

J II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 6 • ZESZYT 1



Pw<sup>a</sup>

534 : 621.01

WARSZAWA 1968

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

<p>J. MIASTKOWSKI, Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności (część II)                  Влияние истории нагружения на поверхность текучести. Часть II.                  On the effect of the prestraining history on the yield surface. Part II.</p>	3
<p>K. PUSTELNIK, Cz. WOŹNIAK, Obliczanie tarcz siatkowych przy wykorzystaniu przybliżonej teorii efektu brzegowego                  Расчет сетчатых дисков основанный на использовании приближенной теории краевого эффекта                  Edge effect in dense latticetype disc structures</p>	33
<p>J. MURZEWSKI, J. SOJKA, O efekcie skali ciała kruchego wytrzymującego ustaloną koncentrację mikro-uszkodzeń                  О масштабном эффекте для хрупкого тела, выдерживающего установленную концентрацию микро-повреждений                  On the size effect in brittle bodies capable to sustain a certain concentration of microdamage</p>	43
<p>B. KOWALCZYK, Analiza układu wibro-uderzeniowego z tarciem suchym                  Анализ виброударной системы при наличии сухого трения                  Analysis of a vibratory-impact system with solid friction</p>	63
<p>Z. OSIŃSKI, Dekrement drgań tłumionych jednocześnie tarciem wewnętrznym (wiskotycznym) i konstrukcyjnym                  Декремент демпфированных колебаний системы с внутренним (вязким) и конструкционным трением                  Damping decrement of vibrations effected simultaneously by the viscotic and structural friction</p>	71
<p>Z. K. LEŚNIAK, Optymalizacja kształtu łuku jako przekroju dźwigarów sklepieniowych                  Оптимализация формы арочного сечения перекрытий                  Optimum design of the arch section of shell beams</p>	79
<p>B. RADZISZEWSKI, A. RÓŻYCKI, Układ o dwóch stopniach swobody jako „dynamiczny izolator” drgań                  Система с двумя степенями свободы как „динамический изолятор” колебаний                  The system with two degrees of freedom as a „dynamic vibrator absorber”</p>	93
<p>Biuletyn Informacyjny</p>	

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
---

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 6 • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 6 8  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN — PRZEWODNICZĄCY  
EDMUND KARASZKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM  
MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH  
(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZA-  
WA) · STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE)  
WACŁAW OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN  
PIĄTEK (GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

## K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR  
CZESŁAW EIMER · JÓZEF JANICZEK  
MAREK SOKOŁOWSKI · WOJCIECH SZCZEPIŃSKI

## REDAKCJA

W a r s z a w a, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 700 (572+128) egz. Arkuszy wydawn. 8,0. Arkuszy drukarskich 7,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g. 70×100. Oddano do składania 31.X.1967 r., druk ukończono w marcu 1968 r. Cena zł 30.—

Zam. 1819/67 N-25. Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

WPLYW HISTORII OBCIĄŻENIA NA POWIERZCHNIĘ PLASTYCZNOŚCI  
(CZĘŚĆ DRUGA)

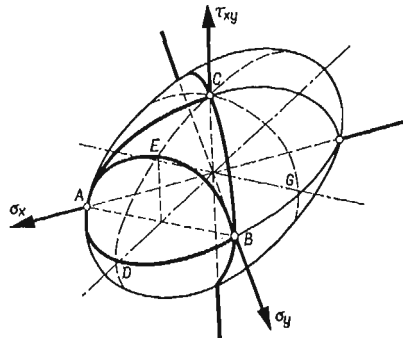
JÓZEF MIASTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

**1.1. Uwagi ogólne.** Przejście ciała ze stanu sprężystego w plastyczny w przypadku obciążenia go złożonym stanem naprężenia można opisać pewnym związkiem pomiędzy naprężeniami, nazywanym warunkiem plastyczności.

Najprostszy warunek plastyczności zakłada, że materiał przechodzi w stan plastyczny w chwili, kiedy maksymalne naprężenia styczne osiągają pewną krytyczną wartość niezależną od stanu naprężenia. Warunek ten nosi nazwę warunku Treski.

Drugim podstawowym warunkiem płynięcia, dobrze potwierdzonym przez doświadczenia, jest warunek Hubera-Misesa-Hencky'ego.



Rys. 1

Weryfikacja doświadczalna warunków plastyczności ze względu na trudność przeprowadzenia eksperymentu odbywa się głównie w płaskim stanie naprężenia.

Warunek Hubera-Misesa dla płaskiego stanu naprężenia przyjmuje postać

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2,$$

gdzie  $k$  jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu. W przestrzeni naprężeń  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  równanie to określa powierzchnię elipsoidalną pokazaną na rys. 1. Dla danego programu obciążenia otrzymujemy na tej powierzchni krzywe, które możemy zweryfikować doświadczalnie.

Dla rzeczywistych metali wykazujących wzmocnienie warunki plastyczności Hubera-Misesa oraz Treski przestają obowiązywać natychmiast po pojawieniu się w procesie obciążenia nawet małych odkształceń plastycznych. Zjawisko wzmocnienia wskazuje,

że początkowa powierzchnia plastyczności ulega zmianie, przy czym na skutek istnienia efektu Bauschingera zmiany te nie mogą być symetryczne. Wobec powyższego warunki plastyczności Hubera-Misesa i Treski dla metali ze wzmocnieniem stanowią tylko punkt wyjścia określający początek odkształceń plastycznych. W dalszym ciągu musimy znać w każdym momencie procesu odkształcenia ciągle zmieniający się kształt i położenie powierzchni plastyczności. Ścisły opis matematyczny tych zmian jest ze względu na ich złożoność bardzo trudny i dlatego jest opisywany za pomocą uproszczonych zależności zwanych hipotezami wzmocnienia.

Najstarsza koncepcja wzmocnienia podana przez G. J. TAYLORA i H. QUINNEYA [1] a następnie przez F. K. G. ODQUISTA [2] nosi nazwę wzmocnienia izotropowego. Zakłada ona równomierne rozszerzanie się początkowej powierzchni plastyczności.

Teoria poślizgów S. B. BATDORFA i B. BUDIANSKY'EGO [3, 4], a następnie zmodyfikowana przez T. H. LINA [5] oparta została na fizycznych rozważaniach uwzględniających poślizgi ziaren w przyjętym mechanizmie plastycznych odkształceń. Teoria ich postuluje powstawanie ostrego naroża na powierzchni płynięcia w kierunku wstępnych odkształceń plastycznych. Jednakże zgodnie z ich teorią poślizgów pozostała część początkowej powierzchni płynięcia w pewnej odległości od naroża jest niezmiennona.

W pracy [3] podano porównanie teorii z wynikami doświadczenia przeprowadzonego na próbkach z aluminium przy prostym rozciąganiu. Teoria wykazała doskonałą zgodność przy małych odkształceniach, ale dawała rozbieżności przy większych wartościach poślizgu.

W dążeniu do uwzględnienia efektu Bauschingera została wysunięta przez E. MELANA [6], A. ISZLIŃSKIEGO [7] i W. PRAGERA [8], a następnie przez R. T. SCHIELDA i H. ZIEGLERA [9] teoria wzmocnienia kinematycznego. Według tej teorii można przyjąć, że cała powierzchnia plastyczności w przestrzeni naprężeń ulega pod wpływem odkształceń plastycznych przesunięciu jak ciało sztywne nie zmieniając ani kształtu, ani rozmiarów. W pracy F. EDELMANA i D. C. DRUCKERA [10] została wytyczona droga zbudowania teorii plastyczności uwzględniającej efekt Bauschingera.

W roku 1953 W. T. KOITER [11] zastosował do opisu powierzchni płynięcia idee odcinkowo-liniowej aproksymacji powierzchni plastyczności. Teorię tę następnie rozwinięto w pracach J. L. SANDERSA [12], P. G. HODGE'A [13] i W. PRAGERA [8, 14]. Teoria ta polega na tym, że funkcję obciążenia rozpatruje się w postaci kombinacji pewnej skończonej lub nieskończonej liczby funkcji obciążenia, działających zależnie lub niezależnie od siebie. W tego typu teoriach pojawiają się stożkowe punkty na powierzchni plastyczności. Według W. T. KOITERA teorię poślizgów można również uważać jako teorię typu odcinkowo-liniowego wzmocnienia. Teorie odcinkowo-liniowego wzmocnienia charakteryzują się dużą przydatnością do opisu poruszających się powierzchni w procesie plastycznej deformacji. Wartość tych teorii leży głównie w tym, że pozwalają dostatecznie dokładnie opisać podstawowe własności fizyczne kryształów.

W roku 1953 I. F. BESSELING [15] przedstawił teorię plastyczności opartą na założeniu, że materiał składa się z różnych warstw kolejno włączających się do plastycznego płynięcia. Teoria ta nadaje się do opisu anizotropii pojawiającej się w metalu podczas jego plastycznego odkształcenia.

Inną próbę matematycznego ujęcia tych złożonych zjawisk stanowi teoria J. I. KADASZEWICZA i W. W. NOWOŻYŁOWA [16] uwzględniająca mikronaprężenia. Według tej teorii,

powierzchnia plastyczności ulega w czasie procesu odkształcenia plastycznego równomiernemu rozszerzeniu z zachowaniem podobieństwa geometrycznego oraz jednoczesnemu przesunięciu bez obrotu. Zbliżoną w ujęciu teorię przedstawił również T. LEHMAN [17, 18].

G. I. BYKOWCEW, W. W. DUDUKALENKO i D. D. IWLEW [19] przedstawili różne formy funkcji obciążenia dla materiałów plastycznych ze wzmocnieniem anizotropowym. W pracy wykazali, że w zależności od wyboru funkcji obciążenia można opisywać różne efekty. Między innymi można opisać obracanie krzywej obciążenia oraz poprzeczny efekt Bauschingera polegający na rozszerzaniu się powierzchni plastyczności w kierunku prostopadłym do wstępnego obciążenia bez jej zmian w kierunku wstępnego obciążenia.

A. BAŁTOW i A. SAWCZUK [20] podali prawo wzmocnienia dla uwzględnienia anizotropii wywołanej w materiale przez plastyczne odkształcenia. W pracy badano przejście od materiału początkowo izotropowego do materiału anizotropowego. Proponowany przez autorów warunek uwzględnia przesunięcie, obrót oraz rozszerzanie się początkowej powierzchni plastyczności.

Interesujący model wzmocnienia zaproponował w roku 1967 Z. Mróz [21]. Model ten jest uogólnieniem znanych zasad izotropowego i kinematycznego wzmocnienia przez wprowadzenie pojęcia «pola modułów wzmocnienia». Pole to jest określone w przestrzeni naprężeń przez układ powierzchni o stałym module wzmocnienia. Dla każdej historii obciążenia, mogą być określone chwilowe układy i w ten sposób można określić zachowanie się materiału dla złożonych dróg obciążenia, a w szczególności dla obciążeń cyklicznych.

**1.2. Weryfikacja doświadczalna.** Doświadczalna weryfikacja różnych koncepcji teoretycznego ujęcia bardzo złożonego zjawiska wzmocnienia przeprowadzana jest niemal wyłącznie w płaskim stanie naprężenia, jaki daje się zrealizować w cienkościennych rurkowych próbkach obciążonych różnymi kombinacjami siły osiowej, momentu skręcającego i ciśnienia wewnętrznego.

W klasycznej pracy G. J. TAYLORA i H. QUINNEY'A [1] próbki rurkowe wstępnie rozciągano siłą osiową powyżej granicy plastyczności. Jeżeli przyjmiemy, że elipsoida na rys. 1 przedstawia początkowy warunek plastyczności nieodkształconego materiału, to odpowiada to przekroczeniu punktu  $A$  na osi  $\sigma_x$ . Następnie po częściowym odciążeniu próbki obciążano dodatkowo momentem skręcającym przy utrzymywaniu stałej wartości naprężeń rozciągających. Dla każdej próbki otrzymywano wykres wydłużenia w zależności od momentu skręcającego. Jako granicę plastyczności przyjmowano przecięcie przedłużenia łagodnej części krzywej z osią momentów. Uzyskane wyniki dla stali, miedzi i aluminium przedstawiono na płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ . Punkty doświadczalne leżą na krzywych bardzo zbliżonych do elips Hubera-Misesa. Oznacza to, że początkowa elipsa  $AC$  na rys. 1 uległa na skutek wstępnego odkształcenia próbek przez rozciąganie jedynie rozszerzeniu nie zmieniając ani położenia ani stosunku długości półosi. Potwierdza to koncepcję izotropowego wzmocnienia. Musimy jednak pamiętać, że wniosek ten dotyczy powierzchni wyznaczonej w sposób, który pomijał najciekawszą, silnie zakrzywioną część wykresu wydłużenia w funkcji momentu skręcającego. Dlatego niemożliwe jest wyciągnięcie z tej pracy szerszych wniosków odnośnie zachowania się powierzchni płynięcia przy odkształceniach plastycznych.

Podobne wyniki potwierdzające koncepcję izotropowego wzmocnienia otrzymali D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSON i J. E. DORN [22] w roku 1947.

W roku 1949 D. C. DRUCKER przeprowadził w pracy [23] matematyczny dowód, że teoria, która przyjmuje warunek izotropowego wzmocnienia, jest fizycznie niedopuszczalna, a w roku następnym F. S. SHAW i G. W. WYCHERLEY [24] przedstawili doświadczenie, którego wyniki obalają koncepcję izotropowego rozszerzania się powierzchni plastyczności.

Po ukazaniu się teorii poślizgów S. B. BATDORFA i B. BUDIANSKY'EGO [4] zostały przeprowadzone doświadczenia przez R. W. PETERSA, N. F. DOWNA i S. B. BATDORFA [25] w roku 1950 oraz przez H. CICALA [26] w tym samym roku. Wyniki tych doświadczeń nie wykazały zgodności z teorią poślizgów.

Doświadczenia przeprowadzone przez B. BUDIANSKY'EGO, N. I. DOWA, R. W. PETERSA i R. P. SHEPHERDA [28] w roku 1951 nie wskazują również na istnienie «naroża» na powierzchni plastyczności, co wynika z teorii poślizgów. Nie stwierdzono naroża także ani w pracy J. L. M. MORISONA i W. M. SHEPHERDA [29], ani w pracy D. C. DRUCKERA i F. D. STOCKTONA [30]. Jednakże w roku 1953 J. MARIN i L. HU [31] podali wyniki swoich badań na rurkowych próbkach ze stopu aluminiowego, potwierdzające istnienie «rogu» na powierzchni płynięcia. Wykazali oni również niemożliwość istnienia takiego naroża plastycznego w teorii izotropowego wzmocnienia.

Na istnienie naroży na krzywej obciążenia wskazują również dwie dalsze prace doświadczalne przeprowadzone przez P. M. NAGHDIEGO i J. C. ROWLEY'A [32] w roku 1954, oraz przez P. M. NAGHDIEGO, J. C. ROWLEY'A i C. W. BEADLE'A [33] w roku 1955. W pracy [33] badano cienkościennie próbki rurkowe z aluminium poddając je rozciąganiu ze skręcaniem. Przeprowadzono trzy serie badań, w których każdą próbkę początkowo odkształcano za przedział sprężystego obszaru przy proporcjonalnych zmianach siły i momentu. Po osiągnięciu określonej wielkości plastycznych odkształceń obciążenie prowadzono dalej po piłowej drodze w płaszczyźnie naprężeń  $\sigma_z$ ,  $\tau_{z0}$  tak, że prosta proporcjonalnego obciążenia była osią symetrii tej piłowej drogi. Na podstawie prób w ten sposób przeprowadzonych stwierdzono istnienie naroża plastycznego na powierzchni płynięcia. Wniosek ten jednak według A. M. ŻUKOWA [34] jest wątpliwy i wskazuje na nieporozumienie. Trajektorie obciążenia mają bowiem punkty załamania, ale brak jest prostej relacji między nimi a punktami załamania plastycznego potencjału.

W roku 1956 J. MARIN i L. HU w pracy [35] podali wyniki doświadczeń przeprowadzonych na cienkościennych rurkowych próbkach ze stali, potwierdzających teorię poślizgów. W tym samym jednak roku wyniki pracy W. A. SWIESZNIKOWEJ [36] nie potwierdzają tej teorii.

P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG i W. KOFF [37] w roku 1958 rurkowe próbki ze stopu aluminiowego początkowo obciążali momentem skręcającym znacznie powyżej punktu  $C$  na rys. 1, a następnie po całkowitym odciążeniu każdą próbkę ponownie obciążali momentem skręcającym i siłą osiową równocześnie. Na podstawie wyników przedstawionych w płaszczyźnie naprężeń osiowych i ścinających stwierdzono, że krzywa dla materiału nieodkształconego dobrze pokrywa się z elipsą  $AC$  (rys. 1) dla warunku plastyczności Hubera-Misesa. Jeżeli chodzi o powierzchnię płynięcia dla materiału odkształconego to stwierdzono, że pokrywa się ona z początkową powierzchnią w warunkach czystego rozciągania, a znacznie od niej odbiega w miarę wzrostu stosunku naprężeń ścinających do naprężeń normalnych. Początkowa elipsa pod wpływem odkształceń plastycznych uległa



zdeformowaniu oraz przesunięciu. W otoczeniu punktu wstępnego obciążenia powstał silnie zakrzywiony wierzchołek.

W tym samym roku L. W. HU i J. F. BRATT [38] badali również wtórną powierzchnię płynięcia dla materiału wstępnie odkształconego plastycznie i pokazali tworzenie się rogu w kierunku wstępnego odkształcenia plastycznego. Do badania użyli oni rurkowych próbek wykonanych ze stopu aluminium. Jeżeli chodzi o początkową powierzchnię plastyczności, to dość dobrze pokrywa się ona z elipsą Hubera-Misesa.

Bardzo cenne doświadczenia przeprowadzili JU. I. JAGN i O. A. SZYSZMARIEW [39] w roku 1958. Do badania użyli oni wyżarzonych rurkowych próbek niklowych o średnicy 5 mm i grubości ścianki 0,2 mm. Dla wyjściowego materiału granica między przedziałami sprężystym i plastycznym odpowiadała ściśle kryterium Hubera-Misesa. W pracy podano wyniki badania granicy sprężystego stanu materiału w płaskim stanie naprężenia, otrzymywanego drogą rozciągania i skręcania próbek uprzednio odkształconych plastycznie na drodze osiowego rozciągania. Na rys. 1 odpowiada to badaniu krzywej  $AC$  po odkształceniu za punkt  $A$ . Do określenia granicy stosowano dwie metody. Metodą pierwszą powierzchnie badano na jednej próbce, przy zastosowaniu drugiej do badania powierzchni użyto kilku próbek. Stwierdzono, że badanie powierzchni na jednej próbce jest obarczone poważnym błędem. W metodzie tej bowiem kolejne punkty krzywej otrzymuje się w ten sposób, że obciążenie prowadzi się do momentu pojawienia się minimalnych odkształceń plastycznych, następnie po częściowym odciążeniu ponownie obciążamy próbkę tak, aby otrzymać następny punkt powierzchni. Stwierdzono, że te minimalne odkształcenia plastyczne wywołane w próbce przy określeniu jednych punktów mają duży wpływ na położenie punktów następnych na powierzchni plastyczności. Oprócz tego, innym źródłem błędów przy zastosowaniu tej metody jest pełzanie materiału, które odbywa się nawet przy naprężeniach niższych od tych, które przykładano do próbki w chwili określania punktów granicy stanu sprężystego. Przy zastosowaniu drugiej metody wszystkie próbki najpierw wstępnie jednakowo odkształcono siłą osiową do określonej wartości odkształcenia trwałego i po odpowiednio długim przetrzymaniu pod tym obciążeniem (czasy przetrzymywania stosowano różne) próbki stopniowo odciążano i dociążano przez skręcanie. Na każdy punkt powierzchni badano inną próbkę. Wyznaczono kilka powierzchni plastyczności przez przyjęcie dla każdej innej wartości odkształcenia trwałego od 0,0005% do 0,036%. Wyniki doświadczeń wskazują, że we wszystkich przypadkach granice plastyczności przemieszczają się w kierunku osi naprężeń  $\sigma_x$ , przy czym w przypadku granicy określonej dla odkształcenia trwałego 0,0005% jest ona przesunięta całkowicie w obszar dodatnich wartości  $\sigma_x$ . Wyznaczone wektory przyrostów plastycznych odkształceń we wszystkich przypadkach otrzymano bliskie normalnym do granicy sprężystości materiału. Oprócz tego na żadnej z otrzymanych granic nie stwierdzono jakichkolwiek naroży, na istnienie których wskazują inne badania. Bardziej szczegółowy opis powyższej pracy wynika stąd, że badania przeprowadzone były z wyjątkowo dużą dokładnością, a otrzymane powierzchnie dla różnych wartości plastycznych odkształceń i przy różnych metodach prowadzenia badań wskazują na wnikliwą analizę postawionych problemów. Dlatego też wnioski otrzymane z tej pracy można uważać za jedno z cenniejszych wyników eksperymentalnych.

W roku 1958 A. M. ŻUKOW [40] przedstawił wyniki badań krzywej neutralnego obciążenia przy dwuosiowym rozciąganiu oraz przy rozciąganiu ze skręcaniem po wstępnym

odkształceniu ciśnieniem wewnętrznym. Do badania użyto próbek rurkowych z czystego aluminium. Z pracy wynika, że krzywa neutralnego obciążenia odbiega znacznie od elipsy Hubera-Misesa; skłoniło to autora do stwierdzenia, że dowolna funkcja zależna tylko od intensywności naprężeń nie może być brana za potencjał plastyczny. Nie stwierdzono również istnienia naroży na krzywej neutralnego obciążenia.

W pracy H. G. McCOMBA [41] z roku 1960 zostały przedstawione wyniki prób przeprowadzonych na cienkościennych próbkach rurkowych z aluminium dla zbadania kształtu wtórnej powierzchni płynięcia. Po wstępnym odkształceniu plastycznym przy czystym rozciąganiu próbki obciążano ponownie wzdłuż różnych dróg promieniowych i stwierdzono znaczne naroże na powierzchni, rozwijające się w kierunku wstępnego odkształcenia.

Do podobnego wniosku o tworzeniu się ostrego wierzchołka w punkcie obciążenia doszli w swoich pracach A. PHILLIPS [42, 43] oraz A. PHILLIS i G. GRAY [44].

W roku 1960 w pracy G. B. TALYPOWA i W. N. KAMIENCEWA [45] przedstawiono badania doświadczalne wpływu drogi obciążenia na formę i wielkość granicy plastyczności. Do badania użyto rurkowych próbek z nisko węglowej wyżarzanej stali. Próbki poddawano działaniu siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego po wstępnym odkształceniu osiowym. Na podstawie uzyskanych wyników podano, że umowna granica płynięcia przy złożonym stanie naprężenia nie ma na swojej powierzchni żadnego naroża plastycznego. Wniosek ten został potwierdzony również i w następnych pracach [46, 47]. Za umowną granicę płynięcia przyjęto krzywą naprężenia, dla której intensywność odkształcenia była równa 0,17%. W wyniku wstępnego plastycznego odkształcenia w danym kierunku granica plastyczności uległa przesunięciu w tym kierunku. Podano również, że forma granicy plastyczności dla stali o niskiej zawartości węgla nie zależy od drogi obciążenia.

Do ciekawych wniosków doszedł H. J. IVEY [48] badając wtórną powierzchnię płynięcia na cienkościennych próbkach rurkowych ze stopów aluminium. Próbki wstępnie skręcane aż do wywołania wstępnego odkształcenia plastycznego i częściowo odciążone ponownie obciążano przez rozciąganie i skręcanie. Z pracy wynika, że wtórna powierzchnia przesuwa się w kierunku wstępnego odkształcenia, że jest gładka bez naroży i że towarzyszy jej znaczny efekt Bauschingera. Jako powierzchnię plastyczności przyjmowano granicę proporcjonalności.

P. K. BERTSCH i W. N. FINDLEY [49] przeprowadzili doświadczalne badania początkowej i wtórnej — po wstępnym odkształceniu — powierzchni plastyczności na rurkowych próbkach aluminiowych. Próbki poddawano różnym kombinacjom siły osiowej, skręcania i ciśnienia wewnętrznego. Stwierdzono, że początkowa powierzchnia płynięcia nie pokrywa się z elipsą Hubera-Misesa wykazując jednak do niej dość duże podobieństwo. W odniesieniu do wtórnej powierzchni zaobserwowano wszędzie wypukłość oraz istnienie znacznych zaokrąglonych naroży zgodnych z teorią poślizgów.

Wykonane tymczasem w tym samym roku przez B. PAULA, W. CHENA i L. LEE [50] doświadczenia poświęcone badaniu rogów na wtórnej powierzchni nie potwierdziły faktu ich istnienia.

Dla wyjaśnienia czy istnieją naroża na granicy plastyczności zostały również przeprowadzone w latach 1962 i 1963 badania przez O. A. SZYSZMARIEWA w pracach [51, 52]. Badając zarówno próbki niklowe jak i stalowe w obu tych pracach nie stwierdzono istnienia

naroża na wtórnych powierzchniach plastyczności. W pracy [51] zajmowano się również zbadaniem kształtu tej części powierzchni, która leży po przeciwnej stronie punktu wstępnego obciążenia. Za granicę plastyczności przyjmowano krzywą naprężenia, dla której intensywność odkształcenia plastycznego była równa 0,01%. Wyniki pracy wskazują, że wtórna powierzchnia plastyczności może przesuwać się poza początek układu współrzędnych podobnie jak to stwierdzono w pracach R. WOOLEY'A [53], JU. I. JAGNA i O. A. SZYSZMARIĘWA [39] oraz H. J. IVEY'A [48].

W roku 1963 G. L. BARAYA i I. PARKER [54] przedstawili próbę określenia początkowej i wtórnej powierzchni plastyczności dla czystego aluminium i jego stopów przy użyciu pasków z nacięciami. Z doświadczeń wynika, że materiał podlega kryterium płynięcia w formie  $f(J_2, J_3) = 0$ . Wniosek ten jednak w tym przypadku należy traktować ostrożnie, ponieważ materiał był nie zupełnie izotropowy. Określenie powierzchni po wstępnym odkształceniu tą metodą doprowadziło do paradoksalnego wyniku, że leży ona wewnątrz początkowej. Wynika stąd, że metoda powyższa nie nadaje się do wyznaczania wtórnej powierzchni plastyczności.

Odmiennej schemat doświadczenia dla zbadania zachowania się początkowo izotropowego materiału w zależności od plastycznej deformacji przedstawił W. SZCZEPIŃSKI w roku 1963 w pracy [55]. Próby przeprowadzone zostały na płaskich próbkach ze stopu aluminium. Wykorzystano przy tym elipsę  $AEB$  na elipsoidzie pokazanej na rys. 1. Elipsa ta utworzona jest przez przecięcie elipsoidy płaszczyzną  $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{p1}$  prostopadłą do płaszczyzny  $\sigma_x, \sigma_y$ . Wyniki doświadczenia wskazują po pierwsze na silną deformację i przesunięcie początkowej elipsy dla wstępnie odkształconego materiału i po drugie na brak naroża plastycznego na powierzchni płynięcia w kierunku wstępnego obciążenia.

W roku 1964 I. PARKER i M. B. BASSETT [56] przedstawili wyniki badań cienkościennych rurek z mosiądzu  $\alpha$  poddanych skręcaniu i działaniu ciśnienia wewnętrznego po uprzednim wstępnym skręceniu plastycznym. Jest to kontynuacja prac J. PARKERA i współpracowników, wydanych w latach 1959 i 1961 [57, 58]. Wyniki pracy wskazują na brak naroża na powierzchni, na brak przesuwania się powierzchni oraz na istnienie silnego efektu poprzecznego. Stwierdzono również lekki obrót wtórnej powierzchni plastyczności.

Ciekawe wyniki doświadczenia otrzymali w tym samym roku 1964 W. M. MAIR i H. PUGH [59]. Cienkościenna próbki rurek z miedzi wstępnie odkształcone przez rozciąganie lub skręcanie poddawano ponownie działaniu kombinacji rozciągania i skręcania dla ustalenia powierzchni plastyczności. Stwierdzili oni, że wtórna powierzchnia płynięcia uległa rozszerzeniu, przesunięciu i obrotowi. Zauważono, że wzrost rozmiaru powierzchni i przesunięcie środka są w przybliżeniu proporcjonalne do wielkości wstępnego odkształcenia, obrót natomiast malał wraz ze wzrostem wstępnego odkształcenia. Praca nie dostarczyła danych o istnieniu naroża na powierzchni plastyczności.

R. A. ARUTUNIAN [60] zajmuje się wyznaczeniem powierzchni plastyczności dla materiału wstępnie odkształconego po zamkniętym cyklu obciążenia. Rurkowe próbki stalowe poddawane są obciążeniu skręcającemu w ten sposób, że końcowy stan naprężenia i odkształcenia jest równy zeru. Następnie po takim cyklu wstępnego obciążenia badano symetrię plastycznych własności materiału poddając próbki osiowemu i obwodowemu rozciąganiu. Pokazano, że w płaszczyźnie  $\tau_{xy} = 0$  (rys. 1) powierzchnia plastyczności uległa izotropowemu rozszerzeniu. Natomiast w płaszczyźnie  $\sigma_x = 0$  lub  $\sigma_y = 0$  powierzch-

nia przesunęła się w kierunku końcowego stanu wstępnego obciążenia. Z pracy widać wyraźnie, że anizotropia wywołana plastycznym odkształceniem nie może być usunięta na drodze mechanicznego działania. Sprawdzono, że materiał wyjściowy był makroskopowo izotropowy i początkowa granica plastyczności odpowiadała warunkowi Hubera-Misesa. Za kryterium uplastycznienia przyjmowano naprężenia, przy których wartość intensywności odkształceń trwałych wynosiła 0,17%.

Liczną grupę doświadczeń poświęconych badaniom wtórnej powierzchni plastyczności stanowią prace G. B. TALYPOWA i jego współpracowników [45, 46, 47, 61–66]. W pracach [46, 47, 62] badano wpływ wstępnych odkształceń plastycznych na granicę plastyczności nisko i średnio węglowej stali i ustalono, że forma granicy płynięcia nie zależy od drogi obciążenia i pozostaje okręgiem na płaszczyźnie Iljuszyna jedynie rozszerzonym i przesuniętym w kierunku wstępnej deformacji. Identyczne stwierdzenie uzyskano przy badaniu próbek z miedzi w pracy [61]. W innych pracach zajmowano się wpływem naturalnego starzenia po wstępnej plastycznej deformacji na zachowanie się powierzchni plastyczności. W pracach [46, 63] wykazano, że naturalne starzenie po plastycznej deformacji nie ma wpływu na kształt granicy płynięcia. Dlatego też wpływ ten można badać za pomocą prób na jednoosiowe rozciąganie. Wykazano również, że po wstępnym odkształceniu granica plastyczności podczas starzenia ulega początkowo rozszerzeniu, a następnie maleje dążąc do rozmiarów wyjściowych przed starzeniem. W pracy [64] przeprowadzono badania wpływu starzenia na powierzchnię zarówno w płaskim stanie naprężenia, jak i przy jednoosiowym rozciąganiu. Dla opisu zmiany granicy plastyczności podczas naturalnego starzenia zaproponowano pewną funkcję zależną od stopnia wstępnego odkształcenia. Parametry wchodzące do tej funkcji muszą być określone na drodze doświadczalnej. Określeniem tych wielkości dla stali zajmowano się w pracach [65, 66].

P. S. THEOCARIS i C. R. HAZELL [67] badali początkową i wtórną powierzchnię plastyczności dla aluminium używając do badania płyt zamiast cienkościennych próbek rurkowych. Stosowana metoda pozwoliła na wyznaczenie powierzchni w czterech ćwiartkach płaszczyzny naprężeń. Ugięcie obciążonych płyt mierzono metodą rastrów. Wyniki badań wskazują, że początkowa powierzchnia płynięcia przebiega między powierzchniami wyznaczonymi z warunku Hubera-Misesa i z warunku Treski. Jeżeli chodzi o wtórną powierzchnię płynięcia, to widoczne są na niej naroża powstałe w kierunku wstępnego obciążenia. Stwierdzono również, że w kierunku prostopadłym do kierunku wstępnego obciążenia powierzchnia wychodzi na zewnątrz początkowej powierzchni plastyczności. Do uzyskanych wyników można mieć jednak zastrzeżenia ze względu na niejednorodny rozkład naprężeń na grubości płyty podczas jej obciążania.

W roku 1964 BUI HUY DUONG [68] przedstawił badania zmiany kształtu powierzchni plastyczności wywołanej odkształceniem plastycznym dla żelaza Armco i dla aluminium. Próbkę rurkową poddawano działaniu różnych kombinacji skręcania i rozciągania lub skręcania i ściskania. Dla wyznaczania powierzchni używano tylko jednej próbki przyjmując za granicę plastyczności naprężenia wywołujące odkształcenia trwałe równe  $2 \cdot 10^{-5}$ . Nie stwierdzono «wierzchołka» na powierzchni plastyczności jak to wynika z teorii poślizgów. Wtórna powierzchnia nie potwierdza również ani teorii izotropowego, ani teorii kinematycznego wzmocnienia. Interesujące jest to, że po wstępnym obciążeniu na złożonej drodze stwierdzono istnienie wypukłości na powierzchni plastyczności, ale w pewne

odległości od kierunku wstępnego obciążenia w przeciwieństwie do przypadku obciążenia promieniowego, gdzie wypukłość na powierzchni pojawiła się w kierunku wstępnego obciążenia.

W pracy D. R. JENKINSA [69] z roku 1965 przeprowadzono teoretyczną i doświadczalną analizę zachowania się powierzchni plastyczności dla odkształconych próbek rurkowych wykonanych ze stopu cynku, poddanych kombinacji działania siły osiowej, ciśnienia wewnętrznego i skręcania. Otrzymane wyniki bardzo dobrze potwierdzają teorię kinematycznego wzmocnienia dla przyjętych liniowych warunków plastyczności (dla warunku Treski i dla warunku maksymalnego naprężenia zredukowanego).

W roku 1965 J. MIASTKOWSKI i W. SZCZEPIŃSKI [70] przedstawili pracę, w której omówiono wyniki doświadczeń przeprowadzonych na cienkościennych próbkach rurkowych z mosiądzu M-63. W pracy zajmowano się badaniem powierzchni plastyczności dla materiału wyżarzzonego oraz dla tego materiału odkształconego plastycznie kombinacją siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego. Wykazano, że dla pewnych przypadków obciążenia po złożonej drodze powierzchnia plastyczności ulega obrotowi. Wyznaczone przyrosty odkształceń plastycznych w płaszczyźnie naprężeń porównano z kryterium prostopadłości. Przez znalezienie długości wektorów przyrostów odkształcenia plastycznego w różnych momentach płynięcia i porównanie ich z wektorem przyrostu odkształcenia sprężystego otrzymano podstawę do rozważań, którą z powierzchni należy utożsamiać z powierzchnią plastyczności.

W roku 1966 w pracy [71] autor przedstawił badania efektu «pamięci» w odniesieniu do powierzchni plastyczności dla materiału wstępnie odkształconego plastycznie. Temat ten jest rozwijany również w pracy poniższej.

## 2. Definicja granicy płynięcia

Określenie początku plastycznego odkształcenia nazywanego również płynięciem w znacznym stopniu uzależnione jest od przyjętej definicji tego pojęcia. W przypadku obciążania cienkościennych próbek rurkowych, gdzie rozkład naprężeń na grubości przyjmuje się jako jednorodny, mówimy o materiale, że się uplastycznia, gdy stan naprężenia osiąga pewną szczególną wartość. Ponieważ materiały ze wzmocnieniem w większości przypadków, a z reguły po wstępnym odkształceniu plastycznym, nie mają wyraźnego punktu uplastycznienia, w badaniach doświadczalnych są stosowane różne metody dla określenia tego miejsca. Wyznaczona w ten sposób granica nosi nazwę umownej granicy płynięcia.

W pracy G. J. TAYLORA i H. QUINNEYA [1] jako granicę plastyczności przyjmowano punkt przecięcia prostej będącej przedłużeniem liniowej części krzywej z osią momentów na wykresach moment skręcający-odkształcenie.

G. LIANIS i H. FORD [79] na wykresach obciążenie-wydłużenie osiowe przy badaniu pasków z karbem za miejsce uplastycznienia przyjmowali punkt przecięcia przedłużenia części sprężystej wykresu z przedłużeniem łagodnie pochylonej części krzywej.

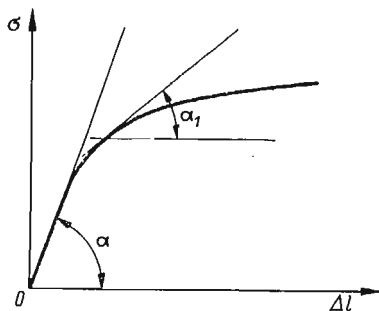
W pracy L. W. HU i J. F. BRATTA [38] oraz w pracy H. G. MC COMBA [41], przyjmowano granicę proporcjonalności na krzywych  $\sigma-\epsilon$  (naprężenie-odkształcenie) jako powierzchnię plastyczności.

A. M. ŻUKOW [72] oraz G. B. TALYPOW i W. N. KAMIENCEW [45] na wykresach intensywność naprężenia — intensywność odkształcenia jako granicę plastyczności przyjmowali naprężenia wywołujące w próbkach intensywność odkształcenia trwałego równą 0,173%.

W pracy JU. I. JAGNA i O. A. SZYSZMARIEWA [39] wyznaczano kilka granic sprężystego stanu dopuszczając dla każdej z nich pewną wartość trwałego odkształcenia od 0,0005% do 0,036%.

J. PARKER i M. B. BASSETT [56] wyznaczali granicę płynięcia stosując ten sam sposób co G. J. TAYLOR i H. QUINNEY. Dla porównania wyznaczali jeszcze granicę proporcjonalności. Wyznaczone w ten sposób powierzchnie różniły się między sobą nie tylko wymiarami, ale również i kształtem.

W pewnych przypadkach bardzo wygodne jest określenie granicy plastyczności za pomocą stycznej do krzywej nachylonej pod pewnym określonym kątem  $\alpha_1$  tak jak pokazano to na rys. 2. Metodę tę zastosował w swojej pracy L. DIETRICH [80] przy wyznaczaniu przejścia w stan plastyczny rozciąganych próbek z karbem.



Rys. 2

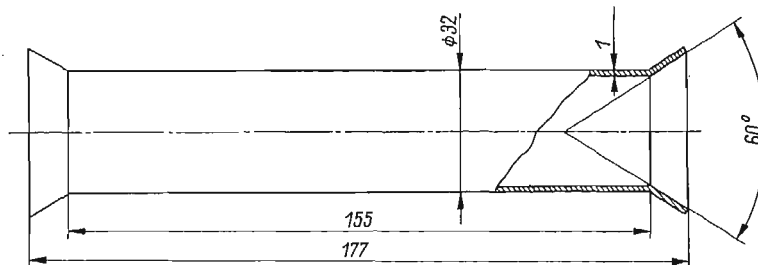
Wielu innych badaczy nie podaje metody, jaką określają granicę plastyczności. Brak ustalonej definicji powoduje, że wyników wielu prac doświadczalnych nie można z sobą porównywać. Jest to niewątpliwie jedna z przyczyn dużej rozbieżności wyników prac doświadczalnych jaką obserwuje się u różnych autorów.

W poniższej pracy oprócz powierzchni odpowiadającej granicy proporcjonalności wyznaczono jeszcze kilka innych, odpowiadających określonym wartościom intensywności odkształceń plastycznych. Metoda wyznaczania tych powierzchni jest taka sama, jak metoda stosowana w pracach W. SZCZEPIŃSKIEGO [55], J. MIASTKOWSKIEGO i W. SZCZEPIŃSKIEGO [70] oraz w pracy autora [71].

### 3. Próbk i aparatura

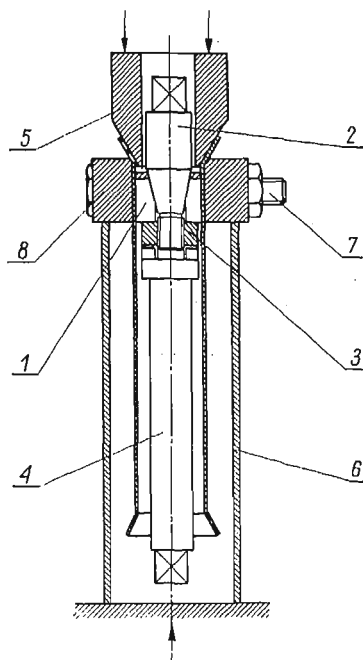
Próbki rurkowe o wymiarach pokazanych na rys. 3 wykonane zostały z ciągnionej rury z mosiądzu M-63 o zawartości 37% cynku. Ze względu na sposób ich wykonania metodą ciągnięcia próbki miały własną historię odkształcenia. W związku z tym wszystkie próbki przed badaniem poddane zostały wyżarzaniu. Sposób wyżarzania podany został w pracy [71].

Próbki wykonywano w następujący sposób: z rury odcinano odcinki o długości 180 mm i drogą selekcji do badania wybierano tylko te, które miały prawidłowy przekrój kołowy oraz możliwie równomierny rozkład grubości ścianki zarówno wzdłuż tworzących, jak i po obwodzie. Największa różnica w grubości ścianki nie przekraczała 3% jej wartości średniej.



Rys. 3

Wyżarzanie próbek oprócz usuwania anizotropii własności wywołanej zgniotem przy ciągnięciu, zapobiegało pękaniu próbek na obrzeżu podczas ich rozciągania na końcach. Była to jedna z przyczyn, dla których kołnierze rozciągano po wyżarzaniu próbek. Rozciąganie przeprowadzano stożkowym stemplem o kącie wierzchołkowym  $60^\circ$  w celu utworzenia kołnierzy służących do mocowania w urządzeniu badawczym.



Rys. 4

Do rozciągania kołnierzy wykonane zostało bardzo proste urządzenie przedstawione na rys. 4. Urządzenie to jest tak pomyślane, że zabezpiecza obszar środkowy próbki, w którym przeprowadzono pomiary podczas doświadczenia od dodatkowych odkształceń

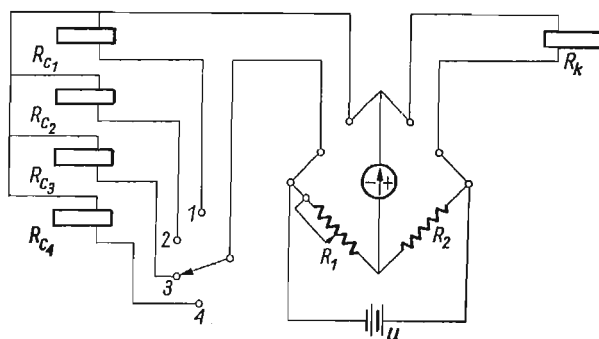
mogących powstać przy rozciąganiu kołnierzy. Konieczność zabezpieczenia części środkowej próbki wynikała stąd, że nie stosowano wyżarzania próbek po uformowaniu kołnierzy, aby nie usuwać wzmocnienia, jakiego doznał materiał próbki w jego częściach chwytowych.

Po nałożeniu próbki na tulejkę dzieloną 1, dokręcano nakrętkę 3 na trzpieniu 2 za pośrednictwem trzonka 4 aż do zamocowania próbki na tulei. Następnie zakładano obejmę 8 i skręcano silnie śrubami 7. Całość wstawiano w tuleję 6 ustawioną na stole prasy. Wcisnąc z góry stempel stożkowy 5 rozciągano koniec próbki.

Odształcenia próbek mierzono za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych typu RL o długości 15 mm, oporności nominalnej  $R = 120$  omów i współczynnika czułości odkształceniowej  $k = 2,1$ . Stosowane czujniki wykonane były z konstantanu, dla którego  $k$  zachowuje stałą wartość dla odkształceń  $\varepsilon$  dochodzących do 0,8%.

Tensometry naklejano na zewnętrznej powierzchni próbek w środku ich długości. Do klejenia używano kleju nitrocelulozowego. Powierzchnie próbek w miejscach, w których naklejano tensometry starannie czyszczono mechanicznie a następnie chemicznie odtłuszczano je benzyną ekstrakcyjną.

Dla zabezpieczenia czujnika przed zwarciem jego siatki oporowej z masą próbki stosowano podkładki na końcach tensometru aby zwiększyć zdolność izolacyjną czujnika bez pogorszenia jego własności jako elementu pomiarowego.



Rys. 5

Dla wyeliminowania wpływu temperatury stosowano czujnik kompensacyjny, załączony do sąsiedniej gałęzi mostka w stosunku do gałęzi czujnika czynnego.

W celu zwiększenia dokładności odczytów odkształcenia oraz dla wyeliminowania wpływu ewentualnej małej mimośrodowości obciążenia tensometry naklejano po dwa symetrycznie po przeciwnych stronach próbki w obu kierunkach obciążenia. Wielkość odkształcenia wyznaczano jako średnią ze wskazań obu tensometrów jednakowo skierowanych.

Odształcenia odczytywano na tensometrycznym aparacie pomiarowym typu T-2 produkcji ZTR Politechniki Warszawskiej. Najmniejsza działka potencjometru ślizgowego odpowiadała odkształceniu  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$

Na rys. 5 pokazano schemat połączenia tensometrów z aparatem tensometrycznym. Przez  $R_c$  oznaczono tensometry pomiarowe czyli czynne, przez  $R_k$ -tensometr kompensacyjny.

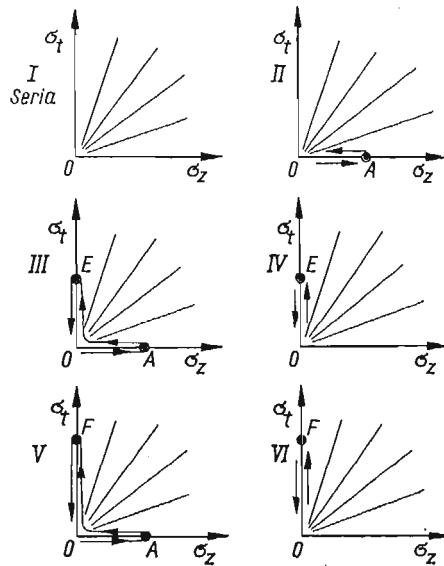


Zastosowanie tensometrów oporowych do pomiaru odkształceń jest korzystne ze względu na dużą czułość i dokładność pomiaru. Odczyty odkształceń są wolne od błędów luzów i poślizgów występujących w tensometrach mechanicznych.

#### 4. Sposób obciążania i metoda opracowania wyników

Doświadczenie przeprowadzono na sześciu seriach liczących po 6 próbek. Odkształcenia wstępne przeprowadzono według schematu obciążenia pokazanego na rys. 6.

Próbki pierwszej serii nie były wstępnie odkształcane i zostały przeznaczone do zbadania kształtu początkowej powierzchni płynięcia materiału. Pozostałe pięć serii poświęcono



Rys. 6

zbadaniu zmiany kształtu powierzchni plastyczności wywołanej uprzednim odkształceniem plastycznym.

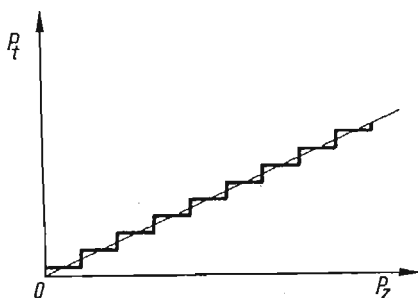
Dla wyeliminowania wpływu naturalnego starzenia na kształt powierzchni plastyczności badanie wszystkich próbek przeprowadzono w jednakowym odstępie czasu od chwili poddania ich wstępnym odkształceniom plastycznym. Czas ten wynosił 24 godziny, tj. tyle, ile potrzeba było na naklejenie i wysuszenie czujników tensometrycznych na próbkach. Należy tu podkreślić, że tensometry naklemano na próbkach po odkształceniu ich wstępnym obciążeniem, z wyjątkiem pierwszej serii, którą badano w stanie wyżarzonym.

Zarówno zastosowane drogi obciążenia jak i uzyskane wyniki zostały przedstawione w pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń  $\sigma_t$ ,  $\sigma_z$ ; gdzie  $\sigma_t$  oznacza naprężenia w kierunku obwodowym, a  $\sigma_z$  naprężenia w kierunku osiowym próbki.

Dla każdej próbki w czasie obciążenia rejestrowano odkształcenia osiowe  $\epsilon_z$  i obwodowe  $\epsilon_t$ . Po przyłożeniu odpowiednio małego przyrostu obciążenia utrzymywano jego stałą wartość przez okres 5 minut i dopiero wtedy odczytywano wskazania tensometrów. Czy

niono tak dlatego, ponieważ po przyroście obciążenia materiał wykazywał znaczny ciągły przyrost odkształceń przy stałej wartości naprężeń. Odkształcenia te ustalały się nie wykazując dalszego wzrostu dopiero po okresie około 2 do 4 minut w zależności od wielkości naprężenia. Dla ujednolicenia wszystkich pomiarów, wartości odkształceń odczytywano po 5-cio minutowym okresie wyczekiwania.

Każda z próbek jednej serii była inaczej obciążana wzdłuż drogi proporcjonalnego obciążenia, odpowiadającej jednej z linii prostych poprowadzonych na płaszczyźnie naprężeń z początku układu  $O$ . Założone drogi obciążenia zaznaczono cienkimi liniami na rysunkach od 9 do 18. Ze względów technicznych rzeczywiste drogi obciążenia odbiegały nieco od teoretycznych prostych proporcjonalnego obciążenia. Zwiększano mianowicie



Rys. 7

małymi skokami kolejno wielkość siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego, przy czym przy wzroście siły osiowej utrzymywano stałą wartość ciśnienia wewnętrznego i odwrotnie. Jednakże największe odchylenie od prostej proporcjonalnego obciążenia nie przekraczało wartości  $0,3 \text{ kG/mm}^2$ . Na rys. 7 przykładowo pokazano przebieg obciążenia wzdłuż jednego z promieni.

Z otrzymanych wartości przyrostów odkształceń  $\Delta\varepsilon_t$  i  $\Delta\varepsilon_z$ , odpowiadających kolejno przebytych odcinkom na drodze obciążenia określonym przyrostami naprężeń  $\Delta\sigma_t$  i  $\Delta\sigma_z$ , obliczano następnie przyrost intensywności odkształceń postaciowych

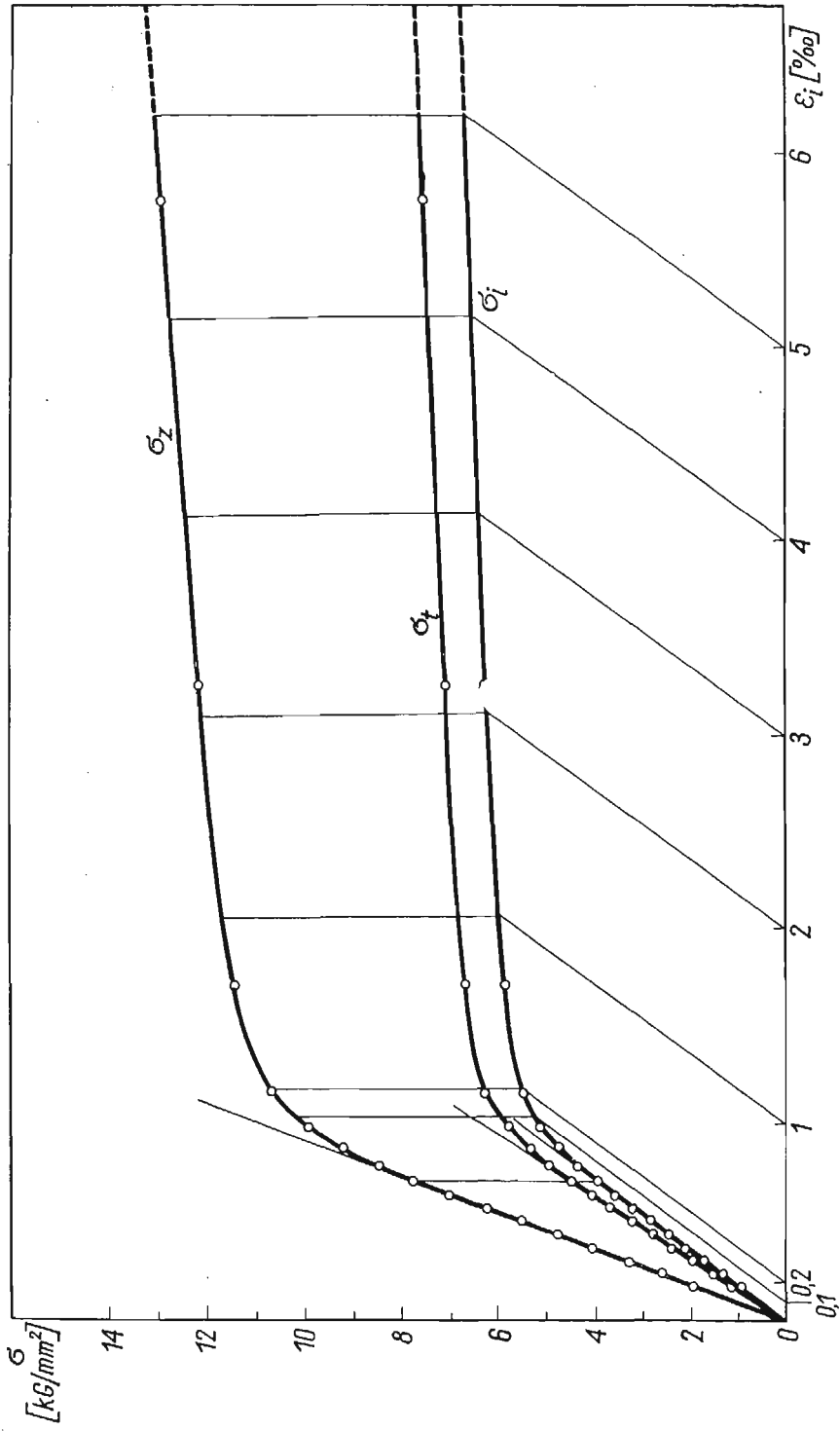
$$\Delta\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{6} [(\Delta\varepsilon_t - \Delta\varepsilon_z)^2 + (\Delta\varepsilon_z - \Delta\varepsilon_h)^2 + (\Delta\varepsilon_h - \Delta\varepsilon_t)^2]},$$

gdzie  $\Delta\varepsilon_h$  oznacza przyrost odkształcenia na grubości ścianki próbki. Wobec dużych trudności związanych z pomiarem zmiany grubości ścianki w czasie procesu obciążania wielkości  $\Delta\varepsilon_h$  nie mierzono ale obliczano przyjmując warunek nieściśliwości materiału

$$\Delta\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_t + \Delta\varepsilon_h = 0$$

Po uwzględnieniu warunku nieściśliwości, wzór na przyrost intensywności odkształceń postaciowych można napisać w postaci

$$\Delta\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_t^2 + \Delta\varepsilon_z^2 + \Delta\varepsilon_h^2)}.$$



Rys. 8

Następnie obliczano intensywność odkształceń plastycznych  $\varepsilon_i$  w poszczególnych momentach procesu obciążenia sumując przyrosty  $\Delta\varepsilon_i$  od początku obciążenia.

Na intensywność naprężeń stycznych przyjęto wzór w postaci

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_h)^2 + (\sigma_h - \sigma_t)^2]},$$

gdzie  $\sigma_h$  oznacza naprężenie ściskające skierowane po grubości ścianki i wywołane ciśnieniem oleju  $p$  działającym wewnątrz próbki. Wielkość tego naprężenia nie jest stała wzdłuż grubości ścianki i zmienia się od wartości  $\sigma_h = 0$  na promieniu zewnętrznym do wartości  $\sigma_h = -p$  na promieniu wewnętrznym. W obliczeniach przyjęto średnią wartość tego naprężenia  $\sigma_h = -p/2$ .

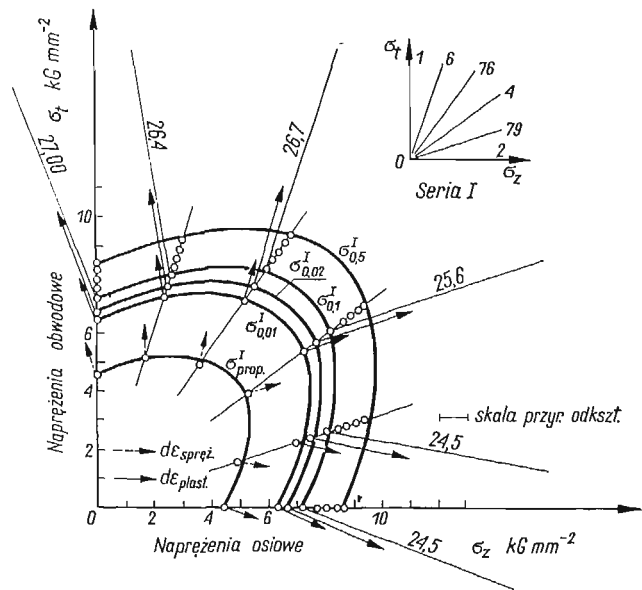
Po obliczeniu wielkości  $\sigma_i$  i  $\varepsilon_i$  sporządzono dla każdej próbki wykres  $\sigma_i(\varepsilon_i)$ . Dla przykładu na rys. 8 pokazano takie krzywe otrzymane dla jednej z próbek. Obok krzywych  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  na tych samych rysunkach naniesiono krzywe  $\sigma_t(\varepsilon_i)$  i  $\sigma_z(\varepsilon_i)$ . Z punktów na osi  $\varepsilon_i$ , odpowiadających wartościom  $\varepsilon_i^p = 0,01, 0,02, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$ , i  $0,5\%$  poprowadzono proste równoległe do początkowego prostoliniowego odcinka krzywej  $\sigma_i(\varepsilon_i)$ . Punkty przecięcia tych prostych z krzywą  $\sigma_i$  przeniesiono następnie na krzywe  $\sigma_t$  i  $\sigma_z$  znajdując w ten sposób naprężenia wywołujące w próbce określoną intensywność odkształceń postaciowych  $\varepsilon_i^p$ . Tak otrzymane wartości naprężeń naniesiono na płaszczyźnie  $\sigma_t, \sigma_z$  (rys. 9–18) w postaci szeregu punktów położonych na wspólnej prostej, przedstawiającej drogę obciążenia danej próbki. Przez punkty należące do różnych próbek ale o tej samej wartości  $\varepsilon_i^p$  prowadzono następnie krzywą oznaczając ją symbolem  $\sigma_x$  z dolnym indeksem  $x$  określającym stałą dla niej wielkość  $\varepsilon_i^p$ . Ponadto na płaszczyźnie naprężeń wyznaczano jeszcze krzywe  $\sigma_{prop}$  odpowiadające początkowi zakrzywiania się prostoliniowych początkowych części wykresów  $\sigma_t$  i  $\sigma_z$  (rys. 8). Należy tu jednak podkreślić, że ocena wielkości granicy proporcjonalności w dużej mierze zależy od dokładności i czułości urządzenia rejestrującego odkształcenia oraz od subiektywnej oceny prowadzącego doświadczenie.

Na krzywych  $\sigma_{prop}, \sigma_{0,01}, \sigma_{0,02}$  i  $\sigma_{0,1}$  wyznaczono kierunki przyrostów odkształcenia sprężystego i plastycznego. Przyrosty te pokazano na rys. 9–18 na płaszczyźnie  $\sigma_t, \sigma_z$  w postaci wektorów, a sposób ich wyznaczania podano w pracy [88]. Podstawę do wyznaczania tych przyrostów stanowią wykresy obydwu odkształceń  $\varepsilon_t$  i  $\varepsilon_z$  w funkcji jednego z naprężeń  $\sigma_z$  lub  $\sigma_t$ .

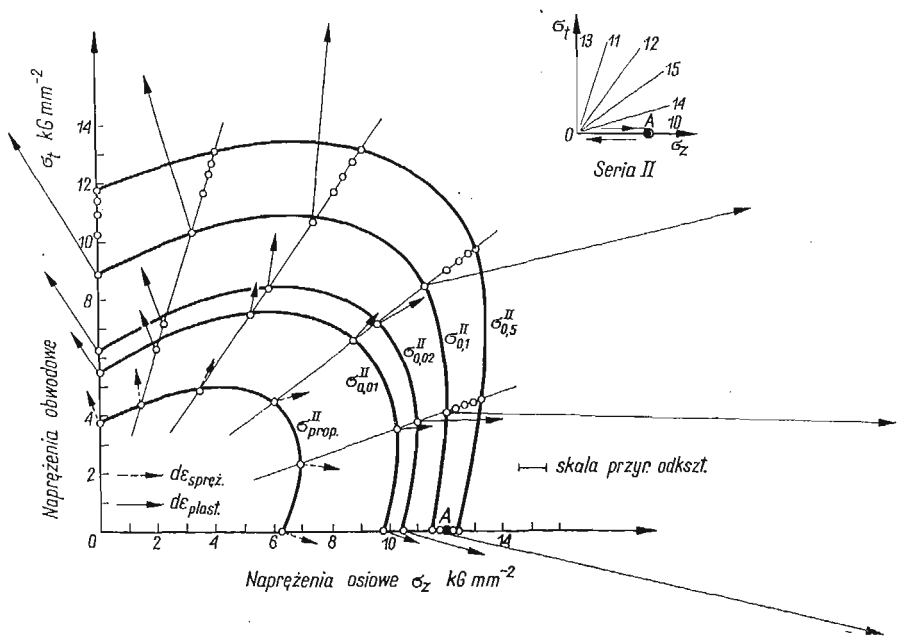
## 5. Wyniki pomiarów

Na rys. 9 pokazano wyniki badania próbek serii pierwszej bez uprzedniego odkształcenia plastycznego. Otrzymane punkty tylko nieznacznie odbiegają od teoretycznych elips Hubera-Misesa. Wynika stąd, że różnice własności poszczególnych próbek są niewielkie, a materiał ich jest w przybliżeniu izotropowy.

Wszystkie próbki serii drugiej zostały wstępnie jednakowo obciążone wzdłuż drogi  $OA$ , a następnie odciążone po tej samej drodze do punktu  $O$  (rys. 10). Obciążenie w punkcie  $A$  wywoływało w próbkach stan naprężenia opisany przez składowe  $\sigma_z = 12 \text{ kG/mm}^2$ ,  $\sigma_t = 0$  i  $\sigma_h = 0$ .



Rys. 9



Rys. 10

Po naklejeniu tensometrów na próbkach następnego dnia badano kształt powierzchni odkształconego materiału.

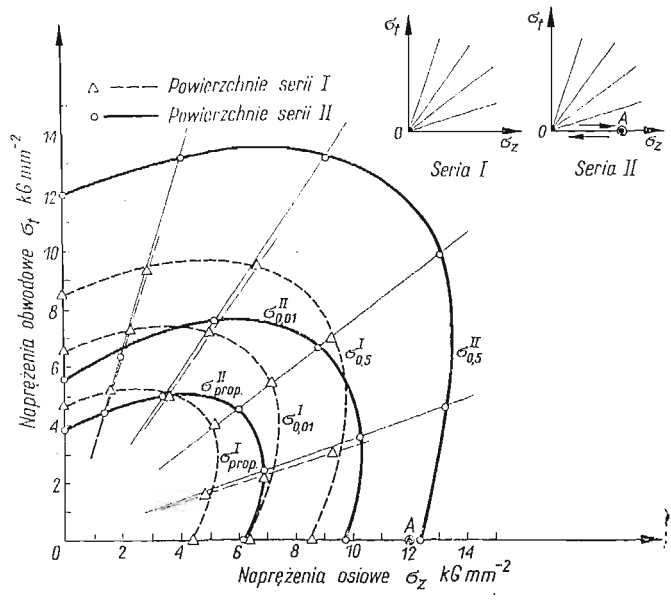
Na rys. 11 dokonano porównania otrzymanych krzywych z I i II serii. Dla przejrzystości do porównania wzięto tylko krzywe odpowiadające  $\sigma_{prop}$ ,  $\sigma_{0,01}$ , i  $\sigma_{0,5}$ . Z porównania odpowiednich krzywych wynika, że różnią się one od siebie w sposób zasadniczy. Krzywe  $\sigma_{prop}^I$  i  $\sigma_{0,01}^I$  są przesunięte względem elips początkowych, natomiast krzywa  $\sigma_{0,5}^I$  niezbyt wiele odbiega od elipsy, jaką można otrzymać przez równomierne rozszerzenie elipsy Hubera-Misesa. Wyraźnie widać, że granica proporcjonalności dla materiału wstępnie odkształconego plastycznie wykazuje własności anizotropowe. W miarę wzrostu wartości wtórnych odkształceń plastycznych, dla których określano powierzchnie, własności te zanikają.

Serię trzecią próbek obciążono wstępnie bardziej złożonym sposobem obciążenia, co pokazano na rys. 12. Próbki obciążone początkowo identycznie jak w serii II na drodze  $OA$  i odciążone do punktu zerowego  $O$ , zostały ponownie obciążone, ale wzdłuż innej drogi  $OE$  i odciążone. Po naklejeniu tensometrów i obciążeniu próbek wzdłuż promieni pokazanych na rys. 12 znajdowano krzywe odpowiadające  $\sigma_{prop}^{III}$ ,  $\sigma_{0,01}^{III}$ , ...,  $\sigma_{0,5}^{III}$ . Taki schemat doświadczenia zastosowano w celu stwierdzenia, czy możliwe jest, aby materiał obciążony i odciążony na drodze  $OAEO$  uzyskał takie własności, jakie posiada materiał obciążony i odciążony tylko na drodze  $OEO$ . Również w tym celu wszystkie próbki serii IV obciążono wstępnie, ale tylko na drodze  $OE$  (rys. 13) pokrywającej się z drugim etapem obciążenia wstępnego próbek z serii III. Po wyznaczeniu krzywych  $\sigma_{prop}^{IV}$ ,  $\sigma_{0,01}^{IV}$ , ...,  $\sigma_{0,5}^{IV}$  dokonano porównania otrzymanych wyników. Na rys. 14 podano porównanie serii II i III, natomiast na rys. 15 podano porównanie wyników uzyskanych z serii III i IV. Jak wynika z rys. 15, odpowiednie krzywe dla tych dwóch serii mają przebieg bardzo zbliżony do siebie.

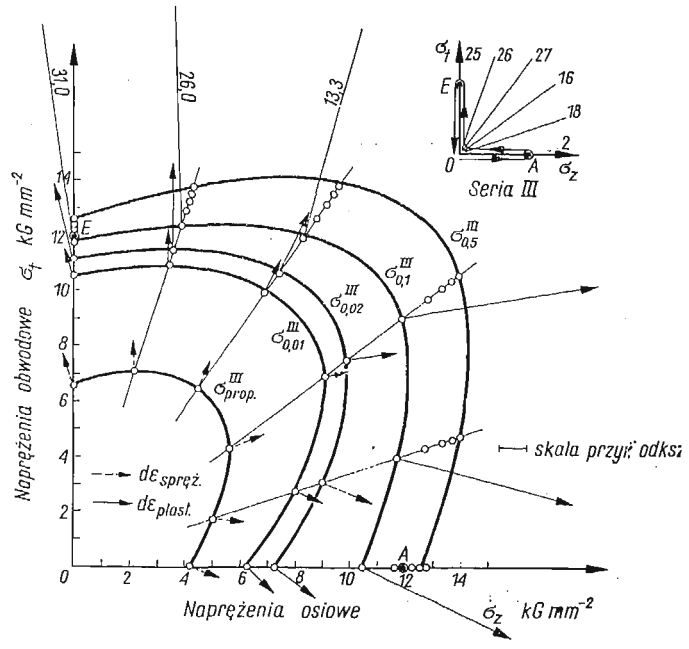
W analogiczny sposób zbadano dalsze dwie serie próbek, piątą (rys. 16) i szóstą (rys. 17) stosując dłuższą drogę wstępnego obciążenia na drugim jej odcinku  $OF$ . Porównania otrzymanych krzywych z obu tych serii dokonano na rys. 18. Bardzo dobra zgodność przebiegu porównywanych krzywych jeszcze bardziej potwierdza wnioski uzyskane na próbkach w serii III i IV. Otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że jeżeli próbki już raz obciążone i odciążone na drodze  $OA$  obciążymy ponownie ale na innej drodze, to mogą one wykazywać własności takie, jak próbki obciążone tylko tym drugim odcinkiem obciążenia wstępnego, o ile wielkość tej drugiej drogi jest dostatecznie duża w porównaniu z pierwszą. Dla tego przypadku można przyjąć, że już dla serii III i IV nastąpiła zgodność w przebiegu krzywych. Dla serii tych drogi wstępnego obciążenia przebiegały po linii  $OAEO$  i  $OEO$ . Wielkość intensywności naprężeń wywołanych obciążeniem na drodze  $OE$  jest tutaj równa w przybliżeniu intensywności naprężeń wywołanych obciążeniem na pierwszym odcinku drogi  $OA$ .

Otrzymane wyniki w zupełności potwierdzają wnioski o zanikającej pamięci materiału, spostrzeżone w pracy [71] podczas badania próbek przy innym schemacie obciążenia.

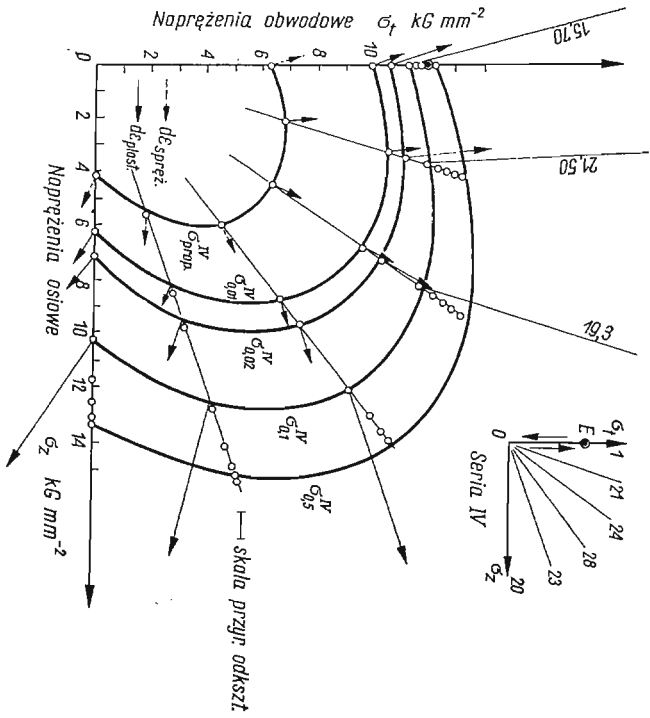
Dla wszystkich serii próbek na krzywe odpowiadające granicy proporcjonalności naniesiono wektory odkształcenia sprężystego, a na krzywych  $\sigma_{0,01}$ ,  $\sigma_{0,02}$  i  $\sigma_{0,1}$  pokazano wektory przyrostów odkształcenia plastycznego. Wektory te są na ogół prostopadłe do powierzchni, dla których zostały wyznaczone.



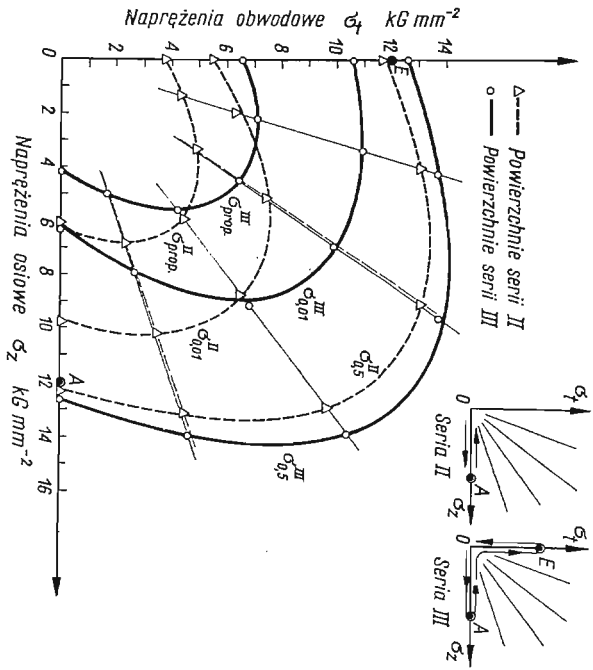
Rys. 11



Rys. 12

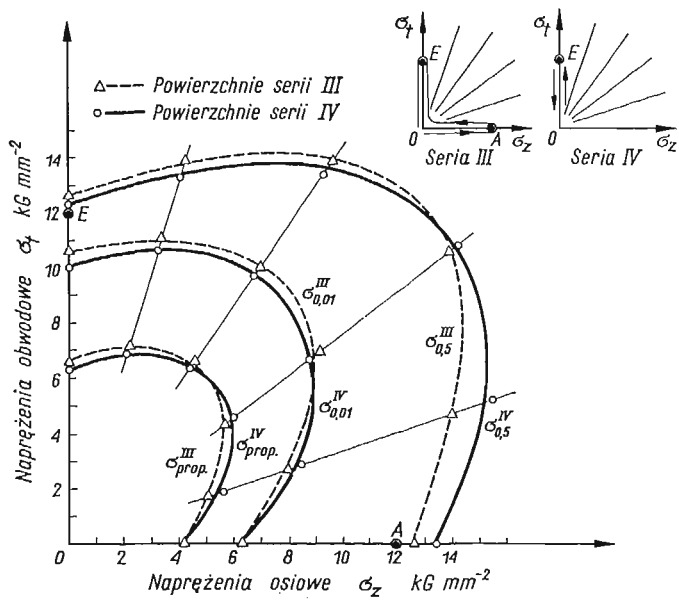


Rys. 13

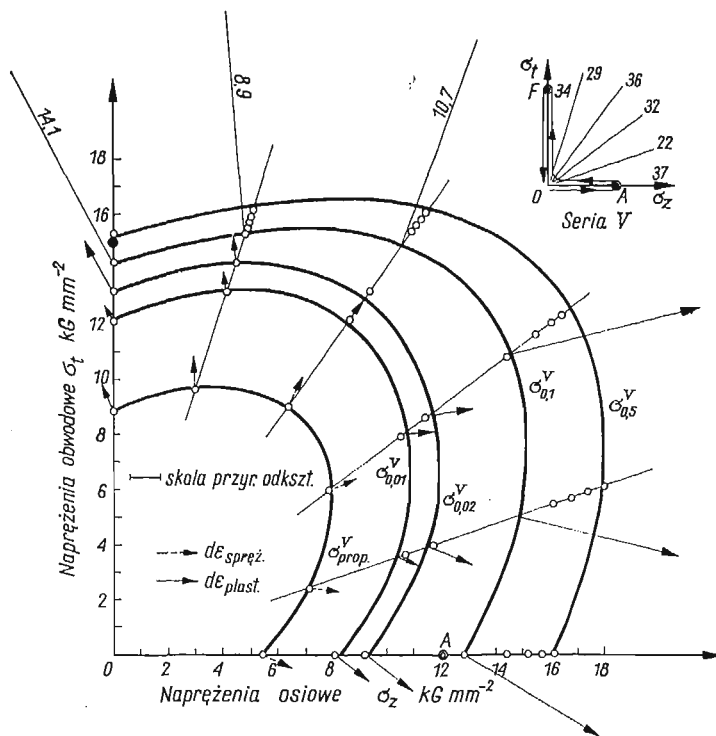


Rys. 14

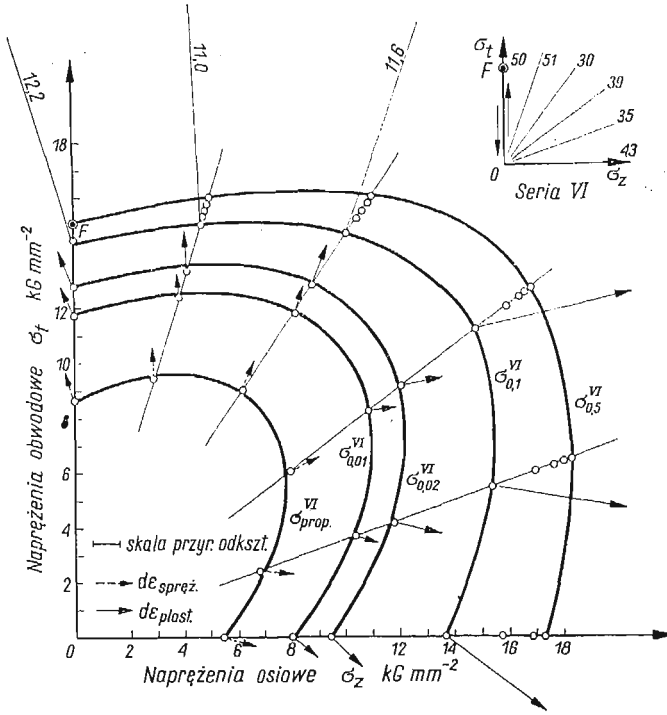




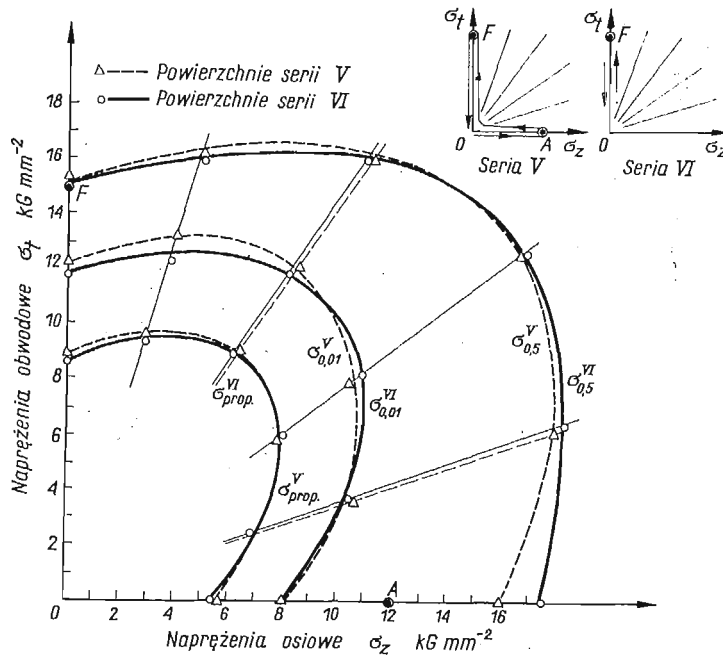
Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18

## 6. Analiza wyników

**6.1. Początkowa powierzchnia plastyczności.** W rozdziale pierwszym omówione zostały dwa najbardziej rozpowszechnione warunki plastyczności tj. warunek stałego największego naprężenia stycznego i warunek stałej intensywności naprężeń stycznych.

Doświadczalne sprawdzenie ważności tych warunków odbywa się z reguły na próbkach rurkowych poddanych bądź obciążeniu osiowemu i równoczesnemu działaniu ciśnienia wewnętrznego, bądź równoczesnemu działaniu rozciągania ze skręcaniem.

G. J. TAYLOR i H. QUINNEY [1] poddając rozciąganiu i skręcaniu cienkościennie próbki rurkowe ze stali, miedzi i aluminium otrzymali wyniki zgodne z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa. Potwierdzenie warunku stałej wartości intensywności naprężeń stycznych przy badaniu stopów aluminium uzyskali również P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG i W. KOFF [37], L. W. HU i J. F. BRATT [38] oraz W. SZCZEPIŃSKI [55], przy badaniu stali A. M. ŻUKOW [34, 72, 73], R. A. ARUTUNIAN [60] oraz G. B. TALYPOW [45, 46, 47, 62], przy badaniu niklu Ju. I. JAGN i O. A. SZYSZMARIEW [39], przy badaniu miedzi G. B. TALYPOW [61] i przy badaniu mosiądzu J. MIASTKOWSKI i W. SZCZEPIŃSKI [70, 71]. Rozmieszczenie punktów doświadczalnych blisko elipsy Hubera-Misesa uzyskano również w tej pracy.

W. A. BAŁDIN i W. I. TROFIMOW [74] poddając płaskie próbki stalowe jednoczesnemu rozciąganiu w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach uzyskali potwierdzenie warunku plastyczności Treski. Sposób wykonania próbek nie gwarantował jednak jednorodnego stanu odkształcenia w płaszczyźnie rozciągania.

Z przytoczonych danych wynika potwierdzenie słuszności warunku Hubera-Misesa dla prawie wszystkich badanych metali. Wobec tego można uważać warunek Hubera-Misesa za dostatecznie bliski rzeczywistym własnościom metali, a warunek Treski za przybliżony. W obliczeniach praktycznych stosuje się jednak obydwie warunki, gdyż warunek Treski jest bardzo wygodny ze względu na swoją prostotę.

Chociaż warunek stałej intensywności naprężeń stycznych okazuje się lepszy od warunku stałego maksymalnego naprężenia stycznego, to jednak istnieją dane doświadczalne, z których wynika, że forma funkcji naprężeń stycznych powinna mieć bardziej złożoną formę. Wynika to przede wszystkim z badań przeprowadzonych przez W. LODE'A [81] na rurkach cienkościennych ze stali, miedzi i niklu, poddawanych obciążeniu osiowemu i ciśnieniu wewnętrznemu. Otrzymane punkty doświadczalne leżą między powyższymi krzywymi warunków plastyczności układając się bliżej krzywej odpowiadającej warunkowi stałej intensywności naprężeń stycznych. Podobne wyniki wskazujące większą zgodność z warunkiem Hubera-Misesa uzyskali również M. ROŠ i A. EICHINGER [82] na stalowych próbkach rurkowych identycznie obciążonych jak w pracy W. LODE'A. Z nowszych prac należy wymienić badania przeprowadzone przez J. MARINA, B. H. ULRICHA, i W. P. HUGES'A [83], J. MARINA i L. HU [35], P. K. BERTSCHA i W. N. FINDLEY'A [49] oraz przez P. S. THEOCARISA i C. R. HAZELLA [67]. Z prac tych wynika również, że powierzchnia plastyczności przebiega między powierzchnią wyznaczoną z warunku Treski a powierzchnią wyznaczoną z warunku Hubera-Misesa, ale znacznie bliżej elipsy Hubera-Misesa. Podobne wyniki uzyskali również G. L. BARAYA i I. PARKER [54] przy badaniu aluminium. Do znalezienia powierzchni plastyczności używali próbek w kształcie pasków z nacięciami.

**6.2. Wtórna powierzchnia plastyczności.** Z przytoczonego przeglądu prac doświadczalnych wynika, że tylko nieliczne eksperymenty potwierdzają koncepcję izotropowego rozszerzania się powierzchni plastyczności pod wpływem wstępnych odkształceń plastycznych. Między innymi można do nich zaliczyć prace G. J. TAYLORA i H. QUINNEY'A [1], D. M. CUNNINGHAMA, E. G. THOMSONA i J. E. DORNA [22] oraz J. PARKERA i M. B. BASSETTA [56]. Wszyscy pozostali badacze wraz z autorem tej pracy uważają, że wtórna powierzchnia plastyczności ulega przesunięciu w kierunku wstępnego odkształcenia plastycznego i jednoczesnej deformacji. Wartość przesunięcia zależy od efektu Bauschingera, wielkości wstępnego odkształcenia plastycznego oraz od przyjętej definicji powierzchni płynięcia. Wyraźnie bowiem widać, że dla powierzchni plastyczności odpowiadających większym wartościom intensywności odkształceń plastycznych przesunięcie to jest mniejsze od przesunięcia granicy proporcjonalności czy powierzchni wyznaczonej dla mniejszej wartości intensywności odkształceń trwałych. Wyraźnie widać to w pracach JU. I. JAGNA i O. A. SZYSZMARIEWA [39], W. SZCZEPIŃSKIEGO [55] oraz J. MIASTKOWSKIEGO i W. SZCZEPIŃSKIEGO [70, 71]. Identyczne wyniki zanotowano również i w tej pracy.

Na podstawie znanych wyników doświadczalnych można stwierdzić z dużą pewnością, że wtórna powierzchnia plastyczności przesuwa się w kierunku wstępnego obciążenia. Niejasne tylko pozostaje w dalszym ciągu zachowanie się jej w kierunku prostopadłym do kierunku wstępnego odkształcenia.

Z doświadczenia P. S. THEOCARISA i C. R. HAZELLA [67] wynika, że wtórna powierzchnia plastyczności wychodzi na zewnątrz początkowej w kierunku prostopadłym do kierunku wstępnego obciążenia. Podobne wyniki uzyskali również w swoich doświadczeniach J. PARKER i M. B. BASSETT [56] oraz R. A. ARUTUNIAN [60]. Na to, że wtórna powierzchnia płynięcia wychodzi na zewnątrz początkowej w kierunku prostopadłym do wstępnego obciążenia, wskazują również wyniki uzyskane w tej pracy.

Inni badacze a wśród nich P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG i W. KOFF [37], H. G. MC COMB [41] oraz H. J. IVEY [48] stwierdzają, że wtórna powierzchnia płynięcia pozostaje nieodkształcona w kierunku prostopadłym do kierunku wstępnego odkształcenia, podczas gdy L. W. HU i J. F. BRATT [38] oraz J. MIASTKOWSKI i W. SZCZEPIŃSKI [70] podają, że wtórna powierzchnia płynięcia leży wewnątrz początkowej w kierunku prostopadłym do wstępnego obciążenia. Wydaje się, że zjawisko to w dużej mierze uzależnione jest od wielkości wstępnego obciążenia.

Oprócz przesunięcia powierzchnia plastyczności może w pewnych przypadkach ulec obrotowi, co wynika z badań przeprowadzonych przez J. MIASTKOWSKIEGO i W. SZCZEPIŃSKIEGO [70], J. PARKERA i M. B. BASSETTA [56] oraz W. M. MAIRA i H. PUGHA [59].

Innym bardzo dyskusyjnym zagadnieniem jest sprawa istnienia naroża na powierzchni plastyczności. Z przytoczonego przeglądu widać, że wiele prac doświadczalnych poświęcono temu problemowi. Część badaczy a wśród nich P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY i C. W. BEADLE [33], L. W. HU i J. F. BRATT [38], H. G. MC COMB [41], A. PHILLIPS [42, 43, 44], P. K. BERTSCH i W. N. FINDLEY [49] oraz P. S. THEOCARIS i C. R. HAZELL [67] wskazują na istnienie rogów na powierzchni plastyczności występujących w kierunku wstępnego obciążenia. Jednak wyniki większości badaczy nie potwierdzają istnienia naroży na powierzchni płynięcia.

### 7. Wnioski

1. Dane otrzymane przy badaniu początkowej powierzchni plastyczności wykazują dobrą zgodność z warunkiem Hubera-Misesa. Wobec tego można uważać warunek Hubera-Misesa za dostatecznie bliski rzeczywistym własnościom metali, a warunek Treski za przybliżony.

Chociaż warunek stałej wartości intensywności naprężeń stycznych okazuje się lepszy od warunku stałego maksymalnego naprężenia stycznego, istnieją dane doświadczalne, z których wynika, że forma funkcji naprężeń stycznych powinna mieć bardziej złożoną postać.

2. Pod wpływem odpowiednio dużego obciążenia wtórnego materiał zapomina o swojej pierwotnej historii obciążenia i zachowuje się tak jak materiał obciążony tylko tym późniejszym sposobem obciążenia.

3. Sporne jest zagadnienie, które z powierzchni należy utożsamiać z powierzchnią plastyczności. Chociaż bowiem pierwsze odkształcenia plastyczne zaczynają występować po przekroczeniu granicy proporcjonalności, to jednak osiągają one wielkość równą odkształceniom sprężystym dopiero na powierzchni  $\sigma_{0,01}$ , a są wyraźnie od nich większe na powierzchni  $\sigma_{0,02}$ . Przyjęcie jednej wspólnej definicji granicy płynięcia przez wszystkich badaczy dostarczyłoby szerszych możliwości porównywania otrzymanych wyników doświadczalnych. Za taką powierzchnię plastyczności można np. przyjąć linię, na której odkształcenia plastyczne są równe odkształceniom sprężystym.

4. Wektory przyrostów odkształcenia plastycznego są na ogół normalne do odpowiednich powierzchni, ale w kilku przypadkach stwierdzono odchylenie od kierunku normalnego. Należy jednak pamiętać, że każda z powierzchni została otrzymana w wyniku pomiaru kilku próbek, które mogły mieć nieco inne własności. Mogło to minimalnie wpłynąć na kształt powierzchni.

### Literatura cytowana w tekście

1. G. J. TAYLOR and H. QUINNEY, *The plastic distortion of metals*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 230, 1931, 323–362.
2. F. K. G. ODQUIST, *Die Verfestigung von Flusseisenähnlichen Körpern*, Zeits. angew. Math. Mech., 13 (1933), 360–363.
3. S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY, *Polyaxial stress-strain relations of strain-hardening metal*, J. Appl. Mech., 4, 21 (1954).
4. S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY, *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*, NACA TN, 1871, 1949.
5. T. N. LIN, *A proposed theory of plasticity based on slips*, Proc. of the Second USA Congr. of Appl. Mech., 1954.
6. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ing.-Arch., 9 (1938), 116–126.
7. A. Ю. ИШЛИНСКИЙ, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. мат. журн. 3, 6 (1954), 314–324.
8. W. PRAGER, *The theory of plasticity — a survey of recent achievements*, James Clayton Lecture, Proc. Inst. Mech. Engrs., 169, 1955, 41–57.
9. R. T. SHIELD, H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, Zeits. angew. Math. Phys. (1958), 260–276.
10. F. EDELMAN, D. C. DRUCKER, *Some extension of elementary plasticity theory*, J. Franklin Inst., 6, 251 (1951), 581–605.

11. W. T. KOITER, On partially plastic thick-walled tubes, Biezeno Ann. Vol., Haarlem, 1953, 232–251.
12. J. L. SANDRES, *Plastic stress-strain relations based on linear loading functions*, Proc. 2-nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 445–460.
13. P. G. HODGE, *A general theory of piecewise linear plasticity based on maximum shear*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 1957, 242–260.
14. W. PRAGER, *On the use of singular yield conditions and associated flow rules*, J. Appl. Mech., 20, 1953, 317–320.
15. J. F. BESSELING, *A Theory of Plastic Flow for Anisotropic Hardening in Plastic Deformation of an Initially Isotropic Material*, Nat. Luchtvaartlab., Amsterdam, Rep. S — 410, 1953.
16. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория пластичности учитывающая остаточные микронапряжения*, Прикл. Мат. Мех., 1, 22 (1958).
17. Т. ЛЕНМАН, *Ein neuer Ansatz für plastische Formänderungen mit Kaltverfestigung*, Zeits. angew. Math. Mech., 1958 (Juli, August).
18. Т. ЛЕНМАН, *Anisotrope plastische Formänderungen*, Rheol. acta, 4, 3, 281–285.
19. Г. И. БЫКОВЦЕВ, В. В. ДУДУКАЛЕНКО, Д. Д. ИВЛЕВ, *О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала*, ПММ АН СССР, 4, 28 (1964).
20. А. BALDOW, А. SAWCZUK, *A rule of anisotropic hardening*, Acta Mechanica, 2, 1 (1965), 81–92.
21. Z. MRÓZ, *On the description of anisotropic workhardening*, J. Mech. Phys. Solids, 15 (1967), 163–175.
22. D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSON, J. E. DORN, *Plastic flow of a magnesium alloy under biaxial stresses*, Proc. ASTM, 47 (1947), 546–553.
23. D. C. DRUCKER, *The significance of the criterion for additional plastic deformation of metals*, J. Colloid Sci., 3, 4 (1949), 299–311.
24. F. S. SHAW, G. W. WYCHERLEY, *Experiment on the plasticity of metals the octahedral shear stress loading criterion*, Structure and Materials, Note 181, Department of Supply on Development, Australia, March, 1950.
25. R. W. PETERS, N. F. DOW, S. B. BATDORF, *Preliminary experiments for testing basic assumptions of plasticity theories*, Proc. Soc. Exp. Stress Analy., 7 (1950), 127–140.
26. H. CICALA, *Sobre la Teoria de Batdorf y Budiansky de la Deformacion Plastica*, Rev. Univ. Nac. Cordoba (Arg.), 13 (1950), 401–405.
27. D. C. DRUCKER, *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations*, Proc. 1st. US Congr. Appl. Mech., 1951, 487–491.
28. B. BUDIANSKY, N. J. DOW, R. W. PETERS, R. P. SHEPHERD, *Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity*, Proc. 1st. US Nat. Congr. Appl. Mech., 1951, 503–512.
29. J. L. M. MORISON, W. M. SHEPHERD, *An experimental investigation of plastic stress-strain relations*, Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, 163, 1950, 1–9.
30. D. C. DRUCKER, F. D. STOCKTON, *Instrumentation and fundamental experiments in plasticity*, Proc. SESA, 2, 10 (1953), p. 127.
31. J. MARIN, L. HU, *On the validity of plastic flow of metals*, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., 75, N. 6, 1953.
32. P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, *An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity*, J. Mech. Phys. Solid., 3, 1954, 60–80.
33. P. M. NAGHDI, J. C. ROWLEY, C. W. BEADLE, *Experiments concerning the yield surface and the assumption of linearity in the plastic stress-strain relations*, J. Appl. Mech., 22 (1955), 416–420.
34. А. М. ЖУКОВ, *О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении*, Изв. АН СССР ОТН, 12, 1956.
35. J. MARIN, L. HU, *Biaxial plastic stress-strain relations of a mild steel for variable stress ratio*, Trans. ASME, 3, 78 (1956).
36. В. А. СВЕШНИКОВА, *О пластическом деформировании упрочняющихся металлов*, Изв. АН СССР, 1, 1956.
37. P. M. NAGHDI, F. ESSENBERG, W. KOFF, *An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity*, J. Appl. Mech., 25 (1958), 201–209.
38. L. W. HU, J. F. BRATT, *Effect of tensile plastic deformation on yield condition*, J. Appl. Mech., 25 (1958) p. 441.

39. Ю. И. ЯГН, О. А. ШИШМАРЕВ, *Некоторые результаты исследования границ упруго-эластичности пластически растянутых образцов никеля*, ДАН СССР, Т. 119, 1, 1958, 46–48.
40. А. М. ЖУКОВ, *Некоторые особенности кривой нейтрального нагружения*, Изв. АН СССР ОТН, 8, 1958.
41. H. G. Mc COMB, *Some experiments concerning subsequent yield surfaces in plasticity*, NASA T.N. D — 396, 1960, p. 33.
42. A. PHILLIPS, *An experimental investigation on plastic stress-strain relations*, Proc. IXth Intern. Congr. Appl. Mech., 1956, 23–33.
43. A. PHILLIPS, *Pointed vertices in plasticity*, Proc. 2nd Symp. Naval Structural Mech., 1960, 202–214.
44. A. PHILLIPS, G. GRAY, *Experimental investigation of corners in the yield surface*, J. Basic Eng., Trans. of the ASME, Ser. D, 1961.
45. Г. Б. ТАЛЫПОВ, В. Н. КАМЕНЦЕВ, *Исследование границ текучести и некоторых других эффектов при сложном нагружении*, Механика, Ученые записки ЛГУ, 280, серия математических наук, В. 35, 1960.
46. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Границы текучести и разрушения малоуглеродистой стали в случае простого и сложного нагружения, Влияние старения*, Изв. АН СССР, Отд. Тех. Наук, 6, 1961.
47. Г. Б. ТАЛЫПОВ, А. И. ЧИСТЯКОВ, *Влияние больших предварительных пластических деформаций на границу текучести малоуглеродистой стали*, Сб. Исслед. по Упругости и Пластичности, 3, Изд. Ленинград. Ун-т., 1963, 29–251.
48. H. J. IVEY, *Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys*, J. Mech. Eng. Sc., 3, 1961, pp. 15–31.
49. P. K. BERTSCH, W. N. FINDLEY, *An experimental study of subsequent yield surfaces, corners, normality, Bauschinger and allied effect*, Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech., 1962.
50. B. PAUL, W. CHEN, L. LEE, *An experimental study of plastic flow under stepwise increments of tension and torsion*, Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech., 2 (1962).
51. О. А. ШИШМАРЕВ, *Изучение участка границы текучести противоположной точке нагружения*, Изв. АН СССР, ОТН., Мех. и Машиностроение, 4, 1962, 159–164.
52. О. А. ШИШМАРЕВ, *Исследование границ текучести пластически деформированных образцов никеля*, Инженерный Ж., 4, 3 (1963), 740–747.
53. R. WOOLEY, *The Bauschinger effect in some face-centred and body centred cubic metals*, Philos. Mag., 1953, 353.
54. G. L. BARAYA, I. PARKER, *Determination of yield surfaces by notched strip specimens*, Internat. J. Mech. Sci., 4, 5 (1963), 353–363.
55. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., 2, 15 (1963), 275–296.
56. J. PARKER, M. B. BASSETT, *Plastic stress-strain relationships — Some experiments to derive a subsequent yield surface*, J. Appl. Mech., 4, 31 (1964).
57. S. S. GILL, J. PARKER, *Plastic stress-strain relationship. Some experiments on the effect of loading path and loading history*, J. Appl. Mech., 26 (1959), 77–87.
58. J. PARKER, J. KETTLEWEL, *Plastic stress-strain relationship. Further experiments on the effect of loading history*, J. Appl. Mech., 28 (1961), 439–446.
59. W. M. MAIR, H. PUGH, *Effect of prestrain on yield surfaces in copper*, J. Mech. Eng. Sci., 2, 6 (1964), 150–163.
60. Р. А. АРУТЮНЯН, *О циклическом нагружении упруго-пластической среды*, Изв. АН СССР Мех. и Машиностр., 4, 1964, 89–91.
61. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Влияние предварительной пластической деформации на границы текучести и разрушения меди*, Исследования по упругости и пластичности, сб. 4, Изд. ЛГУ, 1965.
62. А. И. ЧИСТЯКОВ, *Влияние предварительной пластической деформации на границу текучести стали марки Ст. 45*, Исслед. по упруг. и пластичности, сб. 4, Изд. ЛГУ, 1965.
63. Г. Б. ТАЛЫПОВ, В. Н. КАМЕНЦЕВ, *Влияние предварительной пластической деформации и естественного старения на границы текучести и разрушения*, Исслед. по упруг. и пластичности, сб. 1, Изд. ЛГУ, 1961.

64. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Исследование влияния предварительной пластической деформации и естественного старения на поведение малоуглеродистой стали*, Исслед. по упруг. и пластичности, сб. 2, Изд. ЛГУ, 1963.
65. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *О влиянии естественного старения на границу текучести*, сб. 3, Исслед. по упруг. и пластичности ЛГУ, 1964, 246–248.
66. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Влияние больших предварительных пластических деформаций и естественного старения на границу текучести малоуглеродистой стали*, Исслед. по упруг. и пластич. сб. 4, Изд. ЛГУ, 1965.
67. P. S. THEOCARIS, C. R. HAZELL, *Experimental investigation of subsequent yield surfaces using the moire method*, J. Mech. Phys. Solids, 5, 13 (1965), 281–294.
68. BUI HUY DUONG, *On étudie la variation avec l'écroutissage, de la frontière de plasticité sur des éprouvettes métalliques soumises a torsion et traction (ou compression) combinées*, Plasticite — Ecroutissage des metaux, C. R. Acad. Sc., Paris, 259 (1964), 4509–4512.
69. D. R. JENKINS, *Kinematic-hardening in zinc-alloy tubes*, J. Appl. Mech., 32, Trans. ASME, ser. E, 1965, 849–858.
70. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *An experimental study of yield surfaces of prestrained brass*, Internat. J. of Solids and Structures, 1 (1965), 189–194.
71. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, Mech. Teor. i Stos., 2, 4 (1966), 5–16.
72. А. М. ЖУКОВ, *Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии*, Инж. сбор., 20 (1954).
73. А. М. ЖУКОВ, *Пластические деформации стали при сложном нагружении*, Изв. АН СССР ОТН, 11, 1956.
74. В. А. БАЛДИН, В. И. ТРОФИМОВ, *Экспериментальное исследование условия текучести строительной стали на плоских образцах*, Изв. АН СССР ОТН, 3, 1958.
75. А. А. ИЛЬЮШИН, *О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред*, ПММ, 6, 1954.
76. В. Д. КЛЮШНИКОВ, *О законах пластичности для материала с упрочнением*, ПММ, 22 (1958), 97–118.
77. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении*, Изв. АН СССР, ОТН, 5, 1960.
78. В. С. ЛЕНСКИЙ, *Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении*, Изв. АН СССР, ОТН, 11, 1958.
79. G. LIANIS, H. FORD, *An experimental investigation of the yield criterion and the stress-strain law*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 5 (1957).
80. L. DIETRICH, *Teoretyczna i doświadczalna analiza nośności granicznej pręta o niesymetrycznie nachylonych krawędziach*, Mech. Teoret. i Stos. 3, 4 (1966).
81. W. LODE, *Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle — Eisen, Kupfer und Nickel*, Z. Physik, 36 (1926), 913.
82. M. ROŠ, A. EICHINGER, *Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr III*, Metalle — Eidgenoss, Materialprüf. u. Versuchsanstalt Ind. Bauw. u. Gewerke, Zurich 1929.
83. J. MARIN, B. H. ULRICH, W. P. HUGES, *Plastic stress-strain relations for aluminium alloy subjected to biaxial tensile stresses*, NACA, Tech. Note, 2425, 1951.
84. W. PRAGER, *A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids*, J. Appl. Mech., 23 (1956), 493–496.
85. H. ZIEGLER, *A modification of Prager's hardening rule*, Quart. Appl. Math., 17 (1959), 55–65.
86. F. STASSI-D'ALIA, *A Limiting Condition of Yielding and its Experimental Confirmations*, Pubblicazione dello Istituto di Tecnologie Meccaniche Della Università di Palermo, 1959.
87. A. PHILLIPS, R. L. SIERAKOWSKI, *On the concept of the yield surface*, Acta Mechanica, 1, I, 1965.
88. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu*, Mech. Teor. Stos., 2, 3 (1965), 55–66.



## Резюме

## ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЕКУЧЕСТИ. ЧАСТЬ II

В работе представлены результаты исследования начальной поверхности текучести и ее поведение под влиянием предварительных пластических деформаций. Эксперименты проводились на тонкостенных трубчатых образцах, изготовленных из латуни М63, подверженных одновременному действию осевой силы и внутреннего давления.

Предварительные пластические деформации трубок достигались по двум разным схемам нагружения. По первой схеме, образцы подвергались предварительному растяжению  $\sigma_z$ , вплоть до некоторого постоянного значения напряжения, а затем, после разгрузки, образцы подвергались внутреннему давлению  $\sigma_r$  до установленных значений напряжения. По второй схеме, образцы подвергались только предварительным нагрузкам  $\sigma_t$ , по вплоть до тех же самых значений напряжения, которое применялось при нагрузках согласно первой схеме.

Для отдельных случаев нагружения, определялось положение различных поверхностей текучести, соответствующих разным значениям остаточной деформации.

Путем сравнения соответствующих поверхностей, полученных для обеих схем предварительного пластического деформирования, проводился анализ схем эффекта «памяти» материала. Результаты экспериментов показывают, что при соответственно большей деформации по направлению  $\sigma_t$ , материал «забывает» о свойствах приобретенных во время предварительной деформации по направлению  $\sigma_z$  и, ведет себя так, как материал предварительно деформированный только вдоль оси  $\sigma_t$ .

В работе дается, также, обзор экспериментальных работ по исследованию поверхностей текучести материалов до и после предварительной пластической деформации.

## Summary

## ON THE EFFECT OF THE PRESTRAINING HISTORY ON THE YIELD SURFACE. PART II

Experimental results for tubular specimens of a M 63 brass, subjected to combined biaxial tension are presented in the study of the effect of the prestraining history on the shape of the yield surface.

Each of the two groups of specimens has been prestrained in a different manner. In the first group all the specimens were prestrained by the axial tensile force until certain constant stress beyond the initial yield locus. Then after unloading, they were loaded by internal pressure until certain stress, different for each of three subgroups. Specimens belonging to the second group were loaded only by the internal pressure until the same stress levels as the specimens of the first group.

For each particular case of prestraining history, yield surfaces for various definitions of the yield locus corresponding to different values of plastic deformations have been found.

Comparing the respective yield surfaces obtained for both prestraining paths, the effect of the "memory" of the material has been analysed. The experimental results show that if the prestraining by internal pressure is sufficiently large, the material does not "remember" the initial prestraining by axial force, and its behaviour is the same as the behaviour of the material prestrained by internal pressure only.

Presented is also a review of the experimental papers concerning the investigation of the yield surfaces.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 września 1967 r.*

---



OBLICZANIE TARCZ SIATKOWYCH PRZY WYKORZYSTANIU PRZYBLIŻONEJ TEORII  
EFEKTU BRZEGOWEGO

KAZIMIERZ PUSTELNIK (ŁÓDŹ), CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

Wstęp

W pracy [1] zostały podane podstawowe równania tarcz o strukturze siatkowej. Przykładem takich tarcz są płaskie regularne i gęste siatki prętowe, tarcze o gęstej i regularnej perforacji itp. Wyznaczenie stanu naprężenia i przemieszczenia w tarczach o strukturze siatkowej przy stosowaniu ciągłego modelu takich tarcz przedstawionego w [1] wymaga rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych szóstego rzędu. Równania te wykazują analogię do równań płaskiego anizotropowego kontinuum Cosseratów o trzech stopniach swobody (dwie składowe wektora przemieszczenia i lokalny obrót w płaszczyźnie tarczy). W równaniach występuje ponadto mały parametr charakteryzujący «gęstość» siatki przy operatorze różniczkowym rzędu wyższego. Fakt ten umożliwia otrzymanie rozwiązania przybliżonego przez zastosowanie teorii asymptotycznej (gdy mały parametr przyrównamy do zera) oraz efektu brzegowego [2].

Celem poniższej pracy jest przedstawienie przykładu obliczeń tarczy siatkowej w oparciu o teorię asymptotyczną i przy wykorzystaniu efektu brzegowego oraz orientacyjna ocena numeryczna dokładności rozwiązania przybliżonego w zależności od gęstości siatki. Ponadto w pierwszym punkcie pracy zestawiono podstawowe równania teorii korzystając z [2]. Należy zaznaczyć, że oparty na efekcie brzegowym przybliżony sposób obliczania tarcz siatkowych jest daleko prostszy niż przybliżony sposób obliczania płyt siatkowych, wykorzystujący analogiczny efekt zachodzący w płytach [3].

Wszystkie wskaźniki oznaczone literami alfabetu greckiego przebiegają ciąg 1, 2 (obowiązuje konwencja sumacyjna). Przecinek oznacza pochodną kowariantną, a płaszczyzna tarczy jest parametryzowana współrzędnymi krzywoliniowymi  $x^1, x^2$ .

1. Podstawowe równania

Podstawowy układ równań teorii liniowo-sprężystych tarcz o strukturze siatkowej wyrażony w naprężeniach ma postać [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}(\Phi, \nu\mu - \epsilon_{\sigma\nu} m^{\sigma, \mu})]_{,\alpha\beta} = 0, \\ & a^2 [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}(\Phi, \nu\mu - \epsilon_{\sigma\nu} m^{\sigma, \mu})]_{,\alpha} + \tilde{c}^{\beta\mu} \epsilon_{\sigma\mu} m^{\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Tutaj  $\Phi = \Phi(x^1, x^2)$  jest funkcją naprężeń,  $m^e = m^e(x^1, x^2)$  są naprężeniami momentowymi (w przekroju  $x^e = \text{const}$ ), tensory  $\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}$  oraz  $\tilde{c}^{\beta\mu}$  charakteryzują strukturę geometryczną oraz materiałową tarczy siatkowej,  $\epsilon_{\rho\nu}$  jest dwuwektorem Ricciego, wreszcie  $a$  jest parametrem o wymiarze długości małym w porównaniu z wymiarami tarczy. Parametr  $a$  charakteryzuje gęstość siatki, natomiast tensory  $\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}$  i  $\tilde{c}^{\beta\mu}$ , których składowe fizyczne mają ten sam wymiar, możemy traktować jako niezależne od gęstości siatki charakteryzującej strukturę geometryczną tarczy. W równaniach (1.1) pominięto siły i momenty masowe. Składowe  $p^{\alpha\beta}$  tensora naprężenia wyrażają się wzorem

$$(1.2) \quad p^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\varphi} \epsilon^{\beta\psi} \Phi_{,\psi\varphi} - \epsilon^{\alpha\varphi} m^{\beta}_{,\varphi}.$$

Warunki brzegowe dla układu (1.1) mają postać

$$(1.3) \quad \epsilon^{\pi\varphi} (\epsilon^{\beta\psi} \Phi_{,\psi\varphi} - m^{\beta}_{,\varphi}) n_{\pi} = \hat{p}^{\beta}, \quad m^{\pi} n_{\pi} = \hat{m},$$

przy czym  $n_{\pi}$  są składowymi wektora jednostkowego zewnętrznemu normalnego do brzegu tarczy,  $\hat{p}^{\beta}$  są składowymi wektora gęstości obciążenia brzegu tarczy siłami oraz  $\hat{m}$  jest gęstością obciążenia brzegu tarczy momentami.

Założmy, że  $\hat{m} = 0$ , tj. brzeg siatki jest obciążony tylko siłami. Wtedy dla dostatecznie małych wartości parametru  $a$  układ (1.1) możemy zastąpić przybliżonym równaniem przyjmując w (1.1)  $a \rightarrow 0$ . Zamiast równań (1.1) otrzymamy wtedy

$$(1.4) \quad (\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \Phi_{,\nu\mu})_{,\alpha\beta} = 0, \quad m^e = 0,$$

a warunki brzegowe (1.3) sprowadzą się do

$$(1.5) \quad \epsilon^{\pi\varphi} \epsilon^{\beta\psi} \Phi_{,\psi\varphi} n_{\pi} = \hat{p}^{\beta}.$$

Teorię opisywaną równaniem (1.4) i warunkami brzegowymi (1.5) nazywamy teorią asymptotyczną (lub bezmomentową) tarcz o strukturze siatkowej; jest ona formalnie podobna do teorii tarcz anizotropowych.

Jak wynika z (1.4)<sub>2</sub> i (1.3)<sub>2</sub>, teorię asymptotyczną możemy stosować do obliczeń tarcz o strukturze siatkowej wtedy, gdy zachodzi  $\hat{m} \equiv 0$ , to jest, gdy tarcza nie jest obciążona na brzegu momentami. Gdy  $\hat{m} \neq 0$ , wtedy uzupełnić należy teorię asymptotyczną (bezmomentową) tzw. efektem brzegowym, ujmującym wpływ obciążeń momentowych  $\hat{m}$ , przyłożonych do brzegu tarczy [2]. Teoria asymptotyczna uzupełniona efektem brzegowym pozwala zastąpić rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla układu równań (1.1) rozwiązaniem zagadnienia dla równania (1.4) oraz dla równania efektu brzegowego (wyprowadzonego w [2])

$$(1.6) \quad m^1_{,11} - \frac{\tilde{c}^{22}}{a^2 \tilde{a}^{1212}} m^1 = 0.$$

Równanie (1.6) zostało wyprowadzone przy założeniu, że a) brzeg tarczy pokrywa się z linią parametryczną  $x^1 = x^1_{(0)} = \text{const}$ , b) linie parametryczne  $x^2 = \text{const}$  są prostymi normalnymi do brzegu tarczy i wraz z krzywymi  $x^1 = \text{const}$  tworzą układ ortogonalny (parametryzację taką wystarcza wprowadzić tylko w otoczeniu brzegu tarczy); c) w pobliżu brzegu tarcza jest ortotropowa, a kierunki główne ortotropii pokrywają się z liniami para-

metrycznymi  $x^\alpha = \text{const}$ . Naprężenia momentowe  $m^2$  w teorii efektu brzegowego są określone wzorem [2]

$$(1.7) \quad m^2 = \frac{a^2}{(\tilde{c}^{11})^2} [a^{1111} \tilde{c}^{22} m^1_{,1} + (\tilde{a}^{1111} \tilde{c}^{22} - \tilde{a}^{1122} \tilde{c}^{11}) m^1_{,12}],$$

przy czym pochodne występujące we wzorach (1.6) i (1.7) należy traktować jako pochodne cząstkowe. W ramach teorii efektu brzegowego ściśle rozwiązanie równania (1.6) można zawsze zastąpić asymptotyczną całką tego równania w postaci wzoru

$$(1.8) \quad m^1 = \psi(x^2) \exp[-\sqrt{\zeta}(x^1 - x^1_{(0)})] + \chi(x^2) \exp[\sqrt{\zeta}(x^1 - x^1_{(0)})],$$

w którym

$$(1.9) \quad \zeta \equiv \frac{1}{a^2} \left( \frac{\tilde{c}^{22}}{\tilde{a}^{1212}} \right)_{x^1 = x^1_{(0)}}.$$

We wzorze tym należy przyjąć  $\chi \equiv 0$ , gdy w obszarze tarczy mamy  $x^1 \geq x^1_{(0)}$  lub  $\psi \equiv 0$ , gdy w obszarze tarczy zachodzi  $x^1 \leq x^1_{(0)}$ . Wtedy funkcja  $\chi$  lub  $\psi$  jest gęstością obciążenia brzegu tarczy momentami, co wynika bezpośrednio z (1.3)<sub>2</sub> oraz z przyjętej tu parametryzacji. Należy zaznaczyć, że teorię efektu brzegowego tu przedstawioną można stosować tylko wtedy, gdy wskaźnik zmienności obciążenia brzegowego  $\hat{m}(x^2)$  jest niewielki [2]

## 2. Pierścieniowa tarcza siatkowa obciążona na brzegu momentami

Rozważmy tarczę o strukturze siatkowej przedstawionej na rys. 1. Płaszczyznę tarczy parametryzujemy biegunowym układem współrzędnych  $\{r, \varphi\}$ . Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \text{dla } r = r_w: \quad m^r &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos n\varphi & \text{i} \quad p^{rr} = p^{r\varphi} = 0; \\ \text{dla } r = r_z: \quad m^r &= 0 & \text{i} \quad p^{rr} = 0, \quad p^{r\varphi} = p_z^{r\varphi}. \end{aligned}$$

Niech rozpatrywana tarcza siatkowa będzie siatką utworzoną z prętów. Wtedy, zgodnie z [1], zachodzi

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\beta\mu\nu} &= \sum_{\Delta} (R^{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} t_{\Delta}^{\nu} + \tilde{R}^{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\beta} t_{\Delta}^{\mu} \tilde{t}_{\Delta}^{\nu}), \\ C^{\alpha\mu} &= \sum_{\Delta} t_{\Delta}^{\alpha} t_{\Delta}^{\mu} \tilde{S}^{\Delta}, \\ R^{\Delta} &= \frac{12(EJ)_{\Delta}}{l_{\Delta}^2 \tilde{l}_{\Delta}}, \quad \tilde{R}^{\Delta} = \frac{(EA)_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}}, \quad \tilde{S}^{\Delta} = \frac{(EJ)_{\Delta}}{\tilde{l}_{\Delta}} \end{aligned}$$

gdzie

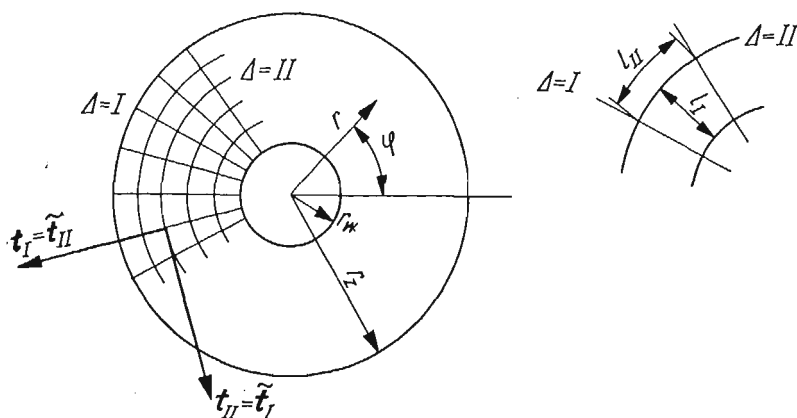
- $\alpha, \beta, \mu, \nu$ , są wskaźnikami przebiegającymi ciąg (1, 2).
- $(EA)_{\Delta}$  sztywnością pręta z rodziny  $\Delta$  na ściskanie (rozciąganie),
- $(EJ)_{\Delta}$  sztywność pręta z rodziny  $\Delta$  na zginanie,
- $l_{\Delta}$  odległości między sąsiednimi prętami z rodziny  $\Delta$ ,
- $\tilde{l}_{\Delta}$  odległości między sąsiednimi węzłami siatki w kierunku  $\Delta$ ,
- $\tilde{t}_{\Delta}^{\alpha}$  składowe wektora jednostkowego stycznego do pręta z rodziny  $\Delta$  w układzie  $\{x^{\alpha}\} \equiv \{r, \varphi\}$ ,
- $\tilde{t}_{\Delta}^{\beta}$  składowe wektora jednostkowego normalnego do pręta z rodziny  $\Delta$  w układzie  $\{x^{\alpha}\} \equiv \{r, \varphi\}$ .

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami oraz z [2] zachodzą związki:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tilde{a}^{\varphi r \varphi r} &= -r^{-2}(\tilde{R}^I)^{-1}, & \tilde{a}^{r r r r} &= -(R^{II})^{-1}, \\ \tilde{a}^{\varphi \varphi \varphi \varphi} &= -r^{-4}(R^I)^{-1}, & \tilde{c}^{\varphi \varphi} &= -a^2 r^{-2}(\tilde{S}^I)^{-1}, \\ \tilde{a}^{r \varphi r \varphi} &= -r^{-2}(\tilde{R}^{II})^{-1}, & \tilde{c}^{r r} &= -a^2(\tilde{S}^{II})^{-1}. \end{aligned}$$

Pozostałe składowe tensorów  $\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}$  i  $\tilde{c}^{\beta\mu}$  są równe zero. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że wielkości  $\tilde{R}^I$ ,  $\tilde{R}^{II}$ ,  $R^I$ ,  $R^{II}$ ,  $\tilde{S}^I$ ,  $\tilde{S}^{II}$  są stałymi. Równanie efektu brzegowego ma wtedy postać

$$(2.4) \quad m^r{}_{,rr} - \frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I} m^r = 0.$$



Rys. 1

Rozwiązanie tego równania przedstawimy w postaci całki (1.8)

$$(2.5) \quad m^r = \psi(\varphi) \exp \sqrt{\frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I}} (r_w - r),$$

a funkcję  $\psi(\varphi)$  wyznaczmy z warunku brzegowego (2.1) otrzymując

$$(2.6) \quad m^r = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos n\varphi \exp \sqrt{\frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I}} (r_w - r).$$

Składową  $m^\varphi$  wektora  $m^\alpha$  obliczamy z równania (1.7). Równanie to we współrzędnych biegunowych dla rozważanej tarczy przyjmie postać

$$(2.7) \quad m^\varphi = \left( \frac{a}{\tilde{c}^{rr}} \right)^2 \tilde{a}^{r r r r} \tilde{c}^{r r} m^r{}_{,r\varphi} = - \frac{\tilde{S}^{II}}{\sqrt{\tilde{R}^{II} \tilde{S}^I}} \exp \sqrt{\frac{\tilde{R}^{II}}{\tilde{S}^I}} (r_w - r) \sum_{n=1}^{\infty} n M_n \sin n\varphi.$$

Funkcję naprężeń  $\Phi$  wyznaczamy z równania (1.4)<sub>1</sub>. Równanie to we współrzędnych biegunowych przyjmuje następującą postać

$$(2.8) \quad (R^{II})^{-1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{(\tilde{R}^{II})^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1}}{r^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{(R^I)^{-1}}{r^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi^4} - \frac{2(\tilde{R}^{II})^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1}}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \varphi^2} + \\ + \frac{2(R^{II})^{-1}}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{2(R^I)^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1} + 2(\tilde{R}^{II})^{-1}}{r^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{(R^I)^{-1}}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{(R^I)^{-1}}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Rozwiązania równania (2.8) poszukujemy w postaci

$$(2.9) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \sin n\varphi.$$

Podstawiając (2.9) do równania (2.8) otrzymujemy

$$(2.10) \quad r^4 (R^{II})^{-1} \frac{d^4 B_n}{dr^4} + 2(R^{II})^{-1} r^3 \frac{d^3 B_n}{dr^3} + r^2 \{n^2 [-(\tilde{R}^{II})^{-1} - (\tilde{R}^I)^{-1}] - (R^I)^{-1}\} \frac{d^2 B_n}{dr^2} + \\ + r \{n^2 [2(\tilde{R}^{II})^{-1} + (\tilde{R}^I)^{-1}] + (R^I)^{-1}\} \frac{dB_n}{dr} + n^4 (R^I)^{-1} + n^2 [-2(R^I)^{-1} - (\tilde{R}^I)^{-1} - 2(\tilde{R}^{II})^{-1}] = 0.$$

Równanie powyższe jest jednorodnym równaniem Eulera, a jego rozwiązanie ma postać

$$(2.11) \quad B_n = \sum_{i=1}^4 B_{ni} r^{k_{ni}},$$

w której  $B_{ni}$  są stałymi, a  $k_{ni}$  są pierwiastkami następującego równania charakterystycznego:

$$(2.12) \quad (R^{II})^{-1} k_n^4 - 4(R^{II})^{-1} k_n^3 + \{5(R^{II})^{-1} - (R^I)^{-1} - n^2 [(\tilde{R}^I)^{-1} + (\tilde{R}^{II})^{-1}]\} k_n^2 + \\ + \{2(R^I)^{-1} - 2(R^{II})^{-1} + n^2 [3(\tilde{R}^{II})^{-1} + 2(\tilde{R}^I)^{-1}]\} k_n + n^4 (R^I)^{-1} + \\ + n^2 [-2(R^I)^{-1} - (\tilde{R}^I)^{-1} - 2(\tilde{R}^{II})^{-1}] = 0.$$

Tym samym zachodzi

$$(2.13) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^4 B_{ni} r^{k_{ni}} \sin n\varphi.$$

Zgodnie ze wzorem (1.2) składowe stanu naprężenia  $p^{\alpha\beta}$  wynoszą

$$(2.14) \quad p^{rr} = \frac{1}{r^2} \Phi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \Phi_{,r} - \frac{1}{r} m^r_{,\varphi} + m^\varphi, \\ p^{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} \Phi_{,r\varphi} + \frac{1}{r^3} \Phi_{,\varphi} - \frac{1}{r} m^\varphi_{,\varphi} - \frac{1}{r^2} m^r, \\ p^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} \Phi_{,rr} + \frac{1}{r} m^\varphi_{,r} + \frac{1}{r^2} m^r.$$

Stałe  $B_{ni}$  wyznaczamy z warunków brzegowych dla obciążeń brzegów tarczy siłami otrzymując następujący układ równań

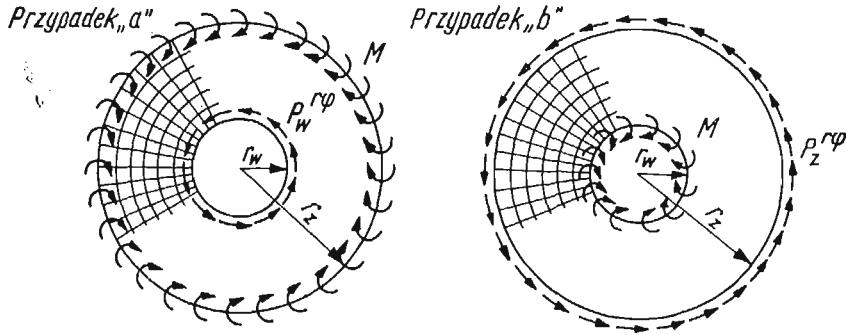
$$(2.15) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{r_w^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n^2 r_w^{k_{ni}} + \frac{1}{r_w} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{ni} r_w^{k_{ni}-1} + \frac{1}{r_w} M_n n - \frac{\tilde{S}^{II}}{\sqrt{\tilde{R}^{II} \tilde{S}^I}} M_n n = 0, \\ & -\frac{1}{r_w^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{in} n r_w^{k_{ni}-1} + \frac{1}{r_w^3} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n r_w^{k_{ni}} + \frac{1}{r_w} \frac{\tilde{S}^{II}}{\sqrt{\tilde{R}^{II} \tilde{S}^I}} M_n n^2 - \frac{1}{r_w^2} M_n = 0, \\ & -\frac{1}{r_z^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n^2 r_z^{k_{ni}} + \frac{1}{r_z} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{in} r_z^{k_{ni}-1} = 0, \\ & -\frac{1}{r_z^2} \sum_{i=1}^4 B_{ni} k_{ni} n r_z^{k_{ni}-1} + \frac{1}{r_z^3} \sum_{i=1}^4 B_{ni} n r_z^{k_{ni}} = p_z^{\varphi}. \end{aligned}$$

Znając  $B_{ni}$  określimy ze wzorów (2.14) składowe tensora naprężenia  $p^{rr}$ ,  $p^{r\varphi}$ ,  $p^{\varphi\varphi}$ . W analogiczny sposób rozwiązanie zadania przebiega dla przypadku tarcz perforowanych. Zmianie ulegają jedynie wyrażenia tensorów sztywności sprężystej (2.2). Zadanie to jest także łatwe do rozwiązania dla obciążeń innych rozwijalnych na brzegu w szereg Fouriera. Obciążenie to jednak spełniać musi warunki podane w pracy [2].

### 3. Porównanie metody efektu brzegowego z rozwiązaniami ścisłymi dla tarcz kołowych o strukturze siatkowej

Porównanie przeprowadzono dla przypadków obciążenia podanych na rys. 2a i 2b. Charakterystykę geometryczną siatki przedstawia rys. 3. Przyjmijmy, że

$$(3.1) \quad l_{II} = \Psi r, \quad l_I = \varkappa r, \quad \Psi = \varkappa = \frac{2\pi}{n},$$



Rys. 2

gdzie  $n$  określa gęstość siatki ( $n$  jest liczbą prętów obwodowych i promieniowych), sztywności zginania  $(EJ)_d$  w płaszczyźnie tarczy są stałe oraz

$$A \equiv \frac{r_z}{r_w}, \quad \varrho \equiv \frac{r}{r_z}.$$



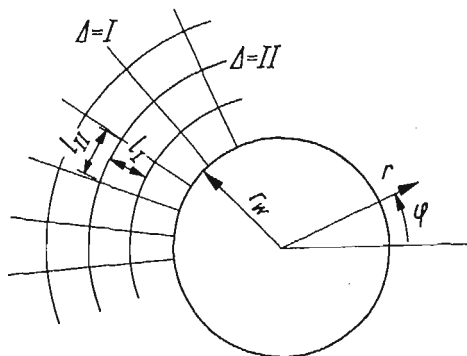
Zgodnie z rys. 2 warunki brzegowe dla przypadku *a* mają postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} r = r_z: \quad m^r &= M, \quad p^{rr} = p^{r\varphi} = 0; \\ r = r_w: \quad m^r &= 0, \quad p^{rr} = 0, \quad p^{r\varphi} = p_w^{r\varphi}; \end{aligned}$$

a dla przypadku *b* są określone równościami

$$(3.3) \quad \begin{aligned} r = r_z: \quad m^r &= 0, \quad p^{rr} = 0, \quad p^{r\varphi} = p_z^{r\varphi}; \\ r = r_w: \quad m^r &= M, \quad p^{rr} = p^{r\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Dla podanych powyżej danych przeprowadzono porównanie wyników otrzymanych metodą ścisłą [3] z wynikami otrzymanymi metodą przybliżoną efektu brzegowego. Porównanie to przeprowadzono dla siatek o gęstościach  $n = 12$  i  $n = 48$ . Najbardziej poglą-



Rys. 3

dowym sposobem tego porównania jest zestawienie wielkości momentów promieniowych  $m^r$  otrzymanych za pomocą obydwu metod. Zestawienie to przedstawiono na wykresach rys. 4. Dla przypadku *a* metoda efektu brzegowego prowadzi do wyników

$$\begin{aligned} n = 12: \quad m^r &= M\varrho^{6,6}; \\ n = 48: \quad m^r &= M\varrho^{26,4}; \end{aligned}$$

Z obliczeń zaś ścisłych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} n = 12: \\ m^r &= M(1,06396\varrho^{5,4} + 0,06396A^{-7,4}\varrho^{-8,4} - 0,06396)\varrho^{-1}; \\ n = 48: \\ m^r &= M(1,0043\varrho^{24} + 0,0043A^{-27}\varrho^{-28} - 0,0043\varrho^{-1}). \end{aligned}$$

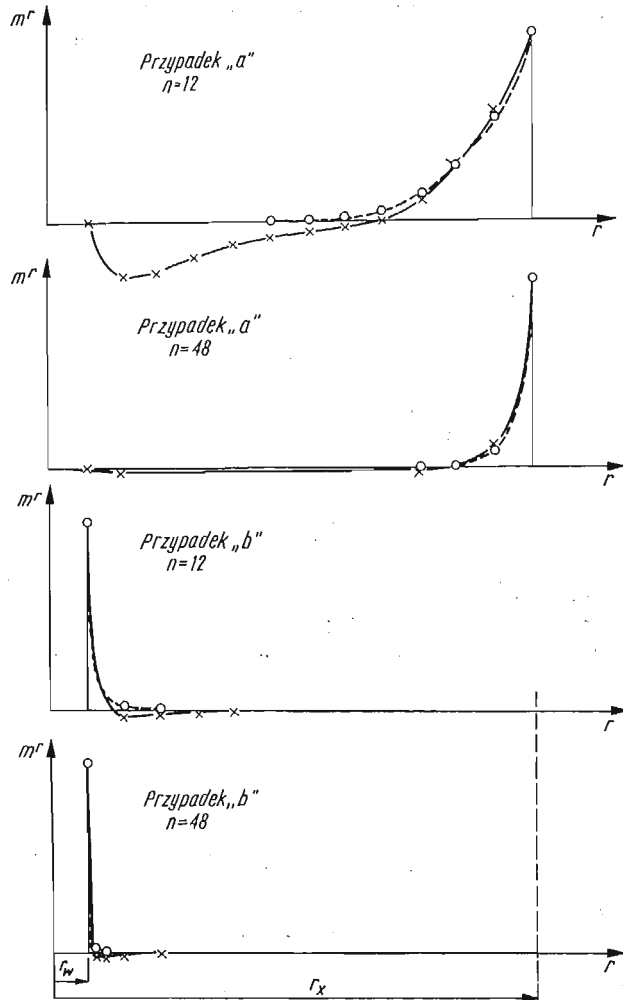
Dla przypadku *b* metoda efektu brzegowego daje

$$\begin{aligned} n = 12: \quad m^r &= M(A\varrho)^{-6,6}; \\ n = 48: \quad m^r &= M(A\varrho)^{-26,4}; \end{aligned}$$

obliczenia zaś ścisłe

$$\begin{aligned} n = 12: \\ m^r &= M(0,06396A^{-1}\varrho^{5,4} + 1,06396A^{-8,4}\varrho^{-8,4} - 0,06396\varrho^{-1}A^{-1}); \\ n = 48: \\ m^r &= M(0,0043A^{-1}\varrho^{24} + 1,0043A^{-28}\varrho^{-28} - 0,0043A^{-1}\varrho^{-1}). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć porównując odpowiednie rzędne wykresów, że efekt brzegowy występuje tym silniej, im większa jest gęstość siatki  $n$ . Jest on także zależny od tego, czy obciążenie momentowe występuje na brzegu wewnętrznym czy zewnętrznym. Porównanie odpowiednich wykresów prowadzi jednocześnie do wniosku, że efektywne stosowanie metody przybliżonej (efektu brzegowego) jest możliwe ze względów praktycznych dla siatek



Rys. 4. Kreską przerywaną oznaczono momenty  $m^r$  obliczone metodą przybliżoną, linią ciągłą obliczone w sposób dokładny

dostatecznie gęstych. Za siatki dostatecznie gęste można uważać tu siatki o liczbie prętów obwodowych wynoszącej co najmniej  $n = 48$  (przy tej samej liczbie prętów promienionych). Popętniany wtedy błąd w przypadku obciążenia brzegu wewnętrznego momentami wynosi około 1%, w przypadku zaś obciążenia brzegu zewnętrznego momentami wynosi około 2,6%, co stanowi wystarczającą dokładność dla celów praktycznych.

## Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Load-carrying structures of the dense lattice type. The plane problem*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966).
2. Cz. WOŹNIAK, *Edge effect in lattice-type discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 1, 1967.
3. S. KONIECZNY, Cz. WOŹNIAK, *Obliczanie płyt siatkowych w oparciu o teorię efektu brzegowego*, Rozpr. Inżyn., 3, 15 (1967).
4. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *On the solution of axially symmetric problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 10, 1966.

## Резюме

РАСЧЕТ СЕТЧАТЫХ ДИСКОВ ОСНОВАННЫЙ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

В статье [1] были даны основные уравнения дисков с сетчатой структурой. В качестве примеров таких дисков можно привести плоские регулярные и густые стержневые сетки, диски с густой и регулярной перфорацией и т. п. В рамках континуальной модели таких дисков, представленной в работе [1], определение напряженного состояния и перемещений сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений 6-го порядка. Эти уравнения аналогичны в некотором смысле уравнениям плоского анизотропного континуума Коссера с тремя степенями свободы (две составляющие вектора перемещений и локальное вращение в плоскости диска). В дифференциальном операторе высшего порядка участвует малый параметр, характеризующий «плотность» сетки. Благодаря этому становится возможным положение приближенного решения с использованием так называемой асимптотической теории (когда малый параметр приравняется нулю) и «краевого эффекта» [2].

В данной статье содержатся: 1) пример расчета сетчатого диска при использовании асимптотической теории и краевого эффекта; 2) численная оценка точности приближенного решения, в зависимости от густоты сетки. Далее, в разд. 1 настоящей статьи, на основе [2] дана сводка основных уравнений теории. Следует отметить, что приближенный способ расчета сетчатых дисков, основанный на краевом эффекте, значительно проще чем приближенный метод расчета сетчатых пластин, использующий аналогичный эффект в пластинах [3].

## Summary

## EDGE EFFECT IN DENSE LATTICE-TYPE DISC STRUCTURES

Basic equations of the lattice-type disc structures (such as plane gridworks, perforated plates etc.) were given in [1]. The problem was reduced to a boundary value problem for a 6th order differential equation, the discrete structure being replaced by a continuous model. These equations are analogous to those governing a plane anisotropic Cosserat continuum possessing three degrees of freedom (two components of the displacement vector and the local rotation). An additional small parameter characterizing the density of the lattice appears at the higher order terms of the equation. This makes it possible to obtain an approximate solution with the aid of the asymptotic theory — the parameter being made zero — and the edge effect.

The paper presents an example of calculations of a lattice structure, based upon the asymptotic theory and the edge effect theory, and a rough numerical estimate of the achieved accuracy depending on the lattice density. It should be mentioned that the presented method applied to plane lattice-type discs is considerably simpler than the analogous method applied in [3] to the problem of bending of lattice-type plate structures.

POLITECHIKA ŁÓDZKA, KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI  
UNIWERSYTET WARSZAWSKI, KATEDRA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1967 r.*

---

O EFEKCIE SKALI CIAŁA KRUCHEGO WYTRZYMUJĄCEGO USTALONĄ  
KONCENTRACJĘ MIKRO-USZKODZEŃ

JANUSZ MURZEWSKI, JÓZEF SOJKA (KRAKÓW)

I. Model ośrodka i mechanizm zniszczenia

Jednostkowa granica wytrzymałości ośrodka kruchego zależy od absolutnych rozmiarów ciała, w tym sensie, że jej wartość oczekiwana jest malejącą funkcją objętości ciała. Prawdliwość ta, zwana efektem skali, została zbadana doświadczalnie i wytłumaczona na gruncie rachunku prawdopodobieństwa przez W. WEIBULLA [12], J. I. FRENKIELA [5], B. B. CZECZULINA [2] i innych autorów [1, 3]. Podstawą heurystyczną teorii efektu skali jest tak zwana hipoteza «najślabszego ogniwa w łańcuchu», według której nośność graniczną całego ciała określa się wytrzymałością miejscową jego najślabszego elementu oraz hipoteza, że w materiale znajdują się przypadkowe, beładnie rozmieszczone uszkodzenia lokalne, czyli miejsca o zaniżonej wytrzymałości.

Metody rozważań, jakie są przedstawicne na podstawie tych hipotez, można by z grubsza rzecz biorąc podzielić na dwa kierunki. Do kierunku pierwszego zaliczymy te prace, w których wprowadza się ciągle funkcje rozkładu minimalnych wartości lokalnej wytrzymałości materiału. W. WEIBULL jako pierwszy tak właśnie postąpił [12], a zaproponowane przez niego prawo rozkładu wartości minimalnych okazało się trafne i zyskało duże rozpowszechnienie [13]. Dalszy rozwój tego kierunku, dla którego charakterystyczne jest traktowanie materiału jako ośrodka ciągłego, polegać chyba będzie na zastosowaniach teorii stacjonarnych funkcji stochastycznych [8].

Drugi kierunek — to użycie klasycznych schematów losowania i «dyskretnych» funkcji rozkładu, np. funkcji rozkładu Bernoulliego. Stosując tę metodę należy sobie wyobrazić ciało jako zbiór cząstek, w których mogą występować defekty. Z reguły uwzględnia się niejednorodność tych defektów i charakteryzuje się je funkcją prawdopodobieństw Gaussa, Pearsona lub inną. Ten punkt widzenia został przedstawiony np. w pracy T. A. KONTO-ROWEJ i J. I. FRENKIELA [5]. W tym ujęciu poszukiwania teoretyczne zwrócone są w kierunku określenia prawdopodobieństwa rzadko występujących, najbardziej osłabionych cząstek materiału, bo te determinują wytrzymałość całego zbioru. Jednakże w znanych nam pracach nie spotkaliśmy konsekwentnie zastosowanego schematu rzadkich zdarzeń i prawa prawdopodobieństw Poissona. Nawet S. D. WOŁKOW [14], który przedstawia w gruncie rzeczy Poissonowski schemat losowania, dokonuje ostatecznie błędnego przejścia granicznego i aproksymuje końcowe wyniki Gaussowskim rozkładem asymptotycznym (str. 93 monografii [14]).

W niniejszej pracy zjawisko kruchego pęknięcia analizować będziemy w oparciu o uogólnioną (tak jak u S. D. WOŁKOWA) hipotezę najsłabszego ogniwa w łańcuchu i hipotezę przypadkowego rozłożenia defektów przy uwzględnieniu dyskretnej struktury materiału. Zarodek makropęknięcia w ośrodku traktować będziemy jako zdarzenie rzadkie, wywołane nadzwyczajną lokalną kumulacją mikrorys, i prowadzące ostatecznie do zastosowania prawa prawdopodobieństw Poissona. Wyniki, które przedstawimy, będą ogólniejsze od klasycznych wzorów opisujących efekt skali i dlatego ich zakres stosowalności w praktyce może być szerszy.

Przy analizie efektu skali ograniczymy się do ośrodków quasi-jednorodnych, sprężysto-kruchych, początkowo doskonale izotropowych. Przez quasi-jednorodność rozumiemy jednorodność w skali makroskopowej przy jednoczesnej niejednorodności w skali mikroskopowej. Sprężysto-krucha własność mikroelementu polega na tym, że po odkształceniu sprężystym i osiągnięciu przez mikronapężenie  $s$  odpowiedniej granicy  $P$  następuje momentalnie opadnięcie mikro-napężenia do zera. Sprężysto-krucha własność makroelementu polega na tym, że aż do granicy sprężystości  $Q$  materiał podlega prawu Hooke'a, następnie mogą zachodzić nieliniowe odkształcenia na skutek spękania, czyli tzw. plastyczności destrukcyjnej i dopiero po osiągnięciu przez napężenie  $\sigma$  granicy wytrzymałości  $R$  następuje rozerwanie ciała. Rozpatrywany jest stan napężenia doskonale jednoosiowy i quasi-jednorodny, a więc  $s$  jest zmienną losową a  $\sigma$  — wielkością w pełni określoną.

Przy założeniu doskonałej izotropii początkowej materiału mikrorysy występować będą w płaszczyznach prostopadłych do kierunku działania naprężeń rozciągających. Na skutek takiego spękania materiał nabywa własności anizotropowych. Zagadnienie nabytej anizotropii «destrukcyjnej» w przestrzennym stanie napężenia było już przedmiotem badań doświadczalnych i teoretycznych. Przy uproszczonym podejściu do tego zagadnienia, przedstawionym w pracy [9] i ograniczeniu się do jednoosiowego stanu napężenia jedynym efektem tej anizotropii będą wyżej wspomniane odstępstwa od prawa Hooke'a.

Zakładamy, że materiał ma mikrostrukturę podobną do tej, jaką opisywali w swoich pracach J. MURZEWSKI [9] i S. D. WOŁKOW [14], tzn. polegającą na podziale ośrodka na elementy objętościowe makroskopowe  $\Omega$  (I rzędu) i mikroskopowe  $O$  (II rzędu), czyli na tzw. punkty fizyczne pierwszego i drugiego rodzaju, w stosunku do których stosuje się różne prawa fizyczne. Wymiary elementów makroskopowych szacowane są [9] na 0,1 mm, czyli  $10^{-2}$  cm, tak żeby podlegać badaniom laboratoryjnym, elementów zaś mikroskopowych — na  $10^3$  Å, czyli  $10^{-5}$  cm, tak żeby zachować jeszcze własności materii ciągłej. Przy tak pomyślanym geometrycznym podziale ośrodka ilość elementów  $O$  w elemencie  $\Omega$  wynosi

$$(1.1) \quad M = \left( \frac{10^{-2}}{10^{-5}} \right)^3 = 10^9,$$

ilość zaś punktów pierwszego rodzaju jest tego samego rzędu już przy stosunkowo małych rozmiarach elementów konstrukcyjnych, bo  $\sim 10$  cm,

$$(1.2) \quad N = \left( \frac{10}{10^{-2}} \right)^3 = 10^9.$$

Można się zatem spodziewać, że przy tak dużej liczbie elementów zachodzą prawa wielkich liczb, które zastosujemy w dalszych rozważaniach tej pracy. Wielkości mikroskopowe  $O$  i makroskopowe  $\Omega$ , a zatem i  $M$  będziemy w dalszym ciągu traktować jako stałe dla danego ośrodka kruchego, ale nie będziemy konkretyzować ich wartości. Będą to więc parametry zależne od rodzaju materiału.

W związku z tak przyjętym modelem ośrodka rozróżniamy zniszczenie ośrodka mikroskopowe, czyli drugiego rodzaju, i makroskopowe, czyli pierwszego rodzaju, przy czym to ostatnie przy jednorodnym stanie naprężeń jest równoznaczne z utratą nośności całego ciała. O wytrzymałości materiału decydują losowo rozłożone mikrouszkodzenia (mikrorysy) wewnętrzne, powstające w nim w procesie obciążenia. Element objętościowy drugiego rzędu traci wytrzymałość z chwilą pojawienia się w nim jednej mikrorisy. Natomiast pęknięcie elementu pierwszego rzędu następuje przy pewnej granicznej liczbie mikrorys  $r$  uważanej za jedną makrorysę. Liczba naturalna  $r$  traktowana jest jako specyficzna stała materiałowa.

Zakładamy, że ciało o objętości  $V$  znajduje się w stanie mikronaprężeń  $s$  i że  $s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , oznaczają naprężenia panujące w elementach mikroskopowych  $O_k$ . Jeżeli granica mikrowytrzymałości elementu  $O_k$  wynosi  $P_k$ , to mikroskopowy warunek pęknięcia tego elementu zapisujemy w postaci

$$(1.3) \quad s_k \geq P_k.$$

Jest to warunek wystarczający dla powstania stacjonarnej mikrorisy. Jeśli w  $k$ -tym elemencie mikroskopowym nie było mikrorisy, to jest to również warunek konieczny. Warunek mikrosójności ma wówczas postać nierówności przeciwnej

$$(1.4) \quad s_k < P_k.$$

Stadium plastyczności destrukcyjnej ośrodka z mikrostrukturą, znajdującego się pod obciążeniem, zaczyna się z chwilą pęknięcia jednego mikroelementu  $O_k$  i postępuje do chwili, kiedy w jednym makroelemencie  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , składającym się z mikroelementów  $O_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , ilość zniszczonych punktów fizycznych osiągnie wartość graniczną  $r$ . Z tą chwilą następuje pęknięcie elementu  $\Omega_i$ , czyli utworzenie się rysy, rozprzestrzeniającej się na cały przekrój ciała.

Założenie, że istnieje taka liczba  $r > 1$ , która charakteryzuje kruche zachowanie się materiału, jest podstawową hipotezą tej pracy. Nie jest to hipoteza nowa, gdyż m. in. S. D. WÓLKOW [14], jak już wspomniano, w ten sposób właśnie uogólnił koncepcję najsłabszego ogniwa w łańcuchu. Istnieje wiele argumentów przemawiających za celowością wprowadzenia takiego uogólnienia. Do nich zaliczyć należy powszechnie znane fakty doświadczalne, że pojedyncze mikropęknięcia rozciąganego ośrodka kruchego, wykrywane np. przez osłuchiwanie stetoskopem, nie powodują całkowitego zerwania ciała. Przemawia za tą hipotezą także fakt, że materiały kruche na granicy wytrzymałości z reguły wykazują odstępstwa od prawa Hooke'a, mimo że odkształcenia plastyczne typu poślizgowego lub lepkiego nie wchodzi w rachubę z uwagi na niskie naprężenie i krótki czas próby. Jeśli doświadczalnie stwierdza się w tym przypadku, że odkształcalność graniczna charakteryzuje wytrzymałość materiału, to ze statystycznej teorii plastyczności destrukcyjnej [9] wynika, że maksymalna koncentracja spękania jest specyficzną stałą ośrodka, a stąd z kolei wniosek, który będzie jeszcze w tej pracy szczegółowo wyprowadzony, że istnieje liczba  $r$

ograniczająca ilość mikrorys w jednym makroelemencie. Nadmienić jednak należy, że hipoteza o stałej liczbie  $r$  nie jest jedyna, która pozwala wytłumaczyć fakt, że granica wytrzymałości może przewyższać granicę proporcjonalności ciała kruchego. Dla materiałów kruchych o silnie nieliniowym prawie odkształcenia można interpretować utratę wytrzymałości jako niestateczność stanu naprężenia [9], skąd wcale nie wynika  $r = \text{const}$ .

W ogólnym przypadku zarówno mikrowytrzymałość  $P$  jak też mikronaprężenie  $s$  są zmiennymi losowymi. Dla uproszczenia obliczeń i przejrzystości rozważań tylko jedną z tych wielkości będziemy uważać za zmienną losową o skończonej wariancji, a drugą — ustalimy. Kwestia, którą wielkość przyjąć za losową przy wyprowadzaniu statystycznego kryterium pęknięcia, czy mikrowytrzymałość  $P$ , jak często zakłada w swych pracach pierwszy z autorów, np. [7, 9], czy też — mikronaprężenie  $s$ , jak to czyni S. D. WOŁKOW [14], pozostaje otwartą. W pracy rozpatrzemy obydwie warianty, jakkolwiek bardziej uzasadnionym wydaje się przyjmowanie za zmienną losową mikrowytrzymałości, gdyż rozrzut mikronaprężeń zależy głównie od zmienności mikroskopowych modułów sprężystości, które nie podlegają tak dużym fluktuacjom jak cechy wytrzymałościowe.

Zakładamy, że rozkłady prawdopodobieństw mikronaprężenia  $s$  i logarytmu mikrowytrzymałości  $\ln P$  są typu gaussowskiego. Prawo Gaussa bywa z reguły przyjmowane dla scharakteryzowania rozkładu mikronaprężeń lub mikrodefektów w pracach teoretycznych na temat efektu skali [5, 14]. Potwierdzają je ostatnio przeprowadzone mikroskopowe badania eksperymentalne [4]. Logarytmiczno normalne prawo rozkładu dla mikrowytrzymałości jest częściej stosowane niż normalne prawo rozkładu, gdyż usuwa prawdopodobieństwa ujemnych wartości granicy mikrowytrzymałości, nie mające sensu realnego. Poza tym różnice między normalną i logarytmiczno normalną funkcją rozkładu przy niedużych współczynnikach zmienności są bardzo małe. W ogóle można mówić, że rozkład normalny i log-normalny jest rozkładem asymptotycznym dla wielu symetrycznych i niesymetrycznych rozkładów prawdopodobieństw [11] i stosowanie jego ma w pierwszym przybliżeniu znaczenie do pewnego stopnia uniwersalne.

## 2. Wpływ skali na granicę sprężystości

Korzystamy z następujących oznaczeń:

- $V$  objętość ciała,
- $\Omega$  objętość elementu makroskopowego,
- $O$  objętość elementu mikroskopowego,
- $L$  ilość elementów  $O$  w ciele o objętości  $V$ ,
- $N$  ilość elementów  $\Omega$  w ciele o objętości  $V$ ,
- $M$  ilość elementów  $O$  w elemencie o objętości  $\Omega$ ,
- $l$  ogólna ilość mikrorys w ciele o objętości  $V$ ,
- $n$  losowa ilość makropęknięć w ciele o objętości  $V$ ,
- $m$  losowa ilość mikrorys w elemencie  $\Omega$ ,
- $\bar{m}$  średnia ilość mikrorys w elemencie  $\Omega$ ,
- $r$  graniczna ilość mikrorys w elemencie  $\Omega$ ,

między którymi zachodzą związki:

$$(2.1) \quad L = M \cdot N,$$

$$(2.2) \quad \Omega = M \cdot O,$$

$$(2.3) \quad V = N \cdot \Omega = M \cdot N \cdot O = L \cdot O,$$

$$(2.4) \quad l = \bar{m} \cdot N.$$



Geometryczne prawdopodobieństwo mikrorys  $\lambda$ , czyli średnia koncentracja zniszczonych mikroelementów  $O$  w objętości ciała  $V$  wyraża się wzorem

$$(2.5) \quad \lambda = \frac{l}{L} = \frac{\bar{m}}{M} \geq 0.$$

W pracach [7, 9] proponuje się nazwać prawdopodobieństwo  $\lambda$  spękaniami. Spękanie materiałów czysto-kruchych, nie wykazujących efektów ciągliwości (plastyczności poślizgowej itp.), równa się wyteżeniu w probabilistycznym sensie tego słowa.

Przyjmujemy najpierw za zmienną losową mikronapężenie  $s$  i charakteryzujemy je normalnym prawem rozkładu  $N(\bar{s}, \mu)$ , o wartości średniej  $\bar{s}$  i odchyleniu standardowym  $\mu$ . Wartość średnia  $\bar{s}$  równa się w przybliżeniu makroskopowemu napężeniu głównemu  $\sigma$ , co wynika z prawa akcji i reakcji [9, str. 268],

$$(2.6) \quad \bar{s} = \frac{\sigma}{1-\lambda} \approx \sigma.$$

Powyższą przybliżoną równość wprowadzamy dlatego, że  $\lambda$  w naszych rozważaniach jest liczbą bardzo małą, ponieważ  $\bar{m}$  jest liczbą skończoną, a  $M$  jest bardzo duże. Wariancja mikronapężeń w ośrodku quasi-jednorodnym wg twierdzenia S. D. WOŁKOWA [14, str. 29] jest proporcjonalna do właściwej energii sprężystej, a więc

$$(2.7) \quad \mu^2 = 2E_0\Phi.$$

gdzie  $E_0 \geq 0$  jest stałą materiałową, określającą stopień niejednorodności sprężystej ośrodka.

Energia potencjalna odkształcenia sprężystego dla ośrodka izotropowego w rozpatrywanym jednoosiowym przypadku napężeń wynosi

$$(2.8) \quad \Phi = \frac{\sigma^2}{2E},$$

gdzie  $E$  jest ustalonym modułem Younga. A więc odchylenie standardowe mikronapężeń wynosi

$$(2.9) \quad \mu = \sqrt{2E_0\Phi} = \sigma \sqrt{\frac{E_0}{E}}.$$

Wprowadzając symbol  $v$  dla oznaczenia współczynnika zmienności dostajemy wzór

$$(2.10) \quad v = \frac{\mu}{\bar{s}} = \sqrt{\frac{E_0}{E}} = \text{const.}$$

W pierwszym wariancie obliczeń traktujemy mikrowytrzymałość  $P_k$  mikroelementu  $\sigma_k$  jako jednakową wielkość dla każdego  $k$ ,

$$(2.11) \quad P_k \approx \bar{P} = \text{const.}$$

Biorąc pod uwagę (1.4), (2.6) i (2.11) oraz rozkład normalny, wyrażamy prawdopodobieństwo mikrosłójności, czyli koncentrację mikroelementów niezniszczonych następującym wzorem:

$$(2.12) \quad \mathcal{P}(s < \bar{P}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mu} \int_{-\infty}^{\bar{P}} \exp\left[-\frac{(s-\sigma)^2}{2\mu^2}\right] ds = F(t),$$

gdzie  $F(t)$  jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego,

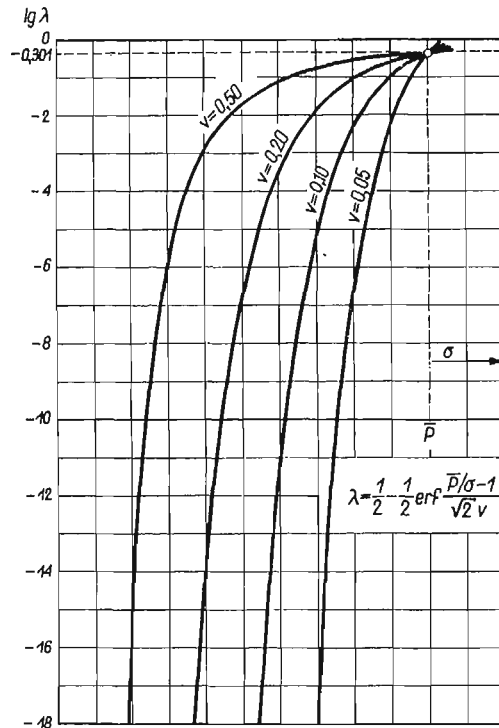
$$t = \frac{\bar{P} - \sigma}{\mu} = \frac{\bar{P}/\sigma - 1}{v}.$$

Prawdopodobieństwo mikrouszkodzenia wynosi

$$(2.13) \quad \mathcal{P}(s \geq \bar{P}) = 1 - F(t)$$

i kojarzy się ze strukturą ośrodka za pomocą wzoru (2.5). Tak więc porównujemy prawdopodobieństwo (2.13) z geometrycznym prawdopodobieństwem mikrouszkodzenia (2.5) i otrzymujemy

$$(2.14) \quad \lambda = 1 - \mathcal{P}\left(\frac{\bar{P}/\sigma - 1}{v}\right).$$



Rys. 1

Zależność  $\lambda$  od  $\sigma$  przy wybranych wartościach parametru  $v$  przedstawiono na rys. 1. W granicznym przypadku  $v \rightarrow 0$ , a więc dla stanu naprężenia idealnie jednorodnego prawdopodobieństwo mikropęknięcia wynosi

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \lambda = 0, \quad \text{czyli} \quad l = 0 \quad \text{dla} \quad \sigma < \bar{P} \\ \lambda = 1, \quad \text{czyli} \quad l = L \quad \text{dla} \quad \sigma \geq \bar{P}. \end{aligned}$$

W ogólnym przypadku natomiast

$$(2.16) \quad l = 0 \quad \text{dla} \quad \sigma < Q, \quad l \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma \geq Q.$$

Symbolem  $Q$  oznaczyliśmy granicę sprężystości. Rozgranicza ona stan doskonale spójny, liniowo sprężysty, od mikrozarysowania, czyli plastyczności destrukcyjnej materiału. Dla skończonej liczby  $L$ , ilość mikrorys  $l$ , a także granica sprężystości  $Q$  są zmiennymi losowymi. Medianę  $\bar{Q}$  oblicza się z równania

$$(2.17) \quad (1 - \bar{\lambda}_1)^L = \frac{1}{2},$$

gdzie  $\bar{\lambda}_1$  wyraża się wzorem (2.14) dla  $\sigma = \bar{Q}$ , a modę  $\tilde{Q}$  — metodami podanymi po raz pierwszy przez T. A. KONTOROWĄ i J. I. FRENKIELA [5]. Dla wielkiej liczby  $L = M \cdot N$ , wg (2.1) i (2.2), i ustalonej średniej ilości mikrorys  $\bar{l} = \lambda \cdot L$  wyprowadzamy wzór asymptotyczny, z którego określimy kres górny  $Q'$ , realizowany z prawdopodobieństwem równym jedności,

$$(2.18) \quad 1 - (1 - \lambda'_1)^L \rightarrow 1, \quad \text{stąd} \quad \lambda'_1 \rightarrow \frac{1}{L}.$$

Nadmieniamy przy tym, że dla wielkiej liczby  $L$  wartość średnia  $\bar{\lambda}_1$  dąży do tej samej granicy

$$(2.19) \quad \bar{\lambda}_1 = L \int_0^1 \lambda (1 - \lambda)^{L-1} d\lambda = \frac{1}{L+1} \approx \frac{1}{L}.$$

A więc teoretyczna granica liniowej sprężystości, czyli granica proporcjonalności, jest znikomo mała dla ciał dużej objętości, jak wynika z równań (2.14) i (2.18),

$$(2.20) \quad Q' \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad L \rightarrow \infty.$$

W praktyce określa się  $Q'' > Q'$ , jako naprężenie konwencjonalne, wywołujące umowną odchyłkę  $\Delta \varepsilon$  od prawa Hooke'a (np.  $\Delta \varepsilon = 0,0002$ ). Ponieważ przy plastyczności destrukcyjnej odkształcenie nieliniowe wywołane jest redukcją powierzchni przekroju spójnego (przenoszącego naprężenia) [9], więc praktycznie

$$(2.21) \quad \lambda_1'' = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon''}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon'' = \frac{Q''}{E}.$$

Graniczny warunek proporcjonalności formułujemy jak następuje:

$$(2.22) \quad \lambda_1' = 1 - F(t') \quad \text{lub} \quad t' = \Psi(1 - \lambda_1'),$$

gdzie  $t' = \frac{\bar{P}/Q' - 1}{v}$ , a  $\Psi(x)$  jest funkcją odwrotną do dystrybuanty Gaussa, tzn.  $y = \Psi(x)$  gdy  $x = F(y)$ , (rys. 2).

Wartości  $x$  bliskie jedności, odpowiadające dużym, niestabelaryzowanym wartościom argumentu  $y$ , wyznacza się ze wzoru asymptotycznego [6, str. 595], rys. 2,

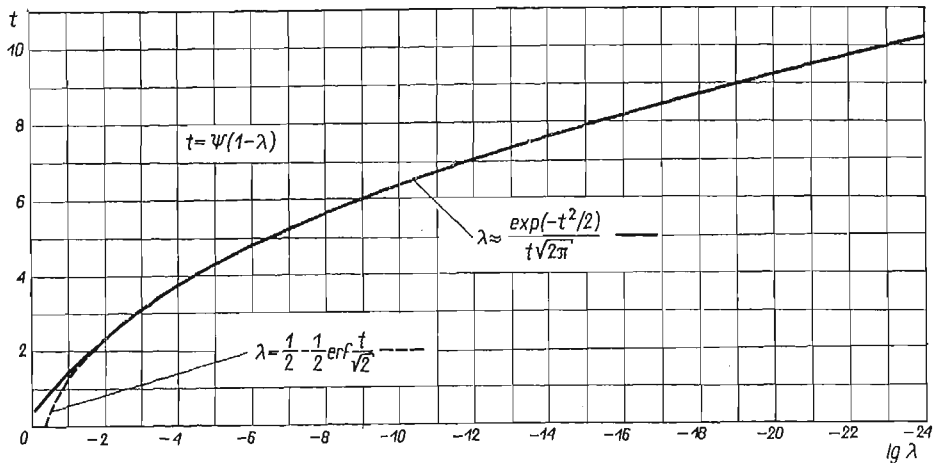
$$(2.23) \quad F(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{y^2}{2}} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} + \frac{3}{y^5} - \dots \right).$$

Oznaczając symbolem  $Q'_0$  granicę proporcjonalności próbki o objętości  $V_0$  oraz

$$t'_0 = \frac{\bar{P}/Q'_0 - 1}{v} \quad \text{i} \quad \lambda'_0 = \frac{Q}{V_0},$$

przy czym  $t'_0 = \Psi(1-\lambda'_0)$ , dostajemy zależność granicy proporcjonalności  $Q'$  od objętości ciała  $V$ ,

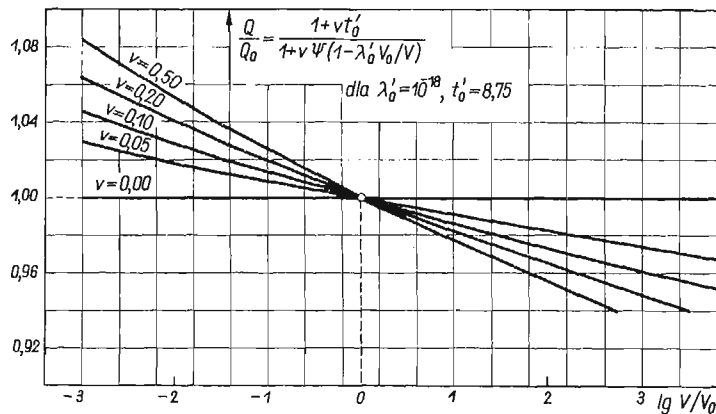
$$(2.24) \quad Q' = Q'_0 \frac{1 + vt'_0}{1 + vt'}.$$



Rys. 2

Zależność (2.24) dla różnych wartości parametru  $v$  i przykładowej wartości  $\lambda'_0 = 1/L = 10^{-18}$  przedstawiono na rys. 3.

Natomiast konwencjonalna granica sprężystości  $Q''$ , określona równaniami (2.21) i (2.14) dla  $\sigma = Q''$ , nie zależy od objętości ciała.



Rys. 3

Przyjmijmy teraz w drugim wariancie obliczeń, że materiał quasi-jednorodny charakteryzuje się zmienną losowo mikrowytrzymałością  $P$ , a mikronapężenie  $s_k$  mikroelementu  $O_k$  można w przybliżeniu zastępować w pełni określoną wartością,

$$(2.25) \quad s_k \approx \bar{s} \approx \sigma,$$

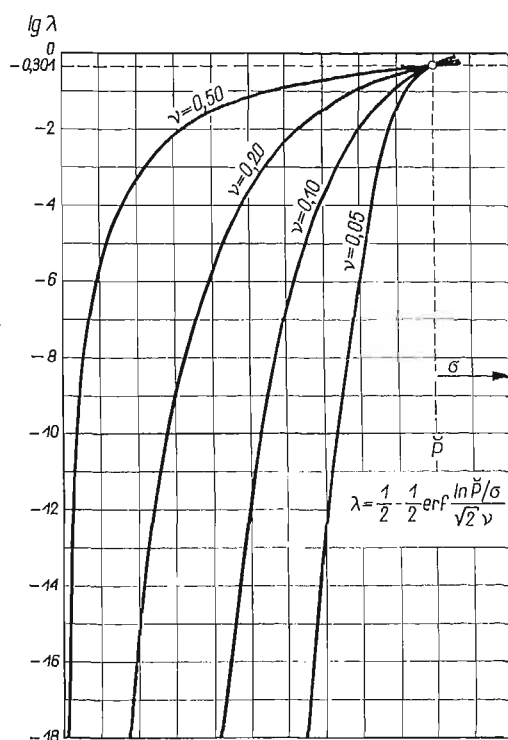
i założmy, tak jak to podano w p. 1, że rozkład zmiennej losowej  $P$  opisuje prawo logarytmicznonormalne

$$(2.26) \quad f(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \nu P} \exp \left[ -\frac{\ln^2 P/\check{P}}{2\nu^2} \right],$$

gdzie  $\check{P}$  oznacza medianę mikrowytrzymałości,  $\nu$  logarytmiczny wskaźnik zmienności,  $P_0 = \nu\check{P} \approx \nu\check{P}$  jest odchyleniem standardowym.

Jeżeli uwzględnimy mikroskopowy warunek pęknięcia (1.3), to dystrybuanta określona wzorem,

$$(2.27) \quad \mathcal{P}(P \leq \sigma) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\ln \check{P}/\sigma}{\sqrt{2}\nu} \right),$$



Rys. 4

określa prawdopodobieństwo mikrorys dla naprężenia  $\sigma$ . Porównując ze sobą formuły (2.5) i (2.27) otrzymujemy zależność między naprężeniami  $\sigma$  i koncentracją mikrodefektów  $\lambda$ ,

$$(2.28) \quad \lambda = 1 - F(t),$$

przy czym standaryzowana zmienna losowa ma w tym przypadku postać,

$$t = \frac{\ln \check{P}/\sigma}{\nu}.$$

Zależność  $\lambda$  od  $\sigma$  dla kilku przykładowych wartości logarytmicznego współczynnika zmienności  $\nu$  przedstawiono na rys. 4. Jeżeli  $\nu \rightarrow 0$ , czyli materiał jest idealnie jednorodny, to prawdopodobieństwo mikrozniszczenia wynosi, jak w przypadku poprzednim

$$(2.29) \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{dla } \sigma < \check{P}. \\ \lambda = 1 & \text{dla } \sigma \geq \check{P}. \end{cases}$$

Makroskopową granicę proporcjonalności  $Q'$  określa warunek,

$$(2.30) \quad \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{t'}{\sqrt{2}} \right) = \lambda',$$

gdzie  $t' = \frac{\ln \check{P}/Q}{\nu}$ ,  $\lambda' = \frac{O}{V}$ .

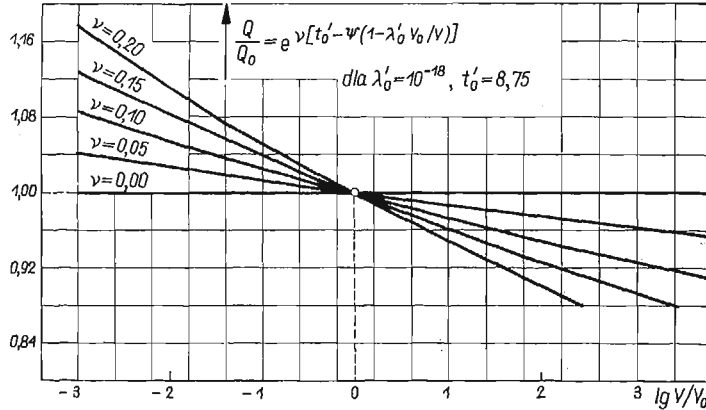
Efekt skali dla granicy proporcjonalności ilustrują wykresy, rys. 5, następującej funkcji,

$$(2.31) \quad Q' = Q'_0 \exp[\nu(t'_0 - t')],$$

gdzie

$$t' = \Psi \left( 1 - \lambda'_0 \frac{V_0}{V} \right), \quad \lambda'_0 = 1 - F(t'_0),$$

przy czym parametry  $Q'_0$ ,  $\nu$ ,  $t'_0$  niekoniecznie muszą być określone na podstawie doświadczalnego wyznaczenia granic proporcjonalności, bowiem można je określić na podstawie



Rys. 5

łatwiejszych do przeprowadzenia prób wytrzymałości rozdzielczej  $R$ , gdyż parametry te figurują (bezpośrednio lub ich funkcje) we wzorach następnego punktu.

Wzór (2.14) jest znany np. z pracy [14] jako statystyczne kryterium mikropęknięcia, a wzór (2.28) jest pewną jego modyfikacją. Nowym aspektem jest interpretacja tych wzorów jako makroskopowego warunku proporcjonalności i sformułowanie wpływu skali na granicę proporcjonalności  $Q'$  (2.24) i (2.31), odrębnie od tych formuł, które dotyczyć będą granicy wytrzymałości  $R$ .

## 3. Wpływ skali na granicę wytrzymałości

Analizujemy wytrzymałość elementów konstrukcyjnych o różnej objętości, ale posiadających jednakową mikrostrukturę, czyli wykonanych z tego samego materiału. Wówczas wielkości:  $r$ ,  $\Omega$ ,  $O$  (a zatem i  $M$ ) oraz  $\bar{P}$ ,  $P_0$  względnie  $E$ ,  $E_0$  — są stałe, tzn. nie zależą od rozmiarów ciała, układu odniesienia i obciążeń, a wielkość  $\lambda$  (a zatem i  $\bar{m}$ ) zmienia się w zależności od naprężenia  $\sigma$ , zaś  $L$  (a zatem i  $N$ ) zmienia się ze zmianą objętości ciała  $V$ .

Weźmy pod uwagę ciało o objętości  $V$  pozostające w quasi-jednorodnym, jednoosiowym stanie naprężenia i potraktujmy je jako zbiór elementów mikroskopowych  $O_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , które mogą mieć jedną z dwóch cech, mianowicie mogą być spójne lub pęknięte. Cechę pęknięcia ma  $l = \lambda \cdot L$  elementów, cechę zaś spójności  $L-l = L(1-\lambda)$  elementów. Ze zbioru  $L$ -elementowego (z objętości  $V$ ) losujemy jednorazowo (a więc bez zwracania możliwego przy losowaniu kolejnym) próbę liczącą  $M$  mikroelementów  $O_j$  w postaci jednego makroelementu  $\Omega_i$ , zawierającego  $m$  elementów  $O$  pękniętych i  $M-m$  elementów spójnych, i pytamy się, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowany element  $\Omega_i$  zawiera dokładnie  $m$  mikrorys. Opisany powyżej schemat losowania zależnego [11] prowadzi do hipergeometrycznego rozkładu prawdopodobieństw,  $\mathcal{P}(m; M, l, L)$ . Ponieważ liczebność zbioru  $L$  jest bardzo duża w porównaniu z określoną liczebnością próby  $M$ :

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{N} \ll 1$$

zgodnie ze wzorem (1.2), przeto możemy aproksymować rozkład hipergeometryczny rozkładem dwumianowym  $\mathcal{P}(m; M, \lambda)$  przy zachowaniu ustalonej wartości średniej koncentracji mikrorys,

$$(3.1) \quad \lambda = \frac{l}{L}.$$

Z kolei rozkład dwumianowy, w warunkach gdy

$$1/M \ll 1$$

zgodnie ze wzorem (1.1), możemy aproksymować rozkładem Poissona  $\mathcal{P}(m; \bar{m})$  przy zachowaniu średniej ilości mikrorys w makroelementie

$$(3.2) \quad \bar{m} = \lambda M.$$

Chcielibyśmy tutaj zwrócić uwagę na fakt, że dzięki poprawnie sformułowanemu schematowi losowania średnie charakterystyki spękania  $\lambda$  i  $\bar{m}$  zachowują swe skończone, ustalone wartości przy kolejnych przejściach granicznych. W monografii [14] w tym zagadnieniu zachodzą osobliwości:  $\lambda \rightarrow 0$ , a następnie  $\bar{m} \rightarrow \infty$ , i wyniki mimo dalszych korekt i adiustacji nie są wolne od sprzeczności.

Poissonowski rozkład asymptotyczny zastosujemy do oszacowania prawdopodobieństwa pęknięcia makroelementu,

$$(3.3) \quad \mathcal{P}(m \geq r) = 1 - e^{-\bar{m}} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\bar{m}^i}{i!}.$$

Wzór (3.3) podaje kombinatoryczne prawdopodobieństwo pęknięcia, natomiast geometryczne prawdopodobieństwo makrorysu równa się średniej koncentracji zniszczonych elementów  $\Omega$  w objętości ciała  $V$ ,

$$(3.4) \quad p = \frac{n}{N}.$$

Porównując ze sobą wzory (3.3) i (3.4) otrzymujemy związek

$$(3.5) \quad \frac{n}{N} = e^{-\bar{m}} \sum_{i=r}^{\infty} \frac{\bar{m}^i}{i!},$$

który po uwzględnieniu uogólnionej koncepcji najsłabszego ogniwa w łańcuchu (stosowanej w myśl założeń tylko do makroelementów),

$$(3.6) \quad n = 1,$$

daje statystyczne kryterium makropęknięcia, czyli warunek graniczny zniszczenia całego ciała. Oznaczmy symbolem  $\lambda_r$  graniczną wartość spękania, spełniającą równania (3.5) i (3.6). Warunek wytrzymałości ma wówczas następującą postać:

$$(3.7) \quad 1 - \mathcal{P}(r-1, \lambda_r M) = \frac{\Omega}{V},$$

gdzie  $\mathcal{P}(m; \bar{m})$  jest dystrybuantą Poissona.

Wartość graniczna  $\lambda_r$  jest uzależniona od granicznego naprężenia  $R$ , czyli wytrzymałość makroskopowej przez statystyczny warunek mikrozniszczenia (2.14) lub (2.28), który zapiszemy w ogólnej postaci

$$(3.8) \quad 1 - F(t_r) = \lambda_r \quad \text{lub} \quad t_r = \Psi(1 - \lambda_r),$$

gdzie  $F(x)$  jest standaryzowaną dystrybuantą Gaussa, a  $\Psi(y)$  jak poprzednio (2.16) funkcją do niej odwrotną, zaś

$$t_r = \begin{cases} \frac{\bar{P}/R - 1}{v} & \text{dla losowych mikronaprężeń,} \\ \frac{\ln \check{P}/R}{v} & \text{dla losowych mikrowytrzymałości.} \end{cases}$$

Układ równań (3.7) i (3.8) można łatwo rozwiązać ze względu na zmienną  $V$ , mianowicie

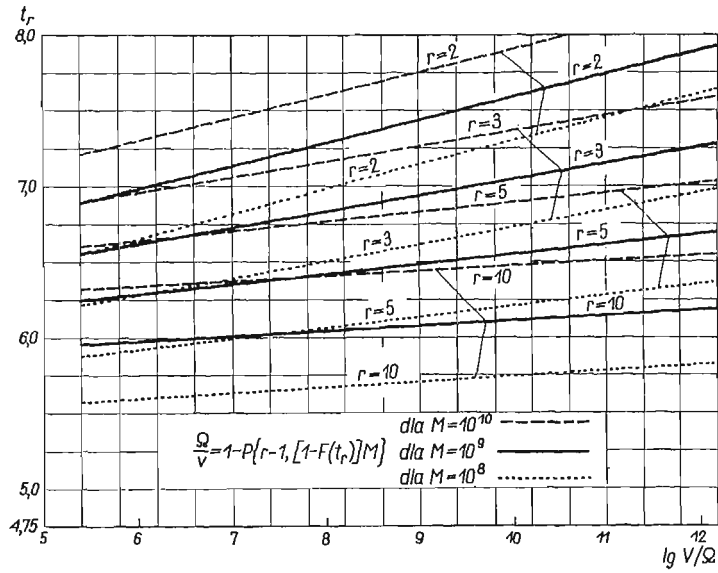
$$(3.9) \quad V = \frac{\Omega}{1 - \mathcal{P}\{r-1, [1 - F(t_r)]M\}},$$

gdzie  $t_r$  znaczy jak wyżej.

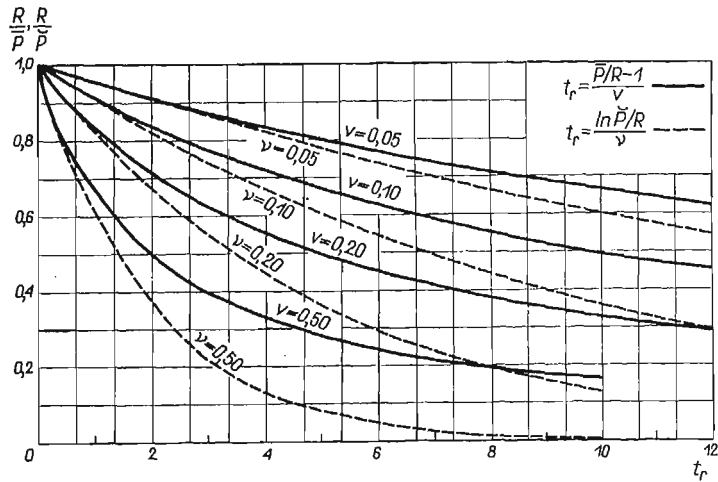
Wzór (3.9) podaje zależność między objętością  $V$  i wytrzymałością  $R$  i jest nowym, ścisłym rozwiązaniem zagadnienia wpływu skali na granicę wytrzymałości dla przyjętych założeń. Przy korzystaniu z tego wzoru należy rozporządzać dostatecznie obszernymi (kilkunastocyfrowymi) tablicami dystrybuanty Poissona i Gaussa [16].

Dla bezpośrednich obliczeń granicy wytrzymałości z uwzględnieniem współczynnika skali najwygodniej byłoby korzystać z tablic lub wykresów funkcji (3.9), rys. 6 i 7, albo wzór (3.9) odwrócić i przedstawić wytrzymałość  $R$  jako funkcję zmiennej  $V$ , co jednak nie





Rys. 6



Rys. 7

jest możliwe w wyraźnej i ściślej formie analitycznej. Dlatego przedstawimy uproszczone formy przybliżone tego wzoru, które częściowo sprowadzają się do zależności znanych już z literatury przedmiotu. Zapiszmy najpierw, że

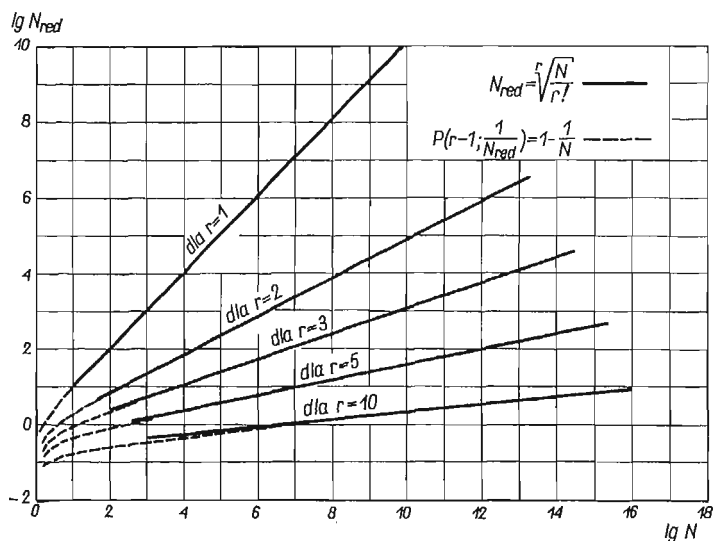
$$(3.10) \quad R = \begin{cases} \frac{\bar{P}}{1 + \nu t_r} & \text{dla losowych mikronaprężeń,} \\ \check{P} \exp(-\nu t_r) & \text{dla losowych mikrowytrzymałości.} \end{cases}$$

Zagadnienie polega obecnie na znalezieniu odpowiedniej, uproszczonej zależności  $t$ , od objętości  $V$ . W tym celu rozwijamy dystrybuantę Poissona w szereg potęgowy

$$(3.11) \quad \mathcal{P}(r-1, \bar{m}) = 1 - \frac{\bar{m}^r}{r!} + \frac{r\bar{m}^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{r(r+1)\bar{m}^{r+2}}{2(r+2)!} + \dots$$

Okazuje się, że dla  $\bar{m} \ll 1$  (czyli  $1/N \ll 1$ ) bez zbytej szkody dla dokładności (por. rys. 8) wystarczy zachować formę liniową we wzorze (3.11). A więc

$$(3.12) \quad \mathcal{P}(r-1, \bar{m}) \approx 1 - \frac{(M\lambda_r)^r}{r!}.$$



Rys. 8

Stąd przy uwzględnieniu równania (3.7) otrzymujemy wzór, który pokrywa się z relacją wyprowadzoną z prostszych założeń przez N. N. AFANASJEWĄ i S. D. WOŁKOWĄ [14, str. 95],

$$(3.13) \quad \lambda_r \approx \frac{1}{M} \sqrt[r]{\frac{r!\Omega}{V}} = \sqrt[r]{\frac{O_r}{V}}.$$

Wprowadziwszy oznaczenie  $O_r = r!\Omega/M^r$ , zredukowaliśmy liczbę parametrów z pięciu  $(r, v, M, \bar{P}, \Omega)$  do czterech  $(r, v, \bar{P}, O_r)$ ; jest to niewątpliwie korzystne z praktycznego punktu widzenia. Graniczna czyli nieprzekraczalna dla średniej koncentracji mikrorys  $\lambda$  wartość  $\lambda_r$  jest dla skończonej ilości mikroelementów  $L$  zmienną losową. Dla wielkiej liczby  $L$ , zmienna  $\lambda_r$  jest zbieżna stochastycznie do ustalonej wzorem (3.13) wartości granicznej (przy matematycznym pojęciu słowa «graniczny»). Wzór (3.13) spełnia wyrażony w pracy [9] wniosek o zależności specyficznego, krytycznego prawdopodobieństwa spekania  $\lambda_{crit}$  od objętości ciała. W dyskusji wzoru (3.13) rozpatrzmy najpierw przypadek  $r = 1$ . Jest to przypadek, w którym podział na elementy I i II rzędu traci znaczenie i po-

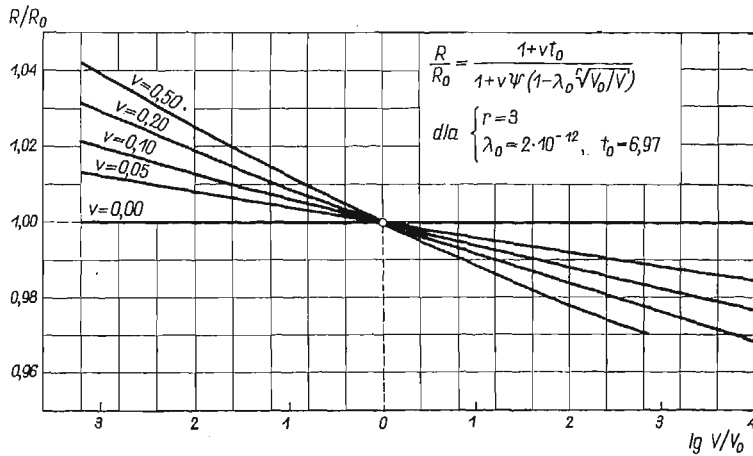
winna zachodzić ściśle reguła o decydującej roli najstabszego mikroelementu w ośrodku. W istocie w tym przypadku mamy

$$(3.14) \quad \lambda_r = \frac{1}{MN} = \frac{1}{L} = \frac{O}{V}, \quad O_r = \frac{\Omega}{M} = O$$

i rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem klasycznym, które w rozdziale poprzednim przyjęliśmy jako właściwe dla granicy sprężystości. Dla  $r > 1$  objętość ciała  $V$  wchodząca do wzoru (3.14) podlega redukcji w tym sensie, że zamiast liczby  $N$  figuruje  $N_{\text{red}}$ , rys. 8,

$$(3.15) \quad \lambda_r = \frac{1}{MN_{\text{red}}},$$

gdzie  $N_{\text{red}} \approx \sqrt[3]{N/r!} < N$ . Stąd wniosek, że przyjęcie złożonej struktury ośrodka i granicznej liczby mikroyrs  $r > 1$  pozwoli zastosować otrzymane wyniki do materiałów, które



Rys. 9

charakteryzują się bardziej łagodnym wpływem skali na granicę wytrzymałości. Ostateczne wzory zapisujemy biorąc pod uwagę (3.8), (3.10) i (3.13) w następującej postaci

$$(3.16) \quad R \approx \begin{cases} \frac{\bar{P}}{1 + \nu\Psi \left(1 - \sqrt[3]{\frac{O_r}{V}}\right)} & \text{dla losowych mikronaprzeżeń} \\ \check{P} \exp \left[ -\nu\Psi \left(1 - \sqrt[3]{\frac{O_r}{V}}\right) \right] & \text{dla losowych mikrowytrzymałości} \end{cases}$$

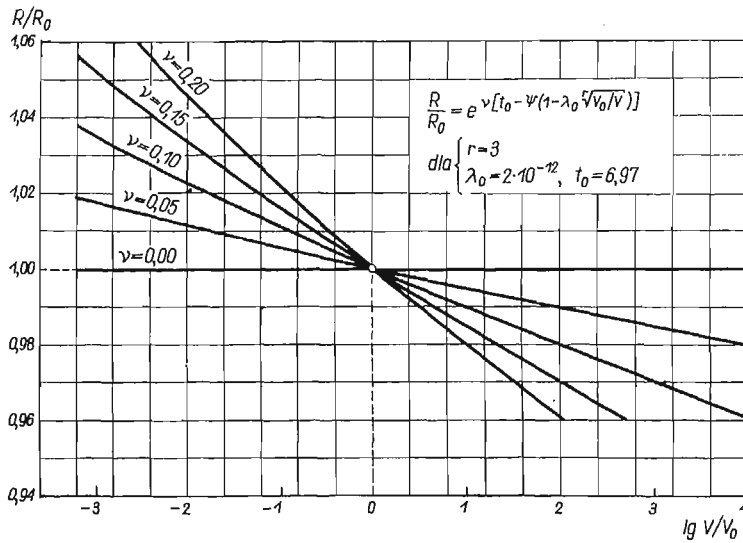
albo w innej postaci przy oznaczeniach:  $R_0$  jest wytrzymałością próbki normowej o objętości  $V_0$ ,

$$t_0 = \Psi(1 - \lambda_0), \quad \lambda_0 = \sqrt[3]{\frac{O_r}{V_0}},$$

i po wyrugowaniu parametru  $\bar{P}$  lub  $\check{P}$ , a także parametru  $O_r$ ,

$$(3.17) \quad R \approx \begin{cases} \frac{R_0 (1 + \nu t_0)}{1 + \nu \Psi \left( 1 - \lambda_0 \sqrt[r]{\frac{V_0}{V}} \right)}, \\ R_0 \exp \left[ -\nu \Psi \left( 1 - \lambda_0 \sqrt[r]{\frac{V_0}{V}} \right) + \nu t_0 \right]. \end{cases}$$

Zależność  $R/R_0$  od  $V/V_0$  dla przykładowych wartości parametrów  $r$ ,  $\lambda_0$  i kilku wartości współczynnika zmienności mikronaprężeń  $\nu$ , lub mikrowytrzymałości  $\nu$  przedstawiają wykresy na rys. 9 i rys. 10. Ważność powyższych wzorów i wykresów ograniczona jest do ciał niezbyt małej objętości ( $V \gg \Omega$ ) i do małej koncentracji mikrorys ( $\lambda_r \ll 1$ ). Dla



Rys. 10

wyznaczenia parametrów  $R_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $r$ ,  $\nu$  lub  $\nu$  potrzeba czterech doświadczeń polegających np. na określeniu wytrzymałości czterech próbek o różnych objętościach.

Na zakończenie wprowadzimy dalsze uproszczenia przybliżając funkcję (3.9), rys. 6, funkcją liniową w skali półlogarytmicznej,

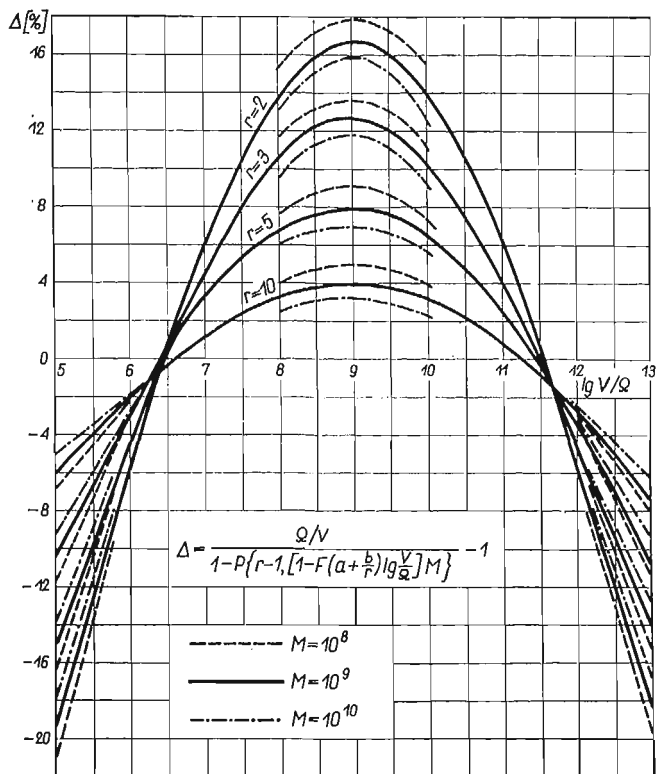
$$(3.18) \quad t_r = a + \frac{b}{r} \lg \frac{V}{\Omega}.$$

Tego rodzaju przybliżenie jest celowe dla przypadku losowych mikrowytrzymałości, wtedy bowiem końcowy wzór (3.16) upraszcza się do postaci

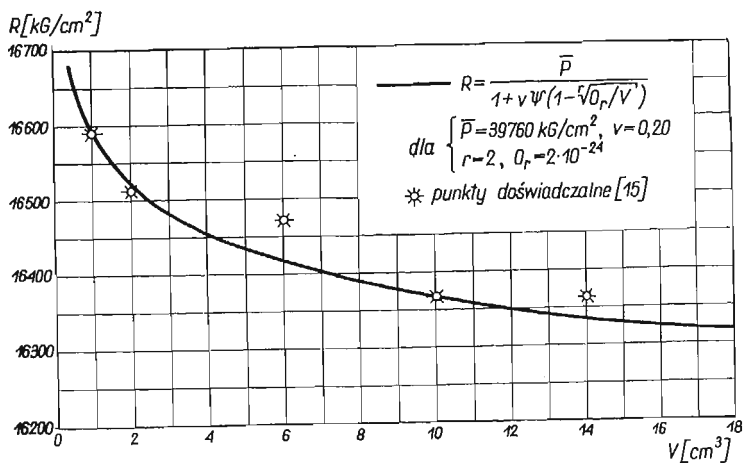
$$(3.19) \quad R \approx \check{P} \left( 10^{-\frac{a}{b}} \sqrt[r]{\frac{\Omega}{V}} \right)^{b \nu \ln 10} = \frac{R_0}{V^{\beta}},$$

gdzie

$$R_0 = \check{P} (\Omega^{\frac{b}{r}} 10^{-a})^{\nu \ln 10}, \quad \beta = \frac{\nu b \ln 10}{r}.$$



Rys. 11



Rys. 12

Wzór (3.19) jest taki sam jak wzór Weibulla [12], ponieważ ani  $R_0$ , ani wykładnik potęgowy  $\beta$  nie zależy od objętości ciała  $V$ . Stałe  $a$  i  $b$  zależą od dwóch parametrów  $r$  i  $M$ , a wartości ich można w przybliżeniu odczytywać z powiększonego rys. 6 lub obliczać np. metodą najmniejszych kwadratów tak, jak to zrobiono dla zestawienia tablicy 1. Błąd, jaki się

Tablica 1

<i>r</i>	2		3		5		10	
<i>M</i>	10 <sup>s</sup>	10 <sup>p</sup>	10 <sup>s</sup>	10 <sup>p</sup>	10 <sup>s</sup>	10 <sup>p</sup>	10 <sup>s</sup>	10 <sup>p</sup>
a	5,707	6,077	5,588	5,970	5,478	5,869	5,356	6,132
b	0,317	0,304	0,341	0,325	0,366	0,347	0,391	0,349

попелня стосуюч wzór uproszczony (3.10) zamiast wzoru dokładnego (3.14), przedstawiono na rys. 11.

Dla przykładu, porównano rezultaty uzyskane w tej pracy na drodze teoretycznej wg wzoru (3.16) z wynikami badań doświadczalnych wysokowęglowej stali kablowej [15] i przedstawiono na rys. 12.

#### Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН, *Статистические методы в строительной механике*, Изд. II, Госстройиздат, Москва 1965.
2. Б. Б. ЧЕЧУЛИН, *К статистической теории хрупкой прочности*, Журн. тех. физ., 2, 24 (1954), 292–298.
3. Б. Б. ЧЕЧУЛИН, *Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов*, Металлургияиздат, Москва 1963.
4. А. ЕСИН, W. J. D. JONES, *A statistical approach to micro-plastic strain in metals*, J. Strain Anal., 5, 1 (1966), 115–421.
5. Т. А. КОНТОРОВА и Я. И. ФРЕНКЕЛЬ, *Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов*, Журн. тех. физ., 3, 11 (1944), 173.
6. К. КНОПП, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.
7. J. MURZEWSKI, *O statystycznej teorii prawie jednorodnego ośrodka kruchego*, Czas. Techn., 5, 63 (1958), 1–3.
8. J. MURZEWSKI, *Elastic-plastic stochastically non-homogeneous bodies*, Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, Proceedings of IUTAM Symposium in Warsaw 1958, Pergamon Press 1959, 479–489.
9. J. MURZEWSKI, *Plastyczność i wytrzymałość mikroskopowa niejednorodnych ośrodków stałych*, Arch. Bud., Politechnika Krakowska, Zeszyt specjalny nr 1, PWN, Kraków 1966, 257–308.
10. W. SADOWSKI (red.), *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1957.
11. N. W. SMIRNOW, J. W. DUNIN-BARKOWSKI, *Krótki kurs statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa 1966.
12. W. WEIBULL, *A statistical theory of strength of materials*, Proc. Roy. Swedish Inst. Res., nr 151, Stockholm 1939.
13. W. WEIBULL, *A statistical distribution function of wide applicability*, J. Appl. Mech. 3, 18 (1951), 293–297.
14. С. Д. ВОЛКОВ, *Статистическая теория прочности*, Машгиз., Москва 1960.
15. W. ZIOBROŃ, *Statystyczna ocena nośności cięgien sprężających w konstrukcjach kablowych*, Rozprawa doktorska, Kraków 1964.
16. Mathematical Tables Project of the Work Projects Administration for the City of New York, Tables of probability functions, 1 (1941), 2 (1942).

#### Р е з ю м е

#### О МАСШТАБНОМ ЭФФЕКТЕ ДЛЯ ХРУПКОГО ТЕЛА, ВЫДЕРЖИВАЮЩЕГО УСТАНОВЛЕННУЮ КОНЦЕНТРАЦИЮ МИКРО-ПОВРЕЖДЕНИЙ

Единичный предел пропорциональности и предел прочности хрупкого тела, микроскопически неоднородного анализируется от его объема, при использовании теории вероятности.

Используется модель среды с микроструктурой описанная и в работах Е. МУЖЕВСКОГО [9] и С. Д. ВОЛКОВА [14] и состоящая в разделении среды на макро-элементы  $\Omega$ , которые в свою очередь делятся на микроэлементы  $O$ . Повреждение одного микроэлемента вызывает только

превышение предела пропорциональности между напряжениями и деформациями. Для достижения предела прочности тела  $V$ , требуется повреждение  $r$  микро-элементов в одном макро-элементе  $\Omega$ .

В работе рассматривается только среда в одноосном напряженном состоянии  $\sigma$ . Распределение вероятностей приняты в двух вариантах: нормальное распределение (2.12) для микро-напряжений  $s$ , при установленной микро-прочности  $P = \bar{P}$ , или же логарифмически-нормальное распределение (2.26) для микро-прочности  $P$ , при установленном микро-напряжении  $s \approx \sigma$ .

Для этих двух случаев определяется статистический критерий микро-трещины, т. е. границы пропорциональности соответственно в виде формул (2.24) и (2.31). Эти формулы иллюстрируются диаграммами на рис. 3 и рис. 5.

При определении статистического критерия макро-трещин, использовалась схема зависимой выборки поврежденных микро-элементов, приводящая к гипергеометрическому распределению. Далее, это распределение аппроксимируется биномиальным распределением, которое, в свою очередь, асимптотически стремится к распределению Пуассона (3.3). В конце концов зависимость объема тела  $V$  и предела прочности  $R$  выражается формулой (3.9), рис. 6 и 7. Этот результат отличается от результата С. Д. ВОЛКОВА [14], который ошибочно применял асимптотическое распределение Гаусса при аналогических предположениях.

Вводя некоторые упрощения принято обратную формулу (3.12), представляя ее в виде (3.16) или (3.17), рис. 9 и 10. Осуждается возможность дальнейшего упрощения и применения наиболее простой формулы (3.19) для эффекта масштаба.

### Summary

#### ON THE SIZE EFFECT IN BRITTLE BODIES CAPABLE TO SUSTAIN A CERTAIN CONCENTRATION OF MICRO-DAMAGE

The limit of proportionality and the strength of micro-non-homogeneous brittle bodies is considered as a function of the volume and analysed on the basis of the probability theory.

The model assumed of the medium with microstructure is similar to that introduced in the papers by J. MURZEWSKI (9) and S. D. VOLKOV (14) and consists in dividing the body into macro-elements  $\Omega$ , and subdividing them into micro-elements  $O$ . A single micro-element damaged, the limit of proportionality between the stresses and strains is exceeded; to reach the ultimate strenght of the body  $V$ , a number  $r$  of micro-elements  $O$  belonging to the same macro-element  $\Omega$  has to be damaged.

One-dimensional states of stress  $\sigma$  are considered in the paper. Two probability distributions are taken into account: the normal distribution (2.12) for micro-stresses  $s$  at the given micro-strength  $P = \bar{P}$ , and the logarithmic normal distribution (2.26) for the micro-strength  $P$  at the fixed micro-stress  $s = \sigma$ .

Statistical criteria of micro-cracking (exceeding the proportionality limit) are then developed for these two cases, Eqs. (2.24) and (3.1), respectively; they are illustrated by Figs. 3 and 5.

In deducing the statistical criteria for macro-cracks forming, the hypergeometric probability distribution was used. This distribution is then approximated by the binomial distribution which tends asymptotically to the Poisson distribution (3.3). The relationship between the volume  $V$  and the strength limit  $R$  is finally expressed by Eq. (3.9), Fig. 6 and 7. The result differs from that found by S. D. Volkov [14] who — having made similar assumptions — erroneously introduced the Gauss asymptotic distribution.

Certain simplifications make it possible to invert formula (3.12) and to represent it in the form of (3.16) or (3.17), Figs. 9 and 10. The discussion concerning the possibility of further simplifications and application of the simplest formula expressing the size effect (3.18) conclude the paper.

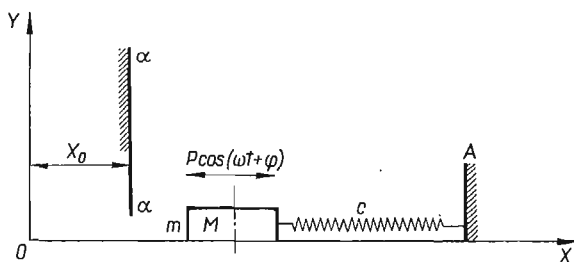


ANALIZA UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO Z TARCIEM SUCHYM

BOHDAN KOWALCZYK (GDAŃSK)

W pracy niniejszej przeprowadzono analizę ruchu i stabilności układu wibro-uderzeniowego przedstawionego na rys. 1

Na poziomej chropowatej suchej płaszczyźnie (współczynnik tarcia  $\mu$ ) porusza się pod działaniem siły okresowej  $P \cos(\omega t + \varphi)$  ciało  $M$  o masie  $m$ . Ciało  $M$  jest przytwierdzone



Rys. 1

do nieruchomej ściany pionowej  $A$  za pomocą sprężyny o sztywności  $c$ . Podczas ruchu ciało  $M$  uderza o nieruchomy ogranicznik  $\alpha-\alpha$  oddalony o  $X_0$  od punktu  $O$  położenia, w którym sprężyna jest w stanie nienapiętym.

Przy analizie drgań rozważanego układu przyjęto następujące założenia:

- 1) uderzenie masy o ogranicznik  $\alpha-\alpha$  odbywa się nagle na odcinku czasu bardzo małym w porównaniu z okresem ruchu;
- 2) prędkość masy po odbiciu od ogranicznika  $\alpha-\alpha$  charakteryzuje się współczynnikiem restytucji  $R(0 \leq R < 1)$ , który zgodnie z hipotezą Newtona nie zależy od prędkości, lecz jedynie od materiałów zderzających się ciał;
- 3) masa ogranicznika jest nieskończenie duża i nie bierze udziału w drganiach układu;
- 4) możliwe są drgania masy  $m$  o okresie równym okresowi siły wymuszającej lub jego krótności.

Równanie ruchu przy  $\dot{X} \neq 0$  ma postać:

$$(1.1) \quad m \frac{d^2 X_i}{dt^2} + c X_i = -\mu m g \operatorname{sign} \dot{X}_i + P \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Rozpatrywać będziemy ruch masy  $m$  w dwóch przedziałach czasowych o «długości»  $t_1$  i  $t_2$ , gdzie  $t_1$  jest czasem, który upłynie od chwili uderzenia do osiągnięcia przez masę

maksymalnej amplitudy  $L$ ,  $t_2$  zaś czasem, który upłynie od osiągnięcia maksymalnej amplitudy do następnego kolejnego uderzenia. Czas w każdym z tych przedziałów liczymy od zera.

1. Po uderzeniu — ruch w stronę dodatniej części osi  $X$ :

$$\dot{X} > 0, \quad \text{sign } \dot{X} = 1;$$

$$(1.2) \quad m \frac{d^2 X_1}{dt^2} + c X_1 = -\mu mg + P \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Podstawmy

$$(1.3) \quad X_i = \frac{P}{m\omega^2} x_i; \quad \omega t = \tau; \quad k^2 = \frac{c}{m};$$

$$\lambda = \frac{k}{\omega}; \quad a = \frac{\mu mg}{P}.$$

Otrzymujemy po podstawieniu (1.3)

$$(1.4) \quad \ddot{x}_1 + \lambda^2 x_1 = -a + \cos(\tau + \varphi_1),$$

Całka ogólna równania różniczkowego (1.4) w przypadku  $\lambda \neq 1$  ma postać:

$$(1.5) \quad x_1 = -\frac{a}{\lambda^2} + A_1 \cos \lambda \tau + B_1 \sin \lambda \tau + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos(\tau + \varphi_1),$$

$$\dot{x}_1 = -\lambda A_1 \sin \lambda \tau + \lambda B_1 \cos \lambda \tau - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \sin(\tau + \varphi_1).$$

Podstawiając warunki na krańcach rozpatrywanego przedziału

$$(1.6) \quad x_1(0) = x_0, \quad \dot{x}_1(0) = Rv, \quad x_1(\tau_1) = l, \quad \dot{x}_1(\tau_1) = 0,$$

gdzie

$$(1.7) \quad v = \frac{m\omega}{P} V, \quad V > 0$$

$$l = \frac{m\omega^2}{P} L, \quad x_0 = \frac{m\omega^2}{P} X_0, \quad X_0 < L < \infty,$$

$V$  zaś jest modulem prędkości punktu  $M$  w chwili uderzenia masy o przegrodę.

Otrzymamy następujące związki dla stałych całkowania:

$$(1.8) \quad A_1 = x_0 + \frac{a}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos \varphi_1,$$

$$B_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} + \frac{Rv}{\lambda}$$

oraz

$$(1.9) \quad l = \frac{a}{\lambda^2 \cos \lambda \tau_1} - \frac{a}{\lambda^2} + \frac{x_0}{\cos \lambda \tau_1} - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1} + \frac{\cos(\tau_1 + \varphi_1)}{\lambda^2 - 1} + \frac{\sin(\tau_1 + \varphi_1)}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \text{tg } \lambda \tau_1,$$

$$v = \frac{\lambda x_0}{R} \text{tg } \lambda \tau_1 + \frac{a}{R\lambda} \text{tg } \lambda \tau_1 - \frac{\lambda \cos \varphi_1}{R(\lambda^2 - 1)} \text{tg } \lambda \tau_1 - \frac{\sin \varphi_1}{R(\lambda^2 - 1)} + \frac{\sin(\tau_1 + \varphi_1)}{R(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1}.$$

2. Na drugim odcinku — ruch w stronę ujemnej części osi  $X$ :  $\dot{X} < 0$  — ruch układu dany jest równaniem różniczkowym:

$$(1.10) \quad m \frac{d^2 X_2}{dt^2} + cX_2 = \mu mg + P \cos(\omega t + \varphi_2)$$

lub po podstawieniach (1.3)

$$(1.11) \quad \ddot{x}_2 + \lambda^2 x_2 = a + \cos(\tau + \varphi_2).$$

Całka ogólna równania różniczkowego (1.11) w przypadku  $\lambda \neq 1$  ma postać:

$$(1.12) \quad x_2 = \frac{a}{\lambda^2} + A_2 \cos \lambda \tau + B_2 \sin \lambda \tau + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos(\tau + \varphi_2),$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda A_2 \sin \lambda \tau + \lambda B_2 \cos \lambda \tau - \frac{1}{\lambda^2 - 1} \sin(\tau + \varphi_2).$$

Podstawiając warunki na krańcach drugiego przedziału:

$$(1.13) \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \quad x_2(\tau_2) = x_0, \quad \dot{x}_2(\tau_2) = -v,$$

gdzie

$$\tau_1 + \tau_2 = 2\pi n,$$

$n = 1, 2, 3 \dots$  zaś jest stosunkiem okresu ruchu masy  $m$  do okresu siły wymuszającej, otrzymamy:

$$(1.14) \quad A_2 = l - \frac{\cos \varphi_2}{\lambda^2 - 1} - \frac{a}{\lambda^2}, \quad B_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\lambda(\lambda^2 - 1)},$$

gdzie

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \tau_1$$

oraz

$$(1.15) \quad l = \frac{a}{\lambda^2} - \frac{a}{\lambda^2 \cos \lambda \tau_2} + \frac{\cos \varphi_2}{\lambda^2 - 1} - \frac{\sin \varphi_2}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \operatorname{tg} \lambda \tau_2 - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2} + \frac{x_0}{\cos \lambda \tau_2};$$

$$v = \lambda x_0 \operatorname{tg} \lambda \tau_2 - \frac{a}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda \tau_2 - \frac{\sin \varphi_2}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2} + \frac{\sin \varphi_1}{\lambda^2 - 1} - \frac{\lambda \cos \varphi_1}{\lambda^2 - 1} \operatorname{tg} \lambda \tau_2.$$

W związkach (1.9) i (1.15) niewiadomymi są  $\tau_1$  oraz  $\varphi_1$ . Porównując związki (1.9)<sub>1</sub> i (1.15)<sub>1</sub> oraz (1.9)<sub>2</sub> i (1.15)<sub>2</sub> stronami otrzymujemy następujące równania:

$$(1.16) \quad a_1 \cos \varphi_1 + b_1 \sin \varphi_1 = c_1, \quad a_2 \cos \varphi_1 + b_2 \sin \varphi_1 = c_2,$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} (\cos \lambda \tau_1 - \cos \lambda \tau_2) + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin 2\pi n \lambda \sin \tau_1,$$

$$b_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \sin 2\pi n \lambda \cos \tau_1,$$

$$c_1 = \lambda^2 x_0 (\cos \lambda \tau_1 - \cos \lambda \tau_2) - a (\cos \lambda \tau_1 + \cos \lambda \tau_2 - 2 \cos \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2),$$

$$a_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} (\sin \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 - R \cos \lambda \tau_1 \sin \lambda \tau_2) - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (\cos \lambda \tau_2 + R \cos \lambda \tau_1) \sin \tau_1;$$

$$b_2 = \frac{\lambda(1+R)}{\lambda^2 - 1} \cos \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (\cos \lambda \tau_2 + R \cos \lambda \tau_1) \cos \tau_1$$

$$c_2 = \lambda^2 x_0 (\sin \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 - R \cos \lambda \tau_1 \sin \lambda \tau_2) + a (\sin \lambda \tau_1 \cos \lambda \tau_2 + R \cos \lambda \tau_1 \sin \lambda \tau_2).$$

Rugując z równań (1.16) parametr  $\varphi_1$  dochodzimy do związku

$$(1.17)_1 \quad \left| \frac{a_1 c_1}{a_2 c_2} \right|^2 + \left| \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} \right|^2 - \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right|^2 = 0.$$

Można wykazać, że rozwiązania układu (1.16) istnieją, jeżeli

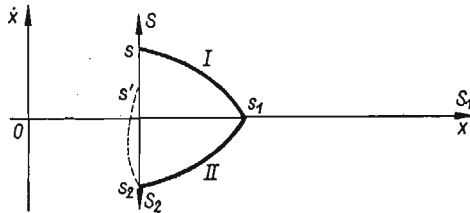
$$a_i^2 + b_i^2 - c_i^2 \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Równanie przestępne (1.17)<sub>1</sub> rozwiązujemy graficznie kreśląc wykres funkcji

$$(1.17)_2 \quad F(\tau_1) = \left| \frac{a_1 c_1}{a_2 c_2} \right|^2 + \left| \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} \right|^2 - \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right|^2$$

w przedziale  $[0; 2\pi n]$ .

Przy analizie stabilności ruchu rozpatrywanego układu posłużymy się metodą przekształceń punktowych [1]. Dla rozpatrywanego układu dynamicznego płaszczyznę fazową  $(x, \dot{x})$  dzielimy półprostymi  $S, S_1, S_2$  na obszary I i II. W każdym z tych obszarów ruch układu opisany jest liniowym równaniem różniczkowym.



Rys. 2

Trajektorie fazowe rozpatrywanego układu określają przekształcenie punktowe półprostych

$S$  w  $S_1$  w obszarze I,

$S_1$  w  $S_2$  w obszarze II,

związek zaś

$$s' = -R s_2$$

przekształca półprostą

$$S_2 \text{ w } S$$

prowadząc do wzajemnie-jednoznacznej i ciągłej odpowiedniości punktów tych półprostych.

Oznaczmy te przekształcenia punktowe odpowiednio przez  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  a przez  $s, s_1, s_2$  i  $s'$  punkty przesunięcia fazowych trajektorii z odpowiednimi półprostymi. Znajdziemy obecnie funkcje przyporządkowania, które określają omówione przekształcenia punktowe. W tym celu do rozwiązania równania różniczkowego (1.14) podstawiamy warunki:

$$(1.18) \quad \text{przekształcenie } \pi_1 \begin{cases} x_1(0) = x_0, & \dot{x}_1(0) = s, \\ x_1(\tau_1) = s_1, & \dot{x}_1(\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Po prostych operacjach matematycznych otrzymamy układ równań, po rozwiązaniu którego względem  $s$  i  $s_1$  znajdziemy funkcję przyporządkowania w postaci parametrycznej. Dla przekształcenia  $\pi_1$

$$(1.19) \quad s = \left[ \frac{\lambda^2 x_0 + a}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \varphi_1 \right] \operatorname{tg} \lambda \tau_1 - \frac{\sin \varphi_1}{\lambda^2 - 1} + \frac{\sin(\tau_1 + \varphi_1)}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1},$$

$$s_1 = \frac{a}{\lambda^2} \frac{1 - \cos \lambda \tau_1}{\cos \lambda \tau_1} + \frac{x_0}{\cos \lambda \tau_1} - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_1} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cos(\tau_1 + \varphi_1) + \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \operatorname{tg} \lambda \tau_1 \sin(\tau_1 + \varphi_1).$$

Następnie podstawiając do rozwiązania równania różniczkowego (1.11) warunki:

$$(1.20) \quad \text{przekształcenie } \pi_2 \begin{cases} x_2(0) = s_1, & \dot{x}_2(0) = 0, \\ x_2(\tau_2) = x_0, & \dot{x}_2(\tau_2) = s_2 \end{cases}$$

i rozwiązując otrzymany układ równań względem  $s_2$  i  $s_1$  znajdujemy funkcję przyporządkowania (w postaci parametrycznej) dla przekształcenia  $\pi_2$ :

$$(1.21) \quad s_1 = \frac{\lambda^2 x_0 - a}{\lambda^2} \frac{1}{\cos \lambda \tau_2} + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{\cos \varphi_2}{\lambda^2 - 1} - \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \operatorname{tg} \lambda \tau_2 \sin \varphi_2 - \frac{\cos \varphi_1}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2},$$

$$s_2 = \left[ \frac{a - \lambda^2 x_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cos \varphi_1 \right] \operatorname{tg} \lambda \tau_2 + \frac{\sin(\varphi_1 - \tau_2)}{(\lambda^2 - 1) \cos \lambda \tau_2} - \frac{\sin \varphi_1}{\lambda^2 - 1}.$$

Punkt nieruchomy  $s^*$  omawianego przekształcenia punktowego znajdujemy z warunku

$$s = s'.$$

Stabilność punktu nieruchomego i odpowiadającego mu ruchu okresowego znajdujemy z twierdzenia Koeniga [1], a więc ruch jest stabilny, jeżeli

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right|_{s=s^*} < 1$$

i niestabilny, gdy

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right|_{s=s^*} > 1$$

Dla omawianego układu analityczny warunek stabilności ma postać:

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right| = \left| R \frac{\sin \lambda \tau_1}{\sin \lambda \tau_2} \right| < 1,$$

ponieważ

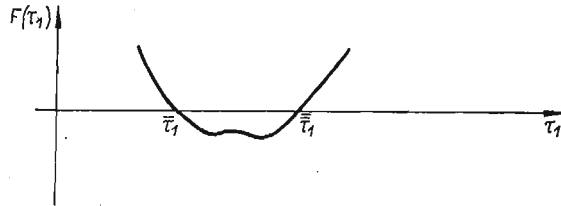
$$\frac{ds'}{ds} = \frac{(ds_1/d\tau_1)(ds_2/d\tau_2)}{(ds/d\tau_1)(ds_1/d\tau_2)} \frac{ds'}{ds_2}$$

Przykład. Rozpatrzono ruch i stabilność układu w przypadku gdy

$$\lambda = 0,4, \quad a = 0,1, \quad x_0 = 1,0, \quad R = 0,5, \quad n = 1.$$

Dla tych danych wykreślono wykres funkcji  $F(\tau_1)$  (1.17)<sub>2</sub>, rys. 3. Punkty przecięcia się krzywej z osią odciętych wyznaczają te wartości dla których  $F(\tau_1) = 0$ . W danym przypadku uzyskano dwa rozwiązania:

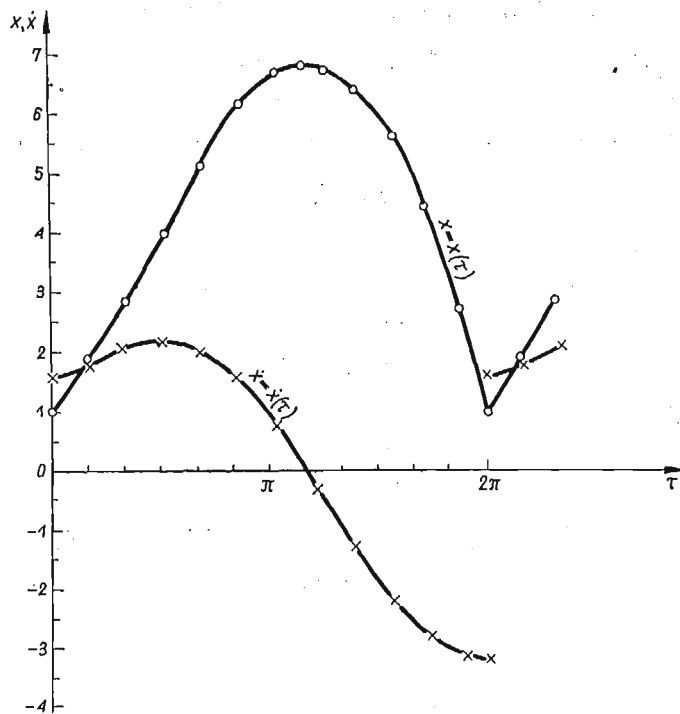
$$\bar{\tau}_1 = 3,20, \quad \bar{\bar{\tau}}_1 = 3,56.$$



Rys. 3

W przypadku  $\bar{\tau}_1$  nie istnieje okresowe rozwiązanie rozpatrywanego układu. W przypadku  $\bar{\bar{\tau}}_1 = 3,56$  ruch układu jest stabilny, gdyż

$$\left| \frac{ds'}{ds} \right| = 0,557 < 1$$



Rys. 4

Zależność przemieszczenia bezwymiarowego i bezwymiarowej prędkości od czasu podana jest na wykresach (rys. 4).

## Literatura cytowana w tekście

А. А. Андронов, А. А. Витт, Ц. Э. Найкин, *Теория колебаний*, Москва 1959.

## Резюме

## АНАЛИЗ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

В работе рассматривается движение одномассовой виброударной системы с линейной упругой характеристикой. Предполагается, что колебания системы затухают за счет сухого трения. Выведены формулы для перемещений и скорости колеблющейся массы соответствующие случаю периодических колебаний, с периодом равным периоду возмущающей силы или его кратности.

Явление удара массы о преграду учитывается при помощи коэффициента восстановления скорости. Анализ устойчивости периодического движения рассматриваемой системы проведен при помощи метода точечных преобразований.

## Summary

## ANALYSIS OF A VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH SOLID FRICTION

The paper deals with investigation of a vibratory-impact system with one degree of freedom assuming that the vibrations of the system are damped. The equations describing displacement and velocity of vibrating mass are given in the case when the frequency of vibration is equal or multiple of exciting force frequency.

The effect of impact is described by means of the coefficient of restitution of velocity.

The stability of periodic motion was investigated by means of point-transformation method.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 czerwca 1967 r.*

---





DEKREMENT DRGAŃ TŁUMIONYCH JEDNOCZEŚNIE TARCIEM WEWNĘTRZNYM  
(WISKOTYCZNYM) I KONSTRUKCYJNYM

ZBIGNIEW OSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przy badaniach tarcia wewnętrznego tworzyw stosuje się często zamocowanie próbki w uchwycie. Występuje wtedy tak zwane tarcie konstrukcyjne. Tłumienie drgań w tym przypadku jest wynikiem zarówno tarcia wewnętrznego jak też tarcia w zamocowaniu. Dla eksperymentatora badającego tarcie wewnętrzne jest wtedy rzeczą istotną zapewnienie warunków sprowadzających wpływ tarcia konstrukcyjnego do minimum. Aby zdać sobie sprawę z tych warunków, przeprowadzimy teoretyczną analizę tłumienia drgań swobodnych przy jednoczesnym tłumieniu konstrukcyjnym i wewnętrznym. Drgania swobodne z uwzględnieniem tylko tarcia konstrukcyjnego opisane zostały w pracach [1 i 2]. Przyjmijmy tu układ badany w tych pracach oraz te same założenia dotyczące tarcia konstrukcyjnego. Schemat podstawowy przy rozciąganiu próbki i drganiach postępowych masy przedstawiony jest na rys. 1. W badaniach tłumienia częściej używane są próbki skręcane. Otrzymujemy wtedy analogiczne równania ruchu zastępując przemieszczenie — kątem skręcania, masę — momentem bezwładności masy, sztywność podłużną — sztywnością skrętną.

W pracach cytowanych wpływ tarcia wewnętrznego był pominięty. W pracy niniejszej przyjmijmy, że próbka wykazuje tłumienie materiałowe o charakterze wiskotycznym, siła tłumienia jest więc zależna od prędkości. Przyjmijmy dla uproszczenia zależność liniową. Tłumienie tarcie wewnętrznym wykazuje cechy nieliniowe (por. np. [3]).

Celem naszym nie jest jednak w tej pracy badanie tarcia wewnętrznego, a tylko rozgraniczenie stanów, w których decyduje bądź tarcie wewnętrzne, bądź tarcie konstrukcyjne. Rozważania przedstawione posłużą nam do przedyskutowania poprawności wyników badań tarcia wewnętrznego.

2. Równanie ruchu

Równanie ruchu masy przedstawionej na rys. 1 możemy napisać w postaci

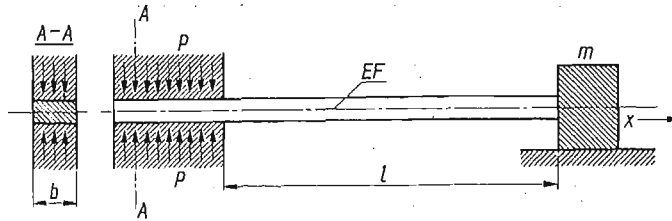
$$(2.1) \quad m\ddot{u} + c\dot{u} = -P,$$

gdzie  $m$  oznacza masę,  $u$  przemieszczenie masy,  $c$  współczynnik tłumienia wewnętrznego,  $P$  siłę sprężystości próbki z uwzględnieniem wpływu tarcia w zamocowaniu.

Zgodnie ze wzorami podanymi w pracy [1] zależność między przemieszczeniem  $u$  i siłą  $P$  w kolejnym  $(n+1)$ -szym półokresie drgań można przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad u_{n+1}(P) = u_n(P_n) + \frac{P - P_n}{EF} l + \frac{(P - P_n)^2}{4qEF} \text{sign} \dot{P},$$

gdzie  $u_{n+1}$  jest przemieszczeniem w  $(n+1)$ -szym półokresie (zmiennie),  $u_n$  wartością przemieszczenia w końcu  $n$ -tego półokresu,  $P_n$  wartością siły w końcu  $n$ -tego i początku  $(n+1)$ -ego półokresu,  $EF$  sztywnością podłużną próbki,  $l$  długością swobodną próbki,



Rys. 1

$q = 2\mu pb$  jednostkową siłą tarcia, działającą na powierzchni zamocowania próbki o szerokości  $b$  przy nacisku  $p$  i współczynniku tarcia  $\mu$ .

Wprowadzimy zmienną bezwymiarową

$$\eta = \frac{P}{P_n}$$

oraz oznaczenia

$$\xi = \frac{lq}{|P_n|},$$

$\omega_k = \sqrt{\frac{EF}{lm}}$  częstość drgań swobodnych, konserwatywnych w przypadku idealnie sztywnego zamocowania,

$\gamma = \frac{c}{m\omega_k}$  podwójna wartość stosunku współczynnika tłumienia do tłumienia krytycznego.

Wyznaczamy wartości prędkości  $\dot{u}$  i przyspieszenia  $\ddot{u}$  masy  $m$  i przy zastosowaniu wprowadzonych wyżej oznaczeń podstawiamy do równania ruchu (2.1). Po przekształceniach oraz po wprowadzeniu czasu bezwymiarowego  $\tau = \omega_k t$  otrzymamy równanie ruchu dla współrzędnej  $\eta$  (bezwymiarowa siła) w postaci:

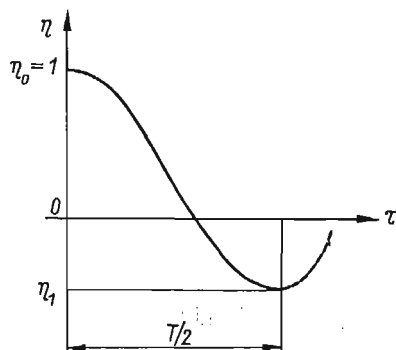
$$(2.3) \quad \ddot{\eta} - \dot{\eta}^2 \frac{1}{2\xi + 1 - \eta} + \gamma \dot{\eta} + \eta \frac{2\xi}{2\xi + 1 - \eta} = 0.$$

Równanie to opisuje dowolny półokres drgań zarówno przy drganiach w prawo jak i w lewo, z tym, że warunki początkowe należy dla każdego półokresu przyjmować  $\eta = 1$ ,  $\dot{\eta} = 0$ .

Przebieg rozwiązania równania (2.3) przedstawiony jest na rys. 2. Interesuje nas nie sam przebieg rozwiązania, ale przede wszystkim wartość  $\eta_1$  określająca stosunek siły po

półokresie do siły na początku tego półokresu. Mając wartość  $\eta_1$  możemy wyznaczyć logarytmiczny dekrement tłumienia zgodnie z określeniem podanym w pracy [1]:

$$(2.4) \quad \delta = \ln \left( -\frac{1}{\eta_1} \right).$$



Rys. 2

### 3. Rozwiązanie równania

Równanie (2.3) jest nieliniowe. Nie możemy przy tym zakładać małości wyrazów nieliniowych. Do rozwiązania użyto więc maszyny analogowej. Celem obliczeń było ustalenie wpływu tarcia wiskotycznego określonego parametrem  $\gamma$  i tarcia konstrukcyjnego określonego parametrem  $\xi$ . Zbadać należy zakres  $\xi$  od  $\sim 0$  do  $\infty$ .

Przyjęliśmy dla  $\gamma$  zakres od 0 do 0,8 czyli do 40% wartości tłumienia krytycznego. Obliczenia przeprowadzono na maszynie analogowej Katedry Dynamiki Pojazdów Politechniki w Delft (Holandia). Przyjmując skalę czasu 5 i skalę amplitudy 10 przekształcamy równanie (2.3) na równanie maszynowe o postaci

$$(3.1) \quad -\ddot{x} = -0,1 d\ddot{x} - 0,1 d\dot{x}^2 + 0,04 ex + 0,2b\dot{x} - 0,02 bdx\dot{x}$$

gdzie

$$d = \frac{1}{2\xi + 1}, \quad e = \frac{2}{2\xi + 1}, \quad b = \gamma.$$

Po rozwiązaniu równania wyznaczono dekrement zgodnie ze wzorem (2.4) i rys. 2. Wartości dekrementu dla różnych wartości parametru  $\xi$  oraz współczynnika tłumienia wiskotycznego  $\gamma$  zestawione są w tabelicy 1. Charakter zależności dekrementu od wymienionych parametrów ocenić można z rys. 3. Widać wyraźnie, że dla szerokiego zakresu wartości parametru  $\xi$  określającego cechy tłumienia w zamocowaniu, dekrement nie jest od niego zależny. W tym zakresie dekrement przyjmuje wartość równą wartości tłumienia wiskotycznego odpowiadającego wartości współczynnika  $\gamma$ . Przy zmniejszaniu się wartości parametru następuje szybki wzrost dekrementu, wywołany tarcie konstrukcyjnym w zamocowaniu. Jeżeli badamy tarcie wewnętrzne, pragniemy uniknąć wpływu tarcia w zamocowaniu na wyniki badań. Błąd wywołany tym wpływem ocenimy określając pro-

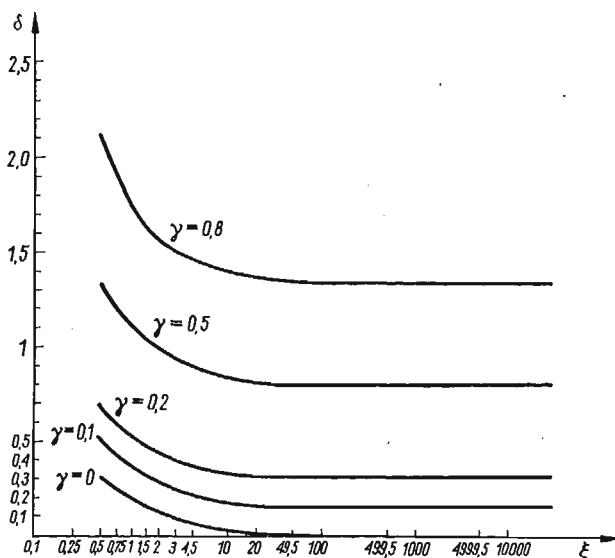
Tablica 1

$\xi$	$\delta$						$\Delta$			
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,2$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,8$	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0,2$	$\gamma = 0,5$	$\gamma = 0,8$	
0,5	0,314	0,511	0,673	1,309	2,040	225,48	112,97	63,63	49,12	
0,75	0,247	0,430	0,616	1,188	1,865	173,89	94,94	48,50	36,33	
1,0	0,202	0,381	0,562	1,124	1,750	142,68	77,84	40,50	27,93	
1,5	0,163	0,322	0,494	1,039	1,660	105,10	56,33	29,88	21,35	
2,0	0,128	0,287	0,462	0,994	1,560	82,80	46,20	24,25	14,04	
3,0	0,090	0,242	0,400	0,929	1,514	54,14	26,58	16,13	10,67	
4,5	0,060	0,217	0,386	0,891	1,469	38,22	22,15	11,38	7,38	
10,0	0,025	0,187	0,350	0,840	1,427	19,11	10,76	5,00	4,31	
20,0	0,010	0,162	0,328	0,811	1,386	3,18	3,80	1,38	1,02	
49,5	0,008	0,158	0,316	0,802	1,368	0,64	0	0,25	0	
499,5	0	0,157	0,316	0,800	1,368	0	0	0	0	
4999,5	0	0,157	0,316	0,800	1,368	0	0	0	0	

centowy stosunek przyrostu dekrementu wywołanego tarciem konstrukcyjnym w stosunku do dekrementu wiskotycznego

$$\Delta = \frac{\delta - \delta_w}{\delta_w} \cdot 100\%$$

Wyniki zostały zestawione w tabelcy 1. Analizując je można ocenić minimalną wartość  $\xi$ , konieczną dla uniknięcia określonego błędu w ocenie tarcia wiskotycznego (wewnętrzznego). Tak np. jeżeli  $\Delta$  ma być mniejsze od 5%, to  $\xi$  powinno być większe od 17. Aby  $\Delta$  było mniejsze od 2%,  $\xi$  powinno być większe od 30, zaś od 1%  $\xi$  powinno być większe od 40. Przy  $\xi$  większym od 100 błąd praktycznie jest zerowy.



Rys. 3

Uwagi powyższe pozwalają ocenić wpływ tarcia w zamocowaniu na wyniki badań tarcia wewnętrznego. Weźmy dla przykładu próbkę w postaci pręta o przekroju kołowym zamocowanym jednym końcem z tarczą osadzoną na drugim końcu rys. 4. Układ taki bywa bardzo często stosowany przy badaniu tarcia wewnętrznego. Weźmy pod uwagę następujące dane:  $l = 100$  cm,  $p = 100$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\mu = 0,1$ ,  $r = 1$ .

Jednostkowy moment tarcia wynika ze wzoru:

$$q = 2\pi p \mu r^2.$$

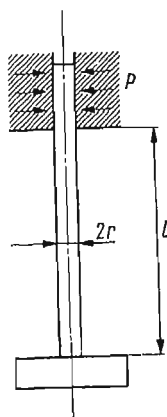
Parametr  $\xi$  zaś dla  $n$ -tego półokresu:

$$\xi = \frac{2\pi p \mu r^2 l}{|M|},$$

gdzie  $M$  oznacza maksymalną wartość momentu skręcającego na początku półokresu. Jeżeli zażądamy, aby błąd oceny tarcia wiskotycznego nie przekraczał 5%, to z warunku iż  $\xi$  ma być mniejsze od 17, otrzymamy, że moment maksymalny przy danych warunkach nie powinien przekraczać 370 kGcm.

Przy badaniu drgań o większych amplitudach należałoby odpowiednio zmienić warunki umocowania lub wymiary próbki, np. zwiększyć  $\mu$  lub  $p$ , albo powiększyć długość próbki.

Przedstawione powyżej rozważania oparte są na modelu przybliżonym, jeżeli chodzi o warunki zarówno tarcia wewnętrznego, jak i tarcia w zamocowaniu, toteż wyniki ilo-



Rys. 4

ściowe nie mogą być wprost przeniesione na rzeczywiste układy służące do badania tarcia wewnętrznego. Natomiast ogólny wniosek zachowa swoją poprawność przy przyjęciu bardziej złożonej struktury oporów wewnętrznych i oporów zamocowania. W pewnych zakresach parametrów na tłumienie drgań w stopniu decydującym wpływa tylko tarcie wewnętrzne, w innych zaś decydującą rolę odgrywa tarcie konstrukcyjne w zamocowaniu.

Na fakt ten mało zwracano dotąd uwagi przy badaniu tarcia wewnętrznego, może jednak być on przyczyną wielu rozbieżności w wynikach takich badań prowadzonych przez różne ośrodki. Zjawisko opisane może także wywołać wątpliwości co do poprawności wyników niektórych doświadczeń tego typu. Wydaje się np. że wyniki badań tłumienia wewnętrznego elementów betonowych prowadzone przez SOROKINA [4] mogą być zakwestionowane właśnie z powyższego powodu.

Podane wyżej rozważania mogą mieć także znaczenie dla oceny wpływu tarcia na tłumienie drgań elementów maszyn i budowli. Sprawą dyskusyjną i często poruszaną jest problem, który z mechanizmów rozpraszania energii: opory w zamocowaniu czy opory w materiale gra rolę decydującą. Jak widać z powyższych rozważań zależy to od warunków zamocowania, kształtów elementu i wartości obciążeń. W pewnych warunkach decydującym może okazać się wpływ tarcia wewnętrznego w innych tarcie w zamocowaniu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. OSIŃSKI, *Свободные колебания системы с одной степенью свободы при наличии конструкционного демпфирования*, Известия Академии наук СССР, Мех. и Маш., 5, 1963.
2. Z. OSIŃSKI, *Влияние так называемого трения конструктивного на okres drgań swobodnych układu o jednym stopniu swobody*, Archiwum Budowy Maszyn. 1, 11 (1964).

3. Z. OSIŃSKI, *Próba nieliniowego przedstawienia zjawisk tarcia wewnętrznego i relaksacji*, Rozprawa habilitacyjna, Warszawa 1961.
4. Е. С. СОРОКИН, *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*, Москва 1960.

## R e z y u m e

ДЕКРЕМЕНТ ДЕМПФИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ВНУТРЕННИМ  
(ВЯЗКИМ) И КОНСТРУКЦИОННЫМ ТРЕНИЕМ

В работе представлено исследование декремента колебаний системы с одной степенью свободы, демпфированных одновременно конструкционным трением в точке закрепления и внутренним трением. Внутреннее трение предполагается, для упрощения, линейно вязким. Уравнение движения решается для широкого диапазона параметров на моделирующей машине. Результаты использовались в качестве основы для оценки влияния конструкционного трения на результаты исследования внутреннего трения. Подтверждается наличие областей, в которых трение в точке закрепления не влияет на результаты исследований внутреннего трения. Определены области, в которых конструкционное трение имеет решающий характер.

## S u m m a r y

DAMPING DECREMENT OF VIBRATIONS EFFECTED SIMULTANEOUSLY BY THE  
VISCOTIC AND STRUCTURAL FRICTION

Presented are considerations concerning the effect of the structural friction in fittings and viscotic internal friction. The latter is assumed to be linearly viscotic. The equation of motion has been solved on an analog computer for the wide range of parameters. On the basis of numerical results the analysis of the influence of the structural friction on the results of the experimental investigation of the internal friction of materials is given. The analysis shows the existence of ranges of parameters where the structural friction does not affect the results of the experimental investigation of the internal friction. On the other hand, for some ranges the effect of structural friction is very strong.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1967 r.*

---



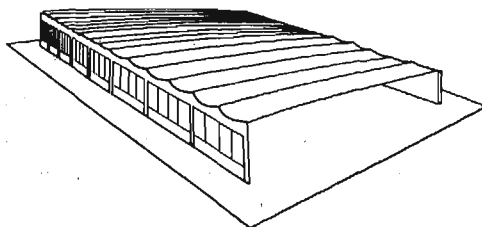


## OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU ŁUKU JAKO PRZEKROJU DŹWIGARÓW SKLEPIENIOWYCH

ZDZISŁAW K. LEŚNIAK (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

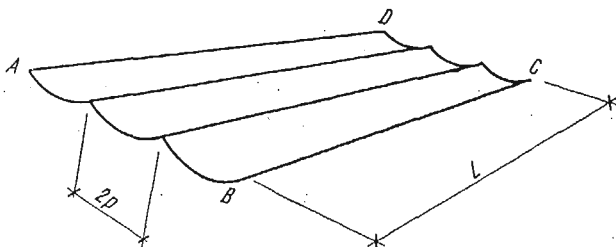
W wielu konstrukcjach budowlanych stosuje się przekrycia dachowe w postaci sklepień o zarysie łukowym. I tak np. dachy obiektów przemysłowych (hal fabrycznych, magazynów itd.) miewają postać dźwigarów sklepieniowych o przekroju poprzecznym złożonym



Rys. 1. Dach budynku przemysłowego w postaci dźwigarów sklepieniowych

z szeregu łuków (rys. 1). Dźwigary te pracują przede wszystkim na zginanie jako belki o rozpiętości  $L$  oparte na podporach w płaszczyznach  $AB$  oraz  $CD$  (rys. 2).

Względy ekonomiczne nakazują optymalizację tych konstrukcji. Optymalne dźwigary sklepieniowe powinny zapewniać spełnienie wymagań funkcjonalnych, wytrzymałościowych itp.

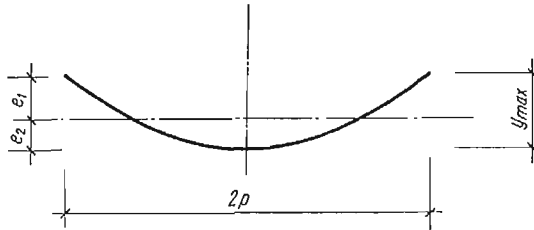


Rys. 2. Dźwigar sklepieniowy

wych itp. w stopniu zadowalającym, a przy tym powinny być najlepsze z punktu widzenia pewnej ich cechy przyjętej za kryterium optymalności. Jako kryterium optymalności przyjmuje się najczęściej ogólną ekonomiczność budowli.

W zastosowaniu do dźwigara sklepieniowego kryterium to da się sprowadzić do wymagania użycia minimum materiału w dźwigarze przy zachowaniu jego nośności nie mniejszej od wymaganej (wariant 1) bądź też do żądania uzyskania maksimum wytrzymałości dźwigara przy użyciu nie większej niż określonej ilości materiału (wariant 2). Zagadnienie to ujmijemy teraz matematycznie.

Rozważmy jeden element przekroju poprzecznego dźwigara sklepieniowego, mianowicie łuk o szerokości  $2\rho$  i wysokości  $y_{\max}$  (rys. 3).



Rys. 3. Przekrój poprzeczny elementu łukowego dźwigara sklepieniowego

Pod wpływem zginania wywołanego obciążeniem naprężenia w przekroju dźwigara nie powinny przekroczyć wartości dopuszczalnych, czyli

$$(1.1) \quad M \geq \frac{Be}{k},$$

gdzie  $B$  oznacza moment zginający, przypadający na jeden element dźwigara (rys. 3),  $e$  odpowiednio  $e_1$  i  $e_2$ , tj. odległości skrajnych punktów łuku (przekroju dźwigara) od osi obojętnej,  $M$  moment bezwładności łuku (przekroju dźwigara) względem jego osi ciężkości,  $k$  naprężenie dopuszczalne w materiale łuku.

Kryterium optymalizacji

wariant 1

$$(1.2) \quad l = \text{minimum}, \quad (l \text{ jest długością łuku})$$

przy spełnieniu warunków  $\sigma \leq k$ , co sprowadza się do warunku

$$(1.3) \quad M \geq M_d$$

ponadto

$$(1.4) \quad y \leq y_{\max},$$

gdzie  $M_d$  jest daną wartością momentu bezwładności łuku,  $y$  oznacza rzędne osi łuku  $y_{\max}$  dane ograniczenie wysokości łuku, reszta oznaczeń jak wyżej.

wariant 2

$$(1.5) \quad M = \text{maximum} \quad (M = \text{j.w.})$$

przy spełnieniu warunków

$$(1.6) \quad l \leq l_d, \quad y \leq y_{\max},$$

gdzie  $l$  oznacza długość łuku,  $l_d$  daną wartość, pozostałe oznaczenia — jak wyżej.

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu takiego kształtu łuku czyli takiego jego równania, aby były spełnione warunki (1.3) i (1.4) przy wyborze kryterium optymalizacji

wg wariantu 1 lub warunki (1.6) w przypadku wariantu 2, a ponadto aby funkcja kryterium optymalizacji osiągnęła ekstremum. W wariantcie 1 funkcja-kryterium (1.2) powinna osiągnąć minimum, a w wariantcie 2 funkcja-kryterium (1.5) powinna uzyskać wartość maksymalną.

Wielkość  $M$  (moment bezwładności łuku) występująca we wzorze (1.5) jako funkcja-kryterium optymalizacji oraz we wzorze (1.3) jako warunek zależy od funkcji  $y$  (równania łuku), jest więc funkcjonalem.

Przy zastąpieniu znaków nierówności we wzorach (1.3), (1.4) i (1.6), znakami równości obydwa warianty optymalizacji są równoważne tworząc zagadnienie dualne programowania matematycznego [1].

Wariant 2 optymalizacji po zastąpieniu we wzorach (1.6) znaków nierówności znakami równości stanowi izoperymetryczne zagadnienie rachunku wariacyjnego, które nie jest dotychczas rozwiązane<sup>1)</sup>.

Praca niniejsza podaje sposób rozwiązania tego problemu przez potraktowanie go jako zagadnienia programowania matematycznego i zastosowanie metody Monte Carlo do jego rozwiązania. Ponadto podano numeryczne rozwiązanie pewnego przypadku tego zagadnienia.

## 2. Sformułowanie matematyczne zagadnienia programowania

Zadanie optymalizacji kształtu łuku przedstawimy teraz jako zagadnienie programowania matematycznego.

Założmy równanie kształtu łuku w postaci szeregu potęgowego

$$(2.1) \quad y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

i potraktujmy współczynniki  $a_n$  ( $n = 0, 1, \dots, n$ ) jako zmienne decyzyjne, których wartości mamy określić w postępowaniu optymalizacyjnym.

Przyjmując wariant 2 optymalizacji łuku możemy sformułować zadanie optymalizacji łuku następująco:

Należy znaleźć takie wartości zmiennych  $a_n$  ( $n = 0, 1, \dots, n$ ), aby moment bezwładności  $M$  łuku względem jego osi ciężkości był maksymalny przy równoczesnym spełnieniu warunków, że długość łuku  $l$  nie przekroczy danej wartości  $l_d$ , a wysokość łuku nie będzie większa od danego wymiaru  $y_{\max}$ .

Z uwagi na symetrię łuku względem osi pionowej wystarczy rozpatrywać tylko jego połowę (rys. 4) przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Dzięki temu we wzorze (2.1) zniknie wyraz wolny  $a_0$  i wyraz  $a_1 x$ . Równanie łuku będzie więc miało postać

$$(2.2) \quad y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2.$$

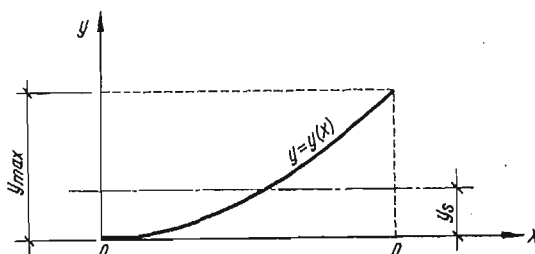
Grubość dźwigarów sklepieniowych jest nieznaczną w porównaniu z szerokością łuku. W dalszym ciągu będziemy więc rozpatrywać samą oś łuku jako przekrój dźwigara sklepieniowego (grubość 1).

<sup>1)</sup> Autor dziękuje doc. d-rowsi inż. Zbigniewowi Mazurkiewiczowi za zwrócenie uwagi na nierozwiązany dotychczas problem optymalizacji łuku.

Położenie środka ciężkości  $y_s$  łuku znajdziemy z warunku, że moment statyczny łuku względem swego środka ciężkości równa się zeru:

$$(2.3) \quad y_s = \frac{S}{l} = \frac{\int_0^p y \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_0^p \sqrt{1+y'^2} dx}$$

gdzie  $y = y(x)$ ,  $p$  oznacza połowę szerokości łuku (granica całkowania),  $S$  moment statyczny łuku względem osi  $x$ ,  $l$  długość łuku.



Rys. 4. Łuk optymalizowany

Moment bezwładności  $M$  łuku względem osi ciężkości wynosi

$$(2.4) \quad M = \int_0^p (y - y_s)^2 \sqrt{1+y'^2} dx,$$

gdzie  $y = y(x)$ .

Zadanie optymalizacji łuku polega na znalezieniu maksimum warunkowego funkcji  $M$ . Warunkami są

$$(2.5) \quad l = \int_0^p \sqrt{1+y'^2} dx \leq l_d$$

oraz

$$(2.6) \quad y \leq y_{\max},$$

gdzie  $l_d$  i  $y_{\max}$  są z góry danymi liczbami. Krótko mówiąc należy znaleźć  $M =$  maksimum przy  $l \leq l_d$ ,  $y \leq y_{\max}$ . Funkcje  $M$ ,  $l$  i  $y$  są nieliniowe względem  $x$ .

Zagadnienie to nie daje się rozwiązać za pomocą rachunku różniczkowego. Zastosujemy więc do jego rozwiązania metody programowania matematycznego.

Jak zobaczymy niżej, w przypadku kształtu łuku wyrażonego wielomianem (2.2) całki występujące we wzorach (2.3)–(2.5) nie dają się ogólnie obliczyć w sposób elementarny i przedstawić w postaci zamkniętych wzorów. Muszą one być określane w sposób przybliżony metodami numerycznymi. Ten fakt wyklucza zastosowanie niektórych metod programowania matematycznego. Nie jest np. możliwe zastosowanie metod gradientowych do znalezienia maksimum warunkowego funkcji  $M$ .

Do rozwiązania zagadnienia optymalizacji łuku zastosujemy metodę Monte Carlo [2] stosując komputer do obliczeń numerycznych.

## 3. Przykład optymalizacji łuku (obliczony numerycznie)

Równanie łuku wyraża wielomian czwartego stopnia (por. rys. 4)

$$(3.1) \quad y = ax^4 + bx^3 + cx^2.$$

Położenie środka ciężkości

$$(3.2) \quad y_s = \frac{\int_0^p (ax^4 + bx^3 + cx^2) \sqrt{1 + (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)^2} dx}{\int_0^p \sqrt{1 + (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)^2} dx}.$$

Moment bezwładności łuku względem osi ciężkości

$$(3.3) \quad M = \int_0^p (ax^4 + bx^3 + cx^2 - y_s)^2 \sqrt{1 + (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)^2} dx.$$

Zadanie optymalizacji łuku polega na znalezieniu takich wartości zmiennych decyzyjnych  $a, b, c$ , dla których wystąpi maksimum funkcji  $M$  przy równoczesnym spełnieniu następujących warunków:

*warunek 1*

$$(3.4) \quad l = \int_0^p \sqrt{1 + (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)^2} dx \leq l_d;$$

za  $l_d$  przyjmujemy ćwiartkę długości koła o promieniu  $p$ :  $l_d = \frac{\pi p}{2}$ ;

*warunek 2*

$$(3.5) \quad y = ax^4 + bx^3 + cx^2 \leq y_{\max}.$$

Za  $y_{\max}$  będziemy przyjmować kolejno  $y_{\max} = p$  i  $y_{\max} = p/2$ .

Jako wymiar połowy szerokości łuku (por. rys. 4) przyjmiemy  $p = 1$ .

Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę Monte Carlo. Szczegółowy opis metody Monte Carlo wraz z opisem generatora liczb losowych podany jest w pracy [2].

W omawianym tu przypadku optymalizacji łuku całki nie dały się obliczyć metodami elementarnymi i były liczone numerycznie wg wzoru

$$(3.6) \quad \int_0^p f(x) dx = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n),$$

gdzie  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

$$x_0 = 0, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad h = p/n,$$

czyli

$$y_0 = f(x_0) = f(0), \quad y_1 = f(h), \quad y_2 = f(2h), \dots$$

Dobór odpowiedniej liczby  $n$  podziału całkowanego odcinka nastąpił doświadczalnie przy użyciu komputera przez dobieranie różnych wartości  $n$  i porównanie otrzymanych wyników. Okazało się, że stosowanie mniejszych odcinków niż  $h = p/40$  nie daje już zwiększenia dokładności drukowanych wyników. Dla zapewnienia jak największej dokładności zastosowano ostatecznie jednak  $h = p/100$ .

Losowanie wartości  $a$ ,  $b$ ,  $c$  następowało najpierw w kostce  $\langle 0; 2, 5 \rangle$ , a następnie po otrzymaniu obrazu co do wartości  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dających wysokie wartości  $M$  zmniejszono ją do przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$ . Przyczyniło się to do poprawienia przybliżenia optimum.

Obliczenie przeprowadzono na komputerze GIER. Program optymalizacji łuku napisany w języku GIER ALGOL III ma postać następującą:

```

PROGRAM ARCH(X $\sqrt{4}$ ):
begin comment: program oblicza metoda Monte Carlo współczynniki łuku
                a $\times$ x $\sqrt{4}$ +b $\times$ x $\sqrt{3}$ +c $\times$ x $\sqrt{2}$ , zapewniające maksimum momentu bezwładności
                łuku względem jego osi ciężkości;
integer i,n,N,1;
real h,C1,C2,C3,p,ys,M,ymax,aa,ad,ag,bb,cc;
boolean random,d,c,b,a; comment: procedura generowania liczb losowych o rozkładzie
                równomiernym w przedziale [0,1], wywoływana
                przez instrukcje gier(random);

pack(a,0,20,0,20,39,1);
pack(b,0,9,142,10,19,111,20,29,155,30,39,961);
pack(c,0,19,1,20,25,15,26,35,17,36,39,1,40,41,3);
pack(d,0,9,3,10,25,26,26,30,5,31,39,0,40,41,0);
pack(random,0,9,4,10,19,3,20,25,27,26,29,2,30,36,25,37,39,2,40,41,2);
input(ad,ag,n,p,N,ymax);
1:= 0;
M:= 0;
begin
array y,y1[0:n];
h:= p/n;
L:
1:= 1+1;
C1:= C2:= C3:= 0;
if 1>N then
go to A;
aa:= (ag-ad) $\times$ gier(random)+ad;
bb:= (ag-ad) $\times$ gier(random)+ad;
cc:= (ag-ad) $\times$ gier(random)+ad;
if aa $\times$ p $\sqrt{4}$ +bb $\times$ p $\sqrt{3}$ +cc $\times$ p $\sqrt{2}$  > ymax then go to L;
for i:= 0 step 1 until n do
begin
y1[i]:= sqrt(1+(4 $\times$ aa $\times$ (hx1) $\sqrt{3}$ +3 $\times$ bb $\times$ (hx1) $\sqrt{2}$ +2 $\times$ cc $\times$ (hx1) $\sqrt{2}$ );
y[i]:= aa $\times$ (hx1) $\sqrt{4}$ +bb $\times$ (hx1) $\sqrt{3}$ +cc $\times$ (hx1) $\sqrt{2}$ ;
C2:= C2+y1[i];
C1:= C1+y1[i] $\times$ y1[i];
end;
C1:= (C1-(y[0] $\times$ y1[0]+y[n] $\times$ y1[n])/2) $\times$ h;
C2:= (C2-(y1[0]+y1[n])/2) $\times$ h;
if C2 > 1.5708 $\times$ p then
go to L;
ys:= C1/C2;
for i:= 0 step 1 until n do
begin
y[i]:= (aa $\times$ (hx1) $\sqrt{4}$ +bb $\times$ (hx1) $\sqrt{3}$ +cc $\times$ (hx1) $\sqrt{2}$ -ys) $\sqrt{2}$  $\times$ sqrt(1+(4 $\times$ aa $\times$ (hx1) $\sqrt{3}$ +3 $\times$ bb $\times$ (hx1) $\sqrt{2}$ +
                2 $\times$ cc $\times$ (hx1) $\sqrt{2}$ );
C3:= C3+y[i];
end;
C3:= (C3-(y[0]+y[n])/2) $\times$ h;
if C3>M then
begin
M:= C3;
output({ndddd,ddd},M); outsp(5);
output({nd,ddd},aa); outsp(5);
output({nd,ddd},bb,outsp(5),cc); outsp(5);
output({ndddd,1},outer);
end;
go to L;
end;
end program arch(x $\sqrt{4}$ );

```

Wyniki obliczeń podane przykładowo dla przypadku

$$y_{\max} = p = 1, \quad n = 100$$

są następujące:

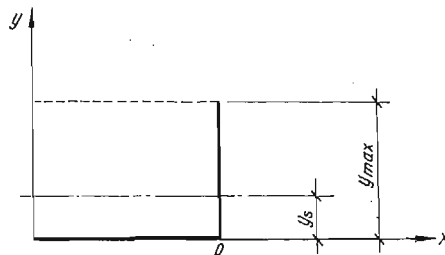
Wyniki (ARCH  $x^4$ )

M	a	b	c	kolejna liczba losowania
0,138	0,5671	0,2008	0,1820	5
0,143	0,3789	0,3637	0,2291	104
0,148	0,5991	0,2650	0,1070	330
0,150	0,0297	0,9267	0,0264	1170
0,151	0,5549	0,4035	0,0163	1391
0,152	0,4557	0,2105	0,3319	1406
0,153	0,1490	0,6471	0,2038	1907
0,156	0,3573	0,5105	0,1299	3400
0,158	0,5919	0,3279	0,0767	3927
0,159	0,6826	0,2141	0,1009	9078

Łączna liczba losowań zespołów wartości dla zmiennych  $a, b, c$  wynosiła 15 563. Najlepszy wynik uzyskano w 9078 losowaniu. Następne losowania nie dały już poprawy wyniku. Czas liczenia wynosił ok. 3,5 godziny.

Optymalny kształt łuku dany jest więc wyrażeniami (dla przypadku b) nie podano tu wyników obliczeń):

$$(3.7) \quad \begin{array}{l} \text{a) dla } y_{\max} = p: y = 0,6826x^4 + 0,2141x^3 + 0,1009x, \\ \text{b) dla } y_{\max} = p/2: y = 3,447x^4 + 0,1187x^3 + 0,365x. \end{array}$$



Rys. 5. Łuk o kształcie linii łamanej

Dla porównania przeprowadzono obliczenia dla łuków:

1. O kształcie linii łamanej (rys. 5) wg poniższych wzorów napisanych dla  $y_{\max} = p$ . W przypadku  $y_{\max} = p/2$  wzory są podobne.

$$l = 2p,$$

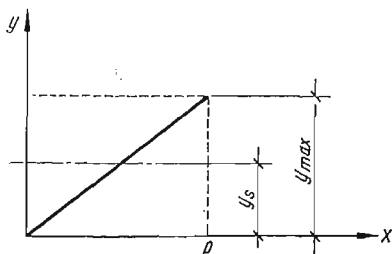
$$y_s = \frac{p^2}{2 \cdot 2p} = \frac{p}{4},$$

$$M = p \left( \frac{p}{4} \right)^2 + \frac{p^3}{12} + p \left( \frac{p}{2} \right)^2 = 0,20833 p^3 \quad (2).$$

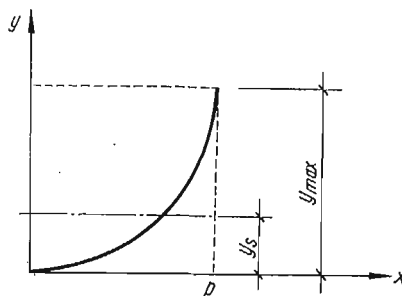
2. O kształcie odcinka prostej (rys. 6). Dla  $y_{\max} = p$  otrzymuje się wzory

$$l = p\sqrt{2}, \quad y_s = \frac{p^2\sqrt{2}}{2p\sqrt{2}} = \frac{p}{2},$$

$$M = \int_0^p (x-p/2)^2 \sqrt{2} dx = 0,1178 p^3.$$



Rys. 6. Łuk o kształcie odcinka prostej



Rys. 7. Łuk kołowy

3. O kształcie łuku koła (rys. 7). Odpowiednie wzory mają postać:

$$y = p - \sqrt{p^2 - x^2}, \quad y' = \frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2}}, \quad l = \frac{\pi p}{2},$$

$$y_s = \frac{\int_0^p \left( p - \sqrt{p^2 - x^2} \right) \frac{p}{\sqrt{p^2 - x^2}} dx}{\pi p/2} = \frac{p^2 \left[ \arcsin \frac{x}{p} \right]_0^p - p x \Big|_0^p}{\pi p/2} = \frac{\frac{p^2}{2} (\pi - 2)}{\pi p/2} = \frac{p(\pi - 2)}{\pi}$$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^p \frac{(p^2 - 2p\sqrt{p^2 - x^2} + p^2 - x^2 - 2py + 2y_s\sqrt{p^2 - x^2} + y_s^2)p}{\sqrt{p^2 - x^2}} dx = \\ &= p \left\{ (2p^2 - 2py_s + y_s^2) \left[ \arcsin \frac{x}{p} \right]_0^p + (2y_s - 2p)x \Big|_0^p - \left[ \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{x}{p} - \frac{x}{2} \sqrt{p^2 - x^2} \right]_0^p \right\} = \\ &= p \left[ (2p^2 - 2py_s + y_s^2) \frac{\pi}{2} + 2p(y_s - p) - \frac{p^2\pi}{4} \right] = 0,1488 p^3. \end{aligned}$$

Ponadto przeprowadzono optymalizację kształtu łuku określonego równaniem

$$(3.8) \quad y = ax^2.$$

<sup>2)</sup> Przypadek łuku w kształcie linii łamanej wymaga uwzględnienia ponadto innych wzorów wytrzymałościowych, które tu pominięto, gdyż ten przypadek traktowany jest tylko porównawczo jako graniczny kształt łuku.



Optymalizację przeprowadzono metodą Monte Carlo przy użyciu komputera GIER analogicznie jak w przypadku łuku wyrażonego wielomianem czwartego stopnia. Wszystkie całki były liczone numerycznie.

W przypadku  $y_{\max} \leq p = 1$  uzyskano dla kostki  $\langle 0; 2, 5 \rangle$  oraz 3000 losowań w 959 losowaniu jako najlepszy wynik:

$$a = 0,9993, \quad M = 0,141.$$

Czas liczenia wyniósł około 15 minut. Przy zmniejszeniu kostki oraz powiększeniu liczby losowań można się spodziewać poprawienia wyniku.

W celu otrzymania dokładnej optymalnej wartości współczynnika  $a$  oraz dla określenia dokładności wyników optymalizacji metodą Monte Carlo przeprowadzono tablicowanie wartości funkcji  $M$  (moment bezwładności łuku) w zależności od współczynnika  $a$  paraboli  $ax^2$ .

```

PROGRAM M(a):
  begin comment: Program oblicza momenty bezwładności paraboli
    y=ax^2 względem jej środka ciężkości jako
    funkcje od a, na przedziale [0,p];
  integer i,n;
  real a,h,p,r,ymax,C1,C2,M;
  A:
  writetext(⟨⟨START dane: n,p,ymax⟩⟩);
  n:=typein;
  p:=typein;
  ymax:=typein;
  begin
  array R1,R2,y[0:n];
  h:=p/n;
  for a:=0.0001, a+0.05 while a*p^2<ymax+0.01 do
  begin
  C2:=M:=0;
  r:=sqrt(p^2 + 1/(4*a^2));
  C1:=a*p*r + ln(p+r)/(4*a) - ln(1/(2*a))/(4*a);
  if C1 > 1.5707812xp then
  go to EA;
  for i:=0 step 1 until n do
  begin
  R1[i]:=a * (h*i)^2;
  R2[i]:=sqrt(1+(2*a*h*i)^2);
  y[i]:=R1[i] * R2[i];
  C2:=C2+ y[i];
  end;
  C2:=(C2-(y[0]+y[n])/2)*h;
  r:=C2/C1;
  for i:=0 step 1 until n do
  begin
  y[i]:=(R1[i]-r)^2 * R2[i];
  M:=M+y[i];
  end;
  M:=(M-(y[0]+ y[n])/2)*h;
  outerc;
  output(⟨nd. dddd⟩,a,outsp(4));
  output(⟨nd. dddd⟩,M);
  EA:
  end a;
  end;
  goto A
end program M(a);

```

Aby zapewnić wysoką dokładność wyników obliczono ściśle długość łuku paraboli, tzn. całkę występującą w mianowniku wzoru na  $y_s$ , mianowicie

$$(3.9) \quad y_s = \frac{a \int_0^p x^2 \sqrt{1+4a^2x^2} dx}{ap \sqrt{p^2 + \frac{1}{4a^2}} + \frac{1}{4a} \ln \left( p + \sqrt{p^2 + \frac{1}{4a^2}} \right) - \frac{1}{4a} \ln \frac{1}{2a}}$$

Pozostałe występujące w zadaniu całki obliczono numerycznie.

Obliczenia wykonano przy użyciu komputera GIER wg programu M (a), s (87).  
Otrzymano następujące wyniki:

$a$	$M$
0,0001	0,00000
0,0501	0,00022
0,1001	0,00090
0,1501	0,00205
0,2001	0,00370
0,2501	0,00590
0,3001	0,00870
0,3501	0,01214
0,4001	0,01628
0,4501	0,02118
0,5001	0,02690
0,5501	0,03350
0,6001	0,04102
0,6501	0,04954
0,7001	0,05910
0,7501	0,06977
0,8001	0,08159
0,8501	0,09462
0,9001	0,10893
0,9501	0,12455
1,0001	0,14155

Czas liczenia wynosił około 15 minut.

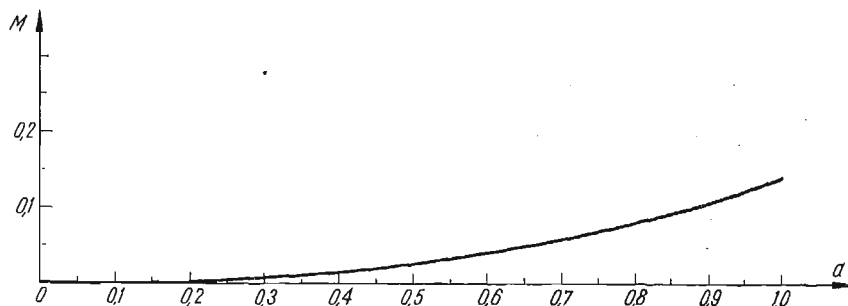
Graficzne przedstawienie pierwszego przypadku tych wyników, tj. przebiegu zależności momentu bezwładności  $M$  od współczynnika paraboli  $a$  dla  $p = 1$ ,  $y_{\max} = 1$  ( $n = 100$ ) podaje rys. 8.

Optymalna wartość współczynnika  $a$  we wzorze (3.8) przy  $y_{\max} = p = 1$  wynosi więc 1. Za pomocą metody Monte Carlo otrzymano bardzo bliski wynik ( $a = 0,9993$ ). Przy  $y_{\max} = p/2 = 1/2$ ,  $a = 0,5$ .

Optymalny kształt łuku w postaci paraboli drugiego stopnia określony jest równaniem

(3.10) a) przy  $y_{\max} = p = 1$ :  $y = x^2$ ,

(3.11) b) przy  $y_{\max} = p/2 = 1/2$ :  $y = \frac{1}{2}x^2$ .



Rys. 8. Zależność momentu bezwładności łuku od współczynnika paraboli  $ax^2$

4. Zestawienie wyników optymalizacji i ich omówienie

W tablicy 1 podano zestawienie wyników optymalizacji kształtu łuku dla wszystkich przypadków przedstawionych poprzednio.

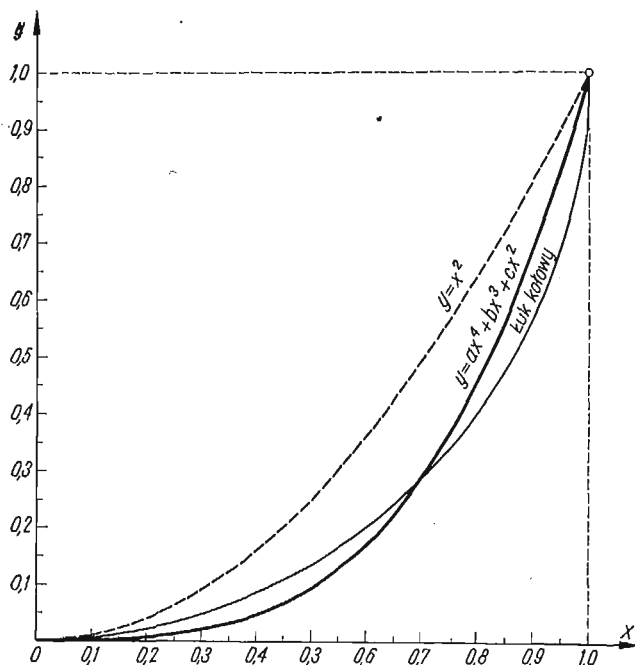
Tablica 1 wartości momentu bezwładności M łuku (połowa szerokości łuku  $p = 1$ )

				$ax^2$ 	$ax^4 + bx^3 + cx^2$ 
	1	2	3	4	5
$y_{\max} = p = 1$	0,1178 (79)	$\frac{0,2083}{40}$	0,1488 (100)	0,1415 (95)	0,159 (107)
$y_{\max} = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$	0,0233 (87)	$\frac{0,03125}{(116)}$	—	$\frac{0,0269}{(100)}$	$\frac{0,028}{(104)}$

W pierwszym przypadku, gdy wysokość łuku jest równa połowie jego szerokości, tj. gdy  $y_{\max} = p = 1$ , porównanych jest pięć rodzajów kształtu połowy łuku, a to: odcinek prostej (1), linia łamana (2), łuk koła (3), parabola drugiego stopnia (4) oraz parabola czwartego stopnia (5). W przypadku linii łamanej (2) nie był spełniony warunek ograniczonej długości połowy łuku  $l \leq l_d = \pi p/2$ , obowiązujący w pozostałych przypadkach.

W drugim przypadku, gdy  $y_{\max} = p/2 = 1/2$ , porównano cztery przypadki bez łuku koła. Ponieważ zachowano tu taką samą jak poprzednio wartość  $l_d = \pi p/2$ , wszystkie rozpatrywane kształty łuku spełniają warunek  $l \leq l_d$ . Nawet w przypadku łuku w kształcie linii łamanej połowa jego długości wynosi tylko 1,5.

Największy moment bezwładności daje łuk w kształcie linii łamanej (2). Pokazuje to, do jakiego najkorzystniejszego ukształtowania dąży oś łuku. Najmniejszy moment bezwładności daje odcinek prostej (1). Spośród właściwych łuków najmniej korzystna jest parabola drugiego stopnia. Dobry wynik zapewnia parabola czwartego stopnia, która przyjmuje korzystniejszy kształt i daje lepszy wynik niż łuk kołowy o tej samej długości. Na rys. 9 podano porównanie trzech kształtów łuku. Charakterystyczny jest kształt przyjęty przez parabolę czwartego stopnia.



Rys. 9. Porównanie różnych kształtów łuku

W celu wzajemnego porównania podano w tablicy 1 w nawiasach procentowe wartości momentów bezwładności  $M$  przyjmując za 100 w pierwszym przypadku łuk kołowy, a w drugim parabolę drugiego stopnia. *Najlepszy wynik momentu bezwładności  $M$  wzięto w ramkę a drugi co do wartości wynik podkreślono.*

### 5. Zakończenie

Zagadnienie optymalizacji kształtu łuku (ze względu na maksimum momentu bezwładności łuku) przy istnieniu warunków ubocznych nie daje się rozwiązać rachunkiem różniczkowym ani rachunkiem wariacyjnym. W niniejszej pracy rozwiązano powyższy problem przy użyciu metody programowania matematycznego.

Przyjmując równanie kształtu łuku w postaci wielomianu potraktowano współczynniki wielomianu jako zmienne decyzyjne, poszukując takich ich wartości, aby moment bezwładności łuku osiągnął maksimum przy równoczesnym spełnieniu warunków ubocznych

(nieprzekroczenie pewnej długości łuku oraz określonej wysokości łuku). Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metodę Monte Carlo. Obliczenia numeryczne wykonano na komputerze GIER.

Rozwiązano liczbowo przypadek łuku o kształcie wyrażonym wielomianem czwartego stopnia znajdując optymalne współczynniki wielomianu. Podano programy i wyniki obliczeń komputera. Dla porównania obliczono przypadki łuków o kształcie linii prostej, linii łamanej, łuku koła i paraboli drugiego stopnia.

#### 6. Literatura cytowana w tekście

1. O. LANGE, *Optymalne decyzje — zasady programowania*, PWN, Warszawa 1964.
2. J. GOLIŃSKI i Z. K. LEŚNIAK, *Wybór optymalnych wymiarów konstrukcji za pomocą metody Monte Carlo*, Arch. Inż. Łąd., **10** (1964), 341–356.

#### Резюме

#### ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ФОРМЫ АРОЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПЕРЕКРЫТИЙ

Задача об оптимализации формы арки (по условию максимума момента инерции) при наличии побочных условий не может быть решена в рамках дифференциального или вариационного исчисления. В настоящей работе выше указанная задача решается при использовании математического программирования.

Уравнение арки берется в виде полинома и затем разыскиваются такие значения коэффициентов, чтобы момент инерции арки достиг максимума, при одновременном удовлетворении побочных условий (не превышение некоторой длины арки и определенной ее высоты). Для решения задачи переменялся метод Монте Карло. Численные расчеты проводились на электронной счетной машине GIER.

Дан числовой пример для случая полинома четвертой степени. Приведены программы и результаты расчета. Для сравнения проводится расчет для случая арок очерченных по прямой, по ламаной линии, по дуге окружности и параболы второй степени.

#### Summary

#### OPTIMUM DESIGN OF THE ARCH SECTION OF SHELL BEAMS

The problem of the optimization of the arch shape (to obtain a maximum of the moment of inertia) with the presence of constraints can be solved neither by using the differential calculus nor by the calculus of variation. In this paper the problem has been solved by using the mathematical programming method.

Assuming the arch shape equation in the form of a polynomial, its coefficients were treated as decisive variables. Such values of the said variables have been searched for to obtain the maximum of the moment of inertia, observing at the same time some side conditions, such as the constraints, i.e. the length of the arch and its height should not be longer than the given values. To solve the problem, the Monte-Carlo-method was applied. The computations were made using the GIER computer.

The case of the arch by the polynomial of the fourth order was numerically solved. The optimum values of its coefficients were found. The programs and the results of the computations are given. For comparison sake, other arch shapes were also computed, i.e. straight line, broken line, the segment of the circle and the parabola of the second order.

INSTYTUT TECHNIKI BUDOWLANEJ

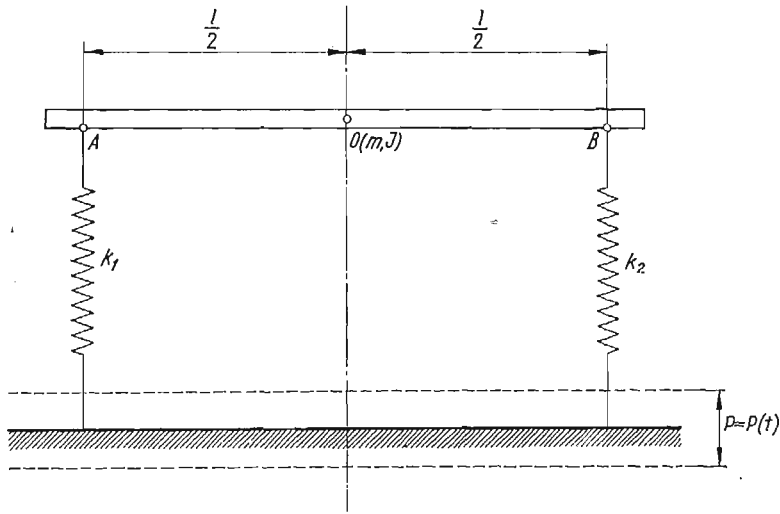
Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lipca 1967 r.



## UKŁAD O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY JAKO „DYNAMICZNY IZOLATOR” DRGAŃ

BOGUSŁAW RADZISZEWSKI, ANDRZEJ RÓŻYCKI (WARSZAWA)

1. Zagadnienie drgań układu o dwu stopniach swobody, przedstawionego na rys. 1, było wielokrotnie rozpatrywane w literaturze [1, 2], przy uwzględnieniu różnych wariantów wartości stałych parametrów układu takich jak:  $m$  — masa,  $J$  — moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy,  $k_1$  i  $k_2$  — sztywności podpór itp. oraz rodzaju wymuszenia  $P = P(t)$  gdzie  $P$  oznacza amplitudę — i sprowadzane często do drgań układu o jednym stopniu swobody (rys. 2), jeśli  $k_1 = k_2$ . Jednakże w niektórych przypadkach nawet przyjęcie do rozważań teore-



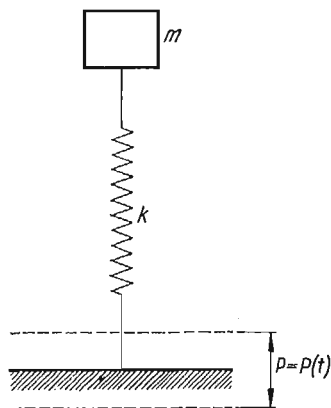
Rys. 1

tycznych pierwszego modelu (rys. 1) okazuje się zbyt dużym uproszczeniem i w efekcie prowadzi do niezamierzonych i kłopotliwych konsekwencji w postaci niespełniania przez konstrukcję, obliczoną według tego modelu, stawianych jej wymagań.

Dotyczy to szczególnie układów, w których zależy nam na nieprzenoszeniu się drgań podstawy określonych funkcją  $P = P(t)$  na element konstrukcyjny, przedstawiony na modelu pierwszym (rys. 1) jako belka o masie  $m$  i momencie bezwładności  $J$  względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy. Ma to miejsce

w przypadku np. wszelkiego rodzaju elektronowo-mechanicznych urządzeń pomiarowych ustawionych na elemencie konstrukcyjnym sprężysto podpartym, jeśli warunkiem poprawności ich pracy — z uwagi na wiarygodność i dokładność wskazań — jest zapewnienie odpowiedniego współczynnika tłumienia («izolacji») amplitudy wymuszeń  $P = P(t)$ .

Przyjęcie do rozważań modelu pierwszego (rys. 1) nie daje zadowalających wyników, gdyż konstruktor umieszczając na elemencie nośnym (belka na rys. 1) podzespoły mecha-



Rys. 2

niczne i elektryczne, przewody itp., nie jest w stanie określić w sposób analityczny dostatecznie dokładnie położenia środka masy.

Możliwe jest to dopiero po wykonaniu prototypu — i to jedynie metodą doświadczalną — lecz wtedy względy konstrukcyjne nie pozwalają przeważnie na dokonanie takich zmian w rozmieszczeniu poszczególnych elementów aparatury, aby część urządzenia podparta sprężysto była wyważona, tj. miała środek masy w połowie odległości między punktami podparcia.

Równocześnie różne podzespoły aparatury i ich elementy umieszczone na elemencie nośnym (belka — rys. 1) nie są prawie nigdy jednakowo wrażliwe na drgania, a z kolei nie wszystkie częstotliwości wymuszenia  $P = P(t)$  oddziałującego przez sprężyste łączniki na belkę, zakłócają pracę tych elementów w sposób istotny, tzn. nie wszystkie częstotliwości są jednakowo dla ich pracy szkodliwe. Ponadto w przypadku dość znacznego odstępu między punktami sprężystego podparcia belki wymuszenie o częstotliwości  $\omega$  ma w tych punktach przeważnie różną wartość, tzn.  $P_1(t) \neq P_2(t)$ .

Powstaje zatem pytanie — decydujące z punktu widzenia konstrukcyjnego — czy określony punkt belki doznaje pionowych przemieszczeń i jaką mają one wartość przy określonej częstotliwości wymuszenia.

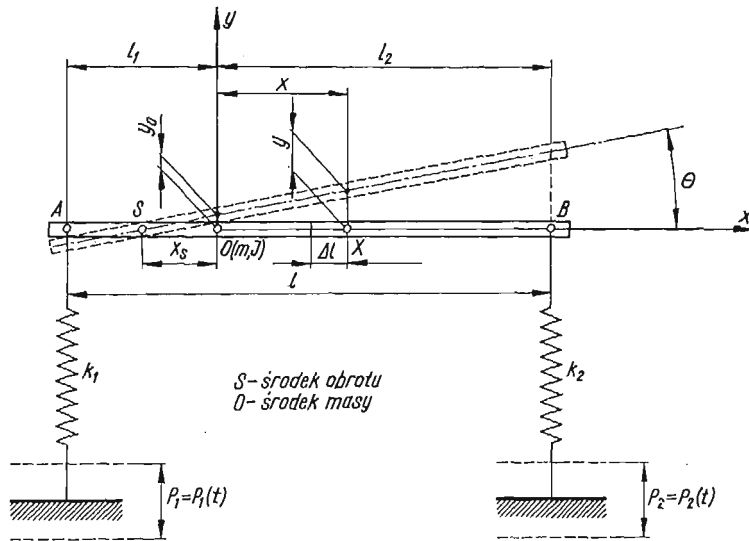
Konstrukcja musi więc spełniać warunek, aby na pewnym odcinku belki o długości  $\Delta l$  przemieszczenie pionowe  $y$ , prędkość  $\dot{y}$  i przyspieszenie  $\ddot{y}$ , były zawsze mniejsze od pewnych stałych  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , określonych jako dopuszczalne dla elementów konstrukcyjnych, umieszczonych na odcinku  $\Delta l$ . Warunek ten musi być spełniony w pewnym przedziale częstotliwości wymuszeń tj.  $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ .



Schematyczna ilustracja powyższego warunku zawarta jest na rys. 3 oraz opisana nierównościami:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} |y_0 + x\vartheta| &\leq \varepsilon_1, \\ \left| \frac{d}{dt}(y_0 + x\vartheta) \right| &\leq \varepsilon_2, \\ \left| \frac{d^2}{dt^2}(y_0 + x\vartheta) \right| &\leq \varepsilon_3, \end{aligned}$$

gdzie  $y_0 + x\vartheta = y$  przyjęto przy tym, że przemieszczenia pionowe końców belki  $A$  i  $B$  są dostatecznie małe w porównaniu z jej długością, a więc  $\operatorname{tg} \vartheta = \vartheta$ .



Rys. 3

Określenie przemieszczenia  $y$  dowolnego punktu  $X$  belki jest możliwe, jeśli znamy położenie środka obrotu  $S$  (o współrzędnej  $x_s$ ) i wartość jaką przyjmuje  $\vartheta = \vartheta(t)$ .

W ten sposób możemy zawsze stwierdzić, czy konstrukcja spełnia wymagania jej stawiane, tj. dokonać jakościowej i ilościowej oceny użyteczności rozwiązania konstrukcyjnego.

2. W wyniku powyższych rozważań przyjęto i rozpatrzono zachowanie się układu przedstawionego na rys. 4. Początek nieruchomego układu współrzędnych przyjęto w punkcie  $O$ , z którym pokrywa się środek masy belki w położeniu równowagi.

Przy założeniu małych przemieszczeń pionowych w stosunku do długości belki  $l = l_1 + l_2$  i długości sprężyn w położeniu równowagi, równania ruchu układu można napisać w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m\ddot{y} + k_1[y + l_1\vartheta - P_1(t)] + k_2[y - l_2\vartheta - P_2(t)] &= 0 \\ J\ddot{\vartheta} + k_1l_1[y + l_1\vartheta - P_1(t)] - k_2l_2[y - l_2\vartheta - P_2(t)] &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $m$  oznacza masę belki,  $J$  moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy.

Rozpatrzmy najpierw przypadek szczególny taki, że

$$(2.2) \quad P_1(t) = P_2(t) = P_0 \sin \omega t,$$

oraz wprowadźmy następujące oznaczenia:

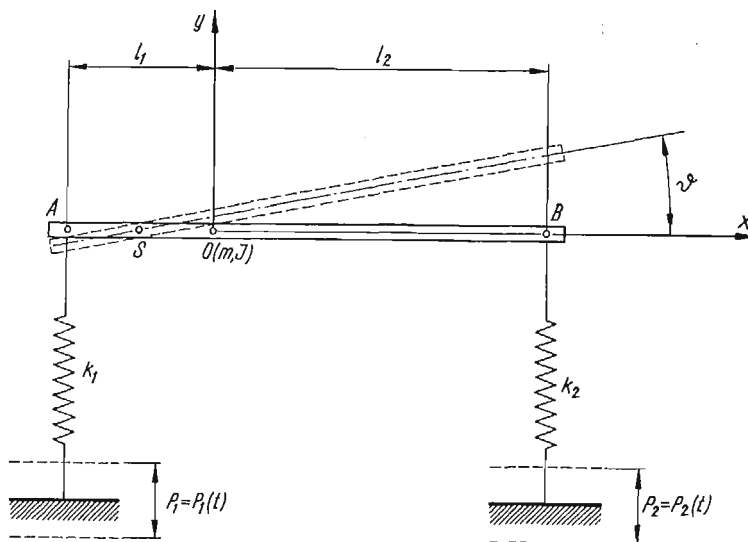
$J = mr^2$ , gdzie  $r$  jest promieniem bezwładności,

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{mr^2},$$

$$(2.3) \quad b^2 = \frac{r^2}{(l_1 + l_2)^2}, \quad \omega_2^2 = a^2 \omega_1^2,$$

$$a^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{r^2(k_1 + k_2)}, \quad c = \frac{(k_1 l_1 - k_2 l_2)(l_1 + l_2)}{(k_1 + k_2)r^2};$$

$$(2.4) \quad v = P_0 y_1, \quad \vartheta = \frac{P_0}{l_1 + l_2} \vartheta_1, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \omega t = \tau.$$



Rys. 4

Wtedy układ równań (2.1) przyjmie postać

$$(2.5) \quad \Omega^2 y_1'' + y_1 + cb^2 \vartheta_1 = \sin \tau, \quad \Omega^2 \vartheta_1'' + cy_1 + a^2 \vartheta_1 = c \sin \tau,$$

gdzie  $' = d/dt$ .

Ruch badanego układu opisują więc teraz dwie bezwymiarowe współrzędne  $y_1$  i  $\vartheta_1$  oraz cztery bezwymiarowe parametry  $\Omega^2$ ,  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c$ .

Częstości drgań własnych układu obliczamy z równania

$$\begin{vmatrix} 1 & -\Omega^2 cb^2 \\ c & a^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$(2.6) \quad \Omega^4 - (1 + a^2)\Omega^2 + (a^2 - c^2 b^2) = 0.$$

Ponieważ  $a^2 - c^2b^2 > 0$ , więc równanie (2.6) ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$(2.7) \quad \Omega_1^2 = \frac{1}{2} [(1+a^2) - \sqrt{(1+a^2)^2 - 4(a^2 - c^2b^2)}],$$

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{2} [(1+a^2) + \sqrt{(1+a^2)^2 - 4(a^2 - c^2b^2)}].$$

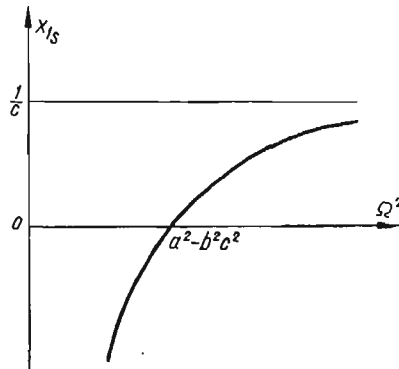
Rozwiązanie szczególne układu równości (2.5) otrzymujemy w postaci

$$(2.8) \quad y_1 = A_1 \sin \tau, \quad \vartheta_1 = A_2 \sin \tau,$$

gdzie

$$(2.9) \quad A_1 = \frac{a^2 - b^2c^2 - \Omega^2}{\Omega^4 - (1+a^2)\Omega^2 + (a^2 - b^2c^2)},$$

$$A_2 = \frac{-c\Omega^2}{\Omega^4 - (1+a^2)\Omega^2 + (a^2 - b^2c^2)}.$$



Rys. 5

Zakładając, że ruch układu przedstawionego na rys. 4 można traktować jako ruch płaski bryły sztywnej, zbadamy położenie środka obrotu  $S$ . Jest to taki punkt, którego przemieszczenie pionowe  $y_s = 0$ . Ze związków geometrycznych na rys. 3 mamy

$$(2.10) \quad x_s = \frac{y_0}{\operatorname{tg} \vartheta},$$

gdzie  $x_s$  — odległość środka obrotu od początku układu  $O$ . Uwzględniając poprzednio wprowadzone oznaczenia otrzymujemy

$$(2.11) \quad x_{1s} = \frac{y_{10}}{\vartheta_1},$$

gdzie  $x_{1s} = x_s/l_1 + l_2$ .

Uwzględniając zależności (2.8) i (2.9) otrzymamy z (2.11)

$$(2.12) \quad x_{1s} = \frac{1}{c} \frac{\Omega^2 - (a^2 - b^2c^2)}{\Omega^2}.$$

Zależność  $x_{1_s} = f(\Omega^2)$  przedstawiona jest wykreślnie na rys. 5. Jeśli  $c = 0$ , wtedy

$$\vartheta_1(t) = 0$$

i z (2.8) i (2.9) otrzymamy

$$(2.13) \quad y_1(\tau) = \frac{1}{1-\Omega^2} \sin \tau, \quad \vartheta_1(\tau) = 0.$$

3. Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny, gdy  $P_1(t) \neq P_2(t)$ . Załóżmy, że

$$(3.1) \quad P_1(t) = P_0 \sin \omega t, \quad P_2(t) = \kappa P_0 \sin \omega t,$$

gdzie  $\kappa$  oznacza bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności. Wtedy z (2.1) otrzymamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + (k_1 l_1 - k_2 l_2)\vartheta &= (k_1 + \kappa k_2)P_0 \sin \omega t, \\ m r^2 \ddot{\vartheta} + (k_1 l_1 - k_2 l_2)y + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\vartheta &= (k_1 l_1 - \kappa k_2 l_2)P_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Przyjmując te same co poprzednio oznaczenia powyższy układ równań można doprowadzić do postaci:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Omega^2 y_1'' + y_1 + c b^2 \vartheta_1 &= \frac{k_1 + \kappa k_2}{k_1 + k_2} \sin \tau, \\ \Omega^2 \vartheta_1'' + c y_1 + a^2 \vartheta_1 &= \frac{1}{b^2} \frac{k_1 l_1 - \kappa k_2 l_2}{(k_1 + k_2)(l_1 + l_2)} \sin \tau. \end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz nowe parametry

$$(3.4) \quad \frac{k_2}{k_1} = \alpha \quad \text{i} \quad \frac{l_2}{l_1} = \beta,$$

wtedy

$$(3.5) \quad a^2 = \frac{1 + \alpha \beta^2}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)^2}, \quad c = \frac{1 - \alpha \beta}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)}$$

i ostatecznie z (3.3) otrzymamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Omega^2 y_1'' + y_1 + \frac{1 - \alpha \beta}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \vartheta_1 &= \frac{1 + \kappa \alpha}{1 + \alpha} \sin \tau, \\ \Omega^2 \vartheta_1'' + \frac{1 - \alpha \beta}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)} y_1 + \frac{1 + \alpha \beta^2}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)^2} \vartheta_1 &= \frac{1 - \kappa \alpha \beta^2}{b^2(1 + \alpha)(1 + \beta)} \sin \tau. \end{aligned}$$

Ten układ równań ma równanie charakterystyczne takie samo jak i poprzednio, rozwiązanie zaś szczególne jego będzie teraz w postaci

$$(3.7) \quad y_1 = A_1 \sin \tau, \quad \vartheta_1 = A_2 \sin \tau,$$

gdzie

$$(3.8) \quad A_1 = - \frac{\Omega^2 b^2 (1 + \alpha)(1 + \kappa \alpha)(1 + \beta) - \alpha(\beta + \kappa)}{b^2(1 + \alpha)^2(1 + \beta)[\Omega^4 - \Omega^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2 c^2)]},$$

$$(3.9) \quad A_2 = - \frac{(1 + \alpha)(1 - \kappa \alpha \beta) \Omega^2 - \alpha(1 + \beta)(1 - \kappa)}{b^2(1 + \alpha)^2(1 + \beta)[\Omega^4 - \Omega^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2 c^2)]}.$$

Podstawiając (3.7) do (2.11) i uwzględniając (3.8) i (3.9) otrzymamy

$$(3.10) \quad x_{1s} = \frac{\Omega^2 b^2 (1+\alpha)(1+\kappa\alpha)(1+\beta) - \alpha(\beta+\kappa)}{\Omega^2 (1+\alpha)(1-\kappa\alpha\beta) - \alpha(1+\beta)(1-\kappa)}$$

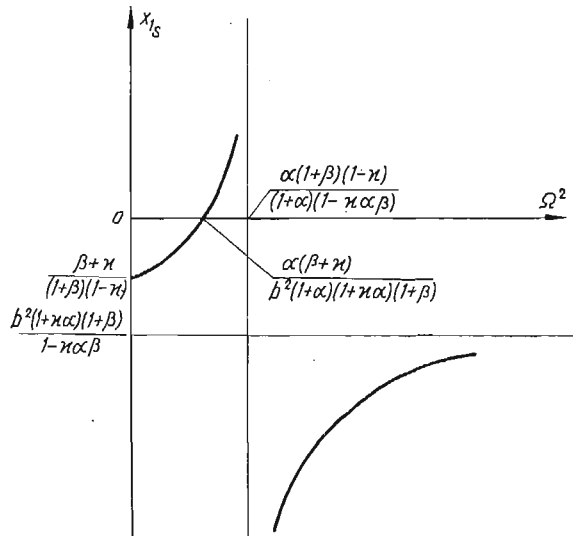
Niech teraz

$$(3.11) \quad \begin{aligned} R_1 &= b^2(1+\alpha)(1+\kappa\alpha)(1+\beta), & Q_1 &= \alpha(\beta+\kappa), \\ R_2 &= (1+\alpha)(1-\kappa\alpha\beta), & Q_2 &= \alpha(1+\beta)(1-\kappa). \end{aligned}$$

Wtedy zależność (3.10), określająca położenie na osi  $x$  środka obrotu  $S$  belki, przyjmie postać

$$(3.12) \quad x_{1s} = \frac{R_1 \Omega^2 - Q_1}{R_2 \Omega^2 - Q_2}$$

Zbadamy obecnie położenie punktu  $S$  w zależności od parametrów układu i częstotliwości wymuszeń.



Rys. 6

Biorąc pod uwagę różne kombinacje parametrów układu ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ ,  $b^2$ ) możemy wpływać na znak i wartość liczbową parametrów wtórnych opisanych zależnościami (3.11). Rozważania te w formie usystematyzowanej zawiera tablica 1, przy czym zawsze

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0.$$

Wykresy zależności  $x_{1s} = f(\Omega^2)$  określone przez (3.12) przedstawiono na rysunkach 6—28, przy czym  $x_{1s}$  i  $\Omega^2$  są wielkościami bezwymiarowymi — zgodnie z (2.4) i (2.11).

Ogólnie na wykresach otrzymujemy jedną lub dwie gałęzie hiperboli, przy czym punkty charakterystyczne wykresu, jak położenie asymptot, punkty zerowe ( $\Omega^2 = 0$  i  $x_{1s} = 0$ ), a także znak pierwszej pochodnej (funkcja  $x_{1s} = f(\Omega^2)$  rosnąca lub malejąca) zależą od

parametrów (3.11). Mając więc cztery parametry pierwotne:  $b^2$  (2.3),  $\alpha$  i  $\beta$  (3.4) oraz  $\kappa$  (3.1) możemy zmieniając je wpływać w określony sposób na przebieg funkcji (3.12).

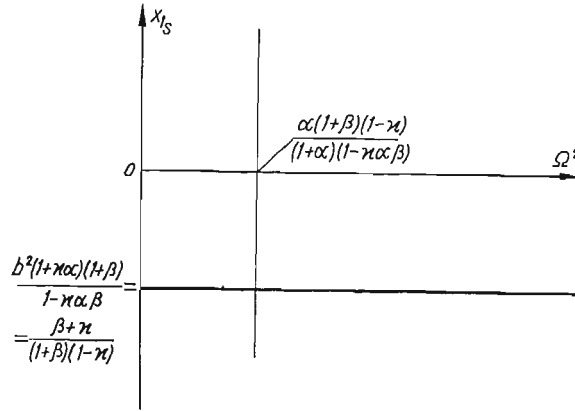
Poniżej omówiono dokładniej niektóre przypadki szczególne zależności (3.12) z uwagi na ich bardzo duże znaczenie, jeśli chodzi o zastosowania konstrukcyjne.

Tablica 1

Lp.	Wartości parametrów (3.11)				Wykresy funkcji $x_{1s} = f(\Omega^2)$ przedstawia Rysunek Nr:
$\kappa < 0 \Rightarrow R > 0, Q > 0$					
1	$-\infty < \kappa < 0$	$Q_1 < 0$	$R_1 < 0$	$R_1 Q_2 < R_2 Q_1$	6
2				$R_1 Q_2 = R_2 Q_1$	7
3				$R_1 Q_2 > R_2 Q_1$	8
4			$R_1 = 0$	9	
5			$R_1 > 0$	10	
6		$Q_1 = 0$	$R_1 < 0$	$R_1 = 0$	11
7			$R_1 = 0$	12	
8			$R_1 > 0$	13	
9			$Q_1 > 0$	$R_1 < 0$	14
10				$R_1 = 0$	15
$\kappa > 0 \Rightarrow R > 0, Q_1 > 0$					
11	$0 < \kappa \leq \infty$	$Q_2 < 0$	$R_2 < 0$	$R_1 Q_2 < R_2 Q_1$	16
12				$R_1 Q_2 = R_2 Q_1$	17
13				$R_1 Q_2 > R_2 Q_1$	18
14	$0 < \kappa < \infty$	$Q_2 < 0$	$R_2 = 0$	19	
15			$R_2 > 0$	20	
16		$Q_2 = 0$	$R_2 < 0$	21	
17			$R_2 = 0$	22	
18			$R_2 > 0$	23	
19			$Q_2 > 0$	$R_2 < 0$	24
20	$R_2 = 0$	25			
21	$-\infty < \kappa < \infty$	$R_1 > 0$ $R_2 > 0$	$Q_1 > 0$ $Q_2 > 0$	$R_1 Q_2 < R_2 Q_1$	26
22				$R_1 Q_2 = R_2 Q_1$	27
23				$R_1 Q_2 > R_2 Q_1$	28

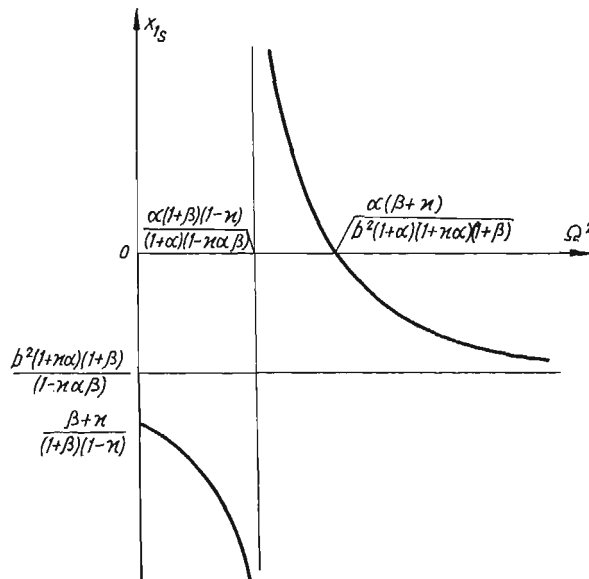
Następujące pozycje z tablicy 1 i odpowiadające im rysunki: poz. 2 (rys. 7), poz. 12 (rys. 17) i poz. 22 (rys. 27) stanowią przypadek, gdy położenie środka obrotu  $S$  nie zależy od wartości, jaką przybiera wymuszenie  $\Omega^2$  i jest wartością stałą ( $x_{1s} = \text{const}$ ). Zachodzi to wówczas, gdy  $R_1 Q_2 = R_2 Q_1$ .

Pozycje 6, 7 i 8 (tablica 1) dotyczą przypadku, gdy  $\kappa = -\beta$ , a jeśli ponadto zachodzi  $\kappa = -1/\alpha$ , czyli  $\alpha\beta = 1$ , otrzymujemy przypadek 7 (rys. 12), kiedy belka wykonuje ruch obrotowy wokół stałego punktu  $x_{1s} \equiv 0$ . Widzimy, że mamy tu znaną sytuację, gdy



Rys. 7

$k_2 l_2 = k_1 l_1$  — uwzględniając (3.4). Oznacza to, że jeśli chcemy, aby środek masy pozostawał w spoczynku niezależnie od częstości wymuszenia, należy wartości  $k_1$  i  $k_2$  dobrać odwrotnie proporcjonalnie do odległości punktów  $A$  i  $B$  ( $l_1$  i  $l_2$ ) od środka masy (układu).

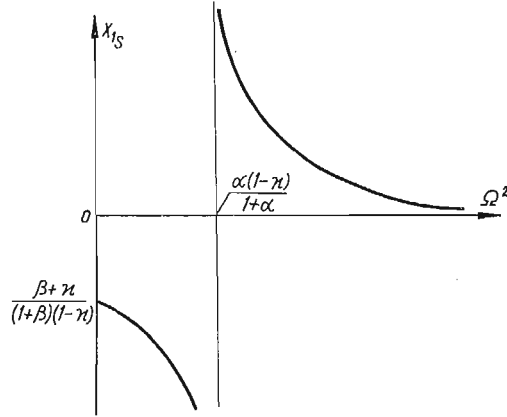


Rys. 8

Pozycja 4 (rys. 9) i 10 (rys. 15) opisują przypadek, gdy  $\kappa = -1/a$ , tj.  $\kappa = -k_1/k_2$ ; asymptota pozioma pokrywa się wtedy z osią  $\Omega^2$ , a odcięta asymptoty pionowej wynosi  $\alpha(1-\kappa)/(1+\alpha)$ . Widzimy więc, że przy  $\Omega^2$  rosnącym nieograniczenie środek obrotu  $S$

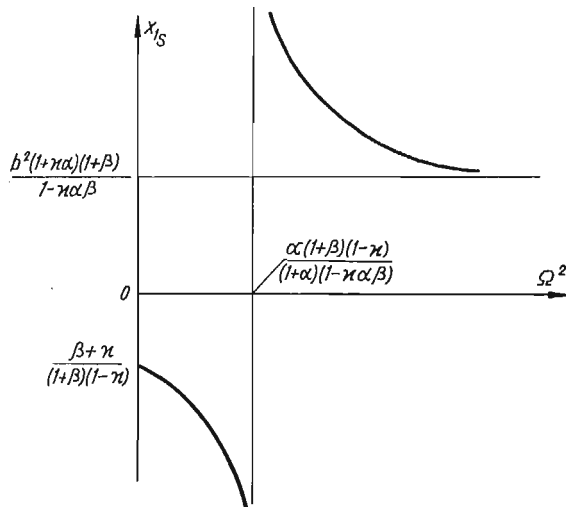
zbliża się asymptotycznie do środka masy. Rosnący lub malejący przebieg funkcji zależy od wartości  $\beta$ .

Pozycja 17 (rys. 22) opisuje przypadek szczególnie ważny z punktu widzenia konstrukcyjnego, mianowicie  $Q_2 = 0$ ,  $R_2 = 0$ , czyli  $\kappa = 1$ ,  $[(P_1(t) = P_2(t)]$  i ponadto  $\alpha = 1/\beta$ ,



Rys. 9

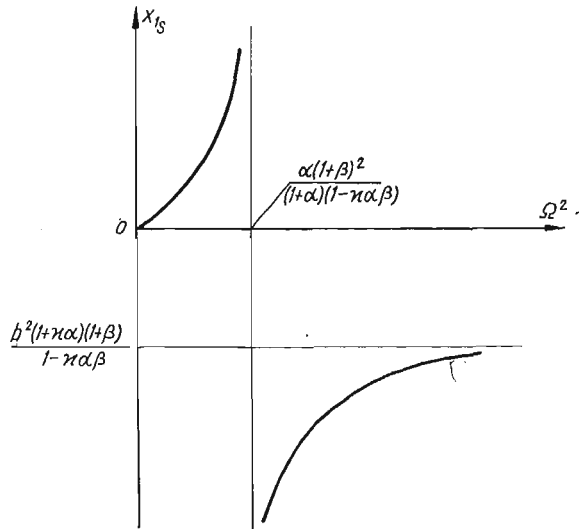
tj.  $k_2/k_1 = l_1/l_2$ . Oznacza to, że wszystkie punkty belki będą doznawały jednakowych przemieszczeń pionowych (punkt  $S$  jest punktem niewłaściwym) tylko wtedy (niezależnie od  $\Omega^2$ ), jeśli wymuszenia w punktach podparcia będą takie same, a sztywności łączników odwrotnie proporcjonalne do odległości punktów  $A$  i  $B$  ( $l_1$  i  $l_2$ ) od środka masy.



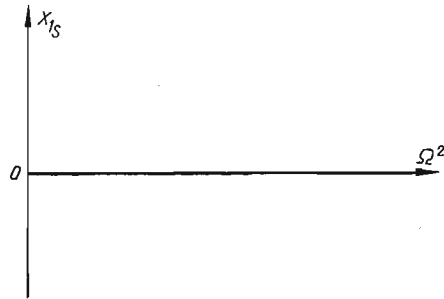
Rys. 10

Jeśli zachodzi jedynie warunek, że  $R_2 = 0$  (pozycja 14 (rys. 19) i 20 (rys. 25)), czyli  $\kappa\alpha\beta = 1$ , to otrzymujemy liniowy charakter  $x_{1S} = f(\Omega^2)$ , przy czym jeśli  $\Omega^2 \rightarrow \infty$ , to również  $x_{1S} \rightarrow \pm \infty$ .

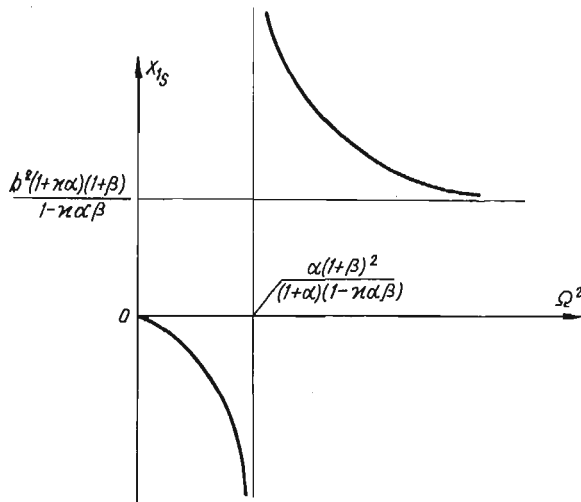




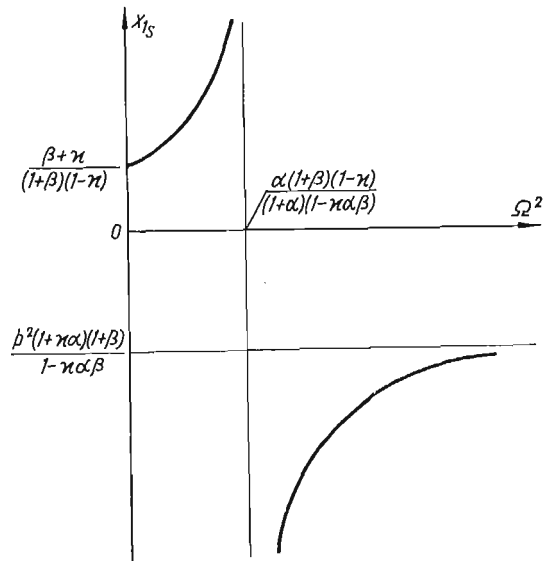
Rys. 11



Rys. 12

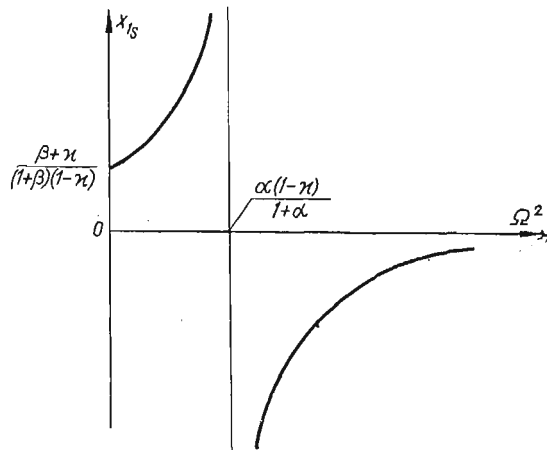


Rys. 13



Rys. 14

Pozycja 15 (Rys. 20) i 19 (Rys. 24) w Tablicy I zawiera przypadek, gdy zależność (3.12) nie posiada asymptoty pionowej, a asymptota pozioma ma wartość skończoną. Oznacza to, że powyżej pewnej umownej wartości  $\Omega^2$  można traktować środek obrotu  $S$  jako ustalony na osi  $x$ .

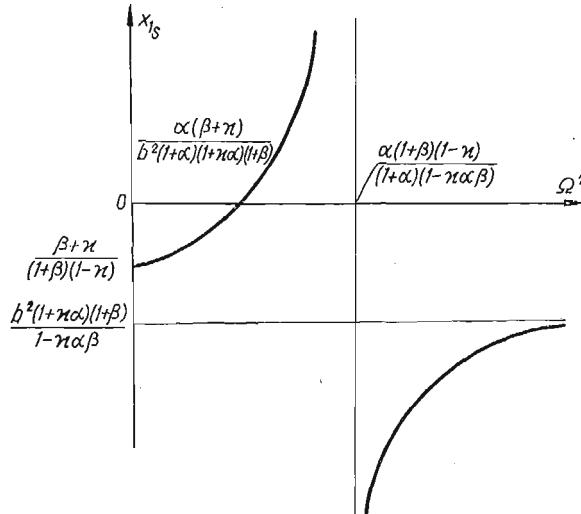


Rys. 15

Pozycja 16 (rys. 21) i 18 (rys. 23) zawiera przypadek, gdy istnieje — analogicznie jak wyżej — asymptota pozioma, natomiast asymptota pionowa istnieje i pokrywa się z osią  $x_{1S}$  (przechodzi przez  $O$ ), czyli  $\kappa = 1$ ,  $\alpha\beta \neq 1$ , ( $Q_2 = 0$ ,  $R_2 \neq 0$ ). Przy małej wartości  $\Omega^2$  belka

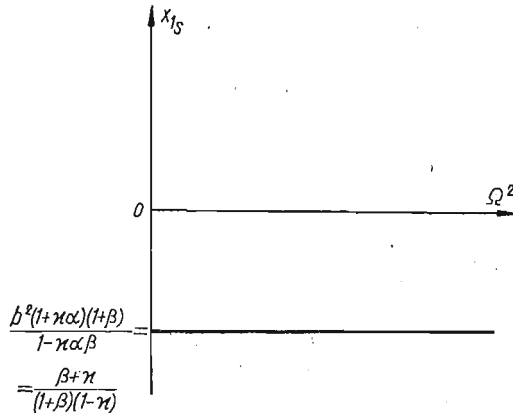
nie ma ruchu obrotowego, następnie wartość odciętej  $x_{1s}$  maleje bardzo szybko, przechodzi przez  $O$  i gdy  $\Omega^2 \rightarrow +\infty$ , to

$$x_{1s} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{b^2(1+\alpha)(1+\beta)}{1-\alpha\beta}$$



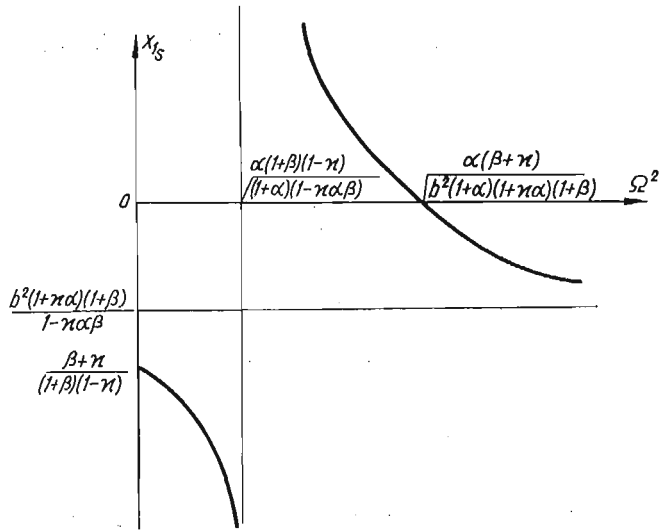
Rys. 16

Należy jeszcze podkreślić, że jedynie w dwóch wypadkach pozycja 6 (rys. 11) i pozycja 8 (rys. 13) przy  $x_{1s} = f(\Omega^2) \neq \text{const}$  wartość  $x_{1s}(0) = 0$ . Ponadto w żadnym z możliwych przypadków  $x_{1s}(0) \neq 0$ , co widać wyraźnie z usytuowania poziomych asymptot funkcji (3.12).

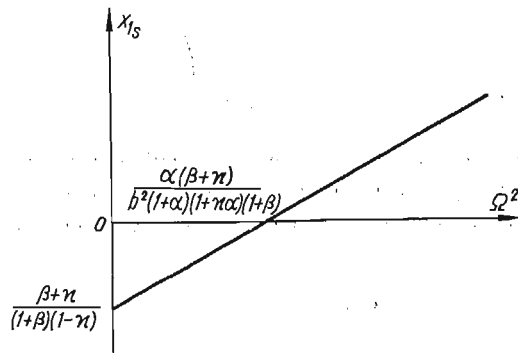


Rys. 17

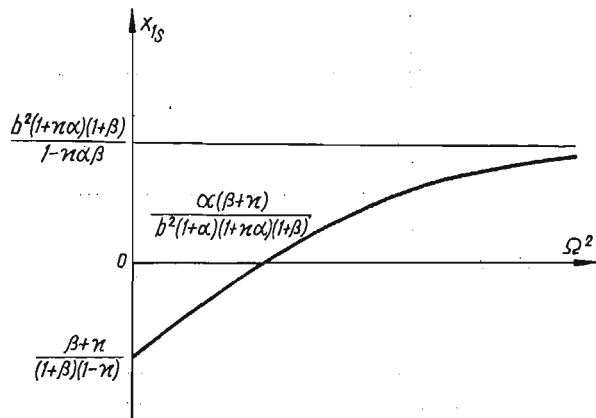
4. W przypadku projektowania układu sprężysto podpartego, który może być zmodelowany zgodnie z rys. 4 przy założonym środku masy, możemy posługiwać się zależnościami (3.11) i (3.12) dla wyznaczenia  $x_{1s}$  przy danej częstotliwości wymuszeń  $\Omega^2$  i  $\kappa$  (3.1). Otrzymujemy to, zakładając wartości  $k_1$  i  $k_2$  (określamy  $\alpha$ ), znając lub przyjmując  $l_1$  i  $l_2$  (okreś-



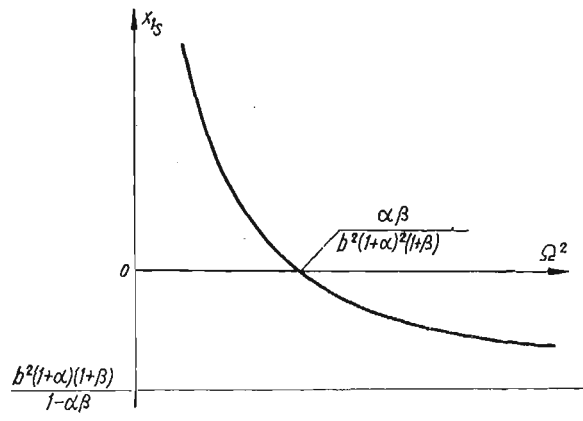
Rys. 18



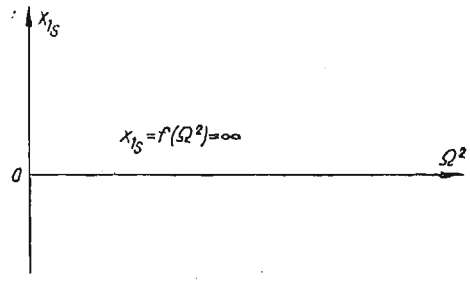
Rys. 19



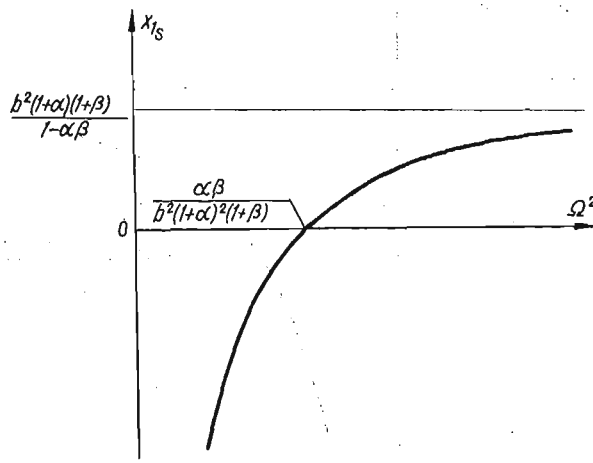
Rys. 20



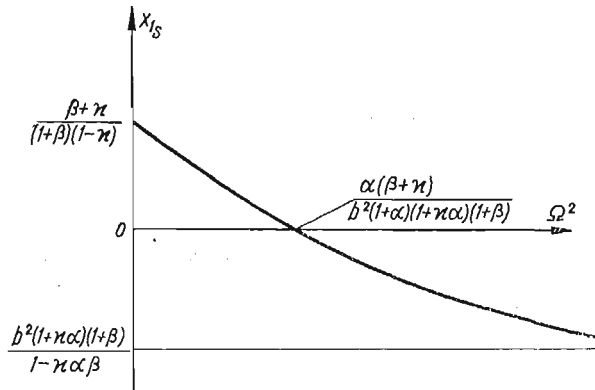
Rys. 21



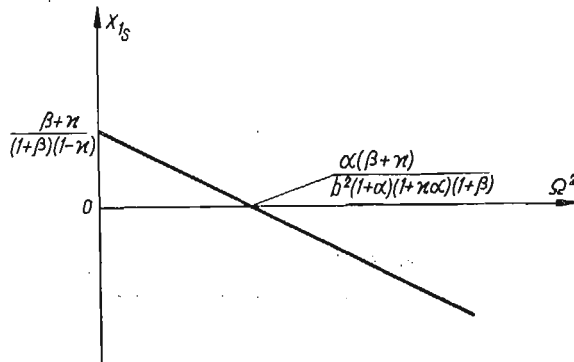
Rys. 22



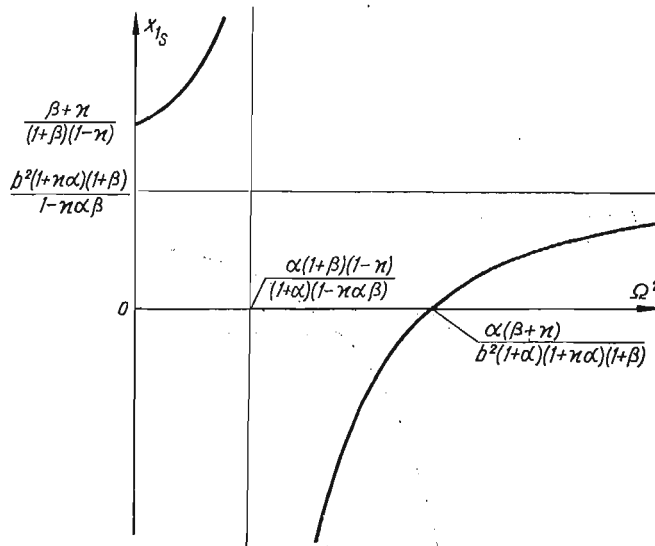
Rys. 23



Rys. 24



Rys. 25

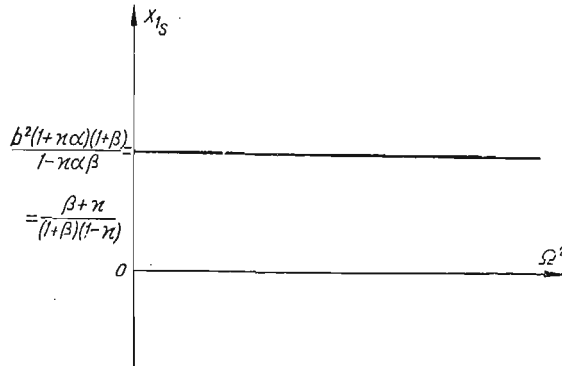


Rys. 26

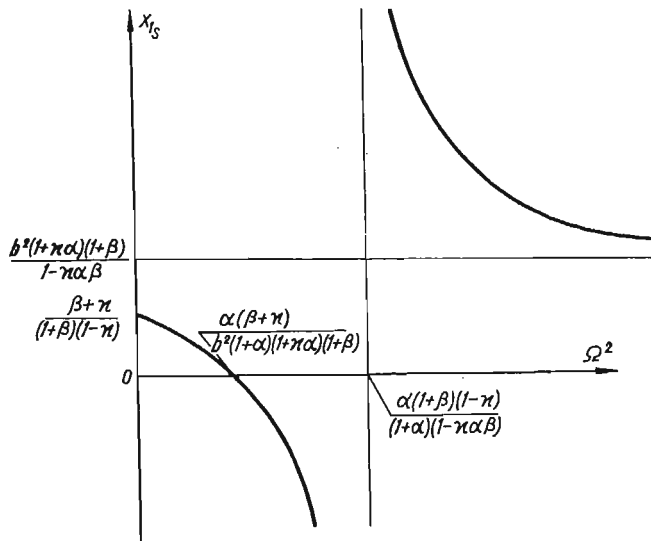
łamy  $\beta$ ), oraz promień bezwładności  $r$  (2.3) — mając wartość masy  $m$ . Znając  $x_{1s}$  na podstawie (2.11) i (2.4) określamy  $x_s$  — odległość środka obrotu  $S$  od środka masy (początku układu) i przemieszczenie dowolnego punktu  $X$  belki w kierunku pionowym z zależności (4.1)

$$y_X = (x_s + x_x)\vartheta.$$

W sytuacji, gdy prototyp konstrukcji wykaże znaczne odstępstwa, jeśli chodzi o przyjęte do obliczeń analitycznych wartości: masy  $m$ , położenia środka masy  $O$  (zmiana  $l_1$  i  $l_2$ ),



Rys. 27



Rys. 28

wartość momentu bezwładności  $J = mr^2$  — co powoduje zmianę współczynników  $\beta$  i  $b^2$  — należy w miarę możliwości dążyć do korekty konstrukcyjnej, (korekta  $\beta$  i  $b^2$ ), aby zapewnić spełnienie warunków (1.1) dla określonego punktu belki. O ile nie można dostatecznie polepszyć sytuacji drogą zmian konstrukcyjnych, gdyż często wymagałoby to wykonania nowego prototypu, należy operować współczynnikiem  $\alpha$  (czyli wartościami

$k_1$  i  $k_2$ ) tak, aby zależności (3.11) miały takie same wartości co przy obliczeniach teoretycznych, które zakładały spełnienie warunków (1.1). Tą drogą uzyskamy zachowanie się rzeczywistej konstrukcji zgodne z jej modelem obliczeniowym bez konieczności ponownego jego projektowania.

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. MARQUARD, *Schwingungsdynamik des schnellen Strassenfahrzeugs*, Verlag W. Girardet, Essen 1952
2. W. T. THOMSON, *Vibration Theory and Applications*, Prentice — Hall, Inc, N. J., 1965.

#### Резюме

#### СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ КАК „ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗОЛЯТОР” КОЛЕБАНИЙ

Проводится анализ поведения механической системы, моделью которой служит недеформируемая балка, с асимметрически расположенным центром массы опертая на двух упругих опорах различной жесткости. Система подвергается кинематическим вынуждениям гармонической силой, а амплитуда вынуждений является разной для обеих подпор.

В рассуждениях определяется положение центра поворота балки, в зависимости от параметров и частоты вынуждающей силы.

#### Summary

#### THE SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM AS A "DYNAMIC VIBRATOR ABSORBER"

Investigated is the behaviour of a mechanical system containing a rigid beam with asymmetrically located central point of mass supported on two elastic springs with different rigidities. The system is kinematically extorted to vibrate by an external harmonic force. The amplitude of vibration is different for both supports.

The location of the central point of rotation of the beam is analysed for various parameters of the system and frequency of extorting force.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lipca 1967 r.*



# BIULETYN INFORMACYJNY

## REFERAT ZBIORCZY, DOTYCZĄCY IV DZIAŁU SYMPOZJUM PTMTS POŚWIĘCONEGO REOLOGII (WROCŁAW 1966)

**1. Wstęp.** Przegląd dotyczy dziewięciu referatów poświęconych zjawiskom reologicznym w różnych materiałach, takich jak: tworzywa sztuczne, tworzywa sztuczne wzmocnione różnymi nośnikami tkaninowymi, grunty, stopy metali oraz wyidealizowane ciała lepkosprężyste. Omawiane prace ze względu na ich charakter z grubsza można podzielić na trzy grupy: 1. prace o charakterze teoretycznym, 2. prace o charakterze teoretyczno-doświadczalnym, 3. prace o charakterze doświadczalnym.

**2. Prace o charakterze teoretycznym.** Autorzy — Adam BOROWSKI i Zbigniew BYCHAWSKI w referacie pt. «Podstawowe własności nieliniowych ciał lepkosprężystych» przeprowadzają analizę podstawowych własności szczególnych rodzajów ciał lepkosprężystych o charakterystyce nieliniowej, które wynikają z ogólnych związków nieliniowej lepkosprężystości, przedstawionej we wcześniejszych pracach Z. Bychawskiego. Podstawowe założenia tej teorii są następujące: 1) materiał jest izotropowy, jednorodny, 2) materiał jest nieściśliwy, 3) własności reologiczne materiału charakteryzuje uogólniona funkcja pelzania, 4) nieliniowe pelzanie zachodzi, gdy intensywność naprężenia osiąga w małym obszarze ciała wartość krytyczną, 5) odkształcenie natychmiastowe zmienia się nieliniowo wraz z naprężeniem. W oparciu o powyższe założenia uogólniona zasada superpozycji została ujęta za pomocą całki Stieltjesa. Ostateczny związek pomiędzy składowymi tensora stanu odkształcenia  $e_{ij}$  i składowymi stanu naprężenia  $s_{ij}$  (dewiatora) otrzymano w postaci

$$e_{ij}(t) = F_e[s(t)]s_{ij}(t) - \int_{t^*}^t s_{ij}(\tau) \partial_\tau \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] d\tau,$$

gdzie  $F_e$  jest funkcją wyrażającą odkształcenie natychmiastowe,  $H$  uogólnioną funkcją pelzania,  $s$  intensywnością stanu naprężenia,  $t$  oznacza czas,  $t^*$  chwilę początkową.

Z dyskusji powyższego związku wynika, że sformułowana teoria jest dość ogólna; zawiera ona m. in. prawo ODQVISTA dla stanu nieustalonego pelzania metali. W pracy autorzy ograniczają się do zagadnień jednowymiarowych i w tym ujęciu badają zjawiska pelzania i relaksacji, podają związki dla tych procesów oraz graficzne przedstawienie ich przebiegów. Przedstawiono również energetyczną interpretację nieliniowości. Szkoda, że w pracy nie ma podanej konfrontacji otrzymanych związków na drodze teoretycznej z wynikami badań doświadczalnych.

Włodzimierz DERSKI w pracy «O zastosowaniu dualnych równań całkowych w zagadnieniach teorii konsolidacji z mieszanymi warunkami brzegowymi» swoje rozważania przeprowadza w oparciu o liniową teorię konsolidacji porowatych sprężystych ośrodków sformułowaną przez M. BIOTA. Teoria ta prowadzi do sprzężonego układu różniczkowych równań cząstkowych drugiego rzędu. BIOT w swoich rozważaniach ograniczył się do porowatych ośrodków nieściśliwych. W. DERSKI podjął ten temat z pominięciem powyższego ograniczenia. W przedstawionej pracy autor podjął próbę zbudowania rozwiązania mieszanego zagadnienia brzegowego teorii konsolidacji. Autor korzysta z równania przemieszczeniowego:

$$N \nabla^2 u_i + (M + N) \varepsilon_{si} = - \frac{H}{R} \sigma_{si}$$

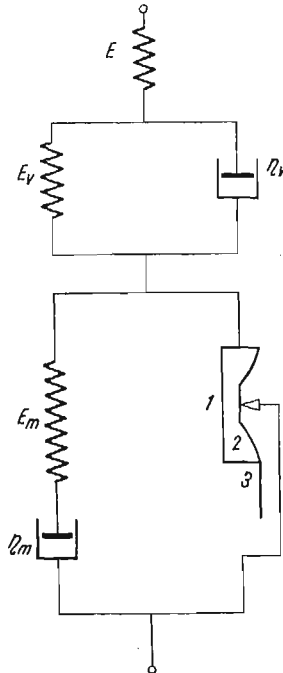
oraz równania dyfuzji

$$C\nabla^2\sigma = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon}, \quad H = Q + R, \quad (\dot{\phantom{x}}) = \frac{\partial}{\partial t}$$

Dyskusję rozwiązania tego układu równań autor przeprowadził we wcześniejszej pracy. Dalej autor wykorzystując rozwiązanie powyższych równań rozpatruje półprzestrzeń konsolidującą pod obciążeniem przyłożonym za pośrednictwem nieodkształcalnego stempla kołowego do jej powierzchni ograniczającej. Jest to zadanie ważne dla praktyki inżynierskiej, gdyż może opisywać jakościowo osiadanie kołowej płyty fundamentowej osadzonej na podłożu konsolidującym. W omawianej pracy autor nie otrzymał rozwiązania zagadnienia, a tylko naszkicował metodę dualnych równań całkowych, która według niego najszybciej prowadzi do celu.

Włodzimierz PARZONKA «Metoda analizy zakresu pomiarowego wiskozymetru typu Couette'a dla ciał Bingham». Autor w kilku poprzednich pracach zajmował się wyznaczaniem reologicznych charakterystyk homogenicznych mieszanin gruntowowodnych, dla których wykazał, że optymalnym modelem reologicznym opisującym ich zachowanie się jest model Bingham. W pracy autor przedstawił metodę analizy zakresu pomiarowego wiskozymetru typu Couette'a dla ciał Bingham.

**3. Prace o charakterze teoretyczno-doświadczalnym.** Anatol JAKOWLUK, Stefan ZIEMBA «Pewien nieliniowy model reologiczny». Na przykładzie przeprowadzonych badań doświadczalnych na stopie aluminium Al-Mg-Si (PA4), dotyczących podstawowych własności mechanicznych w różnych temperatu-



Rys. 1. Model reologiczny

rach oraz zjawiska pełzania, autorzy przeanalizowali oraz zaproponowali nieliniowy model reologiczny. Model składa się z trójparametrowej części liniowej oraz włączonej szeregowo części nieliniowej. Część nieliniowa zawiera trzy powierzchnie tarcia suchego: 1 — płaszczyznę realizującą suche tarcie w chwili obciążenia, 2 — cylindryczną powierzchnię zakrzywioną tarcia suchego pozwalającą opisać pierwszy okres pełzania (umocnienia), 3 — płaszczyznę tarcia suchego pozwalającą opisać okres pełzania ustalonego. W pracy podano reologiczne równanie stanu dla poszczególnych okresów pełzania. Zaproponowany model jest dość ogólny i może być wykorzystany do opisu własności reologicznych dość dużego wachlarza tworzyw.

Wiktor BABUŁ, Stefan ZIEMBA «Pewne aspekty modelu przebiecia ładunkami kumulacyjnymi». Praca składa się z dwóch zasadniczych części. W pierwszej części omówiono istniejące dotychczas hipotezy przebiecia; w drugiej podano wyniki własnych poszukiwań nad ustaleniem modelu przebiecia. W pierwszej części omówiono następujące teorie: 1) cieplne, 2) hydromechaniczno-cieplne, 3) mechaniczne, 4) hydromechaniczne, 5) hydromechaniczne uzupełnione, 6) falowe.

W części dotyczącej własnych poszukiwań modelu przebiecia przedstawiono następujące wyniki badań, służące temu celowi: 1) badania bilansu ciężarowego próbek poddanych działaniu strumienia kumulacyjnego, 2) badania rozkładu przemieszczeń materiału pod wpływem działania strumienia kumulacyjnego, 3) pomiary rozkładu twardości w badanych próbkach, 4) badania metalograficzne. W końcu pracy zamieszczono obszerną analizę wyników badań objaśniających model przebiecia.

Barbara BIREK «O kształcie powierzchni podłoża lepkosprężystego w otoczeniu obszaru styku toczonej się sztywnej kuli z podstawą reprezentowaną modelem Voigta i modelem Voigta połączonym szeregowo ze sprężyną». Przedstawiona praca nawiązuje do prac BUCHEA i FLOMA z r. 1959; autorzy ci na podstawie przybliżonej teorii tarcia przy toczeniu przewidzieli, że obszar kontaktu sztywnej kuli toczonej się po sprężysto-lepkim podłożu nie będzie kołowy. Materiał w obszarze powstawania kontaktu jest ściskany, przy czym naprężenia narastają od zera do pewnej maksymalnej wartości, a następnie maleją dążąc do zera w miejscu, gdzie kula traci kontakt z podłożem. Okazuje się przy tym, że strefa kontaktu przyjmuje postać podobną do księżycy między pełnią i pierwszą kwadrą. Zjawiska te zostały potwierdzone w pracach doświadczalnych J. HALAUNBRENNER (1965). W tej ostatniej pracy zaobserwowano powstawanie szczeliny powietrznej za toczącą się kulą — między kulą a podłożem.

W pracy przeprowadzono przybliżone obliczenie szerokości wspomnianej szczeliny powietrznej przyjmując do obliczeń modele reologiczne Voigta i Voigta z dołączoną sprężyną. Przeprowadzono również obserwacje eksperymentalne (metodą interferencyjną) szczeliny powietrznej dokola strefy kontaktu toczonej się kuli szklanej po podłożu z żywicy epoksydowej. W końcu pracy przedstawiono w postaci wykresu konfrontację wyników obliczeń i pomiaru.

Marian WARSZYŃSKI, Prokop ŚRODA «Zjawiska reologiczne w przypadku elementów pracujących w warunkach nacisków stykowych wielokrotnie powtarzalnych». W referacie autorzy podjęli zagadnienie pelzania i żywotności elementów poddanych wielokrotnie powtarzalnym obciążeniom kontaktowym. W pracy przedstawiono wyniki badań: a) zmiany średnicy próbek stalowych o średnicy 20 mm wykonanych ze stali 10 i stali 35 współpracujących z trzema krążkami hartowanymi o średnicy 37 mm; b) zmiany szerokości odkształceń plastycznych na krążku walcowym współpracującym z krążkiem hartowanym zakręglonym.

Wyniki badań przedstawiono w postaci krzywych pelzania w zależności od liczby cykli. Krzywe pelzania skonfrontowano z krzywymi teoretycznymi, które otrzymano ze wzoru wyprowadzonego w oparciu o bilans energii rozpraszanej po  $N$  cyklach i energii rozproszonej w ciągu jednego cyklu niszczącego próbkę w oparciu o hipotezy energetyczne zmęczenia, zaproponowane przez ODINGA (IWANOWĄ, M. ZAKRZEWSKIEGO i innych). We wzorze uwzględniono nieliniowość wiążącą ją ze zmianą pętli histerezy po każdym cyklu. Wykorzystano wzory Hertza na naprężenia kontaktowe. W wyniku przeprowadzonych badań autorzy dochodzą do wniosku, że 1) zagadnienia stykowe można rozpatrywać w powiązaniu z rozpraszaniem energii; 2) powtarzane wielokrotnie odkształcenia plastyczne zachodzące w strefie styku dwóch powierzchni obrotowych może być opisane krzywą pelzania; 3) w oparciu o krzywą rozciągania i krzywą odkształceń plastycznych stykowych (pelzania powierzchniowego) uzyskaną w jednej próbie, można wyznaczyć stykową wytrzymałość zmęczeniową.

**4. Prace o charakterze doświadczalnym.** Jan BROŚ «Metody określania własności mechanicznych niektórych nowych tworzyw konstrukcyjnych». Praca dotyczy metodyki określania i wyznaczania własności mechanicznych takich, jak granica wytrzymałości  $R_m$ , umowna granica sprężystości i plastyczności, moduł sprężystości  $E$  (dla linii obciążenia —  $E_e$ , sieczny —  $E_s$ , styczn —  $E_t$ , moduł zerowy —  $E_0$ ), współczynnik Poissona. Autor przeprowadził badania na tworzywach sztucznych wzmocnionych różnymi nośnikami tkaninowymi z bawełny i szkła stosując tensometry oporowe. W konkluzji autor podaje następujące uwagi: 1) własności mechaniczne tworzyw sztucznych wzmocnionych zależą nie tylko od rodzaju nośnika i jego usytuowania ale także od materiału wyjściowego (pręty, płyty); 2) tworzywa wzmocnione tkaniną bawełnianą wykazują większe odkształcenia pod obciążeniem aniżeli tworzywa wzmocnione tkaniną szklaną;

3) tworzywa fenolowe i epoksydowe wzmocnione tkaniną zarówno bawełnianą, jak i szklaną wykazują stosunkowo korzystne własności mechaniczne i mogą być stosowane do produkcji wielu części maszyn; 4) przyjęte metody badań mogą być stosowane do wyznaczania własności mechanicznych wzmocnionych tworzyw termo- i chemoutwardzalnych.

Zbigniew LISSOWSKI «Metoda określania deformacji plastycznej tworzyw przy badaniu ich przydatności na łożyska ślizgowe». Autor zajmuje się wyznaczaniem udziału odkształcenia plastycznego w całkowitym ubytku liniowym próbek badanych na zużycie przez tarcie. Udział ten wyliczany jest za pomocą wzoru

$$\Delta S_z = \frac{\Delta S - \Delta S_m}{\Delta S} 100\%,$$

gdzie  $\Delta S$  oznacza całkowity ubytek liniowy (zmiana grubości),  $\Delta S_m$  część liniowego ubytku próbki wywołaną ubytkiem masy. W pracy przytoczono przykład wyznaczania równania krzywej udziału odkształcenia plastycznego  $\Delta S_z$  w zależności od nacisku  $p$ .

*Stefan Ziemia, Warszawa*

#### DZIEWIĄTY BRYTYJSKI KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ. GLASGOW. 10-13 KWIECIEŃ 1967

Od 1959 roku odbywają się w Wielkiej Brytanii doroczne Kongresy Mechaniki Teoretycznej; pierwszy z nich został zorganizowany przez uniwersytet w Manchester. Samo pojęcie «mechaniki teoretycznej» rozumiane jest nieco inaczej niż w Polsce: zalicza się tu nie tylko mechanikę ciał sztywnych, ale przede wszystkim mechanikę płynów, a także mechanikę ciał stałych odkształcalnych, jednak w przeciwieństwie do mechaniki stosowanej chodzi tu raczej o podejście uniwersyteckie, a nie inżynierskie. Zastosowania traktowane są raczej drugorzędnie. Takie podejście zawęży znacznie tematykę kongresu i zmniejszy liczbę uczestników.

Tegoroczny IX Brytyjski Kongres Mechaniki Teoretycznej odbył się w Glasgow w dniach 10–13.4.1967. Udział wzięło niemal 300 uczestników reprezentujących 31 brytyjskich uniwersytetów i 11 instytutów naukowo-badawczych i przemysłowych. Liczba uniwersytetów w Wielkiej Brytanii jest istotnie imponująca: obok tak znanych, jak Oxford, Cambridge czy Londyn, były reprezentowane niemal całkowicie w Polsce, nieznanne, jak np. University of Exeter, czy University of Technology, Loughborough. Nasuwa się tu marginesowa uwaga, czy tak znaczne rozdrobnienie badań naukowych jest celowe: w Wielkiej Brytanii występuje chyba największe na świecie zagęszczenie uniwersytetów, około 40 uniwersytetów na obszarze mniejszym od Polski (243 tys. km<sup>2</sup>), przy czym profil niemal wszystkich uniwersytetów jest bardzo szeroki. Udział gości zagranicznych był bardzo skromny, 8 osób: 3 z Australii (dr V. T. BUCHWALD, Sydney; dr J. C. BARTON, Melbourne; dr I. R. WOOD, Sydney), 2 z USA (prof. J. B. KELLER, New York; H. E. WILLIAMS, Office of U. S. Navy Research), i po jednej z ZSRR (dr T. B. JANOVSKAJA, Leningrad), z Irlandii (prof. J. N. FLAVIN, Galway) i z Polski (prof. M. ŻYCKOWSKI, Kraków). Należy przy tym podkreślić, iż cztery z nich przebywały w Wielkiej Brytanii na długoterminowych stażach lub kontraktach (z Australii i ZSRR). Nie było obecnych wielu znanych naukowców brytyjskich z dziedziny mechaniki, którzy widocznie sądzili, iż profil kongresu jest zbyt jednostronny lub w ogóle zbyt oddalony od zastosowań inżynierskich.

Kongres rozpoczął się w poniedziałek 10.4.67 po południu referatem przeglądowym prof. M. B. GLAUERTA (University of East Anglia, Norwich) «Warstwy przyścienne w magnetohydrodynamicie». Ponadto wygłoszono jeszcze dwa referaty przeglądowe przygotowane na specjalne zamówienie organizatorów: prof. J. B. KELLER (New York University), «Fale przypadkowe i równania stochastyczne» oraz prof. A. J. M. SPENCER (University of Nottingham), «Skonieczone odkształcenia sprężyste — przegląd dotychczasowego dorobku i perspektywy na przyszłość». Referaty przeglądowe trwały dokładnie godzinę i nie były poddawane dyskusji. Wszystkie zostały wygłoszone w sposób bardzo interesujący, ze sporą dozą humoru w angielskim stylu.

Ponadto wygłoszono ogółem 52 referaty sekcyjne, mianowicie 17 z zakresu mechaniki ciał stałych oraz 35 z mechaniki płynów. Tematyka referatów była dość specyficzna. Tak np. z zakresu ciał stałych aż 8 refe-

ratów dotyczyło zagadnień fal sprężystych, w szczególności nieliniowych, po 2 referaty z teorii plastyczności i z teorii ośrodków wielofazowych oraz po jednym referacie z teorii sprężystości, termosprężystości, kształtowania, zagadnień stykowych z przyczepnością oraz zmęczenia materiałów. Z zakresu mechaniki płynów przeważały przepływy cieczy lepkich (15 referatów) i magnetohydrodynamika (8 referatów). Obrady odbywały się w trzech sekcjach — jedna sekcja mechaniki ciał stałych i dwie sekcje mechaniki płynów. Uczestnicy zagraniczni — obok wspomnianego już referatu przeglądowego prof. KELLERA — wygłosili trzy referaty sekcyjne, mianowicie «Rozprzestrzenianie się fal Kelvina w pobliżu prostopadłościennego naroża» (V. T. BUCHWALD), «Oszacowanie sztywności skręcania prętów anizotropowych» (J. N. FLAVIN) oraz «Kształtowanie zamkniętych cienkościennych przekrojów belek przy uwzględnieniu warunków stateczności ścianek» (M. ŻYCKOWSKI). Największe zainteresowanie wzbudził referat prof. M. J. LIGHTHILLA, który ostatnio utworzył specjalną grupę badawczą w ramach Imperial College w Londynie, «Ruch czerwonych ciałek krwi w naczyniach włoskowatych».

Oprócz referatów przeglądowych i referatów sekcyjnych zorganizowano pięć specjalnych dyskusji, w pięciu równoległych sekcjach. Dotyczyły one następujących problemów: teoria dyfrakcji (przewodniczący: prof. W. E. WILLIAMS, Surrey), nieliniowe fale sprężyste (przewodniczący: prof. W. D. COLLINS, Strathclyde, Glasgow), metody numeryczne w mechanice płynów (przewodniczący: prof. D. S. BUTLER, Strathclyde, Glasgow), przepływy strumieniowe (przewodniczący: prof. D. C. PACK, Strathclyde, Glasgow), oraz mieszaniny wielofazowe (przewodniczący: prof. A. E. GREEN, Newcastle).

Obrady zakończyły się we czwartek, 13.4.67, przed południem, bez jakiegokolwiek uroczystego zamknięcia. Następny, dziesiąty, jubileuszowy brytyjski kongres mechaniki odbędzie się w 1968 roku w Oxfordzie i ma być wyrazem hołdu dla przechodzącego na emeryturę profesora G. TEMPLE.

*Michał Życzkowski, Kraków*

P L A N P R A C Y  
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ  
NA ROK 1968

W dniu 18 grudnia 1967 odbyło się plenum Zarządu Głównego PTMTS, na którym dyskutowany był m.in. plan pracy Towarzystwa na rok 1968.

Oto najważniejsze szczegóły dotyczące planowanej działalności naukowej, wydawniczej i organizacyjnej.

### 1. Działalność naukowa

Formy działalności naukowej — poza wydawniczą — obejmują sympozja, seminaria, kursy wraz z wykładami popularyzatorskimi, zebrań naukowe oraz akcję konkursową.

**Sympozja**, będące pewnego rodzaju podsumowaniem, w skali krajowej, dorobku w określonych dziedzinach mechaniki, zostały zaplanowane przez następujące Oddziały:

Oddział w Gliwicach — konwersatorium pt.: „Zagadnienia optymalizacji w mechanice”, z udziałem ok. 70 uczestników,

Oddział w Krakowie — II Sympozjum na temat „Techniki wibracyjnej”, z udziałem ok. 120 uczestników,

Oddział w Poznaniu — Sympozjum na temat „Drgań nieliniowych”.

**Seminaria** będą prowadzone przez Oddziały:

Oddział w Gdańsku — n.t. „Teoria równań różniczkowych cząstkowych w zagadnieniach mechaniki”

Oddział w Warszawie — nt. „Drgań nieliniowych” z comiesięcznymi zabraniami (w sumie przewiduje się 8 zebrań)

Oddział we Wrocławiu — n.t. „Rachunek tensorowy w zastosowaniu do teorii powłok”.

**Kursy** przewidywane są następujące:

Oddział w Gdańsku — „Metody probabilistyczne w mechanice”

Oddział w Poznaniu — „Transformacje całkowe w zastosowaniu do termosprężystości”.

Ponadto Oddział w Gdańsku planuje prowadzenie wykładów popularyzatorskich (bliższe szczegóły zostaną później ustalone). Oddział w Łodzi planuje zebrań naukowe.

**Konkursy.** W sprawie konkursów były zgłaszane różne propozycje przez poszczególne Oddziały. Jednakże dotychczasowe doświadczenia wykazują, że zbytne rozproszenie konkursów prowadzi do obniżenia zainteresowania nimi i liczby prac wpływających zbyt małej, by można przeprowadzić istotną eliminację. Aby podnieść rangę konkursów, Zarząd postanowił ograniczyć ich liczbę do dwóch w ciągu roku (jeden w zakresie prac teoretycznych, drugi — doświadczalnych) z równoczesnym wydatnym podniesieniem wysokości nagród. Nie obejmuje to konkursów regionalnych finansowanych poza budżetem PTMTS. Taki niezależny konkurs planuje Oddział w Gliwicach.

### 2. Akcja wydawnicza

Podstawowym organem PTMTS pozostaje kwartalnik „Mechanika Teoretyczna i Stosowana”. Numer trzeci „Mechaniki” zostanie poświęcony, jako jubileuszowy, w związku z 10-leciem Towarzystwa, referatom i materiałom zjazdowym. W dyskusji poruszono sprawę ożywienia czasopisma i zwiększenia jego atrakcyjności przez częstsze zamieszczanie prac syntetyczno-przeładowych w zakresie poszczególnych dyscyplin, kierunków i problemów naukowych, przez zamieszczanie głosów dyskusyjnych i w ogóle pobudzanie dyskusji naukowej oraz przez rozbudowę działu informacyjnego z życia Towarzystwa oraz życia naukowego w zakresie krajowym i międzynarodowym (w szczególności stowarzyszeń w zakresie mechaniki), a także przez zamieszczanie recenzji krytycznych ciekawszych pozycji książkowych.

Poszczególne Oddziały planują oddzielne wydanie materiałów związanych z przygotowywanymi sympozjami:

Oddział w Gliwicach n.t. „Zagadnienia optymalizacji w mechanice”,

Oddział w Krakowie n.t. „Techniki wibracyjnej”,

Oddział w Poznaniu n.t. „Drgań nieliniowych”.

### 3. Działalność organizacyjna

Planuje się ogólny wzrost liczby członków Towarzystwa z 459 w roku 1967 do ok. 500 na koniec roku 1968. Planowana liczba zebrań organizacyjnych wynosi 80, zebrań naukowych — 67. Poszczególne Oddziały planują współpracę z organizacjami technicznymi NOT, kołami racjonalizatorskimi, itp.

*(C. Eimer)*





**DZIESIĘCIOLECIE POLSKIEGO TOWARZYSTWA**  
**MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ**

W roku 1968 minie dziesięć lat od Zjazdu Członków Założycieli, który powołał do życia Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Z tej okazji w dniach 8 i 9 listopada 1968 roku odbędzie się w Warszawie uroczysty Zjazd wszystkich Członków Towarzystwa.

Program Zjazdu przewiduje m.in. wygłoszenie referatów na temat osiągnięć polskich w ubiegłym dziesięcioleciu w zakresie teorii sprężystości, teorii plastyczności, reologii, mechaniki układów dyskretnych mechaniki płynów i termodynamiki.

Bliższe informacje o programie i warunkach uczestnictwa w Zjeździe Jubileuszowym zostaną podane w późniejszym terminie.

## Spis treści zeszytu 2/68

- B. BIENIASZ, Rozkłady temperatury na powierzchni chłodzonej poddanej działaniu ruchomych źródeł ciepła w zastosowaniu do procesów obróbki skrawaniem  
Распределение температуры на охлаждаемой поверхности под действием подвижных источников тепла, в применении к процессам обработки резанием  
Distribution of temperature on the cooled surface subjected to the action of moving heat sources in machining processes
- W. GOGÓŁ, Efekt Jacq'a  
Эффект Жака  
The Jacq's effect
- M. TALL, Eksperymentalny sposób wyznaczania współczynnika restytucji pracującej maszyny wibrowuderzeniowej  
Экспериментальный способ определения коэффициента восстановления скорости для работающего вибротолката  
Experimental method of estimation of the coefficient of restitution for a vibratory-impact mechanisms
- M. A. GLIŃSKA, L. ŁUKASZEWSKA, J. ODERFELD, E. PLESZCZYŃSKA, Ocena największych naprężeń w wieńcu łopatek  
Оценка максимальных напряжений в лопаточном венце  
Estimation of maximum stresses in turbine blades
- W. ŁUCJANEK, Laboratoryjne metody pomiaru pochodnych aerodynamicznych  
Лабораторные методы измерения аэродинамических производных  
Laboratory methods of the measurements of aerodynamic derivatives
- B. JANCLEWICZ, Badania wpływu zgniotu wprowadzonego w obszarze koncentracji naprężeń na trwałość zmęczeniową duralowej konstrukcji z karbem  
Исследование влияния локальной пластической деформации, вызванной в районе концентрации напряжений, на усталостную долговечность конструкции из алюминий-нииевого сплава с надрезом  
Investigations of influence of local plastic strain induced in stress concentration region on fatigue life of aluminium alloy notched structure
- Biuletyn Informacyjny

Cena zł 30.—

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

---