

711720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA**

KWARTALNIK

TOM 5 • ZESZYT 4



Pw

WARSZAWA 1967

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

- B. DUSZCZYK, Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym 401
 Устойчивость сплошного цилиндра под действием гидростатического давления
 Stability of a full circular cylinder loaded with hydrostatic pressure
- A. KOWAŁSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa w przypadku niekonserwatywnych zagadnień stateczności sprężystej 411
 Условие безопасности по напряжениям в неконсервативных задачах упругой устойчивости
 Stress criterion of safety for non-conservative problems of elastic stability
- J. KŁEPAČZKO, Urządzenie do dynamicznego skręcania 425
 Устройство для динамических испытаний на кручение
 Impact torsion test apparatus
- E. KAŚKI, Quasi-statyczne termnaprężenia w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny i oddającym ciepło przez konwekcję 439
 Термические нестационарные напряжения в брусе с прямоугольным сечением проводящим электрический ток и отдающим тепло через поверхность
 Quasi-static thermal stresses in a bar of rectangular cross-section conducting electric current and exchanging heat by convection
- Z. ENGEL, Badania synchronizacji i samosynchronizacji wibratorów mechanicznych 451
 Исследование синхронизации и автосинхронизации механических вибраторов
 Investigations of synchronization and selfsynchronization of mechanical vibrators
- J. ORKISZ, Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego 463
 Применение теории пластического течения для анализа конечных деформаций гибких осесимметрических оболочек вращения
 Finite deformations of flexible axially symmetric membrane shells in the light of the theory of plastic flow

Biuletyn Informacyjny

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 5 • Z E S Z Y T 4



W A R S Z A W A 1 9 6 7
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*
z

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN — PRZEWODNICZĄCY
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM
MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH
(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)
· STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE)
WACŁAW OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN
PIĄTEK (GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR CZESŁAW
EIMER · JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKO-
ŁOWSKI · WOJCIECH SZCZEPIŃSKI

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (568+132) egz. Arkuszy wydawn. 8,5. Arkuszy drukarskich 6,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 25.VII.1967 r., druk ukończono w grudniu 1967 r. Cena zł 30.—

Zam. 1272/67 T-73. Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

STATECZNOŚĆ PEŁNEGO WALCA OBCIĄŻONEGO CIŚNIENIEM HYDROSTATYCZNYM

BERNARD DUSZCZYK (WARSZAWA)

W pracy niniejszej rozważa się stateczność walca pełnego poddanego skończonej deformacji opierając się na teorii małych dodatkowych odkształceń, opracowanej przez A. E. GREENA, R. S. RIVLINA i R. T. SHIELDSA [1]. Jako kryterium utraty stateczności (por. [2, 3]) przyjęto osiągnięcie przez odkształcane ciało takiego stanu, w którym problem brzegowy nałożenia małych dodatkowych deformacji ma rozwiązanie niejednoznaczne. Rozważania prowadzone są w zasadzie w sposób podobny do rozważań zawartych w pracy Z. WESOŁOWSKIEGO [3], dotyczących zagadnienia stateczności pełnej kuli.

1. Wstępny stan deformacji

Rozważać będziemy walec zbudowany z materiału hipersprężystego, ściśliwego, jednorodnego i izotropowego, o najzupełniej ogólnej charakterystyce fizycznej. Przyjmujemy, że przed deformacją (stan \mathring{B}) promień walca jest równy \mathring{a} oraz długość \mathring{l} . Pod wpływem obciążenia zewnętrznego (ciśnienia hydrostatycznego) walec doznaje skończonej deformacji przechodząc w stan B , w którym promień i wysokość są odpowiednio $\mathring{a} = \mu a$ i $l = \lambda \mathring{l}$.

Przyjmijmy teraz w B walcowy układ współrzędnych (r, ϑ, z) , odkształcany wraz z ciałem. Oznaczając przez \mathring{x}_k i x_k odpowiednio współrzędne kartezjańskie punktu \mathring{P} w stanie \mathring{B} i odpowiadającego mu punktu P w stanie B mamy

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos \vartheta, & x_2 &= r \sin \vartheta, & x_3 &= z, \\ \mathring{x}_1 &= \frac{r}{\mu} \cos \vartheta, & \mathring{x}_2 &= \frac{r}{\mu} \sin \vartheta, & \mathring{x}_3 &= \frac{z}{\lambda}; \end{aligned}$$

a stąd

$$(1.2) \quad \mathring{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad \mathring{g}^{ij} = \begin{bmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \mathring{g} = \frac{r^2}{\lambda^2 \mu^2};$$

$$(1.3) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = r^2;$$

$$(1.4) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \text{ dla pozostałych } i, j, k;$$

$$(1.5) \quad I_1 = \dot{g}^{rs}g_{rs} = 2\mu^2 + \lambda^2, \quad I_2 = \dot{g}_{rs}g^{rs}I_3 = 2\mu^2\lambda^2 + \mu^4, \quad I_3 = \frac{g}{\dot{g}} = \mu^4\lambda^2.$$

Tensor naprężenia τ^{ij} w stanie odkształconym B ma postać

$$(1.6) \quad \tau^{ij} = \Phi_1 \dot{g}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + \Phi_3 g^{ij},$$

gdzie

$$(1.7) \quad b^{ij} = (\dot{g}^{ij}\dot{g}^{rs} - \dot{g}^{ir}\dot{g}^{js})g_{rs}$$

$$\Phi_1 = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Phi_2 = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \Phi_3 = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

natomiast W jest funkcją energii sprężystej, odniesioną do jednostki objętości w \hat{B} . Uwzględniając (1.2), (1.3), (1.5) i (1.7) mamy

$$(1.8) \quad \tau^{11} = r^2\tau^{22} = \mu^2\Phi_1 + (\mu^4 + \lambda^2\mu^2)\Phi_2 + \Phi_3,$$

$$\tau^{33} = \lambda^2\Phi_1 + 2\mu^2\lambda^2\Phi_2 + \Phi_3, \quad \tau^{ij} = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Widać stąd, że równania równowagi

$$(1.9) \quad \nabla_i \tau^{ij} = 0$$

są spełnione tożsamościowo. Oznaczając przez P siłę działającą na jednostkę powierzchni w B oraz przez q ciśnienie hydrostatyczne i uwzględniając, że dla $r = a$ $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ i $\mathbf{g} = (1, 0, 0)$, otrzymujemy kolejno

$$(1.10) \quad \mathbf{P} = \tau^{ij}n_i\mathbf{g}_j,$$

$$(1.11) \quad -q = \tau^{11} = \mu^2\Phi_1 + (\mu^4 + \lambda^2\mu^2)\Phi_2 + \Phi_3 \quad \text{dla } r = a,$$

co kompletuje związki dotyczące skończonej deformacji rozważanego walca.

2. Dodatkowa mała deformacja

Podajemy teraz ciało B dodatkowej małej deformacji εw , wskutek której przechodzi ono w stan \hat{B} bliski B (ε jest małym parametrem). Niech

$$(2.1) \quad w = w_i \mathbf{g}^i = w^i \mathbf{g}_i, \quad w_1 = u, \quad w_2 = v, \quad w_3 = w,$$

gdzie \mathbf{g}^i oraz \mathbf{g}_i są kontrawariantnymi i kowariantnymi wektorami bazy w B . Podane poprzednio wielkości doznają pewnych przyrostów (por. [1]), które oznaczać będziemy kreską u góry:

$$(2.2) \quad g'_{ij} = \nabla_i w_j + \nabla_j w_i, \quad g'^{ij} = -g^{ir}g^{js}g'_{rs}, \quad \mathbf{g}^i \mathbf{g}'^k = g^{im}g^{kj} \nabla_j w_m + g'^{ik};$$

$$(2.3) \quad \Gamma'_{jk}{}^i = \nabla_j \nabla_k w^i, \quad g' = gg^{rs}g'_{rs};$$

$$(2.4) \quad I'_1 = \dot{g}'^{rs}g'_{rs}, \quad I'_2 = \dot{g}'_{rs}(g'^{rs}I_3 + g^{rs}I'_3), \quad I'_3 = I_3 g'^{rs}g'_{rs};$$

$$\Phi'_1 = A_{11}I'_1 + A_{12}I'_2 + (A_{13} - \Phi_1/2I_3)I'_3,$$

$$(2.5) \quad \Phi'_2 = A_{21}I'_1 + A_{22}I'_2 + (A_{23} - \Phi_2/2I_3)I'_3,$$

$$\Phi'_3 = (A_{31}I'_1 + A_{32}I'_2 + A_{33}I'_3)I_3 + (\Phi_3/2I_3)I'_3;$$

$$(2.6) \quad A_{ij} = A_{ji} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j};$$

$$(2.7) \quad b'^{ij} = (\dot{g}^{ij} \dot{g}^{rs} - \dot{g}^{ir} \dot{g}^{js}) g'_{rs};$$

$$(2.8) \quad \tau'^{ij} = \Phi'_1 \dot{g}^{ij} + \Phi'_2 b'^{ij} + \Phi'_3 g'^{ij} + \Phi_2 b'^{ij} + \Phi_3 g'^{ij}.$$

Ciało \tilde{B}^* jest w równowadze, jeśli

$$(2.9) \quad \nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma_{ir}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} = 0.$$

Ograniczymy dalsze rozważania do przypadku płaskiego stanu deformacji, tzn. zakładamy, że współrzędne dodatkowego odkształcenia zależą tylko od dwu zmiennych: (r, ϑ) oraz że $w_3 \equiv 0$. Mamy wówczas ⁽¹⁾

$$(2.10) \quad \begin{aligned} g'_{11} &= g'^{11} = 2u_r, \\ g'_{22} &= -r^4 g'^{22} = 2(v_\vartheta + ru), \\ g'_{12} &= -r^2 g'_{12} = u_\vartheta + v_r - 2\frac{v}{r}, \\ g'_{3i} &= 0, \quad g'^{3i} = 0; \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= u_{rr}, \\ \Gamma_{22}^1 &= u_{\vartheta\vartheta} - \frac{2}{r} v_\vartheta + ru_r - u, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{r^2} \left(v_{rr} - \frac{2}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v \right), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{r^2} (v_{\vartheta\vartheta} + 2ru_\vartheta + rv_r - 2v), \\ \Gamma_{12}^1 &= u_{r\vartheta} - \frac{1}{r} u_\vartheta - \frac{1}{r} v_r + \frac{2}{r^2} v, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r^2} \left(v_{r\vartheta} - \frac{2}{r} v_\vartheta + ru_r - u \right), \end{aligned}$$

$$(2.12) \quad I'_1 = 2\mu^2 \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right), \quad I'_2 = (\mu^2 + \lambda^2) I'_1, \quad I'_3 = \mu^2 \lambda^2 I'_1;$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Phi'_1 &= [2\mu^2 A_{11} + 2\mu^2(\mu^2 + \lambda^2) A_{12} + 2\mu^4 \lambda^2 A_{13} - \Phi_1] \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right), \\ \Phi'_2 &= [2\mu^2 A_{21} + 2\mu^2(\mu^2 + \lambda^2) A_{22} + 2\mu^4 \lambda^2 A_{23} - \Phi_2] \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right), \\ \Phi'_3 &= [2\mu^6 \lambda^2 A_{31} + 2\mu^6 \lambda^2(\mu^2 + \lambda^2) A_{32} + 2\mu^8 \lambda^4 A_{33} + \Phi_3] \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right); \end{aligned}$$

⁽¹⁾ $u_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \dots$

$$\begin{aligned}
 b'^{11} &= 2\mu^4 \left(\frac{1}{r^2} v_{\vartheta} + \frac{1}{r} u \right), \\
 b'^{22} &= 2\mu^4 u_r, \\
 b'^{33} &= 2\mu^2 \lambda^2 \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta} + \frac{1}{r} u \right), \\
 b'^{12} &= -\mu^4 \frac{1}{r^2} \left(u_{\vartheta} + v_r - \frac{2}{r} v \right), \\
 b'^{13} &= b'^{23} = 0;
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 \tau'^{11} &= M_1 \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta} + \frac{1}{r} u \right) - 2(\mu^4 \Phi_2 + \Phi_3) u_r, \\
 r^2 \tau'^{22} &= M_1 \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta} + \frac{1}{r} u \right) - 2(\mu^4 \Phi_2 + \Phi_3) \left(\frac{1}{r^2} v_{\vartheta} + \frac{1}{r} u \right), \\
 \tau'^{33} &= M_2 \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta} + \frac{1}{r} u \right), \\
 r^2 \tau'^{12} &= -(\mu^4 \Phi_2 + \Phi_3) \left(u_{\vartheta} + v_r - \frac{2}{r} v \right), \quad \tau'^{13} = \tau'^{23} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 2\mu^4 A_{11} + 4(\mu^4 \lambda^2 + \mu^6) A_{12} + 4\mu^6 \lambda^2 A_{13} + 2(\mu^4 + \lambda^2 \mu^2)^2 A_{22} + \\
 &\quad + 4(\mu^8 \lambda^2 + \mu^6 \lambda^4) A_{23} + 2\mu^8 \lambda^4 A_{33} - \Phi_1 \mu^2 - \Phi_2 (\lambda^2 \mu^2 - \mu^4) + \Phi_3, \\
 M_2 &= 2\mu^2 \lambda^2 + 2(\mu^2 \lambda^4 + 3\lambda^2 \mu^4) A_{12} + 2(\mu^4 \lambda^4 + \mu^6 \lambda^2) (A_{13} + 2A_{22}) + \\
 &\quad + 2(\mu^8 \lambda^2 + 3\mu^6 \lambda^4) A_{23} + 2\mu^8 \lambda^4 A_{33} - \Phi_1 \lambda^2 + \Phi_3.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Po podstawieniu powyższych związków do równań równowagi (2.9) otrzymujemy liniowy układ dwu jednorodnych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych II rzędu:

$$\begin{aligned}
 M \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u \right) + P \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} + (M-P) \frac{1}{r^2} v_{r\vartheta} - M \frac{2}{r^3} v_{\vartheta} &= 0, \\
 (M-P) \frac{1}{r^2} u_{r\vartheta} + P \frac{1}{r^2} v_{rr} + M \frac{1}{r^4} v_{\vartheta\vartheta} + (M+P) \frac{1}{r^3} u_{\vartheta} - P \frac{1}{r^3} v_r &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

gdzie

$$P = \mu^2 \Phi_1 + \mu^2 \lambda^2 \Phi_2, \quad M = M_1 + 2P.
 \tag{2.18}$$

Jak widać ze wzorów (1.5), (1.7), (2.6) i (2.16) współczynniki tego układu nie zależą od punktu, a są funkcjami (znanymi przy znanym potencjale $W(I_1, I_2, I_3)$) jedynie parametrów charakteryzujących stan wstępnej deformacji λ i μ .

3. Rozdzielenie zmiennych i rozwiązanie ogólne

Poszukiwać będziemy rozwiązań (metodą Fouriera) w postaci

$$u = f(r) \cos n\vartheta, \quad v = rg(r) \sin n\vartheta,
 \tag{3.1}$$

gdzie f i g są odpowiednio gładkimi funkcjami zmiennej r . Po podstawieniu (3.1) do (2.17) otrzymujemy układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych z niewiadomymi funkcjami $f(r)$ i $g(r)$ i parametrem n ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} M \left(f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f \right) - P \frac{n^2}{r^2} f + (M-P) \frac{n}{r} g' - (M+P) \frac{n}{r^2} g &= 0, \\ P \left(g'' + \frac{1}{r} g' - \frac{1}{r^2} g \right) - M \frac{n^2}{r^2} g - (M-P) \frac{n}{r} f' - (M+P) \frac{n}{r^2} f &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniami ogólnymi tego układu (dla danej wartości parametru n) są

$$(3.3) \quad f_n(r) = \sum_{i=1}^4 C_{ni} r^{x_i}, \quad g_n(r) = \sum_{i=1}^4 C_{ni} \gamma_i r^{x_i},$$

gdzie

$$(3.4) \quad \gamma_i = \frac{n[P(x_i-1) - M(x_i+1)]}{Mn^2 - P(x_i^2 - 1)},$$

C_{ni} są stałymi całkowania a x_i pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$(3.5) \quad x^4 - 2(n^2 + 1)x^2 + (n^2 - 1)^2 = 0,$$

równymi odpowiednio

$$(3.6) \quad x_1 = n+1, \quad x_2 = n-1, \quad x_3 = -n+1, \quad x_4 = -n-1,$$

gdzie $n > 1$. Dla $n = 0$ i $n = 1$ pierwiastki są wielokrotne i rozwiązanie ma postać

$$(3.7) \quad f_0(r) = C_{01}r + C_{02}r^{-1} \quad \text{dla } (1) \quad n = 0,$$

$$(3.8) \quad \begin{cases} f_1(r) = C_{11}r^2 + C_{12} + C_{13} \ln r + C_{14}r^{-2}, \\ g_1(r) = C_{11}\gamma_1 r^2 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 \left(\ln r + \frac{M-P}{M+P} \right) + C_{14}\gamma_4 r^{-2} \end{cases} \quad \text{dla } n = 1.$$

Ponieważ dla $r = 0$ przemieszczenia są ograniczone i ponieważ wykluczamy z rozważań ruch sztywny, należy przyjąć $C_{02} = 0$, $C_{12} = 0$, $C_{n3} = 0$, $C_{n4} = 0$ i ostatecznie mamy

$$(3.9) \quad f_0(r) = C_{01}r, \quad g_0(r) \equiv 0 \quad \text{dla } n = 0,$$

$$(3.10) \quad \begin{cases} f_1(r) = C_{11}r^2 \\ g_1(r) = C_{11} \frac{P-3M}{M-3P} r^2; \end{cases} \quad \text{dla } (2) \quad n = 1,$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} f_n(r) = C_{n1}r^{n+1} + C_{n2}r^{n-1}, \\ g_n(r) = C_{n1} \frac{Pn-M(n+2)}{Mn-P(n+2)} r^{n+1} - C_{n2}r^{n-1} \end{cases} \quad \text{dla } n > 1.$$

4. Warunki utraty stateczności

W poprzednim punkcie znaleźliśmy rozwiązanie ogólne układu (3.2); obecnie rozważymy szereg różnych przypadków warunków brzegowych narzuconych na funkcje $f_n(r)$ i $g_n(r)$. Interesować nas będzie nie tyle znalezienie rozwiązania danego zagadnienia brze-

(1) Dla $n = 0$ $v = 0$, można więc, nie zawężając ogólności, przyjąć $g_0(r) \equiv 0$.

(2) Przyjmujemy $u|_{r=0} = 0$.

gowego, ile otrzymanie warunku, przy którym zagadnienie to ma rozwiązanie niejednoznaczne. Warunek taki przyjmować będziemy jako warunek utraty stateczności (por. [2]).

Są dwa różne podejścia do zagadnienia utraty stateczności: statyczne i kinetyczne. Wychodzą one z różnych definicji stateczności i w zasadzie prowadzą do różnych wyników. Tylko w przypadku, gdy dane zagadnienie brzegowe jest samosprężone, oba podejścia są równoważne. W pracy niniejszej przez utratę stateczności rozumie się osiągnięcie takiego stanu, w którym problem brzegowy dla małych dodatkowych deformacji nałożonych na odkształcenie skończone ma więcej niż jedno rozwiązanie (podejście statyczne). Problem samosprężoności niektórych przypadków rozważonych tutaj zagadnień brzegowych zbadany został w pracach [2 i 3].

4.1 Warunki brzegowe w przemieszczeniach. Założymy obecnie, że w procesie dodatkowej deformacji punkty powierzchni ciała nie zmieniły położenia, tzn. założymy, że

$$(4.1) \quad u = v = 0 \quad \text{dla} \quad r = a.$$

Uwzględniając to w (3.9) i (3.10) łatwo stwierdzamy, że warunkom (4.1) dla $n = 0$ oraz $n = 1$ odpowiada jedynie rozwiązanie trywialne: $g_0(r) = f_0(r) = f_1(r) = g_1(r) = 0$. Dla $n > 1$ mamy na mocy (3.11)

$$(4.2) \quad C_{n1} a^{n+1} + C_{n2} a^{n-1} = 0, \quad C_{n1} \frac{Pn - M(n+2)}{Mn - P(n+2)} a^{n+1} - C_{n2} a^{n-1} = 0.$$

Jest to jednorodny układ równań algebraicznych, mający zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie, mianowicie $C_{n1} = C_{n2} = 0$, odpowiadające zerowej dodatkowej deformacji. Układ ten ma ponadto rozwiązania nietrywialne, jeśli wyznacznik charakterystyczny znika, co jest równoważne warunkowi

$$(4.3) \quad M = -P.$$

Równość (4.3) zgodnie z poprzednimi uwagami uważać będziemy za warunek utraty stateczności przy warunkach brzegowych (4.1).

4.2 Warunki brzegowe przemieszczeniowo-naprężeniowe. Założymy teraz, że dla $r = a$ składowa dodatkowego przemieszczenia w kierunku promienia znika oraz wektor naprężenia jest prostopadły do powierzchni $r = a$, tzn:

$$(4.4) \quad u = 0 \\ \mathbf{t} + \varepsilon \mathbf{t}' = k(\mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}') \quad \text{dla} \quad r = a,$$

gdzie k jest dowolne. Zgodnie z (1.10) i (4.4)

$$(4.5) \quad \mathbf{P} + \varepsilon \mathbf{P}' = (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij})(n_i + \varepsilon n'_i)(\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}'_j) = k(\mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}'),$$

przy czym

$$(4.6) \quad \mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{g}^1 + \varepsilon \mathbf{g}'^1}{\sqrt{g^{11} + \varepsilon g'^{11}}}, \quad \mathbf{n} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{n}' = \left(-\frac{1}{2} g'^{11}, 0, 0\right).$$

Równość (4.5) przyjmie teraz postać

$$(4.7) \quad (\tau^{1j} + \varepsilon \tau'^{1j})(\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}'_j) = k(\mathbf{g}^1 + \varepsilon \mathbf{g}'^1).$$

Mnożąc skalarnie obie strony równania przez wektor $(\mathbf{g}_1 + \varepsilon \mathbf{g}'_1)$ rugujemy współczynnik k i ostatecznie otrzymujemy

$$(4.8) \quad u = 0, \quad \tau'^{12} = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

co jest równoważne następującym warunkom na brzegu $r = a$

$$(4.9) \quad \begin{cases} u = 0, \\ u_{\vartheta} + v_r - \frac{2}{r}v = 0. \end{cases}$$

Po podstawieniu (3.1) i (3.11) do (4.9) mamy

$$(4.10) \quad \begin{cases} C_{n1}a^{n+1} + C_{n2}a^{n-1} = 0, \\ C_{n1} \frac{(P-M)n(n+1)}{Mn-P(n+2)} a^{n+1} - C_{n2}(n-1)a^{n-1} = 0 \quad \text{dla } ^{(3)} \quad n > 1 \end{cases}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań nietrywialnych tego układu, a tym samym warunkiem utraty stateczności, w przypadku warunków brzegowych (4.4) jest

$$(4.11) \quad P = M \cdot n.$$

4.3 Warunki brzegowe w naprężeniach. A. Rozpatrzmy obecnie przypadek obciążenia powierzchni bocznej walca w stanie $\overset{*}{B}$ ciśnieniem hydrostatycznym q , a więc siłą ciągłą, normalną do aktualnej powierzchni i o stałej intensywności

$$(4.12) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon\tau'^{ij})(n_i + \varepsilon n'_i)(g_j + \varepsilon g'_j) = -q(n + \varepsilon n').$$

Po pomnożeniu obu stron równania (4.12) skalarnie przez $g^k + \varepsilon g'^k$ i wykorzystaniu (1.11) i (4.6) otrzymujemy

$$(4.13) \quad \tau'^{1k} - \tau^{11}g'^{1k} = 0 \quad \text{dla} \quad r = a,$$

a następnie

$$(4.14) \quad \begin{cases} Mu_r + (M-2P) \left(\frac{1}{r^2}v_{\vartheta} + \frac{1}{r}u \right) = 0 \\ u_{\vartheta} + v_r - \frac{2}{r}v = 0 \end{cases} \quad \text{dla} \quad r = a;$$

$$(4.15) \quad \begin{cases} C_{n1}a^{n+1} \frac{(P-M) \cdot (n+1) \cdot (n-2) \cdot P}{Mn-P(n+2)} + C_{n2}a^{n-1}P(n-1) = 0, \\ C_{n1}a^{n+1} \frac{(P-M)n(n+1)}{Mn-P(n+2)} - C_{n2}a^{n-1}(n-1) = 0. \end{cases}$$

Warunkiem utraty stateczności jest tutaj

$$(4.16) \quad P(P-M) = 0.$$

B. Załóżmy, że powierzchnia ciała obciążona jest siłą stałą co do kierunku i modułu (proporcjonalna i prostopadła do powierzchni w B). Mamy wówczas

$$(4.17) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon\tau'^{ij})(n_i + \varepsilon n'_i)(g_j + \varepsilon g'_j) = -qn \quad \text{dla} \quad r = a.$$

⁽³⁾ Dla $n = 0$ i $n = 1$ jednorodnym warunkom brzegowym (a takie tylko rozważamy) tak naprężeniowym jak i przemieszczeniowym odpowiada $w_i \equiv 0$. Z tego względu w dalszych rozważaniach pomijając będziemy te oba przypadki.

Uwzględniając (1.11) i (4.6), następnie mnożąc (4.17) skalarnie przez $\mathbf{g}^k + \varepsilon \mathbf{g}'^k$ otrzymujemy kolejno

$$(4.18) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}) \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon g'^{11}\right) (\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}'_j) = \tau^{11} \frac{\mathbf{g}^1}{\sqrt{g^{11}}} \quad \text{dla } r = a,$$

$$(4.19) \quad \tau'^{1k} - \frac{1}{2} \tau^{1k} g'^{11} - \tau^{11} \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}'^k = 0 \quad \text{dla } r = a$$

i dalej po wykorzystaniu (2.2)

$$(4.20) \quad \begin{cases} \tau^{11} + 2\tau^{11} u_r = 0 \\ \tau'^{12} + \frac{1}{r^2} \tau^{11} \left(v_r - \frac{v}{r}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{dla } r = a;$$

$$(4.21) \quad \begin{cases} Mu_r - (M - 2P) \left(\frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u\right) = 0 \\ \tau^{11} \left(v_r - \frac{v}{r}\right) + (P - \tau^{11}) \left(u_\vartheta + v_r - 2\frac{v}{r}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{dla } r = a;$$

$$(4.22) \quad C_{n1} a^{n+1} \frac{P(P-M)(n+1)(n-2)}{Mn - P(n+2)} + C_{n2} a^{n-1} P(n-1) = 0,$$

$$C_{n1} a^{n+1} \frac{(n+1)[n(\tau^{11} - 2P)(M-P) - 2M\tau^{11}]}{M \cdot n - P \cdot (n+2)} + C_{n2} a^{n-1} (\tau^{11} - 2P)(n-1) = 0$$

i ostatecznie warunek utraty stateczności ma postać

$$(4.23) \quad P[(P-M)(\tau^{11} - 2P)(n-1) + M\tau^{11}] = 0.$$

C. Obciążymy teraz powierzchnię walca siłą prostopadłą do powierzchni w stanie \tilde{B}^* , ale proporcjonalną do powierzchni w stanie B . Mamy wówczas

$$(4.24) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}) (n_i + \varepsilon n'_i) (\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}'_j) d\tilde{S}^* = -q(\mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}') dS, \quad r = a,$$

$$(4.25) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}) (\mathbf{g}_j + \varepsilon \mathbf{g}'_j) \frac{d\tilde{S}^*}{dS} = \tau^{11} (\mathbf{g}^1 + \varepsilon \mathbf{g}'^1) \quad \text{dla } r = a.$$

Ponieważ elementy powierzchniowe w stanie B i \tilde{B}^* wyrażają się wzorami (por. [4])

$$(4.26) \quad d\tilde{S}^* = \sqrt{g + \varepsilon g'} \sqrt{g^{11} + \varepsilon g'^{11}} d\vartheta dz, \quad dS = \sqrt{g g^{11}} d\vartheta dz,$$

więc stosunek tych elementów można wyrazić następująco:

$$(4.27) \quad \frac{d\tilde{S}^*}{dS} = 1 + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{g'}{g} + \frac{g'^{11}}{g^{11}} \right) = 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right).$$

Po podstawieniu (4.27) do (4.25) i pomnożeniu otrzymanej równości przez $\mathbf{g}^k + \varepsilon \mathbf{g}'^k$ otrzymujemy kolejno

$$(4.28) \quad \tau'^{1k} + \tau^{1k} \left(\frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right) - \tau^{11} g'^{1k} = 0 \quad \text{dla } r = a;$$

$$(4.29) \quad \begin{cases} Mu_r + (M - 2P + \tau^{11}) \left(\frac{1}{r^2} v_\vartheta + \frac{1}{r} u \right) = 0 \\ u_\vartheta + v_r - \frac{2}{r} v = 0 \end{cases} \quad \text{dla } r = a;$$

$$(4.30) \quad C_{n1} a^{n+1} (n+1) \left[M + \frac{P(n-2) - Mn}{Mn - P(n+2)} (M - 2P + \tau^{11}) \right] + C_{n2} a^{n-1} (2P - \tau^{11}) (n-1) = 0,$$

$$C_{n1} a^{n+1} \frac{(P-M)n(n+1)}{Mn - P(n+2)} - C_{n2} a^{n-1} (n-1) = 0$$

i ostatecznie warunek utraty stateczności

$$(4.31) \quad P(\tau^{11} - 2P + 2M) = 0.$$

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., A **211** (1952).
2. GUO-ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., **2**, **15** (1963).
3. Z. WESOŁOWSKI, *Stability of a full elastic sphere uniformly waded on the surface*, Arch. Mech. Stos., **5**, **16** (1964).
4. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Сплошной цилиндр из упругого, однородного, изотропного и сжимаемого материала с произвольной физической нелинейностью подвергается предварительной конечной деформации. После этого накладывается дополнительная малая плоская деформация. Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих эту задачу, было построено по методу Фурье. Для некоторых частных случаев нагружения и закрепления сформулированы краевые задачи и даны условия потери устойчивости.

Summary

STABILITY OF A FULL CIRCULAR CYLINDER LOADED WITH HYDROSTATIC PRESSURE

A homogeneous isotropic non-linearly elastic full cylinder is subjected to initial finite deformation corresponding to any hydrostatic pressure. Next, a set of linear partial differential equations is obtained as the result of small additional plane deformations. On applying the Fourier method, the general solution of the problem is determined. Boundary value problems and conditions of stability loss are also discussed for some special cases of loading.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 grudnia 1966 r.

NAPRĘŻENIOWY WARUNEK BEZPIECZEŃSTWA W PRZYPADKU NIEKONSERWATYWNYCH
ZAGADNIENI STATECZNOŚCI SPRĘŻYSTEJ

ANDRZEJ KOWALSKI (MIELEC), MICHAŁ ŻYCKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Typowym przykładem niekonserwatywnych obciążeń w teorii stateczności sprężystej są obciążenia śledzące o kierunku działania zmiennym w trakcie wyboczenia. Już E. L. NIKOLAI [12] zwrócił uwagę na konieczność stosowania kinetycznego kryterium stateczności w przypadku niektórych problemów tego typu. Klasyczny już dziś przypadek siły śledzącej, działającej na swobodnym końcu pręta jednostronnie utwierdzonego, rozwiązał po raz pierwszy M. BECK [1]; dokładniejsze obliczenia numeryczne podane przez Z. KORDAS i M. ŻYCKOWSKIEGO [6] doprowadziły do wyniku

$$(1.1) \quad P_k = 20,0509 \frac{EJ}{l^2}.$$

Podano również szereg metod przybliżonych obliczenia siły krytycznej przy problemach niekonserwatywnych; sprowadzają się one przede wszystkim do zastąpienia metody energetycznej typu Ritza przez równania Lagrange'a drugiego rodzaju (Z. KORDAS i M. ŻYCKOWSKI [5], A. KOWALSKI [7], M. LEVINSON [11]), do stosownej modyfikacji metody ortogonalizacyjnej Galerkinia (W. W. BOŁOTIN [2], H. LEIPHOLZ [8, 9, 10]) lub do przystosowania metody małego parametru (A. GAJEWSKI [4]). Metody te zezwalają na przybliżone obliczenie obciążeń krytycznych dla dość szerokiej klasy ważnych praktycznie problemów niekonserwatywnych.

W tym świetle coraz większego znaczenia nabiera zagadnienie stosowalności wyprowadzonych wzorów w praktyce inżynierskiej. Tak np. śledząca siła krytyczna (1.1) jest około ośmiokrotnie wyższa od siły eulerowskiej dla tego samego pręta (lecz przy ustalonym kierunku działania) i zbliżanie się do niej w zastosowaniach konstrukcyjnych może budzić zrozumiałą niepokój. Wydaje się więc rzeczą niezbędną analiza stanu podkrytycznego i sformułowanie odpowiedniego warunku bezpieczeństwa; najbardziej przekonującą wydaje się przy tym analiza rozkładu naprężeń w trakcie drgań, nawiązująca do kinetycznego kryterium stateczności i wyrażenie warunku bezpieczeństwa przez ograniczenie kresu górnego wartości bezwzględnej naprężenia występującego w trakcie drgań i będącego funkcją miejsca i czasu.

W obecnej pracy przeprowadzimy taką analizę dla pręta jednostronnie utwierdzonego, obciążonego siłą śledzącą. Sformułujemy naprężeniowy warunek bezpieczeństwa przy założeniu sprężystości materiału; nie będziemy poruszali znacznie trudniejszego problemu pojawienia się odkształceń plastycznych.

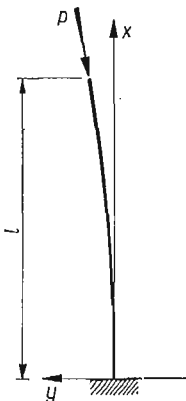
Główna trudność analizy polega na tym, iż mamy do czynienia z układem o nieskończonej liczbie stopni swobody i w związku z tym naprężenia będą w sposób istotny zależały od warunku początkowego ruchu, a więc od rozkładu wychyleń i prędkości w chwili $t = 0$. Rozpatrzmy więc tylko dwie pierwsze postacie drgań jako najważniejsze praktycznie, a warunek początkowy damy wtedy przez przyjęcie pewnych wyjściowych ugięć pręta w dwóch punktach na jego osi (przyjmujemy, że takie ugięcia są spowodowane pewnymi czynnikami ubocznymi) oraz przez przyjęcie, iż prędkości początkowe są równe zero.

Rozpatrzmy jedynie drgania swobodne układu nie uwzględniając wpływu tłumienia zarówno na wielkość siły krytycznej, jak i na wielkość naprężeń podczas drgań.

2. Analiza drgań przy podkrytycznej sile śledzącej

Obliczenia nasze oprzemy na równaniu różniczkowym drgań poprzecznych pręta ściskanego siłą P (Rys. 1)

$$(2.1) \quad EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$



Rys. 1

gdzie EJ oznacza sztywność giętą, a m — masę jednostki długości pręta. Postać równania (2.1) jest niezależna od zachowania się siły po wyboczeniu; wpływa ono jedynie na warunki brzegowe. W przypadku siły śledzącej warunki te mają postać

$$(2.2) \quad y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l, t) = 0$$

gdzie l oznacza długość pręta utwierdzonego na końcu $x = 0$.

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne

$$(2.3) \quad \xi = x/l, \quad v = y/l,$$

podstawiając do równania (2.1)

$$(2.4) \quad y(x, t) = y(\xi l, t) = lv(\xi)e^{i\Omega t}$$

oraz wprowadzając bezwymiarowe stałe odpowiadające sile ściskającej i częstości drgań

$$(2.5) \quad \beta = P l^2 / EJ, \quad \omega = \Omega l^2 \sqrt{m/EJ},$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach

$$(2.6) \quad \frac{d^4 v}{d\xi^4} + \beta \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \omega^2 v = 0.$$

Całka ogólna równania (2.6) ma postać

$$(2.7) \quad v(\xi) = C_1 \sin r_1 \xi + C_2 \cos r_1 \xi + C_3 \operatorname{sh} r_2 \xi + C_4 \operatorname{ch} r_2 \xi,$$

gdzie

$$(2.8) \quad r_{1,2}^2 = \pm \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega^2}.$$

Warunki brzegowe (2.2) prowadzą do układu równań

$$(2.9) \quad \begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ r_1 C_1 + r_2 C_3 &= 0, \\ C_1(r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2) + C_2(r_1^2 \cos r_1 + r_2^2 \operatorname{ch} r_2) &= 0, \\ -C_1(r_1^3 \cos r_1 + r_1 r_2^2 \operatorname{ch} r_2) + C_2(r_1^3 \sin r_1 - r_2^3 \operatorname{sh} r_2) &= 0, \end{aligned}$$

przy czym w dwóch ostatnich równaniach wyrugowano już C_3 i C_4 . Wyrażając wszystkie stałe przez C_1 możemy napisać krótko

$$(2.10) \quad v(\xi) = C_1 F(\xi),$$

gdzie $F(\xi)$ jest funkcją nie zawierającą już stałych całkowania,

$$(2.11) \quad F(\xi) = \sin r_1 \xi - \mu \cos r_1 \xi - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{sh} r_2 \xi + \mu \operatorname{ch} r_2 \xi,$$

przy czym przez μ oznaczono stałą

$$(2.12) \quad \mu = \frac{\sin r_1 + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{sh} r_2}{\cos r_1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{ch} r_2}.$$

Przyrównując do zera wyznacznik główny układu równań (2.9) doprowadzamy do równania przestępnego, określającego związek pomiędzy siłą β a częstością drgań ω . Wykres funkcji $\beta = f(\omega)$ można znaleźć w pracy M. BECKA [1] lub monografii W. W. BOŁOTINA [2].

3. Rozkład naprężeń wzdłuż osi pręta

Przyjmując założenie jednowymiarowego stanu naprężenia w pręcie, możemy napisać

$$(3.1) \quad \sigma_{\max} = \sigma_{g\max} + \sigma_c = Eh \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P}{F},$$

gdzie σ_g oznacza naprężenie od zginania, σ_c — od ściskania, h — odległość skrajnego włókna przekroju od osi pręta, F — powierzchnię przekroju. Wobec faktu, że równanie częstości ma nieskończenie wiele pierwiastków, należałoby do (3.1) zamiast (2.4) podstawić

$$(3.2) \quad y = l \sum_{j=1}^{\infty} v_j(\xi) e^{i\Omega_j t} = l \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j} F_j(\xi) e^{i\Omega_j t}$$

i otrzymalibyśmy wtedy po sprowadzeniu konsekwentnie do postaci bezwymiarowej

$$(3.3) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{h}{l} \sum_{j=1}^{\infty} C_{1j} F_j''(\xi) e^{i\omega_j t} + \frac{4\beta}{\lambda^2};$$

λ oznacza tu smukłość pręta i zgodnie z klasyczną definicją smukłości dla pręta jednostronnie utwierdzonego mamy w naszym przypadku $\lambda = 2l/i$, przy czym i oznacza najmniejszy promień bezwładności przekroju.

Ze wzoru tego wyeliminujemy teraz czynnik czasu zastępując szereg funkcji czasu przez stosowną majorantę.

Wobec $|\operatorname{Re}(e^{i\omega_j t})| \leq 1$ możemy napisać

$$(3.4) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{h}{l} \sum_{j=1}^{\infty} |C_{1j} F_j''(\xi)| + \frac{4\beta}{\lambda^2}.$$

Stosujemy tu nadal znak równości, a nie nierówności słabej, bowiem stosunki poszczególnych częstości są z reguły niewymierne; mamy więc prawo przypuszczać, że po dostatecznie długim okresie czasu nastąpi moment, w którym wszystkie postacie drgań (a, praktycznie biorąc, znaczna ich liczba) osiągną w danym punkcie ξ swą wartość amplitudalną z odpowiednim znakiem i wszystkie iloczyny $C_{1j} F_j''(\xi)$ będą dodatnie.

Do pierwszego składnika wzoru (3.4) można również wprowadzić smukłość pręta λ . Możemy mianowicie napisać

$$(3.5) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{\psi}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} |C_{1j} F_j''(\xi)| + \frac{4\beta}{\lambda^2},$$

gdzie $\psi = 2h/i$ jest łatwym do obliczenia, bezwymiarowym współczynnikiem kształtu przekroju. Dla przekroju prostokątnego mamy $\psi = \sqrt{12} = 3,464$, dla kołowego $\psi = 4$, dla pierścieniowego (rurowego) cienkościennego $\psi = 2\sqrt{2} = 2,828$.

Naprężenia, określone wzorem (3.5), zależą od danej początkowej linii ugięcia i początkowej prędkości drgań. Dla celów praktycznych zastąpimy teraz układ o nieskończonej liczbie stopni swobody przez układ o możliwie małej ich liczbie. Przyjmijmy mianowicie dwa stopnie swobody, gdyż jeden nie zezwalałby na analizę zjawiska dudnienia — zbliżania się dwóch sąsiednich częstości do siebie.

Zamiast (3.5) napiszemy zatem

$$(3.6) \quad \frac{\sigma_{\max}}{E} = \frac{\psi}{\lambda} [|C_{11} F_1''(\xi)| + |C_{12} F_2''(\xi)|] + \frac{4\beta}{\lambda^2}.$$

Dla wyznaczenia stałych C_{11} i C_{12} musimy założyć początkowe wychylenia pręta w dwóch punktach osi. Jednym z nich powinien być punkt $\xi = 1$ (swobodny koniec) — bezwymiarowe ugięcie początkowe w tym punkcie oznaczymy przez $f = \delta/l$. Drugi punkt oznaczymy przez ξ_0 , a odpowiednie bezwymiarowe ugięcie przedstawimy jako ułamek tamtego, oznaczając je przez κf . Prędkości początkowe przyjmijmy w obu punktach równe zeru. W takim razie z układu równań

$$(3.7) \quad \begin{aligned} f &= C_{11} F_1(1) + C_{12} F_2(1), \\ \kappa f &= C_{11} F_1(\xi_0) + C_{12} F_2(\xi_0), \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} C_{11} &= \frac{F_2(\xi_0) - \kappa F_2(1)}{F_1(1)F_2(\xi_0) - F_2(1)F_1(\xi_0)} f, \\ C_{12} &= \frac{\kappa F_1(1) - F_1(\xi_0)}{F_1(1)F_2(\xi_0) - F_2(1)F_1(\xi_0)} f. \end{aligned}$$

Funkcja $F''(\xi)$ jest określona wzorem

$$(3.9) \quad F''(\xi) = -r_1^2 (\sin r_1 \xi - \mu \cos r_1 \xi) + r_2^2 \left(-\frac{r_1}{r_2} \operatorname{sh} r_2 \xi + \mu \operatorname{ch} r_2 \xi \right),$$

przy czym F_1 otrzymujemy przez podstawienie parametrów r_1 , r_2 i μ odpowiadających pierwszej częstości, a F_2 — odpowiadających drugiej częstości drgań pręta.

Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa pręta będzie więc miał postać

$$(3.10) \quad \frac{\psi}{\lambda} \max_{0 \leq \xi \leq 1} [|C_{11} F_1''(\xi)| + |C_{12} F_2''(\xi)|] + \frac{4\beta}{\lambda^2} \leq \frac{k}{E},$$

gdzie k oznacza stosowne naprężenie dopuszczalne.

4. Wyniki liczbowe

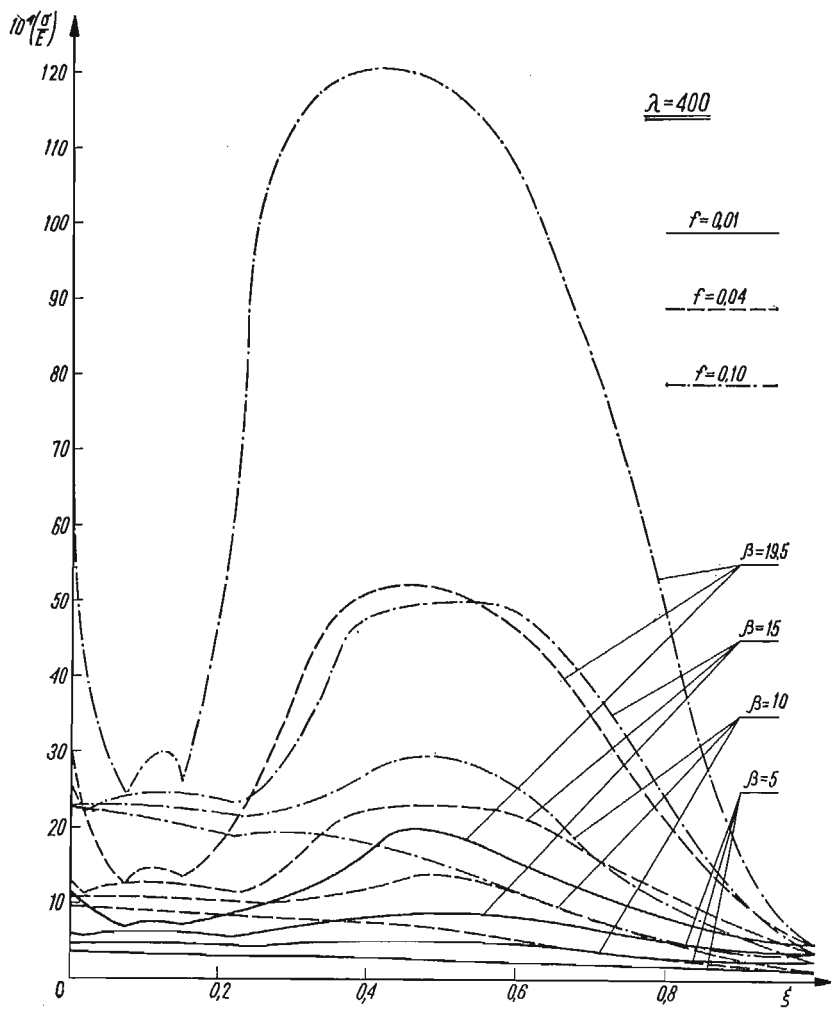
Do obliczeń liczbowych przyjmiemy $\xi_0 = 0,5$ oraz $\kappa = 0,3$; taki rozkład ugięć początkowych odpowiada mniej więcej ugięciom statycznym pod działaniem siły prostopadłej do osi pręta, a przyłożonej na jego swobodnym końcu. Założono przekrój rurowy cienkościenny przyjmując $\psi = 2,828$.

Tablica 1

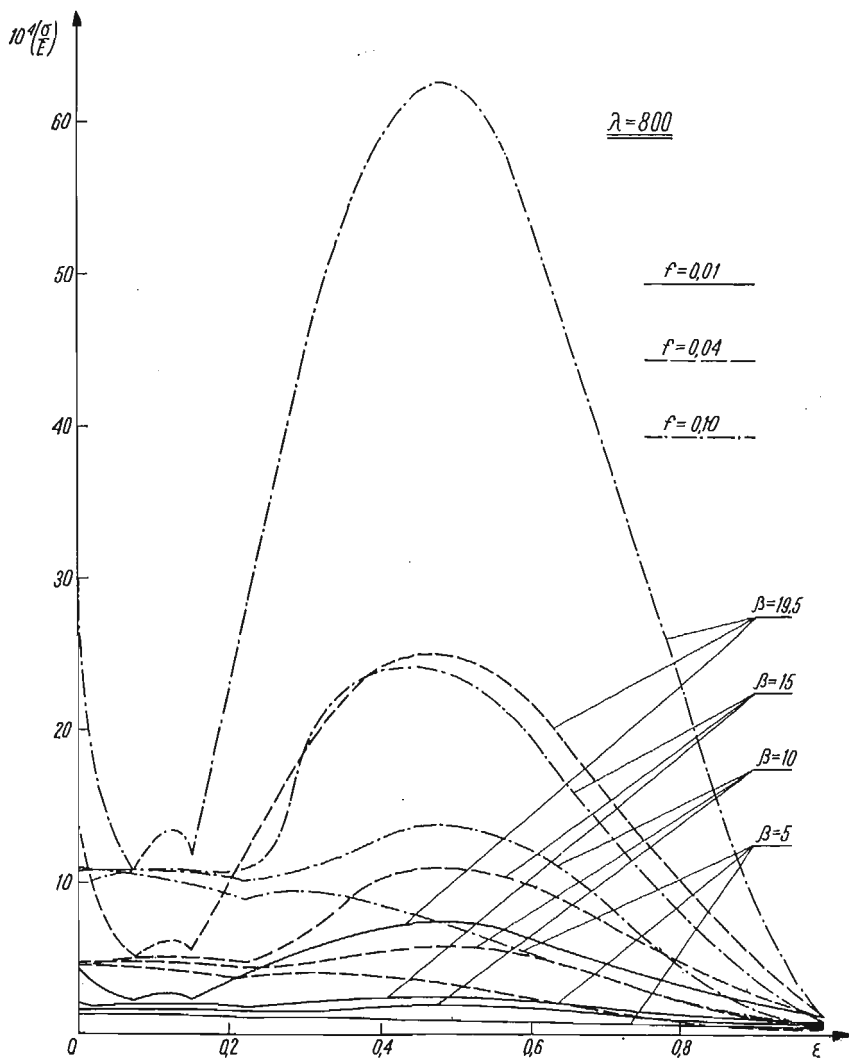
β	0	5	10	15	19,5
ω_1	3,50	4,10	5,00	6,50	9,50
ω_2	21,75	19,75	17,50	15,00	11,50
P/P_k	0	0,25	0,50	0,75	0,975

Korzystając z wykresu M. Becka przyjęto wartości ω_1 i ω_2 , zestawione w tablicy 1. Za pomocą tych danych określono kolejno r_1 , r_2 i μ dla każdej z tych częstości, a dalej funkcje $F_1(\xi)$ i $F_2(\xi)$ oraz stałe C_{11} i C_{12} . Rozkład naprężeń określonych wzorem (3.6) przedstawiono na wykresach (rys. 2 i 3) odpowiednio dla smukłości pręta $\lambda = 400$ i $\lambda = 800$. Warto zauważyć, że punktem niebezpiecznym nie zawsze jest tu punkt utwierdzenia ($\xi = 0$); częściej nawet kres górny naprężenia osiągnany jest na długości pręta przy ξ równym około 0,4.

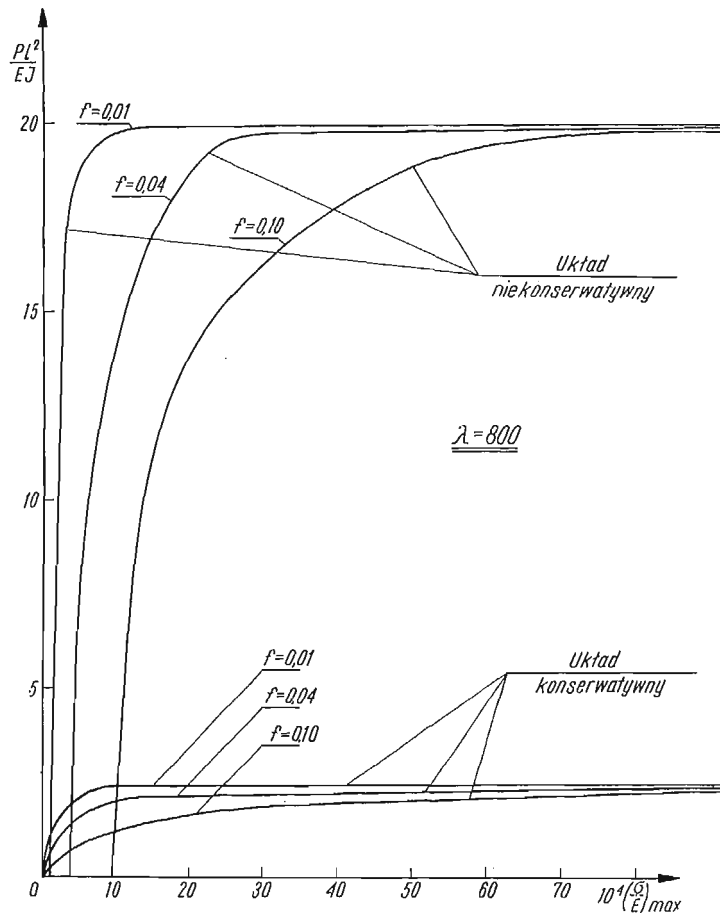
W oparciu o otrzymane wyniki sporządzono wykresy (rys. 4 i 5) dla tych samych smukłości, zależności maksymalnych naprężeń od bezwymiarowej siły β i od danego wychylenia początkowego f . Dla porównania przytoczono również wykresy naprężeń maksymalnych przy obciążeniu siłą o ustalonym kierunku działania (siłą typu eulerowskiego), działającą na mimośrodkach f o tych samych wartościach. Wykresy na rys. 6 i 7 przedstawiają wreszcie dla tych samych smukłości naprężeniowe warunki bezpieczeństwa przy różnych danych naprężeniach k i różnych danych wychyleniach początkowych $f = \delta/l$.



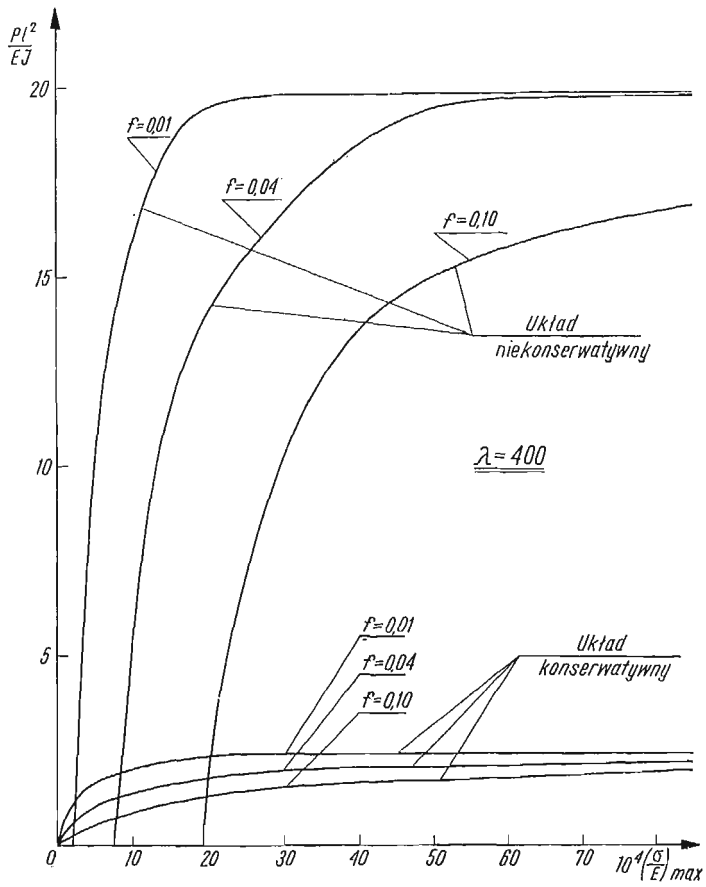
Rys. 2



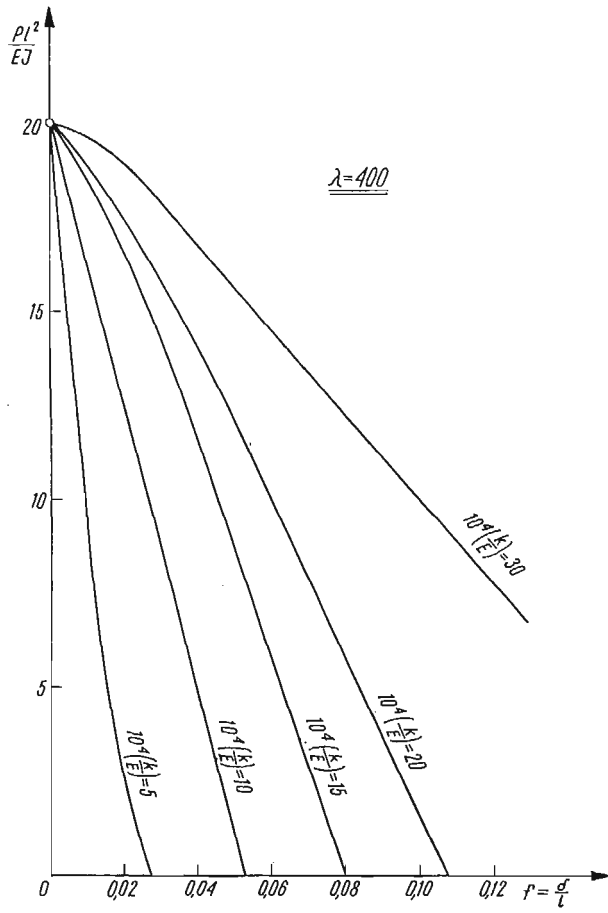
Rys. 3



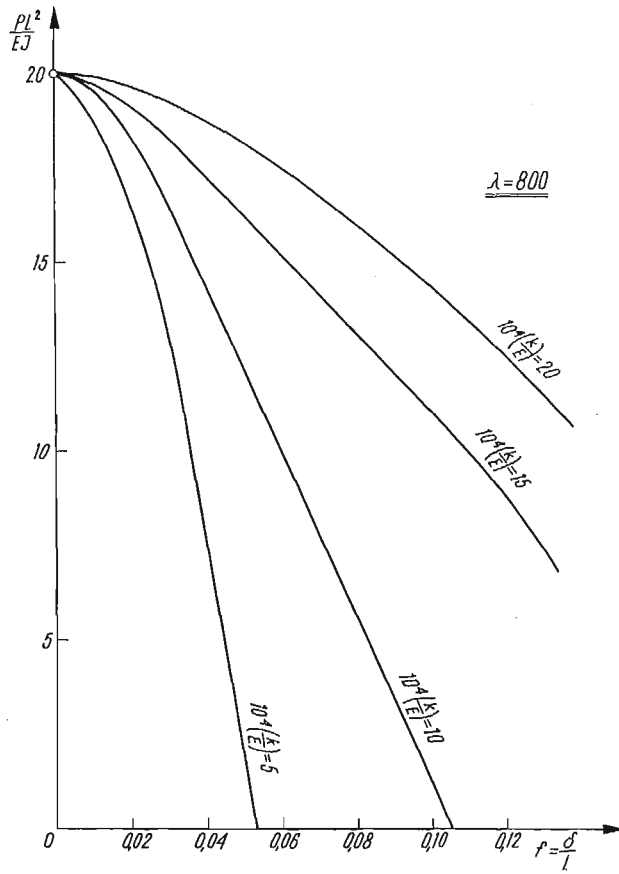
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

5. Wnioski

Z przedstawionych wykresów, a zwłaszcza z porównania z wykresami dla obciążeń o ustalonym kierunku, wynika, iż obciążenia śledzące są w istocie wielokrotnie mniej niebezpieczne dla konstrukcji od obciążeń konserwatywnych. Oczywiście, że dla bardziej wnikliwej oceny niezbędne są badania innych układów i przyjmowanie do równań większej liczby stopni swobody. Stosowanie obciążeń nawet kilkakrotnie większych od klasycznej siły eulerowskiej wydaje się jednak dopuszczalne, o ile mamy pewność, że zdefiniowany w [3 i 6] współczynnik śledzenia η może tylko nieznacznie odbiegać od jedności.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Literatura cytowana w tekście

1. M. ВЕСК, *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, Z. angew. Math. Phys., 3, 3 (1952), 225–228.
2. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, Москва 1961.
3. Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, *Об устойчивости стержня при действии следящей силы*, Труды Ленингр. Полит. Института, № 192 (1958), 21–27.
4. A. GAJEWSKI, *Stateczność pewnych niepryzmatycznych i niejednorodnych prętów ściskanych siłą śledzącą*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966), 591–608.
5. Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czasop. Techn., 9, 65 (1960), 1–8.
6. Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI, *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963), 7–31.
7. A. KOWALSKI, *Stateczność prętów o skokowo zmiennym przekroju ściskanych siłą śledzącą*, Rozpr. Inżyn., 15 (1967), 197–209.
8. H. LEIPHOLZ, *Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes*, Z. angew. Math. Phys., 4, 13 (1962), 359–372.
9. H. LEIPHOLZ, *Über die Konvergenz des Galerkinschen Verfahrens bei nichtselbstadjungierten und nichtkonservativen Eigenwertproblemen*, Z. angew. Math. Phys., 1, 14 (1963), 70–79.
10. H. LEIPHOLZ, *Grundzüge einer Stabilitätstheorie für elastische Systeme unter nichtkonservativer Belastung*, Ing.-Archiv, 1, 34 (1965), 56–68.
11. M. LEVINSON, *Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability*, Z. angew. Math. Phys., 3, 17 (1966), 431–442.
12. Е. Л. НИКОЛАИ, *Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня*, Изв. Ленингр. Полит. Инст., 31 (1928).

Резюме

УСЛОВИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Критические величины неконсервативных нагрузок превышают как правило, соответствующие критические значения сил в случае существования потенциала. Например, критическая следящая сила для односторонне закрепленного стержня равна примерно восьмикратному значению эйле-

ровой силы для этого стержня. С этой точки зрения все большее значение получает вопрос о применимости в инженерной практике выведенных формул.

В настоящей статье проводится анализ распределения напряжений в процессе колебаний односторонне закрепленного стержня, нагруженного подкритической следящей силой. Используются точные уравнения колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы, однако в вычислениях учтены только прогибы соответствующие двум первым частотам колебаний. Оказывается, что наибольшие напряжения могут появиться либо в закрепленном конце стержня либо в некоторой его точке (локальный максимум). Сформулировано условие безопасности по напряжениям, а также даны графики изображающие это условие при различных отношениях допустимого напряжения k к модулю Юнга E . Дано сравнение со случаем когда сила имеет постоянное направление в процессе потери устойчивости. Обнаружено что допустимая величина следящей силы в действительности многократно превышает то значение силы с фиксированным направлением, которому соответствуют допустимые напряжения k .

S U M M A R Y

STRESS CRITERION OF SAFETY FOR NON-CONSERVATIVE PROBLEMS OF ELASTIC STABILITY

The critical values of non-conservative loads are, as a rule, much higher than those resulting from a potential; for instance, the critical tangential (i.e. remaining normal to the end cross-section) force for a cantilever beam exceeds by about eight times the corresponding eulerian force. In this respect, the problem of applicability of these results in engineering practice becomes of primary importance.

In the paper, the analysis of the stress distribution in a vibrating cantilever beam loaded by a subcritical tangential force is given. In general, the exact equation of vibrations of the system with distributed masses is considered, whereas in numerical calculations two leading modes of vibrations are taken into account. It is shown that the maximum stress occurs either at the clamped end of the beam or at a certain intermediate point of the length (local maximum). The stress criterion of safety was formulated and shown graphically for various ratios of admissible stress k to the Young's modulus E . The results are compared with the case of conservative compressive forces. It is shown that the admissible force exceeds by many times the corresponding value of a force fixed in direction, provided the admissible stress k remains the same.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1966 r.

URZĄDZENIE DO DYNAMICZNEGO SKRĘCANIA

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jak wiadomo, obecnie dopuszcza się dwa warunki plastyczności, mianowicie warunek minimum energii odkształcenia postaciowego (warunek Hubera-Misesa) oraz warunek maksymalnych naprężeń tnących (warunek Treski). Obydwa warunki wykazują dobrą zgodność z wynikami doświadczeń w przypadku badań statycznych, przy czym za bardziej ścisły uważa się warunek Hubera-Misesa. Należy podkreślić, że w obydwu warunkach zasadnicze znaczenie mają naprężenie tnące τ i odkształcenie postaciowe γ . Stąd też próby przy czystym ścinaniu, a takimi są próby skręcania cienkościennych próbek rurkowych, mają tak duże znaczenie. Próby te pozwalają na bezpośrednie otrzymanie krzywej umocnienia we współrzędnych τ — γ i porównanie wyników np. z wynikami dla jednoosiowego rozciągania.

Z drugiej strony wiadomo, że materiały, w szczególności metale, są wrażliwe na prędkość odkształcenia. Zjawisko to jest obecnie intensywnie badane, jednak w większości przypadków w warunkach jednoosiowego rozciągania bądź ściskania. Liczba badań na skręcanie próbek rurkowych jest znikoma.

Wymienione czynniki były powodem do zaprojektowania i wykonania urządzenia do dynamicznego skręcania. Urządzeń takich skonstruowano dotychczas niewiele i wszystkie są oparte na podobnych zasadach.

Jedną z pierwszych jest konstrukcja opisana w pracy [2] (ITIHIRA, 1933), która umożliwia zarówno statyczne jak i dynamiczne skręcanie próbek; rejestracja momentu skręcającego i kąta skręcenia odbywała się na papierze fotograficznym. Układ rejestrujący moment skręcający, który polegał na pomiarze kąta skręcenia długiego sprężystego wałka zakończonego lusterkiem, wykazywał poważne wady przy wyższych prędkościach deformacji. Drgania tego wałka o dużej amplitudzie i o małej częstotliwości uniemożliwiały prawidłową interpretację wyników.

Niewątpliwie udaną konstrukcją jest maszyna do skręcania z różnymi prędkościami, przedstawiona w pracy [7] (WORK i DOLAN, 1954). Maszyna ta umożliwia skręcanie przy czterech prędkościach odkształcenia w granicach od $\eta_{min} = 1,10^{-4}$ sek.⁻¹ do $\eta_{max} = 12,5$ sek.⁻¹. Przy pomiarze momentu skręcającego wykorzystano dynamometr z naklejonymi tensometrami elektrooporowymi, dla rejestracji kąta przewidziano urządzenie oparte na zasadzie suwaka i spirali oporowej oraz niezależnie fotokomórki. Przebiegi rejestrowano na oscylografie pętlicowym.

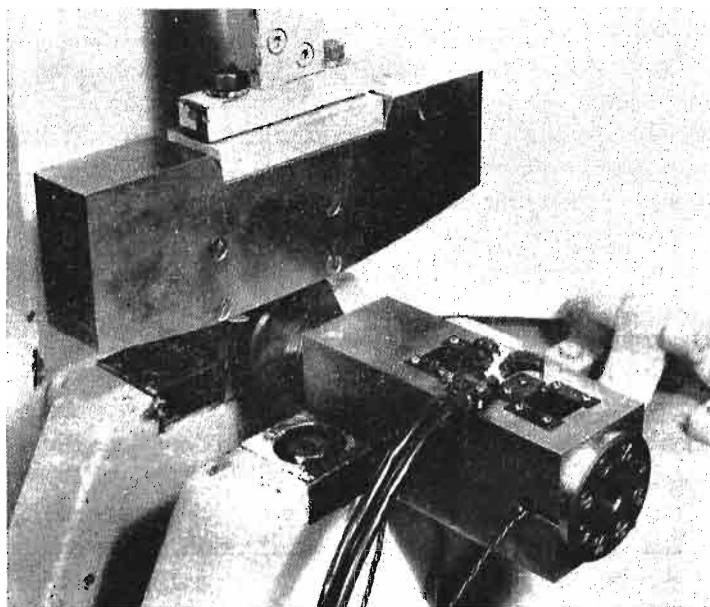
Również w pracy [1] zamieszczono wyniki doświadczeń otrzymane dla żelaza w takich samych granicach prędkości odkształcenia.

Najnowszą konstrukcją, która zapewnia jak dotychczas maksymalne prędkości odkształcenia przy skręcaniu $\eta_{\max} = 60 \text{ sek.}^{-1}$, jest konstrukcja opisana krótko w pracy [6] (MIMA i HORI, 1965). Zasada działania i metody rejestracji nie różnią się zasadniczo od konstrukcji omówionej poprzednio, z tym jednak, że kąt skręcenia jest mierzony za pomocą styku odpowiednio włączającego się po określonym przyroście kąta podczas obrotu uchwytu mocującego próbkę.

Wszystkie wymienione konstrukcje opierają się na podobnych zasadach i stanowią pewną klasę maszyn podobnego typu.

2. Zasada działania i konstrukcja

Omawiane urządzenie do dynamicznego skręcania zostało zbudowane na nieco innych zasadach. Jest to przystawka do młota «Charpy» produkcji WPM Lipsk typu PSW 30.



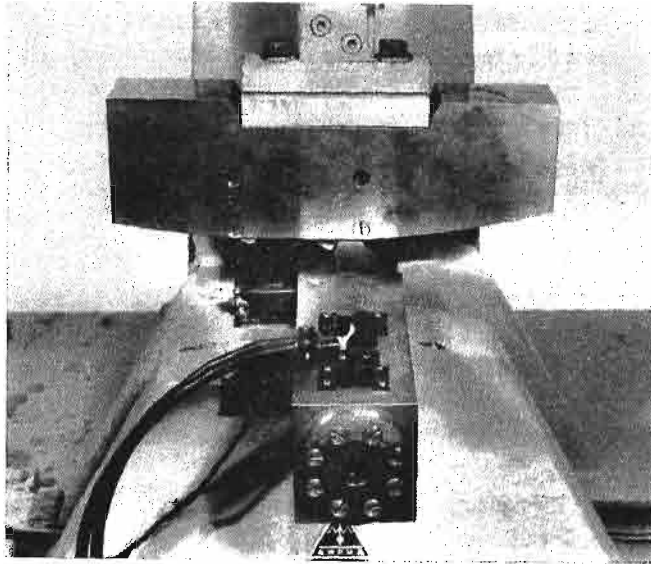
Rys. 1. Ogólny widok urządzenia do dynamicznego skręcania (bez oświetlaczy)

Urządzenie jest zakładane na miejsce wymiennych podpór do zginania próbek, równocześnie zamienia się ciężar wahadła na inny odpowiednio skonstruowany. Ogólny widok urządzenia został przedstawiony na rys. 1 i 2, a jego szkic na rys. 3.

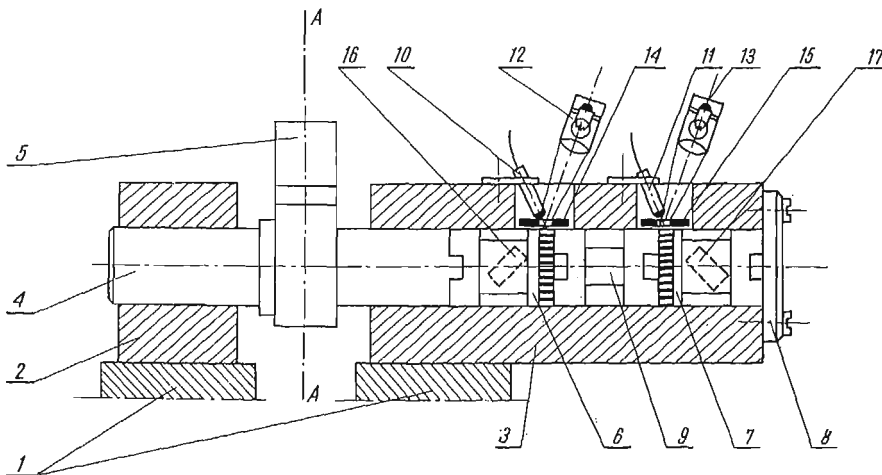
Zasada działania części mechanicznej jest następująca. Wahadło uderza bijakiem o krzywkę 5 osadzoną na wałku 4. Wałek umieszczony w łożyskach podstawy 2 oraz korpusu 3 obraca się przekazując moment obrotowy na czynną głowicę pomiarową 6, ta z kolei skręca próbkę 9. Bierna głowica pomiarowa 7 jest zamocowana z jednej strony do korpusu, a z drugiej połączona z próbką. W ten sposób próbka ulega skręcaniu pomiędzy dwiema

głowicami pomiarowymi. Podstawa łożyska wałka oraz korpus są mocowane do podstawy młota 1. Wahadło wraz z bijakiem w pozycji odpowiadającej momentowi uderzenia jest widoczne na rys. 2. Maksymalna prędkość wahadła w momencie uderzenia wynosi około 5 m/sek. Natomiast, aby podczas powrotu wahadła nie było następnych uderzeń, bijak chowa się jedynie uderzając lekko o krzywkę.

Należy dodać, że prędkość skręcania jest regulowana bądź wysokością i kształtem krzywki, bądź wysokością, z której jest opuszczane wahadło.



Rys. 2. Widok urządzenia w momencie uderzenia wahadła o krzywkę



Rys. 3. Szkic urządzenia

A-A płaszczyzna wahadła młota. 1-podstawa młota, 2-podstawa łożyska, 3-korpus, 4-walek, 5-krzywka, 6-czynna głowica pomiarowa, 7-bierna głowica pomiarowa, 8-zamocowanie biernej głowicy pomiarowej, 9-próbka, 10 i 11 -fotodiody, 12 i 13-oświetlacze, 14 i 15-plateki z prostokątnymi szczelinami, 16 i 17-tensometry elektrooporowe

Niewątpliwie najtrudniejszym problemem w badaniach dynamicznych są pomiary i z tego powodu metody mierzenia momentu skręcającego i kąta skręcenia podczas procesu deformacji zostaną omówione nieco szerzej. Temu celowi służą dwie identyczne odpowiednio zaprojektowane i wykonane głowice pomiarowe.

Pomiar momentu skręcającego jest następujący i opiera się na przyjęciu zasady pomiarów quasi-statycznych. Zasada ta polega na tym, że pomija się efekty falowe zarówno w układzie dynamometrów jak i w próbce. Prawidłowe i optymalne wykorzystanie tej zasady w pomiarach dynamicznych tego typu polega na tym, że elementy mierzące siły powinny znajdować się po czynnej i biernej stronie próbki. W ten sposób można na drodze eksperymentalnej oszacować ewentualne błędy wynikłe z pominięcia analizy falowej. Po drugie, elementy mierzące siły powinny znajdować się jak najbliżej próbki, dzięki czemu czas przejścia fali sprężystej pomiędzy tymi elementami jest możliwie krótki.

Innymi słowy zakłada się, że to co zostaje zarejestrowane z obydwóch głowic pomiarowych ma miejsce w tym samym momencie w próbce. Mamy tu na myśli wartości momentu skręcającego i kąta skręcenia.

Dalej, głowica pomiarowa przeznaczona do badań dynamicznych powinna mieć odpowiednio dużą częstotliwość i małą amplitudę drgań własnych; warunek ten zapewnia się przez dobranie odpowiedniej sztywności.

Wszystkie te warunki starano się spełnić w naszej konstrukcji. Głowice pomiarowe zostały wykonane z wysokogatunkowej hartowanej stali narzędziowej. Na części pomiarowej w postaci odpowiednio sztywnej rurki naklejono po dwa tensometry elektrooporowe w układzie samokompensacyjnym pod kątem 45° do osi głowicy. W ten sposób w pomiarze momentu skręcającego wykorzystano tensometrię elektrooporową.

Obliczmy teraz czas przejścia fali sprężystej i plastycznej pomiędzy środkami naklejonych tensometrów elektrooporowych. Oczywiście fala plastyczna może ewentualnie powstać jedynie na długości pomiarowej próbki. Jak wiadomo, prędkość fali ścinania wyraża się wzorem

$$(1) \quad c = \sqrt{\frac{d\tau}{d\varphi} \frac{1}{\rho}},$$

gdzie przez τ oznaczono naprężenie tnące, przez φ odkształcenie postaciowe, ρ gęstość. Dla przypadku fali sprężystej mamy

$$(2) \quad c_{\text{spr}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

gdzie G oznacza moduł Kirchhoffa.

Czas przejścia fali jest sumą czasów przejścia przez uchwyty próbki i części głowic pomiarowych t_1 oraz czasu przejścia przez długość pomiarową próbki t_2 , stąd

$$t = t_1 + t_2, \quad t = \frac{l'}{c_{\text{spr}}} + \frac{l_0}{c},$$

więc

$$(3) \quad t = l' \sqrt{\frac{\rho}{G}} + \frac{l_0 \sqrt{\rho}}{\sqrt{d\tau/d\varphi}}.$$

Gdy cały układ znajduje się w stanie sprężystym, a próbka jest wykonana ze stali, wówczas mamy

$$t = l \sqrt{\frac{\rho}{G}}, \quad l = l' + l_0.$$

Biorąc wartości liczbowe $G = 8,1 \cdot 10^3$ kG/mm², $l' = 72$ mm, $l_0 = 10$ mm, $\rho = 7,85$ g/cm³, $l = 82$ mm, otrzymujemy $t = 0,0257$ m sek. O ile w próbce propaguje się fala plastyczna, to zakładając $d\tau/d\varphi = 0,02$ G, co odpowiada zaawansowanemu płynięciu plastycznemu mamy

$$t = \frac{1}{c_{spr}} (l' + \sqrt{50} l_0),$$

po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $t = 0,0447$ msek.

Ponieważ w obecnych badaniach czasy skręcania wynosiły średnio około 3 msek, to z przedstawionych obliczeń wynika, że zaprojektowany układ mierzący moment można traktować z powodzeniem w sposób quasi-statyczny. Wniosek taki jest podyktowany tym, że czas przejścia pierwszej fali przez układ mierzący i próbkę jest około sto razy krótszy od czasu jej odkształcania.

Jak wspomniano poprzednio drugim czynnikiem ograniczającym czas rejestracji momentu od strony czasów krótkich jest częstość drgań własnych dynamometru. W tym przypadku wymaga się, aby okres drgań własnych T był kilkakrotnie krótszy od czasu deformacji próbki. W rozważanym przypadku po przeprowadzeniu pomiarów na oscylogramach okazało się, że częstość drgań własnych głowic pomiarowych wynosi $\omega = 3705$ Hz, co odpowiada $T = 0,27$ msek. Okres ten jest więc kilkanaście razy krótszy od czasu skręcenia próbki i również w tym przypadku pomiary można traktować jako quasi-statyczne.

Zasada pomiaru kąta skręcenia próbki jest podobna do opisanej w pracy [3] dla przypadku pomiarów przemieszczeń liniowych. Zasadę tę omówimy krótko w oparciu o schemat z rys. 3. Na głowicach pomiarowych 6 i 7 nacięto na całym obwodzie rowki o podziałce kątowej $\lambda = 4^\circ$, które następnie zaczerzciono. W górnych otworach korpusu nad naciętą częścią głowicy umieszczono poczernione blaszki mosiężne 14 i 15 z prostokątnym wycięciem o szerokości odpowiadającej szerokości rowków, tj. około 1 mm. Nad otworami w blaszkach zamocowano odpowiednio fotodiody 10 i 11 oraz oświetlacze 12 i 13. W czasie ruchu obrotowego głowicy czynnej 6 pod wycięciem w blaszce pojawiają się kolejno jasne i ciemne pola; ponieważ pola te są oświetlone, fotodiody stają się źródłem prądu o przebiegu zbliżonym do sinusoidalnego. Jednemu okresowi sinusoidy odpowiada kąt skręcenia równy λ , wobec czego bieżący kąt skręcenia w danym momencie wynosi

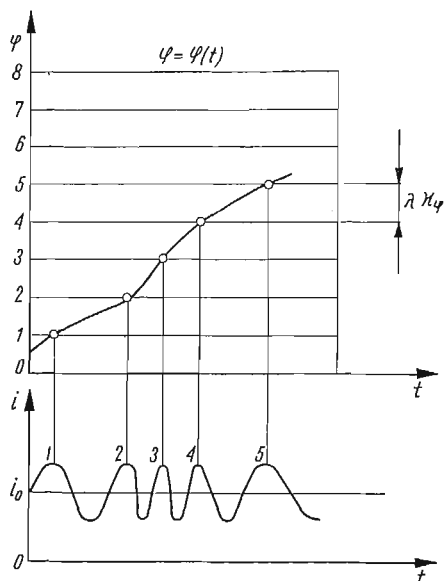
$$\alpha = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots (i-1), i.$$

Po wprowadzeniu podziałki odkształcania κ_φ otrzymujemy

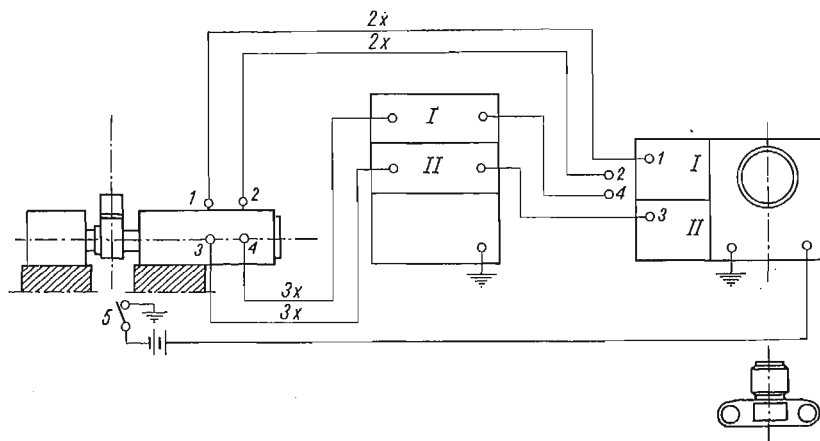
$$(4) \quad \varphi = n\lambda\kappa_\varphi; \quad n = 1, 2, 3, \dots (i-1), i, \quad \text{gdzie} \quad \kappa_\varphi = \pi r \frac{\alpha}{180^\circ};$$

przez r oznaczono średni promień części rurkowej próbki.

Mamy więc do czynienia z zasadą «modulacji częstotliwości», gdyż częstotliwość prądu z fotodiody zmienia się w zależności od prędkości ruchu obrotowego głowicy. Dla znalezienia zmian kąta skręcenia próbki w funkcji czasu, $\alpha = \alpha(t)$, lub wartości



Rys. 4. Schemat otrzymywania wykresu zmian kąta skręcenia próbki w funkcji czasu, t -oś czasu, i_0 -prąd ciemny fotodiody, φ -oś odkształcenia



Rys. 5. Schemat blokowy układu pomiarowego

odkształcenia w funkcji czasu $\varphi = \varphi(t)$ należy korzystać ze schematu przedstawionego na rys. 4. W tym celu dzielimy oś φ poziomymi liniami równoległymi do osi czasu na odcinki o wartości $\lambda\kappa_\varphi$ lub mniejsze w zależności od potrzebnej liczby punktów na wykresie $\varphi = \varphi(t)$ i numerujemy je kolejno. Na przykład przy opracowaniu obecnych wyników przyjęto podział $\lambda/4$. Następnie na osi czasu odkładamy pionowo odcinki odpowiadające

kolejnym wierzchołkom sinusoidy lub np. 1/4 okresu sinusoidy w zależności od przyjętego podziału również numerując je kolejno. Przecięcia linii poziomych i pionowych o jednakowych wartościach n stanowią poszukiwane punkty wykresu $\varphi = \varphi(t)$. Dysponując więc trzema kanałami rejestracji można otrzymać pełne dane o przebiegu skręcania próbki. Kąt skręcenia głowicy biernej jest tak mały, że praktycznie nie wymaga rejestracji przy odpowiednio dużych kątach skręcenia próbki, wtedy fotodioda *II* nie pracuje.

Schemat blokowy układu rejestrującego przebiegi dynamiczne został przedstawiony na rys. 5. Układ jest dostosowany do jednego synchronoskopu dwukanałowego.

Z korpusu wyprowadzono przewody 1 i 2 z fotodiod oraz przewody 3 i 4 od tensometrów elektrooporowych naklejonych na głowicach pomiarowych. Przewody z tensometrów doprowadzono na wejścia dwóch kanałów *I* i *II* trójkanałowego mostka tensometrycznego do pomiarów dynamicznych typu ZPT-147/II firmy «Chemiter» o pasmie przenoszenia od 0 do 1800 Hz 3dB. Jedno z wyjść mostka, w tym przypadku wyjście z kanału *II*, połączono z wejściem y kanału *II* synchronoskopu. W obecnych badaniach użyto dwukanałowego synchronoskopu typu OKD-505A firmy «Radiotechnika» o pasmie przenoszenia 0–4 MHz. Wyjście 1 z fotodiody połączono bezpośrednio z wejściem y kanału *I* synchronoskopu. Wzmocnienie na kanale *I* synchronoskopu zostało tak dobrane, aby fotodioda pracowała bez zasilania prądem stałym, przy czym do badań zostały użyte fotodiody germanowe typu FG-2 firmy «Тева».

Przebiegi rejestrowano w ten sposób, że styk 5 był zwierany przez przechodzące wahadło, a zamknięcie obwodu powodowało jednorazowe wyzwolenie podstawy czasu w synchronoskopie. Ekran lampy synchronoskopu fotografowano małoobrazkowym aparatem fotograficznym.

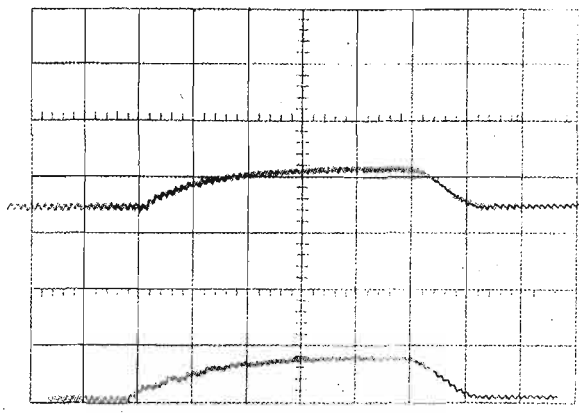
Opisany układ wykazał pełną sprawność działania zarówno w zakresie części mechanicznej jak i pomiarowej.

3. Wyniki doświadczeń

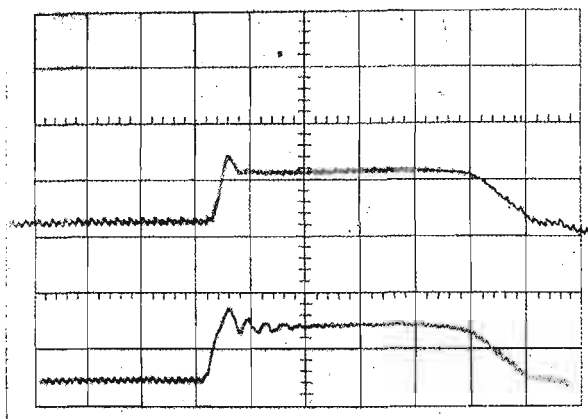
W celu otrzymania dynamicznej krzywej umocnienia dla polikrystalicznego technicznie czystego aluminium (99,95% Al) w stanie wyżarzonym oraz dla żelaza «Armco» (0,04% C) również w stanie wyżarzonym przeprowadzono dwie serie doświadczeń. Wszystkie doświadczenia przeprowadzono na cienkościennych próbkach rurkowych o długości czynnej $l_0 = 10$ mm, średnicy zewnętrznej $d_{Al} = 18$ mm; $d_{Fe} = 13$ mm, grubości ścianki $g_{Al} = 1$ mm; $g_{Fe} = 0,5$ mm.

Po wycechowaniu układu mierzącego moment za pomocą dostawnego wahadła o znanej maksymalnej wartości momentu przeprowadzono próby dynamiczne z wyłączną rejestracją momentu skręcającego w funkcji czasu $M = M(t)$ jednocześnie dla dwóch głowic pomiarowych. Próby te przeprowadzono dla porównania wyników z poprzednimi przewidywaniami odnośnie do traktowania procesu skręcania jako quasi-statycznego. Typowe oscylogramy z takich prób dla aluminium i żelaza przedstawiono na rys. 6 i rys. 7. Dolny kanał rejestrował przebieg skręcania z głowicy czynnej, górny z głowicy biernej. Czas skręcania w obydwu przypadkach tj. dla aluminium i żelaza wynosił około 4,5 msek. Z dolnych przebiegów można zaobserwować amplitudę i częstość drgań własnych czynnej głowicy pomiarowej o średnim okresie $T = 0,27$ msek. Górne przebiegi są przesunięte

równoległe o około 0,06 msek w stosunku do dolnych, a ich kształt nie różni się zasadniczo od przebiegów dolnych. Należy stąd wyciągnąć wniosek, że wyniki doświadczalne potwierdzają możliwość opracowania pomiarów w oparciu o założenie procesu quasi-stacynnego.



Rys. 6. Oscylogram z równoczesnego pomiaru momentu skręcającego z dwóch głowic pomiarowych dla próbki aluminiowej. Na kanale górnym rejestrowano wskazania biernej głowicy pomiarowej, na dolnym czynnej

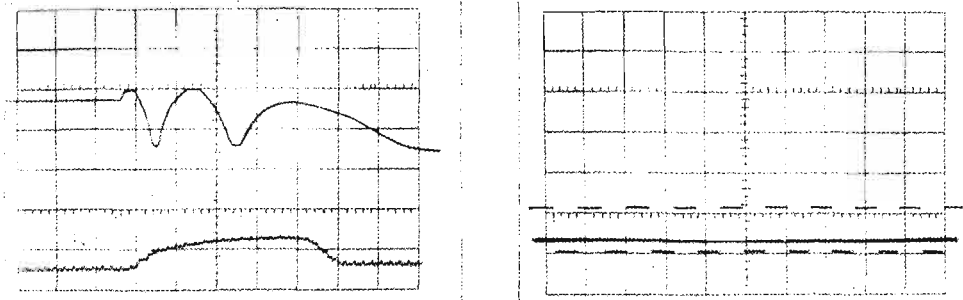


Rys. 7. Oscylogram z równoczesnego pomiaru momentu skręcającego z dwóch głowic pomiarowych dla próbki z żelaza «Armco». Na kanale górnym rejestrowano wskazania biernej głowicy pomiarowej, na dolnym czynnej

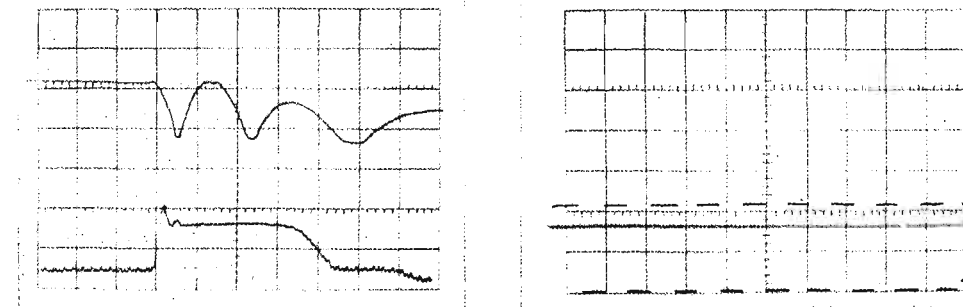
Druga seria badań, którą należy uznać za próby właściwe, polegała na dynamicznym skręcaniu serii próbek z aluminium i żelaza, aby następnie porównać otrzymane krzywe umocnienia z krzywymi statycznymi. Krzywe statyczne otrzymano na maszynie do skręcania opisanej w pracy [4], przy czym używano próbek o identycznych wymiarach jak w badaniach dynamicznych.

Rejestracja momentu skręcającego odbywała się przy użyciu głowicy pomiarowej biernej, rejestracja kąta skręcenia przy wykorzystaniu fotodiody 10 (rys. 3) i głowicy

pomiarowej czynnej. Skalowanie czasu odbywało się każdorazowo po rejestracji przebiegu skręcania przez fotografowanie na następnej klatce filmu prostokątnego przebiegu o częstotliwości wzorcowej 1000 Hz. Typowe przebiegi zarejestrowane w ten sposób zostały przedstawione na rys. 8 i 9.



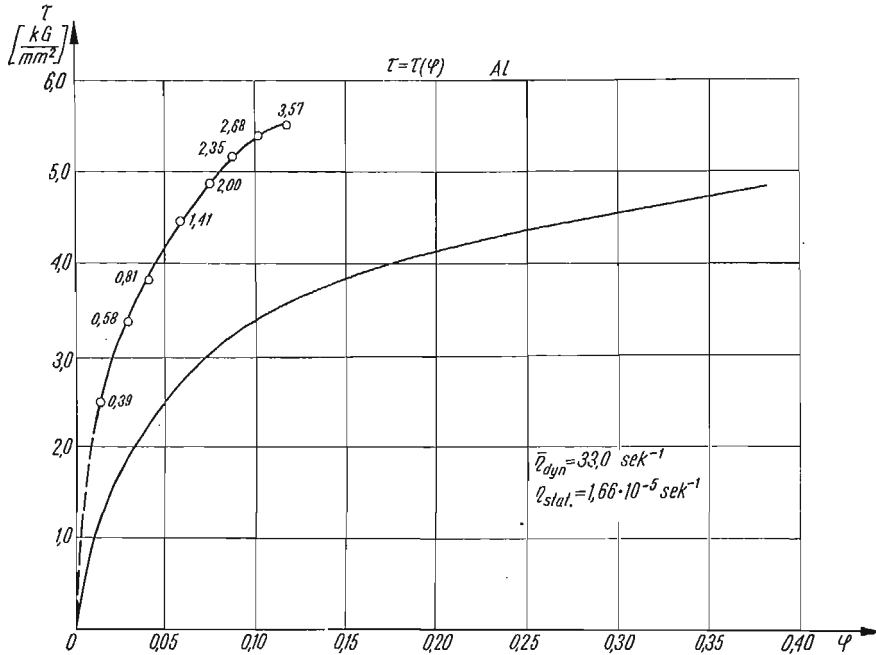
Rys. 8. Oscylogramy pomiaru kąta skręcenia i momentu skręcającego dla próbki aluminiowej oraz skalowania czasu przebiegiem prostokątnym o częstotliwości wzorcowej 1000 Hz



Rys. 9. Oscylogramy pomiaru kąta skręcenia i momentu skręcającego dla próbki z żelaza «Armco» oraz skalowania czasu przebiegiem prostokątnym o częstotliwości wzorcowej 1000 Hz

Pomiar otrzymanych fotogramów odbywał się na dużym mikroskopie pomiarowym z praktyczną dokładnością $\pm 0,003$ mm. Taka dokładność wraz z odpowiednio dokładnym systemem cechowania gwarantuje dokładność pomiaru naprężenia tnącego $\Delta\tau_{Fe} \approx 2,5\%$ dla żelaza oraz $\Delta\tau_{Al} \approx 3\%$ dla aluminium w obydwu przypadkach przy odkształceniu $\varphi \approx 0,10$.

W wyniku pomiarów otrzymywano informacje o dwóch rejestrowanych przebiegach w czasie, mianowicie funkcje $M = M(t)$ oraz $\varphi = \varphi(t)$. Odpowiednie czasy obliczano ze wzoru $t = \kappa, x$ znając podziałkę czasu κ , z przebiegu cechowania czasowego; współrzędna x jest liczona od momentu rozpoczęcia procesu skręcania. Po wyrugowaniu czasu otrzymano dynamiczne krzywe umocnienia, które zostały pokazane wraz z krzywymi statycznymi na rys. 10 i 11. Liczby przy odpowiednich punktach dynamicznej krzywej umocnienia oznaczają czas w milisekundach, który upłynął od początku procesu skręcania próbki. Aby równocześnie wyznaczyć funkcje historii prędkości $d\varphi/dt = \eta(\varphi)$, które są niezbędne do otrzymania kompletnej informacji o zachowaniu się badanych



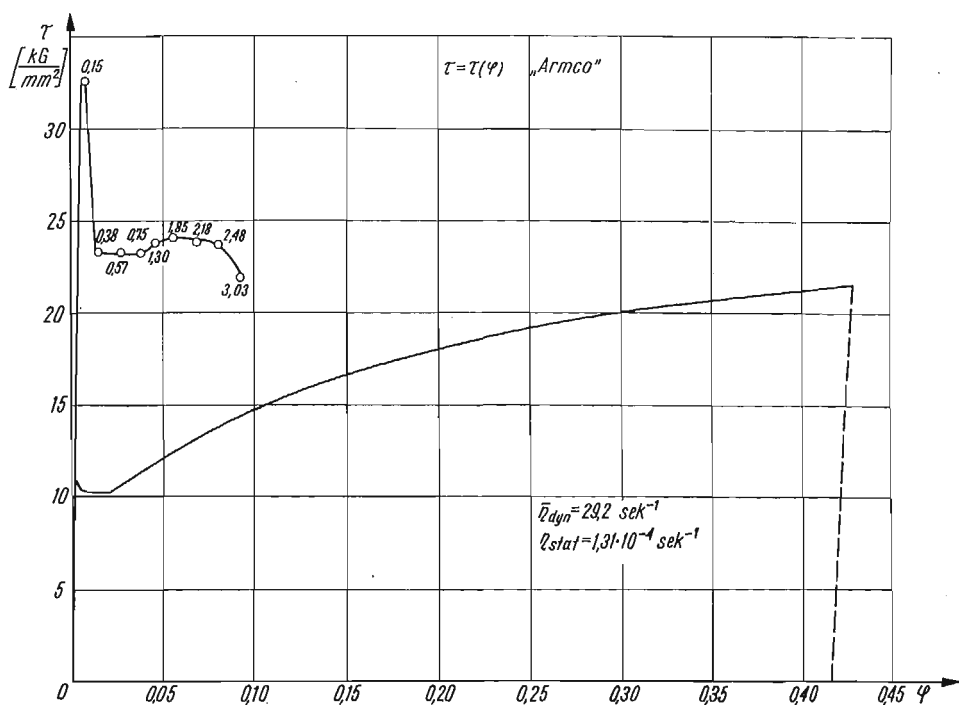
Rys. 10. Statyczna i dynamiczna krzywa umocnienia dla badanego aluminium (liczby przy punktach oznaczają czas w milisekundach liczony od początku procesu skręcania, $\bar{\nu}_{dyn}$ oznacza średnią prędkość odkształcenia w warunkach dynamicznych, ν_{stat} — prędkość odkształcenia dla warunków statycznych)

metali w warunkach dynamicznych, sporządzono wykresy $\varphi(t)$ i następnie różniczkowano je wykreślnie. Otrzymane w ten sposób funkcje $\eta = \eta(\varphi)$ dla aluminium i żelaza «Armco» przedstawiono na rys. 12 i 13.

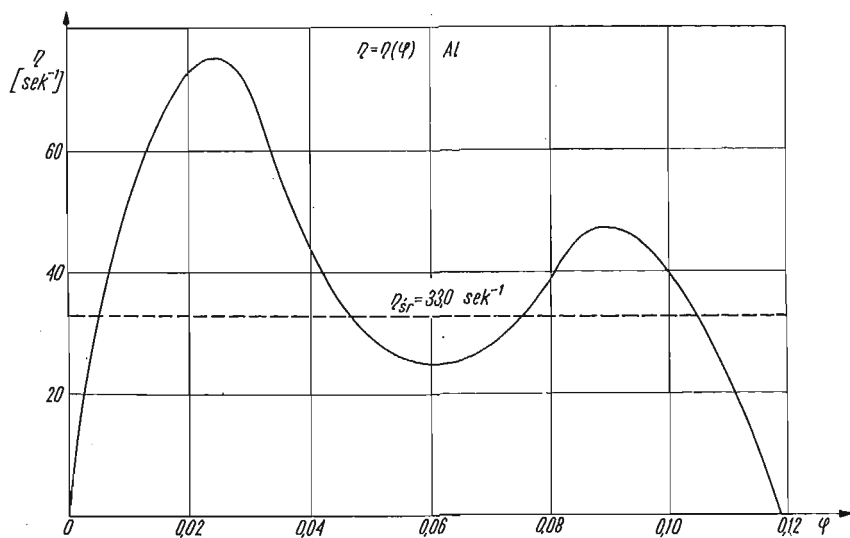
Z przedstawionych wykresów wynika, że maksymalne prędkości odkształcenia w obecnych badaniach są rzędu 80 sek^{-1} . Średnie prędkości odkształcenia zostały podane na rysunkach. Charakterystyczne zmiany prędkości odkształcenia wraz ze wzrostem odkształcenia, tj. istnienie minimum, pozwalają w pierwszym przybliżeniu na traktowanie otrzymanych krzywych umocnienia jako krzywych dla średnich prędkości odkształcenia. Opierając się na tym założeniu sporządzono dla aluminium wykres czułości na prędkość n w funkcji odkształcenia $n = n(\varphi)$. Czułość na prędkość n jest definiowana jako

$$(5) \quad n = \frac{\partial \log \tau}{\partial \log \eta} \quad \text{lub} \quad n = \frac{\log \frac{\tau_2}{\tau_1}}{\log \frac{\eta_2}{\eta_1}}, \quad \eta_2 > \eta_1, \quad T = \text{const.}$$

Z założenia funkcja $n = n(\varphi)$ w stałej temperaturze T nie powinna zależeć od odkształcenia (por. np. praca [5]). Wykres ten przedstawiono na rys. 14, przy czym do obliczeń przyjmowano wartości $\eta_2 = 33,0 \text{ sek}^{-1}$, $\eta_1 = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{ sek}^{-1}$. Ponieważ wartości n praktycznie nie zmieniają się ze wzrostem odkształcenia, przeto należy uznać, że otrzymany wynik dla aluminium jest zgodny z przewidywaniami.

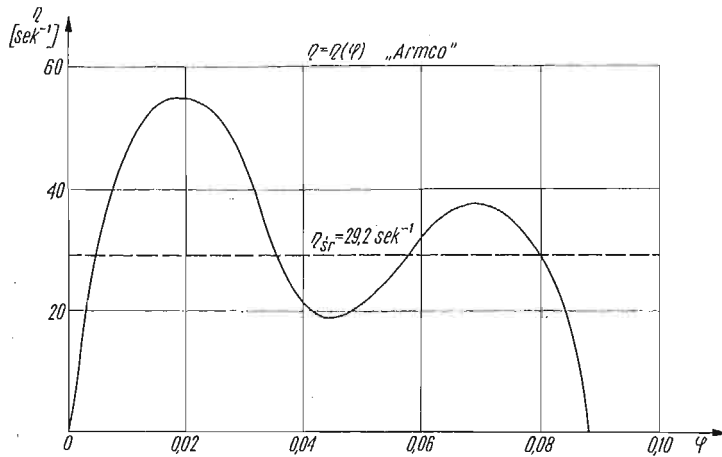


Rys. 11. Statyczna i dynamiczna krzywa umocnienia dla żelaza «Armco», liczby przy punktach oznaczają czas w milisekundach liczony od początku procesu skręcania, $\bar{\eta}_{dyn}$ oznacza średnią prędkość odkształcenia w warunkach dynamicznych, η_{stat} — prędkość odkształcenia dla warunków statycznych



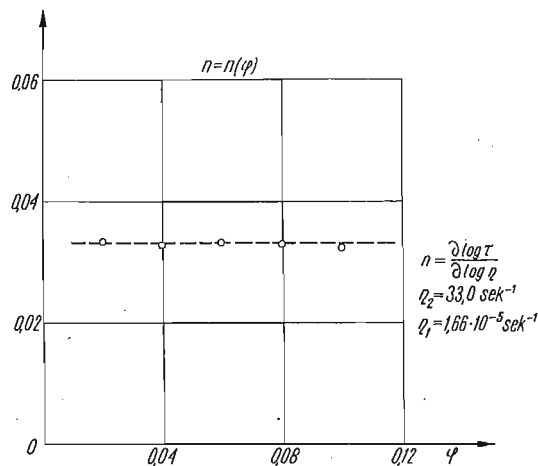
Rys. 12. Zmiany prędkości odkształcenia w funkcji odkształcenia $\eta = \eta(\varphi)$ dla próbki aluminiowej

W przypadku żelaza «Armco» widoczny jest wyraźny wzrost zarówno górnej jak i dolnej granicy plastyczności, stosunek górnych granic plastyczności wynosi $(\sigma_{dyn}/\sigma_{stat})_{(p1)} = 2,95$, a stosunek dolnych $(\sigma_{dyn}/\sigma_{stat})_{(p1)} = 2,29$. Charakterystycznym faktem jest to,



Rys. 13. Zmiany prędkości odkształcenia w funkcji odkształcenia $\eta = \eta(\varphi)$ dla próbki z żelaza «Armco»

że krzywa umocnienia otrzymana w warunkach dynamicznych leży poniżej górnej granicy plastyczności $\sigma_{(p1)dyn}$. Zjawisko takie jest najprawdopodobniej wywołane dużą sztywnością układu mechanicznego skręcającego próbkę. Jak wspomniano poprzednio, duża sztywność głowic jest korzystna ze względów pomiarowych. Zakończenie procesu skręcania przy odkształceniu $\varphi \approx 0,10$ zostało podyktowane jedynie przez geometrię układu krzywka-



Rys. 14. Otrzymane wartości czułości na prędkość n w funkcji odkształcenia dla badanego aluminium

bijak i nie jest spowodowane zniszczeniem próbki, jak mogłoby się wydawać z kształtu krzywej umocnienia. Zmniejszenie się naprężenia plastycznego płynięcia w zakresie odkształceń $\varphi \approx 0,10$ jest prawdopodobnie spowodowane relaksacją naprężenia wskutek zmniejszenia się prędkości odkształcenia.

4. Wnioski

W wyniku przeprowadzonej dyskusji i przytoczonych rezultatów doświadczeń można podać następujące wnioski:

1. Obrany system części mechanicznej urządzenia oraz system pomiarowy okazały się prawidłowe i wykazały pełną sprawność.

2. Na opisanym urządzeniu do dynamicznego skręcania uzyskano maksymalne prędkości odkształcenia rzędu 100 sek^{-1} . Zasada pracy układu pomiarowego pozwala na skręcanie i pomiar przebiegu z maksymalną prędkością odkształcenia rzędu 500 sek^{-1} .

3. Opisane urządzenie może stanowić podstawę dla konstrukcji maszyny do skręcania w dużym zakresie prędkości odkształcenia.

4. W wyniku doświadczeń otrzymano krzywe umocnienia dla aluminium i żelaza «Armco» przy maksymalnych prędkościach odkształcenia rzędu 80 sek^{-1} . Krzywe te porównano z krzywymi statycznymi dla tych metali.

Wśród pozostałych czynników, które należałoby wymienić niewątpliwie istotnym faktem jest stały przekrój próbki w próbie skręcania. Zagadnienie to jest ważne w badaniach dynamicznych, gdyż stały przekrój próbki nie pociąga za sobą efektu bezwładności poprzecznej. Efekt ten istnieje w próbkach ściskanych bądź rozciąganych i może nieco zmieniać stan naprężeń w próbce.

Otrzymane dynamiczne krzywe umocnienia przy skręcaniu cienkościennych próbek rurkowych, można porównać z wynikami otrzymanymi z prób na ściskanie lub rozciąganie. Jak wspomniano na wstępie, zagadnienie to jest szczególnie ważne z punktu widzenia teorii plastyczności.

Literatura cytowana w tekście

1. P. E. BENNET, G. M. SINCLAIR, *An analysis of the time and temperature dependence of the upper yield point of iron*, Trans. ASME, 4, 83 D (1961), 557.
2. M. ИТИХАРА, *Impact torsion test*, Technology Rep. Tohoku Imp. Univ., 1, XI (1933), 16 (part 1); 4, XI (1933), (parts 2, 3, 4).
3. J. KLEPACZKO, *Czujnik ekstensometryczny z fotodiodą do pomiarów statycznych i dynamicznych*, Pomiar Automatyka Kontrola, 11, 12 (1966), 466.
4. J. KLEPACZKO, *Wpływ zmian prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia aluminium*, Rozprawa doktorska, IPPT PAN (1965).
5. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inżyn., 3, 13 (1965), 561.
6. G. MIMA, S. HORI, *Some torque-twist relations on low temperature dynamic torsion test of low carbon steel*, Techn. Rep. Osaka Univ., 638-657, 15 (1965), 37.
7. C. E. WORK, T. J. DOLAN, *Applications of experimental stress analysis to torsion research*, Proc. SESA, 1, 12 (1954), 79.

Р е з ю м е

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ НА КРУЧЕНИЕ

В статье дано описание конструкции и принципа действия устройства для динамических испытаний образцов на кручение. Объяснена техника измерений, а также проведен анализ системы с точки зрения распространения волн сдвига.

Устройство задумано как дополнительная приставка для повсеместно используемого копра „Шарпи” тип *PSW 30* производства фирмы *WPM* Лейпциг. Конструктивная схема используемая в данном устройстве может служить основой для конструкции стенда способного скручивать образцы в широком интервале скоростей деформаций. Максимальные скорости деформации сдвига полученные в описываемом устройстве равны ок. 100 сек^{-1} , однако принцип действия регистрирующей системы дает возможность исследования процесса кручения при скорости деформаций до 500 сек^{-1} .

В заключение статьи обсуждены результаты испытаний железа »Агтсо« и поликристаллического алюминия (99.95% *Al*). Построены на основе опытов динамические кривые упрочнения этих металлов сравниваются со статическими кривыми.

S u m m a r y

IMPACT TORSION TEST APPARATUS

The paper contains description of the design and working principles of an apparatus for impact torsion test. The mechanical design and measuring technique is discussed along with a short analysis of the shear waves propagation in the device.

The apparatus is applied to an ordinary Charpy hammer with the energy capacity 30 kgm. The design principles of the device may be used as the basis for designing of the torsion testing machines with large strain rate range up to 500 sec^{-1} . Using present device a maximum strain rate equal to 100 sec^{-1} has been reached.

At the end of the paper some experimental results for the Armco iron and polycrystalline aluminium (99.95% *Al*) are presented. For both metals dynamic stress-strain curves have been obtained and later compared with the static curves.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 grudnia 1966 r.

QUASI-STATYCZNE TERMONAPRĘŻENIA W PŁASKOWNIKU PRZEWODZĄCYM PRĄD
ELEKTRYCZNY I ODDAJĄCYM CIEPŁO PRZEZ KÓNWEKCJĘ

EDWARD KĄCKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

W wielu urządzeniach elektrycznych elementami przewodzącymi prąd elektryczny są pręty o przekroju prostokątnym. Poza tak charakterystycznymi urządzeniami jak szyny zbiorcze w rozdzielniach czy też w podstacjach elektrycznych spotyka się dość często w różnych aparatach części przewodzące prąd w postaci płaskowników. Na szczególną uwagę zasługują elementy grzejne znacznych mocy ogrzewające bezpośrednio pewien roztwór. Dzięki zanurzeniu w kąpeli są one intensywnie chłodzone i stąd powstaje możliwość stosowania znacznych gęstości mocy, a w następstwie tego możliwość powstawania nadmiernych termonaprężeń. W szynach zbiorczych jak i w wymienionych częściach aparatów przewodzących prąd elektryczny spotykamy się — szczególnie w przypadkach zwarć i przetężeń — z zagadnieniem niebezpiecznych naprężeń mechanicznych wywołanych polem temperatury. Znajomość quasi-statycznych termonaprężeń pozwala na zastosowanie zabezpieczeń przetężeniowych o dostatecznie krótkim czasie reakcji.

Wzory wyprowadzone w niniejszej pracy dotyczą pręta nieskończenie długiego o przekroju prostokątnym, którego powierzchnie boczne oddają ciepło do otoczenia wg prawa Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła.

Rozważania są przeprowadzone przy założeniu, że parametry charakteryzujące materiał płaskownika przewodzącego prąd elektryczny są stałe w czasie i w przestrzeni a ponadto materiał jest izotropowy. Gęstość natężenia prądu elektrycznego jest jednakowa w każdym punkcie płaskownika, zatem jest jednakowa w każdym punkcie gęstość mocy zamienianej na ciepło. Wymieniona gęstość mocy p wynosi:

$$(1.1) \quad p = j^2 \varrho,$$

gdzie j jest gęstością natężenia prądu elektrycznego, a ϱ opornością właściwą materiału płaskownika.

Praca składa się z trzech zasadniczych części: a) zawierającej wyprowadzenie funkcji określającej zmienne w czasie pole temperatury w pręcie, b) stanowiącej wyprowadzenie wzorów określających pole quasi-statycznych termonaprężeń w pręcie podczas jego stygnięcia, c) zawierającej wyprowadzenie wzorów określających pole quasi-statyczne termonaprężeń podczas nagrzewania się płaskownika. Dla wyznaczenia quasi-statycznych termonaprężeń posługujemy się potencjałem termosprężystym oraz funkcją Airy'ego.

Metoda wykorzystana w rozważaniach była stosowana do rozwiązywania kilku prostszych przypadków, między innymi dla wyznaczenia quasi-statycznych termonaprężeń w stygnącym walcu o przekroju prostokątnym, nie mającym źródeł ciepła [2, 6] oraz w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny o stałej temperaturze powierzchni bocznych [3].

2. Nieustalone pole temperatury w płaskowniku

Pręt o przekroju prostokątnym $2a \times 2b$ nieskończenie długi przewodzi prąd elektryczny o stałym natężeniu. Wszystkie jego punkty są źródłami ciepła o stałej gęstości mocy p określonej przez wzór (1.1). Ściany boczne $x = \mp a$, $y = \mp b$ rozważanego płaskownika oddają ciepło do otoczenia wg prawa Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła h

$$(2.1) \quad h = \frac{\alpha}{\lambda},$$

gdzie α jest współczynnikiem przejmowania ciepła i λ jest współczynnikiem przewodności cieplnej materiału płaskownika.

Płaskownik znajduje się w stanie ustalonym pod względem cieplnym aż do chwili $t = 0$, w której zostaje odłączony dopływ energii elektrycznej. Przeszają działać źródła ciepła rozłożone równomiernie w płaskowniku. Począwszy od chwili $t = 0$ płaskownik stygnie. Wyznamy funkcję $T_1(x, y, t)$ określającą pole temperatury w płaskowniku podczas jego stygnięcia.

Funkcja $T_1(x, y, t)$ spełnia równanie różniczkowe:

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho},$$

warunek początkowy

$$(2.3) \quad T_1(x, y, 0) = T_0(x, y)$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=-a} - hT_1(-a, y, t) &= \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=a} + hT_1(a, y, t) = 0, \\ \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)_{y=-b} - hT_1(x, -b, t) &= \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)_{y=b} + hT_1(x, b, t) = 0, \end{aligned}$$

gdzie λ oznacza przewodność cieplną właściwą, c ciepło właściwe, ρ gęstość materiału.

Funkcja $T_0(x, y)$ występująca w warunku początkowym (2.3) określa rozkład temperatury w pręcie dla stanu ustalonego, a więc dla stanu jaki istniał przed odłączeniem źródła energii elektrycznej. Zatem przed rozwiązaniem równania (2.2) musimy dodatkowo wyznaczyć funkcję $T_0(x, y)$. Jest to funkcja spełniająca równanie różniczkowe

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} = -\frac{p}{\lambda}$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)_{x=-a} - hT_0(-a, y) &= \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\right)_{x=a} + hT_0(a, y) = 0, \\ \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)_{y=-b} - hT_0(x, -b) &= \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)_{y=b} + hT_0(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Funkcję $T_0(x, y)$ wyrażamy w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego [1]. Ze względu na symetrię warunków cieplnych względem osi $x = 0$ oraz $y = 0$, w jakich znajduje się pręt, będą w wymienionym szeregu występowały tylko kosinusy

$$(2.7) \quad T_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos N_n x \cos M_m y.$$

Z warunków (2.6) otrzymujemy:

$$(2.8) \quad N_n = \frac{\gamma_n}{a}, \quad M_m = \frac{\mu_m}{b},$$

gdzie γ_n i μ_m są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań

$$(2.9) \quad \gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n = ah, \quad \mu_m \operatorname{tg} \mu_m = bh.$$

Wartości współczynników A_{nm} wyznaczamy w ten sposób, ażeby funkcja (2.7) spełniała równanie różniczkowe (2.5), skąd mamy

$$(2.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y = \frac{p}{\lambda}.$$

Jeżeli do powyższego wyrażenia wprowadzimy oznaczenie

$$(2.11) \quad E_{nm} = A_{nm} \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right),$$

to otrzymamy następujący związek (dla $-a < x < a$, $-b < y < b$):

$$(2.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y = \frac{p}{\lambda}.$$

Współczynniki E_{nm} obliczamy ze wzoru [4, 7]

$$E_{nm} = \frac{\frac{p}{\lambda} \int_0^a \int_0^b \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y dx dy}{\int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{\gamma_n}{a} x \cos^2 \frac{\mu_m}{b} y dx dy},$$

skąd po przeprowadzeniu rachunków mamy

$$(2.13) \quad E_{nm} = \frac{4p \sin \gamma_n \sin \mu_m}{\lambda \gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right)}$$

Po uwzględnieniu związków (2.11) i (2.13) możemy napisać końcową postać funkcji $T_0(x, y)$, podanej wzorem (2.7)

$$(2.14) \quad T_0(x, y) = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}.$$

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia funkcji $T_1(x, y, t)$, określającej pole temperatury w stygnącym płaskowniku, tzn. funkcji spełniającej równanie różniczkowe (2.2) oraz warunki (2.3)–(2.4). Równanie różniczkowe przewodnictwa (2.2) rozwiążemy metodą Fouriera rozdzielania zmiennych

$$(2.15) \quad T_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Y_m(y) T_{nm}(t),$$

gdzie funkcje własne $X_n(x)$, $Y_m(y)$, $T_{nm}(t)$ spełniają następujące równania różniczkowe zwyczajne:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} X_n''(x) + K_n^2 X_n(x) &= 0, \\ Y_m''(y) + L_m^2 Y_m(y) &= 0, \\ T_{nm}'(t) + (K_n^2 + L_m^2) T_{nm}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższych równań różniczkowych i uwzględnieniu warunków brzegowych (2.4) otrzymujemy

$$(2.17) \quad K_n = \frac{\gamma_n}{a} = N_n, \quad L_m = \frac{\mu_m}{b} = M_m$$

i wówczas funkcja (2.15) przybiera postać

$$(2.18) \quad T_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[- \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right],$$

gdzie γ_n i μ_m są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań (2.9).

Wartości współczynników B_{nm} wyznaczamy z warunku początkowego (2.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}.$$

Kończącą zatem postać funkcji $T_1(x, y, t)$ określającej pole temperatury w stygnącym płaskowniku wyraża wzór:

$$(2.19) \quad T_1(x, y, t) = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[- \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}.$$

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem funkcji $T_2(x, y, t)$, określającej pole temperatury w płaskowniku podczas nagrzewania się wskutek przepływu prądu elektrycznego o stałym

natężeniu. Temperatura początkowa całego pręta równa jest temperaturze otoczenia i wynosi zero, $T_2(x, y, 0) = 0$. W chwili $t = 0$ zostaje włączone źródło energii elektrycznej, zatem dla $t > 0$ każdy punkt płaskownika jest źródłem ciepła o stałej gęstości mocy p [por. (1.1)]. Analogicznie jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku stygnięcia powierzchni boczne pręta oddają ciepło do otoczenia według prawa Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła h [wzór (1.2)].

Funkcja $T_2(x, y, t)$ spełnia równanie różniczkowe cząstkowe

$$(2.20) \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{p}{\lambda}, \quad \varkappa = \frac{\lambda}{c\rho},$$

warunek początkowy

$$(2.21) \quad T_2(x, y, 0) = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=-a} - hT_2(-a, y, t) &= \left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=a} + hT_2(a, y, t) = 0, \\ \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_{y=-b} - hT_2(x, -b, t) &= \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_{y=b} + hT_2(x, b, t) = 0, \end{aligned}$$

a ponadto warunek graniczny

$$(2.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_2(x, y, t) = T_0(x, y).$$

Z wyżej podanych warunków wynika, że funkcją $T_2(x, y, t)$ jest różnica wyznaczonych już funkcji $T_0(x, y)$ i $T_1(x, y, t)$, a więc różnica $T_0(x, y) - T_1(x, y, t)$ spełnia równanie różniczkowe (2.20) oraz warunki (2.21)–(2.23)

$$T_2(x, y, t) = T_0(x, y) - T_1(x, y, t).$$

Końcowa postać funkcji $T_2(x, y, t)$ jest następująca:

$$(2.24) \quad T_2(x, y, t) = \frac{4p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \varkappa t \right] \right\}}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)}.$$

3. Pole quasi-statycznych termonaprężeń w płaskowniku podczas jego stygnięcia

Dla wyznaczenia quasi-statycznych termonaprężeń σ_{ij} posłużymy się potencjałem termosprężystym Φ oraz funkcją Airy'ego F . Jak wiadomo z teorii termosprężystości [5], potencjał termosprężysty Φ spełnia równanie różniczkowe:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \vartheta_0 T, \quad \vartheta_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_t,$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona i α , jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej liniowej. T jest funkcją określającą pole temperatury w płaskowniku podczas stygnięcia; funkcja ta $T = T_1(x, y, t)$ jest określona wzorem (2.19). Funkcja Airy'ego F spełnia równanie różniczkowe biharmoniczne

$$(3.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0.$$

Wartości odpowiednich naprężeń otrzymujemy ze związków [5]

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\bar{\sigma}}_{ij} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \nabla^2 \right) (2G\Phi - F), \\ \sigma_{zz} &= \bar{\sigma}_{zz} + \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \nabla^2 (\nu F - 2G\Phi), \\ i, j &= 1, 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \end{aligned}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera:

$$(3.4) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = j, \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Na podstawie związków (2.2) i (3.1) możemy napisać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) = \kappa \vartheta_0 \nabla^2 T_1.$$

Z powyższego równania otrzymujemy potencjał termosprężysty

$$(3.5) \quad \Phi(x, y, t) = -\frac{4p\vartheta_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\gamma_n \mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}$$

Obecnie możemy określić naprężenia $\bar{\sigma}_{ij}$. Posiadają one następującą postać:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \\ &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m \sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \\ &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \sin \gamma_n \sin \mu_m \cos \frac{\gamma_n}{a} x \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \bar{\sigma}_{zz} &= -2G \nabla^2 \Phi = -2G\vartheta_0 T_1(x, y, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \sin \mu_m \sin \frac{\gamma_n}{a} x \sin \frac{\mu_m}{b} y \exp \left[-\left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right) \kappa t \right]}{\left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \bar{\sigma}_{xz} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Przed wyznaczeniem funkcji Airy'ego musimy określić wartości naprężeń $\bar{\sigma}_{xx}$ i $\bar{\sigma}_{xy}$ na powierzchni $x = a$ oraz naprężeń $\bar{\sigma}_{yy}$ i $\bar{\sigma}_{xy}$ na powierzchni $y = b$.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(a, y, t) &= -\frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_1(\mu_m, t) \cos \frac{\mu_m}{b} y \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right), \\ \bar{\sigma}_{yy}(x, b, t) &= -\frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_2(\gamma_n, t) \cos \frac{\gamma_n}{a} x \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right), \\ \bar{\sigma}_{xy}(a, y, t) &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_3(\mu_m, t) \sin \frac{\mu_m}{b} y \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right), \\ \bar{\sigma}_{xy}(x, b, t) &= -\frac{8Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_4(\gamma_n, t) \sin \frac{\gamma_n}{a} x \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varrho_1(\mu_m, t) &= \frac{\mu_m \sin \mu_m}{1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\gamma_n \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right)}{\gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \varrho_2(\gamma_n, t) &= \frac{\gamma_n \sin \gamma_n}{1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\mu_m \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right)}{\mu_m \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \\ \varrho_3(\mu_m, t) &= \frac{\sin \mu_m}{1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_n \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right)}{\left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2} \right)^2}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\varrho_4(\gamma_n, t) = \frac{\sin \gamma_n}{1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu_m \exp\left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t\right)}{\left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)^2}.$$

Poszukujemy naprężeń σ spełniających warunki brzegowe:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{xy}(a, y, t) &= \sigma_{xy}(x, b, t) = 0, \\ \sigma_{xt}(a, y, t) &= \sigma_{yy}(x, b, t) = 0, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy następujące związki pomiędzy naprężeniami $\bar{\sigma}_{ij}$ i $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ na powierzchni ograniczającej rozważany płaskownik. Związki te dają odpowiednie warunki brzegowe dla funkcji Airy'ego (3.2)

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} + \bar{\bar{\sigma}}_{xy} &= 0 \quad \text{dla} \quad x = a, y = b, \\ \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\bar{\sigma}}_{xx} &= 0 \quad \text{dla} \quad x = a, \\ \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\bar{\sigma}}_{yy} &= 0 \quad \text{dla} \quad y = b. \end{aligned}$$

Funkcję Airy'ego wyrażamy pojedynczym szeregiem

$$(3.11) \quad \begin{aligned} F = b^2 \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^{-2} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} x + B_m \frac{\mu_m}{b} x \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} x \right) \cos \frac{\mu_m}{b} y + \\ + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-2} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} y + D_n \frac{\gamma_n}{a} y \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y \right) \cos \frac{\gamma_n}{a} x. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (3.10) korzystamy z następujących rozwinięć na szeregi trygonometryczne:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \cos \frac{\mu_m}{b} y, & y \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} \cos \frac{\mu_m}{b} y, \\ \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x, & x \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{nm} \cos \frac{\gamma_n}{a} x, \\ \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} \sin \frac{\mu_m}{b} y, & y \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} y &= \sum_{m=1}^{\infty} L_{nm} \sin \frac{\mu_m}{b} y, \\ \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{nm} \sin \frac{\gamma_n}{a} x, & x \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} x &= \sum_{n=1}^{\infty} N_{nm} \sin \frac{\gamma_n}{a} x, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 E_{nm} &= f_1(a, b, \gamma_n, \mu_m) = 2 \frac{b\gamma_n \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \cos \mu_m + a\mu_m \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n \sin \mu_m}{ab^2 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)}, \\
 F_{nm} &= f_2(a, b, \gamma_n, \mu_m) = 2 \frac{b\gamma_n \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n \cos \mu_m + a\mu_m \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \sin \mu_m}{ab \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)} + \\
 (3.13) \quad &+ 2 \frac{(a^2\mu_m^2 - b^2\gamma_n^2) \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \cos \mu_m - 2ab\gamma_n\mu_m \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n \sin \mu_m}{a^2b^3 \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(\frac{\gamma_n^2}{a^2} + \frac{\mu_m^2}{b^2}\right)^2}, \\
 G_{nm} &= f_1(b, a, \mu_m, \gamma_n), \quad H_{nm} = f_2(b, a, \mu_m, \gamma_n), \\
 K_{nm} &= \frac{b\gamma_n}{a\mu_m} E_{nm}, \quad L_{nm} = \frac{b}{\mu_m} \left(E_{nm} + \frac{\gamma_n}{a} F_{nm}\right), \\
 M_{nm} &= \frac{a\mu_m}{b\gamma_n} G_{nm}, \quad N_{nm} = \frac{a}{\gamma_n} \left(G_{nm} + \frac{\mu_m}{b} H_{nm}\right).
 \end{aligned}$$

Otrzymujemy w końcu następujący układ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki A_m, B_m, C_n i D_n występujące w funkcji Airy'ego (3.11)

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & - \left(A_m \operatorname{ch} \frac{a}{b} \mu_m + B_m \mu_m \frac{a}{b} \operatorname{sh} \frac{a}{b} \mu_m \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n E_{nm} + D_n \left(2E_{nm} + \frac{\gamma_n}{a} F_{nm} \right) \right] \cos \gamma_n = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda b^2} \varrho_1(\mu_m, t) \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right), \quad m = 1, 2, \dots \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m G_{nm} + B_m \left(2G_{nm} + \frac{\mu_m}{b} H_{nm} \right) \right] \cos \mu_m - \left(C_n \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n + D_n \gamma_n \frac{b}{a} \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n \right) = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda a^2} \varrho_2(\gamma_n, t) \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right), \quad n = 1, 2, \dots \\
 (3.14) \quad & (A_m + B_m) \operatorname{sh} \frac{a}{b} \mu_m + B_m \mu_m \frac{a}{b} \operatorname{ch} \frac{a}{b} \mu_m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n K_{nm} + D_n \left(K_{nm} + \frac{\gamma_n}{a} L_{nm} \right) \right] \sin \gamma_n = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \varrho_3(\mu_m, t) \exp \left(-\frac{\mu_m^2}{b^2} \kappa t \right), \quad m = 1, 2, \dots \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m M_{nm} + B_m \left(M_{nm} + \frac{\mu_m}{b} N_{nm} \right) \right] \sin \mu_m + (C_n + D_n) \operatorname{sh} \frac{b}{a} \gamma_n + D_n \gamma_n \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{b}{a} \gamma_n = \\
 & = \frac{4Gp\vartheta_0}{\lambda ab} \varrho_4(\gamma_n, t) \exp \left(-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \kappa t \right). \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Zależności (3.14) stanowią nieskończony układ równań. Jeżeli ograniczymy się w szeregu (3.11) przedstawiającym funkcję Airy'ego do k pierwszych składników, to uzyskamy ze związków (3.14) układ równań złożony z $4k$ równań liniowych o niewiadomych A_m, B_m, C_n i D_n dla $m = 1, 2, 3, \dots, k$ oraz $n = 1, 2, 3, \dots, k$. Po rozwiązaniu wymienionego układu równań możemy napisać przybliżoną postać (3.11) funkcji F , a następnie wyznaczyć wartości naprężeń $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ z zależności

$$(3.15) \quad \bar{\bar{\sigma}}_{ij} = \left(\delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) F, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \nu \nabla^2 F.$$

Obliczone wartości naprężeń ze wzorów (3.15) dodajemy do naprężeń przedstawionych zależnościami (3.6) i stąd otrzymujemy szukane naprężenia (3.3).

4. Pole quasi-statycznych termonaprężeń w płaskowniku podczas jego nagrzewania

Pole temperatury w płaskowniku podczas jego nagrzewania się wskutek przepływu prądu elektrycznego o stałym natężeniu jest superpozycją dwóch pól, mianowicie pola dla stanu ustalonego oraz nieustalonego pola temperatury dla stygnącego płaskownika po wyłączeniu dopływu energii elektrycznej. Z wymienionego powodu funkcja $T_2(x, y, t)$ określająca pole temperatury podczas nagrzewania się rozważanego pręta jest różnicą funkcji $T_0(x, y)$ i $T_1(x, y, t)$ [por. wzór (2.24)]

$$T_2(x, y, t) = T_0(x, y) - T_1(x, y, t),$$

gdzie $T_0(x, y) = T_1(x, y, 0)$.

Chwilowe wartości quasi-statycznych termonaprężeń nie zależą od kierunku zmian naprężeń w czasie, lecz są w jednoznaczny sposób przyporządkowane poszczególnym punktom przestrzeni dla każdego z chwilowych pól temperatury. Stąd następujący wniosek, że polu temperatury będącemu superpozycją kilku pól odpowiada pole quasi-statycznych termonaprężeń będące superpozycją odpowiednich pól naprężeń. Możemy zatem napisać, że wartość termonaprężenia σ_{ij}^* dla nagrzewającego się płaskownika jest różnicą naprężeń $\sigma_{ij}(x, y, 0)$ oraz $\sigma_{ij}(x, y, t)$, gdzie funkcja $\sigma_{ij}(x, y, 0)$ określa termonaprężenia dla stanu ustalonego pod względem cieplnym, funkcja zaś $\sigma_{ij}(x, y, t)$ — dla stygnącego płaskownika.

$$(4.1) \quad \sigma_{ij}^*(x, y, t) = \sigma_{ij}(x, y, 0) - \sigma_{ij}(x, y, t),$$

$$\sigma_{xz}^*(x, y, t) = 0, \quad \sigma_{yz}^*(x, y, t) = 0.$$

Funkcje $\sigma_{ij}(x, y, t)$ występujące w powyższych zależnościach są określone wzorami (3.3), (3.6) i (3.15).

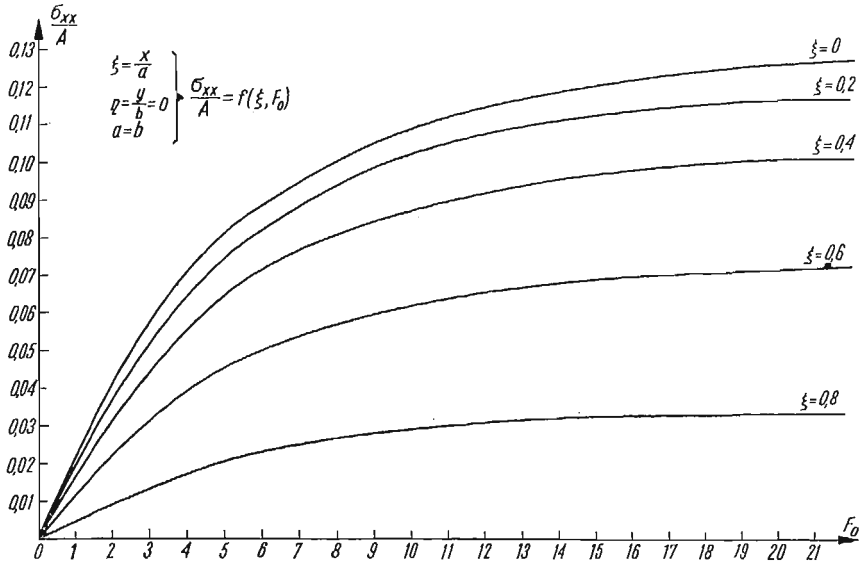
5. Zakończenie

Wzory wyprowadzone w pracy posiadają dość skomplikowaną postać, jednak mogą one posiadać praktyczną wartość po zaprogramowaniu ich na maszynę cyfrową.

Dla zilustrowania otrzymanych wyników podajemy na rys. 1 przebiegi bezwymiarowego naprężenia σ_{xx}^*/A , gdzie

$$A = \frac{8Gp\vartheta_0 a^2}{\lambda}, \quad \sigma_{xx}^* = \sigma_{xx}^*(x, 0, t) \text{ [por. wzór (4.1)]}$$

w przekroju $y = 0$ nagrzewanego prądem elektrycznym płaskownika o przekroju kwadratowym ($a = b$). Przebiegi σ_{xx}^*/A przedstawione na wykresie uzależnione są od liczby



Rys. 1

Fouriera $F_0 = \kappa t/a^2$ oraz od bezwymiarowej współrzędnej $\xi = x/a$. Wymiana ciepła z otoczeniem w rozważanym przykładzie określona jest przez przyjętą liczbę Biota, $Bi = 0,1$. Dla tej wartości $Bi = 0,1$ cztery pierwsze kolejne pierwiastki równań (2.9) wynoszą $\gamma_1 = \mu_1 = 0,311$, $\gamma_2 = \mu_2 = 3,173$, $\gamma_3 = \mu_3 = 6,299$, $\gamma_4 = \mu_4 = 9,435$ [4]. Wartości przedstawione wykresami na rys.1 zostały obliczone na maszynie cyfrowej ZAM2 w Katedrze Mechaniki Technicznej Politechniki Łódzkiej.

Literatura cytowana w tekście

1. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Heat Conduction in Solids*, Oxford 1959.
2. E. KAĆKI, *Quasi-statyczne termonaprężenia w stygnącym walcu prostokątnym, nieskończonej długości, oddającym ciepło przez konwekcję*, Zesz. Nauk. P. Ł. Mechanika Nr 12, Łódź 1964.
3. E. KAĆKI, *Quasi-statyczne termonaprężenie w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny*, Zesz. Nauk. P. Ł. Mechanika Nr 10, Łódź 1963.
4. E. KAĆKI, *Termokinetyka*, WNT, Warszawa 1966.
5. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
6. W. NOWACKI, *Non-steady thermal stresses in an infinite cylinder of rectangular or circular cross-section*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 6, 1958.

7. И. А. САМОЙЛОВИЧ, *Температурные напряжения в длинной призме прямоугольного сечения*, Инж. физ. журн., 7, 3, 1964.

8. А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИ, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.

Р е з ю м е

ТЕРМИЧЕСКИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БРУСЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРОВОДЯЩИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ОТДАЮЩИМ ТЕПЛО ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ

В работе найдены функции $\sigma(x, y, t)$ определяющие термические нестационарные напряжения в брусе с прямоугольным сечением. Эти напряжения вызваны нагревом вследствие прохождения электрического тока постоянной силы и последующим охлаждением после выключения тока. Принимается, что отдача тепла в окружающее пространство через боковую поверхность происходит в соответствии с законом Ньютона. Предполагается, что параметры характеризующие материал бруса постоянны во времени и по координатам.

Термические напряжения найдены при помощи потенциала термоупругих перемещений Φ , а также функции Эри F .

S u m m a r y

QUASI-STATIC THERMAL STRESSES IN A BAR OF RECTANGULAR CROSS-SECTION CONDUCTING ELECTRIC CURRENT AND EXCHANGING HEAT BY CONVECTION

Quasi-static state of stress in the bar is determined with the aid of the Airy stress function and the Goodier potential of thermo-elastic displacement. Both the heating and cooling processes are considered. It has been assumed that at the lateral surfaces the heat flow is proportional to the temperature; all physical parameters of the material are independent of temperature and constant throughout the body.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1967 r.

BADANIA SYNCHRONIZACJI I SAMOSYNCHRONIZACJI WIBRATORÓW
MECHANICZNYCH

ZBIGNIEW ENGEL (KRAKÓW)

Wstęp

Wibrotechnika jest działem techniki znajdującym coraz częściej zastosowanie w realizacji różnych procesów technologicznych. Badania nad teoretycznymi rozwiązaniami konstrukcji maszyn wibracyjnych prowadzone są w dwóch kierunkach: w układach otwartych i w układach zamkniętych. Praca urządzeń w układach otwartych polega na przekazywaniu energii z źródła do obiektu z bardzo słabym sprzężeniem zwrotnym lub bez sprzężenia zwrotnego. Druga grupa urządzeń pracuje na zasadzie przekazywania energii ze źródła z silnym sprzężeniem zwrotnym. Zasadę pracy tych urządzeń określa się zwykle jako synchronizację dwóch zjawisk fizycznych.

Maszyny wibracyjne w wielu przypadkach napędzane są nie jednym, lecz kilkoma wibratorami umieszczonymi we wspólnej platformie (belce). W tych przypadkach zachodzi konieczność zapewnienia synchronizacji obrotów między poszczególnymi wibratorami. W większości maszyn wibracyjnych synchronizację obrotów zapewniano za pomocą przekładni kinematycznych (przekładnie zębate, przekładnie pasowe itp.). Poważnym brakiem takich przekładni jest duże zużycie współpracujących elementów a także szumy szkodliwe dla zdrowia.

Niejednokrotnie na drodze doświadczalnej udało się otrzymać zjawisko automatycznego podtrzymywania różnych prędkości kątowych obrotów oddzielnych wibratorów bez jakichkolwiek związków kinematycznych czy elektrycznych między wibratorami. Zachodziła wtedy tzw. samosynchronizacja wibratorów mechanicznych. Praktyczne badania samosynchronizacji napotykały na trudności, ponieważ nie były znane przyczyny oraz warunki, przy których występowało to zjawisko.

Zjawisko samosynchronizacji w przypadku maszyn wibracyjnych jest bardzo korzystne. Niemniej jednak można podać szereg przykładów w technice, gdzie samosynchronizacja daje szkodliwe efekty. Ma to miejsce w przypadku jednolitych maszyn obrotowych z szybkobieżnymi niewyrównoważonymi rotorami, umieszczonych na wspólnym fundamencie. W takich przypadkach współfazowe lub synchroniczne obroty rotorów tych maszyn mogą doprowadzić do znacznych wibracji konstrukcji, a nawet do jej zniszczenia (problem napędu maszyn za pomocą wałów transmisyjnych, napędy maszyn za pomocą takich samych silników elektrycznych).

Organy robocze maszyn wibracyjnych napędzane kilkoma wibratorami mogą być przedstawione za pomocą platformy o jednym stopniu swobody. Takie maszyny mają ograniczone zastosowanie. Częściej spotyka się maszyny, których organ roboczy wykonuje ruch płaski, tzn. ma trzy stopnie swobody. Do tego rodzaju maszyn zaliczyć należy niektóre wibro płaszczyzny, wibromłyny, wibropogrążacze, a także maszyny służące do rozdzielania materiałów. W maszynach tego typu rotory niewyważone spełniają nie tylko rolę wibratora, lecz także służą jako organy robocze tych maszyn.

Zagadnienie synchronizacji układów zaobserwowano już dawno zarówno w technice jak i w pewnych obiektach przyrody. Zjawisko synchronizacji układów zachodzi w układach elektrycznych, w generatorach lampowych, przy wzajemnej pracy wibratorów mechanicznych, w zegarach wahadłowych, w instrumentach muzycznych oraz w niektórych układach biologicznych.

Synchronizacja układów mechanicznych polega na tym, że kilka urządzeń przy braku wzajemnych związków kinematycznych i elektrycznych przy nałożeniu pewnych warunków zaczyna się poruszać lub drgać z podobnymi prędkościami kątowymi lub częstościami. Zjawisko synchronizacji zaobserwował już HUYGHENS w XVII wieku podczas pracy pary zegarów wahadłowych umieszczonych na wspólnej ścianie. W XIX wieku RAYLEIGH badał zjawisko synchronizacji w układach akustycznych i elektroakustycznych. W przypadku obserwacji dwóch rur organowych stwierdził, że przy dostatecznie małym rozstrojeniu rury dźwięczą zgodnie, tj. zachodzi wzajemna synchronizacja dwóch samowzbudnych układów. Analogiczne zjawisko zaobserwował Rayleigh w przypadku dwóch kamertonów z elektro-magnetycznym wymuszeniem. Z początkiem XX wieku zjawisko synchronizacji zaobserwowano w pewnych układach elektrycznych i elektro-mechanicznych. Mamy tu na myśli synchronizację pracy generatorów lampowych.

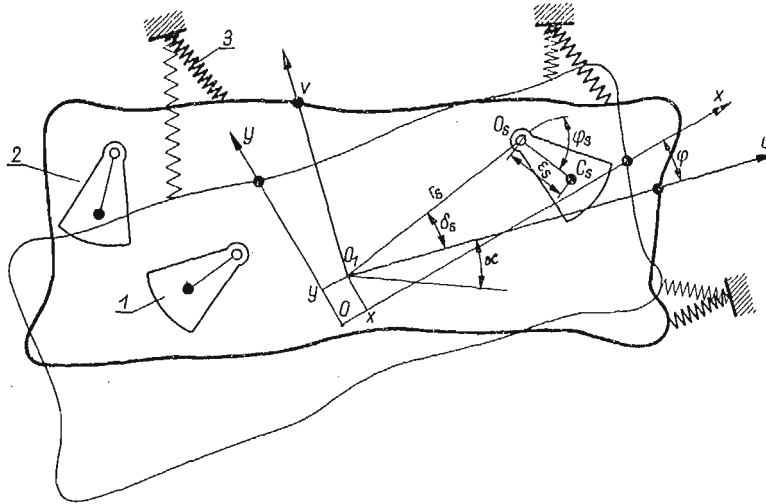
Po drugiej wojnie światowej w Związku Radzieckim zaobserwowano samosynchronizację wibratorów bezwładnościowych umieszczonych na platformie. Okazało się, że wibratory takie napędzane silnikiem asynchronicznym przy braku jakichkolwiek przekładni kinematycznych czy elektrycznych przy odpowiednich warunkach pracują synchronicznie. Zjawiskami synchronizacji oraz samosynchronizacji układów mechanicznych zajmuje się w Związku Radzieckim I. I. BLECHMAN, R. F. NAGAJEW, B. P. ŁAWROW, K. M. RAGULSKI oraz inni.

Niedawno zmarły uczone amerykański Norbert WIENER zaobserwował zjawisko synchronizacji w układach biologicznych. Stwierdził on m. in., że zjawisko synchronizacji leży u podstaw powstawania tzw. «alfa-rytmów» w mózgu.

O ważności zjawisk synchronizacji i samosynchronizacji świadczyć może zorganizowanie w październiku 1965 r. w Kownie specjalnego sympozjum poświęconego tym zagadnieniom. Na sympozjum wygłoszono dużą liczbę referatów, których tematykę można podzielić na dwie grupy zagadnień. Pierwsza grupa poświęcona była problemom synchronizacji i zastosowań zjawisk samosynchronizacji w maszynach wibracyjnych. Druga grupa poświęcona była zagadnieniom samosynchronizacji w różnych układach mechanicznych. Uczestnicy sympozjum wybrali komisję, która uporządkować ma terminologię synchronizacji i samosynchronizacji. Postanowiono również zwoływać podobne sympozja co dwa lata.

1. Samosynchronizacja wibratorów umieszczonych na belce o trzech stopniach swobody

Na rysunku 1 przedstawiony jest schemat belki na której umieszczone są wibratory bezwładnościowe, wymuszające drgania układu. Zakładamy, że belka ma trzy stopnie swobody. Belka z umieszczonymi na niej wibratorami związana jest z nieruchomym



Rys. 1

podłożem za pomocą elementów sprężystych. Na belce umieszczono k wibratorów bezwładnościowych o różnych parametrach. Wibratory napędzane są za pomocą silników elektrycznych umieszczonych na belce lub poza nią.

Równania różniczkowe ruchu układu przedstawionego na rys. 1 mają postać [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 I_s \ddot{\varphi}_s + k_s (\varphi_s - \varphi) &= m_s \varepsilon_s [(\ddot{x} \sin \varphi_s + \ddot{y} \cos \varphi_s) - \ddot{\varphi} r_s \cos (\varphi_s + \delta_s) + g \cos (\varphi_s - \kappa)] + \\
 &+ L_s (\varphi_s - q_s \dot{\varphi}), \quad s = 1, 2, \dots, k, \\
 M \ddot{x} + k_x \dot{x} + c_x x + c_{x\varphi} \dot{\varphi} &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) \\
 M \ddot{y} + k_y \dot{y} + c_y y + c_{y\varphi} \dot{\varphi} &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s), \\
 I \ddot{\varphi} + k_\varphi \dot{\varphi} - \sum_{s=1}^k k_s (\varphi_s - \varphi) + c_\varphi \dot{\varphi} + c_{x\varphi} \dot{x} + c_{y\varphi} \dot{y} &= \\
 &= \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s r_s [\dot{\varphi}_s^2 \sin (\varphi_s + \delta_s) - \ddot{\varphi}_s \cos (\varphi_s + \delta_s)] - \sum_{s=1}^k q_s L_s (\varphi_s - q_s \dot{\varphi}).
 \end{aligned}$$

Pierwsze k z tych równań opisują ruch k wibratorów umieszczonych na belce, natomiast ostatnie trzy są równaniami drgań belki w pobliżu położenia równowagi.

W równaniach (1.1) przyjęto oznaczenia:

x, y	współrzędne środka masy belki w nieruchomym układzie osi odniesienia,
φ	kąt obrotu belki w płaszczyźnie Oxy ,
φ_s	kąt obrotu s -go wibratora,
M	masa całego układu,
I	moment bezwładności układu zredukowany na oś przechodzącą przez środek ciężkości układu,
\varkappa	kąt zawarty między osią x a poziomem,
$C_x, C_y, C_\varphi, C_{x\varphi}, C_{y\varphi}$	współczynniki sztywności sprężystych połączeń,
m_s	masa s -go wibratora,
ε_s	odległość środka ciężkości s -go wibratora od osi obrotu,
I_s	moment bezwładności s -go wibratora względem jego osi obrotu,
r_s, δ_s	współrzędne biegunowe,
L_s	moment obrotowy silnika zredukowany na wał s -tego wibratora.

Dla uproszczenia założono, że L_s zależy jedynie od prędkości kątowej. Dlatego przyjęto L_s jako funkcję $\dot{\varphi}_s - q_s \dot{\varphi} = \sigma_s \omega_0$ w pewnym małym otoczeniu ($q_s = 1$, gdy silnik umieszczony jest na belce lub $q_s = 0$, gdy silnik leży poza belką).

Układ (1.1) jest układem nieliniowym, dlatego rozwiązanie ogólne układu $k+3$ połączonych równań jest niemożliwe. Zresztą nie jest to konieczne przy badaniu synchronizacji układu.

Zadanie samosynchronizacji można sformułować jako podanie warunków istnienia i stateczności rozwiązań równań (1.1) w postaci:

$$(1.2) \quad \varphi_s = \sigma_s[\omega t + \psi_s(\omega t)], \quad x = x(\omega t), \quad y = y(\omega t), \quad \varphi = \varphi(\omega t),$$

gdzie x, y, φ oznaczają okresowe funkcje czasu o okresie $2\pi/\omega$, $\sigma_s = \pm 1$ w zależności od kierunku obrotów wibratora. Rozwiązaniu (1.2) odpowiada synchroniczny ruch wibratorów, tj. ruch z równą co do bezwzględnej wartości średniej prędkości kątowej $|\dot{\varphi}_{sr}| = \omega$.

Prędkość ω nie jest wcześniej znana i należy ją wyznaczyć. Jeżeli przejdziemy od układu równań (1.1), uwzględniając wyrażenia (1.2), od nie znanych φ_s do nie znanych ψ_s , to zadanie sprowadza się do podania warunków istnienia i stateczności okresowych rozwiązań przekształconego układu równań. W celu podania tych warunków posłużono się metodami A. POINCARÉGO i A. M. LAPUNOWA.

W pracy [3] podano następujące twierdzenie: *aby istniała możliwość ruchów, przy których k mechanicznych wibratorów umieszczonych na drgającej belce obracających się z jednakową co do bezwzględnej wartości średnią prędkością kątową, konieczne jest, aby k przestępnych równań*

$$(1.3) \quad 2M[\sigma_r L_r(\sigma_r \omega_s) - k_r \omega_0] = m_r \varepsilon_r \omega_0^2 \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s$$

$$[P_{rs} \sin(\alpha_r - \alpha_s) + Q_{rs} \cos(\alpha_r - \alpha_s)], \quad r = 1, 2, \dots, k$$

gdzie

$$P_{rs} = P_{sr} = a_{xx} + \sigma_r \sigma_s a_{yy} + a_{x\varphi}(\varrho_r \sin \delta_r + \varrho_s \sin \delta_s) - a_{y\varphi} \sigma_r \sigma_s (\varrho_r \cos \delta_r + \varrho_s \cos \delta_s) +$$

$$+ \sigma_r \sigma_s \varrho_r \varrho_s e a_{\varphi\varphi} \cos(\sigma_r \delta_r - \sigma_s \delta_s),$$

$$Q_{rs} = -Q_{sr} = (\sigma_r \sigma_s) a_{xy} + a_{x\varphi}(\sigma_s \varrho_s \cos \delta_s - \sigma_y \varrho_r \cos \delta_r) + a_{y\varphi}(\sigma_r \varrho_s \sin \delta_s - \sigma_s \varrho_r \sin \delta_r) +$$

$$+ \sigma_r \sigma_s \varrho_r \varrho_s e a_{\varphi\varphi} \sin(\sigma_r \delta_r - \sigma_s \delta_s),$$

$$\begin{aligned}
 a_{xx} &= \frac{\partial(\ln D)}{\partial(\lambda_x^2)}, & a_{yy} &= \frac{\partial(\ln D)}{\partial(\lambda_y^2)}, & a_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial(\ln D)}{\partial(\lambda_\varphi^2)}; \\
 a_{x\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln D)}{\partial q_{x\varphi}}, & a_{y\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\ln D)}{\partial q_{y\varphi}}, & a_{xy} &= \frac{e q_{x\varphi} q_{y\varphi}}{D}; \\
 D &= (\lambda_x^2 - 1)(\lambda_y^2 - 1)(\lambda_\varphi^2 - 1) - e q_{y\varphi}^2 (\lambda_x^2 - 1) - e q_{x\varphi}^2 (\lambda_y^2 - 1); \\
 \lambda_x^2 &= \frac{c_x}{M\omega_0^2}, & \lambda_y^2 &= \frac{c_y}{M\omega_0^2}, & \lambda_\varphi^2 &= \frac{c_\varphi}{I\omega_0^2}; \\
 q_{x\varphi} &= \frac{c_{x\varphi}}{MH\omega_0^2}, & q_{y\varphi} &= \frac{c_{y\varphi}}{MH\omega_0^2}; \\
 Q_s &= \frac{r_s}{H}, & e &= \frac{MH}{I}
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

dopuszczalo rozwiązania rzeczywiste odnośnie niewiadomych $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, określonych z dokładnością do stałej addytywnej. Każdemu takiemu rozwiązaniu odpowiada jedynie jeden asymptotycznie stateczny ruch typu (1.2), jeżeli dla tego rozwiązania wszystkie pierwiastki algebraicznego równania $k - 1$ stopnia

$$\begin{vmatrix}
 b_{11} - b_{k1} - \varkappa & b_{12} - b_{k2} & \dots & b_{1,k-1} - b_{k,k-1} \\
 b_{21} - b_{k1} & b_{22} - b_{k2} - \varkappa & \dots & b_{2,k-1} - b_{k,k-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b_{k-1,1} - b_{k1} & b_{k-1,2} - b_{k2} & \dots & b_{k-1,k-1} - b_{k,k-1} - \varkappa
 \end{vmatrix} = 0,
 \tag{1.5}$$

gdzie

$$b_{r,j} = \begin{cases} \frac{-m_r \varepsilon_r}{k_r + k_r^*} \sum_{s=1}^k m_s \varepsilon_s [P_{rs} \cos(\alpha_r - \alpha_s) - Q_{rs} \sin(\alpha_r - \alpha_s)], & r = j, \\ \frac{m_r \varepsilon_r}{k_r + k_r^*} m_j \varepsilon_j [P_{rj} \cos(\alpha_r - \alpha_j) - Q_{rj} \sin(\alpha_r - \alpha_j)], & r \neq j \end{cases}
 \tag{1.6}$$

$$k_r^* = - \left[\frac{dL_s}{d(\dot{\varphi}_s - q_s \dot{\varphi})} \right]_{\delta_s \omega} > 0$$

mają ujemne rzeczywiste części. Jeżeli rzeczywista część choć jednego z pierwiastków \varkappa była dodatnia, to ruch będzie niestateczny.

Z równań (1.3) znaleziono w pierwszym przybliżeniu, takie ω_0 , które jest równe ilorazowi średniej arytmetycznej wartości momentu $\sigma_s L_s(\sigma_s, \omega_0)$ przez średnie arytmetyczne wartości współczynników k_r . Jest ono równe:

$$\omega_0 = \frac{\sum_{r=1}^k \sigma_r L_r(\sigma_r, \omega_0)}{\sum_{r=1}^k k_r}.
 \tag{1.7}$$

Wszystkie rozważania odnoszą się do przypadku ruchów układu w dali od rezonansu, to znaczy częstość ω_0 w dostatecznym stopniu różni się od wartości obracających w zero wyrażenie D w równaniu (1.4). Trzeba podkreślić, że z równań ruchu (1.1) łatwo otrzymać szczególnie przypadek, gdy organ roboczy maszyny wibracyjnej (belka) ma jeden stopień swobody.

W naszym przypadku mamy do czynienia z drganiami układu wymuszonymi przez napędzane wibratory. Otrzymane wyniki można przenieść na maszyny wibracyjne, w których wibratory spełniają rolę organu roboczego, to znaczy służą jako element ścierający, mielący, drobiący itp. W takich przypadkach we wzorach zamiast momentu silnika L_s należy uwzględnić moment sił oporu.

I. I. BLECHMAN w swoich pracach dotyczących samosynchronizacji, wprowadza do rozważań tak zwaną częstość «parcjalną» ω_s , określoną wzorem:

$$(1.8) \quad \omega_s = \frac{\sigma_s L_s(\sigma_s \omega_s)}{k_s}, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Z równań ruchu układu wynika, że prędkości ω_s są równe co do bezwzględnej wartości prędkościom kątowym obrotów wibratorów. Na podstawie przeprowadzonej analizy oraz prac [3, 4, 5, 6, 9] można podać następujące wnioski.

Możliwość samosynchronizacji mechanicznych wibratorów zależy przede wszystkim od tego, o ile różnią się między sobą prędkości kątowe poszczególnych wibratorów. Jeżeli wszystkie prędkości są jednakowe i dodatnie, to synchronizacja w większości przypadków istnieje. W przypadku, gdy organ roboczy maszyny ma jeden stopień swobody, to wibratory z jednakowymi dodatnimi prędkościami samosynchronizują się niezależnie od wartości innych parametrów oraz rozłożenia wibratorów na belce.

W pewnych przypadkach, gdy na organie drgającym maszyny wibracyjnej znajduje się kilka wibratorów, można niektóre z nich wyłączyć ze źródła energii (nie napędzać). Okazuje się, że nie napędzane wibratory bez jakichkolwiek związków mechanicznych czy elektrycznych będą obracać się synchronicznie z innymi wibratorami napędzanymi silnikami. Zachodzić będzie tzw. «bezstykowe przesyłanie mocy». Energia potrzebna do pokonania oporów nie napędzanych wibratorów pochodzi od wibratorów napędzanych dzięki drganiom sztywnej belki, na której umieszczone są wibratory. Można przyjąć, że drgający organ maszyny wibracyjnej jest «kanałem» przenoszącym moc. Dzięki temu kanałowi moce doprowadzone do poszczególnych wibratorów rozdzielają się w ten sposób, że zachodzi wyrównywanie prędkości kątowych obrotów poszczególnych wibratorów. Możliwość bezstykowego przesyłania mocy została potwierdzona doświadczalnie.

Możliwość zachodzenia samosynchronizacji obrotów oddzielnych wibratorów mechanicznych zależy od liczby stopni swobody drgającego organu maszyny wibracyjnej, od kierunku obrotów poszczególnych wibratorów oraz w pewnym stopniu od rozłożenia wibratorów a także od stosunku między częstością drgań własnych organu roboczego maszyny wibracyjnej do prędkości ω_0 . W niektórych przypadkach możliwa jest samosynchronizacja wibratorów obracających się w przeciwnych kierunkach, co w praktyce może być wykorzystane do wytworzenia siły wymuszającej o stałym kierunku.

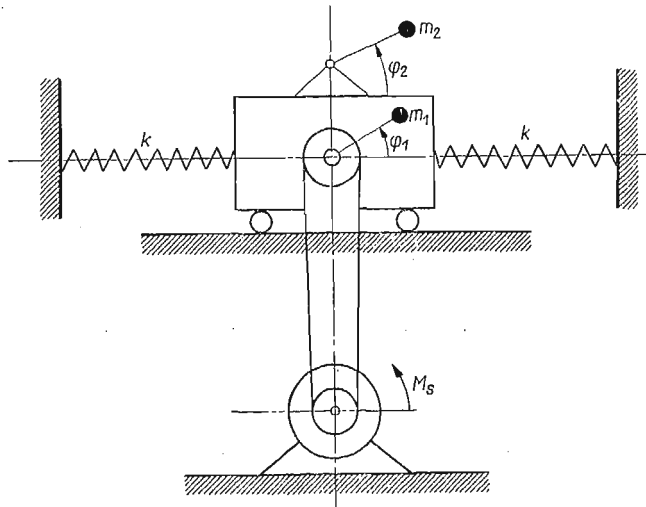
2. Szczególny przypadek układu samosynchronizującego

Zbadamy teraz układ mechaniczny składający się z masy oraz umieszczonych na niej dwóch wibratorów bezwładnościowych (rys. 2). W oparciu o równania Lagrange'a ułożono równania ruchu układu. Równania te mają postać:

$$\begin{aligned}
 & m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 l_1 \ddot{x} + m_1 l_1 g \sin \varphi_1 = M(\dot{\varphi}_1) - H(\varphi_1), \\
 (2.1) \quad & m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_2 \ddot{x} + m_2 l_2 g \sin \varphi_2 = 0, \\
 & m \ddot{x} + \dot{\varphi}_1 m_1 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 m_2 l_2 \cos \varphi_2 - m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + f(x) = -T(\dot{x}),
 \end{aligned}$$

gdzie

- $m = m_0 + m_1 + m_2$,
- φ_1 kąt obrotu wibratora nr 1,
- φ_2 kąt obrotu wibratora nr 2,
- l_1, l_2 mimośrodry,
- $M(\dot{\varphi}_1)$ moment obrotowy silnika napędzającego,
- $H(\varphi_1)$ moment oporów,
- $f(x)$ charakterystyka sprężyn,
- $T(\dot{x})$ funkcja uwzględniająca opory układu.



Rys. 2

Oznaczając przez:

$$(2.2) \quad M_s(\dot{\varphi}) = M(\dot{\varphi}_1) - H(\varphi_1)$$

oraz mnożąc pierwsze równanie układu (2.1) przez $m_2 l_2$, drugie zaś przez $-m_1 l_1$, po dodaniu stronami tych równań otrzymamy przy założeniu, że $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ (co jest warunkiem synchronizacji)

$$(2.3) \quad \ddot{\varphi} (m_1 m_2 l_1^2 l_2 - m_1 m_2 l_1 l_2^2) = M_s(\dot{\varphi}) \cdot m_2 l_2.$$

Stąd

$$(2.4) \quad M_s(\dot{\varphi}) = m_1 l_1 (l_1 - l_2) \ddot{\varphi}.$$

Przy założeniu, że moment silnika M_s będzie miał postać

$$(2.5) \quad M_s(\dot{\varphi}) = a - b\dot{\varphi},$$

gdzie a, b są stałe, wyrażenie (2.3) można napisać w postaci

$$(2.6) \quad m_1 l_1 (l_1 - l_2) \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} - a = 0.$$

Rozwiązanie równania (2.3) otrzymano w postaci

$$(2.7) \quad \varphi = c_1 e^{-\frac{bt}{m_1 l_1 (l_1 - l_2)}} + c_2 t + c_3,$$

gdzie

$$(2.8) \quad c_2 = \frac{a}{b}, \quad c_3 = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2} (l_1 - l_2) m_1 l_1.$$

Wyrażenie $e^{-\frac{bt}{m_1 l_1 (l_1 - l_2)}}$ zmierza do zera. Można go więc opuścić. Wówczas wyrażenie (2.7) przyjmie postać

$$(2.9) \quad \varphi = c_2 t + c_3.$$

Przy takiej zmienności kąta obrotu wibratora napędzanego zachodzić będzie samosynchronizacja układu.

Wstawiając do trzeciego równania układu (2.1) za

$$\varphi_1 = \varphi_2 = c_2 t + c_3, \quad \dot{\varphi} = c_2, \quad \ddot{\varphi} = 0$$

otrzymamy

$$(2.10) \quad m\ddot{x} + T(\dot{x}) + f(x) = A \sin(c_2 t + c_3),$$

gdzie

$$(2.11) \quad A = c_2^2 (m_1 l_1 + m_2 l_2).$$

Rozwiązanie ostatniego równania zależęć będzie od postaci funkcji $T(\dot{x})$ i $f(x)$. Przy założeniu, że

$$T(\dot{x}) = 2h\dot{x}, \quad f(x) = k^2 x$$

równanie (2.10) będzie równaniem liniowym i będzie miało postać

$$(2.12) \quad m\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = A \sin(c_2 t + c_3).$$

Rozwiązanie równania (2.12) można podać w postaci

$$x(t) = D_1 e^{-s_1 t} + D_2 e^{-s_2 t} + |\lambda| \cos(c_2 t - \alpha),$$

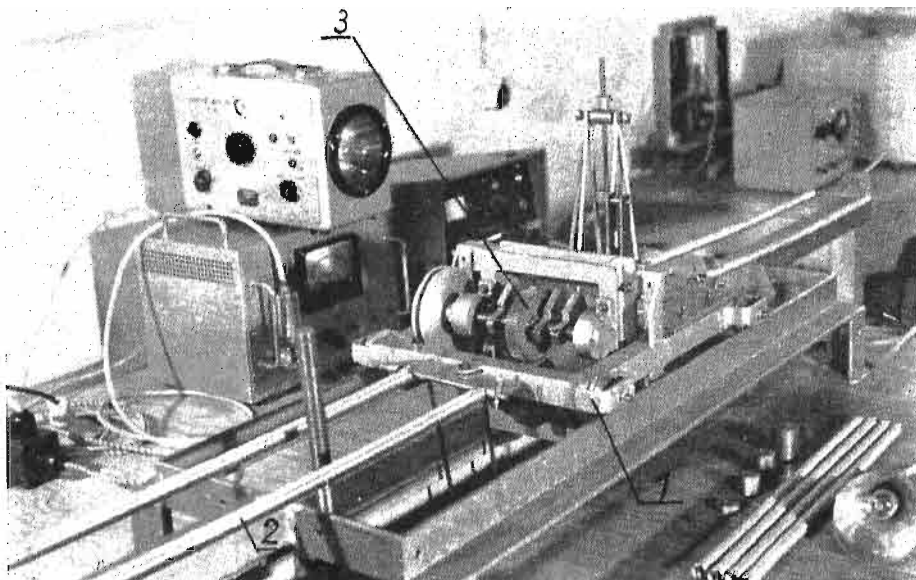
gdzie:

$$|\lambda| = \frac{A}{\sqrt{(-mc_2^2 + k^2) + 4h^2 c_2^2}}.$$

Z analizy omówionego przypadku układu samosynchronizującego wynika, że samosynchronizacja wibratorów mechanicznych zależna jest od charakterystyki silnika napędzającego wibrator. Według schematu układu pokazanego na rys. 2 zbudowane zostało stanowisko doświadczalne, na którym przeprowadzono badania synchronizacji dwóch wibratorów bezwładnościowych.

3. Badania doświadczalne urządzeń samosynchronizujących

W Katedrze Mechaniki Technicznej AGH w Krakowie przeprowadzone zostały badania doświadczalne układów samosynchronizujących na dwóch stanowiskach badawczych. Na rysunku 3 przedstawione jest stanowisko I. Stanowisko to składa się z wózka



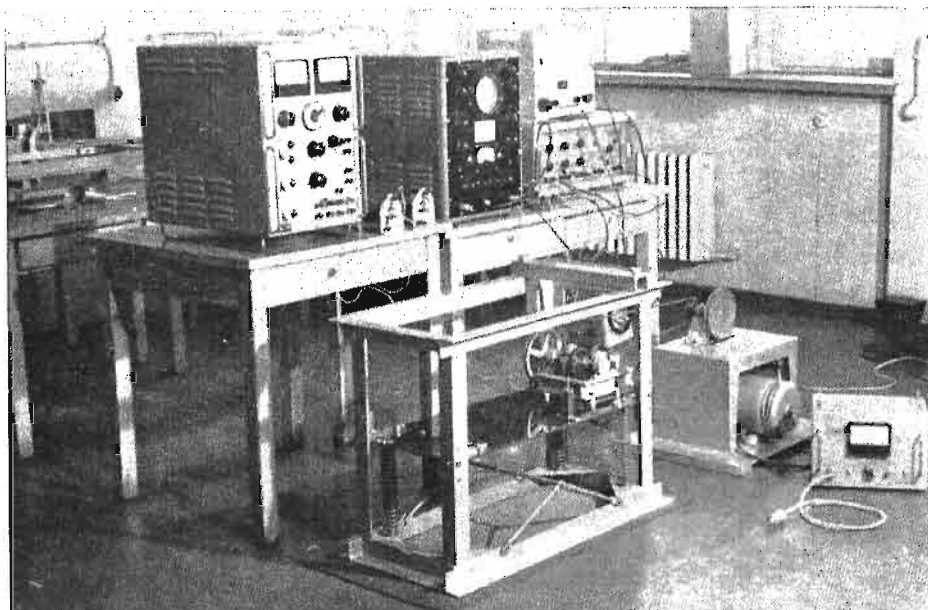
Rys. 3

poruszającego się po specjalnych szynach. Ruch drgający wózka ograniczony jest sprężynami 2, przy czym liczba sprężyn może być zmieniana. Liczba sprężyn wpływa na wartość amplitudy drgań wózka. Na wózku znajduje się wibrator bezwładnościowy 3, wymuszający drgania układu. Wibrator ten jest napędzany silnikiem elektrycznym o ciągłej regulacji obrotów. Oprócz wibratora 3 do wózka przymocowane jest wahadło fizyczne spełniające rolę drugiego wibratora.

Samosynchronizacja wibratorów polega na utrzymaniu równej ilości obrotów obu wibratorów: wibratora napędzanego silnikiem elektrycznym i wibratora obracającego się wskutek drgań układu. Zmiana obrotów wibratora napędzanego silnikiem elektrycznym w pewnych granicach powoduje zmianę obrotów wibratora drugiego, zachodzi wówczas pełna samosynchronizacja układu. Doświadczenia wykazały, że synchroniczne obroty obu wibratorów utrzymują się w granicach 500–700 obr/min. Na stanowisku tym w celu uzyskania synchronicznych obrotów wibratorów, trzeba było rozruszać wibrator do obrotów wibratora napędzanego silnikiem elektrycznym. Wstępne badania wykazały, że moc przenoszona za pomocą przekładni bezstykowej na tym stanowisku jest rzędu 0,1 KM. Moc mierzona była za pomocą specjalnego hamulca założonego na oś wibratora.

Na rysunku 4 pokazany jest widok stanowiska II. Stanowisko to składa się ze sztywnej płyty na której znajdują się wibratory. Jeden z wibratorów napędzany był silnikiem elektrycznym z ciągłą regulacją obrotów. Drugi wibrator nie był napędzany i nie miał żadnych przekładni kinematycznych ani elektrycznych z napędzanym wibratorem. Płyta zamoco-

wana była sprężyste do sztywnej ramy. Na stanowisku tym przeprowadzono cały szereg badań zmieniając parametry układu: a) liczbę sprężyn, b) rodzaj zawieszenia belki, c) rozstaw między osiami wibratorów.



Rys. 4

Liczby obrotów silnika oraz wibratorów mierzone były stroboskopem błyskowym, bezstykowym licznikiem obrotów oraz tachometrem. Na płycie zamocowany był wibrograf Geigera. Za pomocą tego wibrografu rejestrowano drgania płyty. Drgania płyty rejestrowane były także za pomocą tastografu. Przeprowadzone doświadczenia wykazały, że wzbudzenie obrotów wibratora nie napędzanego silnikiem następowało w każdym przypadku przy około 300 obr/min wibratora napędzanego silnikiem (następował wtedy rezonans układu). Wskutek drgań belki następowały synchroniczne obroty obu wibratorów. Badania wykazały, że obroty obu wibratorów były równe co do bezwzględnej wartości i współfazowe. Synchroniczne obroty utrzymywały się nie tylko przy prędkości kątowej odpowiadającej 300 obr/min, lecz także przy zwiększaniu liczby obrotów wibratora napędzanego do 380 obr/min. Przy około 380 obr/min wibratory wypadały z synchronizacji. Także przy zmniejszaniu liczby obrotów do 250 obr/min zachodziła pełna samosynchronizacja obrotów wibratorów.

Na podstawie przeprowadzonych doświadczeń można wysunąć wniosek, że w celu wzbudzenia obrotów wibratora nie napędzanego silnikiem elektrycznym, nie mającego żadnych przekładni kinematycznych oraz elektrycznych z napędzanym wibratorem trzeba doprowadzić do rezonansu belkę, na której umieszczone są obydwaj wibratory. Gdy częstość drgań własnych układu pokryje się z częstością siły wymuszającej, następuje wzbudzenie obrotów wibratora nie napędzanego. Zmiana odległości między osiami wibratorów w zasadzie nie wpływała na zjawisko samosynchronizacji, natomiast powodo-

wała zmianę amplitudy drgań belki. Istotny wpływ na zjawisko samosynchronizacji miało sprężyste zawieszenie belki drgającej.

Badania przeprowadzone na obu stanowiskach badawczych były badaniami wstępnymi i miały na celu wykazanie możliwości występowania zjawiska synchronizacji obrotów wibratorów mechanicznych umieszczonych na wspólnej podstawie, a także potwierdzenie możliwości bezstykowego przesyłania mocy. Celowe jest dalsze prowadzenie badań w tym kierunku.

Literatura cytowana w tekście

1. И. И. БЛЕХМАН, *Синхронизация механических вибраторов*, Инж. Сборник, **16** (1953).
2. И. И. БЛЕХМАН, *О самосинхронизации механических вибраторов*, Изв. АН СССР, **6**, 1958.
3. И. И. БЛЕХМАН, *Теория самосинхронизации механических вибраторов и некоторые ее приложения*, Труды ВЦ по осн. пробл. ТММ, 1960.
4. И. И. БЛЕХМАН, *Проблема синхронизации динамических систем*, Прикл. Мат. Мех., **2**, **28** (1964).
5. W. BOGUSZ, Z. ENGEL, *Możliwości bezstykowego przesyłania mocy*, Przegląd Naukowo-Techniczny AGH (w druku).
7. W. BOGUSZ, Z. ENGEL, *Badania urządzenia mechanicznego do bezstykowego przesyłania mocy*, Informacja naukowo-techniczna, HPR 20 (1965).
6. W. BOGUSZ, Z. ENGEL, *Badania doświadczalne urządzeń samosynchronizujących*, Przegląd Mechaniczny, **8**, 1965.
8. Z. ENGEL, *O pewnym układzie samosynchronizującym*, Materiały IV Konferencji Dynamiki Maszyn, Kraków 1965.
9. Z. ENGEL, *Pewne zagadnienia techniki wibracyjnej*, Rozprawy AGH nr 70, 1966.
10. В. П. ЛАВРОВ, *Пространственная задача о синхронизации механических вибраторов*, АН СССР ОТН **5**, 1961.
11. Р. Ф. НАГАЕВ, *О внутренней синхронизации почти одинаковых динамических объектов под действием слабых линейных связей*, Прикл. Мат. Мех., **2**, **28** (1964).
12. Р. Ф. НАГАЕВ, *Синхронизация в системе существенно-нелинейных объектов с одной степенью свободы*, Прикл. Мат. Мех., **2**, **29** (1965).
13. R. MIKLAZEWSKI, *On possibility of self synchronization of rotating eccentric vibrators*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych. **4** (1962).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ И АВТОСИНХРОНИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВИБРАТОРОВ

Вибрационные машины можно приводить в движение несколькими вибраторами. В этом случае требуется синхронизация скоростей вращений всех вибраторов. В статье рассмотрены вопросы синхронизации и автосинхронизации таких механических систем. Описаны основные работы в этой области проводимые прежде всего в СССР, а также Кафедрой Технической Механики Горно-Металлургической Академии в Кракове.

S u m m a r y

INVESTIGATIONS OF SYNCHRONIZATION AND SELFSYNCHRONIZATION OF MECHANICAL VIBRATORS

Vibration machines may be driven by some mechanical vibrators. In this case, it is necessary to ensure synchronized rotations of all the vibrators.

Problems of synchronization and self-synchronization of mechanical systems have been presented in the paper. Basic investigations in this field carried out mainly in the Soviet Union have been discussed, also the work done in the Department of Technical Mechanics of the Academy of Mining and Metallurgy.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1967 r.

SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA WIOTKICH OSIOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK
W ŚWIETLE TEORII PŁYNIĘCIA PLASTYCZNEGO

JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

1. Przedmiotem naszych rozważań jest stan równowagi wiotkiej osiowo-symetrycznej powłoki zdolnej do przenoszenia jedynie naprężeń rozciągających i mogącej pod wpływem obciążeń w istotny sposób zmieniać swą formę, jak też ulegać znacznym odkształceniom niesprężystym. We wszystkich dotychczasowych pracach poświęconych temu zagadnieniu (por. [11]) związki fizyczne przyjmowano w formie zależności pomiędzy skończonymi wielkościami naprężeń i odkształceń. Najczęściej były to tzw. równania Nádaia-Davisa (por. [2, 3, 9])

$$(1.1) \quad \varepsilon_1 = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \Phi, \quad \varepsilon_2 = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] \Phi, \quad \varepsilon_3 = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \Phi,$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są odkształceniami głównymi w mierze logarytmicznej Hencky'ego, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rzeczywistymi naprężeniami głównymi, a Φ znaną funkcją odkształceń zależną od przyjętego warunku plastyczności.

Zastosowanie tych równań, wygodne z uwagi na ich względnie prostą postać, powinno jednak podlegać pewnym ograniczeniom, jak bowiem wiadomo już przy małych odkształceniach równania teorii plastyczności, wiążące skończone wielkości naprężeń i odkształceń, tylko wtedy zadawalająco opisują fizyczny stan ciała, gdy realizowany jest przypadek tzw. prostego obciążenia. Natomiast przy odkształceniach skończonych to już nie wystarcza i wymaga się, aby w procesie obciążania składowe stanu naprężenia rosły proporcjonalnie (por. [9]). Warunek ten, choćby z uwagi na znaczne zmiany geometrii powłoki, w naszym przypadku najczęściej nie jest spełniony. Rzutuje to oczywiście na rezultaty otrzymane za pomocą równań (1.1) oraz uzasadnia próby skorzystania z bardziej precyzyjnych związków fizycznych (por. [5]). Związki takie, podobnie jak i równania (1.1), zaproponowali E. A. DAVIS [3] i A. NÁDAI [9] po przeprowadzeniu eksperymentów z cienkościennymi metalowymi rurami w złożonym stanie naprężenia. Stanowią one ekstrapolację równań de Saint-Venanta płynięcia plastycznego na przypadek skończonych odkształceń i mają postać:

$$(1.2) \quad d\varepsilon_1 = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] d\Phi, \quad d\varepsilon_2 = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] d\Phi, \\ d\varepsilon_3 = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] d\Phi,$$

gdzie $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ oznaczają przyrosty logarytmicznych deformacji spowodowane przyrostem obciążenia. Jeśli wprowadzimy pojęcia intensywności rzeczywistych naprężeń

$$(1.3) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

oraz intensywności logarytmicznych odkształceń i odpowiadających im przyrostów deformacji

$$(1.4) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

$$(d\varepsilon)_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2},$$

to jak widać z (1.2)

$$(1.5) \quad d\Phi = \frac{(d\varepsilon)_i}{\sigma_i}.$$

Aby określić funkcję Φ , musimy znać charakterystykę materiału, którą ustalamy na podstawie doświadczeń. Dla materiałów podlegających wzmocnieniu przyjmuje się przy tym bądź to zależność (por. [3, 5, 9, 11]) typu

$$(1.6) \quad \sigma_i = Kg(\varepsilon_i)\varepsilon_i,$$

bądź to związek pomiędzy maksymalnymi spośród głównych odkształceń postaciowych γ a odpowiednim naprężeniem stycznym τ (por. [2, 4, 9, 11])

$$(1.7) \quad \tau = \frac{K}{2} g(|\gamma|)\gamma,$$

gdzie K jest stałą o wymiarze naprężenia.

W przypadku gdy w procesie obciążania naprężenia główne pozostają wzajemnie proporcjonalne, równania (1.1) i (1.2) pokrywają się (por. [9]).

Zastosowanie związków (1.2) w teorii wiotkich powłok napotyka jednak na znaczne trudności natury matematycznej. Dlatego też próby w tym kierunku podjęto jedynie w nielicznych pracach. Jak dotąd ściśle rozwiązany został tylko prosty przypadek plastycznej obróbki rur cienkościennych przez przeciąganie. Rozwiązanie takie dla warunku plastyczności Treski podaje praca [7], a dla warunku Hubera-Misesa i przy uwzględnieniu tarcia [8]. W pracach [6, 13] rozpatrzono problem skończonych odkształceń plastycznych kołowej membrany poddanej równomiernemu ciśnieniu. Uzyskano przybliżone rozwiązania przy aproksymacji kształtu odkształconej membrany powierzchnią kulistą. Analogiczny problem przy założeniu jedynie dużych przemieszczeń omawia praca [12].

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie w oparciu o związki fizyczne teorii płynięcia plastycznego (1.2) podstawowego układu równań, opisującego stan powłoki w procesie obciążenia wywołującego skończone odkształcenia plastyczne. Przyjmuje się przy tym podobnie jak w pracy [11] osiową symetrię powłoki i obciążenia, nieściśliwość i izotropię materiału [o charakterystyce (1.6) lub (1.7)]. Odkształcenia sprężyste jako małe w porównaniu z odkształceniami plastycznymi pomijamy. Ponieważ powłoka jest wiotka

i przynosi tylko rozciąganie, to zajść mogą (por. [4.11]) dwa przypadki: a) oba naprężenia główne są dodatnie ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$), b) naprężenie pierścieniowe zeruje się i powstają fałdy ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$). Jeśli przy tym zdarzy się, że [por. (1.4)]:

$$(1.8) \quad \frac{d\varepsilon_i}{dt} < 0,$$

gdzie t jest zmienną charakteryzującą wzrost obciążenia, to zachodzi proces odciążenia i powłokę rozpatruje się jak w pracy [10].

2. Rozważmy przypadek, gdy dla powłoki przedstawionej na rys. 1 $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 > 0$. Podstawowy układ równań różniczkowych określających stan tej powłoki otrzymamy ze związków geometrycznych, fizycznych oraz równań równowagi. Posłużymy się przy tym ustalonym układem współrzędnych X, Y (typu Eulera) związanych z nieruchomymi punktami w przestrzeni i opisującymi formę powłoki odkształconej oraz współrzędnymi r, ζ (typu Lagrange'a) sztywno związanymi z cząstkami powłoki i ich położenie w stanie nieodkształconym. Wprowadzamy przy tym następujące wielkości bezwymiarowe (por. rys. 1):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{X}{R_1}, & y &= \frac{Y}{R_1}, & h &= \frac{H}{H_{10}}, \\ \xi &= \frac{r}{R_1}, & \eta &= \frac{\zeta}{R_1}, & f &= f(\xi) = \frac{H_1}{H_{10}}, & u &= \frac{H}{H_1} = \frac{h}{f}, \\ Q_n &= Q_n(x, y, t) = \frac{R_1}{KH_{10}} q_n(X, Y, t), \\ Q_s &= Q_s(x, y, t) = \frac{R_1}{KH_{10}} q_s(X, Y, t), \\ p_1 &= \frac{\sigma_1}{K}, & p_2 &= \frac{\sigma_2}{K}, & p_t &= \frac{\sigma_t}{K}, \end{aligned}$$

gdzie H_1 i H oznaczają odpowiednio grubość powłoki przed i po odkształceniu, $q_n(X, Y, t)$ i $q_s(X, Y, t)$ — obciążenia przypadające na jednostkę powierzchni w kierunku normalnym i południkowym, stycznym do powłoki odkształconej, R_1 — dowolny rozmiar charakteryzujący powłokę przed odkształceniem; H_{10} — grubość początkową powłoki w pewnym ustalonym punkcie, t — bezwymiarową zmienną charakteryzującą wzrost obciążeń w procesie obciążania. Ponadto, jeśli dane są wymiary powłoki w stanie nieodkształconym, to $f(\xi)$ jest znaną funkcją swego argumentu.

W powłoce zakładamy płaski stan naprężenia. Jeśli przez 1, 2, 3 oznaczymy odpowiednio kierunki główne — południkowy, równoleżnikowy i normalny do powłoki, to

$$(2.2) \quad \sigma_3 = 0.$$

Wówczas na podstawie równań (1.2) i (1.6), przyjętego warunku nieściśliwości i po uwzględnieniu (2.1) otrzymujemy związki fizyczne w postaci:

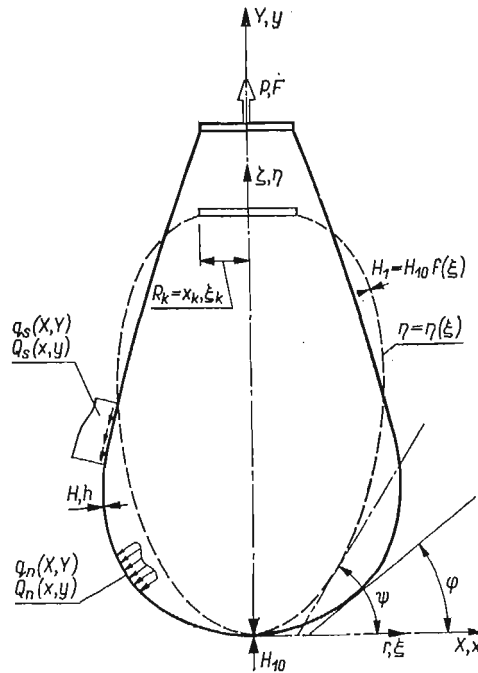
$$(2.3) \quad \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$(2.4) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

$$(2.5) \quad p_i = g(\varepsilon_i)\varepsilon_i,$$

gdzie [por. (1.3), (1.4)] obecnie

$$p_i = \sqrt{p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2}.$$



Rys. 1

Jeśli zamiast zależności (1.3) przyjmiemy (1.6), to zamiast równania (2.5) mamy

$$(2.6) \quad p_1 = (|g\varepsilon_1 - \varepsilon_3|)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \text{przy } p_1 \geq p_2,$$

lub

$$(2.7) \quad p_2 = (|g\varepsilon_2 - \varepsilon_3|)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \text{przy } p_2 \geq p_1.$$

W konkretnych zastosowaniach zależności (1.6) i (1.7) najczęściej aproksymujemy za pomocą krzywych dwuparametrowych. I tak dla potęgowego wzmocnienia, zakładając odpowiednio

$$(2.8) \quad \sigma_i = K\varepsilon_i^\mu \quad \text{lub} \quad \sigma_j = K|\varepsilon_j - \varepsilon_3|^\mu,$$

mamy stąd

$$(2.9) \quad g(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{\mu-1} \quad \text{lub} \quad g(\varepsilon_j - \varepsilon_3) = |\varepsilon_j - \varepsilon_3|^{\mu-1},$$

dla liniowego zaś wzmocnienia

$$(2.10) \quad \sigma_i = K(1 + A\varepsilon_i) \quad \text{lub} \quad \sigma_j = K[1 + A(\varepsilon_j - \varepsilon_3)]$$

otrzymujemy

$$(2.11) \quad g(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} + A \quad \text{lub} \quad g(\varepsilon_j - \varepsilon_3) = (\varepsilon_j - \varepsilon_3)^{-1} + A,$$

gdzie j oznacza wskaźnik większego z naprężeń p_1 i p_2 . Model ciała idealnie plastycznego otrzymamy przyjmując w tych wzorach $\mu = 0$ lub $A = 0$.

W procesie obciążania zarówno naprężenia jak i odkształcenia będą funkcjami nie tylko położenia, ale także zmiennej t opisującej przebieg tego procesu w czasie. Jako zmienne niezależne przyjmujemy w przypadku współrzędnych Lagrange'a ξ, t , w przypadku zaś współrzędnych Eulera x, t . Ponieważ $x = x(\xi, t)$, a ξ jako sztywno związane z cząstką nie zależy od t , to przy różniczkowaniu pomiędzy tymi zmiennymi zachodzi relacja

$$(2.12) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\partial x / \partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Równania geometryczne powłoki układamy dla dowolnego ustalonego stanu obciążenia (co odpowiada ustalonej wartości t). Przy przyjęciu współrzędnych Eulera x, t mają one postać analogiczną jak w pracy [11]

$$(2.13) \quad \varepsilon_1 = \ln \left(\frac{1}{\partial x / \partial \xi} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u.$$

Funkcje ψ i φ oznaczają tu (por. rys. 1) kąty zawarte pomiędzy osią x a styczną do powłoki odpowiednio w stanie nieodkształconym i odkształconym.

Na podstawie wzorów (2.13) możemy obecnie obliczyć przyrosty odkształceń $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ i $d\varepsilon_3$ wywołane przyrostem obciążeń odpowiadającym dt . Należy tu zwrócić uwagę, że ponieważ przy skończonych odkształceniach przyrosty te (oznaczane dalej przez δ) dotyczą ustalonej cząstki powłoki, to najczęściej (procesy niestacjonarne) nie są one różniczkami zupełnymi i traktowanie ich jako takich byłoby błędne. Wyjątek stanowi przypadek, gdy współrzędne Eulera opisujące kształt powłoki nie zależą od czasu. Odpowiada to np. niektórym stacjonarnym procesom obróbki plastycznej jak obciskanie lub przeciąganie nieskończenie długich rur cienkościennych, kiedy forma matrycy, a więc i powłoki, nie ulega zmianie z czasem. Stan powłoki opisują wówczas zwyczajne równania różniczkowe, a rozwiązanie problemu jest szczególnie proste (por. [7, 8]). W ogólnym zaś przypadku we współrzędnych Lagrange'a ξ, t mamy:

$$(2.14) \quad \delta\varepsilon_1 = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} dt, \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t} dt, \quad \delta\varepsilon_3 = \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t} dt.$$

Wobec (2.13) otrzymujemy zatem [por. (2.12)]

$$(2.15) \quad \delta\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\partial x / \partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \operatorname{tg} \varphi \right) dt, \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad \delta\varepsilon_3 = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Fizyczne równanie (2.3) można obecnie [wykorzystując (2.4)] zapisać w postaci

$$(2.16) \quad u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial t} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Równania równowagi układamy dla elementu powłoki w stanie odkształconym przy ustalonej wartości t . Wówczas w układzie współrzędnych (x, t) ich postać (por. [4, 5, 7])

$$(2.17) \quad \frac{\partial}{\partial x} (xhp_1) = hp_2 + \frac{xQ_s}{\cos \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (xhp_1 \sin \varphi) = x(Q_n + Q_s \operatorname{tg} \varphi)$$

jest analogiczna jak w pracy [11], przy czym pochodne d/dx zastąpiono przez $\partial/\partial x$. Również w układzie x, t zapisujemy związek (por. rys. 1)

$$(2.18) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Równania (2.4), (2.13), (2.16), (2.17) i (2.18) można sprowadzić do układu pięciu quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych, które dla zmiennych niezależnych ξ, t mają postać:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{f u \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{p_1 u x \cos \psi} \left(\frac{Q_n}{f u} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right), \\ u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial t} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Jak można wykazać (por. [1]) jest to układ hiperboliczny, a jego charakterystykami są linie $\xi = \text{const}$ i $t = \text{const}$. Niewiadomymi są tu funkcje $x(\xi, t), y(\xi, t), \varphi(\xi, t), u(\xi, t), p_1(\xi, t), p_2(\xi, t)$. Brakujące szóste równanie ma charakter algebraiczny [por. (2.4), (2.13)] i zależnie od przesłanek fizycznych przyjmuje postać (2.5), (2.6) lub (2.7).

W szczególnym przypadku, gdy $Q_s = 0$ i $Q_n = Q = \text{const}$, czwarte z równań (2.19) daje się rozwiązać efektywnie [por. (2.17)] i zapisać w postaci

$$(2.20) \quad \sin \varphi = \frac{xQ}{2fp_1u} + \frac{F}{2fp_1ux},$$

przy czym

$$(2.21) \quad F = \frac{P}{\pi H_{10} K R_1}$$

jest bezwymiarowym odpowiednikiem wypadkowej P sił zewnętrznych działających bezpośrednio na dno lub krawędź powłoki.

Często wygodniej jest, gdy jako zmienne niezależne obierzemy (por. rys. 1) nie ξ, t , lecz η, t (np. powłoka walcowa). Wówczas odpowiednie równania będą miały postać taką samą jak poprzednio, z tym że pochodne $\partial/\partial \xi$ należy zastąpić przez $\partial/\partial \eta$, a $\cos \psi$ przez $\sin \psi$. Dla powłoki walcowej $\xi = \sin \psi = 1$.

2.1. W przypadku gdy $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$, z uwagi na to, że w procesie obciążania naprężenia główne pozostają wzajemnie w stałej proporcji

$$(2.22) \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,$$

układy równań fizycznych (1.2) i (1.3) pokrywają się i rozwiązanie przebiega analogicznie jak w pracy [11].

Zastosowanie równań teorii płynięcia plastycznego wymaga (ze względów fizycznych) istnienia niezerowego stanu wyjściowego, w którym naprężenia osiągają granicę plastyczności. Stan ten (oznaczony $*$) przy $t = 0$ determinuje warunki początkowe dla układu (2.19):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(\xi, 0) &= x_*(\xi), & y(\xi, 0) &= y_*(\xi), & u(\xi, 0) &= u_*(\xi), \\ \varphi(\xi, 0) &= \varphi_*(\xi), & p_1(\xi, 0) &= p_{1*}(\xi), & p_2(\xi, 0) &= p_{2*}(\xi). \end{aligned}$$

Najbardziej typowe przypadki warunków brzegowych to (por. [11]):

a) Wierzchołek kopuły

$$(3.2) \quad x(0, t) = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad F = 0 \quad \text{oraz} \quad x(\xi_1, t) = \xi_1,$$

gdzie F wyraża się wzorem (2.21). Z warunku równowagi sił działających na brzeg powłoki $\xi = \xi_0$ wynika, że ogólnie

$$(3.3) \quad \varphi(\xi_0, t) = \arcsin \frac{Q_n(\xi_0, t)x^2(\xi_0, t) + F(t)}{2x(\xi_0, t)f(\xi_0)u(\xi_0, t)p_1(\xi_0, t)}.$$

W przypadku wierzchołka kopuły obliczamy stąd $\varphi(0, t) = 0$, a następnie [por. (2.13)] $\varepsilon_1(0, t) = \varepsilon_2(0, t)$ i na tej podstawie [por (2.3)] mamy $p_1(0, t) = p_2(0, t)$.

b) Nieodkształcalne dna ze swobodą przesuwu

$$(3.4) \quad x(\xi_0, t) = \xi_0, \quad y(\xi_0, t) = 0, \quad F = F_0 \quad \text{oraz} \quad x(\xi_1, t) = \xi_1.$$

Z równania (3.4) obliczamy wówczas $\varphi(\xi_0, t)$, a następnie podobnie jak poprzednio $p_1(\xi_0, t) = 2p_2(\xi_0, t)$.

c) Nieprzesuwne nieodkształcalne dna

$$(3.5) \quad x(\xi_0, t) = \xi_0, \quad y(\xi_0, t) = 0 \quad \text{oraz} \quad x(\xi_1, t) = \xi_1, \quad y(\xi_1, t) = \eta_1.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku $p_1(0, t) = 2p_2(0, t)$, nie znamy natomiast siły $F(t)$ i co za tym idzie kąta $\varphi(\xi_0, t)$.

d) Dane odkształcenie na brzegu $x(\xi_0, t) = x_0 = \text{const}$. Pozostałe warunki jak w przypadku b), a więc inaczej niż to wynika z teorii odkształceniowej (por. [11]), gdzie $p_1 = kp_2$, przy czym dla $x_0 \neq \xi_0$ $k \neq 2$.

e) Odkształcalny kontur. Warunki brzegowe dla odkształcalnego konturu mogą być różnie sformułowane zależnie od konkretnego problemu fizycznego, jak np. rozciągliwy pierścień na brzegu, odkształcalne denko, podatne złącze dwóch różnych powłok itp. Wspólną cechą tych warunków jest równość przyrostów odkształceń brzegowych powłoki de'_2 i konturu de''_2 oraz równość odpowiadających im wypadkowych sił F' i F'' oraz promieni $x'(\xi_0, t) = x''(\xi_0, t)$. Ponadto jak poprzednio zakładamy $y(\xi_0, t) = 0$ oraz $x(\xi_1, t) = \xi_1$.

W przypadkach a, b, d, e przyjęto, że na drugim końcu powłoki znajduje się przesuwne nieodkształcalne dno. Zgodność warunków początkowych (3.1) z warunkami brzegowymi a–e w punkcie brzegowym $(0, 0)$ jest zawsze zachowana z wyjątkiem relacji pomiędzy naprężeniami, gdzie zgodność tę należy każdorazowo oddzielnie wykazać.

4. W charakterze przykładu rozważymy przypadek powłoki walcowej o liniowo zmiennej grubości ścianki w stanie nieodkształconym. Wewnątrz tej powłoki znajduje się sztywny rdzeń, którego średnicę stopniowo zwiększamy powodując w ten sposób powstanie w niej skończonych odkształceń plastycznych. Wywołane przy tym tarcie uwzględniamy w obliczeniach. Jako zmienną charakteryzującą rozwój odkształceń przyjmujemy promień powłoki ($x = r$), przy czym $x \geq 1$. W miarę odkształceń wolne końce powłoki przemieszczają się ku jej środkowi, musi zatem istnieć jakiś punkt nieruchomy η_* . Jak się przy tym okazuje dla $\eta < \eta_*$ (I część) i dla $\eta > \eta_*$ (II część) przemieszczenia następują w przeciwnych kierunkach, a więc siły tarcia mają przeciwne zwroty. Prawo tarcia (wg Coulomba), zmianę grubości ścianki przed odkształceniem i warunek plastyczności zakładamy w postaci:

$$(4.1) \quad Q_s = kQ_n, \quad f(\eta) = 1 + \alpha\eta, \quad p_2 = \bar{p},$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają $k \neq 0$ — współczynnik tarcia, $\alpha \neq 0$ — bezwymiarową stałą, $\bar{p} = \text{const}$ — granicę plastyczności. Ponieważ oba końce powłoki ($\eta = 0$, $\eta = \eta_l$) nie są obciążone, to prócz zachowania ciągłości na granicy stref mamy warunki brzegowe

$$(4.2) \quad p_1(0, x) = 0, \quad p_1(\eta_l, x) = 0, \quad y(\eta_*, x) = \eta_*$$

oraz początkowe

$$(4.3) \quad h_0 = h(\eta, 1) = 1 + \alpha\eta, \quad y(\eta, 1) = \eta.$$

Warto przy tym zauważyć, że zerowe warunki początkowe dla naprężeń (powłoka nieobciążona) byłyby sprzeczne z przyjętym warunkiem plastyczności (4.1).

Dla rozważanej powłoki mamy następujące związki w wielkościach bezwymiarowych: równania równowagi

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial y} (hp_1) = Q_s, \quad p_2 = \frac{x}{h} Q_n;$$

równania geometryczne

$$(4.5) \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \varepsilon_2 = \ln x, \quad \varepsilon_3 = \ln u;$$

równania fizyczne:

$$(4.6) \quad u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial x} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Ze związków (4.1)–(4.6) otrzymujemy układ równań

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (hp_1) = \frac{\pm k\bar{p}}{x^2} (1 + \alpha\eta), \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h}{x} \frac{p_1 + \bar{p}}{p_1 - 2\bar{p}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1 + \alpha\eta}{hx}.$$

Zajmiemy się naprzód pierwszą częścią powłoki. I tak z (4.7) (znak +) przy uwzględnieniu (4.2) mamy

$$(4.8) \quad p_1 = \frac{\bar{p}}{hx^2} \beta, \quad \beta = k \left(\eta + \frac{\alpha}{2} \eta^2 \right).$$

Wprowadzając nową funkcję $z = hx^2$ z (4.7) i (4.8) dostajemy równanie

$$4.9 \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = 3z \frac{\beta - z}{\beta - 2z},$$

którego rozwiązaniem przy warunku początkowym (4.3) jest funkcja

$$(4.10) \quad z(z-1) = \alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$(4.11) \quad h = \frac{1}{2x^2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}} \right), \quad p_1 = \frac{2\bar{p}\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}}}.$$

Jak widać p_1 monotonicznie wzrasta w sposób nieograniczony wraz z η . Ponieważ z uwagi na warunek plastyczności $p_1 \leq \bar{p}$, to maksymalną długość $\bar{\eta}$ części powłoki opisywanej równaniami (4.11) wyznaczamy z warunku $p_1 = \bar{p}$, który prowadzi do równania przesłanego

$$(4.12) \quad k^2\bar{\eta} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta} \right)^2 - k \left(1 + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta} \right) - \alpha(1+\alpha\bar{\eta})x^{\frac{3}{k\bar{\eta} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta} \right)}} = 0.$$

Założymy, że $\eta = \eta_* \leq \bar{\eta}$ jest punktem nieruchomym i zajmiemy się obecnie drugą częścią powłoki, gdzie $\eta \geq \eta_*$. Warunek ciągłości dla pierwszego z równań (4.7) (znak $-$) ma postać

$$(4.13) \quad (hp_1)|_{\eta=\eta_*} = \frac{\bar{p}}{x^2} \beta_*, \quad \beta_* = k \left(\eta_* + \frac{\alpha}{2} \eta_*^2 \right).$$

Na tej podstawie po scałkowaniu dostajemy

$$(4.14) \quad p_1 = \frac{\bar{p}}{hx^2} (2\beta_* - \beta).$$

Warunek brzegowy (4.2) dla $p_1(\eta_l, x)$ będzie spełniony przy

$$(4.15) \quad \eta_l = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + 4\alpha\eta_* \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta_* \right)} - 1 \right), \text{ czyli}$$

$$\eta_* = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \alpha\eta_l \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta_l \right)} - 1 \right) \leq \bar{\eta},$$

skąd widać, że położenie punktu nieruchomego η_* nie zmienia się w procesie deformacji.

Z drugiego z równań (4.7) oraz na podstawie (4.14) otrzymujemy

$$(4.16) \quad h = \frac{1}{2x^2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{2\beta_* - \beta}}} \right),$$

$$p_1 = \frac{2\bar{p}\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{2\beta_* - \beta}}}}.$$

Całkując trzecie z równań (4.7), przy warunku brzegowym (4.2), mamy więc

$$(4.17) \quad y(\eta, x) = \begin{cases} \eta_* - 2x \int_{\eta}^{\eta_*} \frac{1 + \alpha\eta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1 + \alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}}} d\eta & \text{dla } 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ \eta_* + 2x \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{1 + \alpha\eta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1 + \alpha\eta)x^{\frac{3}{2\beta_* - \beta}}}} d\eta & \text{dla } \eta_* \leq \eta \leq \eta_1. \end{cases}$$

Stąd zaś możemy obliczyć całkowitą długość powłoki po odkształceniu: $y(\eta_1, x) - y(0, x)$.

Literatura cytowana w tekście *

1. И. С. БЕРЕЗИА, Н. П. ЖИДКОВ, *Методы вычислений*, Физматгиз, 2, Москва 1962.
2. E. A. DAVIS, *Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses*, Trans. ASME, **65** (1943). A-187.
3. E. A. DAVIS, *Yielding and fracture of medium carbon steel under combined stress*, J. Appl. Mech., **1**, 12 (1945).
4. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., **6**, 21 (1957).
5. A. S. GRIGORIEV, *The Stress State and the Carrying Capacity of Flexible Plates and Shells at Large Deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN, Warszawa 1964, repr. Non-classical Shell Problems. Proc. IASS Symp., Warsaw, Sept. 1963.
6. R. HILL, *A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure*, Phil. Mag., Sér. 7, **51**, Novembre 1950, 1133.
7. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, McGraw-Hill Book Co., 1953.
8. Н. Н. МАЛИНИН, *Волочение труб через конические матрицы*, Изв. АН СССР, Механика, **5**, 1965.
9. A. NÁDAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York-Toronto-London 1950.
10. J. ORKISZ, *Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos., **1**, 3 (1965).
11. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., **4**, **13** (1965), streszcz. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **1**, **15** (1967).
12. E. ROSS, W. PRAGER, *On the theory of the bulge test*, Quarterly Appl. Mathem., **1**, **12** (1954).
13. ТРАН ЛУИ-ЧИОНГ, *Жестко-пластической анализ мембран с учетом упрочнения*, Изв. АН СССР, ОТИ, Мех. Машин., **4**, 1965.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИБКИХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В статье представляется обобщение результатов работы [11] на случай физических уравнений теории пластического течения с конечными деформациями (предложенных А. НАДАИ [9]). Предметом работы является вывод системы уравнений описывающих состояние оболочки в процессе

нагрузки. Исследуемая оболочка воспринимает только растягивающие напряжения, поэтому могут иметь место следующие два случая:

а) оба главные напряжения положительны ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$); получаем гиперболическую систему (2.19) пяти квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (обсуждены краевые и начальные условия);

в) кольцевое напряжение равно нулю ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$); физические уравнения деформационной теории и теории пластического течения совпадают — получается задача уже решенная в работе [11].

В заключение выведенные уравнения применяются для получения точного решения задачи о цилиндрической оболочке с линейно изменяющейся толщиной в недеформированном состоянии. Оболочка распирается изнутри втулкой увеличивающегося радиуса, причем учитывается трение материала.

Summary

FINITE DEFORMATIONS OF FLEXIBLE AXIALLY SYMMETRIC MEMBRANE SHELLS IN THE LIGHT OF THE THEORY OF PLASTIC FLOW

This paper generalizes the previous results [11] to the case of the theory of plastic flow under finite deformations. The physical relations in the form given by A. Nadai [9] are applied throughout the paper. The main aim of the present considerations is to derive the set of equations describing the behaviour of a shell process of loading. Since only tensile stresses are present, the two following cases are possible:

a) both the principal stresses are positive definite ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$); then we have the set (2.19) of five quasi-linear hyperbolic partial differential equations of the first order (boundary conditions are discussed).

b) circumferential stress is equal to zero ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$); then the physical relations for plastic flow are exactly the same as those for the theory of plastic deformations, and we obtain the problem already solved in [11].

In conclusion, the solution of the case of a cylindrical shell with linearly variable thickness expanded inside by a pin of increasing radius (friction has been taken into consideration) is discussed in more detail.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1967 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

AKTUALNE TENDENCJE ROZWOJOWE MECHANIKI CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH (W UJĘCIU STATYSTYCZNYM)

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Poszczególne gałęzie mechaniki ciał stałych odkształcalnych rozwijają się w sposób nie równomierny — jedne wchodzą obecnie w fazę silnego rozwoju, inne znajdują się w stadium zaniku lub przeżywają chwilowy kryzys. Celem obecnej pracy jest podanie pewnej statystyki, dotyczącej sześciu lat 1961–1966 i próba wyciągnięcia wniosków odnośnie aktualnego rozwoju mechaniki ciał odkształcalnych w skali światowej i w Polsce.

Statystykę publikowanych prac z dziedziny mechaniki ciał odkształcalnych najdogodniej będzie oprzeć na czasopismach referatowych, klasyfikujących i krótko omawiających poszczególne publikacje. W latach 1961–1966 omówiono blisko 50 000 prac z tego zakresu. Najbardziej odpowiednimi są: wydawany w Związku Radzieckim *Referatiwnyj Żurnal, Mieczanika* (w skrócie *RŻ*), oraz wydawane w Stanach Zjednoczonych *Applied Mechanics Reviews* (w skrócie *AMR*).

Tablica 1. Liczba prac z dziedziny mechaniki ciał odkształcalnych, omówionych przez czasopisma referatowe w latach 1961–1966

Rok	<i>Referatiwnyj Żurnal (RŻ)</i>	<i>Applied Mechanics Reviews (AMR)</i>	<i>Polski Bibliografia Anal. Mechanika (PBAM)</i>
1961	6716	2715	328
1962	7298	2929	386
1963	8130	3128	316
1964	8426	3145	336
1965	8636	3196	325
1966	9362	3265	268
ogółem, 6 lat	48568	18369	1959
średnia roczna <i>M</i>	8095	3062	327
średni bezwzględny przyrost prac na rok	+ 501	+ 101	– 13
średni procentowy przyrost prac na rok	+ 6,2%	+ 3,3%	– 4,0%

W tablicy 1 podano porównanie liczbowe obu tych czasopism dołączając jednocześnie dane, dotyczące *Polskiej Bibliografii Analitycznej Mechaniki* (w skrócie *PBAM*), omawiającej prace polskie i publikowane

w Polsce. W przypadku *RŻ* wzięto pod uwagę całość działu «Sprężystość i plastyczność» (który zresztą od r. 1967 nosi nazwę «Mechanika ciał stałych odkształcalnych»); w przypadku *AMR* — całość działu «Mechanika ciał stałych» z pominięciem kinematyki i dynamiki ciał sztywnych, automatyki i sterowania, a z włączeniem metod matematycznych, aerosprężystości oraz mechaniki ciał w podwyższonych i obniżonych temperaturach; w przypadku *PBAM* — całość działu «Sprężystość i plastyczność».

W tablicy 1 podano również sumę prac omówionych w ciągu wspomnianych sześciu lat, średnią roczną *M*, a także pewne średnie przyrosty roczne liczby prac. Przyrosty te (podobnie jak i w dalszej części pracy) liczone następująco: przez wynikające z tablicy 1 punkty przeprowadzono linie proste metodą najmniejszych odchyłeń kwadratowych; współczynnik kierunkowy tych prostych wynosi

$$(1.1) \quad m = \frac{5x_{66} + 3x_{65} + x_{64} - x_{63} - 3x_{62} - 5x_{61}}{35}$$

(gdzie x_i są liczbami prac w poszczególnych latach — odpowiednimi wyrazami ciągu) i przyjęto go za miarę średniego bezwzględnego przyrostu referowanych prac w skali rocznej; wreszcie stosunek tego współczynnika *m* do odpowiedniej wartości średniej *M* przyjęto za miarę średniego procentowego przyrostu rocznego. Odnoszenie do wartości średniej *M* jest tu znacznie bardziej uzasadnione niż np. odnoszenie do wartości wyjściowej z r. 1961, mającej dość przypadkowy charakter.

Jak wynika z tablicy 1, *RŻ* nie tylko omawia niemal trzykrotnie większą liczbę prac od *AMR*, ale wykazuje dwukrotnie silniejszą tendencję rozwojową (średni procentowy przyrost prac na rok wynosi 6,2% w *RŻ* wobec 3,3% w *AMR*). Wydaje się, iż redakcja *AMR* sama «przesiewa» ukazujące się prace, przy czym czyni to z roku na rok ostrzej, nicwątliwie w sposób w pewnym stopniu subiektywny. W związku z tym oprzemy się na danych *RŻ* i skorzystamy ze stosowanej tam klasyfikacji.

Klasyfikacja ta dzieli prace na 6 zasadniczych grup dyscyplin, mianowicie: zagadnienia ogólne mechaniki ciał odkształcalnych; teoria sprężystości; plastyczność, pelzanie, mechanika gruntów; pręty i ustroje prętowe: wytrzymałość konstrukcji; własności mechaniczne materiałów. W ramach tych grup wyodrębniono ogółem 29 dyscyplin o różnym zasięgu — w ramach poszczególnych dyscyplin omawia się od kilkudziesięciu do około tysiąca prac rocznie (średnio około 300 prac). Klasyfikacja *AMR* wyodrębnia 23 interesujące nas dyscypliny, jest więc nieco mniej dokładna. Oczywiście klasyfikacji *RŻ* można by również postawić różne zarzuty — np. nie wyodrębnia ona zagadnień stateczności (wyboczenia), które mają swój dział w *AMR*. Problemów optymalnego kształtowania (i wielu innych, o wyraźnym profilu) nie wyodrębnia żadne z wspomnianych czasopism referatowych. Jednakże próba wprowadzenia własnej klasyfikacji byłaby niezwykle pracochłonna, zapewne niewspółmiernie w stosunku do otrzymanych wyników i wniosków.

Osobnym problemem są pomyłki w klasyfikacji, czasem bardzo zasadnicze. Tak np. praca W. ROTHA «Instabilität des durchströmten Schlauches», Österr. Ing.-Archiv 1964/1–2, dotycząca niekonserwatywnych zagadnień stateczności sprężystej, sklasyfikowana jest w *RŻ* 1965/2, B/288 w dziale ... «Mechanika gruntów» (!). Wydaje się jednak, iż takich pomyłek jest niewiele i nie mogą one poważnie rzutować na wyniki statystyki, ujmującej niemal 50 000 prac.

2. Tendencje rozwojowe w skali światowej

Podamy najpierw dwa zestawienia zbiorcze prac: sklasyfikowanych w grupach dyscyplin i w poszczególnych dyscyplinach. Bardzo nieliczną grupę problemów ogólnych mechaniki ciał odkształcalnych włączymy przy tym do grupy teorii sprężystości (do r. 1961 włącznie *RŻ* nawet nie wyodrębniał tej grupy), tak że ostatecznie wyodrębnimy 5 grup dyscyplin. Zestawienie prac sklasyfikowanych w grupach dyscyplin podaje tablica 2.

Jak widać z tablicy 2, pod względem przyrostu procentowego najsilniej rozwija się grupa dyscyplin «Własności mechaniczne materiałów» o nastawieniu głównie praktycznym i doświadczalnym — dalej «Plastyczność, pelzanie i mechanika gruntów». Pod względem przyrostu bezwzględnego liczby prac w skali rocznej największy rozwój wykazują te same grupy dyscyplin z tym, iż zamieniają się miejscami — największy przyrost bezwzględny wykazuje «Plastyczność». Te obie grupy mają średni przyrost procentowy powyżej średniego dla całej mechaniki ciał odkształcalnych, wynoszącego, według *RŻ*, 6,2%. Natomiast pozostałe trzy grupy dyscyplin rozwijają się słabiej (w kolejności, według przyrostu procentowego: «Wy-

trzymałość konstrukcji», «Teoria sprężystości», wreszcie «Pręty i ustroje prętowe»), jednak wszystkie wykazują przyrost dodatni.

Zestawienie w tabelicy 2 ma charakter raczej syntetyczny. Znacznie dokładniejsze rozbięcie na poszczególne dyscypliny umożliwi nam wyciągnięcie dalej idących wniosków. Zestawienie takie podaje tablica 3.

Tablica 2. Zestawienie zbiorcze prac, sklasyfikowanych w grupach dyscyplin

grupa dyscyplin	rok						ogółem 6 lat	średnia <i>M</i>	średni przyrost bezwzgl. m	średni przyrost procent.
	1961	1962	1963	1964	1965	1966				
Teoria sprężystości i prace ogólne	1822	2109	2358	2323	2173	2521	13306	2218	+104	+4,7%
Plastyczność, pełzanie, mechanika gruntów	1562	1812	1891	2082	1993	2450	11790	1965	+148	+7,5%
Pręty i ustroje prętowe	696	703	703	754	691	874	4421	737	+26	+3,5%
Wytrzymałość konstrukcji	1378	1395	1624	1813	1866	1734	9810	1635	+97	+5,9%
Własności mechaniczne materiałów	1258	1279	1554	1454	1913	1783	9241	1540	+126	+8,2%
Ogółem	6716	7298	8130	8426	8636	9362	48568	8095	+501	+6,2%

W zależności od otrzymanych z obliczeń średnich rocznych przyrostów procentowych można podzielić dyscypliny na trzy grupy. Przez dyscypliny wykazujące tendencje silnie rozwojowe będziemy rozumieli te, dla których średni roczny przyrost procentowy przekracza 6,2%, co zapewnia również dodatni przyrost udziału procentowego danej dyscypliny w globalnej liczbie prac; przez dyscypliny wykazujące tendencje słabo rozwojowe — średni roczny przyrost procentowy w przedziale od zera do 6,2% (udział procentowy danej dyscypliny wykazuje już tendencję malejącą); wreszcie przez dyscypliny o tendencjach zanikowych — ujemny średni roczny przyrost prac. Tak podzielone dyscypliny i uszeregowane według średniego przyrostu procentowego zestawiono w tabelicy 4.

Jakkolwiek statystyka obejmuje znaczną liczbę prac i dość długi okres, to jednak wnioski należy wyciągać bardzo ostrożnie, zwłaszcza odnośnie dyscyplin małych, gdzie np. opublikowanie materiałów z jakiejś specjalistycznej konferencji może zakłócić normalny tok rozwojowy. Tak np. dyscyplina «Dyslokacje» wykazywała w latach 1961–1965 wyraźne tendencje zanikowe, a nagły wzrost prac omówionych w r. 1966 (ponad dwukrotnie więcej od r. 1965) spowodował przesunięcie jej aż do grupy dyscyplin o tendencjach silnie rozwojowych. Wnioski odnośnie dyscyplin większych można uznać za znacznie pewniejsze. I tak za najsilniej rozwijające się dyscypliny obszerniejsze, o liczbie prac przekraczającej 200 rocznie, można uważać w kolejności następującej: badania własności mechanicznych plastyków i polimerów (+15,8%); mechanika gruntów (+11,9%); metody doświadczalne (+11,0%); przestrzenne zagadnienia teorii sprężystości (+10,1%); konstrukcje budowlane (+9,7%); własności mechaniczne materiałów (+9,3%); drgania ciał sprężystych (+9,2%), oraz powłoki (+8,4%). Natomiast według średniego bezwzględnego przyrostu liczby prac rocznie najbardziej rozwijającymi się dyscyplinami są w kolejności: mechanika gruntów (+97,6); konstrukcje budowlane (+96,2); drgania ciał sprężystych (+57,4); powłoki (+40,8) oraz badania własności mechanicznych plastyków i polimerów (+36,7).

Jak już wspomnieliśmy poprzednio, RZ nie wyodrębnia dyscypliny «Stateczność, wyboczenie», która jest uwidoczniła w AMR. Dla uzyskania porównania przytoczono w tabelicy 3 dodatkowo dane odnośnie tej dyscypliny oparte o AMR. Uzyskany średni procentowy przyrost roczny (+8,9%) jest już bardzo wysoki, a jeżeli uwzględnimy poprawkę związaną z faktem, iż przyrost ogólny prac w AMR jest dwukrotnie niższy

Tablica 3. Zestawienie zbiorcze prac, sklasyfikowanych w poszczególnych dyscyplinach

Dyscyplina	rok						ogółem 6 lat	średnia <i>M</i>	średni przyrost bezwzgl. <i>m</i>	średni przyrost procent.
	1961	1962	1963	1964	1965	1966				
1. Problemy ogólne m.c.o.	79	81	63	52	69	60	404	67	-4,1	-6,0%
2. Przestrzenne zag. t. spręż.	183	188	216	268	289	280	1424	237	+24,0	+10,1%
3. Płaskie zag. t. spręż.	223	233	235	260	250	210	1411	235	+0,3	+0,1%
4. Spr. zginanie i skręc.	96	86	87	64	49	36	418	70	-12,4	-17,8%
5. Powłoki	323	456	562	473	479	613	2906	485	+40,8	+8,4%
6. Płyty	259	268	302	288	260	333	1710	285	+9,5	+3,3%
7. Fale sprężyste	220	246	228	238	155	194	1281	214	-11,2	-5,3%
8. Drgania ciał sprężyst.	439	551	665	680	622	795	3752	625	+57,4	+9,2%
9. Teoria plast. (og. i konst.)	409	381	360	456	443	483	2532	422	+18,6	+4,4%
10. Technolog. zag. t. plast.	149	123	292	223	185	187	1159	193	+8,8	+4,6%
11. Dynamiczne zag. t. plast.	114	130	149	135	109	134	771	128	+0,7	+0,5%
12. Dyslokacje	68	59	62	58	53	111	411	69	+5,5	+8,0%
13. Pełzanie i reologia	218	198	161	206	210	247	1240	207	+6,5	+3,1%
14. Wytężenie, pękanie	111	104	112	127	123	168	745	124	+10,2	+8,2%
15. Mechanika gruntów	493	817	755	877	870	1120	4932	822	+97,6	+11,9%
16. Pręty zakrzywione, łuki	76	90	76	82	85	69	478	80	-1,3	-1,6%
17. Ramy	176	165	165	180	161	137	984	164	-5,5	-3,3%
18. Belki, element. w. mat.	345	344	361	370	327	474	2221	370	+17,2	+4,7%
19. Pręty cienkościenne	54	52	53	66	80	137	442	74	+14,6	+20,0%
20. Kratownice	45	52	48	56	38	57	296	49	+0,7	+1,5%
21. Konstr. okrętowe i lotn.	107	147	127	150	119	135	785	131	+2,3	+1,7%
22. Konstrukcje budowlane	763	779	921	1107	1208	1141	5919	987	+96,2	+9,7%
23. Wytrzyma. elem. maszyn.	508	469	576	556	539	458	3106	518	-1,7	-0,3%
24. Wytrzyma. stat. i udarowa	299	257	318	304	431	347	1956	326	+21,4	+6,6%
25. Zmęczenie materiałów	224	219	237	205	285	275	1445	241	+12,0	+5,0%
26. Wytrzyma. w podw. temp.	165	161	215	164	181	162	1048	175	-0,2	-0,1%
27. Włas. mech. materiałów	264	254	380	343	449	380	2070	345	+32,2	+9,3%
28. Wł. mech. plast. i pol.	151	192	184	232	295	336	1390	232	+36,7	+15,8%
29. Metody doświadczalne	155	196	220	206	272	283	1332	222	+24,4	+11,0%
Ogółem	6716	7298	8130	8426	8636	9362	48568	8095	+501	+6,2%
Stateczność, wyboczenie (według AMR)	150	138	216	196	206	231	1137	190	+16,8	+8,9%

Tablica 4. Podział dyscyplin na wykazujące w skali światowej tendencje silnie rozwojowe, słabo rozwojowe i zanikowe

Lp.	Dyscyplina	średni roczny przyrost procentowy liczby prac	symbol udziału prac polskich
I. Dyscypliny o tendencjach silnie rozwojowych			
1.	Pręty cienkościenne	+20,0%	+++
2.	Własności mechan. plastyków i polimerów	+15,8%	+
3.	Mechanika gruntów	+11,9%	+++
4.	Metody doświadczalne	+11,0%	++
5.	Przestrzenne zagadn. teorii sprężystości	+10,1%	+++
6.	Konstrukcje budowlane	+9,7%	++
7.	Własności mechaniczne materiałów	+9,3%	+
8.	Drgania ciał sprężystych	+9,2%	+++
9.	Powłoki	+8,4%	++
10.	Wyteżenie, pękanie	+8,2%	+
11.	Dyslokacje	+8,0%	+
12.	Wytrzymałość statyczna i udarowa	+6,6%	+
II. Dyscypliny o tendencjach słabo rozwojowych			
13.	Zmęczenie materiałów	+5,0%	+++
14.	Belki	+4,7%	++
15.	Technologiczne zagadnienia teorii plastyczności	+4,6%	+
16.	Teoria plastyczności (zag. ogólne i konstr.)	+4,4%	+++
17.	Płyty	+3,3%	++
18.	Pełzanie i reologia	+3,1%	+++
19.	Konstrukcje okrętowe i lotnicze	+1,7%	+
20.	Kratownice	+1,5%	++
21.	Dynamiczne zagadnienia teorii plastyczności	+0,5%	+++
22.	Płaskie zagadnienia teorii sprężystości	+0,1%	+++
III. Dyscypliny o tendencjach zanikowych			
23.	Wytrzymałość w podwyższonych temperaturach	-0,1%	+
24.	Wytrzymałość elementów maszyn	-0,3%	++
25.	Pręty zakrzywione, łuki	-1,6%	+++
26.	Ramy	-3,3%	+++
27.	Fale sprężyste	-5,3%	+++
28.	Problemy ogólne mechaniki ciał odkształcalnych	-6,0%	+++
29.	Sprężyste zginanie i skręcanie	-17,8%	+

niż w RŻ, to dochodzimy do wniosku, iż zagadnienia stateczności równowagi wskazują na jedną z najsilniejszych tendencji rozwojowych.

Najwyraźniejsze tendencje zanikowe wykazują problemy sprężystego zginania i skręcania (de Saint-Vénanta) — dyscyplina ta bywa istotnie uważana za niemal całkowicie wyczerpaną i niektóre czasopisma (np. *Journal of Applied Mechanics*) ogłaszają, iż nie przyjmują już do druku prac z tego zakresu (jedynie krótkie notatki).

Niektóre dyscypliny wykazują rozwój wyraźnie nieliniowy, jak np. «Płaskie zagadnienia teorii sprężystości» (wyraźne maksimum w r. 1964 i obecnie spadek), lub wspomniane już «Dyslokacje» (minimum w r. 1965 i obecnie gwałtowny wzrost). Jednakże nie wydaje się, by przeprowadzanie np. parabolii drugiego stopnia metodą najmniejszych kwadratów było celowe wobec zbyt dużych rozrzutów przypadkowych. Wnioski wysnute w oparciu o aproksymacje liniami prostymi można uważać za pewniejsze.

3. Udział prac polskich

Dla uchwycenia możliwie aktualnego stanu nauki polskiej w zakresie mechaniki ciał odkształcalnych zestawimy prace polskie, omówione w *RŻ* w latach 1965 i 1966. Przyjęcie dwóch ostatnich lat z jednej strony zapewni aktualność, z drugiej — wyeliminuje pewne przypadkowości, które wystąpiłyby przy wzięciu pod uwagę tylko jednego rocznika.

Udział prac polskich w grupach dyscyplin obrazuje tablica 5. Ogólny ilościowy udział prac polskich w latach 1965–1966, wynoszący 3,89% przy tendencji zwykłej (w r. 1966 — 4,00%) należy uznać za bardzo pozytywny; liczba ta nie tylko przekracza znacznie udział ludności Polski w ludności całego świata (około 1%), który tu nie może być miarodajny, lecz również udział ludności Polski w ludności Europy i Ameryki Północnej razem wziętych (około 3%).

Tablica 5. Udział prac polskich w grupach dyscyplin

Grupa dyscyplin	rok	1965			1966			oba lata razem		
		ogółem	polskie	%	ogółem	polskie	%	ogółem	polskie	%
Teoria sprężystości i prace ogólne		2173	85	3,91%	2521	110	4,36%	4694	195	4,16%
Plastyczność, pełzanie, mechan. gruntów		1993	108	5,41%	2450	99	4,03%	4443	207	4,67%
Pręty i ustroje prętowe		691	33	4,78%	874	41	4,69%	1565	74	4,73%
Wytrzymałość konstrukcji		1866	52	2,79%	1734	75	4,32%	3600	127	3,53%
Własności mechaniczne materiałów		1913	46	2,41%	1783	50	2,80%	3696	96	2,60%
Ogółem		8636	324	3,75%	9362	375	4,00%	17998	699	3,89%

Gorzej przedstawiają się wnioski odnośnie struktury tego udziału, czyli dyscyplin i grup dyscyplin, w których udział ten głównie występuje. I tak największy udział prac polskich (4,73%) występuje w latach 1965–1966 w grupie dyscyplin «Pręty i ustroje prętowe», która ma najsłabszą tendencję rozwojową (+3,5%), natomiast najsłabszy udział prac polskich (2,60%) — w grupie dyscyplin «Własności mechaniczne materiałów», mającej najsilniejsze tendencje rozwojowe (+8,2%).

Tablica 5 unaocznia znany raczej fakt, iż udział prac polskich w danej grupie dyscyplin jest tym słabszy, im bardziej grupa ta jest zbliżona do zastosowań praktycznych. Jednakże należy tu podkreślić, iż już w r. 1966 sytuacja jest znacznie lepsza (udział prac bardziej równomierny) niż w r. 1965, bowiem w dwóch grupach dyscyplin bardziej zbliżonych do zastosowań («Wytrzymałość konstrukcji» i «Własności mechaniczne materiałów») notujemy wyraźny przyrost udziału procentowego prac polskich.

Udział prac polskich w latach 1965–1966 w poszczególnych dyscyplinach przedstawia tablica 6. Występuje tu oczywiście znacznie większy rozrzut: począwszy od 10,1% («problemy ogólne mechaniki ciał odkształcalnych») aż do 0% («Wytrzymałość w podwyższonych temperaturach» — w ciągu lat 1965 i 1966 *RŻ* nie sklasyfikował w tym dziale ani jednej pracy polskiej).

W zależności od procentowego udziału prac polskich w latach 1965–1966 podzielimy dyscypliny na trzy grupy: o znacznym udziale prac polskich (powyżej średniego udziału, wynoszącego 3,89%), o średnim udziale prac polskich (pomiędzy wspomnianym już udziałem ludności Polski 3% a 3,89%), wreszcie o słabym udziale prac polskich (poniżej 3%). Tak podzielone dyscypliny i uszeregowane według procentowego udziału prac polskich zestawiono w tablicy 7.

Tablice 4 i 7 uzupełniają się wzajemnie. W tablicy 4, dzielącej dyscypliny według tendencji rozwojowych, podano symbole udziału prac polskich, mianowicie symbol +++ dla znacznego, symbol ++ dla średniego, a symbol + dla słabego udziału prac polskich. W tablicy 7, dzielącej dyscypliny według udziału

Tablica 6. Udział prac polskich w poszczególnych dyscyplinach

Dyscyplina	rok			1965			1966			oba lata razem		
				ogółem	polskie	%	ogółem	polskie	%	ogółem	polskie	%
1. Problemy ogólne mech. c.o.	69	7	10,1%	60	6	10,0%	129	13	10,1%			
2. Przestrz. zag. t. spręż.	289	11	3,8%	280	18	6,4%	569	29	5,1%			
3. Płaskie zag. t. spręż.	250	13	5,2%	210	8	3,8%	460	21	4,6%			
4. Spr. zginanie i skręc.	49	0	0,0%	36	2	5,6%	85	2	2,4%			
5. Powłoki	479	10	2,1%	613	23	3,8%	1092	33	3,0%			
6. Płyty	260	11	4,2%	333	10	3,0%	593	21	3,5%			
7. Fale sprężyste	155	11	7,1%	194	10	5,2%	349	21	6,0%			
8. Drgania ciał sprężystych	622	22	3,5%	795	33	4,2%	1417	55	3,9%			
9. Teoria plast. (og. i konstr.)	443	42	9,5%	483	28	5,8%	926	70	7,6%			
10. Technolog. zag. t. plast.	185	5	2,7%	187	4	2,1%	372	9	2,4%			
11. Dynamiczne zag. t. plast.	109	8	7,3%	134	11	8,2%	243	19	7,8%			
12. Dyslokacje	53	0	0,0%	111	4	3,6%	164	4	2,4%			
13. Pełzanie i reologia	210	5	2,4%	247	15	6,1%	457	20	4,4%			
14. Wyężenie, pękanie	123	2	1,6%	168	3	1,8%	291	5	1,7%			
15. Mechanika gruntów	870	46	5,3%	1120	34	3,0%	1990	80	4,0%			
16. Pręty zakrzywione, łuki	85	3	3,5%	69	6	8,7%	154	9	5,8%			
17. Ramy	161	11	6,8%	137	8	5,8%	298	19	6,4%			
18. Belki, element. wytrz. mat.	327	15	4,6%	474	15	3,2%	801	30	3,7%			
19. Pręty cienkościenne	80	4	5,0%	137	9	6,6%	217	13	6,0%			
20. Kratownice	38	0	0,0%	57	3	5,3%	95	3	3,2%			
21. Konstr. okrętowe i lotnicze	119	2	1,7%	135	3	2,2%	254	5	2,0%			
22. Konstrukcje budowlane	1208	35	2,9%	1141	50	4,4%	2349	85	3,6%			
23. Wytrzyma. elem. maszyn.	539	15	2,8%	458	22	4,8%	997	37	3,7%			
24. Wytrzyma. stat. i udarowa	431	10	2,3%	347	8	2,3%	778	18	2,3%			
25. Zmęczenie materiałów	285	17	6,0%	275	14	5,1%	560	31	5,5%			
26. Wytrzyma. w podw. temp.	181	0	0,0%	162	0	0,0%	343	0	0,0%			
27. Włas. mech. materiałów	449	10	2,2%	380	9	2,4%	829	19	2,3%			
28. Wł. mech. plast. i polim.	295	2	0,7%	336	6	1,8%	631	8	1,3%			
29. Metody doświadczalne	272	7	2,6%	283	13	4,6%	555	20	3,6%			
Ogółem	8636	324	3,75%	9362	375	4,00%	17998	699	3,89%			

[481]

Tablica 7. Podział dyscyplin według udziału prac polskich

Lp.	Dyscyplina	procentowy udział prac polskich	symbol tendencji rozwojowych
I. Dyscypliny o znacznym udziale prac polskich			
1.	Problemy ogólne mechaniki ciał odkształcalnych	10,1%	—
2.	Dynamiczne zagadnienia teorii plastyczności	7,8%	0
3.	Teoria plastyczności (zag. ogólne i konstr.)	7,6%	0
4.	Ramy	6,4%	—
5.	Fale sprężyste	6,0%	—
6.	Pręty cienkościenne	6,0%	+
7.	Pręty zakrzywione, łuki	5,8%	—
8.	Zmęczenie materiałów	5,5%	0
9.	Przestrzenne zagadnienia teorii sprężystości	5,1%	+
10.	Płaskie zagadnienia teorii sprężystości	4,6%	0
11.	Pełzanie i reologia	4,4%	0
12.	Mechanika gruntów	4,0%	+
13.	Drgania ciał sprężystych	3,9%	+
II. Dyscypliny o średnim udziale prac polskich			
14.	Belki, elementarna wytrzymałość materiałów	3,7%	0
15.	Wytrzymałość elementów maszyn	3,7%	—
16.	Konstrukcje budowlane	3,6%	+
17.	Metody doświadczalne	3,6%	+
18.	Płyty	3,5%	0
19.	Kratownice	3,2%	0
20.	Powłoki	3,0%	+
III. Dyscypliny o słabym udziale prac polskich			
21.	Dyslokacje	2,4%	+
22.	Technologiczne zagadnienia teorii plastyczności	2,4%	0
23.	Sprężyste zginanie i skręcanie	2,4%	—
24.	Wytrzymałość statyczna i udarowa	2,3%	+
25.	Własności mechaniczne materiałów	2,3%	+
26.	Konstrukcje okrętowe i lotnicze	2,0%	0
27.	Wyężenie, pękanie	1,7%	+
28.	Własności mechaniczne plastików i polimerów	1,3%	+
29.	Wytrzymałość w podwyższonych temperaturach	0,0%	—

prac polskich, podano symbole tendencji rozwojowych, mianowicie symbol + dla tendencji silnie rozwojowych, symbol 0 dla tendencji słabo rozwojowych, symbol — dla tendencji zanikowych.

Łatwo można dokonać pewnego podsumowania wspomnianych tablic obliczając udział prac polskich w całej grupie dyscyplin o tendencjach silnie rozwojowych, dalej słabo rozwojowych i zanikowych. Okazuje się mianowicie, iż w 12 dyscyplinach, uznanych przez nas za dyscypliny o tendencjach silnie rozwojowych, omówiono w latach 1965–1966 łącznie 10 882 prace, w tym 369 polskich, co daje 3,39%; w 10 dyscyplinach o tendencjach słabo rozwojowych omówiono 4 761 prac, w tym 229 polskich, czyli 4,81%; wreszcie w 7 dyscyplinach o tendencjach zanikowych omówiono łącznie 2 355 prac, w tym 101 polskich, czyli 4,29%. Tak więc największy jest udział prac polskich w grupie środkowej, czyli dyscyplin o tendencjach słabo rozwojowych, jednak należy podkreślić, iż udział dyscyplin silnie rozwojowych jest większy od wspomnianej już wartości granicznej 3%.

Zwrócimy jeszcze uwagę na dane, dostarczane przez *Polską Bibliografię Analityczną Mechaniki, PBAM*. Jak wynika z tablicy 1, *PBAM* wykazuje ujemny średni roczny przyrost prac polskich (i publikowanych w Polsce) w latach 1965–1966, co mogłoby budzić pewne obawy. Jednakże *RŻ* wykazuje dodatni przyrost prac polskich, a np. w r. 1966 liczba prac polskich omówionych przez *RŻ* jest już wyraźnie wyższa od omówionych przez *PBAM*. Można stąd wnosić, iż *PBAM* stopniowo ogranicza zakres omawianych dyscyplin, natomiast liczba prac polskich niewątpliwie wzrasta, co jest związane np. z powstaniem w r. 1963 nowego pisma, organu PTMTS, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*.

4. Wnioski odnośnie pożądanego rozwoju poszczególnych dyscyplin w Polsce

Tablice 4 i 7 zezwalają na łatwe wysnucie wniosków odnośnie pożądanego rozwoju poszczególnych dyscyplin w Polsce. Wydaje się, iż najbardziej wskazane jest rozwijanie tych dyscyplin, które w skali światowej wykazują tendencje silnie rozwojowe, a w których udział prac polskich jest słaby. Należą tu właściwie wyłącznie dyscypliny doświadczalne, o bezpośrednich zastosowaniach inżynierskich, mianowicie: «Własności mechaniczne plastyków i polimerów», «Własności mechaniczne materiałów» (innych), «Wyteżenie, pękanie», oraz «Wytrzymałość statyczna i udarowa». Z dyscyplin teoretycznych można by tu wymienić jedynie «Dyslokacje», ale wniosek ten jest chyba już niesłuszny: należy pamiętać, iż mimo dążenia do możliwej aktualizacji obecnej pracy, *RŻ* w roczniku 1966 omawia z reguły prace publikowane w r. 1965, a więc pisane w r. 1964. Obecny udział prac polskich w zakresie dyslokacji jest już niewątpliwie znacznie większy.

Tak więc okazuje się, iż nie ma już dyscyplin teoretycznych o tendencjach silnie rozwojowych, w których udział prac polskich byłby słaby według naszej klasyfikacji. W tej sytuacji, gdybyśmy mieli wyciągać wnioski odnośnie pożądanego kierunku rozwoju dyscyplin teoretycznych w Polsce, należałoby zwrócić uwagę na te dyscypliny, które sklasyfikowaliśmy w dziale średniego udziału prac polskich, a które wykazują tendencje silnie rozwojowe; są to mianowicie «Konstrukcje budowlane», «Drgania ciał sprężystych» oraz «Powłoki». Jednakże główny nacisk należałoby kłaść na wymienione powyżej dyscypliny doświadczalne i stosowane, jakkolwiek niewątpliwie szerszy ich rozwój związany jest z poważnymi nakładami finansowymi. Ustanowienie przed kilku laty dorocznej nagrody PTMTS za najlepszą pracę doświadczalną jest niewątpliwie na miejscu, lecz dążenia w tym kierunku powinny być otoczone jeszcze bardziej troskliwą opieką.

Резюме

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ (СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

В статье дан статистический анализ почти 50 000 работ по механике деформируемого тела, которые реферировались в РЖ «Механика» 1961–1966 г. На основе прямых проведенных с использованием метода наименьших квадратов по данным соответствующим отдельным годам определялось среднее годовое абсолютное приращение работ и среднее процентное приращение по отдельным дисциплинам. Самое большое процентное приращение имело место в следующих областях: «тонкостенные стержни», «механические свойства пластмасс и полимеров», «механика грунтов». Обсуждается доля работ польских ученых за 1965–1966 г.; эта доля равна в среднем 3,89%.

Summary

CURRENT DEVELOPMENT TENDENCIES OF MECHANICS OF DEFORMABLE BODIES (STATISTICAL APPROACH)

The present paper analyses statistically nearly 50 000 papers devoted to mechanics of deformable bodies and reviewed by "Referativnyi Zhurnal" in the years 1961–1966. Plotting straight lines determined by least squares method through the data of particular years, the average absolute increase of papers per year and

the relative increase in percentage of individual disciplines have been established. The following disciplines show the most conspicuous increase: "thin-walled bars", "mechanical properties of plastics and polymers" and "soil mechanics". The contribution of the Polish papers in the years 1965 and 1966 amounts to some 3.89 percent.

**KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ**

REOLOGIA GRUNTÓW⁽¹⁾

IGOR KISIEL (WROCŁAW)

Dociekania reologiczne w gruntoznawstwie są o trzy lata starsze od oficjalnego wprowadzenia przez BINGHAMA słowa «reologia». TERZAGHI w 1925 r. w swej «Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage» podał zasady opisu matematycznego zjawiska, nazwanego przez niego «hydrodynamicznym wyrównywaniem się naprężeń», znanego dziś pod nazwą «konsolidacja». Można by zaryzykować powiedzenie, że 1925 r. był rokiem narodzin nie mechaniki gruntów, lecz reologii gruntów.

Pierwsze prace z tej dziedziny dotyczyły wyłącznie zjawiska konsolidacji masy gruntowej, tj. usuwania się wody z porów ośrodka rozdrobnionego o nieściśliwych ziarnach z równoczesnym zagęszczeniem układu ziaren w szkielecie gruntowym. Spośród prac tego okresu warto wspomnieć o «Dinamike gruntowej masy» GERSEWANOWA, (1937) i «Setzung der Tonschichten» TERZAGHIEGO i FRÖHLICHA (1936) w przyczynkowych pracach RENDULICA, TSCHEBOTARIOFFA, CASAGRANDE i innych.

W 1935 r. M. A. BIOT opublikował pierwszą swą pracę o konsolidacji, w której podał podstawy obliczania konsolidacji przestrzennej przy założeniu, że szkielet ośrodka nie jest sztywny, lecz sprężysty. W 1938 r. to samo, lecz przy założeniu innych stałych fizycznych, uczynił FLORIN.

Jednak jeszcze przed II wojną światową KEVERLING BUISMAN zwrócił uwagę na zjawisko t. zw. «wiekowego osiadania», odpowiadającego stanowi ustalonego pełzania. Stan ten wykracza poza możliwości ujęcia go za pomocą klasycznej teorii konsolidacji dla sprężystego szkieletu. Zjawiska wiekowego osiadania zostały zaobserwowane na wielu budowlach i domagały się wyjaśnienia; wyjaśnienia tego mogła udzielić tylko reologia, poprzez założenie, że szkielet gruntowy nie jest ani sztywny, ani sprężysty, lecz odznacza się zdolnością do pełzania. Okres II wojny światowej — poza szybką rozbudową klasycznej teorii Biota [prace BIOTA (1941–1942), CARILLO (1942) i in.] — nic przyniósł wielu wyników w zakresie reologii gruntów. Dopiero po wojnie zaczęła szybko wzrastać liczba prac poświęconych zagadnieniom wiekowego osiadania budowli. Ogłoszone w 1944 r. «10 wykładów z reologii» REINERA dostarczyły podniety i podstaw do badań reologicznych gruntów. Zaczął się odtąd bardzo burzliwy wzrost liczby prac poświęconych reologii gruntów. Utworzyły się szkoły narodowe: holenderska (z której pochodzi TAN TJONG-KIE), japońska, rosyjska, amerykańska, francuska, które wniosły znaczny wkład w rozwój tego typu badań. W Polsce poza grupą OLSZAKA i PERZYNY (IPPT PAN) pracują nad reologią gruntów i skał ośrodki krakowski i wrocławski oraz GIG w Katowicach. W maju 1966 r. odbyła się konferencja szkoleniowa w Jabłonnie (IPPT), na której ciekawe wyniki przedstawił STROGANOW, ZSRR; prace jego otwierają, wydaje się, pewną nową, ciekawą serię badań nad ciałami typu Binghamowskiego i nad kryterium ścinania gruntów w świetle teorii HÜBERA-SCHLEICHERA.

Pomimo rozwoju badań reologicznych klasyczna teoria konsolidacji BIOTA nie traci swego znaczenia, może ona bowiem i powinna znaleźć zastosowania przy badaniach chociażby nad procesami wydobywania ropy naftowej. Wspomnijmy jako ciekawostkę, że BIOR był przez szereg lat pracownikiem laboratoriów koncernu Shell Company; rozwój jego teorii powiązany jest z pracami tej kompanii naftowej. Wydaje się ponadto, że rozwiązania, uzyskane przy zastosowaniu tej teorii, dadzą się przenieść na ośrodki o szkielecie mającym własności reologiczne przez zastosowanie (być może zmodyfikowanej) analogii ALFREYA.

(1) Referat generalny wygłoszony w dniu 25.XI.1966 r. w Wrocławiu na III symposium poświęconym reologii.

W Polsce badaniami tymi zajmuje się z powodzeniem inspirowany przez DERSKIEGO zespół Poznański, którego cztery prace przedstawiono na dzisiejszym symposium. Trzy z nich omówione będą w niniejszym referacie; czwarta — Derskiego — omówiona będzie oddzielnie, dotyczy bowiem zagadnień natury ogólniejszej. Zespół poznański pracujący pod opieką Derskiego w ciągu zaledwie dwóch lat pochwalić się może zupełnie konkretnymi osiągnięciami, co chciałbym tutaj z przyjemnością odnotować.

Jak dotąd zastosowania reologii w mechanice gruntów ograniczają się do zagadnienia działania obciążenia na grunt. Stateczność skarp, nośność gruntu pod budowlami, parcie gruntu na mury — te wszystkie tematy, w których stan dewiatorowy naprężeń odgrywa dominującą rolę — traktowane są jeszcze i dzisiaj z pozycji ciała sztywno-plastycznego. Podstawy tego traktowania założone były przez COULOMBA a rozbudowane przez RANKINE'A w drugiej połowie ubiegłego stulecia. I chociaż badane są ciała «sypkie» (a jakby przez ironię dodaje się do nich definicję «ze spójnością»), to jednak metody rozwiązywania zagadnień stanów granicznych oparte są w przypadku gruntów o zasadę zeszczywnienia i korzysta się w nich tylko z równań równowagi elementu ciała z dodaniem warunku plastyczności, tj. warunku wiążącego naprężenia z pewnym stanem granicznym tychże. W ten sposób zadania stateczności są zadaniami statycznie wyznaczalnymi. Na tej pozycji stoją prace ogromnej grupy badaczy w kraju i za granicą, a ukoronowaniem tych prac jest chyba książka W. W. SOKOŁOWSKIEGO «Statyka ośrodka sypkiego» (pierwsze wydanie w 1942 r.). Kierunek ten jest dalej rozwijany w ZSRR i na zachodzie; wydaje się jednakże SOKOŁOWSKI zamknął stuletni Rankine'owski okres badania ośrodka sypkiego. Dalej w tym kierunku pójść już nie można; można co najwyżej doskonalic metody rozwiązań lub uzyskać jeszcze rozwiązania przypadków szczególnie skomplikowanych. Teraz należy przystosowywać tę teorię do wymagań inżyniera nie uzbrojonego w maszyny liczące. Duży krok w tym kierunku uczynił DEMBICKI (Gdańsk, w latach 1963–1966), którego jedną z prac tutaj przedstawiamy. M. in. DEMBICKI bardzo pomysłowo zastosował w jednej ze swych wcześniejszych prac metodę małego parametru do rozwiązania nieliniowych równań hiperbolicznych teorii Sokolowskiego, gdy kąta tarcia wewnętrznego w gruncie jest niewielki (dotyczy to wszystkich gruntów ilastych).

Jednym z pierwszych sygnałów konieczności «nowego» spojrzenia na omawiane zagadnienia, które nazwiemy tutaj w skrócie «zagadnieniami plastyczności w gruntach», była praca TER-STEPANIANA, [1957 (IV. ICOSOMEF)], rozpatrująca zaobserwowane w naturze «pelzanie wgłębne» w zboczach naturalnych. Ter-Stepanian usiłował wyjaśnić to zjawisko z punktu widzenia odkształceniowej teorii plastyczności; wydaje się jednak, że konieczne jest w tym przypadku czysto reologiczne spojrzenie na zjawisko. Niektóre prace Stroganowa wskazują, że zastosowanie modelu Bingham'a lub Szwedowa pozwoliłoby rozwiązać to zagadnienie w sposób właściwy. Jest jednakże oczywiste, że trop jest nowy i potrzebne są duże wysiłki, aby osiągnąć na tej drodze efekty, o których można już będzie mówić praktykowi.

Badania prowadzone przez DMITRUKA (1962–65) wskazały, że można mówić o względnej utracie stateczności skarp nasypów w kopalniach odkrywkowych wychodząc ze stwierdzonej przez SZAFRANA (1961–64) przemiany struktury warstewek przypowierzchniowych brył gruntu. Względna utrata stateczności, to zjawisko naturalne, polegające na tym, że usypany materiał poddany obciążeniu ułożonych powyżej warstw zmienia swe własności reologiczne, które miał w chwili sypania. Ośrodek Wrocławski prowadzi te badania; ich wyniki pozwoliły zaproponować spojrzenie na materiał gruntowy jako na ciecz reologiczną, a jego opór ścinania utożsamiać z lepkością owej cieczy. Byłoby to w pewnej zgodności z równoległe prowadzonymi we Wrocławiu badaniami teoretycznymi nad ośrodkiem M/V .

Dużą trudność w dalszych badaniach na te tematy stanowi brak rozwiązania sprężystego zadania o skarpie ciężkiej, na którego bazie można by snuć dalsze rozważania reologiczne. Jako ilustracja konieczności dysponowania rozwiązaniem zadania sprężystego przed przystąpieniem do zadania o nośności gruntu pod fundamentem może służyć praca na str. 23 tomu II referatów.

Obecny etap rozwoju reologii gruntów charakteryzuje się w skali światowej poszukiwaniami nowych, doskonalszych sposobów opisu zachowania się gruntów pod działaniem obciążenia, czasu, historii ośrodka i przy uwzględnieniu struktury jego szkieletu. Grunty jak żaden chyba inny materiał konstrukcyjny wykazują wyraźne cechy reologiczne; o ile w polimerach czasy relaksacji są z reguły dość krótkie, w betonach zaś i metalach bardzo długie, to w gruntach mogą one zawierać się w dowolnych granicach; wpływ historii powstawania pokładu gruntu, historii jego poprzednich obciążeń, to co zwiemy «pamięcią materiału» jest w gruntach ogromny; wpływ czynników zewnętrznych (wody opadowej i gruntowej, temperatury itp.) jest również tak istotny, że zadania reologii gruntów stają się wręcz olbrzymie.

Dlatego obecną fazę rozwoju reologii gruntów można przedstawić dwiema liniami: jedna — to poszukiwanie rozwiązań teoretycznych dla pewnych, zresztą dowolnych modeli reologicznych materiału; druga — doświadczenia nad samym materiałem, mające określić, jakie mianowicie modele reologiczne mogą być w odniesieniu do gruntów brane pod uwagę. Dwa ważne wydarzenia miały miejsce w ciągu ostatnich dwóch lat: Sympozjum REMESO w Grenoble, którego materiały opuściły właśnie drukarnię (Springer, 1966), i VI ICOSOMEF w Montrealu, na którym nie było żadnego oficjalnego reprezentanta polskiej geotechniki. Materiały obu tych zjazdów potwierdzają przytoczoną powyżej charakterystykę rozwoju reologii gruntów. Chwila, w której obie omawiane linie się spotkają, oznaczać będzie, że jedne i drugie badania doprowadziły do skonstruowania uniwersalnego modelu reologicznego gruntów i do sposobów określenia parametrów takiego modelu. Od tej chwili reologię gruntów traktować będzie można tak, jak np. mechanikę budowlą, w której wszystkie schematy rozwiązań mają zastosowanie w praktyce. Obecnie w reologii gruntów nie ma jeszcze o tym mowy. Wspomniane dwie linie kierunków badań — teorii i doświadczenia — są obecnie prawie równoległe. Tym intensywniej prowadzić należy eksperymenty nad określeniem reologicznych właściwości gruntów. Takie eksperymenty prowadzone są systematycznie w GIG-u w Katowicach (por. t. II, str. 77 i 87).

Na tle powyższego przeglądu obecnego stanu badań w dziedzinie reologii gruntów można już zorientować omawiane poniżej prace, przedstawione na dzisiejszym sympozjum w tomie II.

E. DEMBICKI (Gdańsk, str. 13) przedstawił rozwiązanie zadania o kształcie skarpy statecznej z materiału sztywno-plastycznego (inaczej — ośrodek sypki ze spójnością), znajdującego się w stanie granicznym, obciążonej parabolicznym obciążeniem na naziomiu i mającej ciężar własny. Rozwiązanie uzyskano metodą SOKOŁOWSKIEGO dla stanu plastycznego o trzech obszarach zmienności charakterystyk stosując rachunek różnic skończonych i uwzględniając panujące na skarpie warunki brzegowe. Interesujący jest sposób polegający na dwuetapowym obliczaniu kolejnego następnego punktu przecięcia się charakterystyk. Po znalezieniu metodą różnic skończonych pierwszego przybliżenia położenia punktu przecięcia się charakterystyk (wychodząc z dwu punktów już znanych) autor dzieli otrzymane odcinki na pół i powtarza obliczenie dla tych punktów pośrednich. Skorygowane położenie punktu M przecięcia się charakterystyk jest poprawniejsze. Autor powołuje się na wyniki liczbowe. Opisanego sposobu nie da się zastosować, jeśli spójność $c = 0$ lub jeśli strefa II (wg pracy) staje się nrojona, tj. kąt pomiędzy skrajnymi charakterystykami tej strefy staje się ujemny.

I. KISIEL i K. KUJAWIŃSKI (Wrocław, str. 23) przedstawili rozwiązanie płaskiego zadania o rozwoju obszarów uplastycznienia w miarę upływu czasu pod sztywnym stemplem w półpłaszczyźnie o modelu reologicznym M/V . Zasięgi stref plastycznych naniesiono w postaci warstw dla czasu 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 2,65 dnia (wówczas strefy spod obu narożników stempla spotykają się) 3, 5, 10 i ∞ dni. Poprzedzono je obliczeniem rozkładu naprężeń dla ośrodka sprężystego. Stwierdzono, że jeśli płynięcie odbywa się przy stałej objętości, wówczas można by pominąć wpływ konsolidacji w ośrodku nawodnionym. Ma to znaczenie dla uproszczenia rachunków inżynierskich; związane jest jednak z koniecznością wyznaczania odmiennych od stosowanych dotąd parametrów reologicznych gruntów, czego na razie nie umiemy czynić.

Z. SOBECZYŃSKA (Poznań, str. 33) zajmuje się zadaniem o sile skupionej na powierzchni półpłaszczyzny Biota przy założeniu, że powierzchnia półpłaszczyzny jest nieprzepuszczalna. Praca stanowi dalsze rozwinięcie badań autorki nad działaniem siły skupionej przy konsolidacji, wykonanych w oparciu o metodę Derskiego rozprężenia równań konsolidacji. Zastosowano transformację Laplace'a. Rozwiązanie ilustrują wyniki liczbowe. Interesujące jest, że w przypadku nieprzepuszczalnej powierzchni półpłaszczyzny w otoczeniu siły tworzy się jakgdyby fala na powierzchni, stopniowo rozchodząca się od miejsca obciążonego i zanikająca w miarę upływu czasu.

D. PAŃCZAK (Poznań, str. 43) ułożył równania teorii konsolidacji Biota w ujęciu Derskiego dla przypadku działania źródła dylatacji zarówno cieczy, jak i szkieletu gruntowego wewnątrz przestrzeni konsolidującej. Jest to zagadnienie dotąd nie rozwiązane; praca w tym względzie stanowi interesujące rozszerzenie dotychczasowych wyników. Nie podano wyników numerycznych, które można uzyskać w oparciu o transformację Laplace'a. Praca daje narzędzie do rozwiązania praktycznie ważnych zadań o wypływie wody z głębinnych studzien lub ropy z otworu wiertniczego, wykonywaniu wyrobisk w kopalniach itp.

Omówione prace miały charakter teoretyczny. Na pograniczu teorii i eksperymentu leży praca J. PRZYSTAŃSKIEGO (Poznań, str. 51) dotycząca metodyki określania Biotowskich współczynników stanu A, N, Q

i R oraz interpretacji ich przez tradycyjnie stosowane współczynniki w mechanice gruntów. Jak wiadomo, współczynniki Biota, określające fizyczne właściwości ośrodka, nie odpowiadają tradycyjnie stosowanym stałym materiałowym. Autor rozpatruje sposoby określania tych współczynników podane przez BIOTA, przez GEERSTMĘ i przez FATTA, którego schemat przyrządu oparto o sposób Geerstmy. FATT zbadał te stałe dla piaskowców (w referacie chyba mylnie podano «dla piasków»). Z kolei w pracy podano próbę interpretacji fizycznej współczynników Biota i ich powiązań z tradycyjnymi. Przy pewnych założeniach upraszczających, mogących być przedmiotem dyskusji, autor wykazuje, na czym polegają podobieństwa i różnice pomiędzy tradycyjnymi a Biotowskimi współczynnikami, jak też wzory wiążące te współczynniki.

S. DMITRUK i H. SUCHNICKA (Wrocław, str. 65) rozważają — m. in. na podstawie własnych doświadczeń zagadnienie lepkości strukturalnej gruntów, traktując ją jako charakterystykę oporu ścinania. Po zrekapitulowaniu «klasycznego» etapu badań nad ścinaniem autorzy przedstawiają nowe aspekty zagadnienia ścinania: wzrost oporu ścinania ze wzrostem prędkości odkształcenia i zniszczenie jako wtórny efekt czasu, zagadnienie «chwili zniszczenia» próbki w aparacie trójosiowego ściskania, zależność oporu ścinania od tzw. drogi ścięcia, czyli krytycznej wartości deformacji przy ścinaniu itp. Autorzy sugerują własną hipotezę krytycznej prędkości odkształcenia wychodząc z definicji gruntu jako cieczy o lepkości strukturalnej, nieliniowej. Praca podaje jedynie wyniki badań wstępnych; dalsze badania są obecnie w toku.

J. KWIATEK (GIG, Katowice, str. 77) bada ważne z punktu widzenia praktyki budownictwa na terenach górniczych zagadnienie sił rozciągających w fundamencie budowli, stojącej na zboczu niecki osiadania górniczego. Teorię oparł autor o model reologiczny ZENERA (a nie M/V jak podano w pracy, gdyż w modelu nie uwzględnia się zjawiska plastyczności gruntu). Na drodze doświadczalnej w aparaturze własnego pomysłu autor znalazł, że siła w fundamencie relaksuje dość szybko zarówno w gruntach piaszczystych, jak i w ilastych. Właśnie ta relaksacja może pozwolić na oszczędności przy zbrojeniu fundamentów na siły rozrywające.

KIDYBIŃSKI (GIG, Katowice, str. 87) przedstawił wyniki długotrwałych badań nad właściwościami reologicznymi skał formacji karbońskiej. Cel badań — zapobieganie gwałtownemu rozpadowi pokładu (można to utożsamić ze zniszczeniem pokładu) pod skoncentrowanym u jego krawędzi obciążeniem (zjawisko to nosi nazwę «tąpnięcia»). Przeprowadzona analiza przytoczonych w pracy wyników doświadczeń reologicznych wskazuje na istnienie efektów nieliniowych sprężystych i lepkich oraz granicy plastyczności, powyżej której prędkość pełzania wzrasta. Stwierdzono, że łupki (chyba to rozumie autor pod słowem «mulkowce») można opisać szeregiem modeli Kelvina i Saint-Venanta; są one więc ciałami stałymi, podczas gdy piaskowce i węgiel kamienny mają włączone szeregowo lepkości — są więc cieczami, piaskowce zaś ponadto muszą w modelu reologicznym mieć jeden element Murayamy-Shibaty, również włączony szeregowo do reszty modelu. Praca znakomicie rozszerza wiadomości o reologicznym zachowaniu się skał w oparciu o doświadczenia; na tym polega jej duża wartość, tym większa, że jak wspomniano, nie dysponujemy zbyt wielką liczbą badań eksperymentalnych tego typu.

REOLOGIA BETONU
STAN OBECNY I PERSPEKTYWY ROZWOJU(1)

ADAM MITZEL (WROCLAW)

1. Opracowanie referatu generalnego, który spełniałby postulaty podane w słowie wstępnym tomu I [1], jest możliwe, moim zdaniem, tylko w przypadku łącznego rozpatrywania dziedzin reprezentowanych na sympozjum. Łączne omówienie wyjściowych i podstawowych zasad jest konieczne w celu wyodrębnienia kierunków i perspektyw rozwoju jednej dziedziny. Drugi postulat, który powinien być spełniony w referacie generalnym, to omówienie poszczególnych prac jednej dziedziny na tle dotychczasowych osiągnięć i perspektyw rozwoju.

Otóż w przypadku reologii betonu sprawa się komplikuje, jeżeli uwzględnić fakt, że z 10 referatów zgrupowanych w tomie I pod wspólnym tytułem «Reologia betonu i konstrukcji» tylko 4 referaty dotyczą właściwej reologii betonu, dwa referaty mają charakter ogólny, a cztery z nich zaliczyć trzeba do reologii konstrukcji.

2. Liczba opublikowanych w ostatnich latach prac naukowych i naukowo-technicznych dotyczących zachowania się materiałów konstrukcji przy długotrwałym obciążeniu jest bardzo duża. Świadczy to o gwałtownym wzroście zainteresowania tą dziedziną wiedzy i o jej burzliwym rozwoju.

Zainteresowanie reologią ma swoje podłoże praktyczne. Tłumaczyć to można między innymi faktem, że odkształcenia reologiczne i «reofekty» zniszczenia konstrukcji coraz bardziej decydują o ich granicznej nośności.

Ponieważ do tradycyjnie przyjętych niezależnych zmiennych geometrycznych w teorii sprężystości i plastyczności dochodzi jeszcze zmienna czasu t , mamy w reologii do czynienia z pojęciem szybkości odkształceń, a więc z ruchem ośrodka. Ogólne prawa ruchu ustanawiają tak zwane «reologiczne równania stanu». Do tych równań wchodzi także własności fizyczne badanych materiałów, od których zależne są wyżej wspomniane szybkości odkształceń. Stąd wynika, że równania stanu mogą być otrzymane tylko na bazie eksperymentalnej. Reologiczne równania stanu komplikują się, jeżeli dochodzą jeszcze inne wielkości wpływające na ich budowę, jak np. fizyko-chemiczne procesy decydujące o zmianie struktury materiału i jego właściwości w czasie, jak w sztucznych tworzywach, betonie, drewnie lub w gruntach i innych. Innymi słowy, jeżeli uwzględnimy proces «starzenia się» materiałów.

Wreszcie w niektórych materiałach ważnym czynnikiem jest wysoka temperatura, która w dużym stopniu decyduje o postaci równań stanu. W związku z tym trzeba podkreślić, że na obecnym etapie rozwoju nie dysponujemy równaniami stanu, które w szerokim zakresie uwzględniałyby powyższe czynniki dla materiałów rzeczywistych.

Trudności natury matematycznej zmuszają do ograniczenia tych równań tylko do przypadków szczególnych i w ograniczonym zakresie, np. do stałych naprężeń, stałych szybkości odkształceń, stałej temperatury lub też do nieuwzględnienia procesu starzenia.

Przytoczone wyżej czynniki składają się na tak zwaną teorię reologiczną o charakterze fenomenologicznym, nie wnikającą w budowę molekularną rozważanych materiałów. Tymi zagadnieniami zajmuje

(1) Referat generalny wygłoszony w dniu 25.XI.1966 r. we Wrocławiu na III sympozjum poświęconym reologii

się fizyka i chemia. Do chwili wyjaśnienia zjawisk molekularnych struktury materiałów efektywna synteza obu kierunków badań fenomenologicznych i strukturalnych jest na obecnym etapie rozwoju niemożliwa. Mówiąc więc o tendencjach rozwojowych reologii zmuszeni jesteśmy zanalizować na razie tylko stronę fenomenologiczną.

W obecnym stadium rozwoju istnieją dwa zasadnicze kierunki cechujące sposób podejścia do zagadnień reologicznych. Jeden ogranicza się do czysto formalnej schematyzacji zjawisk za pomocą modeli złożonych z kilku prostych elementów; drugi cechuje dążność do ujęcia zjawisk reologicznych w postaci bardziej ogólnej za pomocą zwykłych lub uogólnionych funkcji pełzania.

Wspomniane modele składają się ze sprężyn reprezentujących cechy sprężyste materiałów oraz z tłumików odzwierciedlających cechy lepkie. Mogą być wprowadzone jeszcze suwaki, które obrazują tarcie suche odpowiadające odkształceniom plastycznym. Przez kombinację tych elementów w serii lub równoległe można otrzymać różne modele bardziej złożone, pozwalające z większą lub mniejszą dokładnością zobrazować główne cechy reologiczne materiałów.

Dokładnie biorąc, wyżej wspomniane elementy w modelach są niczym innym niż człony konstytutywne reologicznych równań stanu i właściwie nie zachodzi potrzeba ich wizualizacji przez konstruowanie odpowiednich modeli ze sprężyn i tłumików. Niemniej jednak ułatwiają one kontrolę napisanych równań i dają gwarancję, że nie występują w nich sprzeczności.

Wynikające z modeli równania różniczkowe opisujące związek między odkształceniami i naprężeniami charakteryzują materiały lepkosprężyste, rząd równania jest równy ilości tłumików w modelu. Związły zapis równań można otrzymać dzięki wprowadzeniu operatorów różniczkowych względem czasu t , działających na naprężenia i odkształcenia.

Zasadniczo równania lepkosprężystości mają taką samą postać jak równania teorii sprężystości, w których współczynniki charakteryzujące sprężystość materiału zostały zastąpione operatorami względem czasu.

W zagadnieniach quasi-statycznych liniowej teorii lepkosprężystości można operatory traktować jako stałe parametry i w ten sposób otrzymać zupełną analogię do problemu sprężystego.

Znany jest fakt, że związki liniowej teorii lepkosprężystości mogą być napisane w innej postaci zawierającej operatory całkowite i jeżeli zrezygnujemy z pierwotnego przedstawienia modelowego, możemy tym operatorem przypisać bardziej ogólne, szersze właściwości. Tą drogą dochodzimy w sposób naturalny do zasady superpozycji, tj. do jednej z podstawowych zasad liniowej teorii lepkosprężystości.

Do klasycznej, liniowej teorii lepkosprężystości dodano jeszcze zasadę niezmienności w czasie właściwości ośrodka i w ten sposób wyłączono zjawisko starzenia się materiału. Wyłączenie z równań stanu tego zjawiska czyni liniową teorię bardziej elegancką. Niestety w ten sposób nie może być ona zastosowana do wszystkich materiałów.

W ostatnim czasie jest tendencja traktowania równań stanu pełzania w zupełnie ogólnej postaci uważając rzeczywiste ośrodki jako szczególne przypadki. Przy tym stosuje się zapis tensorowy; uwzględnia się niekiedy także (w płytach i powłokach) anizotropię i nieliniowość geometryczną. Reguły algebry tensorowej skracają w dużym stopniu formy zapisu.

Przez wprowadzenie operatorów całkowych zapis równań staje się jeszcze bardziej związły. Stosowanie funkcji pełzania w postaci uogólnionej umożliwia wykorzystanie ich w zagadnieniach liniowych i nieliniowych z uwzględnieniem starzenia lub też bez niego.

Wspomniane wyżej nieliniowe operatory całkowite przybierają postać liniową w przypadku rozpatrywania zagadnienia w zakresie liniowym.

Jakkolwiek pożyteczne z punktu widzenia rozwoju ogólnej teorii pełzania tego rodzaju ogólne formułowanie równań reologicznych uważam za zbyt szerokie, tak czy inaczej, aby uzyskać rozwiązania w konkretnych przypadkach, trzeba skorzystać z wyników eksperymentalnych dotyczących danego materiału. Wtedy dopiero precyzuje się postać funkcji pełzania. Wskazuje ona na trudności, które napotykamy przy konkretnych obliczeniach.

3. Przechodzę do reologii betonu. Na bazie omawianych w poprzednim punkcie uwag ogólnych, dotyczących zachowania się w czasie różnych materiałów, można teraz reologię betonu i jej teorię lepiej scharakteryzować i sprecyzować. Można zatem stwierdzić, że liniowa i nieliniowa teoria lepkosprężystości może przy spełnieniu pewnych warunków znaleźć zastosowanie w konstrukcjach z betonu.

Z uwagi na specyficzne właściwości betonu, jak zmienność w czasie modułu odkształcalności, współczynnika Poissona, cech wytrzymałościowych oraz także ze względu na zjawisko skurczu, nie każda z istniejących teorii pelzania betonu, opartych na teorii lepkosprężystości, obrazuje w sposób właściwy jego zachowanie się w czasie.

Cech reologicznych betonu nie można zobrazować prostymi modelami reologicznymi, w związku z czym technika obliczeniowa oparta o równania stanu będące wyrazem tych modeli, nie może być zastosowana w reologii betonu. Problem ten został omówiony w referacie [3] (str. 133, tom I) należącym do grupy reologii betonu. Okazuje się bowiem, że kryterium przydatności danej teorii pelzania betonu jest zgodność stosowanej funkcji pelzania z wynikami empirycznymi nie tylko przy stałych naprężeniach, lecz także przy naprężeniach zmieniających swą wartość w czasie.

Przytoczone w wyżej wspomnianej pracy trzy zasadnicze kierunki rozwoju teorii pelzania betonu scharakteryzowane są na podstawie przebiegu krzywej pelzania w czasie od chwili odciążenia elementu betonowego, poddanego przedtem stałym naprężeniom.

W zależności od przebiegu krzywej «odciążenia» badany element może na końcu dłuższego okresu obserwacji wykazać duże, mniejsze lub żadne odkształcenia trwale. Zjawisko takie zwykło się określać jako pelzanie nieodwracalne, częściowo lub całkowicie odwracalne.

Otóż jedna z istniejących teorii pelzania betonu zakłada funkcje pelzania, której przebieg ilustruje rys. 1b (str. 137, tom I). Krzywa odciążenia zbliża się asymptotycznie do osi t dochodząc do wartości zerowej przy $t = \infty$. Funkcja pelzania wykazuje pełną odwracalność tzn., że beton nie ma odkształceń trwałych.

Równanie stanu tej teorii można także otrzymać na podstawie modelu reologicznego otrzymanego z połączenia szeregowego modelu Voigta i sprężyny. Opisana teoria oraz wchodząca w jej skład funkcja pelzania nie może być stosowana do betonu ze względu na niezgodność krzywej analitycznej z wynikami eksperymentalnymi w obszarze odciążenia.

Drugą teorią pelzania, której zasady oparte są na pracach Whitneya-Dischingera, ilustruje rys. 1a (str. 137, tom I). Istotą tej teorii jest równoległość krzywych pelzania dla różnych czasów obciążenia (wieków) betonu. Wynikiem zastosowania tej zasady jest poziomy przebieg krzywej pelzania po odciążeniu, funkcja obrazuje zatem pelzanie nieodwracalne bez odkształceń opóźnionych, co w żadnym przypadku nie jest zgodne z wynikami doświadczenia. Dokładna analiza wskazuje, że równanie stanu tej teorii otrzymać można także na podstawie zwykłego modelu Maxwella, a więc modelu złożonego z tłumika i sprężyny łączonej w szereg.

Teoria ta nie nadaje się do rozwiązywania zagadnień relaksacyjnych. W przypadku naprężeń wzrastających w czasie funkcja pelzania ma ponadto tę wadę, że prowadzi do zerowej wartości pelzania dla wieku betonu (w chwili obciążenia) znacznie oddalonego od wieku obranego jako początek odczytu czasu.

W związku z powyższymi uwagami dziwić może fakt, że teoria ta znalazła zastosowanie w konstrukcjach z betonu w wielu krajach i to w ostatnim ćwierćwieczu. W zastosowaniu do konstrukcji sprężonych przy obliczaniu strat spowodowanych pelzaniem i skurczem betonu wzory wprowadzone na podstawie teorii Dischingera figurują także w naszych normach. Mało tego, bez jakichkolwiek zmian została ona wprowadzona do projektu nowej normy, w której postulowano uwzględnienie w obliczeniach obok strat w konstrukcjach sprężonych także zachowanie się w czasie konstrukcji żelbetowych, jak obliczenie odkształceń reologicznych belek, płyt i powłok. Sprawa ta wymaga krytycznej analizy i opracowania nowych, bardziej realnych i bardziej zgodnych z doświadczeniami propozycji.

Trzecia, bardziej ogólna teoria pelzania betonu, opracowana przez ARUTUNIANA w jej pierwszej wersji, zakłada częściową odwracalność odkształcenia. Przebieg krzywych pelzania podano w pracy [3] na rys. 1c, z którego widać, że krzywa w obszarze odciążenia dąży przy $t \rightarrow \infty$ do określonej wartości końcowej różnej od zera. Jest to nieodwracalne odkształcenie trwałe. Przy odpowiednim dobraniu współczynników wchodzących w skład funkcji pelzania zgodnie z przebiegiem doświadczalnym funkcja ta pozwala uwzględnić częściową odwracalność odkształceń.

Wielką zaletą tej teorii jest uzupełnienie jednoparametrowej funkcji pelzania, zależnej tylko od różnicy $(t - \tau)$, mnożnikiem w postaci funkcji starzenia się betonu.

Można wykazać, że pierwsze dwie teorie pelzania betonu opisane poprzednio są szczególnymi przypadkami tej ostatniej. Jak wykazano w pracy [3] (str. 141) teoria Arutuniana w jej pierwszym ujęciu ma

także pewne wady. Podstawowym jej brakiem jest trudność rozwiązywania w niektórych przypadkach równań całkowych stanowiących jej podstawę. Trudności te polegają na tym, że w przypadku przyjęcia modułu odkształcalności E w postaci funkcji czasu t , równania całkowe sprowadzają się do równań różniczkowych o współczynnikach funkcyjnych. Druga wada, to odchylenie przebiegu analitycznej funkcji pelzania od krzywej doświadczalnej w młodym wieku betonu. Zgodność ta w starszym wieku jest dobra.

Istnieje szereg opracowań sugerujących inne postacie wyrażenia analitycznego dla funkcji pelzania betonu. Propozycje te, zachowując zaletę funkcji Arutuniana, wykazują lepszą zgodność z doświadczeniem w młodym wieku betonu. Sprawdzenie ich przydatności przy rozwiązywaniu podstawowych równań jest jeszcze przedmiotem badań. Poszukiwania lepszych rozwiązań idących w kierunku znalezienia odpowiednich postaci analitycznych dla funkcji pelzania oraz metod rozwiązywania podstawowych równań uważam za celowe.

Drugim ważnym elementem wchodzącym w skład równań reologicznych jest funkcja skurczu betonu. Zjawisko skurczu, nieznanne w innych materiałach rzeczywistych stosowanych w problemach technicznych, odgrywa w niektórych konkretnych przypadkach poważną rolę.

Otrzymanie zadowalającej aproksymacji krzywych eksperymentalnych za pomocą funkcji analitycznych jest zadaniem dosyć trudnym, jeżeli równocześnie funkcje te mają umożliwić rozwiązanie podstawowych równań.

Sprawa ta wymaga dalszych wnikliwych badań eksperymentalnych i teoretycznych. Na marginesie zagadnienia skurczu mogłoby się wydawać, że proces konsolidacji w gruntach, spowodowany ruchem wody w ośrodku porowatym, jest zjawiskiem analogicznym do skurczu w betonie spowodowanym, w zasadzie, wyparowaniem wody. Tymczasem różnica między obu zjawiskami ma charakter zasadniczy. Przechodzenie wody ze stanu większej koncentracji w betonie w stan gazowy o mniejszej koncentracji jest procesem spontanicznym, podczas gdy ruch wody w gruntach, spowodowany działaniem obciążenia zewnętrznego, nie jest procesem o charakterze spontanicznym. W konsekwencji funkcje analityczne opisujące te właściwości różnią się.

Drugi referat tej grupy [4] (str. 147, t. I) pod tytułem «Nieliniowe pelzanie betonu» jest próbą aproksymacji wyników eksperymentalnych za pomocą funkcji pelzania w zakresie nieliniowym, tj. w zakresie wyższych naprężeń. Zastosowana funkcja wykazuje zadowalającą zgodność z krzywymi eksperymentalnymi w młodym wieku betonu przy różnych naprężeniach.

Ważniejszym wynikiem tej pracy jest wyjaśnienie granicy między liniowym a nieliniowym zakresem pelzania betonu. Z rys. 7 na str. 152 widać, że granica między liniowością, a nieliniowością pelzania może być tylko pojęciem umownym, zależnym od rodzaju betonu, jego wytrzymałości doraźnej.

Trzeci referat [5] (str. 157) jest przyczynkiem do zagadnienia superpozycji odkształceń skurczu i pelzania. Wyniki doświadczeń przedstawionych w tym referacie potwierdzają w dużym stopniu inne badania własne i badania różnych autorów. Poruszony problem ma charakter podstawowy dla liniowej teorii lepkosprężystości w zastosowaniu do betonu, albowiem stawia pod znakiem zapytania hipotezę równości bezwzględnych wartości odkształceń reologicznych niezależnie od ich znaków (rozciąganie lub ściskanie). Sprawa wymaga dalszych poszukiwań przy zastosowaniu innych, bardziej efektywnych metod badawczych.

Następne cztery prace zaliczyć można do «reologii konstrukcji» stosując nomenklaturę używaną w pierwszym tomie.

W referacie [6] (str. 165) pod tytułem «Badania modelowe dwóch przeseł mostowych o ustrojach zespolonych betonowo-stalowych» podano wyniki badań przeprowadzonych na dużych modelach (skala 1 : 4) odwzorowując fragmenty przeseła mostowego. Starannie opracowane wyniki badań pozwoliły autorom wyciągnąć wnioski o charakterze praktycznym, ważne dla tego rodzaju nietypowych rozwiązań mostowych.

Praca [7] (str. 189), pod tytułem «Niekóre problemy oceny strat siły sprężania w konstrukcjach kablo-betonowych» składa się z dwóch zasadniczych części: pierwszej — obejmującej punkty 1, 2 i 3 dotyczące wzorów na obliczenie strat reologicznych, zaczerpniętych z teorii pelzania Dischingera, oraz uzasadnienia znajomości przebiegu funkcji skurczu i pelzania w czasie. W punkcie trzecim omówiono potrzebę dalszych badań. Niekóre z uzasadnień zawartych w punktach od a do f są dyskusyjne. W drugiej części referatu (rozdz. 4) podano rezultaty własnych badań nad pelzaniem i skurczem betonu na obiektach mostowych oraz wyniki badań relaksacji lin $\varnothing 45$ i $\varnothing 55$ mm.

Otrzymane rezultaty są ciekawe, lecz nie mogą być wykorzystane do uzupełnienia lub wyjaśnienia zagadnień dotyczących teorii pełzania betonu. Jest to niestety cechą niemal wszystkich badań przeprowadzanych na gotowych obiektach. Uzyskane tą drogą wyniki badania mogą być tylko sprawdzianem obliczeń reologicznych przeprowadzonych na podstawie jednej z teorii pełzania. Badania relaksacji lin natomiast mają charakter bardziej ogólny.

Przydatność teorii pełzania Whitneya-Dischlingera do betonu, których wzory przytoczono w referacie, została zanalizowana przeze mnie poprzednio.

W referacie [8] (str. 193) autorzy opisują niektóre wyniki badań długotrwałych mostów sprężonych. Podane na str. 199 wnioski mają podobny charakter jak wnioski poprzedniego referatu. W tym przypadku jeszcze trudniej o jakieś wnioski natury ogólnej, albowiem badania były przeprowadzone w czasie budowy, tak że wyniki pomiarów obarczone są skutkami wielu czynności montażowych. Niewątpliwie otrzymane rezultaty będą przydatne przy ich konfrontacji z obecnie stosowanymi metodami obliczeń odkształceń reologicznych.

Przedstawiona na str. 201 praca [9] pod tytułem «Reologia kratownicy kablabetonowej w świetle badań» jest przykładem porównania wyników badań przeprowadzonych na obiektach w eksploatacji z odkształceniami obliczonymi w projektach wykonawczych.

Nie zgodziłbym się ze zdaniem autora, że w przeciwieństwie do doświadczeń laboratoryjnych badania przeprowadzane na obiektach eliminują problem przenoszenia wyników do warunków rzeczywistych. Sprawa jest tylko pozornie prosta, wymaga jednak dłuższej dyskusji. Niestety nie mogę sobie na to w ramach tego referatu pozwolić.

Autor referatu [10] (str. 209) zajmuje się zagadnieniem stateczności osiowo ściskanych prętów, wykonanych z materiału lepkosprężystego. Analizie poddano trzy modele materiału lepkosprężystego: model Voigta, Maxwella oraz szeregowo połączony model Voigta i sprężyny.

Jak z poprzednich rozważań wynika, żaden z tych modeli nie nadaje się do betonu, praca powinna się znaleźć w grupie zagadnień ogólnych. Zagadnienie to zostało także zanalizowane przez RZANICYNĄ częściowo w 1949 r., częściowo w jego późniejszych pracach dla szeregowo połączonych modeli Voigta i sprężyny.

We wnioskach autor proponuje definicję pojęcia utraty stateczności prętów wykonanych z materiału lepkosprężystego.

W referacie [11] (str. 219) autorzy zajmują się problemem zginanej tarczy kołowej w zakresie nieliniowych odkształceń doraźnych i reologicznych. Moment zginający działa w płaszczyźnie tarczy. W oparciu o inne prace jednego z autorów, w których rozwinięto nieliniową teorię lepkosprężystości, równanie stanu sformułowano za pomocą nieliniowego operatora całkowego przy zastosowaniu zapisu tensorowego (str. 220).

Aby prześledzić wywody podane w referacie trzeba się zapoznać z pracami zacytowanymi w spisie literatury oraz z pracą [12] zamieszczoną w tomie II materiałów sympozjum pt. «Podstawowe własności nieliniowych ciał lepkosprężystych» (str. 99, tom II).

Celem pracy jest określenie wpływu nieliniowości na stany naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia przy założeniu, że deformacja doraźna i deformacja spowodowana pełzaniem mają charakter nieliniowy. W pracy przyjęto $F_e(s)$ stanu doraźnego (natychmiastowego) w postaci potęgowej (str. 223), uogólniona funkcja pełzania natomiast wynika ze związku

$$\partial_\tau \bar{H}[t, \tau, s(\tau)] = F_c[s(\tau)] \partial_\tau C(t-\tau)$$

podanego w pracy [12], zamieszczonej na str. 100 w tomie II [2]. W szczególnym przypadku funkcja $C(t-\tau)$ może być liniowa, a wtedy pochodna względem uogólnionej funkcji pełzania równa się funkcji $-F_c$. $C(t-\tau)$ jest funkcją pełzania w zakresie liniowym. Otóż taką funkcję pełzania $F_c(s)$ zastosowano w pracy [11], pełzanie przebiega zgodnie z prawem (2.7) podanym na str. 221.

W pracy nie podano, jakiego materiału to prawo dotyczy. W każdym razie chodzi o materiał, który w liniowym zakresie pełzania ma przebieg liniowy. Wtedy pochodna funkcji pełzania jest wartością stałą. Takiej funkcji pełzania w zakresie liniowym nie wykazuje beton. Interesujące byłoby rozwiązanie konkretnego przykładu, gdzie funkcja $C(t-\tau)$ nie jest liniową i zgodną z wynikami doświadczenia, np. dla betonu.

Referat [13], którego streszczenia podano na str. 231 tomu I, dotyczy opracowanej przez autora metody obliczenia ugięć belek żelbetonowych przy długotrwałym obciążeniu. Zasady metody zostały opublikowane już wcześniej, w marcu r.b. w «Inżynierii i Budownictwie». Jest to metoda półempiryczna oparta o zalecenia CEB, dotyczące odkształceń w elementach betonowych z uwzględnieniem skurczu i pelzania.

Do przeprowadzenia obliczeń potrzebne jest 8 wykresów zawierających współczynniki, wchodzące w skład podanych wzorów. Dla swobodnie podpartych belek metoda jest prosta i daje dobre wyniki. Trudno jednak ustosunkować się do strony merytorycznej bez znajomości podstaw konstruowania wymienionych wykresów. W związku z tym nasuwa się szereg pytań, tym bardziej, że podejście oparte jest o zasady teorii Dischingera. Tęgo rodzaju metody «techniczne» nie mogą się przyczynić do rozwoju teorii pelzania betonu i zadowolić naturalnej tendencji, idącej w kierunku zrozumienia procesu zachowania się materiałów w czasie. Dlatego też ostatnie dwie prace tutaj przedstawione stoją na wręcz przeciwnych pozycjach.

Literatura cytowana w tekście

1. III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław, listopad 1966, PTMTS, Wrocław.
2. III Symp. poświęcone reologii, ref. tom II, Wrocław, listopad 1966, PTMTS, Wrocław.
3. A. MITZEL, *Funkcje pelzania i skurczu betonu*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
4. A. MITZEL, M. KŁAPOĆ, *Nieliniowe pelzanie betonu*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
5. A. MITZEL, M. KŁAPOĆ, *O superpozycji odkształceń skurczu i pelzania*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
6. J. SZCZYGIEL, M. DZIURLA, Z. KOZAKOW, *Badania modelowe dwóch przęseł mostowych o ustrojach zespolonych betonowo-stalowych sprężonych*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
7. J. KMITA, *Niektóre problemy oceny strat siły sprężania w konstrukcjach kablobetonowych*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
8. S. BYCZKOWSKI, M. RYBAK, *Niektóre wyniki badań długotrwałych mostów sprężonych*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
9. M. SIERADZKI, *Reologia kratownicy kablobetonowej w świetle badań*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
10. Z. KOWAL, *Wyboczenie pelzające osiowo ściskanych prętów lepkosprężystych*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
11. Z. BYCHAWSKI, H. SIENICKI, *Zginanie tarczy kołowej w zakresie nieliniowej deformacji natychmiastowej i pelzania*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom I, Wrocław 1966.
12. A. BOROWSKI, Z. BYCHAWSKI, *Podstawowe własności nieliniowych ciał lepkosprężystych*, III Symp. poświęcone reologii, ref. tom II, Wrocław 1966.
13. W. KUCZYŃSKI, *Wpływ sekwencji obciążeń na ugięcia reologiczne belek żelbetonowych*, III Symp. poświęcone reologii, ref., tom I, Wrocław 1966.

REOLOGIA METALI I POLIMERÓW (1)

JERZY ZAWADZKI (WROCLAW)

Prace naukowo-badawcze w dziedzinie reologii podobnie jak w innych teoriach fizycznych zajmujących się zjawiskami zachodzącymi w makroskopowych ciałach fizycznych, rozwijają się w dwu zasadniczych kierunkach: fenomenologicznym i statystycznym. Aczkolwiek prawa rządzące mikrocząsteczkami są niejednokrotnie zupełnie odmienne od praw makroswiata, to jednak makroskopowe prawa i własności ciał fizycznych powstają przez uśrednienie odpowiednich własności i praw rządzących w mikroświecie. Niestety zaciera się przy tym wiele indywidualnych cech mikrocząsteczek i tylko tzw. statystyczne własności zbioru określają makroskopowe własności ciała fizycznego. Należy więc znaleźć jakąś rozsądną granicę obszarów uśredniania, aby zachować ciągłość makroskopowych własności i zjawisk, a z drugiej strony, aby z mikroskopowego punktu widzenia obszar uśredniania był sensownie duży. Praktycznie obszar 10^{-6} – 10^{-5} cm³ odpowiada tym wymaganiom, gdyż obejmuje on tak dużą liczbę mikrocząsteczek (atomów lub drobin), że można praktycznie dla takiej zbiorowości generalnej pominąć odchylenia standardowe uśrednionej wielkości makroskopowej dla tego obszaru.

Uwzględnianie tych odchyleń jest domeną teorii statystycznych. Określają one warunki, przy których można pominąć tzw. fluktuacje statystyczne, czyli przypadkowe odchylenia od wartości średnich. Im wprowadzone w teorii statystycznej założenia strukturalne lepiej odpowiadają obiektywnej rzeczywistości, tym ściślej otrzymujemy zgodność pomiędzy teorią a doświadczeniem (zależy to oczywiście również od stopnia dokładności stosowanych metod doświadczalnych). Te cechy teorii strukturalnych pozwalają, dzięki zacieraniu się w makroobszarach indywidualnych cech mikrocząsteczki, na wyjaśnienie i przewidywanie szeregu podstawowych własności fizycznych ciał makroskopowych już przy stosunkowo prostych założeniach strukturalnych. Dlaczego wspominam o tym na początku mego referatu? Na tle bowiem fundamentalnych prac CLAUDIUSA, MAXWELLA, BOLTMANNA, DEBYE'EGO, EINSTEINA, PLANCKA, GRÜNEISENA, GIBBSA i innych rozpoczęła swój nieustanny rozwój (w szczególności od chwili coraz to szerszego zastosowania gumy i kauczuku) reologia metali i polimerów jako ośrodków sprężysto-lepkoplastycznych. Klasyczne już obecnie prace W. i H. KUHNÓW, H. EYRINGA, E. GUTHA, M. MOONEYA, a też T. ALFREYA, P. FLORY'EGO, R. HOUWINKA, H. MARKA, M. REINERA, L. TRELOARA i innych stanowią przykłady splecenia się tych obu zasadniczych nurtów rozwoju teorii: fenomenologicznego i statystycznego.

Niemniej jednak daje się zauważyć charakterystyczne rozdzielanie się tych nurtów w ostatnich kilkunastu latach. I tak np. można by skonfrontować prace A. M. FREUDENTHALA, C. TRUESDELLA, B. D. COLEMANA, W. NOLLA i A. ERINGENA z publikacjami B. ZIMMA, R. CERFA, A. PETERLINA, F. BUECHEGO, J. FERRY'EGO i innych. Pierwsze z nich opierają się na makroskopowej koncepcji podstawowych zasad fizyki ośrodka ciągłego dla opracowania termodynamicznej teorii materiałów z pamięcią, drugie zaś skłaniają się wyraźnie ku teorii typu statystycznego z uwzględnieniem charakterystycznych indywidualnych cech konfiguracyjnego zespołu (łańcucha) identycznych elementów składowych, względnie nawet segmentów łańcucha.

Również i u nas w kraju prowadzone są prace naukowo-badawcze tymi dwoma równoległymi i równie ważnymi nurtami. Nie będę tu wymieniał poszczególnych autorów, gdyż zbędne byłoby wymienianie

(1) Referat generalny wygłoszony w dniu 25.XI.1966 r. we Wrocławiu na III symposium poświęconym reologii.

powszechnie znanych, a natomiast nie chciałbym przy wymienianiu innych pominąć czyjśgo aktywnego udziału w tych pracach.

Pragnę natomiast podkreślić, że teorie należące do pierwszego nurtu (o charakterze raczej fenomenologicznym) wymagają w swych zastosowaniach doświadczalnego wyznaczenia licznych funkcji materiałowych przy szeregu zmiennych w czasie parametrów stanu. Jeżeli chodzi o drugi nurt, to jak już wspominałem, tym ściślejszą otrzymujemy zgodność pomiędzy teorią a doświadczeniem, im wprowadzone założenia strukturalne lepiej odpowiadają obiektywnej rzeczywistości, co również wymaga równoległego prowadzenia licznych prac doświadczalnych. Pragnę tu też podkreślić, iż wnioski, jakie wysnuliśmy z kilkuletnich naszych prac nad reologią i wyężeniem tworzyw sztucznych przy różnych zmiennych wg. określonego programu parametrach stanu wskazują na konieczność prowadzenia dalszych intensywnych prac doświadczalnych ze względu na konieczność uzasadnienia i wyjaśnienia szeregu pozornych «anomalii» towarzyszących tym procesom. Utrudniają one bowiem jeszcze bardziej wyznaczenie wspomnianych wyżej funkcji materiałowych niezbędnych przy praktycznym zastosowaniu teorii nurtu pierwszego.

Potwierdzeniem tych wniosków są np. tezy pierwszej z prac, jakie mam w moim referacie generalnym omówić.

Celem pracy R. TAKSERMAN-KROZER pt. «Teoria reologicznego zachowania się rozciągniętych rozтворów polimerów w warunkach złożonych deformacji» jest przedstawienie wyników rozważań reologicznych przeprowadzonych na modelu strukturalnym stanowiącym roztwór giętkich łańcuchowych makrocząsteczek w nieściśliwym rozpuszczalniku. Do opisu makrocząsteczki zastosowano model podłańcuchów z uwzględnieniem oddziaływań hydrodynamicznych wg KIRKWOODA i WISEMANA oraz lepkości wewnętrznej wg CERFA. Przedstawiona teoria dotyczy pełnego ogólnego tensora gradientu prędkości o składowych stałych w czasie. Ciecze wielocząsteczkowe są przeważnie cieczami lepkoelastycznymi i dla tego też dla takich układów szczególnie duże znaczenie mają badania strukturalne, pozwalające bezpośrednio wyrazić reologiczne równanie stanu przez czynniki strukturalne przy ominięciu funkcji materiałowych. Analiza teoretyczna przeprowadzona przez autorkę potwierdza opublikowane poprzednio przez nią wraz z A. ZIABICKIM poglądy na efekty nieliniowe w reologii, według których nieliniowość zanika, gdy odnieść równanie do aktualnego stanu strukturalnego.

Przechodząc z kolei do zreferowania wyników prac naukowo-badawczych przedstawionych przez nasz zespół, tj. pracowników Zakładów Reologii i Wyężenia oraz Teorii Sprężystości i Plastyczności Instytutu Materiałoznawstwa w formie 6 referatów, uważam za celowe powiązać je w trzy zbliżone tematycznie grupy, a to:

1. J. ZAWADZKI, B. GABRYSZEWSKA, E. GROZIK «Widma (spektra) czasów retardacji wybranych tworzyw sztucznych przy czystym zginaniu i skręcaniu», J. ZAWADZKI, I. HYLE «Anomalie wykresów relaksacji naprężeń a zmiany strukturalne w poliamidzie»;

2. M. NOWAK, J. ZAWADZKI, J. KAŁWAK «Analiza porównawcza pełzania statycznego i dynamicznego niektórych tworzyw sztucznych», M. NOWAK «Wpływ okresowo zmiennych naprężeń na obraz dyfrakcyjny polistyrenu i poliamidu»;

3. J. ZAWADZKI, B. OKOŁÓW «Pełzanie taśm przenośników z przekładkami steelonowymi», J. ZAWADZKI, J. ORŁOWSKI, W. SIUTA «Quasi-statyczna metoda oceny reoefektów stabilizacji taśm przenośników z przekładkami steelonowymi».

Dwie pierwsze grupy stanowią kolejny etap kompleksowych prac naszego zespołu nad problemami reologii i wyężenia tworzyw przy zmiennych parametrach stanu ze szczególnym uwzględnieniem towarzyszących zjawisk termokinetycznych. Punktem wyjściowym dla tych prac była przedstawiona przeze mnie w latach 1951-1954 hipoteza wyężenia (hipoteza właściwej energii swobodnej) początkowo w zastosowaniu dla ciał polikrystalicznych, a z kolei w dalszych latach dla tworzyw sztucznych — polimerów o strukturze sferycznej i liniowej. Jak już podkreśliłem, szczególną uwagę poświęciliśmy w naszych rozważaniach teoretycznych i pracach doświadczalnych analizie zjawisk reotermokinetycznych towarzyszących wyężeniu i rozwojowi dekohezji tworzyw sztucznych. Wyniki swych prac referowaliśmy na szeregu konferencji w kraju i zagranicą. W szczególności przeprowadziliśmy badania nad zmianami energii wewnętrznej i entropii (w szczególności konfiguracyjnej łańcuchów polimerów), «samowzbudnymi» zmianami temperatury zgodnie z zasadą przekory BROWNA-LE CHATELIERA i nad ich udziałem w mierze wyężenia.

Przeprowadzona przez nas szczegółowa i systematyczna analiza oraz próba syntezy wyników badań zakończonych w 1965 r. kolejnego cyklu wspomnianych kompleksowych prac naukowo-badawczych naszego zespołu wykazała m.in.:

a) Celowość rozpoczęcia w kolejnym etapie prac nad oceną «stopnia nieliniowości» procesów odkształcania się i wycięcia polimerów przy różnych początkowych parametrach stanu.

b) Istotne znaczenie dalszych szczegółowych badań i prób uzasadnienia fizykalnego stwierdzonych przez nas w poprzednich badaniach pozornych «anomali» w zachowaniu się tworzyw i ich własnościach mechanicznych przy określonych parametrach stanu. Szczególnej wagi nabierają tu badania nad oceną «sprężenia wpływów» poszczególnych parametrów na zmiany strukturalne, co niestety ogranicza lub uniemożliwia zastosowanie liniowych równań fenomenologicznych (zasady Onsagera) dla jednorodnie liniowo niezależnych bodźców i jednorodnie liniowo niezależnych przepływów. Utrudnia też lub w obecnym stadium rozwoju teorii uniemożliwia wyznaczenie wspomnianych we wstępie i przy omawianiu pierwszego referatu tzw. funkcji materiałowych np. dla teorii termodynamicznej materiałów z pamięcią. W pełni więc zgadzamy się z autorką pierwszego referatu z jej poglądami na efekty nieliniowe w reologii i uzależnieniem warunków ich zanikania od wprowadzenia w równanie stanu aktualnego stanu strukturalnego.

c) Celowość badań nad oceną «progu czułości» materiału i jego struktury dyskretnej na niezależne bodźce, zjawiskiem «zanikania pamięci» i jego intensywnością — tym bardziej, że do chwili obecnej nie ma jednoznacznego sposobu przeniesienia zasady zanikania pamięci materiału na język matematyczny.

Przedstawione referaty stanowią, jak zresztą wskazują na to ich tytuły — wycinek kolejnego etapu prac, których celem jest właśnie gromadzenie odpowiedniego materiału wraz z analizą teoretyczną i próbą syntezy dla sformułowania odpowiednio poprawnych i możliwie zgodnych z rzeczywistością związków fizycznych ze szczególnym wyekspozowaniem wymienionych w punktach a–c kierunków badań.

Dwie pierwsze prace dotyczą badań quasi-statycznych nad pełzaniem wzgl. relaksacją naprężeń, dwie zaś następne badań nad znużeniem przy symetrycznie zmiennym obciążeniu poliamidu i polistyrenu.

Analiza otrzymanych wyników badań uzasadnia m.in. możliwość zastosowania dla badanych tworzyw modeli liniowych w określonych przedziałach obciążeń i temperatur oraz czasach trwania tych obciążeń. Wykazano też m.in., że pozorne «anomalie» wiążą się ze zmianami strukturalnymi, zachodzącymi przy pewnych charakterystycznych «stosunkach sprężenia» wartości obciążenia i temperatury w określonych przedziałach czasu, a polegającymi na zmianie stopnia krystaliczności poliamidu. Porównując wykresy pełzania dynamicznego i quasi-statycznego stwierdzono dominujące znaczenie zaburzenia stanu równowagi cieplnej w wyniku «samowzbudnej» zmiany temperatury (nawet bardzo niewielkiej) jako równorzędnej sprężonej przyczyny, obniżającej żywotność i przyspieszającej zniszczenie zmęczeniowe materiału. Przeprowadzone badania wykazały również możliwość i celowość zastosowania metody rentgenograficznej dla analizy zmian strukturalnych w znużonych tworzywach sztucznych.

Ostatnie dwa referaty naszego zespołu obejmują jeden z etapów kompleksowego programu prac naukowo-badawczych nad quasistatycznymi i dynamicznymi własnościami mechanicznymi taśm przenośników gumowych z przykładkami steelonowymi produkcji krajowej. Wyniki zakończonych etapów prac zostały już wykorzystane z powodzeniem w praktyce konstrukcyjnej i eksploatacyjnej. Celem referowanych badań była ocena charakterystycznych cech reologicznych taśmy, w szczególności opracowanie teoretyczno-doświadczalne zjawiska pełzania i możliwości teoretycznego modelowania tego procesu oraz opracowanie możliwie prostej i przydatnej w praktyce quasi-statycznej metody oceny reoefektów stabilizacji taśm używanych. Opracowana metoda i wyniki badań wskazują m.in. na celowość przeprowadzania odpowiednio zaplanowanej wstępnej stabilizacji taśm z zastosowaniem właściwych parametrów obciążania przed oddaniem ich do eksploatacji.

Przykładem zainteresowania się również innych ośrodków badaniami nad podstawowymi własnościami mechanicznymi i cechami reologicznymi tworzyw sztucznych przy różnych warunkach obciążania i różnych parametrach stanu jest referat S. MAZURKIEWICZA pt. «Wyniki badań doświadczalnych pewnych własności mechanicznych poliamidu Tarlon XA». W pracy przedstawił autor wyniki badań nad pełzaniem przy rozciąganiu oraz ocenę zmian logarytmicznego dekrementu tłumienia z częstością i temperaturą przy drganiach giętych. Wyjaśnienie wyników badań opiera autor na wnioskach z fenomenologicznej teorii materiałów lepkosprężystych podkreślając, że stopień krystaliczności i budowa łańcucha poliamidu wpływają na położenie maksimum i kształt krzywej dekrementu tłumienia.

Jak wskazuje podtytuł kolejnego referatu, przedstawionego przez W. STARZEWSKIEGO pt. «Wpływ reologicznych własności poliamidowych wykładzin kół kolei liniowych na zużycie wykładzin oraz właściwości eksploatacyjne», ma on charakter «informacji technicznej i omówienia nieopublikowanych badań i doświadczeń zagranicznych». Jednym z tematów programu badań Zespołu Ustrojów Ciężnowych IPPT PAN o dużym znaczeniu praktycznym jest zagadnienie współpracy pary: lina nośna-koło jezdne. We wprowadzeniu poliamidowych wykładzin kół jezdnych można wg autora dopatrywać się przełomu technicznego w tej dziedzinie. Jedną z wytwórni zagranicznych (ZELL-METALL, Austria) udostępniła autorowi, z prawem ujawnienia, wyniki swych badań, które stanowią znaczną część materiałów wykorzystanych w referacie. Autor stwierdza, że «obecny stan badań i doświadczeń ruchowych umożliwia racjonalne projektowanie i konstruowanie bieżników, natomiast nie pozwala jeszcze na wyzyskanie wszystkich korzyści z ich zastosowania w odniesieniu do projektowanych tras, doboru naciągu lin i stosowania lin z materiału o wysokiej wytrzymałości, w związku z czym konieczne są badania wpływu wykładzin na liny. Posiadane materiały uzasadniają stosowanie wykładzin na szeroko skalę w kolejach o średnim i dużym natężeniu ruchu».

Przechodząc z kolei do referatów z zakresu reologii metali przedstawię badania A. JAKOŹLUKA nad «Wpływem małych głębokości zawibrowania na proces pełzania w metalach». Analizę zjawiska przedstawia autor na przykładzie badań kształtek ze stopu aluminiowego Al-Mg-Si (PA 4) w jednoosiowym stanie naprężenia, zmiennego w czasie wg zależności $\sigma(t) = \sigma_m(1 + A \sin \omega t)$, gdzie $A = \sigma_a / \sigma_m$ — współczynnik głębokości zawibrowania. W przypadku dużych wartości A (przy odpowiednio dużych naprężeniach σ_m) mielibyśmy do czynienia ze złożonym zjawiskiem pełzania w procesie zmęczenia. Natomiast w przypadku płytkich zawibrowań — nie wywołujących charakterystycznych efektów klasycznego zmęczenia — obserwujemy bardzo ważny dla praktyki konstrukcyjnej i eksploatacyjnej (lotnictwo, energetyka, budowa mostów itp.) proces wibropelzania. Jest to jeszcze mało opracowana dziedzina badań naukowych.

W wyniku analizy przeprowadzonych badań wysnuł autor następujące wnioski:

1. Na proces pełzania próbki badanego stopu wpływa zarówno naprężenia średnie σ_m , jak też naprężenie σ_{max} .

2. Nalożenie bardzo małej vibracji na naprężenie statyczne wywołuje w próbce znaczne zwiększenie prędkości pełzania. Działanie wpływu vibracji o bardzo małej amplitudzie można, przez analogię, porównać do działania temperatury, w której zachodzi proces dyfuzji. W pierwszym i drugim przypadku następuje aktywacja atomów, które łatwiej pokonują bariery energetyczne, w wyniku czego obserwuje się zwiększoną prędkość pełzania. Ponadto vibracje powodują rozluźnienie skupisk dyslokacji, co sprzyja pełzaniu.

Referat S. PIŁECKIEGO pt. «Kumulacja uszkodzeń w procesie zmęczenia metali» stanowi jedną z licznych prób wyjaśnienia zjawiska kumulacji uszkodzeń i istoty mechanizmu przebiegu tego zjawiska. Niezliczone prace naukowo-badawcze, wieloletnie gromadzenie doświadczeń stanowi wciąż jeszcze niewystarczający i niepełny materiał do wyjaśnienia istoty procesu zmęczenia, w szczególności oceny intensywności narastania «stopnia zmęczenia» i wyczerpywania się zapasu trwałości konstrukcji. Autor cytuje m.in. klasyczne już prace PALMGRENA, LANGERA i MINERA, w szczególności tzw. regułę Minera i jej uogólnienia opracowane przez Minera i wielu innych badaczy, jak DOLANA, RICHARDA. WORKA, SERENSENA i in. Pragnę w tym miejscu podkreślić, że również w naszym Instytucie prowadzone są prace nad oceną «stopnia zmęczenia» i modyfikacją reguły Minera pod kierunkiem T. PORĘBSKIEGO i L. GOŁĄSKIEGO.

Rozpatrując możliwość migracji wakansów w sieci krystalicznej metali stwierdza się pewną analogię możliwych przemieszczeń wakansów z ruchami błędnymi. W związku z tym wykorzystał autor pewne twierdzenia matematycznej teorii ruchów błędnych. Upoważniło to do założeń, że długotrwały proces połączeń wakansów może zachodzić tylko na granicach ziaren lub w pasmach poślizgów, natomiast wakanse tworzące się w wyniku przecięć dyslokacji we wnętrzach ziaren wypływają na granice ziaren lub utrzymują się w obrębie pasma poślizgu.

Autor przeprowadza analizę poprawności założeń upraszczających i zgodności otrzymanego wzoru na prawdopodobieństwo powstania kolonii k -wakansowej oraz warunku pojawienia się wydłużonego mikropęknięcia z obserwowanymi faktami doświadczalnymi. Omawia on również wpływ niektórych wybranych czynników losowych na proces kumulacji uszkodzeń itp.

Kończąc omówienie referatów z dziedziny reologii metali i polimerów zgłoszonych na sympozjum, wydaje mi się, że w miarę możliwości udało mi się zachować oryginalne cechy ujęcia poszczególnych referatów oraz wyeksponować najistotniejsze ich fragmenty i zasadnicze tezy i wnioski.

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI
TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA ROK 1966

I. ROZWIJANIE DZIAŁALNOŚCI NAUKOWEJ W DZIEDZINIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych w Oddziale ilustruje poniżej zamieszczona tabela:

Oddział	Liczba zebrań w 1966 r.					Liczba referatów	Liczba uczestników	Liczba dyskusyjantów
	K w a r t a ł				razem			
	I	II	III	IV				
Gdańsk	3	—	—	1	4	4	45	16
Gliwice	3	3	—	3	9	17	183	92
Kraków	2	1	—	4	7	15	145	67
Łódź	4	1	—	2	7	7	285	39
Poznań	2	1	—	3	6	6	96	21
Szczecin	2	3	—	4	9	9	142	30
Warszawa	4	2	—	2	8	9	121	42
Wrocław	2	3	—	2	7	7	121	49
Razem:	22	14	—	21	57	74	1138	356

2. Organizowanie sympozjów i konferencji naukowych

Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach od 7 do 12 lutego 1966 r. konwersatorium pod hasłem: «Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice». W konwersatorium wzięło udział 49 osób, liczba głosów w dyskusji wyniosła 97. Wygłoszono ogółem 19 referatów i komunikatów.

Oddział w Gdańsku zorganizował dwa Sympozja — I Sympozjum Techniki Wibracyjnej w dniach 21–22 października 1966 r. wspólnie z Oddziałem PTMTS w Krakowie, Zakładem Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT, Katedrą Mechaniki Technicznej AGH oraz Zakładem Naukowym Mechanicznej Teorii Maszyn Politechniki Gdańskiej.

Drugie Sympozjum Oddziału w Gdańsku zorganizowano w dniu 19 listopada 1966 r. na temat «Konstrukcji Wiszących». W Sympozjum wzięły udział 54 osoby, w dyskusji — 15.

Oddział we Wrocławiu zorganizował w dniach 25 i 26 listopada 1966 r. III sympozjum poświęcone reologii. Zgłoszone referaty dotyczyły reologii metali i polimerów, reologii betonu i konstrukcji, reologii gruntów oraz zagadnień ogólnych. Wygłoszono ogółem 38 referatów z czego 3 z ośrodka gdańskiego, 1 z katowickiego, 9 z krakowskiego, 1 z łódzkiego, 4 z poznańskiego, 6 z warszawskiego oraz 14 z wrocławskiego. W sympozjum wzięły udział 104 osoby, a 42 zabrały głos w dyskusji.

3. Konkursy naukowe

Zarząd Główny przeprowadził doroczny konkurs naukowy na prace doświadczalne z dziedziny mechaniki. Zgłoszono 8 prac. Sąd Konkursowy w składzie: przewodniczący — prof. dr Z. BRZOSKA oraz członkowie — doc. dr Z. MARCINIAK, prof. dr W. PROSNAK, prof. dr B. STANISZEWSKI i doc. dr W. SZCZEPIŃSKI — przyznał następujące nagrody: Pierwszą w wysokości 8000 zł — mgr inż. BOHDANOWI JANCLEWICZOWI;

drugą w wysokości 4000 zł — dr inż. JANUSZOWI KLEPACZCE; trzecią w wysokości 2000 zł — mgr inż. WITOLDOWI BŁAŻEWICZOWI oraz wyróżnienie dr inż. ANATOLIUSZOWI JAKOVLUKOWI.

Oddział w Gliwicach zorganizował konkurs naukowy dzięki subwencji uzyskanej od przewodniczącego Prezydium Miejskiej Rady Narodowej. Wpłynęło 11 prac, z których dwie odrzucono. Zgodnie z uchwałą Sądu Konkursowego otrzymali nagrody: pierwszą — 5000 zł — mgr inż. TADEUSZ BES, trzy drugie po 3000 zł każda — mgr inż. ANTONI GUZIK, mgr inż. STANISŁAW KOPEĆ i dr inż. ZDZISŁAW SULIMOWSKI, trzecią — 2000 zł. — mgr inż. EDWARD KOSTOWSKI oraz także 2000 zł zespół w składzie: mgr inż. STANISŁAW LOSKA, dr OSWALD MATEJA i mgr inż. EUGENIUSZ ŚWITOŃSKI. Wyróżnienie otrzymał mgr JERZY TOMECZEK

Oddziałem w Warszawie wspólnie z Oddziałem we Wrocławiu ogłoszono konkurs na najlepszą pracę naukową w zakresie konstrukcji maszynowych i budowlanych. Ponieważ Oddział Wrocławski nie zgłosił żadnych prac ani członków do Sądu Konkursowego, praktycznie konkurs przeprowadził sam Oddział Warszawski. Wpłynęło 5 prac. Sąd Konkursowy w składzie: przewodniczący — prof. dr J. LIPKA oraz członkowie — dr K. BORSUK, doc. dr Z. MRÓZ, doc. dr R. SOLECKI i prof. dr E. SZCZEPANIAK postanowił nie przyznać pierwszej nagrody. Drugą nagrodę w wysokości 4000 zł przyznano dr JANOWI ANDRZEJOWI KÖNIGOWI, dwie trzecie nagrody po 3000 zł każda mgr inż. JÓZEFOWI BEJDZIE i doc. dr WOJCIECHOWI SZCZEPIŃSKIEMU oraz wyróżnienie 2000 zł dr ZBIGNIEWOWI MAZURKIEWICZOWI.

4. *Udział w konferencjach i kongresach naukowych krajowych i zagranicznych*

Członkowie PTMTS brali czynny udział w konferencjach i kongresach naukowych wygłaszając na nich referaty z prac własnych. Sprawozdania z kongresów i konferencji, w których uczestniczyli członkowie Towarzystwa, są publikowane w naszym czasopiśmie.

5. *Organizowanie wymiany naukowej z zagranicą*

W ramach wymiany naukowej z zagranicą poszczególne Oddziały organizowały zebrania naukowe, sympozja, konferencje lub spotkania, na których referaty wygłaszali prelegenci zagraniczni.

Oddział w Warszawie zorganizował seminarium i dwa zebrania naukowe z udziałem prelegenta z Łódzkiej Akademii Nauk w osobie prof. dr JA. G. PANOWKO.

Na zebraniu naukowym zorganizowanym wspólnie z IPPT miał referat prof. J. P. DEN HARTOG z USA oraz SEICHIRO MAEZAWA z Japonii. Ponadto Oddział Warszawski organizował seminaria z udziałem innych prelegentów zagranicznych, jak np. doc. dr ALESO TONDLA z CSRS i doc. GEORGI BOJDIJEWA.

Oddział w Łodzi zorganizował zebranie naukowe z referatem prof. dr PIERRE BROUSSE'A (Francja).

II. ROZPOWSZECHNIANIE WYDAWNICTW I POPULARYZACJA WIEDZY

1. *Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej Towarzystwa*

Organ PTMTS «Mechanika Teoretyczna i Stosowana». W roku 1966 ukazały się trzy numery wydawnictwa o łącznej objętości 28 arkuszy wydawniczych (tom 4, zeszyt 1/66 — 11,5 ark., tom 4, zeszyt 2/66 — 8,25 ark. i tom 4, zeszyt 3/66 — 8,25 ark.). Zaplanowany na rok 1966 i całkowicie przygotowany do druku zeszyt 4 nie mógł się ukazać z powodu wyczerpania środków finansowych przyznanych na wydawnictwo i niemożliwości uzyskania dodatkowej dotacji; w miarę możliwości potrzeby *MTiS* uzupełnione zostały kwotami z zaoszczędzonych rezerw Towarzystwa przeznaczonych na inne cele, co poważnie uszczupliło budżet PTMTS na rok 1966 i 1967. Materiały przygotowane do numeru 4/66 przerzucone zostały do tomu 5-go jako zeszyt 1/67.

Tematyka zeszytów wydawanych w roku 1966 zawierała, zgodnie z założeniami programowymi, artykuły przeglądowe z różnych gałęzi mechaniki, prace oryginalne, prace doświadczalne, biuletyn PTMTS, sprawozdania z sympozjów naukowych PTMTS, konferencji itp.

Pomimo że zgodnie z uchwałą Sekretariatu Naukowego PAN i zezwoleniem Głównego Urzędu Kontroli Prasy, Publikacji i Widowisk wydawnictwo przekształcone zostało na czasopismo, praktycznie biorąc w roku 1966 ukazywało się jeszcze nadal jako wydawnictwo ciągle. Wejście do odpowiedniego planu PWN, pertraktacje z «Ruchem» i formalności związane z zawarciem odpowiednich umów trwały bowiem cały rok 1966.

Od roku 1967 «Mechanika Teoretyczna i Stosowana» ukazuje się już jako kwartalnik. Rozprzedaż i prenumeratą normalną zajmuje się wyłącznie «Ruch», natomiast prenumeratę ulgową dla członków Towarzystwa muszą prowadzić Oddziały PTMTS dysponujące wykazami osób należących do Towarzystwa.

Oddział w Gliwicach wydał materiały konferencyjne na konwersatorium n.t. «Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice».

Oddział w Gdańsku wydał w bardzo starannej formie (rysunki i wykresy) materiały na sympozjum n.t. «Konstrukcje Wiszące» przygotowane wspólnie z Oddziałem Krakowskim.

Oddział we Wrocławiu wydał w bardzo ładnej formie dwa tomy materiałów konferencyjnych na III Sympozjum poświęcone reologii.

2. Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów

a) K u r s y

Oddział w Poznaniu w I kwartale 1966 r. przeprowadził co tygodniowy kurs z teorii drgań. Odbyły się 4 dwugodzinne wykłady z udziałem 100 osób i 20 dyskutantów. W II kwartale 1966 r. kurs był kontynuowany i odbyło się w jego ramach 8 dwugodzinnych wykładów, na których przeciętna frekwencja wynosiła 25 osób.

W IV kwartale 1966 r. Oddział Poznański zorganizował dwa kursy roczne dla pracowników naukowych pt. «Teoria dystrybucji» oraz «Analiza funkcjonalna.» Wykładowcą na kursie był doc. dr J. MUSTELAK. Odbyło się 13 wykładów z przeciętną liczbą obecnych 20 osób.

b) S e m i n a r i a

Oddział w Krakowie wspólnie z Oddziałem w Gdańsku zorganizowały seminarium z Techniki Wibracyjnej. Przeprowadzono je w dniu 25 marca 1966 r. przy udziale 32 osób.

Oddział w Poznaniu zorganizował w dniu 17 grudnia 1966 r. seminarium z teorii drgań nieliniowych. Referaty wygłosili: mgr Z. MAGIERA-ULLRICH, dr G. BOJADZIEW i dr B. RADZISZEWSKI.

Oddział w Warszawie w porozumieniu z innymi ośrodkami (P o z n a ń i K r a k ó w) zorganizował cykl seminariów z Teorii Drgań Nieliniowych. Odbyły się one: 17 października 1966 w Warszawie, 26 listopada w Krakowie oraz w grudniu w Poznaniu. Seminaaria te będą kontynuowane w 1967 r.

c) Dążenie do zwiększenia liczby członków PTMTS ilustruje następująca tabela:

Oddział	IV kw. 1965 r.	I kw.	II kw.	III kw.	IV kw.	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozd.	
		Rok 1966				Liczba	%
		okres sprawozdawczy					
Gdańsk	42	42	42	42	42	—	—
Gliwice	57	58	58	58	58	+1	+1,7
Kraków	56	57	57	57	57	+1	+1,8
Łódź	26	26	25	25	25	-1	-3,8
Poznań	46	47	47	47	47	+1	+2,8
Szczecin	25	25	25	25	25	—	—
Warszawa	132	136	138	140	144	+12	+9,0
Wrocław	55	54	54	54	55	—	—
Razem:	439	445	446	448	453	+14	+3,1

d) Szerszy kontakt z przemysłem i jego problematyką

Kontakt ten polegał na zapraszaniu na zebrania naukowe, sympozja i inne imprezy organizowane przez PTMTS inżynierów z przemysłu. Zainteresowanie tematyką imprez Towarzystwa, a zwłaszcza sympozjów, jest bardzo żywe wśród przedstawicieli przemysłu.

III. RÓŻNE

Zebrania organizacyjne

Liczba zebrań organizacyjnych w okresie sprawozdawczym przedstawia się następująco:

Zjazd Delegatów	1	Zebrań Zarządów Oddziałów:	
Zebrań Zarządu Głównego	2	Gdańsk	7
Zebrań Prezydium Zarządu Głównego	5	Gliwice	6
Zebrań Głównej Komisji Rewizyjnej	1	Kraków	9
Walnych Zgromadzeń Oddziałów	8	Łódź	6
	17	Poznań	3
		Szczecin	8
		Warszawa	6
		Wrocław	13
			58
Innych zebrań organizacyjnych	16		
Razem zebrań organizacyjnych	91		

IV. ANALITYCZNE PODSUMOWANIE DZIAŁALNOŚCI TOWARZYSTWA

Analizując przytoczone wyżej dane należy stwierdzić, że działalność PTMITS powoli lecz systematycznie się rozwija. Że proces ten nie ma charakteru żywiołowego, tym bardziej świadczy to o stabilizacji Towarzystwa.

W ciągu roku 1966 liczba członków wzrosła o 14 osób, co stanowi 3,1%.

Liczba zebrań organizacyjnych wzrosła z 88 do 91.

Liczba zebrań naukowych w porównaniu z rokiem 1965 wzrosła tylko o jedno, z 56 do 57, ale liczba referatów wygłoszonych na tych zebraniach wzrosła z 69 do 74 (czyli o 5), liczba uczestników z 966 do 1.138 (o 172) oraz dyskutantów z 333 do 356 (o 23). Te dwie ostatnie pozycje świadczą o wzroście zainteresowania członków tematyką zebrań naukowych.

Liczba sympozjów zmalała z 5 do 4, ale spowodowane to było brakiem odpowiednich środków finansowych, a nie ograniczonymi możliwościami organizacyjnymi PTMITS.

Liczba konkursów utrzymała się na tym samym poziomie, tzn. trzech.

Liczba kursów wzrosła z 2 do 3, a seminariów z jednego do pięciu,

Akcja wydawnicza utrzymała się w zasadzie na tym samym poziomie, a jej właściwy rozwój zahamowany był również brakiem środków finansowych, co spowodowało niewydanie przygotowanego do druku 4 numeru *«Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej»*.

Tematyka organizowanych imprez i zebrań naukowych dotyczyła zagadnień: stereomechaniki, hydromechaniki, aeromechaniki, termodynamiki.

Podział prac według ich przeznaczenia technicznego przedstawia się następująco:

1. Prace o charakterze ogólnym niezwiązane wyraźnie z żadnym działem przemysłu.
2. Prace związane z budownictwem lądowym i wodnym.
3. Prace związane z konstrukcjami maszyn, samochodów, okrętów.
4. Prace dotyczące górnictwa i hutnictwa.
5. Prace dotyczące techniki nuklearnej.

W liczbie wygłoszonych referatów nadal ogromną przewagę miały tematy z mechaniki stosowanej, a stosunkowo nieliczne dotyczyły mechaniki teoretycznej.

ZJAZD GAMM W ZURYCHU

W dniach 19–23 marca 1967 r. w Zurychu odbył się kolejny zjazd GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik). Zjazdy te odbywają się corocznie i skupiają matematyków zajmujących się szeroko rozumianą matematyką stosowaną oraz mechaników z krajów niemieckiej strefy językowej. Przed

wojną GAMM był potężną instytucją naukową o wielkim autorytecie międzynarodowym, bazującym na powadze, jaką miała w świecie niemiecka szkoła mechaniki. Po wojnie rola mechaniki niemieckiej znacznie spadła, co nie pozostało bez wpływu na zjazdy GAMM. Nie bez znaczenia okazał się fakt, że język niemiecki przestał być, oficjalnie i nieoficjalnie, językiem międzynarodowym.

Zjazd w Zurychu był interesujący przede wszystkim z tego względu, że ujawniał wysiłki odbudowania autorytetu GAMM i zarazem autorytetu wielu, znakomych niegdyś, placówek mechaniki i matematyki stosowanej. Trudno orzec, w jakiej mierze wysiłki te są rezultatem świadomej polityki kierownictwa GAMM, w jakiej zaś odbijają naturalne procesy rozwojowe. Wydały mi się interesujące ujawniające się na Zjeździe mechanizmy tego procesu odbudowy.

Odmienne niż dzieje się to w wielu krajach nie posiadających dawnych tradycji w jakiejś dyscyplinie wiedzy, w Niemczech i Austrii (w Szwajcarii sytuacja jest inna) zachodzi proces odbudowywania starych szkół, podejmowania dawnej, niegdyś bardzo rozwiniętej tematyki. W odróżnieniu od obserwowanego gdzie indziej (także w Polsce) importowania problematyki naukowej, tu główne linie problemowe wydają się być bardziej konserwatywne. Tak np. liczba prac dotyczących gazów idealnych i doskonałych bądź też klasycznej hydrodynamiki okazała się nader znaczna

Rzuciła się w oczy duża liczba młodych ludzi biorących udział w Zjeździe co, być może, związane jest z faktem, że Zjazd nie posiadał statusu Zjazdu międzynarodowego (niemniej jednak na zjeździe obecni byli przedstawiciele 8 krajów; niestety zabrakło uczonych z NRD). Wymagania stawiane przedstawionym pracom nie były nazbyt wysokie. Duża część prac nie miała charakteru zakończonych całości, a obrady poszczególnych sekcji przypominały raczej obrady seminarium niż prac sekcji Zjazdu, różniły się natomiast od seminarium przede wszystkim krótkim (i ściśle przestrzeganim) czasem przedstawiania prac (15 min.) i brakiem ostrzejszej krytyki merytorycznej. W rezultacie można się było dość dobrze zorientować w tematyce poszczególnych szkół, a także w wartości i liczebności kadr, jakimi one rozporządzają. W mechanice cieczy i gazów zasadniczymi ośrodkami są obecnie niewątpliwie Karlsruhe, Getynga, Akwizgran, Wiedeń — ponad 60% referatów pochodziło z tych właśnie ośrodków. Stosunkowo mało było prac doświadczalnych, a jeszcze mniej widać było powiązań prac doświadczalnych i teoretycznych (z wyjątkiem prac prowadzonych w grupie prof. ZIEREPA w Karlsruhe).

Zupełnie odmiennie przedstawiały się wykłady przeglądowe przedstawione na plenarnych posiedzeniach przedpołudniowych, które były na ogół znakomite. Zadaniem referentów było zobrazowanie rozwoju wybranego, na ogół dość szerokiego, zagadnienia i podsumowanie nagromadzonej już wiedzy. Wykładów takich było osiem. Wymieniam je w kolejności wygłaszania:

F. WEIDENHAMMER (Karlsruhe), «Drgania losowe» (teoria równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu z funkcją losową po prawej stronie).

A. THELLUNG (Zurych), «Hydrodynamika kwantowa (teoria helu II w ujęciu fenomenologicznym, jako mieszaniny dwóch cieczy)».

W. WETTERLING (Hamburg), «Optymalizacja caloliczbowa».

E. BECKER (Darmstadt), «Nowe problemy dynamiki gazów rzeczywistych» podstawowe rozważania dotyczące modeli gazów, wpływu czasów relaksacji itp..

W. HÄNDLER (Erlangen), «Teoria automatów jako część składowa matematyki stosowanej».

H. SCHAEFER (Brunswick), «Ośrodek Cosseratów».

E. STIEFEL (Zurych), «Nowe ujęcie zagadnienia trzech ciał w mechanice nieba» (znakomity, głęboki wykład dotyczący stateczności ruchu ciał).

R. WILLE (Berlin), «Wymiana turbulentna i opływ kominów okrętowych» (wyniki badań doświadczalnych dotyczących turbulencji).

W czasie Zjazdu odbyło się doroczne zebranie wyborcze. Poza wyborem nowych władz przyjęło ono ważną dla dalszego rozwoju GAMM decyzję dopuszczenia wykładów w językach innych niż niemiecki. Faktycznie już na Zjeździe w Zurychu parę prac wygłoszono po angielsku, a przyjęta uchwała ten stan rzeczy aprobowała i zarazem otworzyła drogę do uczynienia ze Zjazdów GAMM konferencji o szerszym międzynarodowym znaczeniu. Przyjęto także zaproszenie do odbycia następnego Zjazdu GAMM w Pradze.

Ostatnim akordem prac Zjazdu było wspólne zebranie GAMM i WGLR (Wissenschaftliche Gesellschaft für Luft- and Raumfahrt) poświęcone pamięci LUDWIKA PRANDTLA, połączone z wręczeniem najwyższych wyróżnień WGLR, pierścieni Prandtla. Wykład wygłosił D. KÜCHEMANN (Farnborough, Anglia) na temat

rozwoju prandtlowskiej teorii sił nośnych. Główna idea tego doskonałego wykładu polegała na wykazaniu, że wszystkie problemy rozważanej teorii, łącznie z tymi, które przed paru laty wydawały się zamknięte, są nadal aktualne. Przedstawione przez autora dane teoretyczne i doświadczalne omawiały te zadania i sugerowały kierunki ich rozwiązania. Dr Küchemann wyrażał przekonanie, że istniejące rozbieżności między teorią i wynikami eksperymentu nie są w zasadzie, jeśli chodzi o potrzeby lotnictwa, związane z «nieidealnością» gazów i że mogą i powinny być rozwiązane klasycznymi, sugerowanymi przez Prandtla, metodami.

Pierścieniami (w dosłownym sensie) Prandtla zostali wyróżnieni prof. ADOLF BUSEMANN (Colorado, USA) i znany konstruktor samolotów GIUSEPPE GABRIELLI (Turyn, Włochy).

Świetna organizacja Zjazdu była zasługą gospodarza, prof. dr P. HENRICI w Zurychu.

Ryszard Herczyński (Warszawa)

SPIS TREŚCI

- B. DUSZCZYK, Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym 401
 Устойчивость сплошного цилиндра под действием гидростатического давления
 Stability of a full circular cylinder loaded with hydrostatic pressure
- A. KOWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa w przypadku niekonserwatywnych zagadnień stateczności sprężystej 411
 Условие безопасности по напряжениям в неконсервативных задачах упругой устойчивости
 Stress criterion of safety for non-conservative problems of elastic stability
- J. KŁEPACZKO, Urządzenie do dynamicznego skręcania 425
 Устройство для динамических испытаний на кручение
 Impact torsion test apparatus
- E. KĄSKI, Quasi-statyczne termonaprężenia w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny i oddającym ciepło przez konwekcję 439
 Термические нестационарные напряжения в брусе с прямоугольным сечением проводящим электрический ток и отдающим тепло через поверхность
 Quasi-static thermal stresses in a bar of rectangular cross-section conducting electric current and exchanging heat by convection
- Z. ENGEL, Badania synchronizacji i samosynchronizacji wibratorów mechanicznych 451
 Исследование синхронизации и автосинхронизации механических вибраторов
 Investigations of synchronization and selfsynchronization of mechanical vibrators
- J. ORKISZ, Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego 463
 Применение теории пластического течения для анализа конечных деформации гибких осесимметрических оболочек вращения.
 Finite deformations of flexible axially symmetric membrane shells in the light of the theory of plastic flow

Biuletyn Informacyjny

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
