportu energii w ośrodku ściśliwym oraz związanym z nimi niestalonym ruchem tego ośrodka (np. zjawiska wybuchu, detonacji, fal uderzeniowych).

Przedmiotem gazodynamiki układów reagujących są sprzężone zjawiska przepływu i reakcji chemicznych oraz przemian molekularnych w ośrodkach heterogenicznych.

Propozycje referatów mogą być kierowane do członków komitetu programowego kolokwium: prof. dra Władysława FISZDONA — Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, lub prof. dra Dionizego SMOLEŃSKIEGO — Katedra Silników Spalinowych Przemysłowych i Lotniczych Politechniki Warszawskiej, Warszawa, ul. Nowowiejska 25.

Zgłoszenie referatu powinno obejmować jego skrót o objętości nie większej niż 1000 słów oraz niezbędną liczbę rysunków i musi być nadesłane nie później niż do dnia 1 maja 1969 r. Wcześniejsze zgłoszenia są bardzo wskazane.

## WYNIKI KONKURSU

Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej ogłosił na rok 1968 konkurs na najlepszą teoretyczną pracę naukową z zakresu konstrukcji maszynowych i budowlanych.

Na konkurs wpłynęło 12 prac, które oceniał Sąd Konkursowy w składzie: prof. dr Z. BRZOSKA — przewodniczący, prof. dr J. LIPKA, doc. dr B. KRAJEWSKI, doc. dr Z. MRÓZ i doc. dr W. SZCZEPIŃSKI — członkowie.

Na podstawie opinii recenzentów oraz po dokonaniu wnikliwej analizy prac, Sąd Konkursowy powziął uchwałę o przyznaniu nagród, która zatwierdzona została przez Zarząd Oddziału Warszawskiego PTMTS w dniu 13 grudnia 1968 r.

I-szą nagrodę w wysokości zł. 10 000.— przyznano doc. dr Henrykowi FRĄCKIEWICZOWI, mgr Adamowi LEGATOWI i mgr Janowi LEWIŃSKIEMU za pracę pt. «Geometryczna zmienność wielosegmentowych niegładkich konstrukcji powierzchniowych».

Dwie II-gie nagrody po zł. 5500.— każda:

1. drowi Zenonowi WASZCZYŹYŃOWI za pracę pt. «Ścisłe równania i obliczanie skończonych sprężysto-plastycznych ugięć ortotropowych powłok obrotowo-symetrycznych»,
2. drowi Edwardowi WŁODARCZYKOWI za pracę pt. «Rozprzestrzenianie się i odbicie kulistej fali obciążenia od gładkiej nieodkształcalnej płaskiej przegrody w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym».

## SPROSTOWANIE

W związku z artykułem St. OCHĘDUSZKI pt.: «Termodynamika techniczna w Polsce w okresie ostatniego dziesięciolecia» zamieszczonym w zeszytu 3/68 komunikujemy, że w Katedrze Techniki Ciepłej Politechniki Gdańskiej zatrudnionych jest od kilku lat 6 pracowników ze stopniem doktora nauk technicznych, w tym jeden docent habilitowany i jeden docent etatowy.

**Następny zeszyt Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej będzie zawierał prace:**

- S. BORKOWSKI, Przegląd prac dotyczących naprężeń termicznych w ciałach stałych w latach 1965—1967.  
Обзор работ, касающихся термических напряжений в твердых телах (1965—1967)  
Thermal stresses in solid. Survey of papers published in 1965-1967
- J. KŁEPACZKO, O pewnym przypadku anizotropii  
О некотором случае анизотропии  
On a certain case of anisotropy
- Z. WIŚNIEWSKI, Analiza układu wibro-uderzeniowego z nieliniową charakterystyką  
Анализ виброударной системы с нелинейной упругой характеристикой  
Analysis of a vibratory-impact system with nonlinear spring characteristics
- J. ORKISZ, J. WILK, Numeryczne obliczanie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń  
Численное решение о пластическом течении гибких оболочек вращения в области конечных деформаций  
Numerical calculation of flexible rotationally-symmetric shells subjected to plastic flow at finite strains
- Z. WESOŁOWSKI, Skończone odkształcenia sprężystego klina i stożka  
Конечные деформации упругого клина и конуса  
Finite deformations of an elastic wedge and cone
- W. BARAŃSKI, Statyka powierzchniowych ośrodków włóknistych  
Статика поверхностной волокнистой среды  
Statics of surface fibrous media

Cena zł 30.—

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się począwszy od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---

Mech. teor. T. 7 z. 1 s. 1—104 Warszawa 1969.  
Indeks 36712