

711720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 5 • ZESZYT 3



P^A

WARSZAWA 1967

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

Z. MARCINIAK, O różnych formach utraty stateczności blachy poddawanej rozciąganiu w stanie plastycznym	277
О различных видах потери устойчивости листа подверженного растяжению в пластическом состоянии	
On various forms of instability in sheet material undergoing plastic tension	
R. GANOWICZ, Rozwiązania osobliwe w ogólnej teorii płyt trójwarstwowych	293
Особые решения в общей теории трехслойных пластин	
Singular solutions in the general theory of three-layer plates	
W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalna weryfikacja niestacjonarnych procesów plastycznego płynięcia	309
Экспериментальная проверка теоретических решений для больших пластических деформаций металлов	
Experimental verification of some theoretical solutions of large plastic deformations of metals	
S. KALISKI, E. WŁODARCZYK, O zjawiskach rezonansowych w układach nieograniczonych	325
О резонансных явлениях в неограниченных системах	
On resonance phenomena in unbounded systems	
Cz. RYMARZ, Fale powierzchniowe w ośrodku z naprężeniami momentowymi	337
Поверхностные волны в среде с моментными напряжениями	
Surface waves in a medium with couple-stresses	
J. MARYNIAK, Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym	347
Продольная динамическая устойчивость планера в буксирном комплексе	
Dynamic longitudinal stability of a towed sailplane	
Biuletyn Informacyjny	385
Recenzje	397

10420
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 5 • Z E S Z Y T 3



W A R S Z A W A 1 9 6 7
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A
JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ)·ADAM
MITZEL (WROCLAW)·JERZY MUTERMILCH
(WARSZAWA)·WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)
STANISŁAW OCHEŁDUSZKO (GLIWICE)·WACŁAW
OLSZAK (WARSZAWA)·MARIAN PIĄTEK
(GDAŃSK)·JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR
CZESŁAW EIMER · JÓZEF JANICZEK
M A R E K S O K O Ł O W S K I

REDAKCJA

Warszawa, Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700(567+133) egz. Arkuszy wydawn. 9,0. Arkuszy drukarskich 7,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 18.IV.1967 r., druk ukończono we wrześniu 1967 r. Cena zł 30.—

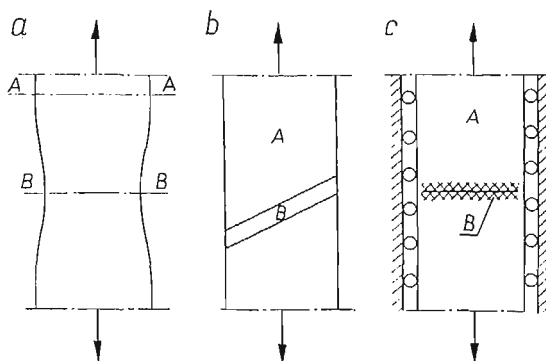
Zam. 661/67 T-75 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

O RÓŻNYCH FORMACH UTRATY STATECZNOŚCI BLACHY PODDAWANEJ ROZCIĄGANIU W STANIE PLASTYCZNYM

ZDZISŁAW MARCINIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Ogólną cechą utraty stateczności blachy poddanej jedno- lub dwuosowemu rozciąganiu w zakresie plastycznym jest to, że mimo istnienia np. w pewnym obszarze jednorodnego (płaskiego) stanu naprężeń, powstać w nim może niejednorodne pole odkształceń. Z chwilą utraty stateczności odkształcenia koncentrują się w pewnych tylko obszarach ciała, podczas gdy pozostałe obszary, leżące poza zasięgiem koncentracji odkształceń, są bądź odciążane i przechodzą w stan sprężysty, bądź też doznają stopniowo zanikających odkształceń plastycznych. Ta koncentracja odkształceń zależnie od warunków może przybierać różne formy. W niniejszej pracy zanalizowano trzy najważniejsze formy utraty stateczności rozciąganych powłok plastycznych, mianowicie:



Rys. 1

1. Tworzenie się miejscowego przewężenia tzw. szyjki (rys. 1a) w ciele o początkowo niezmiennym przekroju poprzecznym, poddanym rozciąganiu siłą osiową. Do tej formy utraty stateczności zaliczyć również można np. zwiększanie średnicy na pewnym odcinku rury, poddanej wewnętrznemu ciśnieniu (wybrzuszenie) lub miejscowe zwężenie rury poddanej jednoosiowemu rozciąganiu. We wszystkich tych przypadkach odkształcenie rozkłada się nierównomiernie wzdłuż osi próbki, a zasięg obszaru, w którym koncentruje się odkształcenie (szyjki), zależy od wymiarów przekroju poprzecznego ciała, a więc np. od szerokości płaskiej próbki czy średnicy rury. Nie zależy natomiast od grubości ścianki. Tę postać utraty stateczności oznaczamy będziemy w dalszej części pracy jako niestateczność typu I.

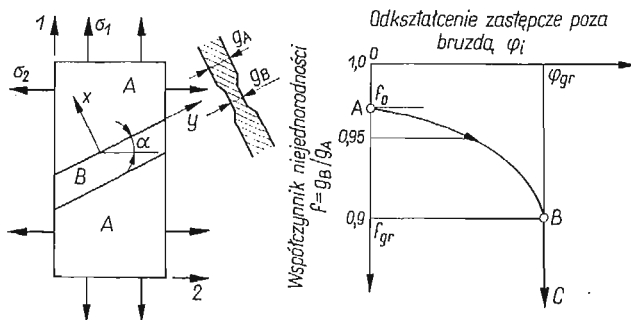
2. Powstanie nieciągłości w polu odkształceń powłoki wg rys. 1b. Jak wykazał R. HILL [1], tego rodzaju nieciągłość kinematyczna może powstać wtedy, gdy granica oddzielająca obszar B ulegający dalszemu odkształceniu od obszaru A , w którym zachodzi odciążenie, pokrywa się z charakterystyką równań pola naprężeń. Długość tej linii granicznej nie ulega zmianie w czasie odkształcenia. W odróżnieniu od poprzednio omówionej ta forma utraty stateczności ma charakter lokalny. Zasięg tworzącej się bruzdy w kierunku do niej prostopadłym nie zależy bowiem od szerokości próbki, a jedynie od grubości blachy. Tę postać utraty stateczności oznaczamy będziemy jako typ II.

3. Miejscowe zmniejszanie się grubości blachy wzdłuż pewnej linii (bruzdy), która jak to wykazano w dalszej części pracy biegnie w zasadzie prostopadle do kierunku większego z naprężeń głównych (rys. 1c). W odróżnieniu od obu poprzednio omówionych przypadków, w których następowało odciążenie materiału leżącego poza szyjką czy bruzdą, procesom koncentracji odkształceń w bruzdzie towarzyszy tu stopniowo zanikające plastyczne odkształcenie powłoki poza bruzdą. Ta forma utraty stateczności została zanalizowana przez autora w pracach [2 i 3]. Będzie to III typ niestateczności.

Celem niniejszej pracy jest analiza warunków, w których możliwe jest powstanie każdej z wymienionych wyżej form niestateczności oraz porównanie wniosków wynikających z tej analizy z wynikami doświadczeń. Ponieważ pierwsza z wymienionych form, a więc «szyjka», wyrażająca utratę stateczności danego ciała traktowanego jako całość, powstać może tylko w specjalnych i łatwych do sprecyzowania okolicznościach, przeto w dalszej części pracy zajmiemy się przede wszystkim sprecyzowaniem warunków, w których mogą się pojawić dwie pozostałe formy dotyczące lokalnej utraty stateczności elementu powłoki.

2. Wpływ kierunku bruzdy na przebieg procesu jej powstawania

Aby sprecyzować warunki, w których mogą się tworzyć bruzdy typu II lub III, zanalizujemy przebieg tworzenia się bruzd typu III w zależności od kąta nachylenia bruzdy w stosunku do kierunków głównych, przy różnych schematach obciążenia powłoki (stosunku naprężeń głównych σ_2/σ_1). Rozpatrzmy w tym celu element powłoki (rys. 2), na którego



Rys. 2

krawędzie działają naprężenia główne σ_1 i σ_2 , przy czym $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Wyobraźmy sobie, że element ten przecina pod kątem α pas B o zmniejszonej grubości. Grubość blachy w obszarze B , reprezentującym bruzdę, jest równa g_B , podczas gdy w obu sąsiednich obszarach A wynosi ona g_A , przy czym $g_A > g_B$. Ta niejednorodność geometryczna wyrażająca się

niejednakową grubością blachy reprezentuje dowolną niejednorodność materiału, spowodowaną na przykład pasmowym układem zanieczyszczeń, różnicą własności plastycznych materiału itp. Każdą bowiem tego typu niejednorodność własności fizycznych można zastąpić równoważną jej niejednorodnością geometryczną, wyrażającą się współczynnikiem $f = g_B/g_A$, przy czym zakłada się, że materiał jest już pod względem własności fizycznych idealnie jednorodny i izotropowy.

Ponieważ dokonywana analiza ma na celu wyciągnięcie wniosków o charakterze jedynie jakościowym, przeto pominiemy w tym rozumowaniu zjawisko umacniania się materiału zakładając tzw. idealną plastyczność ($\sigma_{pA} = \sigma_{pB} = \sigma_p$).

Jeżeli przyjmiemy nowy układ osi x, y nachylony do kierunków głównych pod kątem α , to składowe stanu naprężenia w obszarze A wyrażą się jak następuje:

$$(2.1) \quad \sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \quad \tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Z warunków równowagi sił prostopadłych i stycznych do linii granicznej wynika, że odpowiednie naprężenia σ_{xB} i τ_{xyB} w obszarze B wynoszą:

$$(2.2) \quad \sigma_{xB} = \frac{\sigma_x}{f}, \quad \tau_{xyB} = \frac{\tau_{xy}}{f}, \quad \text{przy czym } f = \frac{g_B}{g_A}.$$

Trzecia składowa stanu naprężenia, mianowicie naprężenie σ_{yB} , może zmienić się na linii granicznej skokowo w sposób, który już nie wynika z warunków równowagi. Naprężenie to spełnić jednak musi warunek plastyczności w obszarze B , który dla płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_3 = 0$) napiszemy w postaci

$$(2.3) \quad \sigma_{xB}^2 - \sigma_{xB} \sigma_{yB} + \sigma_{yB}^2 + 3\tau_{xyB}^2 = \sigma_p^2.$$

Po podstawieniu do tego warunku związków (2.2) otrzymamy równanie kwadratowe

$$(2.4) \quad \left(\frac{\sigma_x}{f}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x}{f}\right) \sigma_{yB} + \sigma_{yB}^2 + 3\left(\frac{\tau_{xy}}{f}\right)^2 - \sigma_p^2 = 0,$$

z którego można wyznaczyć szukane naprężenie σ_{yB} :

$$(2.5) \quad \sigma_{yB} = \frac{\sigma_x}{2f} \pm \frac{1}{f} \sqrt{f^2 \sigma_p^2 - 3\tau_{xy}^2 - \frac{3}{4} \sigma_x^2}.$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem można przekształcić odejmując stronami od warunku plastyczności dla obszaru A

$$\sigma_p^2 = \sigma_y^2 - \sigma_y \sigma_x + \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2$$

tożsamość

$$\left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 = \sigma_y^2 - \sigma_y \sigma_x + \frac{1}{4} \sigma_x^2.$$

Otrzymamy wtedy związek

$$\sigma_p^2 - \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 = +3\tau_{xy}^2 + \frac{3}{4} \sigma_x^2.$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (2.5) przybierze ono postać

$$(2.6) \quad \sigma_{yB} = \frac{\sigma_x}{2f} \pm \frac{1}{f} \sqrt{\left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x\right)^2 - (1-f^2) \sigma_p^2}.$$

Odształcenia obu rozpatrywanych obszarów A i B wynikają z istniejących tam stanów naprężeń, a ponadto są z sobą związane kinematycznym warunkiem, aby odształcenie φ_y po obu stronach linii nieciągłości było sobie równe, a zatem

$$\varphi_{yB} = \varphi_{yA} = \varphi_y.$$

Załóżmy, że w pewnym okresie czasu obszar A doznał przyrostu odształcenia $d\varphi_i$, któremu zgodnie z prawem płynięcia towarzyszył przyrost składowej $d\varphi_y$

$$(2.7) \quad d\varphi_y = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_p} d\varphi_i.$$

Ubytek grubości tej części powłoki wynosi wówczas

$$(2.8) \quad \frac{dg_A}{g_A} = d\varphi_{3A} = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} d\varphi_y.$$

Zachodzący w tym samym czasie ubytek grubości obszaru B wyraża się związkami

$$(2.9) \quad \frac{dg_B}{g_B} = d\varphi_{3B} = \frac{-\sigma_{xB} - \sigma_{yB}}{2\sigma_{yB} - \sigma_{xB}} d\varphi_y,$$

przy czym w obu związkach (2.8)—(2.9) występuje wielkość $d\varphi_y$ wyrażająca przyrost długości wspólnej linii granicznej oddzielającej obszary A i B .

Z definicji współczynnika niejednorodności $f = g_B/g_A$ wynika, że jego przyrost df wyrazić można przez przyrosty odształceń $d\varphi_{3A}$ i $d\varphi_{3B}$ jak następuje:

$$df = \frac{dg_B g_A - dg_A g_B}{g_A^2}$$

lub

$$(2.10) \quad df = \frac{g_B}{g_A} \left(\frac{dg_B}{g_B} - \frac{dg_A}{g_A} \right), \quad \text{a więc} \quad \frac{df}{f} = d\varphi_{3B} - d\varphi_{3A}.$$

Po uwzględnieniu związków (2.8), (2.9) i (2.7) wyrażenie (2.10) przybierze postać

$$-\frac{df}{f} = \left(\frac{\sigma_{xB} + \sigma_{yB}}{2\sigma_{yB} - \sigma_{xB}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} \right) \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sigma_p} d\varphi_i.$$

W powyższym równaniu można wyizolować składowe naprężeń σ_{xB} i σ_{yB} przez składowe σ_x i σ_y zgodnie z zależnościami (2.1) oraz (2.6). Po dokonaniu prostych przekształceń otrzymamy równanie różniczkowe

$$(2.11) \quad -\frac{df}{f} = K \left[\frac{1}{\sqrt{Lf^2 - (L-1)}} - 1 \right] d\varphi_i,$$

w którym K i L są następującymi funkcjami składowych stanu naprężenia w obszarze A :

$$(2.12) \quad K = \frac{3}{4} \frac{\sigma_x}{\sigma_p}, \quad L = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_p} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\sigma_p} \right)^2}.$$

Dla danego stanu naprężenia określonego wartościami naprężeń głównych σ_1 i σ_2 współczynniki K i L zależą jedynie od kąta α : $K(\alpha)$ i $L(\alpha)$.

Całkowanie równania (2.11) pozwala wyznaczyć przebieg procesu formowania się bruzdy, a więc wyrazić stosunek grubości części B i A ($g_B/g_A=f$), jako funkcję odkształcenia zastępczego φ_i powłoki poza przewężeniem (w części A). Przebieg tej zależności przedstawia wykres po prawej stronie rys. 2. Należy podkreślić, że dla uzyskania tej zależności konieczne jest założenie w ramach stałej całkowania pewnej wstępnej niejednorodności powłoki $f_0 = g_{B0}/g_{A0}$. Jak wynika z wykresu na rys. 2, w miarę odkształcania się części A niejednorodność ta stopniowo się pogłębia, gdyż coraz to większemu odkształceniu w bruzdzie (części B) odpowiada stopniowo zanikające odkształcenie obszarów sąsiednich (części A). Tę fazę procesu kształtowania się miejscowego przewężenia (bruzdy) nazwiemy fazą quasi-stateczną. Wreszcie, gdy współczynnik niejednorodności osiągnie pewną graniczną wartość φ_{gr} całe odkształcenie powłoki koncentruje się wyłącznie w bruzdzie, podczas gdy obszary z nią sąsiadujące ulegają odciążeniu i przechodzą w stan sprężysty. Jest to oznaką wejścia w fazę pełnej niestateczności powłoki, podczas której odkształcenie obszarów sąsiadujących z bruzdą jest stałe i wynosi φ_{gr} . Proces utraty stateczności może być w pewnej chwili przerwany pęknięciem blachy w najbardziej osłabionym przekroju powłoki, przy czym zależnie od rodzaju materiału utrata spójności może nastąpić bądź w fazie pełnej utraty stateczności, bądź też w fazie quasi-statecznej.

Dla danego stanu naprężenia, określonego wartościami naprężeń głównych σ_1 i σ_2 , graniczna wartość odkształcenia φ_{gr} zależy jedynie od założonej wstępnej niejednorodności powłoki f_0 oraz od kąta α pochylecia rozpatrywanej bruzdy względem kierunków głównych, a więc $\varphi_{gr} = \varphi_{gr}(f_0, \alpha)$. Przebieg tych funkcji dla trzech różnych stanów naprężenia powłoki wyznaczony na podstawie numerycznego całkowania równania (2.11) został przedstawiony po prawej stronie rysunków 3, 4, 5 sporządzonych w biegunowym układzie współrzędnych φ_{gr}, α .

Przypadek jednoosiowego rozciągania (gdy $\sigma_2 = 0$) ilustruje rys. 3. Widać z niego, że istnieją w tym przypadku dwa szczególne kierunki pochylone do jednego z kierunków głównych pod kątem $\alpha_B = 35^\circ 15'$, wzdłuż których pojawić się może bruzda nawet w przypadku powłoki całkowicie jednorodnej (gdy $f_0 = 1$). Pojawienie się bruzdy w tych kierunkach towarzyszy odciążeniu pozostałych obszarów powłoki ($\varphi_{gr} = 0$), a więc następuje od razu pełna niestateczność powłoki nie poprzedzona fazą quasi-stateczną. Łatwo zauważyć, że kierunki te pokrywają się z liniami dopuszczalnych nieciągłości w polu kinematycznym (charakterystyki), a więc zgodnie z oznaczeniami podanymi na początku utrata stateczności zachodzi w tych kierunkach wg formy II.

Jeżeli kąt α nachylecia ewentualnej bruzdy byłby inny niż α_B , wówczas przebieg jej odkształcenia musiałby przebiegać wg schematu III. Wiązałoby się z tym pewne odkształcenie powłoki w obszarze sąsiadującym z bruzdą φ_{gr} , którego wielkość dla kilku wartości wstępnej niejednorodności f_0 przedstawiają linie po prawej stronie wykresu (rys. 3). Jednakże w przypadku powłoki dostatecznie jednorodnej proces tworzenia się bruzdy typu III nie może się rozwijać, gdyż jest on natychmiast zahamowany przez poprzednio omówioną niestateczność typu II, związaną z kierunkiem α_B . Należy bowiem pamiętać, że powstanie w którymkolwiek miejscu niestateczności typu II powoduje przejście w stan sprężysty pozostałych obszarów powłoki, a więc zahamowanie wszystkich ewentualnych procesów tworzenia się bruzd nachylonych w kierunkach innych niż α_B .

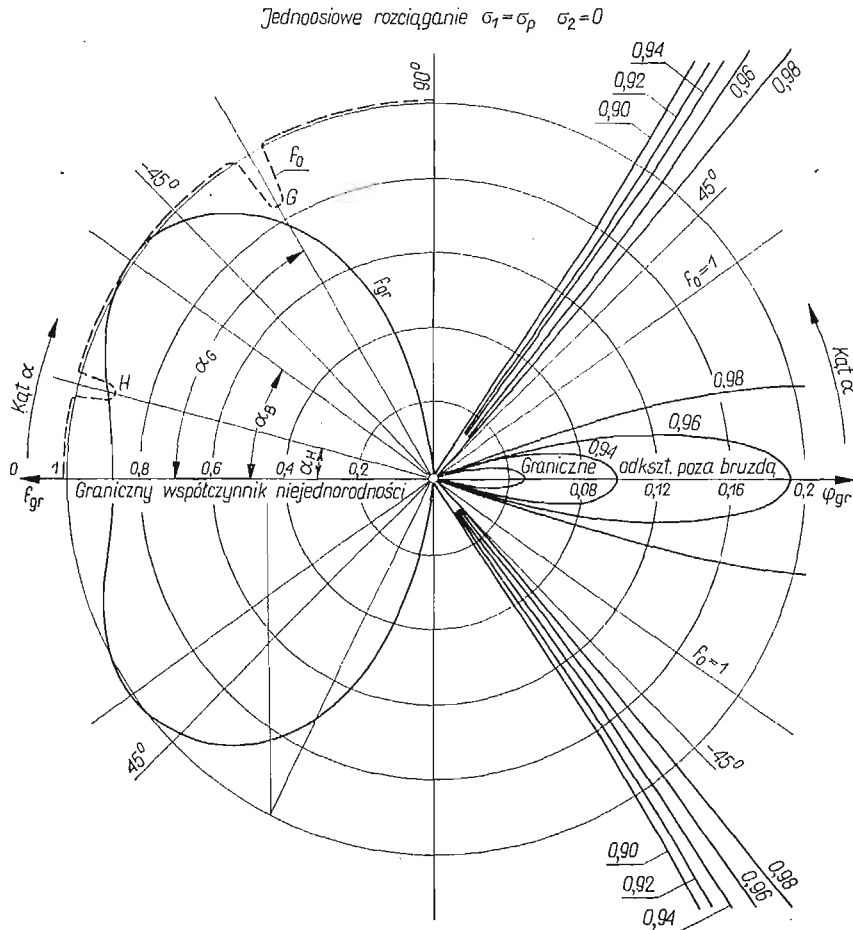
Powyższy wniosek jest jednak słuszny tylko wtedy, gdy wstępna niejednorodność powłoki $f_0(\alpha)$ (traktowana jako funkcja kąta α) jest dla każdego kąta α mniejsza od jej niejednorodności granicznej $f_{gr}(\alpha)$. Tę ostatnią wyznaczyć można z warunku, aby wyrażenie zawarte w kwadratowym nawiasie równania (2.11) stało się równe zero. Prowadzi to do związku:

$$(2.13) \quad f_{gr} = \sqrt{\frac{L-1}{L}},$$

który dla przypadku jednoosiowego rozciągania ($\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = 0$) zgodnie z (2.1) i (2.12) przedstawia graniczną niejednorodność f_{gr} jako następującą funkcję kąta

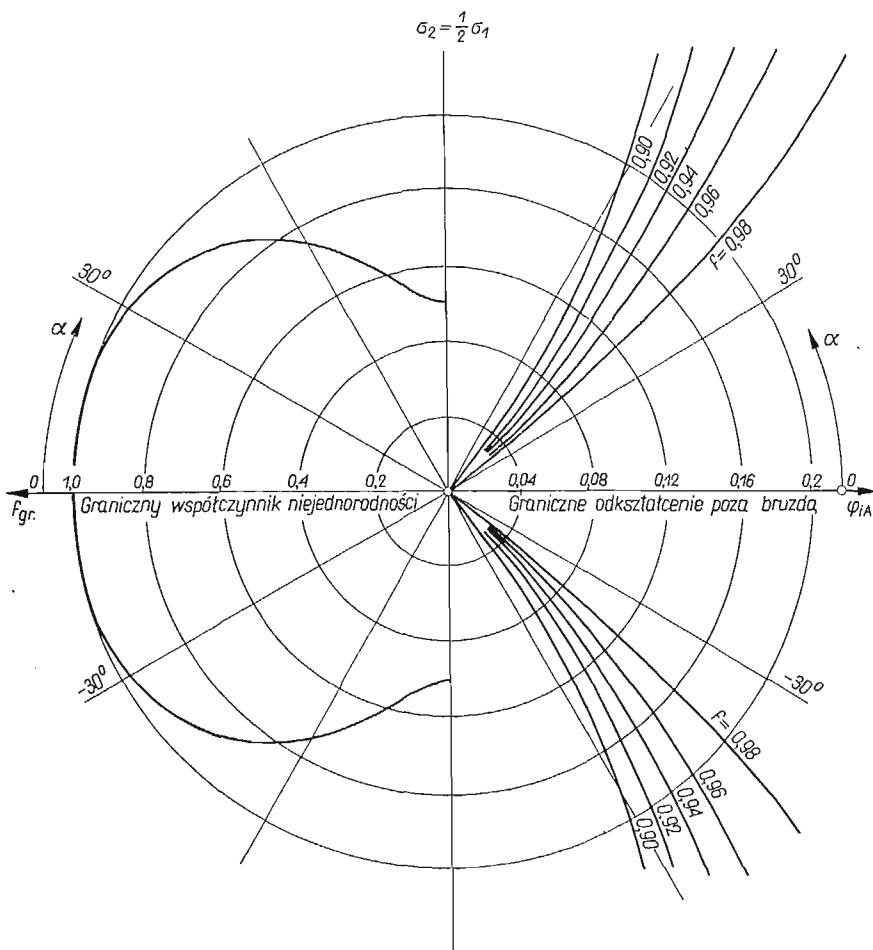
$$(2.14) \quad f_{gr} = \sqrt{1 - \left(\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right)^2}.$$

Przebieg tej funkcji w biegunowym układzie osi współrzędnych f, α przedstawia linia ciągła po lewej stronie wykresu na rys. 3. Porównanie przebiegu tej linii z odpowiednią krzywą pokazaną na rysunku linią przerywaną, charakteryzującą niejednorodność rozpatrywanej



Rys. 3

powłoki, pozwala przewidzieć kąt, pod którym pojawi się bruzda. Jeżeli mianowicie dla dowolnego kąta spełniony jest warunek $f_0 \geq f_{gr}$, wtedy, jak to już poprzednio stwierdzono, następuje niestateczność typu II, a bruzda biegnie pod kątem α_B dla którego $f_0 = f_{gr}$.

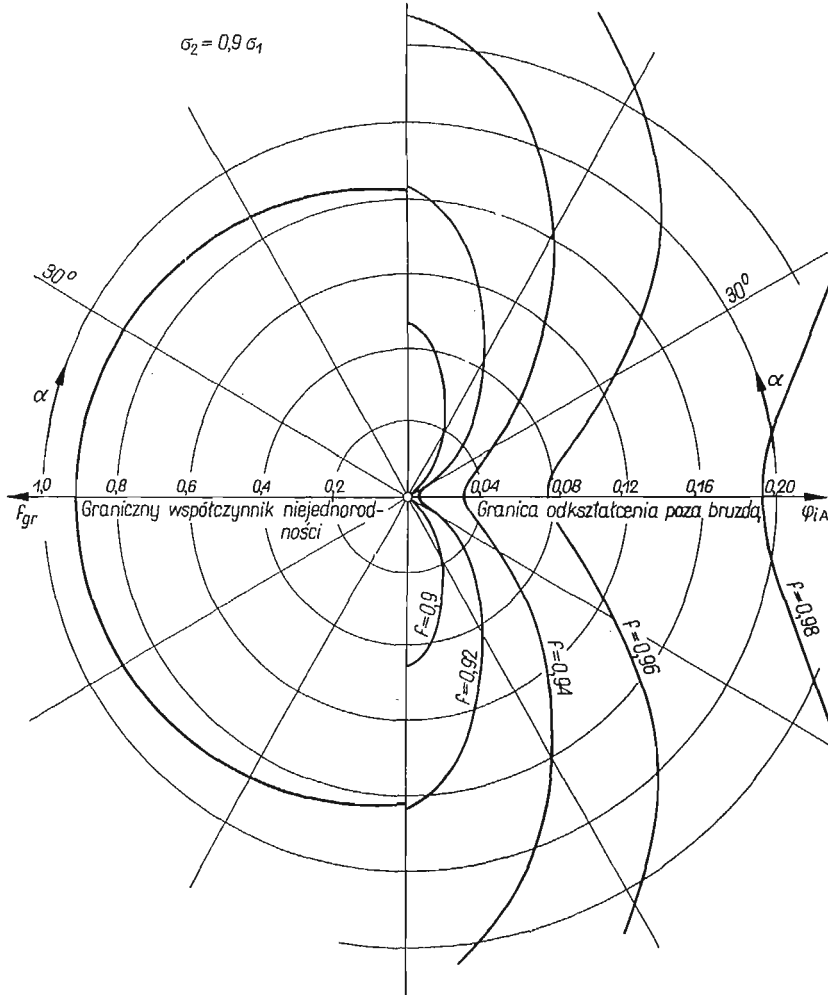


Rys. 4

Jeżeli natomiast linia przerywana f_0 przecina w jakimkolwiek miejscu linię ciągłą f_{gr} , a więc gdy istnieje taki kąt α_H , dla którego $f_0 < f_{gr}$, wtedy bruzda będzie pod tym właśnie kątem α_H , a przebieg procesu odpowiada fazie pełnej niestateczności wg schematu III. Oznacza to, że pozostałe obszary powłoki ulegają od razu odciążeniu i przechodzą w stan sprężysty. Niemożliwe jest natomiast przy tym stosunku naprężeń głównych pojawienie się quasi-statecznej fazy procesu wg schematu III.

Przedstawiony obraz nie ulega zasadniczym zmianom dla innych wartości stosunku σ_2/σ_1 pod warunkiem, że $\sigma_2 \leq \sigma_1/2$. Jedyną różnicą polega na stopniowym zmniejszaniu się krytycznej wartości kąta α_B wraz ze wzrostem stosunku σ_2/σ_1 . W granicznym przypadku, gdy $\sigma_2 = \sigma_1/2$, przedstawionym na rys. 4, bruzda tworząca się wg schematu B biegnie prostopadle do kierunku większego z naprężeń głównych ($\alpha_B = 0$).

Natomiast zasadnicza zmiana sytuacji występuje wtedy, gdy stosunek σ_2/σ_1 przekracza wartość $1/2$. Dla tego zakresu stanów naprężeń równania opisujące pole naprężeń stają się typu eliptycznego i nie mają charakterystyk, a długość dowolnej linii poprowadzonej na powierzchni powłoki zwiększa się w miarę jej odkształcania. Obraz funkcji $\varphi_{gr}(\alpha)$ oraz $f_{gr}(\alpha)$ dla tego zakresu stanów naprężeń przedstawia rys. 5, sporządzony dla stosunku



Rys. 5

$\sigma_2/\sigma_1 = 0,9$. Z wykresu tego widać, że nie istnieje tu, w odróżnieniu od poprzednio omówionych przypadków, żaden krytyczny kierunek, wzdłuż którego mogłaby powstać nieciągłość kinematyczna typu II. Istnieją zatem warunki do tworzenia się bruzd wg schematu III, przy czym w fazie quasi-statecznej następuje odkształcanie się powłoki w bruzdzie i poza nią. Przejście w stan pełnej niestateczności zależy od kąta pochylenia bruzdy α .

Jak widać z wykresu 5, najmniejsze graniczne odkształcenie powłoki przypada dla $\alpha = 0$, a zatem proces tworzenia się bruzdy przechodzi najszybciej w fazę pełnej nie-

stateczności w przypadku bruzd biegnących prostopadle do kierunku większego z naprężeń głównych. Graniczna niejednorodność powłoki f_0 jest dla omawianego zakresu stanów naprężenia zawsze mniejsza od jedności i osiąga maksimum, gdy $\alpha = 0$.

Łatwo zauważyć, że dla stanu równomiernego, dwuosowego rozciągania, gdy $\sigma_1 = \sigma_2$, wielkości φ_{gr} oraz f_0 przestają zależeć od kąta α . Na wykresie we współrzędnych biegunowych φ_{gr}, α i f_{gr}, α funkcje te odwzorowują się więc szeregiem współśrodkowych kół.

Z przedstawionej tu analizy równania (2.11) wyciągnąć można ostatecznie następujący wniosek:

Jeżeli $\sigma_2 \leq \sigma_1/2$, to utrata stateczności powłoki przebiega wg schematu II, a więc powstaje linia nieciągłości kinematycznej, nachylona pod kątem α_B . Jeżeli natomiast $\sigma_1/2 < \sigma_2 \leq \sigma_1$, to utrata stateczności następuje wg schematu III, przy czym bruzda jest prostopadła do kierunku większego z naprężeń głównych. Wyjątek od tej zasady stanowią przypadki, gdy wstępna niejednorodność powłoki f_0 przekracza dla pewnej wartości kąta α_H niejednorodność graniczną f_{gr} . Bruzda powstaje wówczas w miejscu osłabienia powłoki pod kątem α_H , przy czym proces ten nie jest poprzedzony fazą quasi-stateczną. Wniosek ten stanowić będzie podstawę do dalszych rozważań.

3. Utrata stateczności powłok z uwzględnieniem wzmocnienia

Uwzględnienie zjawiska wzmocnienia się materiału zmienia przedstawiony wyżej obraz tylko o tyle, że utrata stateczności wg form I i II następuje dopiero przy pewnej wartości odkształcenia plastycznego powłoki φ_i , podczas gdy dla materiału idealnie plastycznego niestateczność występowała od samego początku procesu odkształcania.

Ogólny warunek utraty stateczności rozciąganej powłoki wg formy I został omówiony w pracy [2].

W przypadku powłoki idealnie jednorodnej ($f_0 = 1$) początek tworzenia się szyjki (wg formy I) w powłoce poddanej rozciąganiu przypada, jak wiemy, na moment osiągnięcia przez siłę osiową $P = \sigma_p F$ wartości ekstremalnej. Z warunku $d(\sigma_p F) = 0$ wynika zależność

$$\frac{d\sigma_p}{\sigma_p} = d\varphi_1,$$

w której przyrost wydłużenia osiowego $d\varphi_1$ można wyrazić przez przyrost odkształcenia zastępczego $d\varphi_i$ zgodnie z prawem płynięcia

$$d\varphi_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p} d\varphi_i.$$

Ostatecznie otrzymujemy związek

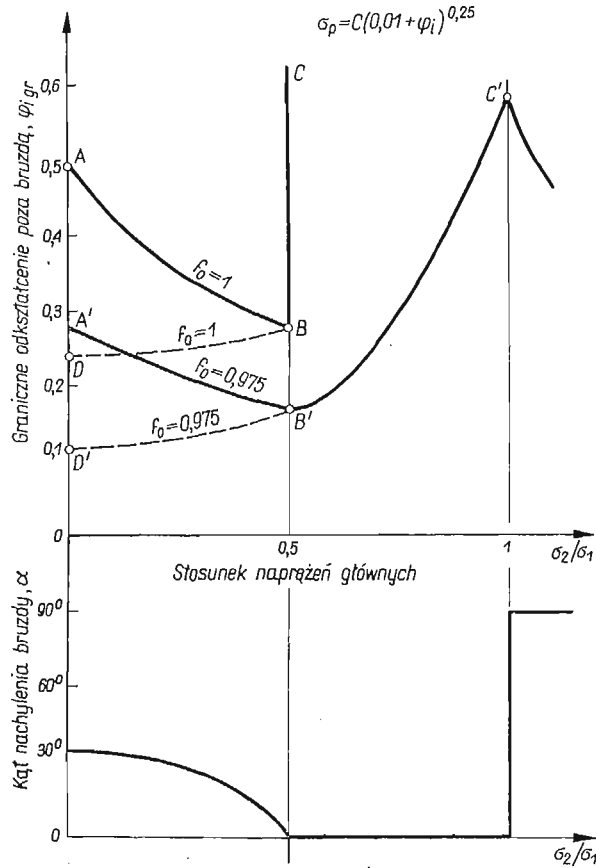
$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \frac{1}{\sigma_p} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p},$$

którego lewa strona dla danego kształtu krzywej wzmocnienia $\sigma_p = \sigma_p(\varphi_i)$ jest jednoznacznie funkcją odkształcenia φ_i , a prawa istniejącego stanu naprężenia. Na przykład dla krzywej wzmocnienia określonej związkiem $\sigma_p = C(\varphi_0 + \varphi_i)^n$ wartość odkształcenia

φ_{gr} , przy którym zachodzi utrata stateczności w postaci szyjki można wyznaczyć z zależności

$$\frac{n}{\varphi_0 + \varphi_{gr}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p}$$

Graniczna wartość odkształcenia φ_{gr} zależy więc od stosunku naprężeń głównych σ_2/σ_1 , jak to przedstawia linia DB na rys. 6. Została ona wykreślona dla krzywej wzmocnienia o równaniu $\sigma_p = C(0,01 + \varphi_i)^{0,25}$.



Rys. 6

Sprecyzujmy teraz warunek powstawania niestateczności typu II w powłoce podlegającej wzmocnieniu. Niestateczność tego typu pojawi się wówczas, gdy przyrost jednostkowej siły przenoszonej przez linię nieciągłości w kierunku do niej prostopadłym wywołany wzmocnieniem materiału zostanie w całości skompensowany przez ubytek grubości blachy w bardziej odkształconym obszarze. Utrata stateczności zachodzi zatem w chwili osiągnięcia maksimum przez jednostkową siłę σ_{xg} , a więc w chwili, gdy $d(\sigma_{xg}) = 0$ lub, co na jedno wychodzi, $d(\sigma_p g) = 0$. Postępując podobnie jak poprzednio można warunek ten wyrazić w postaci związku

$$\frac{d\sigma_p}{d\varphi_i} \frac{1}{\sigma_p} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_p}$$

z którego dla danego kształtu krzywej wzmocnienia można wyznaczyć wartość odkształcenia $(\varphi_i)_{gr}$, przy którym pojawia się niestateczność typu II, jako funkcję stosunku naprężeń głównych σ_2/σ_1 . Związek ten dla tej samej co i poprzednio krzywej wzmocnienia przedstawia na wykresie 6 odcinek krzywej AB . Został on doprowadzony tylko do wartości $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$, gdyż, jak wynika z poprzednich rozważań, niestateczność tego typu nie może się pojawić przy większej wartości tego stosunku.

W zakresie tym gdy $\sigma_2 > \sigma_1/2$ tworzyć się mogą, jak wiemy, tylko bruzdy typu III, ale proces ten dla rozważanej tu powłoki idealnie jednorodnej ($f_0 = 1$) nie zostaje zapoczątkowany, co zostało na wykresie 6 zaznaczone w postaci pionowego odcinka BC . W celu zbliżenia się do rzeczywistych warunków należy zatem uwzględnić pewną wstępną niejednorodność powłoki f_0 , przy czym założymy, że wstępnie osłabiony przekrój pokrywa się każdorazowo z kierunkiem powstawania bruzdy. Jak wykazano w pracy [2] nawet bardzo niewielka wstępna niejednorodność materiału powoduje bardzo znaczne zmniejszenie się odkształcenia obszaru otaczającego powstającą bruzdę. Należy bowiem pamiętać, że siła powodująca odkształcenie grubszej części powłoki jest mniejsza $f = g_B/g_A$ razy w stosunku do siły odkształcającej ten obszar w powłoce idealnie jednorodnej. Graniczna wartość odkształcenia obszaru A sąsiadującego z bruzdą typu II lub szyjką typu I musi być taka, by spełnione były odpowiednie warunki równowagi:

$$\sigma_{pA} F_A = (\sigma_{pB} F_B)_{max} f \quad \text{dla typu I,}$$

lub

$$\sigma_{pA} g_A = (\sigma_{pB} g_B)_{max} f \quad \text{dla typu II.}$$

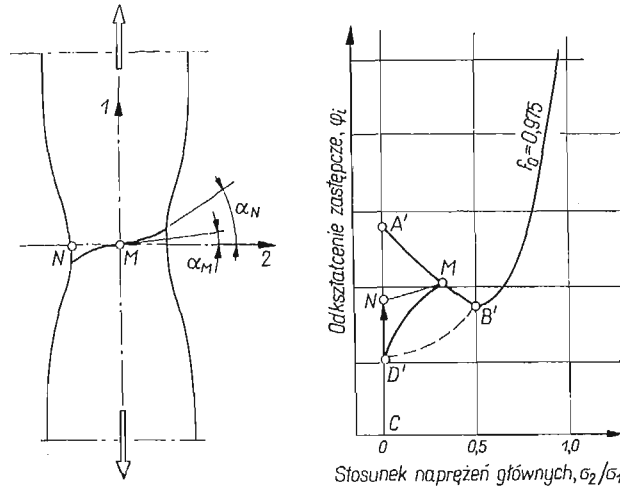
Opierając się na tych zależnościach można wyznaczyć wartość granicznego odkształcenia φ_{gr} powłoki ze wstępną niejednorodnością f_0 jako funkcję stosunku σ_1/σ_2 , przy czym najwygodniej posłużyć się w tym celu metodą wykreślną sporządzając dla każdego przypadku wykres we współrzędnych siła-odkształcenie. Otrzymane tą metodą wyniki (dla $f = 0,975$) przedstawiają na rys. 6 linie: $D'-B'$ dla niestateczności typu I oraz linia $A'-B'$ dla niestateczności typu II.

Wyznaczenie granicznego odkształcenia dla bruzdy powstającej w zakresie $\sigma_2 > \sigma_1/2$ według schematu III dla materiału ulegającego wzmocnieniu jest znacznie bardziej kłopotliwe. Sposób postępowania dla tego przypadku omówiony został w pracy [2], a wyniki obliczeń numerycznych, dokonanych dla tej samej funkcji wzmocnienia za pomocą maszyny cyfrowej przedstawia linia $B'-C'$.

4. Utrata stateczności zachodząca w niektórych procesach tłoczenia blach

Wykres przedstawiony na rys. 6 może być wykorzystany do analizy procesu utraty stateczności blachy w dowolnym technologicznym procesie tłoczenia. W tym celu należy porównać przebieg linii $A'B'$, $B'C'$ i ewentualnie $D'B'$, przedstawiających moment powstawania niestateczności wszystkich trzech rozpatrywanych tu form, z charakterystyczną dla danego procesu technologicznego linią, której kolejne punkty reprezentują odpowiednie punkty odkształcanego ciała w przyjętym tu układzie współrzędnych: zastępcze odkształcenie φ_i — stosunek naprężeń σ_2/σ_1 .

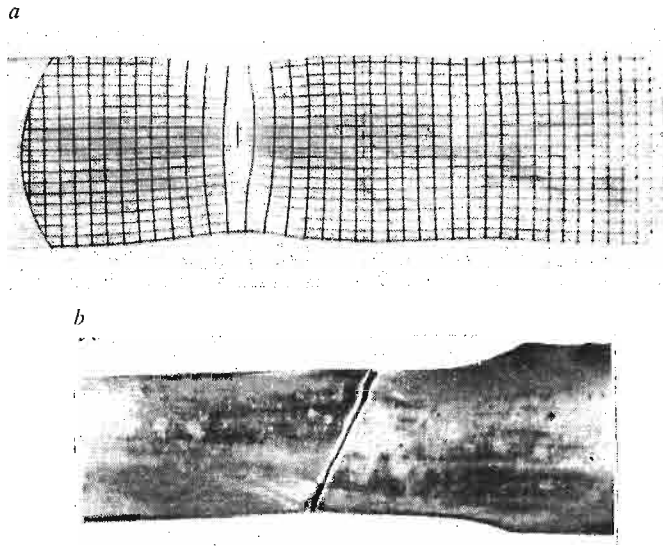
Wyjaśnimy to na najprostszym przykładzie jednoosiowego rozciągania płaskich próbek (rys. 7). W początkowym obszarze pełnej stateczności wszystkie punkty próbki znajdują się w jednorodnym stanie odkształcenia i naprężenia. Na wykresie we współrzędnych $\varphi_i - \sigma_2/\sigma_1$ są więc reprezentowane przez jeden punkt, który stopniowo w miarę wydłużania



Rys. 7

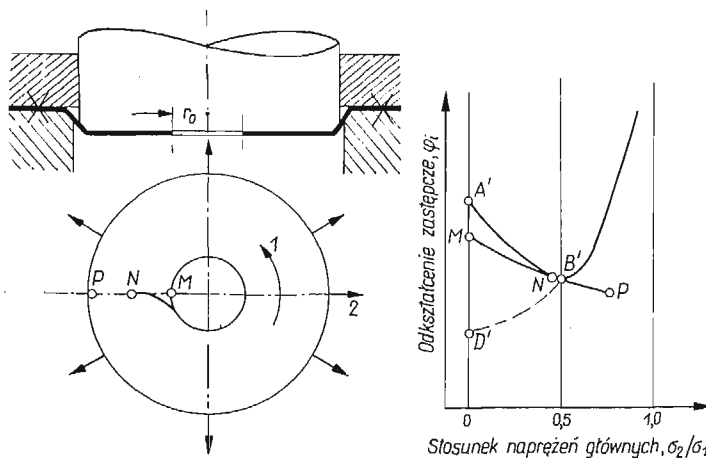
próbki przesuwa się ku górze wzdłuż odcinka CD' . Z chwilą osiągnięcia punktu D' rozciągana próbka traci stateczność wg formy I. Pojawia się lokalne przewężenie (szyjka), w zasięgu którego stany naprężenia i odkształcenia przestają być jednorodne. W punkcie N , leżącym na krawędzi próbki, stan naprężeń nie ulega zmianie, podczas gdy np. w punkcie M , leżącym na osi próbki, w środku powstałego przewężenia pojawiają się rozciągające naprężenia poprzeczne σ_2 . Stanowi temu odpowiada na wykresie (rys. 7) punkt M , leżący na prawo od punktu N i nieco od niego wyżej, gdyż zastępcze odkształcenie φ_i w osi próbki jest przy tym samym wydłużeniu osiowym φ_1 większe niż na jej brzegu ($\varphi_{iM} > \varphi_{iN}$). Pozostałym punktom leżącym na odcinku $M-N$ próbki odpowiada na wykresie krzywoliniowy odcinek $M-N$. Jak widać z tego wykresu w czasie procesu kształtowania szyjki pojawić się może w jej środku druga forma utraty stateczności, mianowicie bruzda typu II. Bruzda ta tworzy się najpierw w środkowej części szyjki pod stosunkowo niewielkim kątem α_M odpowiadającym istniejącemu w tym miejscu stanowi naprężeń ($\alpha_M < \alpha_B$), a następnie rozszerza się na boki zmieniając jednocześnie kąt nachylenia. Na brzegu próbki kąt ten osiąga wartość α_N odpowiadającą jednoosiowemu rozciąganiu. Ostatecznie następuje pęknięcie próbki wzdłuż tej bruzdy, przy czym uzyskana linia pęknięcia ma kształt zbliżony do litery S . Opisany tu przebieg utraty stateczności można zaobserwować na próbkach wykonanych z miękkich i plastycznych materiałów (rys. 8a). Jeżeli próbka wykonana jest z materiału twardego, wstępnie odkształconego np. przez walcowanie na zimno do wartości φ_i większej od rzędnej punktu A' , wtedy przy jej rozciąganiu istnieje potencjalna możliwość pojawienia się jednocześnie dwu form niestateczności: szyjki oraz bruzdy typu II. Należy jednak pamiętać, że pojawienie się bruzdy typu II, biegnącej pod kątem α_B do kierunku rozciągania, powoduje natychmiastowe odciążenie pozostałego obszaru próbki,

co pociąga za sobą zahamowanie ewentualnego procesu tworzenia się szyjki. W rezultacie otrzymamy pęknięcie próbki wzdłuż linii prostej nachylonej pod kątem α_B bez śladów szyjki, jak to ilustruje rys. 8b.



Rys. 8

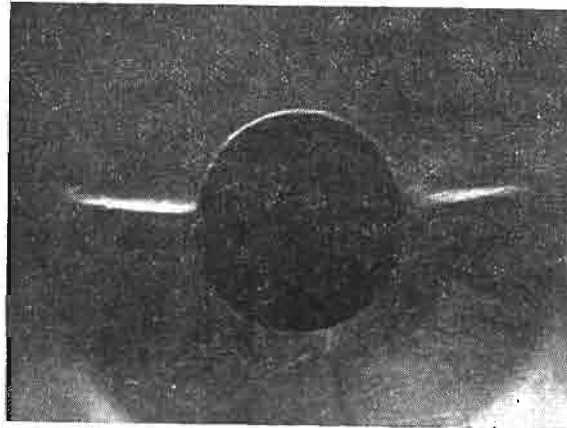
Następny przykład dotyczy procesu rozszerzania otworu przez rozciąganie pierścieni blachy o utwardzonym obrzeżu zewnętrznym (rys. 9), (próba tłoczności Siebla).



Rys. 9

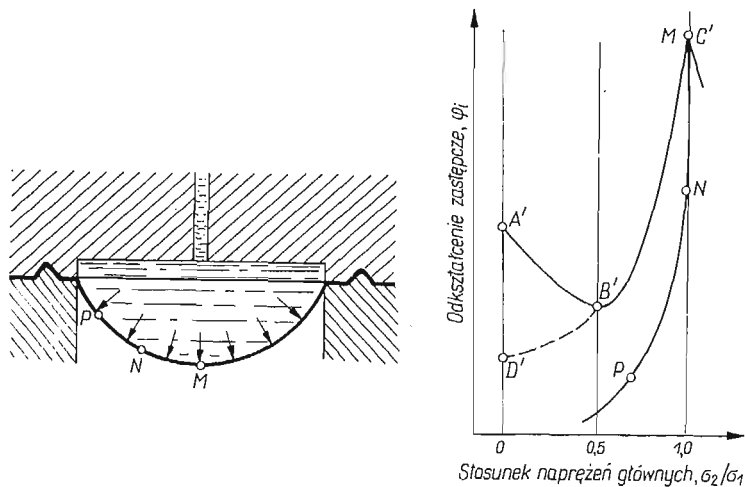
Istniejący w tym procesie rozkład naprężeń i odkształceń przedstawia na wykresie linia MNP . Dochodzi ona do granicznej linii $A'B'$, odpowiadającej niestateczności typu II, w punkcie N leżącym w pobliżu punktu B' , przy czym na wytłoczce miejsce to (punkt N) znajduje się w przybliżeniu dwukrotnie dalej od osi niż promień otworu ($r_N \approx 2r_0$). W tym

więc miejscu powłoki możemy się spodziewać powstania bruzdy typu II. Biec ona powinna w kierunku promieniowym, gdyż stan naprężeń w tym punkcie odpowiada schematowi $\sigma_2 = \sigma_1/2$, a największą wartość ma naprężenie obwodowe. Rysunek 10 przedstawia fotografię takiej bruzdy zaobserwowanej przy rozciąganiu blachy aluminiowej.



Rys. 10

Rysunek 11 przedstawia proces kształtowania wybrzuszenia o kształcie zbliżonym do czaszy kulistej za pomocą ciśnienia cieczy wywieranego na wewnętrzną powierzchnię blachy. Rozkład naprężeń i odkształceń dla tego procesu przedstawia linia $M-N-P$ osiągnająca graniczną linię $B'-C'$ w punkcie M . Oznacza to możliwość powstawania



Rys. 11

niestateczności typu III w najbardziej odkształconym miejscu wytłoczki leżącym na jej osi symetrii. Graniczna wartość odkształcenia, którego doznać może w tym miejscu blacha do chwili utraty stateczności jest, jak widać z wykresu, wyjątkowo duża, toteż ten sposób kształtowania blach należy uznać za wyjątkowo korzystny.

Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, O.U.P., 1950.
2. Z. MARCINIAK, *Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions*, AMS, 4, 17 (1965).
3. Z. MARCINIAK, *Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych*, Mech. Teoret. i Stos., 1966.

Резюме

О РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИСТА ПОДВЕРЖЕННОГО РАСТЯЖЕНИЮ В ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Потеря устойчивости листа подверженного растяжению в пластическом состоянии может иметь различные формы: появление шейки (например при растяжении образцов осевой силой), появление линии, вдоль которой происходит разрыв поля скоростей или появление борозды, углублению которой сопутствует постепенное исчезновение пластической деформации других областей. В работе содержится анализ условий, при которых могут осуществляться упомянутые виды потери устойчивости. Из этого анализа следует, что при отношении главных напряжений $\sigma_2/\sigma_1 \leq 0,5$ образуется неустойчивость типа кинематического разрыва, тогда как при $\sigma_2/\sigma_1 > 0,5$ потеря устойчивости имеет вид борозды перпендикулярной большему из главных напряжений. В работе исследована потеря устойчивости листа в ходе различных технологических процессов. Полученные теоретические результаты сравнены с экспериментальными данными.

Summary

ON VARIOUS FORMS OF INSTABILITY IN SHEET MATERIAL UNDERGOING PLASTIC TENSION

The loss of stability of sheet material undergoing plastic tension may take various forms: necking occurring for example in specimens loaded by uniaxial tension, a line of kinematical discontinuity or necking line connected with progressively diminishing plastic deformation in neighbouring portions of material. The present paper contains an analysis of conditions associated with each of these forms of instability. For principal stress ratio $\sigma_2/\sigma_1 \leq 0.5$ a line of kinematical discontinuity occurs, while for $\sigma_2/\sigma_1 > 0.5$ the deformation takes the form of a necking-line perpendicular to the direction of the greater principal stress. The course of stability loss is also considered for various processes of metal forming. Theoretical results are later compared with experimental observations.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 września 1966 r.

ROZWIĄZANIA OSOBLIWE W OGÓLNEJ TEORII PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

RYSZARD GANOWICZ (POZNAŃ)

1. Wstęp

W pracy niniejszej podane zostaną rozwiązania nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej kolejno siłą skupioną oraz momentem skupionym. Rozwiązania takie nazywać będziemy w dalszym ciągu pracy rozwiązaniami osobliwymi. Analogiczne rozwiązania znane są w teorii płyt cienkich [1, 2 i 3] oraz w teorii płyt Reissnera [4]. Zastosowanie ich jest bardzo szerokie. W zagadnieniach technicznych rozwiązania osobliwe są wykorzystywane przy budowaniu powierzchni wpływowych [5 i 6]. Znajdują one także zastosowanie przy rozpatrywaniu problemów nieciągłych warunków brzegowych teorii płyt. Poza tym w teorii sprężystości i w teorii płyt rozwiązania osobliwe są podstawą uzyskania związków całkowych między rozwiązaniami wewnątrz danego obszaru a wielkościami brzegowymi. Związki takie znane są w teorii sprężystości jako twierdzenie Somigliano. Otrzymuje się je w oparciu o rozwiązania osobliwe oraz w oparciu o twierdzenie o wzajemności. Podobne zresztą związki znane są w teorii funkcji harmonicznym [7]. Omówienie tych problemów dla płyt reissnerowskich i dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie podał autor w pracy [4].

W pracy niniejszej zajmiemy się ogólną teorią zginanych płyt trójwarstwowych podaną przez HOFFA [8]. W teorii tej przyjmuje się, że warstwy zewnętrzne tych płyt są jednakowe i spełniają wszystkie założenia teorii płyt cienkich. Natomiast odnośnie do warstwy środkowej zakłada się, że jest ona nieściśliwa i pracuje jedynie na naprężenia styczne τ_{xz} i τ_{yz} . Z podanych wyżej założeń wynika, że przy zginaniu odkształcenia płyty trójwarstwowej są antysymetryczne względem jej powierzchni środkowej.

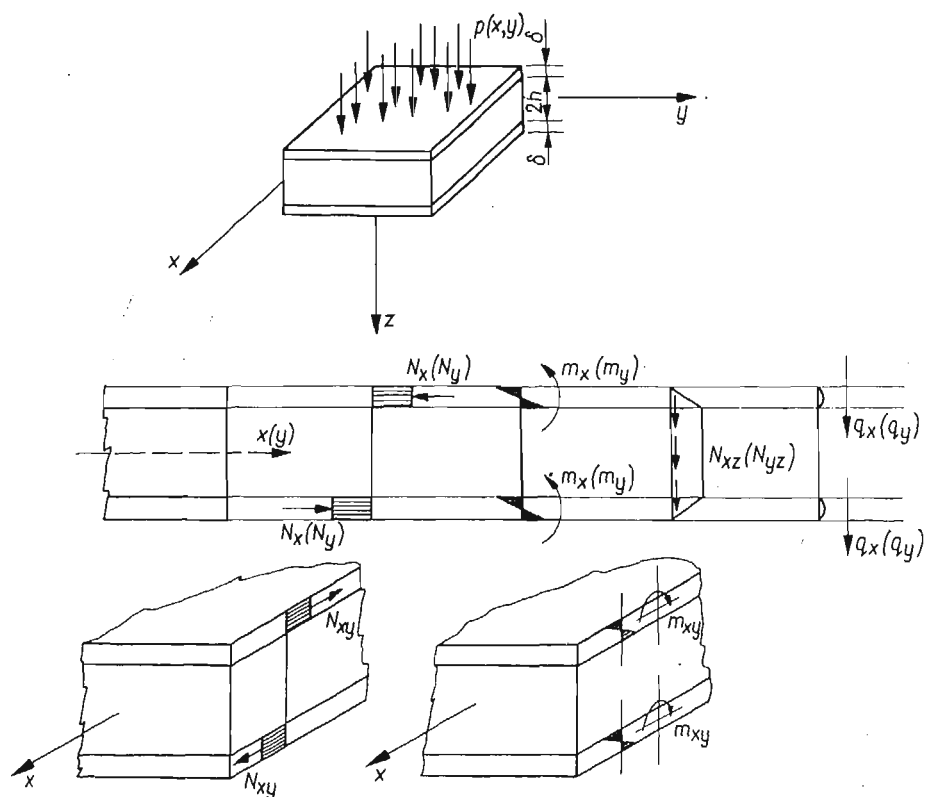
Rozwiązania otrzymane w niniejszej pracy są uogólnieniem wyników podanych przez autora dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie na ogólną teorię płyt trójwarstwowych [4 i 9].

2. Zasadnicze równania

Poniżej podamy związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami płyty trójwarstwowej oraz równania równowagi wyrażone przez przemieszczenia. Zależności te podamy w oparciu o pracę J. WACHOWIAKA i P. WILDEGO [10].

Siły wewnętrzne dla omawianych płyt podamy za wyżej wymienionymi autorami rozkładając je na siły tarczowe i na siły płytowe w warstwach zewnętrznych oraz na siły tnące w wypełnieniu.

Siły wewnętrzne określimy przez przemieszczenia następująco: (rys. 1)



Rys. 1

siły tarczowe

$$(2.1.1) \quad N_x = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$N_{xy} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

siły płytowe

$$(2.1.2) \quad m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w;$$

siły tnące w wypełnieniu

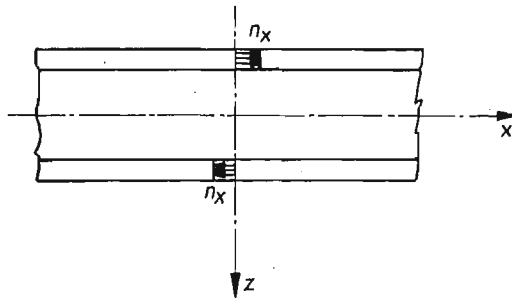
$$(2.1.3) \quad N_{xz} = G_w(2h+\delta) \left(\frac{u}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$N_{yz} = G_w(2h+\delta) \left(\frac{v}{h} + \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 E, \nu & \text{ stałe materiałowe warstw zewnętrznych,} \\
 G_w = G_{xz} = G_{yz} & \text{ moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej,} \\
 D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} & \text{ sztywność na zginanie warstw zewnętrznych,} \\
 w & \text{ ugięcie płyty, jednakowe dla wszystkich warstw,} \\
 u, v & \text{ przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej (równe co do bezwzględnej} \\
 & \text{ wartości przemieszczeniom w płaszczyźnie środkowej warstwy górnej, lecz przeciwnie} \\
 & \text{ do nich skierowane).}
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pracy zajmiemy się płytami trójwarstwowymi poddanymi działaniu obciążenia normalnego $p(x, y)$ oraz obciążonymi siłami $n_x(x, y)$, $n_y(x, y)$ w warstwach zewnętrznych (rys. 2). Założymy, że te ostatnie są równomiernie rozłożone na grubości



Rys. 2

warstw zewnętrznych i są przeciwnie skierowane w obu tych warstwach. Działanie tych sił odpowiada więc działaniu na całą płytę momentów zginających, rozłożonych w obszarze płyty.

Postępując podobnie jak w wyżej wymienionej pracy [10] otrzymamy następujący układ równań dla płyty poddanej działaniu obciążenia $p(x, y)$, $n_x(x, y)$ i $n_y(x, y)$:

(2.2)

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{D(1-\nu^2)}{E\delta} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{G_w(2h+\delta)^2(1-\nu^2)}{4E\delta h} \nabla^2 \right] w - \frac{G_w(2h+\delta)(1-\nu^2)}{2E\delta h} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1-\nu^2}{2E\delta} p, \\
 & - \frac{G_w(2h+\delta)(1-\nu^2)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{G_w(1-\nu^2)}{E\delta h} \right] u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1-\nu^2}{E\delta} n_x, \\
 & - \frac{G_w(2h+\delta)(1-\nu^2)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{G_w(1-\nu^2)}{E\delta h} \right] v = \frac{1-\nu^2}{E\delta} n_y.
 \end{aligned}$$

Powyższy układ trzech równań różniczkowych można sprowadzić do równań na trzy funkcje przemieszczeń [10 i 11]:

$$(2.3) \quad \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] \left[1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right] \nabla^2 \nabla^2 F_i = \frac{q_i}{D_z}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$q_1 = p(x, y), \quad q_2 = 2n_x(x, y), \quad q_3 = 2n_y(x, y),$$

$$D_z = \frac{E\delta(2h+\delta)^2}{2(1-\nu^2)} + 2D \quad \text{oznacza sztywność całkowitą płyty trójwarstwowej,}$$

$$\kappa = \frac{E\delta h}{G_w(1-\nu^2)} \quad \text{współczynnik podatności wypełnienia.}$$

Natomiast przemieszczenia wyznaczyć można ze związków

$$(2.4) \quad \begin{aligned} w &= (1-\kappa\nabla^2) \left[1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_1 - \frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_2 - \\ &\quad - \frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_3, \\ u &= -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_1 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \left\{ \nabla^2 \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[1 + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] \right\} F_2 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] F_3 - \frac{Dh}{G_w} \nabla^2 \nabla^2 \left[1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F_2 - \\ &\quad - \frac{Dh}{G_w} \frac{1+\nu}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 F_3, \\ v &= -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] F_1 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] F_2 + \frac{(2h+\delta)^2}{4} \left\{ \nabla^2 \left[1 - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)\nabla^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\kappa(1+\nu)\nabla^2 \right] \right\} F_3 - \frac{Dh}{G_w} \frac{1+\nu}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 F_2 - \\ &\quad - \frac{Dh}{G_w} \nabla^2 \nabla^2 \left[1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\kappa(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] F_3. \end{aligned}$$

Łatwo zauważymy, że jeżeli przyjmiemy, iż warstwy zewnętrzne płyty trójwarstwowej nie mają sztywności na zginanie ($D = 0$), to zależności powyższe uproszczą się do zależności podanych przez autora w poprzednio cytowanej pracy [4].

Nadmienimy ponadto, że przypadek układu równań jednorodnych (2.3) został przedyskutowany w poprzednio cytowanej pracy [10].

3. Obciążenie siłą skupioną

Zajmiemy się nieograniczoną płytą trójwarstwową obciążoną siłą skupioną prostopadle do powierzchni środkowej. Obciążenie dla tego przypadku przedstawimy następująco: $p(x, y) = P\delta(x)\delta(y)$, $n_x(x, y) = n_y(x, y) = 0$.

Wobec tego, że mamy do czynienia z płytą nieograniczoną, interesować nas będzie całka szczególna układu równań (2.3). Przyjmiemy więc $F_2 = F_3 = 0$. Układ równań (2.3) i zależności (2.4) uproszcza się w tym przypadku do postaci:

$$(3.1) \quad D_z \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] \left[1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right] \nabla^2 \nabla^2 F_1 = P \delta(x) \delta(y),$$

$$w = (1 - \kappa \nabla^2) \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] F_1, \quad u = -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] F_1,$$

$$v = -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] F_1.$$

Łatwo zauważyć, że w związkach powyższych można wyłączyć operator [10]

$$\left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1-\nu) \nabla^2 \right] F_1 = U.$$

Ostatecznie otrzymamy więc następujące równanie

$$(3.2) \quad D_z \left(1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 U = P \delta(x) \delta(y).$$

oraz związki między przemieszczeniami w , u , v a funkcją przemieszczeń U

$$(3.3) \quad w = (1 - \kappa \nabla^2) U, \quad u = -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = -\frac{2h+\delta}{2} \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Przejdziemy teraz do rozwiązania naszego problemu. Wykonajmy na równaniu (3.2) nieskończoną podwójną transformację Fouriera [12]:

$$(3.4) \quad N^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi, \zeta) e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\xi d\zeta,$$

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta.$$

Biorąc pod uwagę, że $p^*(\alpha, \beta) = P/2\pi$, otrzymamy następujące wyrażenie na transformatę funkcji przemieszczeń:

$$(3.5) \quad U^*(\alpha, \beta) = \frac{P}{2\pi D_z} \frac{1}{\left[1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2) \right] (\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Po wykorzystaniu zależności (3.4) funkcję przemieszczeń $U(x, y)$ przedstawimy w postaci całkowej:

$$(3.6) \quad U(x, y) = \frac{P}{4\pi^2 D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{\left[1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2) \right] (\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta.$$

Aby przedstawić rozwiązanie $U(x, y)$ (3.6) w postaci wyraźnej, będziemy musieli obliczyć całkę występującą po prawej stronie powyższego wyrażenia. Przekształćmy tę całkę następująco:

$$(3.7) \quad U(x, y) = \frac{P}{4\pi^2 D_z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta - \kappa \frac{2D}{D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta + \right. \\ \left. + \frac{4D^2 \kappa^2}{D_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta \right].$$

Dwie pierwsze całki, występujące po prawej stronie wyrażenia (3.7), nie istnieją jako całki niewłaściwe, nie można też wydzielić z nich wartości głównej według Cauchy'ego. Należy je rozumieć w sensie części skończonej [13, 14 i 4].

Wydzieleniem części skończonej całek rozbieżnych tego samego typu zajmował się autor w cytowanej poprzednio pracy [4]. Ażeby nie rozszerzać niniejszego opracowania, podamy poniżej jedynie końcowe wyniki tych obliczeń.

$$(3.8) \quad \text{p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta = \pi \frac{x^2 + y^2}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{p.f.} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta = -2\pi \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ostatnią całkę występującą po prawej stronie wyrażenia (3.7) łatwo obliczymy jako całkę niewłaściwą:

$$R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\beta.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że [15]

$$(3.9) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta y}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\beta = \frac{D_z}{4\kappa D} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2}} \exp \left[-y \sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2} \right], \quad y > 0,$$

to otrzymamy

$$(3.10) \quad R_1 = \frac{D_z}{2\kappa D} \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} \exp \left[-y \sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2} \right]}{\sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2}} d\alpha = \\ = \frac{\pi D_z}{\kappa D} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \exp \left[-y \sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2} \right]}{\sqrt{\frac{D_z}{2\kappa D} + \alpha^2}} d\alpha = \frac{\pi D_z}{\kappa D} K_0 \left(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

gdzie $K_0(z)$ oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju, $\gamma_1 = \sqrt{D_z/2\kappa D}$.

Wstawiając zależności (3.8) i (3.10) do związku (3.7) oraz wprowadzając jednostkę długości r_0 otrzymamy poszukiwane rozwiązanie osobliwe funkcji przemieszczeń $U(x, y)$

$$(3.11) \quad U(x, y) = \frac{P}{8\pi D_z} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{2}{\gamma_1^2} \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{4}{\gamma_1^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right].$$

Reszta zadania jest już bardzo prosta. Znajdziemy teraz rozwiązania osobliwe przemieszczeń. Otrzymamy je wykorzystując rozwiązanie osobliwe $U(x, y)$ (3.11) oraz zależności (3.3)

$$(3.12) \quad \begin{aligned} w &= \frac{P}{16\pi D_z} (x^2 + y^2) \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} - \frac{P\nu}{4\pi D_z} \left[\ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + 2 \right] + \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{P}{2\pi D_z} \times \\ &\quad \times \left[\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0} + (1 - \gamma_1^2 \nu) K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\ u &= -\frac{P(2h + \delta)}{16\pi D_z} \left[x \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + x \right] - \frac{P(2h + \delta)}{4\pi D_z \gamma_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\ v &= -\frac{P(2h + \delta)}{16\pi D_z} \left[y \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + y \right] - \frac{P(2h + \delta)}{4\pi D_z \gamma_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli w zależnościach powyższych przyjmiemy $D = 0$, $2h/2h + \delta = 1$, to otrzymamy podane przez autora we wcześniejszej pracy [9] rozwiązania osobliwe dla płyty trójwarstwowej o warstwach zewnętrznych pracujących jedynie na siły tarczowe.

Podamy jeszcze rozwiązania dla sił wewnętrznych w omawianym przypadku nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej siłą skupioną. Po wykorzystaniu rozwiązania dla funkcji przemieszczeń $U(x, y)$ (3.11) oraz zależności (3.3) i (2.1) otrzymamy przykładowo

$$\begin{aligned} N_x &= -\frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{2h + \delta}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = -\frac{P}{8\pi(2h + \delta)} \frac{D_t}{D_z} \left[\ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \cos^2 \varphi + 1 + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \sin^2 \varphi + 1 \right) \right] - \frac{P}{2\pi(2h + \delta)} \frac{D_t}{D_z} \left\{ (\cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) K_0(\gamma_1 r) - \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \cos 2\varphi \left[\frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) \right] \right\}, \\ N_{xy} &= -\frac{E\delta}{2(1 + \nu)} (2h + \delta) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{P}{8\pi(2h + \delta)} (1 - \nu) \frac{D_t}{D_z} \sin 2\varphi + \\ &\quad + \frac{P}{2\pi(2h + \delta)} (1 - \nu) \frac{D_t}{D_z} \sin 2\varphi \left[\frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_1 r) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_x &= -D \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 U \right] = \\
 (3.13) \quad &= -\frac{P}{8\pi} \frac{D}{D_z} \left[\ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \cos^2 \varphi + 1 + \nu \left(\ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \sin^2 \varphi + 1 \right) \right] + \\
 &+ \frac{P}{4\pi} \frac{D_t}{D_z} \left\{ (\cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) K_0(\gamma_1 r) - (1 - \nu) \cos 2\varphi \left[\frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{xy} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - \kappa \nabla^2) U = \\
 &= -\frac{P}{8\pi} (1 - \nu) \frac{D}{D_z} \sin 2\varphi - \frac{P}{4\pi} (1 - \nu) \frac{D_t}{D_z} \sin 2\varphi \left[\frac{1}{\gamma_1^2 r^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_1 r} K_1(\gamma_1 r) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_1 r) \right],
 \end{aligned}$$

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 (1 - \kappa \nabla^2) U = -\frac{P}{2\pi} \frac{D}{D_z} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{P}{4\pi} \frac{D_t}{D_z} \gamma_1 \cos \varphi K_1(\gamma_1 r),$$

$$N_{xz} = -D_t \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 U = -\frac{P}{2\pi} \frac{D_t}{D_z} \frac{\cos \varphi}{r} + \frac{P}{2\pi} \frac{D_t}{D_z} \gamma_1 \cos \varphi K_1(\gamma_1 r),$$

gdzie oznaczono $r^2 = x^2 + y^2$, $\sin \varphi = y/r$, $\cos \varphi = x/r$

$$D_t = \frac{E \delta (2h + \delta)^2}{2(1 - \nu^2)}.$$

Powyższe siły wewnętrzne nie mogą być porównywalne z odpowiednimi siłami wewnętrznymi znanymi w teorii płyt cienkich, ponieważ dotyczą one poszczególnych warstw. Porównywalne natomiast będą całkowite siły wewnętrzne, to znaczy siły wypadkowe dla całej płyty (rys. 3). Otrzymamy je z zależności

$$Q_x = N_{xz} + 2q_x = -\frac{P}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r},$$

$$(3.14) \quad M_x = N_x(2h + \delta) + 2m_x = -\frac{P}{8\pi} \left[\ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \cos^2 \varphi + 1 + \nu \left(\ln \frac{r^2}{r_0^2} + 2 \sin^2 \varphi + 1 \right) \right],$$

$$M_{xy} = N_{xy}(2h + \delta) + 2m_{xy} = -\frac{P}{8\pi} (1 - \nu) \sin 2\varphi.$$

Jeżeli porównamy teraz otrzymane powyżej rozwiązania osobliwe wypadkowych sił wewnętrznych ze znanymi rozwiązaniami osobliwymi izotropowych płyt cienkich, to zauważymy, że są one identyczne. Zauważmy także, że powyższe wielkości (3.14) nie zależą od sztywności na zginanie warstw zewnętrznych D . Wobec tego przedstawiają one także rozwiązania osobliwe płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie (por. [9]).

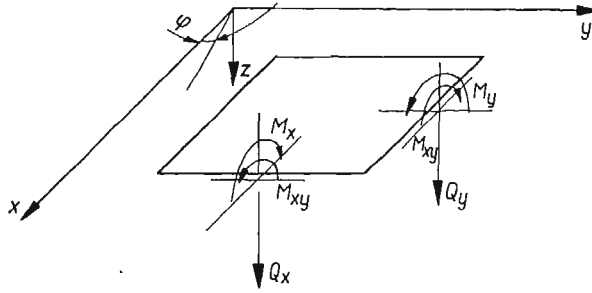
Nadmienimy, że rozwiązanie osobliwe siły poprzecznej Q_x (3.14) łatwo otrzymać z warunku równowagi sił pionowych dla płyty kołowej wyciętej z płyty nieograniczonej

w ten sposób, że punkt przyłożenia siły skupionej pokryje się ze środkiem płyty kołowej. Wykorzystując kołową symetrię otrzymamy

$$(3.15) \quad Q_r = -\frac{P}{2\pi r},$$

a stąd

$$(3.16) \quad Q_x = -\frac{P}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad Q_y = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r}.$$



Rys. 3

Natomiast jeżeli chodzi o identyczność pozostałych wypadkowych wielkości statycznych (3.14) z odpowiednimi wielkościami znanymi w teorii płyt cienkich, to wynik ten, zdaniem autora, jest interesujący.

Oczywiście dla analizy stanu naprężenia płyty potrzebna jest znajomość sił wewnętrznych dotyczących poszczególnych warstw (3.13). Rozwiązania osobliwe sił wewnętrznych dotyczących poszczególnych warstw zawierają natomiast człony osobliwe, które w sposób istotny różnią je od znanych rozwiązań osobliwych teorii płyt cienkich.

Na zakończenie niniejszego rozdziału zanalizujemy jeszcze zachowanie się otrzymanych przez nas rozwiązań osobliwych ugięcia w (3.12), siły poprzecznej w warstwach zewnętrznych q_x oraz siły tnącej w wypełnieniu N_{xz} (3.13) przy $r \rightarrow 0$.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę to, że dla dostatecznie małej wartości argumentu obowiązują następujące wzory asymptotyczne:

$$(3.17) \quad K_0(\gamma_1 r) \approx -\ln \gamma_1 r, \quad K_1(\gamma_1 r) \approx \frac{1}{\gamma_1 r},$$

to dla $r \rightarrow 0$ otrzymamy

$$(3.18) \quad w \approx \frac{P}{2\pi D_z} \kappa \left[\left(1 - \frac{2D}{D_z} \right) \ln \gamma_1 r_0 - 1 \right],$$

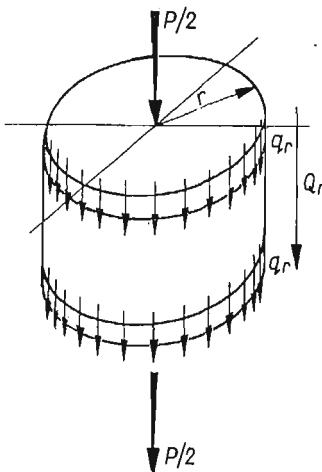
$$q_x \approx -\frac{P}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad q_y \approx -\frac{P}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad q_r \approx -\frac{P}{4\pi} \frac{1}{r},$$

$$N_{xz} \approx 0, \quad N_{yz} \approx 0.$$

Okazuje się więc, że ugięcie w punkcie przyłożenia siły skupionej, podobnie jak w teorii płyt cienkich, jest skończone. Poza tym łatwo zauważymy (3.18), że dla $r \rightarrow 0$ siła skupiona P jest zrównoważona tylko przez siły poprzeczne w warstwach zewnętrznych (rys. 4)

$$(3.19) \quad 2q_x \approx Q_x, \quad 2q_r \approx Q_r = -\frac{P}{2\pi r}.$$

Oznacza to, że siła skupiona obciąża w pierwszym rzędzie warstwy zewnętrzne, a dopiero następnie jest przekazywana na całą płytę. Wnioski powyższe są oczywiste z fizycznego punktu widzenia i potwierdzają prawidłowość rozwiązań otrzymanych w niniejszej pracy.



Rys. 4

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że ze względu na założoną względem płaszczyzny środkowej antysymetrię odkształceń płyty, obciążenie siłą skupioną P należy rozumieć jako obciążenie dwiema siłami skupionymi $1/2 P$, przyłożonymi na górnej i dolnej powierzchni płyty równocześnie (rys. 4).

4. Obciążenie momentem skupionym

Pierwszą trudnością, jaką napotykamy przy rozwiązaniu tego problemu, jest definicja pojęcia momentu skupionego w teorii płyt trójwarstwowych. Zagadnienie to omawiał autor w poprzedniej pracy dotyczącej płyt trójwarstwowych [4]. Przypomnijmy tu tylko to, że jednym ze sposobów zdefiniowania momentu skupionego jest przyjęcie, że obciążenie to odpowiada granicy obciążenia dwiema siłami skupionymi przeciwnie skierowanymi, gdy odległość ich zmierza do zera: $M = \lim_{e \rightarrow 0} Pe$.

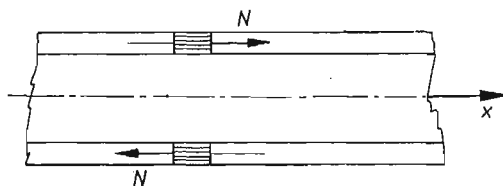
Jak wiadomo, rozwiązanie dla takiego obciążenia otrzymuje się przez różniczkowanie rozwiązania otrzymanego dla obciążenia siłą skupioną. Wobec tego nie wnosi ono zasadniczych nowości do rozwiązania podanego w punkcie 3 niniejszej pracy.

Ciekawsze natomiast jest obciążenie momentem skupionym zdefiniowanym jako para sił poziomych przyłożonych w warstwach zewnętrznych płyty trójwarstwowej (rys. 5). Rozwiązanie płyty obciążonej tak zdefiniowanym momentem jest bardziej złożone od poprzednio omówionego i może być podstawą uzyskania związków całkowych między przemieszczeniami u, v wewnątrz danego obszaru a wielkościami brzegowymi [4].

Poniżej zajmiemy się nieograniczoną płytą poddaną działaniu momentu skupionego zdefiniowanego jako para sił przyłożonych w warstwach skrajnych. Założymy, że siły

te są równomiernie rozłożone na grubości warstw zewnętrznych. Obciążenie tego typu omówione zostało w punkcie 2 niniejszej pracy i uwidocznione jest w postaci obciążeń n_x i n_y w równaniach (2.2) i (2.3).

Przyjmijmy do rozwiązania obciążenie momentem skupionym $M_x = n_x(2h + \delta) = N\delta(x)\delta(y)$ ($2h + \delta$).



Rys. 5

Podobnie jak przy rozwiązywaniu płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną interesować nas będzie całka szczególna układu równań (2.3) przy $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = 2N\delta(x)\delta(y)$. Przyjmijmy więc $F_1 = F_3 = 0$, a na funkcję przemieszczeń F_2 otrzymamy równanie różniczkowe

$$(4.1) \quad D_z \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] \left[1 - \kappa \frac{2D}{D_z} \nabla^2 \right] \nabla^2 \nabla^2 F_2 = 2N \delta(x) \delta(y).$$

Natomiast przemieszczenia u , v , w można będzie wyznaczyć z zależności (2.4)

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{2h + \delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] F_2, \\ u &= \frac{(2h + \delta)^2}{4} \left\{ \nabla^2 \left[1 - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \nabla^2 \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[1 + \frac{1}{2} \kappa (1 + \nu) \nabla^2 \right] \right\} F_2 - \\ &\quad - \frac{Dh}{G_w} \nabla^2 \nabla^2 \left[1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F_2, \\ v &= \frac{(2h + \delta)^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[1 + \frac{1}{2} \kappa (1 + \nu) \nabla^2 \right] F_2 - \frac{Dh}{G_w} \frac{1 + \nu}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \nabla^2 F_2. \end{aligned}$$

Wykonamy teraz podwójną nieskończoną transformację Fouriera (3.4) równania (4.1), a po wykonaniu retransformacji otrzymamy poszukiwaną funkcję F_2 w postaci

$$(4.3) \quad F_2(x, y) = \frac{N}{2\pi^2 D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 \left[1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \left[1 + \frac{1}{2} \kappa (1 - \nu) (\alpha^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta.$$

Całkę występującą po prawej stronie powyższego wyrażenia łatwo przekształcimy następująco:

$$(4.4) \quad F_2(x, y) = \frac{N}{2\pi^2 D_z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta - \frac{N \kappa}{2\pi^2 D_z} \left[\frac{2D}{D_z} + \frac{1}{2} (1 - \nu) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta + \frac{N\kappa^2}{2\pi^2 D_z} \left(\frac{2D}{D_z}\right)^3 \frac{1}{\frac{2D}{D_z} - \frac{1}{2}(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{1 + \kappa \frac{2D}{D_z} (\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta - \\ & - \frac{N\kappa^2}{2\pi^2 D_z} \left(\frac{1-\nu}{2}\right)^3 \frac{1}{\frac{2D}{D_z} - \frac{1}{2}(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{1 + \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Trzy pierwsze całki występujące w tym wyrażeniu omówiliśmy w rozdziale 3 niniejszej pracy. Natomiast czwartą całkę wyrażenia (4.4) obliczymy łatwo postępując podobnie jak przy obliczaniu całki (3.9). Otrzymamy dla niej wyrażenie

$$(4.5) \quad R_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{1 + \frac{1}{2}\kappa(1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta = \frac{4\pi}{\kappa(1-\nu)} K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2 + y^2}),$$

gdzie $\gamma_2 = \sqrt{2/\kappa(1-\nu)}$.

Wykorzystując zależności (3.8), (3.9), (3.10), (4.4), (4.5) oraz wprowadzając jednostkę długości r_0 otrzymamy szukane rozwiązanie osobliwe dla funkcji przemieszczeń $F_2(x, y)$

$$(4.6) \quad F_2(x, y) = \frac{N}{2\pi D_z} \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0} + 2 \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \left[\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2 + y^2}) \right] \right\}.$$

Rozwiązania osobliwe przemieszczeń u, v, w otrzymamy wykonując na funkcji powyższej działania przepisane zależnościami (4.2)

$$(4.7) \quad \begin{aligned} w &= -\frac{N(2h+\delta)}{4\pi D_z} \left\{ \frac{x}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{\gamma_1^2} \left[\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2\gamma_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} K_1(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right] \right\}, \\ u &= \frac{N(2h+\delta)^2}{8\pi D_z} \left\{ \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} + 2\kappa \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2 + y^2}) \right] + \frac{2}{\gamma_1^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{2\gamma_2^2 \kappa}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right\} - \frac{N(1-\nu^2)}{2\pi E \delta} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \left(1 - \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times \\ & \quad \times [K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) - K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2 + y^2})], \\ v &= \frac{N(2h+\delta)^2}{8\pi D_z} \left\{ \frac{xy}{x^2 + y^2} + \kappa \left[1 + \nu - (1-\nu) \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - 2\kappa \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \times \right. \\ & \quad \times \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_1^2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \left(1 + \frac{1+\nu}{4} \frac{D_z}{D} \right) \times \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) \right] \right\} - \frac{N(1-\nu^2)}{4\pi E \delta} (1+\nu) \kappa \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \times \\ & \quad \times [K_0(\gamma_1 \sqrt{x^2 + y^2}) - K_0(\gamma_2 \sqrt{x^2 + y^2})], \end{aligned}$$

gdzie $K_\nu(z)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju.

Jeżeli w wyrażeniach powyższych wykonamy przejście graniczne $D \rightarrow 0$, to otrzymamy przemieszczenia osobiwe dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie (por. [4]).

Przejdziemy teraz do wyznaczenia poszczególnych sił wewnętrznych dla nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej momentem skupionym.

Wykorzystując zależności (2.1) i (4.7) otrzymamy następujące wyrażenia dla sił płytowych w warstwach zewnętrznych:

$$\begin{aligned}
 q_x &= -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \frac{D}{D_z} \left[\frac{\cos 2\varphi}{r^2} - \gamma_1 \frac{\cos 2\varphi}{r} K_1(\gamma_1 r) - \gamma_1^2 \cos^2 \varphi K_0(\gamma_1 r) \right], \\
 q_y &= -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \frac{D}{D_z} \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \left[1 - \gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r) \right], \\
 m_x &= \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{D}{D_z} \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r} [1 + \nu + 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] + \frac{2}{\gamma_1^2} (1-\nu) \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r)] - 2\gamma_1 (\cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) K_1(\gamma_1 r) \right\}, \\
 (4.8) \quad m_y &= \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{D}{D_z} \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r} [1 + \nu - 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] - \frac{2}{\gamma_1^2} (1-\nu) \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2\gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r)] - 2\gamma_1 (\sin^2 \varphi + \nu \cos^2 \varphi) K_1(\gamma_1 r) \right\}, \\
 m_{xy} &= -\frac{N(2h+\delta)}{4\pi} (1-\nu) \frac{D}{D_z} \sin \varphi \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{r} + \frac{2}{\gamma_1^2} \frac{\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_1 r K_1(\gamma_1 r) - \right. \\
 &\quad \left. - \gamma_1^2 r^2 K_0(\gamma_1 r)] + 2\gamma_1 \cos^2 \varphi K_1(\gamma_1 r) \right\}.
 \end{aligned}$$

Podamy jeszcze wzory dla sił wewnętrznych wypadkowych dla całego przekroju

$$\begin{aligned}
 Q_x &= N_{xz} + 2q_x = -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma_2 r K_1(\gamma_2 r)] + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi K_0(\gamma_2 r) \right\}, \\
 Q_y &= N_{yz} + 2q_y = -\frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma_2 r K_1(\gamma_2 r)] - \frac{1}{2} \gamma_2^2 \sin 2\varphi K_0(\gamma_2 r) \right\}, \\
 M_x &= N_x(2h+\delta) + 2m_x = \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r} [1 + \nu + 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] + \frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \nu (1 - \\
 &\quad - \nu) \cos \varphi \left\{ \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_2 r K_1(\gamma_2 r) - \gamma_2^2 r^2 K_0(\gamma_2 r)] + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi K_1(\gamma_2 r) \right\}, \\
 M_y &= N_y(2h+\delta) + 2m_y = \frac{N(2h+\delta)}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r} [1 + \nu - 2(1-\nu) \sin^2 \varphi] - \frac{N(2h+\delta)}{2\pi} \nu (1 - \\
 &\quad - \nu) \cos \varphi \left\{ \frac{\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_2 r K_1(\gamma_2 r) - \gamma_2^2 r^2 K_0(\gamma_2 r)] + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi K_1(\gamma_2 r) \right\},
 \end{aligned}$$

$$M_{xy} = N_{xy}(2h + \delta) + 2m_{xy} = -\frac{N(2h + \delta)}{4\pi} (1 - \nu) \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{r} - \frac{N(2h + \delta)}{2\pi} \nu (1 - \nu) \sin \varphi \left\{ \frac{\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi}{r^3} [2 - 2\gamma_2 r K_1(\gamma_2 r) - \gamma_2^2 r^2 K_0(\gamma_2 r)] + \frac{1}{2} \gamma_2^3 \cos 2\varphi K_1(\gamma_2 r) \right\}.$$

Pozostałe wielkości statyczne, to znaczy siły tarczowe N_x , N_y , N_{xy} oraz siły tnące w wypełnieniu N_{xz} i N_{yz} , łatwo można otrzymać z podanych wyżej zależności (4.8) i (4.9) odejmując od siebie odpowiednie wyrażenia. Na przykład

$$N_{xz} = Q_x - 2q_x, \quad N_x = \frac{1}{2h + \delta} (M_x - 2m_x) \dots \text{itd.}$$

Zauważmy, że podobnie jak dla przypadku obciążenia siłą skupioną siły wewnętrzne wypadkowe dla całego przekroju płyty nie zależą od sztywności na zginanie warstw zewnętrznych D . Wobec powyższego są one identyczne z rozwiązaniami dla płyt trójwarstwowych o warstwach zewnętrznych bez sztywności na zginanie. Rozwiązania dla takich płyt podał autor w poprzednio cytowanej pracy [4]. Łatwo sprawdzić, że są one identyczne z otrzymanymi w pracy niniejszej.

Literatura cytowana w tekście

1. A. PUCHER, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing. Archiv., **12** (1941).
2. J. MOSSAKOWSKI, *Osobliwe rozwiązania w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. Stos., **3**, 6 (1954).
3. J. MOSSAKOWSKI, *Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., **1**, 7 (1955).
4. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mechanika Teoret. i Stos., **3**, 5 (1966).
5. A. PUCHER, *Einflussfelder elastischer Platten*, Springer Verlag, Wien 1951.
6. M. SUCHAR, *Computation by means of polynomials of influence surfaces for anisotropic plates with finite dimensions*, Arch. Mech. Stos., **5**, 10 (1958).
7. S. BERGMANN, M. SCHIFFER, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, Acad. Press, New York 1953.
8. N. J. HOFF, *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, NACA T. N., No. 2225, Nov. 1950.
9. R. GANOWICZ, *O pewnym rozwiązaniu płyty trójwarstwowej*, Rozpr. Inżyn., **3**, 14 (1966).
10. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte, prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Ładow., **1**, 12 (1966).
11. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, 1957.
12. I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*, Mc Graw-Hill, 1951.
13. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, 1923.
14. H. ZORSKI, *Plates with Discontinuous Supports*, Arch. Mech. Stos., **10** (1958).
15. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*, Москва 1963.

Резюме

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Темой работы является исследование изотропных трехслойных пластин. Рассуждения основаны на теории предложенной Н. Дж. Хоффом, [8].

Даются решения задач о нагружении сосредоточенной силой неограниченной трехслойной пластины, а также о нагружении такой пластины сосредоточенным моментом возникающим от действия пары горизонтальных сил приложенных во внешних слоях.

Все решения получены в замкнутом виде. Они сравниваются с особыми решениями теории тонких пластин, а также с решениями теории трехслойных пластин, в которых внешние слои не обладают изгибной жесткостью.

S u m m a r y

SINGULAR SOLUTIONS IN THE GENERAL THEORY OF THREE-LAYER PLATES

Isotropic three-layer plates are considered in the paper, the solution being based upon the theory given by N. J. Hoff [8].

The solution of an infinite three-layer plate is derived in the case when the load consists of a concentrated force and a concentrated couple formed by horizontal forces acting in the outer layers. All results are given in a closed form.

The results given in the paper have been compared with the singular solutions of the theory of thin plates and the theory of three-layer plates in which the outer layers exhibit no bending rigidity.

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 września 1966 r.

DOŚWIADCZALNA WERYFIKACJA NIESTACJONARNYCH PROCESÓW PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

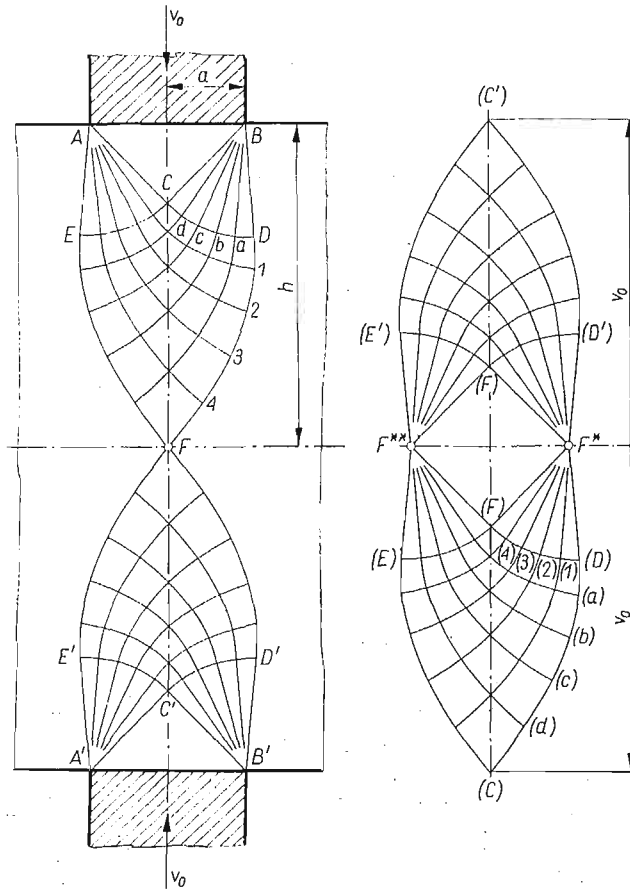
Teoria plastycznego płynięcia ośrodka sztywno-plastycznego bez wzmocnienia pozwala rozwiązywać wiele ważnych zagadnień dotyczących dużych odkształceń plastycznych zachodzących w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Szczególnie stosowanie wykreślnej metody budowy hodografu i siatki linii poślizgu tak znacznie skróciło czas rozwiązywania, że obecnie można już za ich pomocą przeprowadzać analizę przebiegu procesów spotykanych w praktyce. Jednakże własności rzeczywistych metali tak znacznie odbiegają od modelu ciała sztywno-plastycznego bez wzmocnienia, jaki przyjmuje się w teorii płaskiego stanu odkształcenia, że przenoszenie rozwiązań teoretycznych, uzyskanych dla takiego wyidealizowanego ośrodka, na rzeczywiste procesy musi budzić wątpliwości. Wątpliwości te mogą być wyjaśnione tylko na drodze doświadczalnej. Liczba prac eksperymentalnych jest jednak ciągle niedostateczna. Wiele doświadczeń przeprowadzono na plastelinie [1] w dążeniu do zbliżenia się do własności materiału idealnie plastycznego, założonego w teorii. Ponadto większość doświadczeń dotyczyła procesów stacjonarnych [2, 3], a jedynie nieliczne zajmowały się niektórymi procesami niestacjonarnymi jak wciskanie klina [1] czy ściskanie bloku między sztywnymi płytami [4].

W niniejszej pracy przedstawiono porównanie rzeczywistych obrazów deformacji, otrzymanych dla kilku procesów niestacjonarnych w sposób doświadczalny, z teoretycznymi rozwiązaniami uzyskanymi na gruncie teorii płaskiego stanu odkształcenia ośrodka sztywno-plastycznego bez wzmocnienia. Oprócz wyznaczenia kompletnego teoretycznego obrazu deformacji przeprowadzono również dyskusję rozwiązań.

2. Przecinanie plastycznego bloku dwoma płaskimi stemplami

Rozwiązanie zagadnienia przecinania plastycznego bloku dwoma płaskimi, wąskimi stemplami zostało podane przez L. PRANDTLA [5] i W. W. SOKOŁOWSKIEGO [7]. Wielkość siły naciskającej oraz rozkład prędkości płynięcia można otrzymać odpowiednio z pola linii poślizgu (rys. 1a) i hodografu (rys. 1b). Rozwiązanie to w ogólnym przypadku może być uważane jedynie za kinematycznie dopuszczalne, ponieważ nie badano dotychczas możliwości statycznie dopuszczalnego przedłużenia pola naprężeń w obszary sztywne na zewnątrz skrajnych linii poślizgu BDF i AEF . Dla granicznego przypadku $h/a = 8,74$ takie przedłużenie zostało zaproponowane przez J. F. W. BISHOPA [6]. Poniżej przedyskutowano możliwość zbudowania przedłużeń pola naprężeń dla innych stosunków h/a .

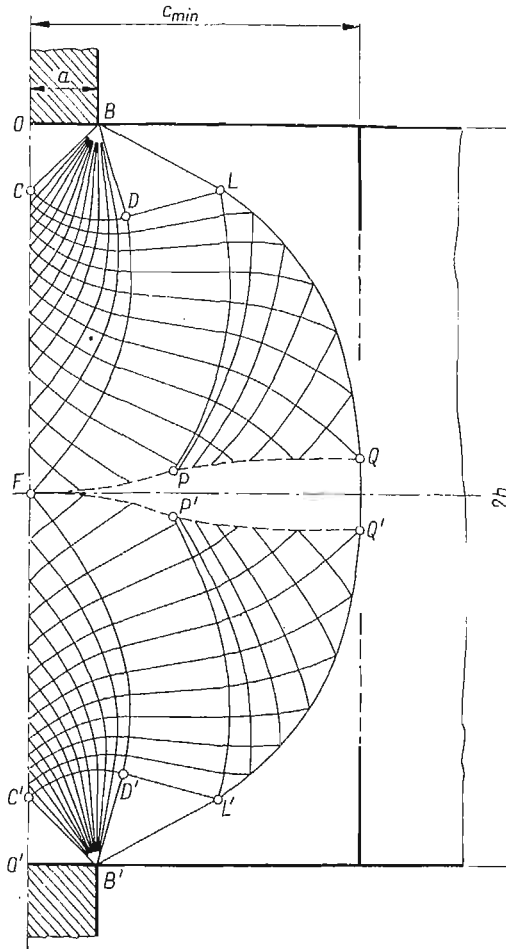
Zbadano ponadto deformację materiału w czasie przecinania i porównano z rzeczywistą deformacją aluminiowego bloku przecinanego dwoma stalowymi stemplami.



Rys. 1

Rysunek 2 przedstawia przedłużenie pola linii poślizgu dla stosunku $h/a = 5,40$. Wychodząc z linii poślizgu BDF rozwiązano zagadnienie odwrotne do brzegowego zagadnienia Cauchy'ego, otrzymując w rezultacie kształt hipotetycznej swobodnej krawędzi BLQ . Materiał na zewnątrz linii BLQ jest wolny od naprężeń. W polu $OBLQPF$ materiał znajduje się w stanie plastycznym. Linia nieciągłości naprężeń QPF , wychodząca z punktu Q , w którym styczna do swobodnej krawędzi jest równoległa do pionowej osi symetrii, oraz analogiczna linia $Q'P'F$ dla dolnej części, schodzą się w środkowym punkcie F . Materiał w polu $QPFQ'$ jest jednoosiowo ściskany naprężeniami równoległymi do osi pionowej. Analiza numeryczna wykazuje, że w każdym punkcie tego pola naprężenia są mniejsze od granicy plastyczności z wyjątkiem punktu Q , gdzie równają się one tej granicy. A zatem rozwiązanie Prandtl'a jest dla $h/a = 5,40$ kompletne spełniając warunki statyczne i kinematyczne zagadnienia. Przedłużenia takie można również zbudować dla dowolnego stosunku $h/a > 5,40$. W przedłużeniach tych kąt wachlarza CBD będzie większy niż w polu linii poślizgu Prandtl'a. Wielkość tego kąta wynika z warunku, że linia nieciągłości QPF musi

przechodzić przez środkowy punkt F . Dla $h/a = 8,74$ odcinek BL przyjmuje położenie poziome i możliwe są jednocześnie dwa kinematycznie dopuszczalne schematy odkształcenia, mianowicie rozsuwanie obu części bloku oraz lokalne wyptywanie materiału po obu stronach stempla. A zatem stosunek $h/a = 8,74$ jest stosunkiem granicznym [6, 8]. Z drugiej

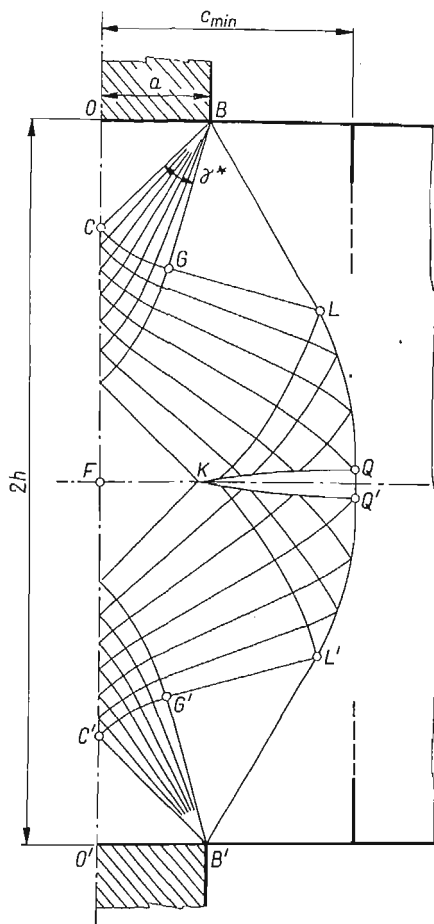


Rys. 2

strony stosunek $h/a = 5,40$ jest również graniczny, ponieważ dla $h/a < 5,40$ nie udaje się zbudować przedłużenia pola linii poślizgu w obszary sztywne. Tak więc dla $5,40 \leq h/a \leq 8,74$ rozwiązanie Prandtla jest kompletne, a dla $h/a < 5,40$ jest tylko kinematycznie dopuszczalne i daje, zgodnie z ekstremalnymi twierdzeniami teorii plastyczności, górną ocenę nieznannej koniecznej siły naciskającej.

Jednakże w zakresie $h/a < 5,40$ można otrzymać bardzo dobrą dolną ocenę siły naciskającej budując odpowiednie statycznie dopuszczalne pole naprężeń. Na rysunku 3 pokazano takie pole dla $h/a = 3,24$. Kąt wachlarza linii poślizgu w punkcie B zmniejszono w stosunku do rozwiązania Prandtla do takiej wartości γ^* , aby linia nieciągłości naprężeń QK przebiegała jak na rysunku. Jak poprzednio styczna do hipotetycznej swobodnej kra-

węzli BLQ w punkcie Q jest równoległa do pionowej osi OF . Na prawo od BLQ materiał jest wolny od naprężeń, a w polu QKQ' jest ściskany jednoosiowo równoległe do osi pionowej naprężeniami nie przekraczającymi granicy plastyczności. Dla tego pola nie można znaleźć stowarzyszonego pola prędkości, a zatem jest ono jedynie statycznie dopuszczalne

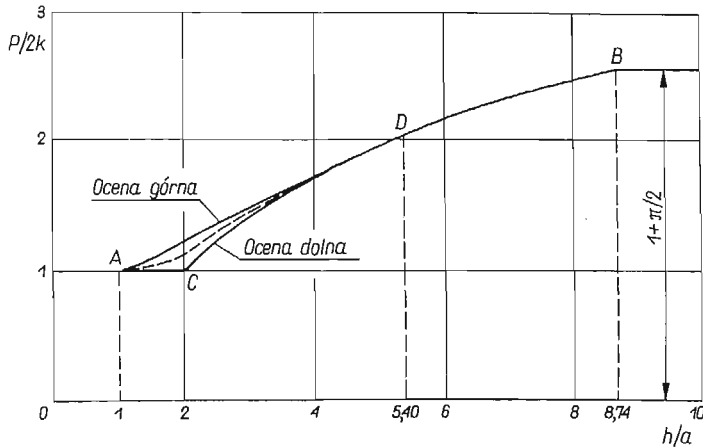


Rys. 3

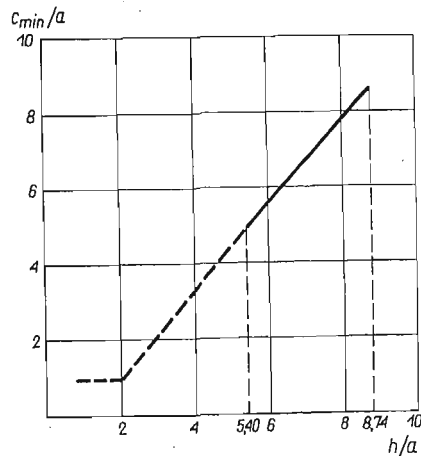
i daje dolną ocenę nieznanego ścisłego rozwiązania. Otrzymana stąd dolna ocena wielkości jednostkowego nacisku stempla na linii styku z materiałem jest określona wzorem $p_d = 2k(1 + \gamma^*)$. Po wyznaczeniu wartości kątów γ^* dla różnych stosunków h/a można obliczyć dolną ocenę nacisku stempla p w całym zakresie $2 \leq h/a < 5,40$. W pozostałym zakresie $1 \leq h/a < 2$ dolną ocenę otrzymujemy zakładając, że w prostokącie utworzonym przez proste łączące naroża obu stempli istnieje jednoosiowe ściskanie, a materiał na zewnątrz tego prostokąta jest wolny od naprężeń.

Obliczone w taki sposób dolne oceny nacisku p pokazano na rys. 4. Jak już wspomniano, górne oceny odpowiadają rozwiązaniu Prandtla. Różnica między górną i dolną oceną jest niewielka z wyjątkiem bezpośredniego otoczenia stosunku $h/a = 2$, gdzie osiąga ona maksymalną wielkość 21%.

Budując przedłużenia pól linii poślizgu dla $h/a \geq 5,40$ oraz statycznie dopuszczalne pola naprężeń dla $h/a < 5,40$ zakładaliśmy, że materiał na zewnątrz tych pól jest wolny od naprężeń. A zatem linia BLQ przedstawiająca hipotetyczną swobodną granicę, daje ważną informację, jaka musi być szerokość przecinanego bloku, aby mógł się realizować



Rys. 4

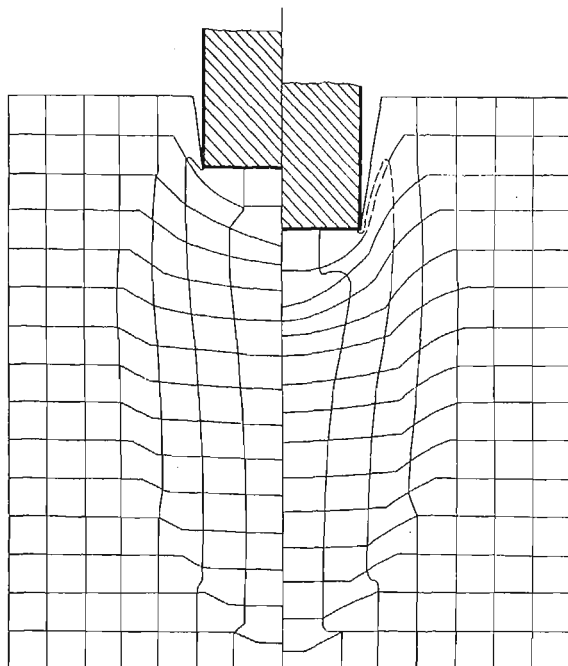


Rys. 5

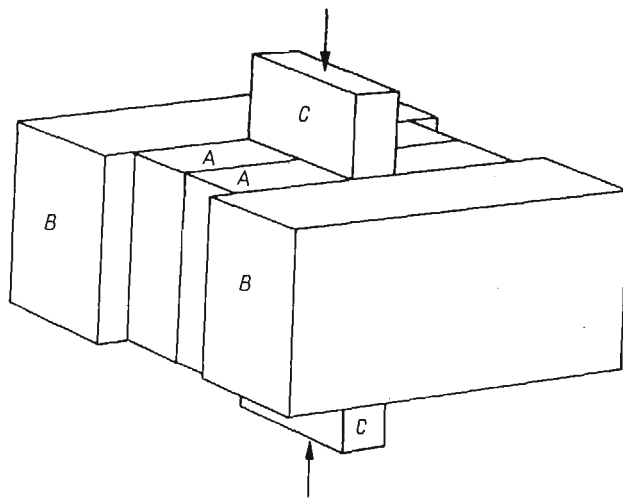
opisany schemat deformacji. Pole naprężeń musi leżeć całkowicie wewnątrz rzeczywistego konturu bloku. Jeśli blok ma kształt prostokątny, to jego minimalna szerokość c_{min} musi być równa odległości punktu Q od pionowej osi OF . Rysunek 5 przedstawia wartość szerokości c_{min} dla różnych h/a . Dla $h/a < 5,40$ zależność tę przedstawiono linią przerywaną, ponieważ wartości c_{min} w tym zakresie otrzymano z pól naprężeń, które są jedynie statycznie dopuszczalne. Dokładne wartości c_{min} będą w tym zakresie prawdopodobnie nieco większe.

Rozpatrzmy teraz deformację przecinanego materiału. Całą drogę stempla s podzielimy na pewną liczbę małych przyrostów Δs . Jeżeli te przyrosty są dostatecznie małe, to można przyjąć, że w czasie każdego odcinka czasu $\Delta t = \Delta s/v_0$, przy czym v_0 jest prędkością ruchu

stempla, prędkości płynięcia materiału nie zmieniają się. Wygodnie jest założyć, że prędkości te równają się średnim wartościom wyznaczonym dla końca i początku każdego



Rys. 6



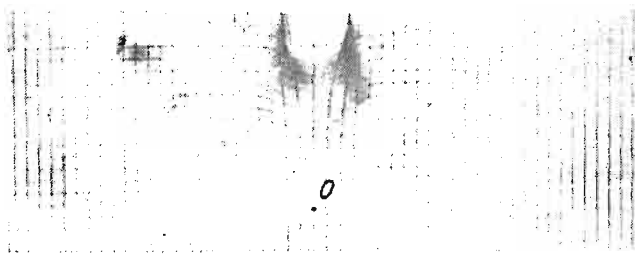
Rys. 7

odcinka czasu Δt . Mnożąc te średnie prędkości przez przyrosty czasu Δt można otrzymać przemieszczenia poszczególnych punktów przecinanego materiału.

W celu wyznaczenia prędkości dla każdego z kolejnych położeń stempla musimy budować kolejne siatki linii poślizgu i hodografu. Siatki te dla każdego z położeń będą podobne

do początkowych siatek pokazanych na rys. 1. Im bardziej zaawansowany jest proces, tym mniejszy będzie kąt wachlarza linii poślizgu w punktach A i B i kąt wachlarza siatki hodografu w punktach F^* i F^{**} . Wyznaczone w taki sposób obrazy deformacji kwadratowej siatki dla dwóch kolejnych położań stempla pokazano na rys. 6 po obu stronach pionowej osi.

Schemat wykonanego doświadczenia pokazuje rys. 7. Blok aluminiowy A złożony z dwóch części umieszczono pomiędzy dwoma stalowymi unieruchomionymi klockami B . Blok A przecinany jest dwoma stalowymi stemplami C . Na jednym z bloków A naniesiono kwadratową siatkę od strony styku z drugim blokiem A . Urządzenie to nie zapewnia warunków płaskiego stanu odkształcenia w całym przecinanym materiale, ponieważ w otoczeniu poziomej osi symetrii występują naprężenia rozciągające, powodujące lokalne zmniejszenie grubości, któremu oczywiście nie mogą zapobiec stalowe klocki B . Jednak dla dostatecznie małego zagłębienia przecinających stempli można przyjąć, że warunki są zbliżone do płaskiego stanu odkształcenia, tym bardziej że deformacja zachodzi głównie w pobliżu obu stempli, gdzie warunki płaskiego stanu odkształcenia są ściśle zachowane.

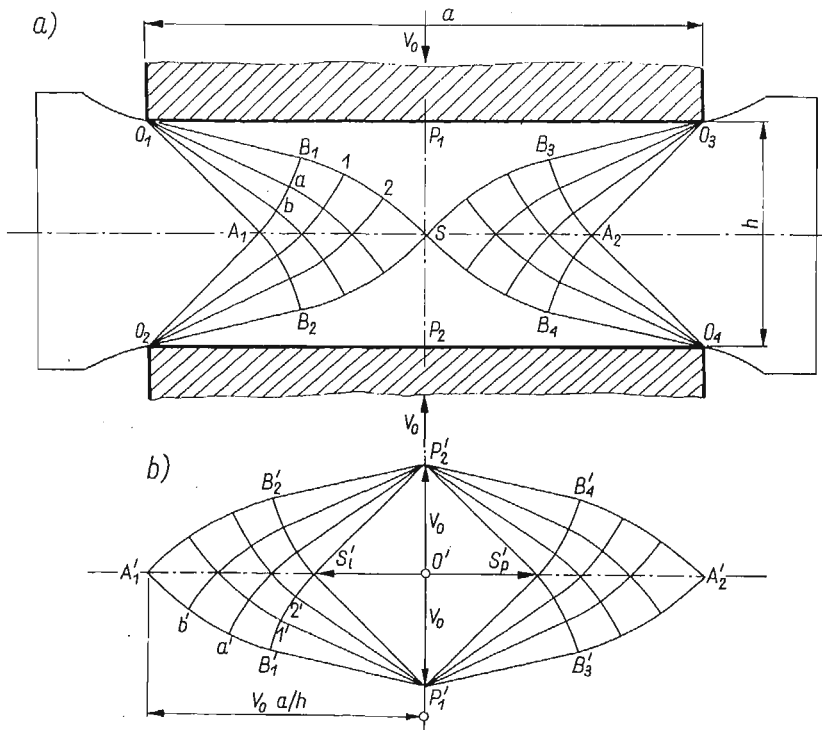


Rys. 8

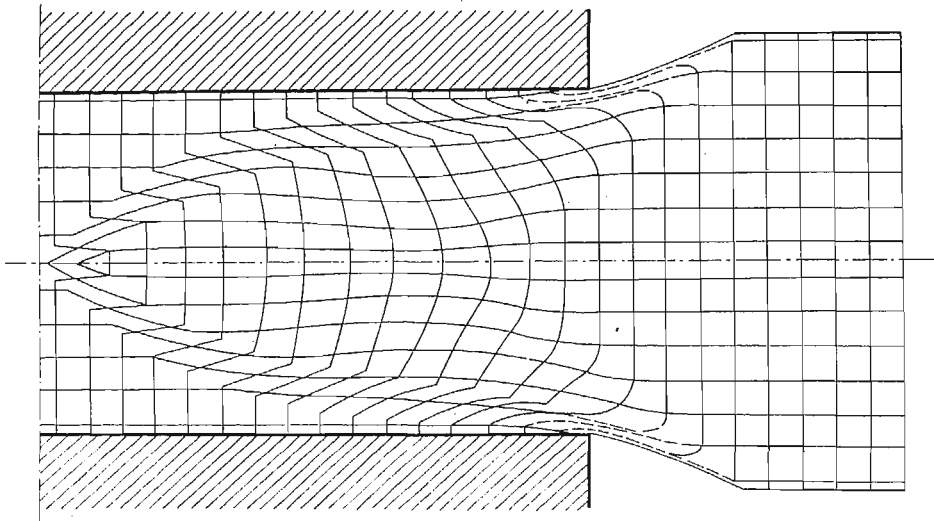
Rysunek 8 pokazuje odształconą siatkę. Przez O oznaczono położenie centralnego punktu przecinanego bloku. Wyraźnie widać obszar sztywny pod stemplem. Ogólny obraz deformacji jest bardzo zbliżony do rozwiązania teoretycznego, chociaż nie obserwuje się ostrych załamań linii, jakie występowały w tym rozwiązaniu.

3. Prasowanie bloku między sztywnymi płytami

Na rysunku 9 przedstawiono zaawansowane stadium procesu prasowania. Pokazana w górnej części rysunku siatka linii poślizgu została podana przez L. Prandtla [5]. Dolna część rysunku przedstawia odpowiadający jej hodograf. Obszary $OBSP$ przylegające do płyt są sztywne i poruszają się wraz z nimi. Liniami nieciągłości prędkości są linie poślizgu OBS . Przedłużenie pola linii poślizgu w obszary sztywne można wykonać rozwiązując zagadnienie charakterystyczne, wychodząc ze znanych wartości naprężeń wzdłuż linii poślizgu OBS [7]. Z takiego przedłużenia wynika obecność znacznych sił tarcia na linii styku płyt z prasowanym materiałem. Jeżeli współczynnik tarcia na linii kontaktu jest dostatecznie duży, to takie przedłużenie jest statycznie dopuszczalne. W takim przypadku rozwiązanie jest kompletne. Jeżeli jednak współczynnik tarcia jest zbyt mały, to nie ma możliwości przeniesienia sił tarcia wynikających z przedłużenia pola naprężeń i rozwiązanie



Rys. 9

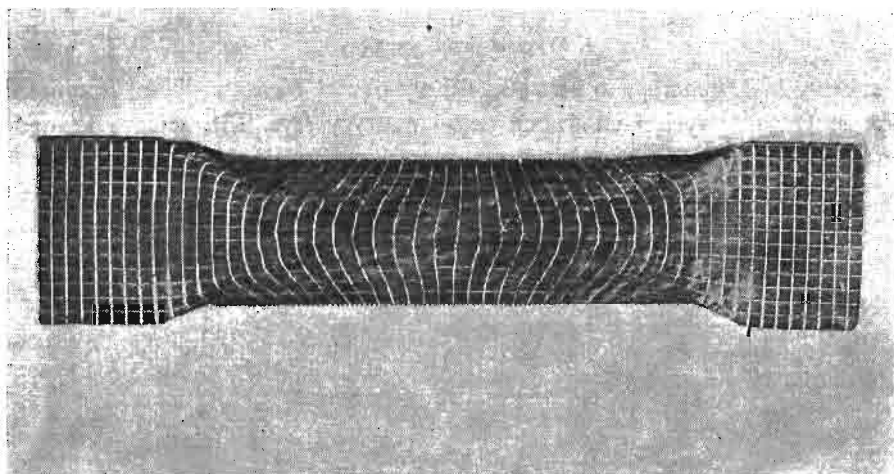


Rys. 10

stanowi tylko górną ocenę siły odpowiadającej nieznanemu ścisłemu rozwiązaniu. Jest ono bowiem wtedy tylko kinematycznie dopuszczalne.

Sytuacja przedstawiona na rys. 9 odpowiada pewnej dowolnie wybranej chwili procesu prasowania. Tak samo można zbudować siatkę linii poślizgu i hodograf dla każdej innej chwili, której będzie odpowiadała inna odległość h między płytami. Dzieląc całą drogę przebytą przez zbliżające się ku sobie płyty na szereg małych odcinków Δh i następnie wyznaczając prędkości dla początkowej chwili każdego z tych kolejnych etapów, możemy prześledzić cały proces odkształcania. Przyjmujemy, że w ciągu każdego z etapów prędkości poszczególnych punktów są stałe. Postępując podobnie jak poprzednio wyznaczono odkształcenie kwadratowej siatki dla dwóch kolejnych etapów prasowania bloku o początkowym stosunku wymiarów $a/h_0 = 2,5$. Droga przebyta przez każdą z płyt naciskających w czasie jednego etapu równa się $\Delta h = 0,125 h_0$. Na rysunku 10 przedstawiono obraz odkształconej siatki po drugim etapie.

W celu eksperymentalnej weryfikacji schematu odkształcenia wykonano doświadczenie ściskając przecięty na dwie części blok ołowiany z naniesioną na jednej z nich na płaszczyźnie styku siatką kwadratową. Schemat ustawienia był zbliżony do przedstawionego na rys. 7. Doświadczenie wykonano w dwóch wariantach. W pierwszym obie naciskające

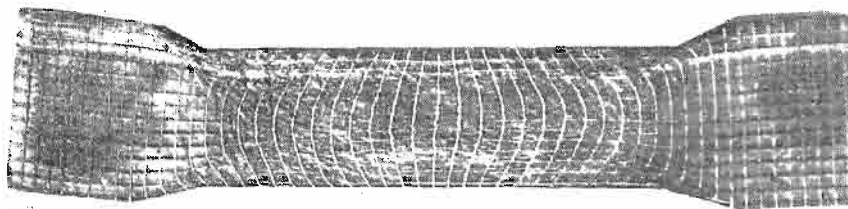


Rys. 11

płyty miały specjalnie wykonaną przez nacięcie drobnych ząbków powierzchnię styku z prasowanym materiałem dla zapewnienia możliwości przeniesienia dowolnie dużych naprężeń stycznych. Na rysunku 11 pokazano fotografię odkształconego w taki sposób bloku. Początkowy stosunek wymiarów $a/h_0 = 2,5$ był taki sam, jaki przyjęto przy teoretycznym wyznaczaniu schematu odkształcenia. Blok ściśnięto do stadium odpowiadającego rys. 10. Analizując otrzymany rzeczywisty obraz deformacji widzimy występowanie «sztywnych» obszarów na końcach bloku oraz w sąsiedztwie linii kontaktu, chociaż w tych ostatnich występują wyraźne odkształcenia plastyczne. Nie obserwuje się ostrych załamania pionowych linii, które w rozwiązaniu teoretycznym były rezultatem występowania w nim linii nieciągłości prędkości. W rzeczywistym metalu zjawisko wzmocnienia powoduje rozszerzenie się linii nieciągłości w dość szerokie pasma przejściowe, a jednocześnie po-

większa zasięg obszaru odkształceń plastycznych. Jednak widoczne jest, że ogólny charakter deformacji przewidziany przez teorię jest zachowany.

W drugim wariancie płyty naciskające nie miały ząbków, ale ich powierzchnia była dość chropowata po zgrubnej obróbce na strugarce. Przy prasowaniu takimi płytami

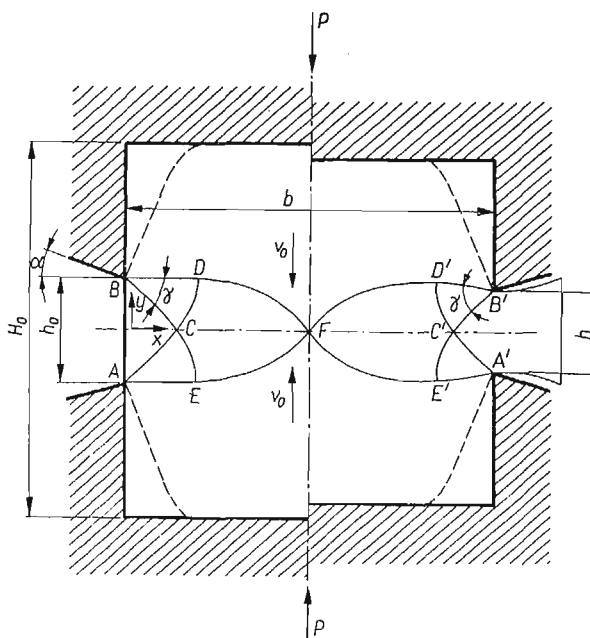


Rys. 12

otrzymano deformację pokazaną na rys. 12. Ogólny obraz deformacji jest taki sam jak na rys. 11, ale widoczne są większe jeszcze niż poprzednio różnice w stosunku do rozwiązania teoretycznego.

4. Wpływ przez szczeliny

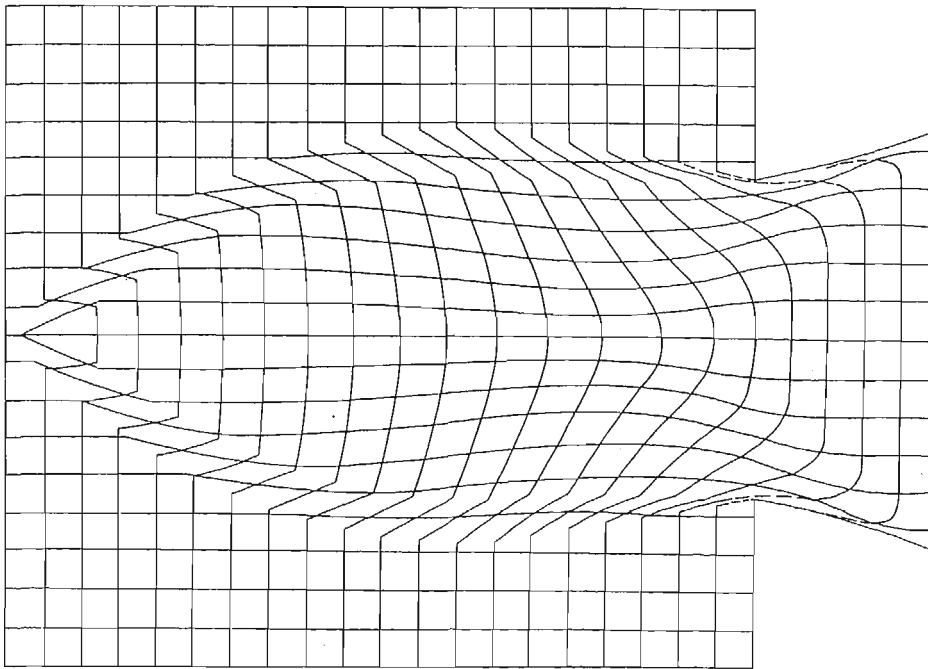
Prostokątny blok materiału o początkowej wysokości H_0 i szerokości b umieszczony jest w prostokątnych wycięciach dwóch części matrycy (rys. 13). Między krawędziami dolnej i górnej części matrycy istnieje luz o początkowej wielkości h_0 . Obydwie połówki



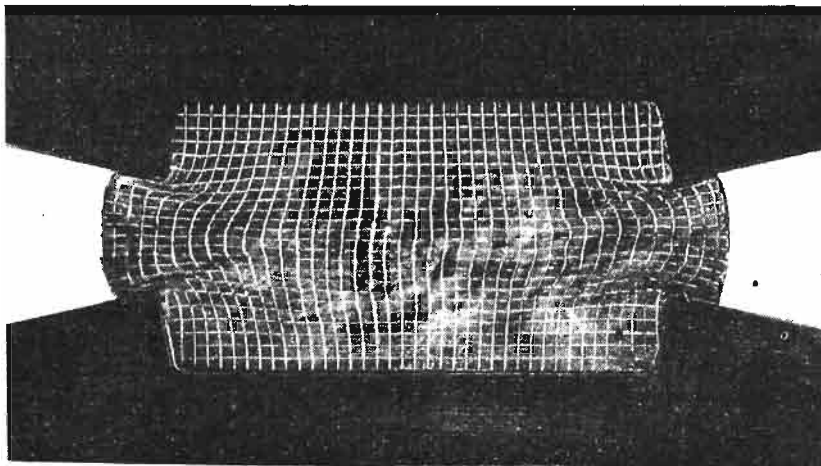
Rys. 13

matrycy zbliżają się do siebie z prędkościami v_0 powodując plastyczne odkształcanie materiału i jego obustronny wpływ przez szczeliny między obu częściami matrycy. Założymy,

że swobodne powierzchnie matrycy, tworzące szczelinę, są nachylone do poziomu pod kątem α tak dobranym, aby wypływający materiał mieścił się w szczelinie nie dotykając matrycy.



Rys. 14



Rys. 15

Siatkę linii poślizgu dla początkowej chwili plastycznego płynięcia przedstawiono po lewej stronie rysunku. Obszar plastyczny ograniczony jest skrajnymi liniami BDF i AEF . Po prawej stronie rysunku pokazano siatkę linii poślizgu dla zaawansowanego stadium procesu, gdy odległość między krawędziami obu połówek matrycy zmalała do wielkości h ,

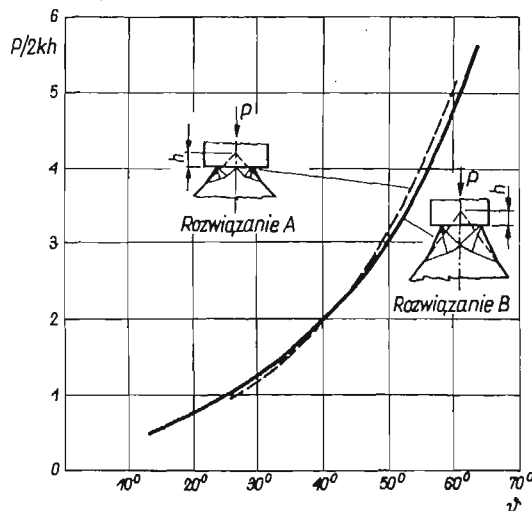
a część materiału została wyciśnięta na zewnątrz. Podobnie można zbudować siatkę linii poślizgu dla dowolnego stadium procesu. Siatki te różnią się tylko kątem γ wycinków biegunowych. Nie podajemy tu siatki hodografu, ponieważ jest ona zbliżona do siatki przedstawionej w poprzednim punkcie.

Stosując tę samą metodę jak w powyższych przykładach wyznaczono deformację kwadratowej siatki dla przypadku $b/h_0 = 3,56$, po zmniejszeniu się szerokości szczeliny do wielkości $h = 0,765 h_0$. Drogę przebytą przez każdą z połówek matrycy podzielono na dwa etapy. Na rysunku 14 przedstawiono obraz połowy zdeformowanej kwadratowej siatki.

Na rysunku 15 pokazano fotografię siatki otrzymanej doświadczalnie przez ściskanie bloku ołowianego. Zarówno początkowy stosunek wymiarów b/h_0 , jak i stosunek końcowej i początkowej szerokości szczeliny h/h_0 były takie same jak w rozwiązaniu teoretycznym. Schemat doświadczenia był analogiczny jak w obu poprzednich przypadkach. Rysunek 15 potwierdza zjawisko ograniczonego zasięgu obszaru odkształcenia plastycznego. Jednakże i teraz nie ma ostrych załamań linii, jakie cechują rozwiązanie teoretyczne. Zwraca uwagę dobra zgodność przebiegu linii siatki w sąsiedztwie przekrojów wyjściowych.

5. Ściskanie plastycznego klina płaskim stemplem

Rozwiązanie zagadnienia ściskania klina płaskim stemplem zostało podane przez R. HILLA [8], przy czym zbadał on dwa możliwe warianty tego rozwiązania przedstawione schematycznie na rys. 16. Rozwiązanie *A* o mniejszym zasięgu obszaru plastycznego uważane jest za bardziej prawidłowe od rozwiązania *B*, jeżeli na linii styku stempla i ściskanego

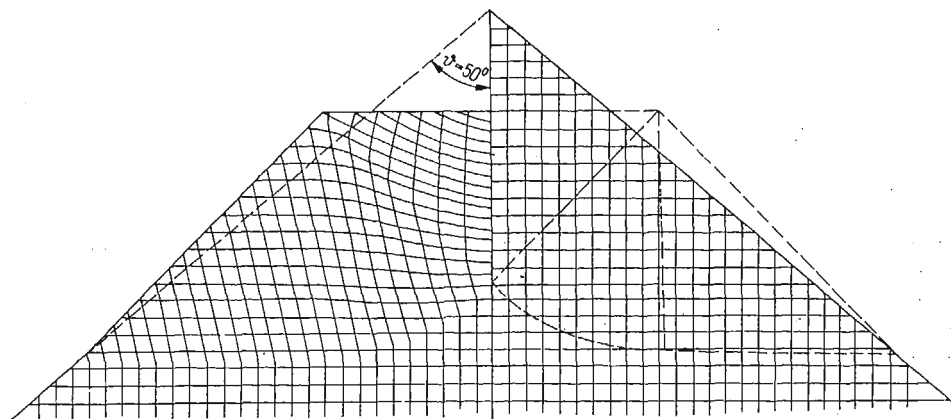


Rys. 16

materiału nie ma tarcia. Rozwiązanie *B* obowiązuje zarówno dla stempla idealnie gładkiego, jak również dla stempla chropowatego. Jednak, jak łatwo się przekonać, niezbędna wielkość siły naciskającej na stempel, odpowiadająca określonej drodze stempla h , jest dla mających praktyczne znaczenie wielkości kąta wierzchołkowego klina ϑ mniejsza w roz-

wiązaniu B niż w rozwiązaniu A . A zatem nawet przy idealnie gładkim stemple dla większych wartości ϑ poprawniejsze jest rozwiązanie B .

Hill [8] zaproponował sposób wyznaczania drogi poszczególnych cząstek odkształcanej części materiału klina za pomocą odwzorowania ich trajektorii na tak zwanej płaszczyźnie jednostkowej. Stosując tę metodę wyznaczono teoretyczne odkształcenie kwadratowej siatki dla klina o kącie wierzchołkowym $\vartheta = 50^\circ$ (rys. 17).



Rys. 17



Rys. 18

Na rysunku 18 pokazano fotografię rzeczywistego odkształcenia siatki w klinie wykonanym z aluminium i ściszanym stalowym stemplem. Powierzchnia styku nie była smarowana. Widać dobrą zgodność rozwiązania teoretycznego z wynikami doświadczenia, chociaż zasięg obszaru plastycznego jest w rzeczywistym metalu większy, niż to przewiduje teoria.

6. Wnioski

Przedstawione porównanie teoretycznych obrazów deformacji, wynikających z rozwiązań płaskiego stanu odkształcenia ośrodka sztywno-plastycznego bez wzmocnienia z wynikami doświadczenia wskazuje, że rozwiązania teoretyczne mogą mieć praktyczne znaczenie przy analizie rzeczywistych procesów odkształcania. Jeżeli występujące w roz-

wiązaniu teoretycznym skoki prędkości na liniach nieciągłości nie są zbyt duże, to otrzymuje się bardzo dobrą zgodność rzeczywistego i teoretycznego obrazu deformacji, jak to było w przypadku przecinania bloku dwoma stemplami oraz ściskania klina. Jeżeli jednak skoki te są duże, to zgodność jest tylko jakościowa. Jednakże nawet i w takim przypadku rozwiązanie teoretyczne może mieć duże znaczenie praktyczne przy analizie szeregu procesów.

Literatura cytowana w tekście

1. A. P. GREEN, *The use of plasticine models to simulate the plastic flow of metals*, Phil. Mag., Ser. 7, 42 (1951), 365–373.
2. N. W. PURCHASE and S. J. TUPPER, *Experiments with a laboratory extrusion apparatus under conditions of plane strain*, J. Mech. Phys. Solids, 1 (1953), 277–283.
3. B. B. HUNDY, *Plane plasticity*, Metallurgia, March 1954, 109–118.
4. J. F. NYE, *Experiments on the plastic compression of a block between rough plates*, J. Appl. Mech., 19 (1952), 337–346.
5. L. PRANDTL, *Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht*, Zeitsch. Ang. Math. Mech., 1923, Bd. 3, 401–406.
6. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to the problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2 (1953), 43–53.
7. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Москва 1946.
8. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, 1950.

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТАЛЛОВ

Представлены теоретические решения задач о деформировании квадратных сеток для четырех различных процессов деформирования металлов. Эти решения сравнены с действительными деформациями таких сеток, найденными в опытах со свинцом и алюминием.

В задаче о перекусывании полосы двумя плоскими узкими штампами приводятся решения содержащие также статические продолжения в жесткую область. Экспериментальные результаты хорошо совпадают с теоретической картиной деформации.

В задаче о сжатии клина опыты показали, что в действительности в металлах осуществляется так называемый большой механизм деформирования, а не малый механизм, который считается более приемлемым с точки зрения математической теории пластичности. Решающую роль играет здесь упрочнение, которым пренебрегают в теоретическом решении.

В случае сжатия блока плоскими штампами упрочнение весьма сильно исказит действительную картину деформации по сравнению с теоретической. Однако в качественном отношении различие этих картин не столь велико. Экспериментально показано влияние краевого условия в виде трения.

Последним из рассмотренных процессов является выдавливание из составной матрицы. Отмечено неплохое совпадение экспериментальных и теоретических результатов.

Общим выводом является ценность жестко-пластических решений без учета упрочнения для анализа нестационарных процессов деформирования металлов. Кроме того показано, что эти решения нуждаются в экспериментальной проверке, так как в отдельных случаях упрочнение может весьма существенно влиять на способ деформирования.

S u m m a r y

EXPERIMENTAL VERIFICATION OF SOME THEORETICAL SOLUTIONS
OF LARGE PLASTIC DEFORMATIONS OF METALS

Presented are the theoretical solutions of a square grid deformations for four various deformation processes of metals and their comparison with analogous grid deformations obtained experimentally on lead and aluminium specimens.

In the case of comparession of a plastic block by two opposite flat narrow punches solutions are presented with extension of the stress field into rigid region. Experimental results show good agreement with theoretical deformation pattern.

In the case of compression of a plastic wedge experiments show that the theoretical solutions with the so-called "large mechanism" is very close to the actual deformation, while the "small mechanism" solution, considered as theoretically more correct, gives unrealistic deformation pattern.

The strain-hardening effect considerably deforms the actual final shape of a square grid for a block compressed between two plates, as compared with deformation predicted by theory. However, qualitatively the coincidence of the general mode of deformation for the rigid-plastic model and real metal is satisfactory. Experiments show the influence of friction conditions along the contact surface on the deformation mode.

For a foregoing process in a closed die, the agreement between theoretical and experimental results is also qualitatively good.

The presented experimental results show that the rigid-plastic solutions can be applied to the real metal working processes. Moreover, it is evident that such solutions require experimental verification, since in some cases the influence of the strain-hardening effect on the deformation mode is very strong.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 października 1966 r.

O ZJAWISKACH REZONANSOWYCH W UKŁADACH NIEOGRANICZONYCH

SYLWESTER KALISKI, EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problem rezonansu w zagadnieniach falowych, w szczególności w zagadnieniach propagacji fal sprężystych, bywa zazwyczaj kojarzony z problemem wartości własnych dla określonych zagadnień brzegowych, tj. dla układów ograniczonych (por. np. [1]), poddawanych działaniu pola sił wymuszających. Tym niemniej problemy rezonansowe występują w określonych warunkach również i w przypadkach układów nieograniczonych lub w przypadku problemów brzegowych układów półograniczonych.

Fakty te nie są oczywiście nowe. Znane są fakty występowania rezonansu w układach nieograniczonych przy odpowiednio sprofilowanych przestrzennie i czasowo polach sił masowych, znane są również możliwości występowania rezonansu w przypadkach odpowiedniego pobudzenia układów z falą biejącą w układach półograniczonych, które prowadzą do specyficznych problemów wartości własnych jak np. problem fal Rayleigha.

Problemy brzegowe dla układów półograniczonych związane są również, w przypadku określonego wymuszenia zaburzeń, z zagadnieniami promieniowania typu Czerenkowa. Wydaje się jednak rzeczą interesującą zanalizowanie zespołu tych zagadnień z jednolitego punktu widzenia, mianowicie możliwości powstawania rezonansu w układach nieograniczonych lub półograniczonych i ujawnienie związków pomiędzy możliwością powstawania rezonansu na falach stojących i falach biejących oraz zjawiskami promieniowania Czerenkowa. Kwestia ta stanowi cel niniejszej publikacji.

W pracy rozważamy najpierw zagadnienie możliwości powstawania rezonansu w układach nieograniczonych oraz związki pomiędzy zjawiskiem rezonansu na falach stojących i biegnących wykazując fizyczną równoważność obu zjawisk. Ograniczamy się przy tym do równań opisanych w przypadku procesów okresowych operatorami samosprzężonymi. Następnie dyskutujemy związki pomiędzy rezonansem dla fal stojących i biejących w brzegowych układach półograniczonych oraz wykazujemy związek tych procesów ze zjawiskiem promieniowania typu Czerenkowa. Całość pracy ujęto w postaci przykładów dla typowych zagadnień propagacji fal względnie typowych problemów brzegowych dla sprężystych układów półograniczonych z punktu widzenia zagadnienia rezonansu. Przykłady rozważano w ujęciu możliwie najprostszym, a więc pomijając efekty tłumienia itp. W zakończeniu podsumowano wyniki i wyprowadzono wnioski ogólne oraz sprecyzowano wynikię prawidłowości.

Należy tutaj zaznaczyć, że można by ominąć metodę przykładową próbując ująć całość w ogólnej formalnej postaci matematycznej — tym bardziej, że rozważania niniejsze,

przeprowadzone na przykładach problemów fal sprężystych i pewnych problemach pól sprężonych, stosują się i do szeregu innych zagadnień teorii pola.

Jednakże zastosowane przez nas ujęcie, z racji eksponowania problemów związanych z propagacją fal sprężystych oraz ze względu na pogładowość wydaje się bardziej korzystne.

2. Układy nieograniczone

Dla przykładu rozważmy najpierw układ sprężysty, bezdispersyjny i przestrzennie jednowymiarowy, a więc na przykład pręt nieograniczony.

Równanie okresowych drgań wymuszonych ma postać

$$(2.1) \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x) \cos \omega t,$$

gdzie przyjmiemy $p(x) = p_0 \sin n\pi x/l$. Podstawiając w tym wzorze

$$u = u_0 \cos \omega t \sin n\pi \frac{x}{l}$$

otrzymujemy

$$(2.2) \quad u = p_0 \left[\omega^2 - \left(n\pi \frac{a}{l} \right)^2 \right].$$

Mianownik przyrównany do zera stanowi odpowiednik równania dyspersyjnego równania jednorodnego

$$(2.3) \quad \frac{\omega^2}{a^2 \alpha_n^2} = 1, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}$$

i odpowiada przypadkowi rezonansu dla okresowego czasowo i przestrzennie pola sił wymuszających. Łatwo oczywiście zauważyć, że przy przestrzennie okresowym polu sił wymuszających układ na odcinkach półokresu przestrzennego odpowiada jakby wydzielonemu układowi ograniczonemu (o warunkach brzegowych $u = 0$ dla $x = l$), co oczywiście wyjaśnia obraz rezonansu.

Rozważmy obecnie przypadek fali bieżącej w pręcie z polem sił wymuszających

$$(2.4) \quad p(x, t) = p_0 e^{ik(x-vt)}.$$

Poszukując rozwiązania w postaci

$$(2.5) \quad u(x, t) = u_0 e^{ik(x-vt)}$$

otrzymamy z przyrównania równania dyspersyjnego równania jednorodnego do zera warunek rezonansu dla fali bieżącej

$$(2.6) \quad 1 = \frac{v^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{a^2 k^2}.$$

Porównując (2.6) z (2.3) widzimy, że rezonans zachodzi w obu przypadkach dla identycznych wartości ω przy $k = \alpha_n$; oznacza to, że przy długości fali takiej jak dla przypadku fali stojącej układ w przypadku fali bieżącej przechodzi w rezonans wtedy, gdy prędkość

fazowa harmonicznego w czasie i przestrzeni pola sił wymuszających osiąga prędkość dźwięku. Z punktu widzenia powstawania rezonansu oba układy są równoważne. Analogiczna sytuacja zachodzi również w przypadku nieograniczonej przestrzeni trójwymiarowej. Na przykład dla równania falowego

$$(2.7) \quad \left(a^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = p(x, y, z) \cos \omega t,$$

w którym

$$(2.8) \quad p(x, y, z) = p_0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \sin \gamma_k z, \\ \alpha_m = m\pi/l_1, \quad \beta_n = n\pi/l_2, \quad \gamma_k = k\pi/l_3,$$

równanie rezonansu dla fal stojących ma postać

$$(2.9) \quad \alpha_m^2 + \beta_n^2 + \gamma_k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

Jeżeli wymuszenie ma charakter fali bieżącej w kierunku np. osi x

$$(2.10) \quad p(x, y, z, t) = p_0 \sin \beta_n y \sin \gamma_k z e^{ik(x-vt)},$$

to analogiczne równanie dyspersyjne będzie miało postać

$$(2.11) \quad \beta_n^2 + \gamma_k^2 + k^2 = \frac{k^2 v^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

Porównanie z (2.9) prowadzi do wniosku, że $k = \alpha_m$ analogicznie do przypadku jednowymiarowego.

Odpowiedniość stanów rezonansowych obu układów jest fizycznie prosta — falę stojącą rezonansową można złożyć z fal bieżących w obu kierunkach. Fale te mają własności symetryczne z punktu widzenia równania dyspersyjnego, zatem aby w sumie dawały przypadek rezonansu na fali stojącej, każda z nich powinna być rezonansowa w sensie fali bieżącej, co z kolei następuje przy prędkościach fazowych odpowiadających prędkości dźwięku. Sens fizyczny rezonansu dla fali bieżącej łatwo zinterpretować, jeżeli zwiążemy układ z falą bieżącą przyjmując $x = x - vt$. Wtedy np. równanie (2.1) przejdzie [przy $p(x, t)$ w postaci (2.4)] w następujące:

$$(2.12) \quad (a^2 - v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x} \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0 e^{ik\bar{x}}.$$

Stąd wynika, że rozwiązanie dla u nie powinno zależeć od t , zatem

$$(2.13) \quad (a^2 - v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} = p_0 e^{ik\bar{x}}.$$

Przy $u = u_0 \exp(ik\bar{x})$ mamy

$$(2.14) \quad u_0 = -p_0 \frac{1}{(a^2 - v^2)k^2},$$

co daje zerową sztywność (rezonans) przy $a = v$, a to z kolei przy $v = a = \omega/k$ prowadzi do $k = \omega/a$ lub

$$(2.15) \quad 1 = \frac{\omega^2}{a^2 k^2},$$

zgodnie z (2.6).

Rozważone wyżej przykłady dotyczyły problemów bezdyspersyjnych. Związki powyższe przenieść można jednak bez trudu i na przypadki z dyspersją (np. problem belki), jednakże wtedy odpowiedniość rezonansu dla fali bieżącej zachodzi nie dla prędkości fazowej fali bieżącej równej prędkości dźwięku, lecz dla określonej prędkości zależnej od wektora falowego. W dalszym ciągu ograniczymy się dla prostoty (mając na uwadze jakościową stronę zagadnienia) do problemów bezdyspersyjnych. Znacznie bardziej złożoną postać przybiera powyższy problem w przypadku zagadnień brzegowych układów półnieskończonych, czym zajmiemy się w następnym punkcie.

3. Problemy brzegowe w układach półnieskończonych

3.1. Uwagi ogólne. Rozważymy obecnie problem rezonansu dla fal stojących i bieżących dla układów półnieskończonych przy wymuszeniach danych na brzegu a nie, jak poprzednio, polem sił masowych. Uzyskamy tutaj podobne odpowiedniości jak w punkcie poprzednim jednakże z dość istotnymi modyfikacjami. Mianowicie, o ile w przypadku poprzednim, dzięki profilowaniu fal przestrzennym, okresowym układem sił masowych (dla fal stojącej) stwarzało się jak gdyby podukłady ograniczone o znanych własnościach rezonansowych, o tyle w przypadku wymuszeń danych jedynie na brzegu takich układów, dzięki możliwości generowania promieniowania Czerenkowa, nie daje się na ogół zrealizować. Na przykład okresowym ciśnieniem przyłożonym na brzegu półnieskończonego pręta nie można wytworzyć rezonansu, gdyż jedyne rozwiązanie stanowi tu fala wypromieniowująca od końca pręta.

Jeżeli z kolei rozważyć problem półprzestrzeni (z reguły rozważać będziemy zagadnienia płaskie) np. dla równania falowego, to przy danym ω i ciśnieniu okresowo zmiennym wzdłuż powierzchni (np. problem akustyczny) w przypadku fali stojącej nie otrzymamy rezonansu. Mianowicie, gdy będziemy zmieniać l przy danym ω , to zanim wystąpi rezonans, nastąpi odpromieniowanie fali powierzchni. Podobnie dla fali bieżącej: przy przekroczeniu przez prędkość fazową prędkości dźwięku wystąpi promieniowanie typu Czerenkowa bez osiągnięcia przedtem rezonansu.

Równanie falowe nie ma dostatecznych «wewnętrznych stopni swobody» na to, aby problem w układzie półnieograniczonym miał wartości własne (co jest związane z istnieniem fal powierzchniowych). Takie możliwości powstają dla równania bifalowego i wyższych rzędów, to jest dla problemu fal Rayleigha w teorii sprężystości czy też w teorii półsprężonych.

Jak się okazuje, w przypadku teorii sprężystości istnieje możliwość wywołania rezonansu za pomocą fal stojących na powierzchni. Podobny wynik otrzymuje się i dla fal bieżących przy podobnych zależnościach jak w poprzednim punkcie z tym, że obecnie prędkość krytyczna, przy której występuje to zjawisko, odpowiada prędkości fal powierzchniowych Rayleigha. Przy takiej prędkości można za pomocą fali bieżącej wzbudzić rezonans,

gdyż prędkość ta stanowi wartość własną specjalnego problemu brzegowego dla układu półnieograniczonego.

Podobnie ma się rzecz i dla przypadku równań pól sprzężonych, aczkolwiek zagadnienie z racji bardziej złożonych równań (obszarów istnienia fal powierzchniowych itd.) komplikuje się bardzo. Wszystkie te własności są wynikiem symetrii zjawisk rezonansowych dla fal biejących w kierunkach przeciwnych co w rezultacie superpozycji daje efekt rezonansu dla fal stojących. Niżej omówimy przypadek równania falowego i równań teorii sprężystości oraz pokrótce przytoczymy wyniki dla równań magnetosprężystości i piezoelektryczności oraz wykażemy słuszność sformułowanych wyżej wniosków.

3.2. Równanie falowe. Rozważmy przypadek fali stojącej dla równania falowego

$$(3.1) \quad a^2 \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} = 0$$

z warunkiem brzegowym dla $x_2 = 0$

$$(3.2) \quad \dot{\varphi}(x_1, t) = \varphi_0 \sin \frac{n\pi}{l} x_1 \cos \omega t = \varphi_0 \sin \alpha_n x_1 \cos \omega t.$$

Rozwiązanie (3.1) ma postać

$$(3.3) \quad \varphi(x_1, x_2, t) = C_0 \sin \alpha_n x_1 \sin \omega t e^{-\sqrt{a_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}} x_2},$$

skąd

$$(3.4) \quad C_0 = \frac{\varphi_0}{\omega}.$$

Rezonans więc nie zachodzi. Gdy $\omega/a > \alpha_n$, nastąpi wypromieniowanie fali od powierzchni. Podobnie dla fali biejącej znajdziemy

$$(3.5) \quad \varphi(x_1, x_2, t) = -\frac{\varphi_0}{ivk} e^{ik(x_1 - vt)} e^{-k \sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}} x_2},$$

co daje wynik podobny do poprzedniego, czyli brak rezonansu oraz promieniowanie typu Czerenkowa dla $v > a$.

3.3. Równania teorii sprężystości. Równania płaskiej teorii sprężystości mają postać:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (a_1^2 - a_2^2)(u_{1,11} + u_{2,12}) + a_2^2 \nabla^2 u_1 - \ddot{u}_1 &= 0, \\ (a_1^2 - a_2^2)(u_{1,12} + u_{2,22}) + a_2^2 \nabla^2 u_2 - \ddot{u}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Naprężenia na powierzchni określone są wzorami:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \sigma_{22} &= \varrho [a_1^2 u_{2,2} + (a_1^2 - 2a_2^2)u_{1,1}]. \end{aligned}$$

Rozważmy przypadek fali stojącej. W tym celu przyjmiemy warunki brzegowe w postaci

$$(3.8) \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = -A_0 \sin \omega t \cos \alpha_n x_1, \quad \alpha_n = n\pi/l.$$

Rozwiązanie równań (3.6) czyniące zadość warunkom w nieskończoności ma postać:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sin \omega t \sin \alpha_n x_1 (A \alpha_n e^{-\gamma_n x_2} + B \beta_n e^{-\beta_n x_2}), \\ u_2 &= \sin \omega t \cos \alpha_n x_1 (A \gamma_n e^{-\gamma_n x_2} + B \alpha_n e^{-\beta_n x_2}), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.10) \quad \gamma_n^2 = \alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{a_1^2}, \quad \beta_n^2 = \alpha_n^2 - \frac{\omega^2}{a_2^2}.$$

Z pierwszego z warunków brzegowych (3.8) obliczamy

$$(3.11) \quad B = -\frac{2\gamma_n \alpha_n}{\alpha_n^2 \beta_n^2} A,$$

z drugiego zaś

$$(3.12) \quad A = A_0 \frac{1}{\left(2 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}\right)^2 - 4\beta_n \gamma_n} \frac{1}{\rho a_2^2 \alpha_n^4} = \bar{A}_0 \frac{1}{M},$$

gdzie

$$\bar{\beta}_n = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}}, \quad \bar{\gamma}_n = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_1^2 \alpha_n^2}}, \quad \bar{A}_0 = \frac{A_0}{\rho a_2^2 \alpha_n^4}.$$

Rezonans powstaje gdy mianownik wyrażenia (3.12)

$$(3.13) \quad M = \left(2 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}\right) - 4 \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_1^2 \alpha_n^2}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2}} = 0,$$

co odpowiada przy danym ω takiemu α_n , że $\xi = \omega/\alpha_n$ spełnia równanie $M(\xi) = 0$, identyczne z równaniem dla fali powierzchniowej Rayleigha. Gdy dalej będziemy zmniejszać α_n tak, że $\bar{\beta}_n^2 < 0$, wtedy wystąpi wypromieniowanie jednej fali od powierzchni, gdy zaś $\bar{\gamma}_1^2 < 0$ — wypromieniowanie obu fal.

W przypadku fali bieżącej zakładamy naprężenia na brzegu w postaci

$$(3.14) \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = -A_0 e^{ik(x_1 - vt)} \quad \text{albo} \quad \sigma_{22} = -A_0 e^{ik(x_1 + vt)}.$$

Łatwo obliczamy (por. [2])

$$(3.15) \quad u = \frac{p_0}{k \rho a_2^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}} \left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right) e^{-k \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} x_2} - 2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} e^{-k \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}} x_2}}{\left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}}}$$

lub dla $x_2 = 0$

$$(3.16) \quad u_2 = \frac{p_0 v^2}{k \rho a_2^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}}}{\left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}}}.$$

Rezonans nastąpi, gdy

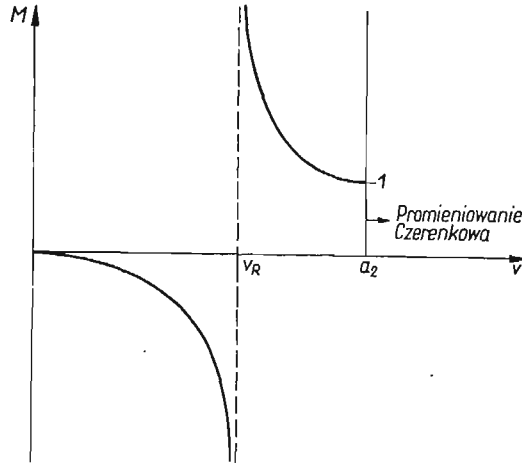
$$(3.17) \quad M = \left(2 - \frac{v^2}{a_2^2}\right) - 4 \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_1^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{a_2^2}} = 0.$$

Porównując (3.17) z (3.13) widzimy, że równania te są identyczne względem ω/α_n i v , co przy $v = \omega/k$ prowadzi do równości

$$(3.18) \quad k = \alpha_n.$$

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiedniość rezonansu na fali stojącej przy danym ω i α_n , wyciszonym z (3.13) z rezonansem na fali bieżącej, gdy jej prędkość osiągnie prędkość fali Rayleigha. Wtedy przy danym ω fala ta ma $k = \alpha_n$. Przy v rosnącym począwszy od $v > a_2$ następuje wypromieniowanie jednej, zaś od $v > a_1$ — dwóch fal Czerenkowa.

Zauważmy, że w obu przypadkach przy przejściu przez rezonans następuje zmiana fazy amplitudy, promieniowanie zaś Czerenkowa zaczyna się dopiero po przekroczeniu prędkości dźwięku (rys. 1). Przypadek $M(0) = 0$ nie powoduje nieograniczoneści u_1 , u_2 ,



Rys. 1

gdyż liczniki tych wyrażeń znikają również dla $v = 0$. Wynik powyższy otrzymaliśmy, jak już wspomniano, w rezultacie symetrii efektu rezonansu dla fal bieżących na prawo i na lewo, co w rezultacie superpozycji daje

$$\sigma_{22} = -\frac{A_0}{2} (e^{ik(x-vt)} + e^{ik(x+vt)}) = -A_0 e^{ikx} \cos kv t = -A_0 e^{ikx} \cos \omega t,$$

skąd

$$\text{Re } \sigma_{22} = -A_0 \cos \omega t \cos \alpha_n x, \quad k = \alpha_n,$$

a więc w rezultacie otrzymuje się rezonansową falę stojącą.

3.4. Równania magnetosprężystości. Przytoczmy obecnie bez obliczeń gotowe rozwiązanie dla równań magnetosprężystości doskonałego przewodnika sprężystego w pierwotnym polu magnetycznym równoległym do osi (x_1) [3].

Równania problemu dla przewodnika mają postać

$$(3.19) \quad \left(a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 + (a_1^2 - a_2^2) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0,$$

$$(a_1^2 - a_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \left(\bar{a}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \bar{a}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3 = 0,$$

gdzie a_1 , a_2 — prędkości fal podłużnych i poprzecznych oraz $\bar{a}_i^2 = a_i^2 + \kappa$ przy $\kappa = B^2/4\pi\rho$, przy czym B oznacza indukcję magnetyczną stałą, ρ gęstość ośrodka.

Równanie pola w próżni jest

$$(3.20) \quad \nabla^2 \bar{h} - \frac{1}{c^2} \ddot{\bar{h}} = 0.$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$(3.21) \quad (a_1^2 + \kappa) u_{3,3} + (a_1^2 - 2a_2^2) u_{1,1} + \frac{B}{4\pi\rho} \bar{h}_1 = N(x, t),$$

$$u_{1,3} + u_{3,1} = 0, \quad \bar{h}_{1,3} = B \left(u_{3,11} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_3 \right)$$

gdzie dla fali stojącej i bieżącej $N(x, t)$ wynosi odpowiednio

$$(3.22) \quad N(x, t) = -p_0 \sin \omega t \cos \alpha_n x_1, \quad N(x, t) = -p_0 e^{ik(x_1 - vt)}.$$

W obu przypadkach otrzymujemy identyczny warunek rezonansu, czyli $M = 0$ w postaci:

$$(3.23) \quad M = (m+b^2)(m-2)\beta_1^2\beta_2^2 + (m+b^2)(m-e^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \{(m+b^2)(m-e^2) + (m-2) \times \\ \times [3m+2-me^2+b^2(m-e^2)]\} \beta_1\beta_2 + b^2(m-1)(m-e^2)(\beta_1 + \beta_2) - (m-e^2)[3m- \\ -2-me^2+b^2(m-e^2)] = 0,$$

przy czym β_i znajdujemy z równania

$$(3.24) \quad (m+b^2)\beta_i^2 + [e^2(m+b^2+1) - b^2(m+1) - 2m]\beta_i + (m-e^2)(1+b^2-e^2) = 0,$$

gdzie

$$(3.25) \quad m = \frac{a_1^2}{a_2^2}, \quad b^2 = \frac{\kappa}{a_2^2}, \quad e^2 = \frac{\omega^2}{a_2^2 \alpha_n^2} \quad \text{lub} \quad e^2 = \frac{v^2}{a_2^2}$$

(przy $v = \omega/k, \quad k = \alpha_n$).

Warunek $M = 0$ odpowiada prędkości fal Rayleigha w problemie magneto-sprężystości. W zależności od wielkości b^2 fale Rayleigha, a więc i rezonans na fali bieżącej oraz również na fali stojącej jest albo możliwy, albo niemożliwy. Mogą także wystąpić przypadki nieostrego rezonansu. Dyskusja warunków istnienia fal powierzchniowych w funkcji b^2 podana jest w pracy [3]. Istotny jest tutaj wniosek analogiczny do poprzedniego, dotyczący równoważności problemu rezonansu dla fali stojącej i fali bieżącej z prędkością Rayleigha, który jest także wynikiem efektu symetrii.

3.5. Równania piezoelektryczności. Rozważmy ośrodek piezoelektryczny wypełniający półprzestrzeń przy danym warunku brzegowym dla indukcji elektrycznej w postaci fali stojącej lub bieżącej.

Równania piezoelektryczności mają postać

$$(3.26) \quad \varrho u_i = E_{ikmn} u_{m,nk} - r_{lki} \varphi_{,lk}, \quad D_{i,i} = 0,$$

gdzie

$$(3.27) \quad E_i = \varphi_{,i}, \quad \sigma_{ik} = E_{ikmn} (u_{m,n} + u_{n,m}), \quad D_i = r_{iki} (u_{k,i} + u_{i,k}) + \varepsilon_{ij} \varphi_{,j},$$

przy warunkach brzegowych

$$(3.28) \quad \sigma_{3i} = 0, \quad D_3 = N, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$(3.29) \quad N = -N_0 \sin \omega t \cos \alpha_n x_1 \quad \text{lub} \quad N = -N_0 e^{ik(x_1 - vt)}$$

W równaniach tych pominięto wpływ pola w próżni.

Jeżeli rozważyć [4 i 5] np. piezokwarc oraz aproksymować cechy mechaniczne za pomocą modelu izotropowego, wtedy np. dla osi x_1, x_3 równania (3.20) do (3.21) przejdą w równania następujące [4 i 5]:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} (a_1^2 - a_2^2)(u_{1,11} + u_{3,13}) + a_2^2 \nabla^2 u_1 - \ddot{u}_1 - e\varphi_{,11} &= 0, \\ (a_1^2 - a_2^2)(u_{1,13} + u_{3,33}) + a_2^2 \nabla^2 u_3 - \ddot{u}_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \varepsilon \nabla^2 \varphi + 4\pi e_{11} u_{1,1} &= 0, \quad e = \frac{e_{11}}{\rho}; \\ \sigma_{11} = \rho a_1^2 u_{1,1} + \rho (a_1^2 - 2a_2^2) u_{3,3} - e_{11} \varphi_{,1} &= 0, \\ \sigma_{13} = \rho a_2^2 (u_{1,3} + u_{3,1}) &= 0, \quad D_3 = \varepsilon \varphi_{,3} = N. \end{aligned}$$

Eliminując w (3.30) u przez φ otrzymamy dla φ równanie

$$(3.32) \quad \nabla^2 \square_1 \square_2 \varphi + \kappa a_2^2 [\square_2 \varphi + a_1^2 (1-m) \varphi_{,33}]_{,1111} = 0,$$

gdzie

$$\kappa = \frac{4\pi e_{11}^2}{\rho \varepsilon a_2^2} \ll 1, \quad m = \frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad \square_i = a_i^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Stosując rachunek zaburzeń względem κ obliczamy M i warunek rezonansu dla fali stojącej i bieżącej w postaci (por. [4, 5])

$$(3.33) \quad M = p_1 W_1 - p_2 W_2 + p_3 W_3 = 0,$$

gdzie

$$(3.34) \quad \begin{aligned} W_1 = R_2 Q_3 - R_3 Q_2, \quad W_2 = R_1 Q_3 - R_3 Q_1, \quad W_3 = R_1 Q_2 - R_2 Q_1, \\ R_j = 2i \alpha_j \beta_j + (\beta_j^2 + 1) \gamma_j, \quad Q_j = [\beta_j^2 - (1 - 2m)] \alpha_j - 2mi \beta_j \gamma_j, \\ p_i = \varepsilon \beta_i \end{aligned}$$

oraz

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \alpha_j = \frac{i}{(\beta_j^2 - 1 + m \xi^2)(\beta_j^2 - 1) a_1^2}, \quad \gamma_j = \frac{\beta_j}{(\beta_j^2 - 1 + \xi^2)(\beta_j^2 - 1) a_2^2}, \\ \xi = \frac{\omega}{\alpha_n a_2} \quad \text{lub} \quad \xi = \frac{v}{a_2}, \end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \beta_i^2 &= \beta_{0i}^2 + b_i, \\ \beta_{01}^2 &= 1 - m \xi^2, \quad \beta_{02}^2 = 1 - \xi^2, \quad \beta_{03}^2 = 1, \quad b_1 = \frac{\kappa}{m \xi^4}, \quad b_2 = -\kappa \frac{1 - \xi^2}{\xi^4}, \\ b_3 &= \frac{1 - m(1 - \xi^2)}{m \xi^4}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc podobnie jak poprzednio identyczne warunki rezonansu dla obu przypadków, to jest dla fali stojącej i bieżącej przy $v = \omega/k$.

Z przytoczonych wyżej przykładów wynika, że zasadzie wiążącej stan rezonansu na falach stojących i biegnących można przypisać charakter ogólniejszy, aniżeli wynika to z klasy przytoczonych tutaj przypadków. Mianowicie, jeżeli w problemie brzegowym półnieograniczonego ośrodka opisywanego równaniami bezdyspersyjnymi oraz operatorami samosprzężonymi (po rozdzieleniu zmiennej względem t dla fali stojącej) istnieją wartości własne, wtedy powinna zachodzić wyżej wspomniana równoważność stanów rezonansowych dla fal stojących i biegnących. Dowód powyższy można by przeprowadzić ogólnie dla bardzo szerokiej klasy (dowolnego rzędu) operatorów. Jednakże sens fizyczny oraz znaczenie praktyczne mają przeprowadzone wyżej równania jedynie dla konkretnych problemów fizycznych, które (w przypadku fali bieżącej) są związane z istnieniem fal powierzchniowych albo stanów rezonansowych, dla których interpretacja fali bieżącej lub stojącej ma sens. Dlatego zaniechamy tutaj rozważań ogólnych ograniczając się jedynie do uwagi, że podobna sytuacja powstanie i w innych zagadnieniach fizycznych wyżej wspomnianego typu.

W przypadku układów fizycznych opisanego typu wspomniana wyżej równoważność jest, jak łatwo wykazać ogólniej, wynikiem symetrii procesów rezonansu dla fal biegnących w lewo i prawo, co w efekcie daje stan superpozycyjny rezonansowej fali stojącej. To kryterium fizyczne jest równoważne cytowanemu wyżej kryterium formalnemu.

Na zakończenie zauważmy, że w przypadku układów nieograniczonych równania można bez trudu rozszerzyć i na układy dyspersyjne; wtedy oczywiście v_{kr} w układzie z falą bieżącą zależą będzie od wektora falowego k .

4. Wnioski końcowe

Reasumując nasze rozważania należy stwierdzić, że wykazaliśmy równoważność problemów rezonansu dla fali stojącej i bieżącej (z prędkością dźwięku) w układach nieograniczonych oraz w układach półnieograniczonych, przy czym w tym przypadku równoważność ta ma miejsce dla prędkości propagacji biegnącej fali wymuszającej, odpowiadającej prędkości fali Rayleigha.

Istotnym wnioskiem jest tutaj fakt, że w układzie półnieograniczonym można uzyskać rezonans za pomocą wymuszeń na brzegu w postaci fali stojącej, przy czym równanie charakterystyczne problemu jest identyczne z równaniem charakterystycznym dla fali Rayleigha, jeżeli tylko przyjąć $\alpha_n = k$. Zjawisko to łatwo uzasadnić posługując się cechami symetrii fal biegnących w przeciwnych kierunkach, które nakładając się na siebie tworzą falę stojącą. Fakt ten może mieć zasadnicze znaczenie praktyczne, np. przy rezonansowej generacji drgań wymuszonych w cienkich przypowierzchniowych warstwach dla piezokryształów itp.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK (pod redakcją naukową S. KALISKIEGO), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.

2. S. KALISKI, *Self-excited vibration of a system of oscillators moving on the surface of an elastic semi-space*, Proc. Vibr. Probl., 1, 5 (1964).
3. S. KALISKI, D. ROGULA, *Rayleigh's waves in a magnetic field in the case of a perfect conductor*, Proc. Vibr. Probl., 5, 1 (1960).
4. S. KALISKI, *Stability of relative contactless motion of piezoelectric bodies*, Proc. Vibr. Probl., 2, 7 (1966).
5. S. KALISKI, *Čerenkov generation of ultra and hypersounds (II-Piezoquartz)*, Proc. Vibr. Probl. 3, 7 (1966).

Р е з ю м е

О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

В работе рассмотрена проблема резонанса в неограниченных системах, а также в краевых задачах для бегущих и стоячих волн в полуограниченных системах. В ряде задач для волновых уравнений теории упругости, магнитоупругости, пьезоэлектричества показана эквивалентность резонансных состояний для бегущих и стоячих волн.

Проанализирована связь этих явлений с излучением черенковского типа. Показано, что для класса рассматриваемых задач эквивалентность резонансных состояний для бегущих и стоячих волн вызвана симметрией решений для резонансных состояний противоположно направленных бегущих волн. В результате наложения получается резонансное состояние для стоячей волны. Данное явление дает возможность, например в задаче о полупространстве возбуждаемом на краю стоячей волной, определить резонансные параметры при помощи характеристического уравнения тождественного с характеристическим уравнением для волн Рэлея в случае резонанса бегущей волны.

Описанное явление может найти применение например при резонансном генерировании вынужденных колебаний в тонких приповерхностных слоях.

S u m m a r y

ON RESONANCE PHENOMENA IN UNBOUNDED SYSTEMS

The problem of resonance in unbounded and semi-bounded systems subject to harmonic vibrations or to travelling waves is considered. The equivalence of the resonance states due to both types of waves is demonstrated on several cases of wave equations of elasticity, magneto-elasticity and piezo-electricity; the Čerenkov-type radiation phenomena are taken into consideration. It is shown that — in the domain of problems considered here — the equivalence of resonance states of harmonic vibrations and travelling waves results from the property of symmetry of waves travelling in opposite directions; their superposition yields the state of resonance corresponding to harmonic vibrations of the medium. This makes it possible to determine the resonance parameters of a semi-space harmonically disturbed on the boundary, by means a characteristic equation which is identical with that of the Rayleigh wave.

This phenomenon can be practically applied to the resonance generation of forced vibrations in thin surface layers.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ
INS TYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 grudnia 1966 r.

FALE POWIERZCHNIOWE W OŚRODKU Z NAPRĘŻENIAMI MOMENTOWYMI

CZESŁAW RYMARZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przeprowadzone eksperymenty [1] wykazały, że teoria sprężystości nie jest w stanie opisać dostatecznie poprawnie zjawisk w miejscach, gdzie występują duże gradienty naprężeń (obszary ich koncentracji). Przepuszczalnie zaczyna się tam przejawiać dyskretna polikrystaliczna struktura materii. Stąd też rozbieżności między opisem teoretycznym i eksperymentem będą tym większe, im bardziej gruboziarnisty będzie badany materiał.

Zmusza to do poszukiwania innych metod opisu tych zjawisk, wśród których dominującą rolę odgrywają nadal metody fenomenologiczne, posługujące się pojęciem ośrodka ciągłego. Lepszy opis teoretyczny zjawisk można uzyskać drogą wzbogacenia oddziaływań wewnętrznych w ośrodku kontynuualnym. Przez wyróżniony myślowo przekrój przenosi się nie tylko siła, ale i moment powierzchniowy, co powoduje istnienie naprężeń momentowych w ośrodku. Były one stosowane uprzednio w teorii powłok. Do teorii ośrodka ciągłego wprowadzili je bracia Cosseraci w 1909 r. Wprowadzenie tensora napięć momentowych do opisu stanu mechanicznego kontinuum powoduje niesymetrię tensora napięć oraz zmusza do rozważania wzbogaconego obrazu stanu deformacji przez uwzględnienie w równaniach konstytutywnych wyższych gradientów deformacji, gradientów obrotu lub wprowadzenie dodatkowych lokalnych stopni swobody. Ta rozwinięta struktura deformacji jest w stanie lepiej modelować rzeczywiste własności materii i uchwycić efekty dodatkowych oddziaływań o postaci sił niecentralnych.

Różnorodne materiały mogą przy tym wymagać rozmaicie określonego stanu deformacji, który będzie dobrze opisywał ich własności mechaniczne. Zagadnieniom tym poświęcono wiele prac [2–6].

W przedstawionej pracy będziemy opierać się głównie na metodzie podanej przez KOITERA [3] i rozszerzonej na zagadnienia dynamiczne termosprężone przez NOWACKIEGO [7]. Metoda powyższa posługuje się pojęciem ośrodka ciągłego o trzech geometrycznych stopniach swobody przy uwzględnieniu w równaniach stanu gradientów obrotu wyrażalnych przez rotację wektora przemieszczeń. Wprowadza się nowe wielkości mechaniczne takie, jak wektor sił momentowych Y , wektor momentów powierzchniowych g oraz tensor naprężeń momentowych μ_{ij} .

Celem tej pracy jest zbadanie w oparciu o wyżej wymienione prace zagadnień związanych z falami powierzchniowymi w tak określonym ośrodku (rodzaj ośrodka Cosseratów). Badania takie są szczególnie cenne dla zagadnień propagacji fal bardzo krótkich (ultradźwięki), gdyż wówczas mogą pojawić się nowe efekty związane z rzeczywistą budową ziarnistą materii.

Autor zdaje sobie sprawę z faktu, że sens tak określonego ośrodka, w którym naprężenia momentowe są równoważone tylko przez orbitalny moment pędu i przez niesymetryczną część tensora napięć, może budzić wątpliwości. Jednak wyżej określony ośrodek Cosseratów nie wykazuje cech wewnętrznej sprzeczności, jeżeli chodzi o zasady zachowania, może więc być rozpatrywany jako jeden z możliwych modeli ośrodków w celu dostarczenia materiału do porównania z innymi typami ośrodków.

W punkcie 2 przedstawiono w sposób zwięzły najważniejsze relacje opisujące stany dynamiczne rozważanego ośrodka. W punkcie 3 określa się obszary istnienia fal powierzchniowych i wyznacza się podstawowe równania dyspersyjne. W punkcie 4 przeprowadza się analizę uzyskanych wyników liczbowych i formułuje się szereg wniosków dotyczących badanego ośrodka. W zakończeniu podaje się perspektywy wykorzystania otrzymanych wyników przy dalszych badaniach ośrodków Cosseratów.

2. Podstawy teorii termosprężonych procesów dynamicznych

Zasady zachowania pędu i momentu pędu w rozważanym ośrodku Cosseratów wyrażają się następująco:

$$(2.1) \quad \sigma_{ji,j} + \rho X_i - \rho \ddot{u}_i = 0,$$

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + \rho Y_i = 0;$$

μ_{ij} oznacza tensor napięć momentowych, Y_i wektor sił momentowych, pozostałe wielkości mają takie samo znaczenie jak w klasycznym ośrodku sprężystym.

Tensor napięć jest obecnie tensorem niesymetrycznym. Jednak jego część antysymetryczna wyraża się w oparciu o (2.2) następująco:

$$(2.3) \quad r_{mn} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} (\mu_{ji,j} + \rho Y_i).$$

Po uwzględnieniu (2.3) równanie ruchu (zachowania pędu) przyjmuje postać:

$$(2.4) \quad s_{mn,m} - \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} [m_{ji,jm} + (\rho Y_i)_{,m}] + \rho X_n - \rho \ddot{u}_n = 0,$$

gdzie m_{ij} oznacza część dewiatorową tensora naprężeń momentowych, s_{mn} część symetryczną tensora naprężeń.

Pochodna gęstości energii wewnętrznej wyraża się następująco:

$$(2.5) \quad \dot{U} = s_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ij} \dot{\kappa}_{ij} - q_{i,i},$$

gdzie

$$\dot{\kappa}_{ij} = \dot{\omega}_{i,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \dot{u}_{n,mj}.$$

Gęstość energii wewnętrznej zależy tutaj od gradientów obrotu κ_{ij} , co jest konsekwencją przyjętego modelu.

Funkcja energii swobodnej dla ośrodka izotropowego ma następującą postać:

$$(2.6) \quad F = \mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2} (\gamma_{kk})^2 + \mu' \kappa_{ij} \kappa_{ij} + \mu'' \kappa_{ij} \kappa_{ji} - \beta \gamma_{kk} \theta - \frac{m}{2} \theta^2.$$

Wynikają stąd równania konstytutywne dla rozważanego ośrodka:

$$(2.7) \quad s_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda(\gamma_{kk} - \beta\theta)\delta_{ij}, \quad m_{ij} = 4\mu l^2(\alpha_{ij} + \eta\alpha_{ji}),$$

gdzie β jest stałą sprzężenia termomechanicznego, λ , μ stałe Lamégo, l , η nowe stałe materiałowe.

Po wstawieniu równań konstytutywnych do równania ruchu otrzymujemy układ równań w przemieszczeniach:

$$(2.8) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{i,ji} - \mu l^2(u_{i,jj} - u_{j,ij})_{,kk} + X_i - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}Y_{k,j} = \ddot{u}_i + \beta\theta_{,i}.$$

W rozważanym ośrodku można postawić pięć niezależnych warunków brzegowych:

$$(2.9) \quad \left[s_{hl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{hkl}(m_{jk,j} - m_{(nn),k} + Y_k) \right] n_h = \bar{p}_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$(2.10) \quad m_{jh}n_j - m_{(nn)}n_h = \bar{g}_h.$$

Poza tym powinien być również spełniony warunek konturowy na konturach ograniczających gładkie części powierzchni⁽¹⁾:

$$(2.11) \quad Q = \frac{1}{2} [m_{(nn)+} - m_{(nn)-}].$$

Przedstawione relacje pozwolą zbadać własności fal powierzchniowych.

3. Fale powierzchniowe w półprzestrzeni

Jak wiadomo, rozwiązanie zadania polega na określeniu rozwiązań szczególnych równań ruchu (2.8) malejących w kierunku osi x_3 niezależnych od x_2 (fala płaska) oraz spełniających jednorodne warunki naprężeniowe (2.9), (2.10) na płaszczyźnie $x_3 = 0$ (rys. 1). Należy również zbadać warunki gwarantujące istnienie tego typu rozwiązań.

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań wyrażmy warunki brzegowe w przemieszczeniach.

Ponieważ w rozważanym przypadku $n = (0, 0, 1)$, stąd

$$(3.1) \quad m_{(nn)} = m_{ij}n_jn_i = m_{33}. \quad (\text{nie sumować}).$$

Zauważmy następnie, że tensor dewiator jest w tym przypadku tensorem antysymetrycznym, co wynika z własności tensora Ricciego oraz z poniższej zależności:

$$(3.2) \quad m_{ij} = 4\mu l^2(\varepsilon_{jkl}u_{l,ki} + \eta\varepsilon_{ikl}u_{l,kj}).$$

Przyjmując następnie w myśl założenia o falach powierzchniowych $Y_k = 0$ otrzymamy z (2.9)

$$(3.3) \quad \left(s_{hl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{hkl}m_{jk,j} \right) n_h = \bar{p}_l.$$

Po dokonaniu szeregu przekształceń i uwzględnieniu (3.2) związek (3.3) przyjmuje postać:

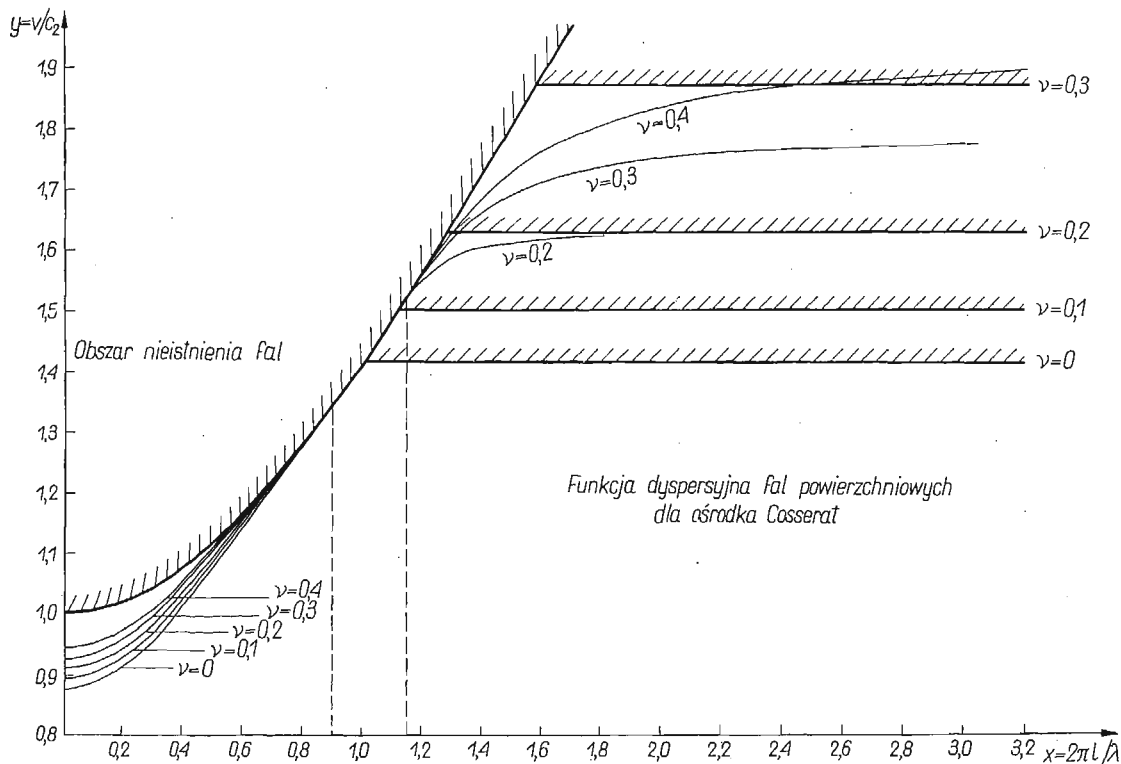
$$(3.4) \quad (s_{hl} + 2\mu l^2 u_{[h,l],j}) n_h = \bar{p}_l,$$

⁽¹⁾ Przedstawione wyżej relacje są zawarte w [3, 7]. Umieszczono je tutaj w celu nadania pracy większej przejrzystości.

co po uwzględnieniu postaci równania konstytutywnego dla s_{hl} można zapisać następująco:

$$(3.5) \quad \lambda \delta_{hl} u_{k,k} + \mu [u_{(h,l)} + l^2 u_{[h,l],kk}] n_h = \bar{p}_l,$$

gdzie $u_{(h,l)}$, $u_{[h,l]}$ są częścią symetryczną i antysymetryczną tensora gradientów przemieszczeń. Widać stąd, że po założeniu $l = 0$, otrzyma się klasyczne warunki dla składowych wektora sił powierzchniowych.



Rys. 1

Ponieważ dla rozważanego przypadku mamy $n_h = \delta_{3h}$, zatem

$$(3.6) \quad \lambda \delta_{3l} u_{k,k} + \mu [u_{(3,l)} + l^2 u_{[3,l],kk}] = \bar{p}_l.$$

Widoczne jest, że dla składowej normalnej ($l = 3$) otrzymuje się zawsze warunki klasyczne ($u_{[3,3]} = 0$).

Równania dla składowych wektora momentów powierzchniowych po rozpisaniu i uwzględnieniu faktu, że $m_{(nn)} = 0$ przyjmują postać

$$(3.7) \quad \begin{aligned} u_{3,23} - u_{2,33} + \eta (u_{2,11} - u_{1,21}) &= \frac{\bar{g}_1}{2\mu l^2}, \\ u_{1,33} - u_{3,13} + \eta (u_{1,22} - u_{2,12}) &= \frac{\bar{g}_2}{2\mu l^2}. \end{aligned}$$

Poszukiwanie rozwiązań dla fal powierzchniowych w postaci fal płaskich ($u_2 = 0$) powoduje automatyczne spełnienie jednego z równań ruchu, jednego z jednorodnych warunków brzegowych (3.6) (dla $l = 2$) oraz warunku jednorodnego (3.7)₁.

Z uwagi na rozważania procesów dynamicznych można przyjąć, że będą im towarzyszyły przemiany adiabatyczne, co z uwagi na brak wewnętrznych źródeł entropii prowadzi do jej zachowania:

$$(3.8) \quad \dot{s} = \beta_T \dot{\gamma}_{kk} + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \dot{\theta} = 0.$$

Stąd

$$\theta_{,i} = -\frac{\beta_T}{c_\varepsilon T_0} u_{k,ki}.$$

Pozwala to wyeliminować gradient temperatury z równań ruchu (2.8):

$$(3.9) \quad \mu_T u_{i,jj} + \lambda_s u_{j,ij} - \mu_T l^2 (u_{i,jj} - u_{j,ij})_{,kk} = \rho \ddot{u}_i,$$

gdzie μ_T , λ_T — stałe Lamégo dla procesu izotermicznego

$$(3.10) \quad \lambda_s = \lambda_T + \frac{\beta_T^2}{c_\varepsilon T_0}.$$

Po dokonaniu rozkładu wektora przemieszczeń otrzymujemy ogólnie

$$(3.10) \quad u_i = \Phi_{,i} + \varepsilon_{ijk} \Psi_{k,j}$$

oraz dla zagadnienia płaskiego

$$(3.10a) \quad u_1 = \Phi_{,1} + \Psi_{,3}, \quad u_3 = \Phi_{,3} - \Psi_{,1}.$$

Po podstawieniu (3.10a) do (3.9) otrzymuje się równanie rozprężone dla potencjałów Φ , Ψ :

$$(3.11) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_{1a}^2} \partial_t^2 \right) \Phi = 0, \quad \left[(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 \right] \Psi = 0,$$

gdzie

$$c_{1a}^2 = \frac{\lambda_s + 2\mu_T}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_T}{\rho}.$$

W myśl poczynionych założeń rozwiązania dla funkcji Φ , Ψ przewidujemy w postaci:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Phi &= A e^{-\alpha x_3 + i(kx_1 - \omega t)}, \\ \Psi &= B e^{-\beta x_3 + i(kx_1 - \omega t)}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu przewidywanych rozwiązań do równań (3.11) otrzymuje się następujące związki między parametrami.

Z równania (3.11)₁

$$(3.13) \quad \alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_{1a}^2};$$

z równania (3.11)₂

$$(3.14) \quad (\beta^2 - k^2) [1 - l^2(\beta^2 - k^2)] + \frac{\omega^2}{c_2^2} = 0,$$

a po rozwiązaniu względem β^2 :

$$(3.15) \quad \beta_{1,2}^2 = k^2 + \frac{1}{2l^2} \pm \sqrt{\frac{1}{l^4} + \frac{4\omega^2}{c_2^2 l^2}}.$$

Jak widać, wartości $\beta_{1,2}^2$ będą zawsze rzeczywiste, co gwarantuje istnienie fal powierzchniowych monotonicznie zanikających z głębokością (w kierunku osi x_3).

Wymaganie, aby β_1, β_2 były liczbami rzeczywistymi, prowadzi do warunku

$$(3.16) \quad \frac{v}{c_2} \leq \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)^2},$$

gdzie $v = \omega/k$ oznacza prędkość fazową fal powierzchniowych, a λ długość fali. Nierówność powyższa oraz nierówność

$$(3.17) \quad \frac{v}{c_{1a}} \leq 1$$

wynikająca z (3.13) określają obszar istnienia fal powierzchniowych na płaszczyźnie $(v/c_2, l/\lambda)$.

Bliższą analizę tego obszaru przeprowadzimy w punkcie 4. Żądanie spełnienia jednorodnych naprężeniowych warunków brzegowych na płaszczyźnie $x_3 = 0$ prowadzi w oparciu o (3.6) i (3.7) do zależności dla funkcji Φ, Ψ :

$$(3.18) \quad \begin{aligned} (\lambda_s + 2\mu_T)\Phi_{,33} + \lambda_s\Phi_{,11} - 2\mu_T\Psi_{,13} &= 0, \\ 2\Phi_{,13} + \Psi_{,33} - \Phi_{,11} - l^2\nabla^2\nabla^2\Psi &= 0, \quad \nabla^2\Psi_{,3} = 0. \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że w warunki brzegowe nie wchodzi nigdzie stała materiałowa η , co ułatwia znacznie prowadzenie dalszych rozważań.

Warunek brzegowy konturowy (2.11) jest spełniony automatycznie ze względu na ciągłość wektora normalnego (gładkość powierzchni).

Po podstawieniu (3.12) do (3.18) otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych jednorodnych dla stałych dowolnych A, B_1, B_2 :

$$(3.19) \quad \begin{aligned} [(\lambda_s + 2\mu)\alpha^2 - \lambda_s k^2]A + 2\mu ik\beta_1 B_1 + 2\mu ik\beta_2 B_2 &= 0, \\ -2ik\alpha A + [k^2 + \beta_1^2 - l^2(\beta_1^2 - k^2)^2]B_1 + [k^2 + \beta_2^2 - l^2(\beta_2^2 - k^2)^2]B_2 &= 0, \\ \beta_1(\beta_1^2 - k^2)B_1 + \beta_2(\beta_2^2 - k^2)B_2 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\mu_T = \mu$.

Wymaganie istnienia nietrywialnych rozwiązań powyższego układu prowadzi do żądania zerowania się jego wyznacznika

$$(3.20) \quad D = \begin{vmatrix} (\lambda_s + 2\mu)\alpha^2 - \lambda_s k^2 & 2\mu ik\beta_1 & 2\mu ik\beta_2 \\ -2ik\alpha & k^2 + \beta_1^2 - l^2(\beta_1^2 - k^2)^2 & k^2 + \beta_2^2 - l^2(\beta_2^2 - k^2)^2 \\ 0 & \beta_1(\beta_1^2 - k^2) & \beta_2(\beta_2^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu wyznacznika względem ostatniego wiersza i dokonaniu szeregu przekształceń otrzymujemy

$$(3.21) \quad \left[2\mu k^2 - (\lambda_s + 2\mu) \frac{\omega^2}{c_{1a}^2} \right] \left[2k^2 + \frac{1}{4l^2} (1-p^2) \right] [\beta_2(1-p) - \beta_1(1+p)] = -8\mu k^2 \alpha p \beta_1 \beta_2,$$

gdzie

$$p = \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 l^2}{c_2^2}};$$

stąd po dalszych przekształceniach dochodzimy do zależności

$$(3.22) \quad \left[2 - \left(\frac{v}{c_2} \right)^2 \right]^4 \left[\left(1 + \frac{2\omega^2 l^2}{c_2^2} \right) \left(k^2 l^2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{2\omega^2 l^2}{c_2^2} + \right. \\ \left. + 2\beta_1 \beta_2 \frac{\omega^2 l^2}{c_2^2} \right] = 16 \left(1 + \frac{4\omega^2 l^2}{c_2^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c_{1a}^2} \right) \left[k^2 l^2 + 1 - \frac{\omega^2}{c_2^2 k^2} \right]$$

lub po wprowadzeniu oznaczeń $v/c_2 = y$, $kl = 2\pi l/\lambda = x$

$$(3.23) \quad [2 - y^2]^4 [1 + 2y^2 x^4 + x^2 + 3x^2 y^2 + 2x^2 y^2 \sqrt{x^2 + 1 - y^2}] = \\ = 16(1 + 4x^2 y^2)(1 - \gamma y^2)(x^2 + 1 - y^2),$$

gdzie $\gamma = \mu/(\lambda_s + 2\mu)$.

Jeżeli w (3.23) przyjąć $l = 0$ ($x = 0$), otrzymuje się równanie charakterystyczne dla klasycznych fal Rayleigha:

$$(3.24) \quad (2 - y^2)^4 = 16(1 - \gamma y^2)(1 - y^2).$$

Z równania (3.23) można określić przebieg zależności opisującej własności dyspersyjne rozważanego ośrodka.

Jak widzimy, fale powierzchniowe w rozważanym ośrodku ulegają dyspersji. Jest to wynikiem paraboliczności układu równań w przemieszczeniach (3.9), która wiąże się z niejednakowym rzędem pochodnych czasowych i przestrzennych.

Gdyby wprowadzić w ośrodku dodatkowe stopnie swobody, uwzględniające własności dynamiczne cząstek przy obrocie, wówczas uzyskano by układ równań hiperbolicznych.

Należy stwierdzić, że w pracy [8] uzyskano również rozwiązania charakteryzujące się dyspersją przy uwzględnieniu w funkcji gęstości działania drugich gradientów deformacji. Należy przypuszczać, że wszystkie ośrodki z rozwiniętą strukturą deformacyjną będą wykazywały cechy dyspersyjne.

Wyznamy jeszcze pole przemieszczeń towarzyszące falom powierzchniowym. Na podstawie (3.10a) i (3.12)

$$(3.25) \quad u_1 = \operatorname{Re} [A i k e^{-\alpha x_3 + i\varphi} + B_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} + B_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}], \\ u_3 = \operatorname{Re} [-A \alpha e^{-\alpha x_3 + i\varphi} + B_1 i k e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} + B_2 i k e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}],$$

gdzie $\varphi = kx_1 - \omega t$.

Wykorzystując liniową zależność stałych B_1 , B_2 od stałej A otrzymujemy po szeregu przekształceń:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} u_1 &= A \operatorname{Re} [ik e^{-\alpha x_3 + i\varphi} - in_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} - in_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}], \\ u_3 &= A \operatorname{Re} [-\alpha e^{-\alpha x_3 + i\varphi} + n_1 k e^{-\beta_1 x_3 + i\varphi} + n_2 k e^{-\beta_2 x_3 + i\varphi}], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.27) \quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{\frac{x}{2}(2-y^2)^2 - 2\tilde{\beta}_1 \sqrt{1-\gamma y^2}}{(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2)(2-y^2)}, \\ n_2 &= \frac{2\tilde{\beta}_1 \sqrt{1-\gamma y^2} - \frac{x}{2}(2-y^2)^2}{(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2)(2-y^2)}. \end{aligned}$$

Jeżeli w (3.26) przyjąć $l = 0$, otrzymuje się automatycznie wyrażenie na przemieszczenie dla fal Rayleigha.

4. Wyniki obliczeń i ich analiza

W oparciu o równanie (3.23) przeprowadzono na elektronicznej maszynie cyfrowej obliczenia funkcji dyspersyjnych dla liczb Poissona 0; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4 przy x zmieniającym się w przedziałach (0–3,5). Obliczono również krzywą stanowiącą granicę obszaru istnienia fal powierzchniowych. Całość obliczeń zilustrowano wykresem (rys. 1 na str. 339).

Jak wynika z uzyskanych wyników fale powierzchniowe nie istnieją dla całego zakresu zmiany liczb Poissona w pobliżu $x = 1$, tj. gdy długość fali staje się porównywalna z wymiarem charakterystycznym l (stała ośrodka).

Nieznamość dokładnego sensu fizycznego wielkości l oraz jej wartości liczbowej nie pozwala podać wnikliwszej interpretacji zaobserwowanego zjawiska. Istniejące w szeregu prac oszacowania l są sprzeczne. W [3] ocenia się ją jako wielkość makroskopową nie mającą w chwili obecnej wytłumaczenia na gruncie fizyki ciała stałego. W takim przypadku nie istniałyby pewne fale powierzchniowe z zakresu technicznie realizowanego, co jest zjawiskiem dość nieoczekiwanym. W pracy [4] wręcz przeciwnie przypisuje się l rozmiary mikroskopowe związane ze strukturą krystaliczną ciała. Rozważane zjawisko dotyczyłoby wówczas fal porównywalnych z rozmiarami sieci krystalicznej ciała.

Fale do zakresu kilkudziesięciu MHz, stanowiące bardzo małą część rozważanego zakresu, odznaczałyby się stosunkowo niewielką dyspersją i uwzględnienie dla nich efektów związanych z ośrodkiem Cosseratów nie miałyby praktycznego znaczenia. Jak wynika z [9], przeprowadzone badania statyczne przy zginaniu belek oraz badania stanów naprężeń wokół otworów o małych średnicach nie wykazały istnienia naprężeń momentowych. Powyższy fakt wskazywałby na to, że rzeczywiście l jest wielkością dość małą. Dlatego też uwzględnienie wpływu naprężeń momentowych miałyby znaczenie dla zagadnień dynamicznych w dziedzinie ultradźwięków o częstości większej od kilkudziesięciu lub kilkuset MHz. Wtedy bowiem powinny dawać o sobie znać dodatkowe oddziaływania o dalekim zasięgu atomów sieci krystalicznej w materiale. Dlatego koncepcja, że l jest wielkością małą, wydaje się bardziej prawdopodobna.

Należy zauważyć ponadto, że dla $\nu = 0$ fale powierzchniowe nie istnieją począwszy od wartości $x = 0,8$. Bliższe badania wykazały jednak, że pierwiastki równania charakterystycznego leżą na linii $v/c_1 = 1$, stanowiącej brzeg obszaru istnienia fal powierzchniowych. Podobnie ma się sprawa z rozwiązaniem dla $\nu = 0,1$. Ogólnie więc istnienie fal powierzchniowych dla małych ν w tym zakresie jest dość problematyczne.

Ogólnie rzecz biorąc przebieg krzywej dyspersyjnej można scharakteryzować następująco:

dla małych wartości x przyrost prędkości fazowej jest dość znaczny, co powoduje, że krzywa wychodzi z obszaru istnienia. Obszar ten ograniczony jest krzywą $\sqrt{1+x^2}$ oraz prostą $v/c_{1a} = 1$;

dla dużych wartości x przyrost prędkości fazowej jest znacznie mniejszy, co powoduje powrót krzywej w obszar i ustalenie się wartości asymptotycznej leżącej tym bliżej linii $v/c_1 = 1$, im mniejsza jest liczba Poissona.

Tak więc widzimy, że dla dużych x prędkość fal powierzchniowych w ośrodku Cosseratów może znacznie przewyższać prędkości fal poprzecznych. Można to tłumaczyć tym, że dla długich fal na skutek znacznego wpływu gradientu obrotów dominującą rolę w fali powierzchniowej zaczynają odgrywać fale podłużne, a wpływ fal poprzecznych zanika z powodu kompensującego działania fali «skrętnej», pochodzącej od naprężeń momentowych. Fakt ten tłumaczy również zjawisko rozszerzania się obszaru istnienia fali.

5. Zakończenie

Przeprowadzone rozważania mogą być traktowane jako wstęp do badań własności dynamicznych ośrodków o bardziej rozwiniętej strukturze deformacyjnej, w szczególności ośrodków z dodatkowymi stopniami swobody. Weryfikacja poprawności przyjętych założeń o ośrodku, o którym wspomniano we wstępie, może być przeprowadzona w przyszłości w oparciu o wyniki badań nad dynamiką bardzo krótkich fal lub w oparciu o wyniki teorii zajmujących się badaniem krystalicznej struktury materii.

Na zakończenie autor tą drogą chciałby złożyć gorące podziękowanie dr D. ROGULI za szereg cennych uwag dotyczących merytorycznej strony problemu.

Literatura cytowana w tekście

1. R. E. PATERSON, *Notch-sensitivity. Metal fatigue* (ed. by G. SINES and J. L. WAISMAN) New York-Toronto-London 1959, 293–306.
2. E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Théorie de corps déformables*, Paris 1909.
3. W. T. KOTTER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proc. Kon. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Nr 1, 17–29, 30–34.
4. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress concentration*, Experimental Mechanics, 3, 1963, 1–7.
5. E. KRÖNER, International J. Engen Sci., 1, 1963, 261.
6. S. KALISKI, *O pewnym modelu ośrodka ciągłego z istotnie niesymetrycznym tensorem napięć*, Biul. WAT 4(116), 1962, 104–117.
7. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 14 (1967).
8. T. J. JARAMILLO, *A generalization of the energy function of elasticity theory*, Diss. Univ. of Chicago 1929.
9. J. SCHIJVE, *Note on couple-stresses*, J. Mech. and Phys. Solids, 2, 14 (1966).

Р е з ю м е

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В работе исследуются свойства поверхностных волн в среде с моментными напряжениями, благодаря которым можно учесть дополнительное взаимодействие частиц материала в областях со значительной концентрацией напряжений или в зонах, где существенно велики градиенты перемещений (диапазон коротких волн в динамических задачах).

Рассматривается среда с тремя локальными степенями свободы и с обогащенным описанием деформаций в виде градиентов вращения выражаемых через ротацию вектора перемещений (разновидность среды Коссера). Определены диапазоны существования поверхностных волн и исследованы дисперсионные свойства волн. Проведен анализ полученных числовых результатов.

S u m m a r y

SURFACE WAVES IN A MEDIUM WITH COUPLE-STRESSES

The properties of surface waves in a medium with couple stresses are investigated. Introduction of the couple stresses into the analysis enables us to take into consideration the additional interaction between particles occurring in the regions of high stress concentration or great displacement gradient (the range of short waves in dynamic problems).

A medium with three local degrees of freedom is considered, including as the additional elements of deformation the gradient of rotation expressed by rotation of the displacement vector (a special kind of the Cosserat medium). The regions of existence of surface waves are defined, and their dispersion properties are investigated. An analysis of numerical results is also presented.

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 października 1966 r.

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA PODŁUŻNA SZYBOWCA W ZESPOLE HOLOWNICZYM

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracach związanych z zagadnieniem holowania szybowców nie rozpatrywano stateczności zespołu holowniczego, tzn. stateczności zespołu składającego się z samolotu holującego na linie szybowiec i szybowca. Rozpatrywano wyłącznie stateczność szybowca traktując samolot jako ciało o nieskończenie wielkiej bezwładności.

W pracy [1] rozpatrywano wpływ liny holowniczej na krytyczną prędkość flatteru. Przyjęto trzy stopnie swobody odkształcalnego szybowca jak również uwzględniono sprężystą wydłużalność liny. Otrzymano układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych liniowych drugiego rzędu, którego rozwiązanie sprowadzało się do znalezienia pierwiastków równania charakterystycznego szóstego stopnia. W pracy nie uwzględniono sił aerodynamicznych działających na linę holowniczą jak również sił i momentów pochodzących od liny holowniczej i działających na szybowiec. Rozważania przeprowadzono dla trzech konkretnych położań szybowca względem samolotu.

Znane prace dotyczące holowania szybowca za samolotem, mianowicie [2, 5, 13 i 17], zostały omówione w pracy [12].

W pracy [12] rozpatrzono przypadek holowania sztywnego szybowca przez samolot o nieskończenie wielkiej masie, lecący poziomo, prostoliniowo, ze stałą prędkością. Rozpatrując stateczność dynamiczną szybowca zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Pozwoliło to na określenie współczynników równania charakterystycznego, zastosowania kryteriów stateczności Routha-Hurwitza oraz obliczenia pierwiastków równania charakterystycznego metodą Bairstowa. W pracy nie uwzględniono dynamiki liny holowniczej jak również zakłóceń wynikających z odchylenia od założonego ruchu samolotu holującego. Na podstawie obliczeń numerycznych zbadano jak wpływa na stateczność szybowca położenie względem samolotu holującego, prędkość holowania, usytuowanie zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca oraz długość i wydłużalność liny holowniczej.

W przypadku samolotu holującego o masie porównywalnej z masą szybowca holowanego występuje wzajemny wpływ ruchów samolotu na szybowiec holowany i odwrotnie. W takim przypadku należy rozpatrzyć stateczność układu: samolot holujący + lina holownicza + szybowiec, co wykonano w niniejszej pracy.

Przedmiotem niniejszej pracy jest przypadek holowania sztywnego szybowca przez sztywny samolot za pośrednictwem ciężkiej, wiotkiej i sprężystej liny holowniczej, obciążonej siłami aerodynamicznymi.

Założono, iż zespół holowniczy znajdował się przed zakłóceniem w poziomym, prostoliniowym, ustalonym locie. Stosując równania Lagrange'a II rodzaju wyprowadzono różniczkowe równania ruchu, które przedstawiono w formie zlinearyzowanej. Otrzymano układ siedmiu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami. Wprowadzając zakłócenie jako warunki początkowe scałkowano numerycznie otrzymany układ równań metodą Runge-Kutta-Gilla. Otrzymane wyniki wskazały wzajemne oddziaływanie na siebie samolotu i szybowca w czasie holowania, co wyraziło się w niemożności rozprzęgnięcia równań ruchu układu. Rozwiązanie układu równań sprowadzono do zagadnienia znajdowania wartości własnych macierzy niesymetrycznych (dowolnych) czternastego stopnia (w omawianym przypadku).

W oparciu o prace [8, 9 i 14] sprowadzono macierz niesymetryczną do postaci quasi-trójkątnej dolnej, a następnie wyznaczono wartości własne.

Znajomość wartości własnych pozwoliła na określenie zmian częstości oscylacji i tłumienia, jak również na bezpośrednie porównanie z wynikami otrzymanymi w pracy [12] dla zagadnienia uproszczonego.

Na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych dla jednego z szybowców wyczynowych i obecnie stosowanego samolotu holującego zbadano, jak wpływa na stateczność szybowca położenie względem samolotu holującego i prędkości holowania.

Ważniejsze oznaczenia

a, a_s [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej szybowca i samolotu w zależności od kąta natarcia,
a_1, a_{1s} [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej usterzenia poziomego w zależności od kąta natarcia usterzenia dla szybowca i samolotu,
b_1, b_2 [m]	połowa rozpiętości szybowca i samolotu,
C_n, C_t	bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły normalnej i stycznej do liny, określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
C_q	bezwymiarowy współczynnik ciężarowy liny,
C_{x1}, C_{x2}	bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu szybowca i samolotu w locie holowanym,
C_{z1}, C_{z2}	bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne siły nośnej szybowca i samolotu w locie holowanym,
d [m]	średnica liny holowniczej,
g [m/s ²]	przyśpieszenie ziemskie,
h_{z1}, h_{z2} [m]	współrzędne zaczepu holowniczego szybowca i samolotu, mierzone pionowo względem środka ciężkości,
J_1, J_2 [kg m s ²]	momenty bezwładności względem osi poprzecznych szybowca i samolotu,
k_{z1}, k_{z2} [m]	współrzędne zaczepu holowniczego szybowca i samolotu mierzone poziomo względem środka ciężkości,
l_0, l_1 [m]	długość liny swobodnej i obciążonej,
l_{a1}, l_{a2} [m]	średnia cięciwa aerodynamiczna szybowca i samolotu,
l_{H1}, l_{H2} [m]	odległość osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości dla szybowca i samolotu,
M_{01}, M_{02} [kG m]	aerodynamiczny moment pochylający szybowca i samolotu,

n [kG/m]	siła aerodynamiczna normalna do liny działająca na 1 m długości liny holowniczej,
P_n [kG]	siła ciągu silnika samolotu,
$P_{x1} = X_1$ [kG]	siła oporu aerodynamicznego szybowca i samolotu,
P_{z1}, P_{z2} [kG]	siła aerodynamiczna wyporu (nośna) szybowca i samolotu,
P_{zH1}, P_{zH2} [kG]	siła nośna usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
q [kG/m]	ciężar jednostkowy metra bieżącego liny,
Q_1, Q_2 [kG]	ciężar szybowca i samolotu,
S_1, S_2 [m ²]	powierzchnia nośna skrzydeł szybowca i samolotu,
S_{H1}, S_{H2} [m ²]	powierzchnia nośna usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
S_n [m ²]	powierzchnia zataczana przez śmigło samolotu,
t [s]	czas,
T [kG]	bieżący naciąg liny holowniczej,
T_1, T_2 [kG]	siła pochodząca od liny holowniczej działająca na zaczepie szybowca i samolotu,
V [m/s]	prędkość lotu,
x_n [m]	odległość płaszczyzny śmigła samolotu od środka ciężkości,
x_{s1}, x_{s2} [m]	odległość środka ciężkości od środka aerodynamicznego dla szybowca i samolotu,
z_{H1}, z_{H2} [m]	odległość pionowa osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości dla szybowca i samolotu,
z_n [m]	odległość linii działania siły ciągu śmigła od środka ciężkości samolotu,
z_{s1}, z_{s2} [m]	odległość pionowa środka aerodynamicznego od środka ciężkości dla szybowca i samolotu,
α_1, α_2 [rad]	kąt natarcia szybowca i samolotu,
α_{H1}, α_{H2} [rad]	kąt natarcia usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
$\alpha_{zH1}, \alpha_{zH2}$ [rad]	kąt zaklinowania usterzenia poziomego szybowca i samolotu,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ [rad]	kąt odchylenia strug spływających ze skrzydeł szybowca i samolotu,
φ_1, φ_2 [rad]	kąty nachylenia liny holowniczej w stosunku do linii lotu, mierzone na zaczepach szybowca i samolotu,
φ_n [rad]	kąt nachylenia linii działania siły ciągu śmigła w stosunku do osi samolotu,
λ [1/kG]	współczynnik wydłużalności liny holowniczej,
A_e, A_{es}	wydłużenie skrzydła szybowca i samolotu,
$\bar{\lambda} = \bar{\xi} \pm i \bar{\eta}$	wartości własne układu równań różniczkowych w postaci bezwymiarowej,
$\bar{\xi} = \xi \hat{t}$	współczynnik tłumienia w postaci bezwymiarowej,
$\bar{\eta} = \eta \hat{t}$	bezwymiarowa częstość oscylacji,
ρ [kG s ² /m ⁴]	gęstość powietrza.

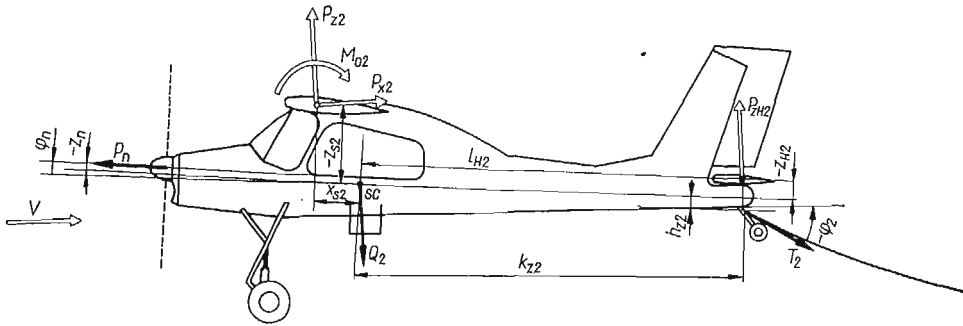
2. Równowaga podłużna samolotu holującego

W ustalonym poziomym locie musi zachodzić równowaga sił i momentów działających na samolot holujący (rys. 1), z czego wynikają trzy równania równowagi

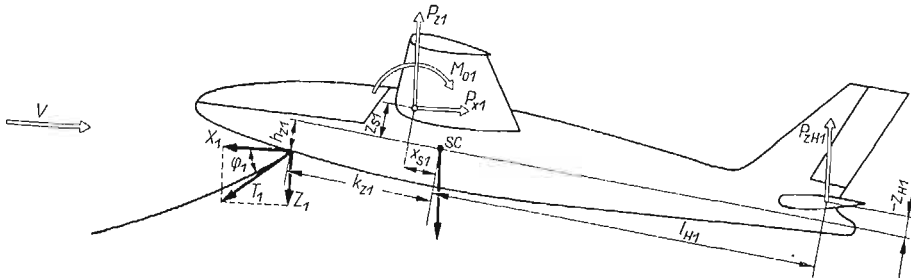
$$(2.1) \quad -P_{z2} - P_{zH2} + Q_2 - T_2 \sin \varphi_2 - P_n \sin(\alpha_2 + \varphi_n) = 0,$$

$$(2.2) \quad -P_{x2} - T_2 \cos \varphi_2 + P_n \cos(\alpha_2 + \varphi_n) = 0,$$

$$(2.3) \quad M_{02} + P_{z2}(x_{s2} \cos \alpha_2 + z_{s2} \sin \alpha_2) + P_{x2}(x_{s2} \sin \alpha_2 - z_{s2} \cos \alpha_2) + \\ + P_n z_n - P_{zH2}(l_{H2} \cos \alpha_2 - z_{H2} \sin \alpha_2) - T_2 \cos \varphi_2 (k_{z2} \sin \alpha_2 + \\ + h_{z2} \cos \alpha_2) - T_2 \sin \varphi_2 (k_{x2} \cos \alpha_2 - h_{x2} \sin \alpha_2) = 0.$$



Rys. 1. Geometria samolotu holującego i układ sił działających na samolot w locie holowanym



Rys. 2. Geometria szybowca i układ sił działających na szybowiec w locie holowanym

Rozpatrując równowagę sił działających na szybowiec holowany stycznych do kierunku prędkości (rys. 2) otrzymano

$$T_1 \cos \varphi_1 - P_{x1} = 0.$$

Z powyższego równania określono siłę naciągu linii holowniczej przyłożoną na zaczepie szybowca holowanego:

$$T_1 = \frac{P_{x1}}{\cos \varphi_1}$$

Korzystając z zależności

$$\frac{T_2 e^{\eta_2}}{\tau_2} = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1},$$

(wyprowadzonej w pracy [12] wzór (4.3)) i podstawiając zależność na T_1 otrzymano siłę T_2 pochodzącą od linii i działającą na zaczep samolotu holującego (rys. 3)

$$(2.4) \quad T_2 = \frac{P_{x1}}{\cos \varphi_1} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_2}} \frac{\tau_2}{\tau_1},$$

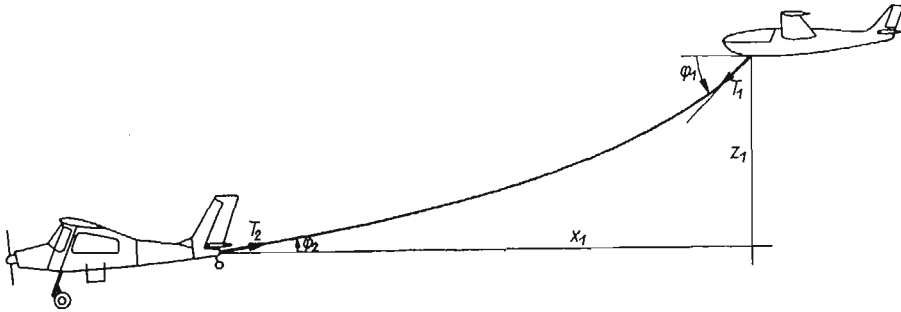
gdzie η_1 , η_2 , τ_1 i τ_2 są to funkcje wyprowadzone w pracy [12] (wzory 4.4 i 4.5).

Z równania (2.2) po podstawieniu zależności (2.4) otrzymano niezbędny ciąg zespołu śmigło-silnikowego samolotu holującego potrzebny do utrzymania zespołu holującego w ustalonym, prostoliniowym, poziomym locie:

$$(2.5) \quad P_n = \frac{1}{\cos(\alpha_2 + \varphi_n)} \left(P_{x2} + P_{x1} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_2}} \frac{\tau_2}{\tau_1} \right).$$

Z równania (2.2) i (2.3) otrzymano siłę nośną, jaka musi być przyłożona na usterzeniu poziomym samolotu holującego, ażeby zapewnić równowagę podłużną:

$$(2.6) \quad P_{zH2} = \frac{1}{l_{H2} \cos \alpha_2 - z_{H2} \sin \alpha_2} \left[M_{02} + P_{z2}(x_{s2} \cos \alpha_2 + z_{s2} \sin \alpha_2) + \right. \\ \left. + P_{x2}(x_{s2} \sin \alpha_2 - z_{s2} \cos \alpha_2) + (P_{x2} + T_2 \cos \varphi_2) \frac{z_n}{\cos(\alpha_2 + \varphi_n)} + \right. \\ \left. - T_2 \cos \varphi_2 (k_{z2} \sin \alpha_2 + h_{z2} \cos \alpha_2) - T_2 \sin \varphi_2 (k_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2} \sin \alpha_2) \right].$$



Rys. 3. Wielkości geometryczne charakteryzujące konfigurację liny holowniczej

Po podstawieniu do równania (2.1) zależności (2.4)–(2.6) i uwzględnieniu, że kąt natarcia α_2 samolotu holującego jest mały, tzn.

$$(2.7) \quad \sin \alpha_2 \approx \text{tg } \alpha_2 \approx \alpha_2, \quad \cos \alpha_2 \approx 1 - \frac{\alpha_2^2}{2},$$

otrzymano równanie, które po podzieleniu przez $\frac{1}{2} \rho S V^2$ sprowadzono do postaci bezwymiarowej. Następnie w powyższe równanie wprowadzono współczynnik oporu samolotu holującego C_{x2} , określony przez współczynnik aerodynamiczny siły nośnej C'_{z2} [3, 4, 12 i 15]:

$$(2.8) \quad C_{x2} = C_{x02} + \frac{(C'_{z2})^2}{\pi A_{es}}, \quad C'_{z2} = \alpha_2 a_s.$$

Po uporządkowaniu otrzymanego równania względem potęg C'_{z2} uzyskano równanie algebraiczne drugiego stopnia

$$(2.9) \quad A (C'_{z2})^2 + B C'_{z2} + C = 0,$$

które pozwoli nam obliczyć współczynnik siły nośnej C'_{z2} samolotu holującego dla danych warunków lotu.

W przypadku $\varphi_n = 0$ współczynniki równania (2.9) mają postać:

$$A = \frac{1}{a_s^2} \left\{ a_s (z_{H2} - z_{s2}) + C_{x02} z_{H2} - \frac{a_s^2}{\pi A_{es}} (z_n - z_{s2}) + \frac{1}{2} C_{m02} l_{a2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad B = & -\frac{1}{a_s} \left\{ (a_s + C_{x02})(l_{H2} + x_{s2}) + \frac{2Q_2}{\rho S_2 V^2} z_{H2} + \right. \\
 & \left. - \frac{2Q_2}{\rho S_2 V^2} l_{H2} + \bar{C}_{x1} [h_{z2} + z_{H2} - \operatorname{tg} \varphi_2 (k_{z2} - l_{H2})] \right\}, \\
 & + \bar{C}_{x1} [k_{z2} + l_{H2} + \operatorname{tg} \varphi_2 (z_{H2} + h_{z2})] \left. \right\}, \\
 C = & -C_{x02}(z_n - z_{s?}) - C_{m02} l_{a2} + \frac{2Q_2}{\rho S_2 V^2} l_{H2} - \bar{C}_{x1} [h_{z2} + z_n - \operatorname{tg} \varphi_2 (l_{H2} + k_{z2})],
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \bar{C}_{x1} = C_{x1} \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\eta_2}} \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{S_1}{S_2}.$$

Z równania (2.9) otrzymano wartość współczynnika siły nośnej samolotu holującego:

$$(2.12) \quad C'_{z2} = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}.$$

Wprowadzając do C'_{z2} poprawkę uwzględniającą działanie śmigła [3, 4, 15 i 20] otrzymano:

$$(2.13) \quad C_{z2} = C'_{z2} \left(1 - 0,064 \frac{S_n}{S_2} \right).$$

Współczynnik siły nośnej samolotu holującego C_{z2} wyznaczony z (2.13) określa parametry lotu samolotu holującego, zapewniające równowagę w ustalonym locie poziomym.

Jak wynika z (2.13) parametry lotu samolotu holującego zależne są od charakterystyki aerodynamicznej samolotu, położenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości samolotu oraz przez \bar{C}_{x1} określone równaniem (2.11) od charakterystyki aerodynamicznej szybowca holowanego C_{x1} i charakterystyki linii holowniczej $\tau_1, \tau_2, e^{\eta_1}, e^{\eta_2}, \varphi_1, \varphi_2$.

Warunki równowagi szybowca holowanego zostały wprowadzone i omówione w pracy [12], rozdział 6.

3. Stateczność statyczna podłużna samolotu holującego

Pojęcie «statycznej stateczności» przyjęte w lotnictwie jest szeroko omówione w wielu pracach i podręcznikach poświęconych dynamice samolotu w locie swobodnym [3, 4, 15].

Warunkiem podłużnej stateczności statycznej w locie swobodnym jest, aby

$$(3.1) \quad \frac{dC_m}{dC_z} < 0$$

dla przyjętego w niniejszej pracy dodatniego kierunku działania momentów pochyłających (moment dodatni jest momentem zadzierającym samolot, powodującym wzrost kąta natarcia).

Stateczność statyczna mówi jedynie o występowaniu momentów wywołujących powrót szybowca do stanu równowagi w pierwszej chwili po zakłóceniu lotu [3, 4, 11]. Szybowiec stateczny statycznie może być niestateczny dynamicznie.

Przez analogię do lotu swobodnego zaproponowano w pracy [12] wprowadzenie pojęcia «stateczności statycznej w locie na holu».

Bezwymiarowy współczynnik momentu pochylającego samolot holujący, liczony względem środka ciężkości samolotu ma postać:

$$(3.2) \quad C_{mh2} = C_{ma2} + C_{ml2},$$

gdzie C_{mh2} oznacza współczynnik momentu pochylającego samolotu holującego, C_{ma2} współczynnik momentu pochylającego, pochodzący od sił aerodynamicznych działających na samolot, C_{ml2} współczynnik momentu pochylającego pochodzący od holu.

W rozważanych warunkach lotu współczynniki te zależą wyłącznie od C_{z2} . Po zróżniczkowaniu (3.2) względem C_{z2} otrzymano

$$(3.3) \quad \frac{dC_{mh2}}{dC_{z2}} = \frac{dC_{ma2}}{dC_{z2}} + \frac{dC_{ml2}}{dC_{z2}}.$$

Zgodnie z określeniami przyjętymi w lotnictwie [3, 4 i 11] otrzymano zapas stateczności statycznej samolotu holującego w postaci:

$$(3.4) \quad \bar{h}_{h2} = \bar{h}_{12} + h_{12},$$

gdzie $\bar{h}_{12} = -dC_{ml2}/dC_{z2}$ oznacza zmianę zapasu stateczności statycznej pochodzącą od holu, $\bar{h}_{12} = -dC_{ma2}/dC_{z2}$ zapas stateczności statycznej z trzymanym sterem (ster wysokości zablokowany) w locie swobodnym.

W celu określenia zapasu stateczności statycznej samolotu holującego rozpatrzono momenty sił działających na samolot, pochodzących od liny holowniczej (rys. 1). Składowe X_2^1 i Z_2^1 siły, pochodzącej od naciągu liny i przyłożonej na zaczepie samolotu holującego, zmieniają się w zależności od kąta natarcia α_2 :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} X_2^1 &= T_2 \cos \varphi_2 + X_{x2}^1(k_{z2} - k_{z2} \cos \alpha_2 + h_{z2} \sin \alpha_2) - X_{z2}^1(k_{z2} \sin \alpha_2 + h_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2}), \\ Z_2^1 &= -T_2 \sin \varphi_2 + Z_{x2}^1(k_{z2} - k_{z2} \cos \alpha_2 + h_{z2} \sin \alpha_2) - Z_{z2}^1(k_{z2} \sin \alpha_2 + h_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2}), \end{aligned}$$

gdzie $X_{x2}^1, X_{z2}^1, Z_{x2}^1, Z_{z2}^1$ są to pochodne «linowe» omówione w p. 4.

Moment pochylający sił pochodzących od liny holowniczej ma postać

$$(3.6) \quad M_{l2} = -X_2^1(h_{z2} \cos \alpha_2 + k_{z2} \sin \alpha_2) + Z_2^1(k_{z2} \cos \alpha_2 - h_{z2} \sin \alpha_2).$$

Po podstawieniu do (3.6) zależności (3.5) i (2.4), uwzględnieniu (2.7) i (2.8) oraz podzieleniu równania momentów przez $\frac{1}{2} \rho S_2 V^2 l_{a2}$ otrzymano współczynnik momentu pochylającego C_{ml2} w postaci bezwymiarowej:

$$(3.7) \quad C_{ml2} = -\bar{C}_{x1}(\bar{k}_{z2} \operatorname{tg} \varphi_2 - \bar{h}_{z2}) - \bar{C}_{x1}(\bar{k}_{z2} - \bar{h}_{z2} \operatorname{tg} \varphi_2) \alpha_2 + \frac{1}{2} \bar{C}_{x1}(\bar{h}_{z2} + \bar{k}_{z2} \operatorname{tg} \varphi_2) \alpha_2^2 - l_{a2} \times \\ \times \left\{ \left[\bar{x}_{x2} \bar{h}_{z2} - \bar{x}_{z2} \bar{k}_{z2} \right] \alpha_2 + \frac{1}{2} (\bar{x}_{x2} \bar{k}_{z2} + \bar{x}_{z2} \bar{h}_{z2}) \alpha_2^2 \right\} \left(\bar{h}_{z2} - \frac{1}{2} \bar{h}_{z2} \alpha_2^2 + \bar{k}_{z2} \alpha_2 \right) - \\ - \left[\bar{z}_{x2} \bar{h}_{z2} - \bar{z}_{z2} \bar{k}_{z2} \right] \alpha_2 + \frac{1}{2} (\bar{z}_{x2} \bar{k}_{z2} + \bar{z}_{z2} \bar{h}_{z2}) \alpha_2^2 \right\} \left(\bar{k}_{z2} - \frac{1}{2} \bar{k}_{z2} \alpha_2^2 - \bar{h}_{z2} \alpha_2 \right) \left. \right\}.$$

Różniczkując (3.7) względem C_{z2} i korzystając z drugiej zależności (2.8) otrzymano zmianę zapasu stateczności statycznej samolotu holującego

$$(3.8) \quad \bar{h}_{12} = \Delta \bar{h}_2(l) + \Delta \bar{h}_2(\bar{k}_{z2}) + \Delta \bar{h}_2(\bar{h}_{z2}),$$

gdzie poszczególne wyrazy 3.8 mają postać:

$$(3.9) \quad \Delta \bar{h}_2(l) = \frac{l_{a2}}{a_s} \left\{ \bar{k}_{z2}^2 \left[\bar{z}_{z2} - (2\bar{x}_{x2} + \bar{z}_{x2}) \frac{C_{z2}}{a_s} + \frac{3}{2} (\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^2}{a_s^2} + \bar{z}_{x2} \frac{C_{z2}^3}{a_s^3} \right] + \right. \\ \left. + \bar{h}_{z2}^2 \left[\bar{x}_{x2} + (2\bar{z}_{x2} + \bar{x}_{z2}) \frac{C_{z2}}{a_s} - \frac{3}{2} (\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^2}{a_s^2} - \bar{x}_{z2} \frac{C_{z2}^3}{a_s^3} \right] - \right. \\ \left. - \bar{h}_{z2} \bar{k}_{z2} \left[\bar{z}_{x2} + \bar{x}_{z2} - 3(\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}}{a_s} - 3(\bar{x}_{z2} + \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^2}{a_s^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{x}_{x2} - \bar{z}_{z2}) \frac{C_{z2}^3}{a_s^3} \right] \right\},$$

$$(3.10) \quad \Delta \bar{h}_2(\bar{k}_{z2}) = \bar{k}_{z2} \frac{\bar{C}_{x1}}{a_s} \left(1 - \frac{C_{z2}}{a_s} \operatorname{tg} \varphi_2 \right),$$

$$(3.11) \quad \Delta \bar{h}_2(\bar{h}_{z2}) = -\bar{h}_{z2} \frac{\bar{C}_{x1}}{a_s} \left(\frac{C_{z2}}{a_s} - \operatorname{tg} \varphi_2 \right),$$

przy czym

$$\bar{x}_{x2} = \frac{2X'_{x2}}{\rho S_2 V^2}, \quad \bar{k}_{z2} = \frac{k_{z2}}{l_{a2}}, \quad \bar{h}_{z2} = \frac{h_{z2}}{l_{a2}}.$$

Analogicznie do \bar{x}_{x2} otrzymano \bar{x}_{z2} , \bar{z}_{x2} i \bar{z}_{z2} .

Zapasu stateczności statycznej samolotu w locie swobodnym h_{12} nie wyprowadzono w niniejszej pracy; przyjęto go w następującej formie ostatecznej na podstawie [4] i [20]:

$$(3.12) \quad \bar{h}_{12} = \frac{S_{H2} l_{H2}}{S_2 l_{a2}} \left(\frac{V_{H2}}{V} \right)^2 \frac{a_{1s}}{a_s} \left(1 - \frac{d\varepsilon_2}{d\alpha_2} \right) - \bar{x}_{s2} - \frac{2C_{z2}}{a_s} \left(1 - \frac{a_s}{\pi \Lambda_{es}} \right) \bar{z}_{s2} - 0,064 \frac{S_n x_n}{S_2 l_{a2}}.$$

Zmiana stateczności statycznej wywołana hołem (3.8) zależy od wielu czynników. Może ona powodować wzrost lub spadek stateczności statycznej w stosunku do zapasu odpowiadającego lotowi swobodnemu samolotu z trzymanym sterem. Zapas stateczności statycznej ma wpływ na stateczność dynamiczną szybowca i samolotu holującego. Występuje on w różniczkowych równaniach ruchu jako współczynnik w pochodnych aerodynamicznych M_{w1} i M_{w2} .

Stateczność statyczna szybowca holowanego została wyprowadzona i omówiona w pracy [12], rozdział 7.

4. Pochodne «linowe»

Siły, występujące na zaczepach holowniczych samolotu holującego i szybowca, pochodzące od liny holowniczej, zależne są od wzajemnego położenia końców liny, charakterystyki aerodynamicznej liny, charakterystyki aerodynamicznej szybowca i prędkości holowania. Przez analogię do pochodnych aerodynamicznych [3, 4, 15], stosowanych przy

rozpatrywaniu stateczności samolotów, wprowadzono pochodne «linowe» (współczynniki sił), które omówiono szerzej w pracach [12 i 13].

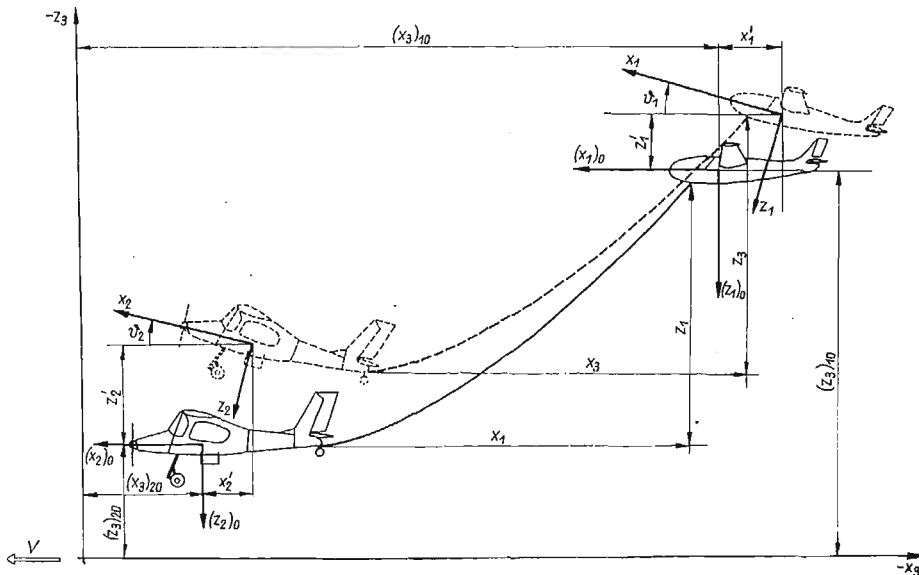
Pochodne «linowe» $X'_{x1}, X'_{z1}, Z'_{z1}$ składowych sił działających na zaczep holowniczy szybowca względem przesunięć poziomego i pionowego zostały wyprowadzone w pracy [12]. Analogicznie do nich wyprowadzono pochodne «liniowe» składowych sił działających na zaczep holowniczy samolotu $X'_{x2}, X'_{z2}, Z'_{z2}$. Pochodne «linowe» podano w formie ostatecznej w p. 8 niniejszej pracy.

5. Stateczność dynamiczna podłużna zespołu samolot i szybowiec w locie na hołu

Różniczkowe równania ruchu układu holowniczego, tzn. samolot holujący+hol+szybowiec, wyprowadzimy korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju [18, 19] o postaci

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j,$$

gdzie q_j oznaczają współrzędne uogólnione, T energię kinetyczną układu wyrażoną przez współrzędne uogólnione, V energia potencjalna układu wyrażona poprzez współrzędne uogólnione, Q_j siły uogólnione odpowiadające współrzędnym q_j .



Rys. 4. Przyjęte układy współrzędnych i zależności geometryczne między nimi

Przy rozpatrywaniu stateczności podłużnej przyjęto, że zespół holujący znajdował się w poziomym, prostoliniowym locie ustalonym. Zakłócenia lotu ustalonego, tzn. zmiany położenia i prędkości, zachodzą w płaszczyźnie pionowej zgodnej z kierunkiem lotu. Zespół holujący posiada siedem stopni swobody: przesunięcia pionowe szybowca, samolotu i liny, przesunięcia poziome szybowca i samolotu oraz obroty wokół środków ciężkości szybowca i samolotu.

Szybowiec holowany posiada trzy stopnie swobody [2, 3, 4, 12 i 15], odpowiadające im zmiany oznaczono (rys. 4) w sposób następujący: x'_1 , z'_1 oznaczają zmiany położenia środka ciężkości szybowca, względem układu x_3 , z_3 związanego z niezakłóconym przepływem, ϑ_1 zmianę kąta pochylenia szybowca (obrót względem środka ciężkości), u_1 , w_1 składowe zmiany prędkości w kierunkach osi x_1 i z_1 , związanych z szybowcem, q_1 zmiana prędkości kątowej pochylenia szybowca wokół środka ciężkości.

Samolot holujący posiada trzy stopnie swobody [3, 4, 15] i odpowiadające im zmiany oznaczono na (rys. 4) w sposób następujący: x'_2 , z'_2 zmiany położenia środka ciężkości samolotu względem układu x_3 , z_3 związanego z niezakłóconym przepływem, ϑ_2 jest zmianą kąta pochylenia samolotu (obrót względem środka ciężkości), u_2 , w_2 są składowymi zmian prędkości w kierunkach osi związanych z samolotem, q_2 oznacza zmianę prędkości kątowej pochylenia samolotu wokół środka ciężkości.

Linę holowniczą potraktowano jako ciągnio idealnie wiotkie, ciężkie, sprężyste, obciążone siłami aerodynamicznymi [12].

Przyjęto, że amplitudy drgań linii holowniczej są proporcjonalne do przesunięć statycznych [16].

Jak wynika z [12] hol ma silny wpływ na wahania fugoidalne, natomiast w niewielkim stopniu wpływa na oscylacje szybkie szybowca. Założenie upraszczające, traktujące linę jako element o jednym stopniu swobody, jest uzasadnione, gdyż uwzględnia podstawową postać drgań linii.

Przez f_i oznaczono zmianę pionową położenia środka geometrycznego linii względem układu x_3 , z_3 , związanego z niezakłóconym przepływem przy stałym położeniu samolotu holującego i szybowca.

5.1. Względna zmiana przemieszczenia linii. Znajomość względnej zmiany przemieszczenia środka linii f wyrażonej za pomocą współrzędnych uogólnionych jest niezbędna do określenia energii kinetycznej i potencjalnej linii oraz pracy wykonanej przez siły aerodynamiczne działające na linę.

Poniżej określono całkowitą zmianę położenia środka linii f_3 , wywołaną zmianami położenia szybowca x'_1 , z'_1 i ϑ_1 , samolotu x'_2 , z'_2 i ϑ_2 oraz zmianę strzałki ugięcia linii f_1 .

Przed wystąpieniem zakłóceń współrzędne końców linii (rys. 4) wyrażają się wzorami poniżej podanymi. Mianowicie współrzędne zaczepu szybowca w układzie x_3 , z_3 :

$$(5.2) \quad (x_3)_{110} = -(x_3)_{10} + k_{z1}; \quad (z_3)_{110} = -(z_3)_{10} + h_{z1};$$

współrzędne zaczepu samolotu w układzie x_3 , z_3 :

$$(5.3) \quad (x_3)_{120} = -(x_3)_{20} - k_{z2}; \quad (z_3)_{120} = -(z_3)_{20} + h_{z2}.$$

Odległości poziomą x_1 i pionową z_1 między końcami linii (rys. 1 i rys. 4) przed zakłóceniem otrzymamy korzystając z (5.2) i (5.3):

$$(5.4) \quad x_1 = (x_3)_{110} - (x_3)_{120}, \quad z_1 = (z_3)_{110} - (z_3)_{120}.$$

Po wystąpieniu zakłóceń wzory na współrzędne końców linii przyjmą postać: współrzędne zaczepu szybowca

$$(5.5) \quad \begin{aligned} (x_3)_{111} &= -(x_3)_{10} - x'_1 + k_{z1} \cos \vartheta_1 + h_{z1} \sin \vartheta_1, \\ (z_3)_{111} &= -(z_3)_{10} - z'_1 - k_{z1} \sin \vartheta_1 + h_{z1} \cos \vartheta_1, \end{aligned}$$

współrzędne zaczepu samolotu

$$(5.6) \quad \begin{aligned} (x_3)_{l21} &= -(x_3)_{20} - x'_2 - k_{z2} \cos \vartheta_2 + h_{z2} \sin \vartheta_2, \\ (z_3)_{l21} &= -(z_3)_{20} - z'_2 + k_{z2} \sin \vartheta_2 + h_{z2} \cos \vartheta_2. \end{aligned}$$

Korzystając z (5.5), (5.6) i założenia, że kąty ϑ_1 i ϑ_2 są małe, otrzymano odległości między końcami liny po zakłóceniu: poziomą x_3 i pionową z_3

$$(5.7) \quad x_3 = (x_3)_{l11} - (x_3)_{l21} \approx x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2,$$

$$(5.8) \quad z_3 = (z_3)_{l11} - (z_3)_{l21} \approx z_1 - z'_1 + z'_2 - k_{z1} \vartheta_1 - k_{z2} \vartheta_2.$$

Ugięcie liny f zawieszanej poziomo [6] i [7] wyraża się wzorem przed zakłóceniem

$$(5.9) \quad f_1 = \frac{q x_1^2}{8 X_1},$$

po zakłóceniu

$$(5.10) \quad f_3 = \frac{q x_3^2}{8 X_1},$$

gdzie $X_1 = P_{x1}$ jest składową poziomą siły na zaczepie szybowca równą oporowi szybowca (2.6).

Całkowitą zmianę położenia liny otrzyma się w postaci następującej korzystając przy tym z (5.2), (5.3), (5.5), (5.6), (5.9) i (5.10)

$$(5.11) \quad f_3 = \frac{1}{2} [-(z_3)_{l11} - (z_3)_{l21} + (z_3)_{l10} + (z_3)_{l20}] + f_2 - f_1 + f_1.$$

Względną zmianę przemieszczenia f otrzyma się z (5.11) po uwzględnieniu (5.7) i (5.8) i podzieleniu przez (5.9)

$$(5.12) \quad f = \frac{8 X_1}{q x_1^2} \left[f_1 - \frac{q x_1^2}{8 X_1} + \frac{1}{2} (z'_1 + z'_2 + k_{z1} \vartheta_1 - k_{z2} \vartheta_2) + \right. \\ \left. + \frac{q}{8 X_1} (x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2)^2 \right].$$

5.2. Energia kinetyczna zespołu holowniczego. Energia kinetyczna zespołu holowniczego, występująca w równaniu (5.1), wyrażona przez współrzędne uogólnione ma postać:

$$(5.13) \quad T = T_s + T_H + T_l,$$

gdzie T_s jest energią kinetyczną szybowca holowanego, T_H energią kinetyczną samolotu holującego, T_l energią kinetyczną liny holowniczej.

Energia kinetyczna szybowca holowanego T_s [19] wyrażona przez współrzędne uogólnione

$$(5.14) \quad T_s = \frac{1}{2} J_1 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{Q_1}{g} [(\dot{x}'_1)^2 + (\dot{z}'_1)^2].$$

Energia kinetyczna samolotu holującego T_H [19] wyrażona przez współrzędne uogólnione

$$(5.15) \quad T_H = \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} [(\dot{x}_2')^2 + (\dot{z}_2')^2],$$

gdzie J_1, J_2 oznaczają momenty bezwładności szybowca i samolotu względem osi poprzecznej [3, 4, 15] Q_1, Q_2 ciężar całkowity w locie szybowca i samolotu.

Energię kinetyczną liny określono [18] przyjmując, że przemieszczenie jest proporcjonalne do ugięcia statycznego liny u_l [6, 7]

$$(5.16) \quad u_l = fy$$

gdzie

$$(5.17) \quad y = \frac{4f_1(x_1-x)x}{x_1^2} + \frac{z_1}{x_1}x.$$

Energię kinetyczną liny określono za pomocą współrzędnych uogólnionych po uwzględnieniu (5.16) i przedstawiono w postaci:

$$(5.18) \quad T_l = \frac{qf^2}{2g} \int_0^{x_1} y^2 dx = f^2 L_T,$$

gdzie L_T jest stałym współczynnikiem zależnym od ciężaru jednostkowego liny q , jej konfiguracji (x_1 i z_1) oraz oporu aerodynamicznego szybowca holowanego X_1 i ma postać

$$(5.19) \quad L_T = \frac{qx_1}{6g} \left(z_1^2 + \frac{3}{4} \frac{qx_1^2 z_1}{X_1} + \frac{1}{40} \frac{q^2 x_1^4}{X_1^2} \right).$$

Występującą w (5.18) pochodną względem zmiany położenia liny otrzymano przez różniczkowanie względem czasu (5.12).

5.3. Energia potencjalna zespołu holowniczego. Energia potencjalna zespołu holowniczego występująca w równaniu (5.1) ma postać

$$(5.20) \quad V = V_s + V_H + V_l + V_{lS},$$

gdzie V_s oznacza energię potencjalną szybowca holowanego, V_H energię potencjalną samolotu holującego, V_l energię potencjalną liny holowniczej, wywołaną pionowym przemieszczeniem, V_{lS} energię potencjalną liny holowniczej, wywołaną sprężystym wydłużeniem.

Energia potencjalna szybowca holowanego wyrażona przez współrzędne uogólnione wyraża się wzorem:

$$(5.21) \quad V_s = -Q_1[(z_3)_{10} + z_1'].$$

Energia potencjalna samolotu holującego wyrażona przez współrzędne uogólnione:

$$(5.22) \quad V_H = -Q_2[(z_3)_{20} + z_2'].$$

Energię potencjalną liny holowniczej [18] stosując (5.17) otrzymano w postaci wyrażonej:

$$(5.23) \quad V_l = -qf \int_0^{x_1} y dx = f L_V,$$

gdzie L_V jest stałym współczynnikiem zależnym od tych samych czynników co L_T we wzorze (5.19)

$$(5.24) \quad L_V = -\frac{1}{2}qx_1 \left(z_1 + \frac{qx_1^2}{6X_1} \right).$$

Energię potencjalną liny holowniczej pochodzącą od jej sprężystego wydłużenia obliczymy z zależności

$$(5.25) \quad V_{is} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \lambda T^2 dl.$$

Naciąg liny T występujący w (5.25) zależny od składowej poziomej X i kąta pochylenia liny φ [6], [7] jest następujący:

$$(5.26) \quad T = \frac{X}{\cos \varphi}.$$

Element długości liny wyrażonej przez promień krzywizny i kąt pochylenia ma postać (rys. 5)

$$(5.27) \quad dl = r d\varphi,$$

gdzie z zależności geometrycznych

$$(5.28) \quad r = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$$

różniczkując dwukrotnie (5.17) względem x otrzymamy

$$(5.29) \quad y'' = -\frac{8f_1}{x_1^2}.$$

Jak wynika z geometrii

$$(5.30) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Podstawiając zależności (5.26)–(5.29) do (5.25) po przekształceniach otrzymamy wyrażenie na energię sprężystą liny w postaci całkowej:

$$(5.31) \quad V_{is} = -\frac{1}{16} \frac{x_1^2 \lambda X^2}{f_1} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\cos^5 \varphi} = X^2 L_S,$$

gdzie L_S jest stałym współczynnikiem:

$$(5.32) \quad L_S = -\frac{\lambda X_1}{8q} \left[\frac{\sin \varphi_1}{\cos^4 \varphi_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\cos^4 \varphi_2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2} \right) + \frac{3}{4} \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right].$$

Siła X , występująca we wzorze (5.31), jest zależna od współrzędnych uogólnionych. Korzystając z zależności na pochodne «linowe» otrzymano po przekształceniu

$$(5.33) \quad X = X_1 + X_{x_1}^1 x_1' - X_{x_2}^1 x_2' - X_{z_1}^1 z_1' + X_{z_2}^1 z_2' + \\ - (X_{x_1}^1 h_{z_1} + X_{z_1}^1 k_{z_1}) \vartheta_1 + (X_{x_2}^1 h_{z_2} - X_{z_2}^1 k_{z_2}) \vartheta_2.$$

Znając składową poziomą naciągu liny X określoną za pomocą współrzędnych uogólnionych (5.33) oraz korzystając ze wzoru na L_S (5.32) z (5.31) można obliczyć energię sprężystą liny.

5.4. Siły uogólnione odpowiadające współrzednym uogólnionym zespołu holowniczego. Siły uogólnione działające na przesunięciach uogólnionych występujące w równaniach Lagrange'a (5.1) przedstawiono w postaci

$$(5.34) \quad Q_j = Q_j' + Q_j'' + Q_j''',$$

gdzie Q_j' oznacza siły uogólnione pochodzące od zmiany sił i momentów aerodynamicznych działających na szybowiec i samolot holujący, Q_j'' siły uogólnione pochodzące od zmiany sił aerodynamicznych działających na linę holowniczą, Q_j''' siły uogólnione pochodzą od zmiany naciągu liny holowniczej.

Siły uogólnione, odpowiadające współrzednym uogólnionym poszczególnych stopni swobody szybowca i samolotu holującego, przedstawiono korzystając z [3, 4, 12, 15] za pomocą pochodnych aerodynamicznych i pochodnych linowych.

$$(5.35) \quad \begin{aligned} Q_{x_1}' &= X_{u1} \dot{x}_1' + X_{w1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + X_{q1} \dot{\vartheta}_1, \\ Q_{x_2}' &= X_{u2} \dot{x}_2' + X_{w2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + X_{q2} \dot{\vartheta}_2, \\ Q_{z_1}' &= Z_{u1} \dot{x}_1' + Z_{w1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + Z_{q1} \dot{\vartheta}_1, \\ Q_{z_2}' &= Z_{u2} \dot{x}_2' + Z_{w2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + Z_{q2} \dot{\vartheta}_2, \\ Q_{\vartheta_1}' &= M_{u1} \dot{x}_1' + M_{w1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + M_{\dot{w}1} (\dot{z}_1' + U_1 \vartheta_1) + M_{q1} \dot{\vartheta}_1, \\ Q_{\vartheta_2}' &= M_{u2} \dot{x}_2' + M_{w2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + M_{\dot{w}2} (\dot{z}_2' + U_1 \vartheta_2) + M_{q2} \dot{\vartheta}_2 + M_{us} \dot{x}_2'. \end{aligned}$$

Pochodne «linowe» występujące w (5.35) są przedstawione w p. 8 niniejszej pracy. Pochodne aerodynamiczne dla szybowca i samolotu w locie swobodnym są wyprowadzone w pracach [3, 4, 15]. W punkcie 8 podano pochodne aerodynamiczne dla samolotu holującego w ostatecznej postaci.

Poniżej wyprowadzono siły uogólnione pochodzące od liny holowniczej.

Pracę przygotowaną wykonaną przez siły aerodynamiczne działające na linę holowniczą po uwzględnieniu (5.16) i zależności geometrycznej

$$(5.36) \quad dl = \frac{dx}{\cos \varphi},$$

wyrażono w postaci całkowej:

$$(5.37) \quad \delta W_P = - \left[\frac{1}{2} \rho U_1^2 d \int_0^{x_1} \frac{C_{z1}(\varphi)}{\cos \varphi} \left(\frac{4f_1 + z_1}{x_1} x - \frac{4f_1}{x_1^2} x^2 \right) dx \right] \delta f,$$

gdzie $C_{zi}(\varphi)$ jest funkcją określającą zmianę współczynnika siły nośnej linii w zależności od kąta pochylenia φ . Została ona wyprowadzona i omówiona w pracy [12]. Poniżej funkcję tę podano w formie ostatecznej:

$$(5.38) \quad C_{zi}(\varphi) = C_n \sin^2 \varphi \cos \varphi - C_t \cos^2 \varphi \sin \varphi,$$

gdzie $C_n = 1,15$, $C_t = 0,035$.

Pracę przygotowaną (5.37) przedstawiono w postaci

$$(5.39) \quad \delta W_P = \delta f \cdot L_P,$$

gdzie L_P jest współczynnikiem stałym. Można przedstawić go w formie całkowej korzystając z (5.38) i następujących zależności geometrycznych:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Po przekształceniach otrzymano

$$(5.40) \quad L_P = -\frac{1}{2} \rho U_1^2 d \int_0^{x_1} [C_n(k_1 - 2k_2 x) - C_t] \frac{(k_1 - 2k_2 x)(k_1 - k_2 x)}{1 + (k_1 - 2k_2 x)^2} x dx,$$

gdzie

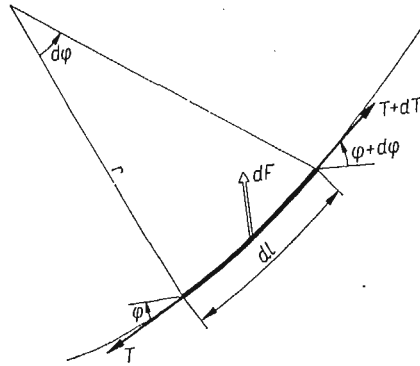
$$k_1 = \frac{q x_1}{2X_1} + \frac{z_1}{x_1}, \quad k_2 = \frac{q}{2X_1}, \quad U_1 = V.$$

Do wzoru (5.39) podstawiono wyrażenie na δf wyznaczone z (5.12) uzależnione od współrzędnych uogólnionych i uporządkowano go względem wariacji współrzędnych uogólnionych. Wyrażenia występujące przy wariacjach współrzędnych uogólnionych są siłami uogólnionymi i mają następującą postać:

$$(5.41) \quad \begin{aligned} Q'_{x_1} &= -Q'_{x_2} = -\frac{2L_P}{x_1^2} (x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2), \\ Q'_{z_1} &= Q'_{z_2} = \frac{4X_1}{q x_1^2} L_P, \\ Q'_{\vartheta_1} &= \frac{L_P}{x_1^2} \left[\frac{4X_1}{q} k_{z1} + 2(x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2) h_{z1} \right], \\ Q'_{\vartheta_2} &= -\frac{L_P}{x_1^2} \left[\frac{4X_1}{q} k_{z2} + 2(x_1 - x'_1 + x'_2 + h_{z1} \vartheta_1 - h_{z2} \vartheta_2) h_{z2} \right], \\ Q'_{f1} &= \frac{8X_1}{q x_1^2} L_P. \end{aligned}$$

Siły uogólnione, pochodzące od naciągu liny, obliczono określając pracę przygotowaną wykonaną przez te siły na przesunięciach uogólnionych. Rozpatrzone elementarną siłę dF działającą na element liny dl (rys. 5) i otrzymano równanie równowagi sił:

$$dF = (T+dT)\sin(\varphi+d\varphi) - T\sin\varphi.$$



Rys. 5. Siły naciągu działające na element liny holowniczej

Po pominięciu w powyższym równaniu małych wyższego rzędu otrzymano

$$(5.42) \quad dF = T\cos\varphi d\varphi + dT\sin\varphi.$$

Z zależności (5.27) otrzymano

$$(5.43) \quad d\varphi = \frac{y'' dl}{[1+(y')^2]^{3/2}}.$$

Uzależniono naciąg liny T od składowej poziomej X :

$$T = \frac{X}{\cos\varphi}.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymano zmianę naciągu liny dT w postaci

$$(5.44) \quad dT = X \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi.$$

Podstawiając do (5.42) zależności (5.43), (5.44) i (5.30) po przekształceniach otrzymano

$$(5.45) \quad dF = Xy'' dx.$$

Pracę przygotowaną obliczono korzystając z (5.16), (5.29) i (5.45):

$$(5.46) \quad \delta W_N = - \left[X \frac{8f_1}{x_1^2} \int_0^{x_1} \left(\frac{4f_1+z_1}{x_1} x - \frac{4f_1}{x_1^2} x^2 \right) dx \right] \delta f$$

i przedstawiono w postaci

$$(5.47) \quad \delta W_N = X L_N \delta f,$$

gdzie L_N jest stałym współczynnikiem zależnym od konfiguracji, obciążenia i charakterystyki liny

$$(5.48) \quad L_N = -\frac{qx_1}{6X_1} \left(\frac{qx_1^2}{2X_1} + 3z_1 \right).$$

Jeżeli do (5.47) podstawimy zależność δf wyznaczoną z (5.12) i (5.34) oraz uporządkujemy się względem współrzędnych uogólnionych, to współczynniki występujące przy nich będą poszukiwanymi siłami uogólnionymi Q_j''' analogicznie do (5.41).

5.5. Różniczkowe równania ruchu zespołu holowniczego. Różniczkowe równania ruchu zespołu holowniczego otrzymano przez rozwinięcie równań Lagrange'a II rodzaju (5.1). Równania wyprowadzono różniczkując zgodnie z (5.1) energię kinetyczną układu (podpunkt 5.2) i energię potencjalną (podpunkt 5.3) oraz dodając siły uogólnione (podpunkt 5.4). Po zlinearyzowaniu otrzymano układ siedmiu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami.

Układ otrzymanych równań różniczkowych zapisano macierzowo w postaci

$$(5.49) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{ij}] && i = 1, 2, \dots, 7 \\ & && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kwadratową współczynników bezwładności,} \\ \mathbf{B} &= [b_{ij}] && i = 1, 2, \dots, 7 \\ & && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kwadratową współczynników tłumienia,} \\ \mathbf{C} &= [c_{ij}] && i = 1, 2, \dots, 7 \\ & && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kwadratową współczynników sztywności,} \\ \mathbf{D} &= [d_{ij}] && j = 1, 2, \dots, 7 \\ & && \text{jest macierzą kolumnową wyrazów wolnych.} \end{aligned}$$

$\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$ są macierzami kolumnowymi współrzędnych uogólnionych lub ich pochodnych względem czasu o postaci:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \\ \ddot{\bar{z}}_1 \\ \ddot{\bar{z}}_2 \\ \ddot{\bar{\theta}}_1 \\ \ddot{\bar{\theta}}_2 \\ \ddot{\bar{f}}_l \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{\theta}}_1 \\ \dot{\bar{\theta}}_2 \\ \dot{\bar{f}}_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{f}_l \end{bmatrix}.$$

Wyrazy macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ i \mathbf{D} w postaci bezwymiarowej podano w p. 8 niniejszej pracy.

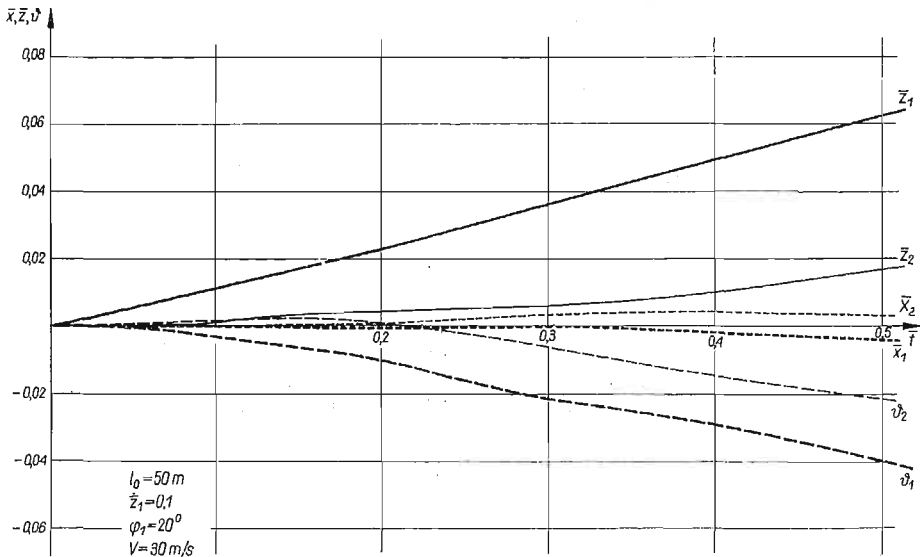
Przy przejściu do postaci bezwymiarowej wprowadzono zgodnie z [3, 4, 15] pojęcia stosowane w lotnictwie a ułatwiające przekształcenia i późniejszą analizę wyników:

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= \frac{Q_1}{g \rho S_1 V} \text{ czas aerodynamiczny,} \\ \bar{t} &= \frac{t}{\hat{t}_1} \text{ czas betwymiary,} \\ \bar{x}_1 &= \frac{x'_1}{l_{H1}}, \quad \bar{z}_1 = \frac{z'_1}{l_{H1}} \text{ bezwymiarowe przesunięcie liniowe,} \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \frac{\dot{x}'_1}{V}, \quad \dot{\bar{z}}_2 = \frac{\dot{z}'_2}{V} \text{ bezwymiarowe prędkości liniowe,} \\ \ddot{\bar{x}}_1 &= \ddot{x}'_1 \frac{\hat{t}}{V}, \quad \ddot{\bar{z}}_2 = \ddot{z}'_2 \frac{\hat{t}}{V} \text{ bezwymiarowe przyspieszenie liniowe,} \\ \dot{\bar{\vartheta}}_1 &= \dot{\vartheta}_1 \hat{t} \text{ bezwymiarowa prędkość kątowna pochylania,} \\ \ddot{\bar{\vartheta}}_1 &= \ddot{\vartheta}_1 \hat{t}^2 \text{ bezwymiarowe przyspieszenie kątowne pochylania.} \end{aligned}$$

Znając wszystkie wyrazy macierzy **A**, **B**, **C**, **D** i składowe wektorów $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{x} , występujących w układzie równań różniczkowych (5.49), przystąpiono do ich rozwiązywania.

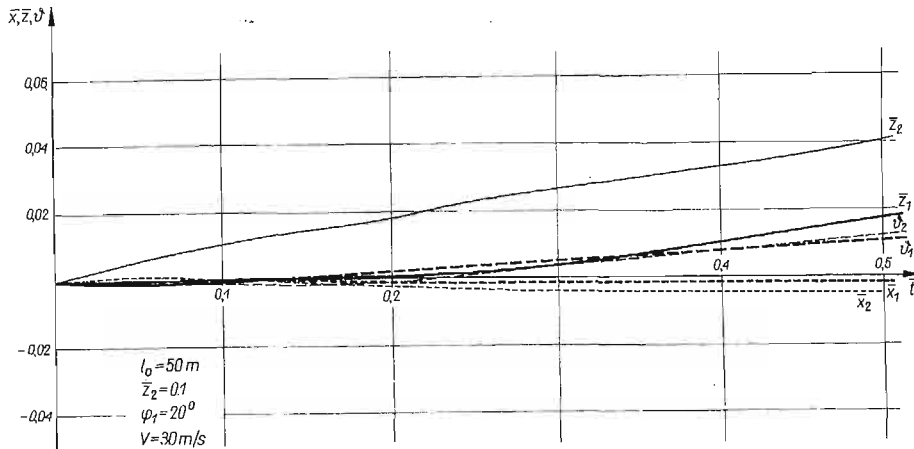
Dla szybowca i samolotu holującego o znanej charakterystyce [12, 20], scałkowano numerycznie układ równań (5.49) zadając warunki początkowe, będące zakłóceniem od ustalonego lotu na holu. Proces całkowania odbywał się metodą numeryczną Runge-Kutta-Gilla [16] dostosowaną do języka GIER-ALGOL III [11].

W celu określenia wzajemnego wpływu szybowca holowanego na samolot holujący scałkowano zlinearyzowany układ równań (5.49), dla którego istnieją wartości własne pozwalające określić częstości oscylacji i współczynniki ich tłumienia.



Rys. 6. Charakter zmian przesunięć i obrotów w funkcji czasu szybowca i samolotu holującego po zakłóceniu chwilową prędkością pionową $w_1 = 0,1$ działającą na szybowiec

Na szybowiec i samolot holujący, znajdujący się w ustalonym prostoliniowym locie na holu, została nadana chwilowa prędkość pionowa $\bar{w}_1 = \dot{z}_1 = 0,1$ i $\bar{w}_2 = \dot{z}_2 = 0,1$. Wykresy podają, jak pod wpływem powyższego zakłócenia zmieniają się w czasie przesunięcia liniowe i kątowne samolotu i szybowca holowanego (rys. 6 i rys. 7).



Rys. 7. Charakter zmian przesunięć i obrotów w funkcji czasu szybowca i samolotu holującego po zakłóceniu chwilową prędkością pionową $w_2 = 0,1$ działającą na samolot

Jak wynika z rys. 6 i rys. 7, w przypadku samolotu holującego o masie porównywalnej z masą szybowca holowanego występuje wzajemny wpływ ruchów samolotu na szybowiec holowany i odwrotnie. W takim przypadku nie można rozpręgnąć układu równań (5.49) na równania opisujące ruch szybowca i równania samolotu. Stosowanie kryteriów stateczności Routha-Hurwitza dla pełnego układu równań (5.49) jest trudne i bardzo pracowite.

Otrzymanie rozwiązania układu równań (5.49) w postaci zamkniętej jest bardzo kłopotliwe i często niemożliwe.

Do rozwiązania zagadnienia zastosowano metody numeryczne obliczenia wartości własnych układu równań (5.49).

6. Obliczenie wartości własnych układu równań różniczkowych

Problem obliczania wartości własnych często występuje przy rozwiązywaniu układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

Układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu (5.49) przekształcono stosując zamianę zmiennych:

$$(6.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}.$$

Otrzymano układ równań w zapisie wektorowym w postaci:

$$(6.2) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} są macierzami kwadratowymi stopnia 7, których wyrazy wyprowadzono w p. 5 niniejszej pracy i podano w p. 8. Równanie (6.2) przekształcono na podstawie pracy [14] wprowadzając nowe zmienne \mathbf{p} określone wzorem

$$(6.3) \quad \mathbf{p} = \dot{\mathbf{y}}.$$

Układ (6.2) po wprowadzeniu (6.3) zapisano w postaci

$$(6.4) \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Rozwiązanie układu równań (6.3) i (6.4) o 14 niewiadomych \mathbf{y} i \mathbf{p} , jest kombinacją liniową rozwiązań typu

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}e^{\bar{\lambda}t}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{b}e^{\bar{\lambda}t},$$

gdzie

$$(6.5) \quad \bar{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

i na podstawie (6.3) i (6.4) daje to równanie

$$(6.6) \quad \mathbf{A}\bar{\lambda}\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{b} + \mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Równania (6.5) i (6.6) można zapisać w postaci jednego równania macierzowego [14]

$$(6.7) \quad \bar{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Wprowadzając nowe oznaczenia macierzy w (6.7) otrzymano

$$(6.8) \quad \bar{\lambda}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{Q}\mathbf{z},$$

gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \text{ macierz kwadratowa stopnia 14,}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \text{ macierz kwadratowa stopnia 14,}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ wektor o 14 składowych.}$$

Mnożąc lewostronnie układ równań (6.8) przez macierz \mathbf{P}^{-1} otrzymano

$$(6.9) \quad |\mathbf{R} - \bar{\lambda}\mathbf{I}| \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$(6.10) \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}.$$

Wartości własne macierzy \mathbf{R} są tymi wartościami parametru $\bar{\lambda}$, dla których

$$(6.11) \quad |\mathbf{R} - \bar{\lambda}\mathbf{I}| = 0.$$

Macierz \mathbf{R} jest macierzą kwadratową w omawianym przypadku stopnia 14. Ze względu na występowanie sił aerodynamicznych macierz \mathbf{R} jest macierzą niesymetryczną.

Istniejące metody obliczania wartości własnych macierzy symetrycznych [14] nie mogą być zastosowane bezpośrednio do macierzy niesymetrycznych. Obliczanie wartości włas-

Wyznaczenie wartości własnych macierzy quasi-trójkątnej dolnej sprowadza się do rozwiązania szeregu równań algebraicznych kwadratowych.

Macierzy \mathbf{R}_k w zależności od rozkładu wartości własnych może być macierzą quasi-trójkątną dolną nieregularną. Ilość iteracji k zależna jest od wyrazów macierzy \mathbf{R} i jej stopnia. W trakcie prowadzenia obliczeń celowe jest zmniejszanie stopnia macierzy przez rozprzęganie na macierze mniejsze, z których bezpośrednio można wyznaczać wartości własne. Przy stosowaniu powyższej metody wyznaczania wartości własnych zmniejszenie stopnia macierzy o 2 powoduje skrócenie czasu jednej iteracji o połowę. Ilość iteracji może dochodzić w niektórych przypadkach do 1000 nawet dla macierzy czwartego stopnia. Numeryczne wyznaczanie wartości własnych macierzy niesymetrycznych wyższych stopni jest możliwe na szybkołatających cyfrowych maszynach elektronicznych. Dokładne omówienie i wyprowadzenie powyższej metody obliczania wartości własnych zawarte jest w pracach [8, 9].

Kryterium polegające na stabilizacji podwyznaczników macierzy \mathbf{A}_k [8], mające świadczyć o zakończeniu procesu iteracji macierzy quasi-trójkątnej \mathbf{R}_k , nie jest spełnione w przypadku dowolnej macierzy i nie może być stosowane.

Wygodne jest ułożenie programu obliczeń w ten sposób, by następowało zerowanie odpowiednich wyrazów macierzy \mathbf{R} . Wymaga to jednak kontroli macierzy \mathbf{R}_k ze względu na możliwość stabilizacji macierzy o postaci quasi-trójkątnej innej niż założona. Prowadzenie procesu iteracji aż do momentu otrzymania macierzy \mathbf{R}_k w postaci założonej może bardzo zwiększyć ilość iteracji.

Wartości własne macierzy \mathbf{R} otrzymano w postaci

$$(6.17) \quad \bar{\lambda}_j = \bar{\xi}_j + i\bar{\eta}_j,$$

gdzie $\bar{\xi}_j = \hat{\xi}_j t$ jest bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia, $\bar{\eta}_j = \hat{\eta}_j t$ oznacza częstość oscylacji.

Lot zespołu holującego jest stateczny, jeżeli wszystkie współczynniki tłumienia (części rzeczywiste wartości własnych) są ujemne:

$$(6.18) \quad \bar{\xi}_j < 0,$$

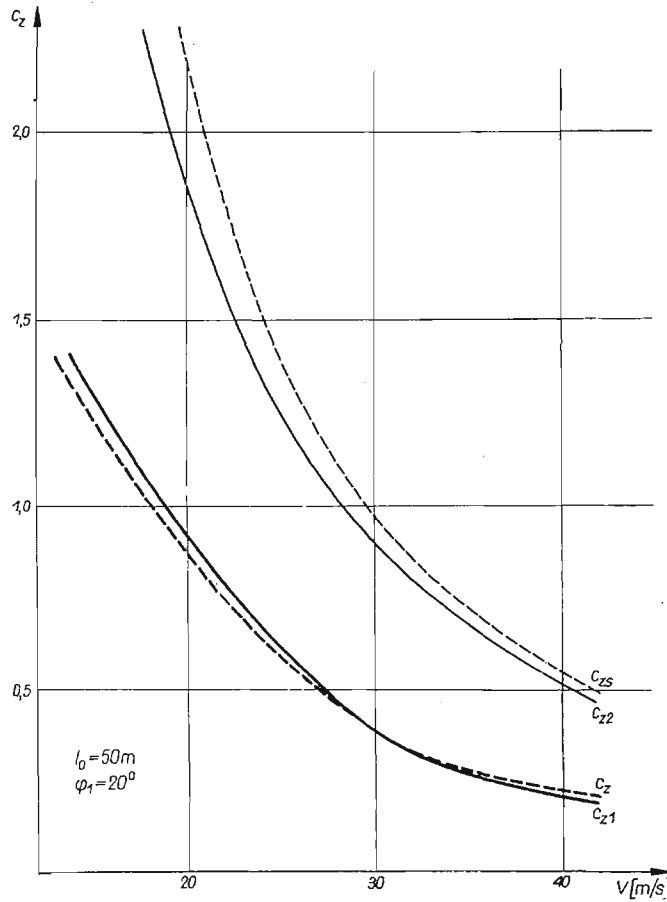
tzn. ruch jest tłumiony, samolot i szybowiec w locie na holu są stateczne dynamicznie.

7. Przykład liczbowy i wnioski

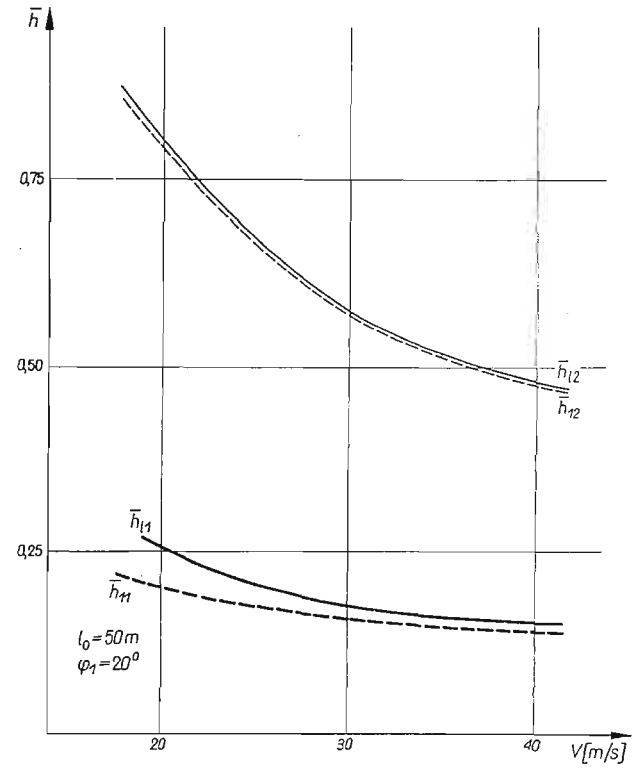
Obliczenia przykładowe przeprowadzono dla jednego z szybowców wyczynowych [12] i samolotu przystosowanego do holowania [20]. Obliczenia uwzględniają zmianę dwóch parametrów w locie na holu, zmianę prędkości holowania i zmianę położenia szybowca względem samolotu holującego. Do obliczeń przyjęto linię o długości $l_0 = 50$ m opisaną w (12) jako linię najczęściej używaną w eksploatacji.

Na rys. 9–16 liniami cienkimi naniesiono zmianę parametrów odnoszących się do samolotu holującego, a linie grube dotyczą szybowca holowanego. W przypadku rys. 9, 10, 13 i 14 linie ciągłe charakteryzują lot na holu, a linie przerywane lot swobodny w warunkach równoważnych lotowi na holu. Na rys. 11, 12, 15 i 16 naniesiono liniami ciągłymi zmianę współczynników tłumienia ($\bar{\xi}$), a liniami przerywanymi zmianę częstości

[369]



Rys. 8. Zmiana współczynników siły nośnej w funkcji prędkości szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego



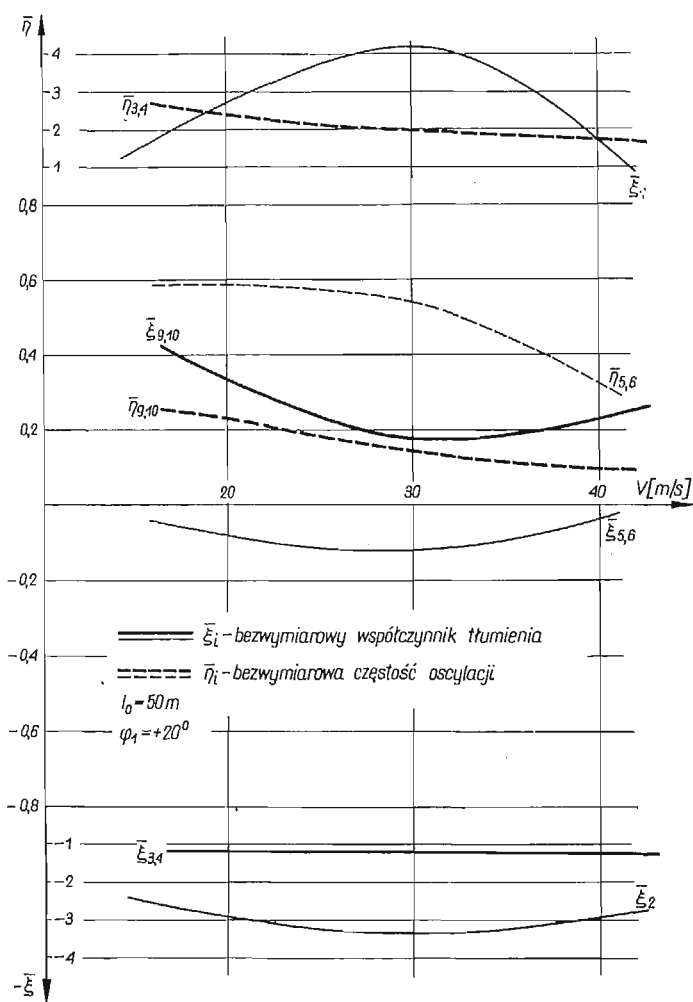
Rys. 9. Zmiana zapasu «stateczności statycznej» w funkcji prędkości szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego

oscylacji ($\bar{\eta}$) w funkcji parametrów holowania. Wszystkie obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER według programów w języku GIER-ALGOL III.

7.1. Wpływ prędkości holowania na stateczność szybowca w locie na holu i stateczność samolotu holującego. Obliczenia numeryczne wykonano przy stałej długości liny $l_0 = 50$ m i kącie holu $\varphi_1 = 20^\circ$ dla szeregu prędkości holowania.

Korzystając z prac [4, 12] określono współczynnik siły nośnej szybowca w locie swobodnym C_z i w locie na holu C_{z1} , następnie z (3.13) obliczono współczynnik siły nośnej samolotu holującego C_{z2} . Zmiany tych współczynników w funkcji prędkości przedstawiono na rys. 8.

Wraz ze wzrostem prędkości występuje zmniejszenie współczynników siły nośnej samolotu holującego i szybowca oraz różnicy między współczynnikami w locie swobodnym C_z i C_{zs} a współczynnikami odpowiadającymi lotowi na holu C_{z1} i C_{z2} .



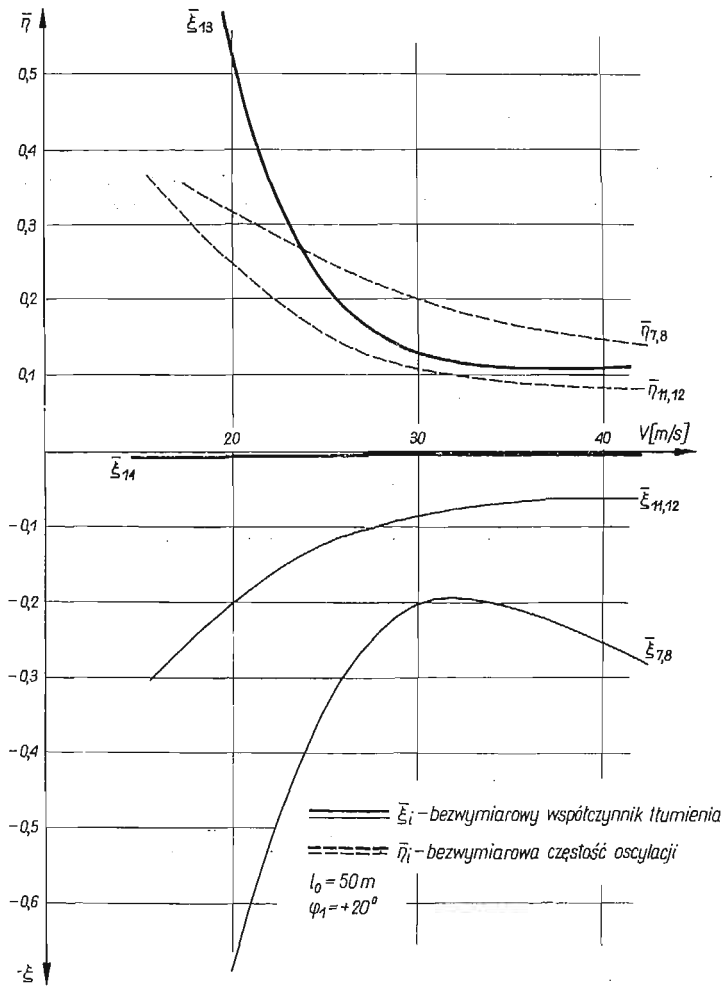
Rys. 10. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)

W locie na holu osiągnięcie C_{zmax} przez szybowiec występuje na prędkości większej niż w locie swobodnym (rys. 8), powoduje to «przepadnięcie» szybowca na prędkości większej od prędkości minimalnej V_{min} lotu swobodnego.

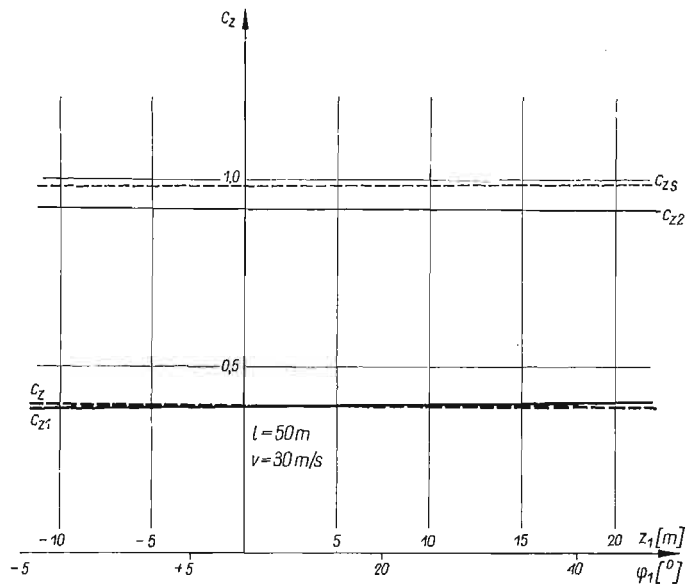
Zmianę zapasu stateczności statycznej szybowca \bar{h}_{h1} i samolotu \bar{h}_{h2} w funkcji prędkości przedstawiono na rys. 9. W locie holowanym występuje niewielki wzrost zapasu stateczności statycznej \bar{h}_{h1} i \bar{h}_{h2} w stosunku do zapasów \bar{h}_{h1} i \bar{h}_{h2} odpowiadających lotowi swobodnemu (rys. 9).

Wzrost stateczności statycznej w locie na holu nie może świadczyć o wzroście stateczności dynamicznej.

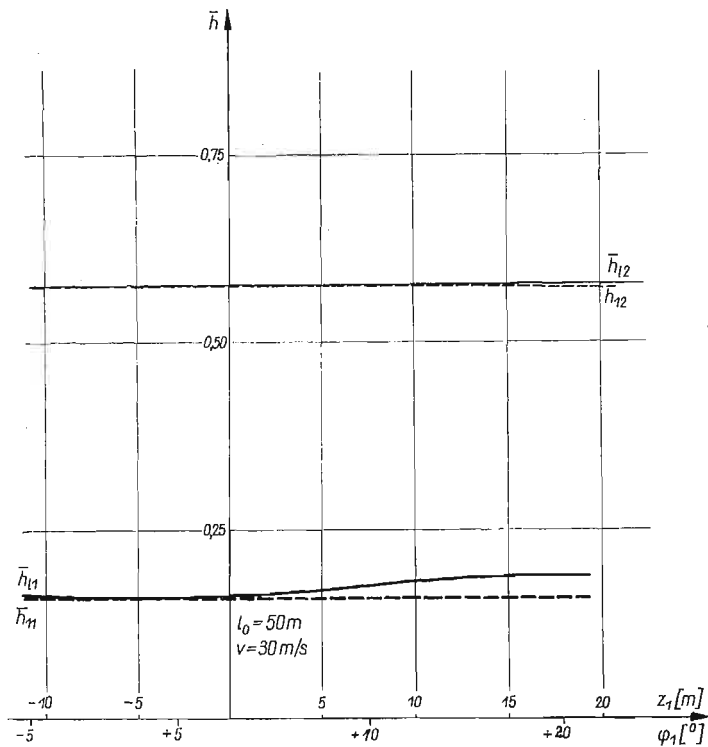
Wartości własne o postaci (6.17) obliczono numerycznie według algorytmu (6.16). Zmianę wartości własnych w funkcji prędkości przedstawiono na rys. 10 i 11. Jak widzimy, kryterium stateczności (6.18) nie jest spełnione. Lot na holu z trzymanym sterem jest



Rys. 11. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji prędkości, odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)



Rys. 12. Zmiana współczynników siły nośnej w funkcji położenia szybowca względem samolotu, szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego

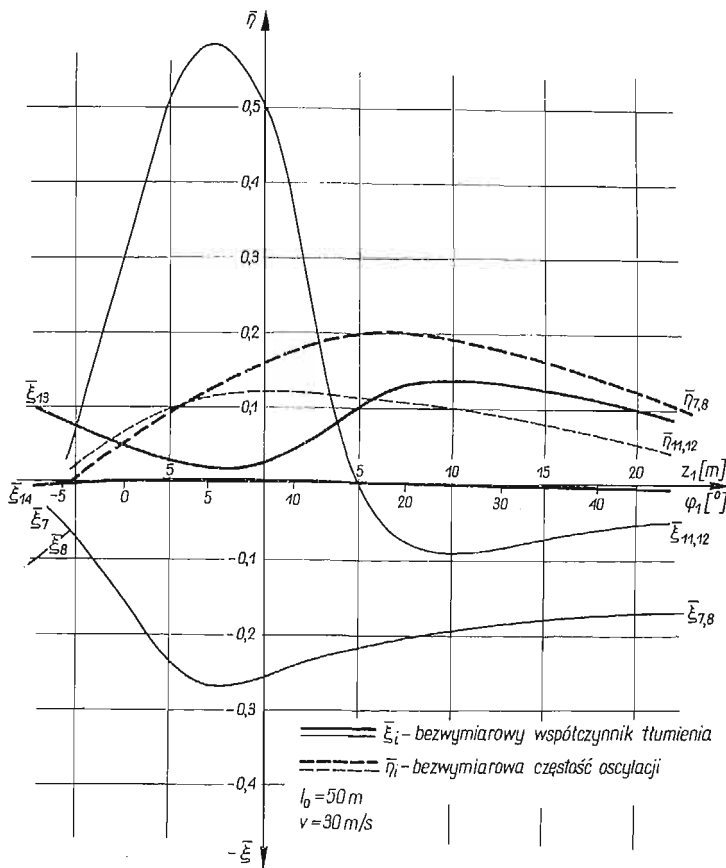


Rys. 13. Zmiana zapasu «stateczności statycznej» w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego, szybowca i samolotu w przypadku lotu swobodnego i holowanego

lotem niestatecznym, co potwierdza wyniki pracy [12]. Oscylacje szybkie szybowca holowanego $\eta_{3,4}$ i samolotu holującego $\eta_{5,6}$ są tłumione zawsze niezależnie od prędkości holowania $\bar{\xi}_{3,4} < 0$ i $\bar{\xi}_{5,6} < 0$ (rys. 10 i 11).

Wahania fugoidalne samolotu holującego $\eta_{11,12}$ są w rozpatrywanym przypadku tłumione $\bar{\xi}_{11,12} < 0$, natomiast wahania szybowca holowanego $\eta_{9,10}$ wykazują słabą rozbieżność $\bar{\xi}_{9,10} > 0$ (rys. 10 i 11). Występuje niestateczność ruchów aperiodycznych zespołu holowniczego $\bar{\xi}_{13} > 0$ i $\bar{\xi}_1 > 0$ polegająca na pionowym przemieszczaniu się szybowca względem samolotu holującego. Ruchy te wymagają interwencji pilota.

7.2. Wpływ położenia szybowca względem samolotu holującego na stateczność. Szybowiec jest holowany na linii o długości $l_0 = 50$ m ze stałą prędkością $V = 30$ m/s. Szybowiec może przemieszczać się w płaszczyźnie pionowej względem linii lotu samolotu holującego.

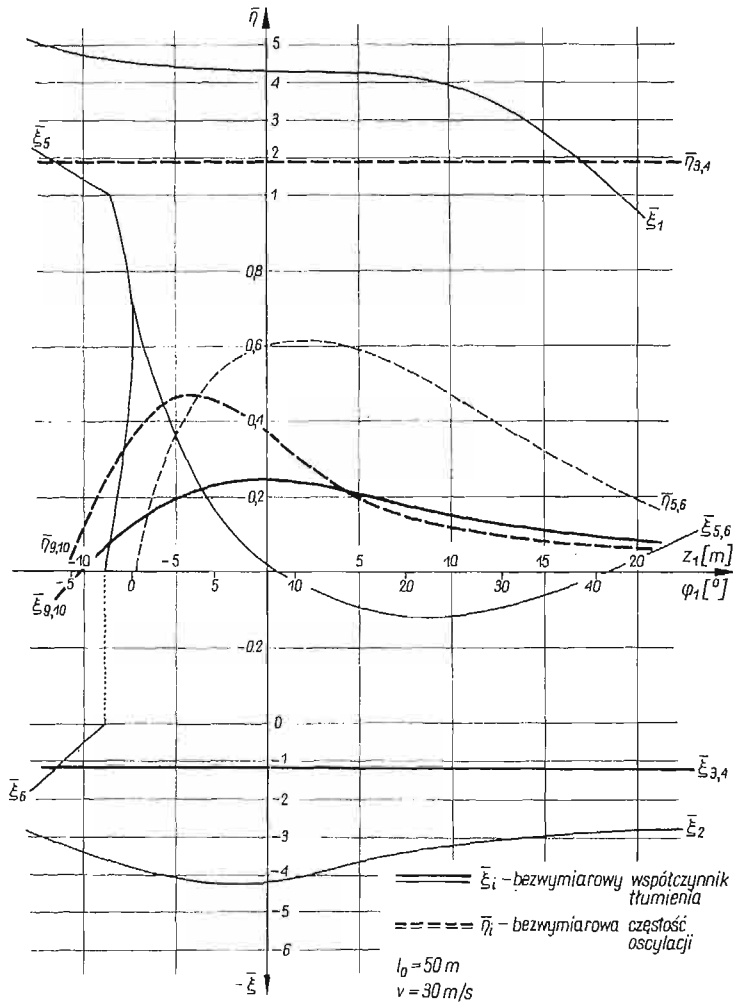


Rys. 14. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego, odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)

Z rysunku 12 wynika, że położenie szybowca względem samolotu praktycznie nie wpływa na zmianę współczynników siły nośnej szybowca C_{z1} i samolotu C_{z2} . Na rysunku 13 przedstawiono zmianę stateczności statycznej szybowca h_{h1} i samolotu h_{h2} w funkcji po-

łożenia szybowca względem linii lotu samolotu holującego. Położenie szybowca powyżej linii lotu powoduje niewielki wzrost zapasu stateczności statycznej.

Zmianę bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji ($\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$) w funkcji położenia szybowca względem samolotu przedstawiono na rys. 14 i 15. Położenie szybowca względem samolotu holującego ma bardzo duży wpływ na charakter ruchu, jaki wystąpi po zakłóceniu stanu równowagi.



Rys. 15. Zmiana bezwymiarowych współczynników tłumienia i częstości oscylacji w funkcji położenia szybowca względem samolotu holującego, odpowiadających ruchom szybowca (linie grube) i samolotu holującego (linie cienkie)

Zmiana położenia szybowca nie wpływa na częstość oscylacji szybkich szybowca $\bar{\eta}_{3,4}$ i ich tłumienie $\bar{\xi}_{3,4} < 0$, natomiast ma wpływ na tłumienie wahań fugoidalnych $\bar{\xi}_{9,10}$ (rys. 15 i 14). Z rysunku 15 wynika że najkorzystniejsze położenie szybowca względem samolotu holującego jest takie, w którym szybowiec znajduje się w linii lotu z samolotem

holującym lub poniżej. W takim położeniu występuje zarówno tłumienie oscylacji szybkich $\bar{\xi}_{3,4} < 0$ jak i wahań fugoidalnych $\bar{\xi}_{9,10} < 0$.

7.3. Wnioski. Z powyższych rozważań wypływają wnioski dotyczące parametrów holowania.

1. W położeniu górnym szybowca względem samolotu holującego występuje możliwość wcześniejszego «przeciągnięcia» szybowca niż samolotu (rys. 8).

2. W locie na holu «przeciągnięcia» szybowca może wystąpić przy prędkości holowania większej od prędkości minimalnej w locie swobodnym, $V_{hmin} < V_{min}$ (rys. 8).

3. Większe prędkości holowania powodują zmniejszenie rozbieżności wahań fugoidalnych szybowca, tzn. wpływają ustateczniająco na holowany szybowiec (rys. 10).

4. Położenie szybowca względem samolotu holującego ma wpływ na wahań fugoidalne szybowca i samolotu holującego (rys. 15). Korzystniejsze jest dla szybowca położenie poniżej linii lotu samolotu holującego, gdyż powoduje to tłumienie wahań fugoidalnych (rys. 15).

5. Lot na holu jest lotem niestatecznym matematycznie, występują wartości własne, których części rzeczywiste są dodatnie nawet przy większych prędkościach holowania (rys. 10, 11, 14 i 15). Pociąga to za sobą konieczność reakcji pilota na zakłócenia zewnętrzne.

Wnioski powyższe pokrywają się jakościowo i wykazują dużą zgodność ilościową z wnioskami wypływającymi z pracy [12], w której rozpatrzono uproszczoną stateczność dynamiczną podłużną szybowca holowanego przez samolot o nieskończonej masie.

8. Pochodne linowe, pochodne aerodynamiczne samolotu holującego i wyrazy macierzy A, B, C i D

8.1. Pochodne linowe. Pochodne linowe składowych poziomej i pionowej siły działającej na zaczep holowniczy szybowca holowanego mają postać:

$$X_{x_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + n \sin^3 \varphi_1 (z_1 - l_1 \sin \varphi_2)],$$

$$X_{z_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) + n \sin^3 \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_2 - x_1)],$$

$$Z_{x_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (z_1 - l_1 \sin \varphi_1)],$$

$$Z_{z_1}^l = \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (l_1 \cos \varphi_2 - x_1)],$$

gdzie

$$\delta = x_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + z_1 (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) - l_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$n = \frac{1}{2} \rho V^2 d C_n,$$

$$l_1 = l_0 (1 + \lambda T_1),$$

wielkości x_1 , z_1 , l_1 , φ_1 i φ_2 są przedstawione na rys. 3.

Pochodne linowe składowych poziomej i pionowej siły działającej na zaczep holowniczy samolotu holującego względem przesunięcia poziomego i pionowego mają postać:

$$X_{x_2}^l = \frac{1}{\delta} [T_2 \cos \varphi_2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) + n \sin^3 \varphi_2 (z_1 - l_1 \sin \varphi_1)],$$

$$X_{z_2}^l = \frac{1}{\delta} [T_2 \cos \varphi_2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + n \sin^3 \varphi_2 (l_1 \cos \varphi_1 - x_1)],$$

$$Z'_{x_2} = \frac{1}{\delta} [T_2 \sin \varphi_2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) - (q + u \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2) (z_1 - l_1 \sin \varphi_1)],$$

$$Z'_{z_2} = \frac{1}{\delta} [T_2 \sin \varphi_2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) - (q + u \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2) (l_1 \cos \varphi_1 - x_1)].$$

8.2. Pochodne aerodynamiczne samolotu. Korzystając z [3, 4, 12, 15, 20] w niniejszej pracy podano w formie ostatecznej pochodne aerodynamiczne dla samolotu holującego, stosowane w zakresie małych prędkości (ściśliwości powietrza nie uwzględniono).

Pochodne aerodynamiczne sił i momentów aerodynamicznych względem zmian prędkości w postaci wymiarowej są następujące:

$$X_{H_2} = -\rho S_2 V \left[C_{x_2} + \frac{m_H}{2} (C_{x_2} + \bar{C}_{x_1}) \right],$$

$$X_{w_2} = \frac{1}{2} \rho S_2 V \left(C_{z_2} - \frac{\partial C_{x_2}}{\partial \alpha_2} \right),$$

$$Z_{H_2} = -\rho S_2 V C_{z_2},$$

$$Z_{w_2} = -\frac{1}{2} \rho S_2 V (C_{x_2} + a_{18}),$$

$$M_{H_2} = \rho S_2 V \left[C_{m_2} l_{a_2} - \frac{m_H z_H}{2} (C_{x_2} + \bar{C}_{x_1}) \right].$$

Pochodne aerodynamiczne sił i momentów aerodynamicznych działających na samolot holujący względem zmian kątowej prędkości pochylania mają postać:

$$X_{q_2} = \rho S_2 V l_{H_2} \left[0,6 \frac{S_{H_2}}{S_2} \left(C_{x_{H_2}} - \frac{\partial C_{x_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \right) + \frac{1}{2 S_2 l_{H_2}} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \left(C_{z_2} - \frac{\partial C_{x_2}}{\partial \alpha_2} \right) l_{x_2} dy \right],$$

$$Z_{q_2} = -\rho S_2 V l_{H_2} \left[0,6 \frac{S_{H_2}}{S_2} \left(C_{x_{H_2}} + \frac{\partial C_{z_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \right) + \frac{1}{2 S l_{H_2}} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \left(0,75 - \frac{l_{K_2}}{l_2} \right) \frac{dC_z}{d\alpha} l_2^2 dy \right],$$

$$M_{q_2} = -\rho S_2 V l_{H_2}^2 \left\{ 0,6 \frac{S_{H_2}}{S_2} \left(C_{x_{H_2}} + \frac{\partial C_{z_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \right) - \frac{1}{S l_{H_2}^2} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \left[\frac{1}{8} \frac{dC_z}{d\alpha} \left(1 - 2 \frac{l_{K_2}}{l_2} \right)^2 + \frac{1}{32} \left(2\pi - \frac{dC_z}{d\alpha} \right) \right] l_2^2 dy \right\}.$$

Pochodna aerodynamiczna momentu pochylającego samolotu holującego względem prędkości zmiany kąta natarcia:

$$M_{\dot{w}_2} = -\frac{1}{2} \rho S_{H_2} l_{H_2}^2 \frac{\partial C_{z_{H_2}}}{\partial \alpha_{H_2}} \frac{d\epsilon_2}{d\alpha_2}.$$

Pochodna aerodynamiczna momentu pochylającego względem zmian prędkości pionowej zależy zarówno od własności aerodynamicznych samolotu holującego, jak również od konfiguracji i charakterystyki liny holowniczej

$$M_{w_2} = \frac{1}{2} \rho S_2 V l_{a_2} a_s \bar{h}_{h_2},$$

gdzie \bar{h}_{h_2} jest zapasem stateczności statycznej samolotu holującego określonej wzorem (3.4).

8.3. Wyrazy macierzy A, B, C i D. Poniżej podano w postaci bezwymiarowej współczynniki równań przedstawione w ostatecznej formie.

Wyrazy macierzy A — bezwymiarowe współczynniki bezwładności:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left(\frac{Q_1}{g} + \frac{8L_T}{x_1^2} \right) \frac{g}{Q_1}, & a_{12} = a_{21} &= -\frac{8L_T}{x_1^2} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{13} = a_{14} = -a_{23} = -a_{24} = a_{31} = -a_{32} = a_{41} = -a_{42} &= -\frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{15} = -a_{25} &= -\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{16} = -a_{26} &= \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{17} = -a_{27} = a_{71} = -a_{72} &= -\frac{32L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1}, & a_{22} &= \left(\frac{Q_2}{g} + \frac{8L_T}{x_1^2} \right) \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{33} = \left(\frac{Q_1}{g} + \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right) \frac{g}{Q_1}, & a_{34} = a_{43} &= \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{35} = a_{45} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{36} = a_{46} &= -\left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}, \\
 a_{37} = a_{47} = a_{73} = a_{74} = a_{77} &= \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{44} &= \left(\frac{Q_2}{g} + \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right) \frac{g}{Q_1}, \\
 a_{51} = -a_{52} &= -\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{53} &= \left[\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} - M_{w1} \right] \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{54} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{55} &= \left[J_1 + \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right)^2 \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right] \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2 l_{H1}}, \\
 a_{56} = a_{65} &= -\left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2 l_{H1}}, \\
 a_{57} &= \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{61} = -a_{62} &= \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{16L_T X_1}{q x_1^3} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{63} &= -\left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}}, \\
 a_{64} &= -\left[\left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} + M_{w2} \right] \frac{g}{Q_1 l_{H1}},
 \end{aligned}$$

$$a_{66} = \left[J_2 + \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right)^2 \frac{32L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \right] \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2 l_{H1}},$$

$$a_{67} = - \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z2} \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{g}{Q_1 l_{H1}},$$

$$a_{75} = \left(k_{z1} + \frac{q x_1}{2X_1} h_{z1} \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2},$$

$$a_{76} = - \left(k_{z2} + \frac{q x_1}{2X_1} h_z \right) \frac{64L_T X_1^2}{q^2 x_1^4} \frac{\varrho S_1 g^2}{Q_1^2}.$$

Wyrazy macierzy **B** — bezwymiarowe współczynniki tłumienia:

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{14} = b_{16} = b_{17} = b_{21} = b_{23} = b_{25} = b_{27} = \\ = b_{32} = b_{34} = b_{36} = b_{37} = b_{41} = b_{43} = b_{45} = b_{47} = \\ = b_{52} = b_{54} = b_{56} = b_{57} = b_{61} = b_{63} = b_{65} = b_{67} = \\ = b_{71} = b_{72} = b_{73} = b_{74} = b_{75} = b_{76} = b_{77} = 0, \end{aligned}$$

$$b_{11} = -X_{u1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{13} = -X_{w1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{15} = -X_{q1} \frac{g}{Q_1 V},$$

$$b_{22} = -X_{u2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{24} = -X_{w2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{26} = -X_{q2} \frac{g}{Q_1 V},$$

$$b_{31} = -Z_{u1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{33} = -Z_{w1} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{35} = -Z_{q1} \frac{g}{Q_1 V},$$

$$b_{42} = -Z_{u2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{44} = -Z_{w2} \frac{1}{\varrho S_1 V}, \quad b_{46} = -Z_{q2} \frac{g}{Q_1 V},$$

$$b_{51} = -M_{u1} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{53} = -M_{w1} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{55} = -(M_{w1} U_1 + M_{q1}) \frac{g}{Q_1 V l_{H1}},$$

$$b_{62} = -M_{u2} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{64} = -M_{w2} \frac{1}{\varrho S_1 V l_{H1}}, \quad b_{66} = -(M_{w2} U_1 + M_{q2}) \frac{g}{Q_1 V l_{H1}},$$

Wyrazy macierzy **C** — bezwymiarowe współczynniki sztywności:

$$c_{11} = \left\{ \frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_1 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x1}^l) L_N] + 2(X_{x1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2},$$

$$c_{12} = - \left\{ \frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_1 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x2}^l) L_N] + 2(X_{x1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2},$$

$$c_{13} = -c_{14} \frac{X_{z1}^l}{X_{z1}^l} = X_{z1}^l \left(-\frac{2L_N}{x_1} - 2X_{x1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2},$$

$$\begin{aligned} c_{15} = \left\{ -X_{w1} U_1 - \frac{2h_{z1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \frac{2}{x_1^2} [(X_{x1}^l x_1 - T_1 \cos \varphi_1) h_{z1} + \right. \\ \left. + X_{z1}^l x_1 k_{z1}] L_N - 2X_{x1}^l (X_{x1}^l h_{z1} + X_{z1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{16} = \left\{ \frac{2h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) + \frac{2}{x_1^2} [(X_{x2}^l x_1 - T_1 \cos \varphi_1) h_{z2} + \right. \\ \left. - X_{z2}^l x_1 k_{z2}] L_N + 2X_{x1}^l (X_{x1}^l h_{z2} - X_{z1}^l k_{z2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{17} &= -c_{27} = \frac{16L_N X_1^2}{q x_1^3} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{21} &= \left\{ -\frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_2 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x_1}^l) L_N] - 2(X_{x_1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{22} &= -\left\{ -\frac{2}{x_1^2} [L_V + L_P - (T_1 \cos \varphi_1 - x_1 X_{x_2}^l) L_N] - 2(X_{x_1}^l)^2 L_S \right\} \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{23} &= -c_{24} \frac{X_{z_1}^l}{X_{z_2}^l} = X_{z_1}^l \left(\frac{2L_N}{x_1} + 2X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{25} &= \left\{ \frac{2h_{z_1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \frac{2}{x_1^2} [(T_1 \cos \varphi_1 - X_{x_1}^l x_1) h_{z_1} - X_{z_1}^l x_1 k_{z_1}] L_N + \right. \\
 &\quad \left. + 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{26} &= \left\{ X_{w_2} U_1 - \frac{2h_{z_2}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \frac{2}{x_1^2} (X_{x_2}^l x_1 h_2 - \right. \\
 &\quad \left. - T_1 h_{z_2} \cos \varphi_1 - X_{z_2}^l x_1 k_{z_2}) L_N - 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_2} - X_{z_1}^l k_{z_2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{31} &= -c_{32} = \left(-\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{x_1}^l L_N - 2X_{z_1}^l X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{33} &= \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_1}^l L_N + 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{34} &= -\left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_2}^l L_N + 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{35} &= \left[-Z_{w_1} U_1 + \frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{36} &= \left[-\frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_2}^l h_{z_2} - X_{z_2}^l k_{z_2}) L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_2} - X_{z_1}^l k_{z_2}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{37} = c_{47} &= -\frac{32X_1^3}{q x_1^4} L_N \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{41} &= \left(-\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{x_1}^l L_N + 2X_{z_1}^l X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{42} &= -\left(-\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{x_2}^l L_N + 2X_{z_1}^l X_{x_1}^l L_S \right) \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{43} &= \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_1}^l L_N - 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{44} &= -\left[\frac{4X_1}{q x_1^2} X_{z_2}^l L_N - 2(X_{z_1}^l)^2 L_S \right] \frac{l_{H1}}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{45} &= \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_1} + X_{z_1}^l k_{z_1}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
 c_{46} &= \left[-Z_{w_2} U_1 - \frac{4X_1}{q x_1^2} (X_{x_2}^l h_{z_2} - X_{z_2}^l k_{z_2}) L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z_2} - X_{z_1}^l k_{z_2}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{51} &= \left\{ -\frac{2h_{z1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{x_1}^l - \frac{2h_{z1}}{x_1^2} X_1 \right] L_N - \right. \\
&\quad \left. - 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{52} &= - \left\{ -\frac{2h_{z1}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{x_2}^l - \frac{2h_{z1}}{x_1^2} X_1 \right] L_N - \right. \\
&\quad \left. - 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{53} &= \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{z_1}^l L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{54} &= - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) X_{z_2}^l L_N + 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{55} &= - \left\{ -M_{w1} U_1 + \frac{2h_{z1}^2}{x_1^2} (L_V + L_P) + 2(X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1})^2 L_S - \right. \\
&\quad \left. - \left[2T_1 \cos \varphi_1 \frac{h_{z1}^2}{x_1^2} - \left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) \right] L_N \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}}, \\
c_{56} &= \left\{ -\frac{2h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) - 2(X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S + \right. \\
&\quad \left. + \left[2T_1 \cos \varphi_1 \frac{h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} - \left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{2h_{z1}}{x_1} \right) (X_{x_2}^l h_{z2} + X_{z_2}^l k_{z2}) \right] NT \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}}, \\
c_{57} &= -\frac{16X_1^2}{q x_1^3} \left(\frac{2X_1}{q x_1} k_{z1} + h_{z1} \right) L_N \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{61} &= \left\{ \frac{2h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) + \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) X_{x_1}^l - \frac{2h_{z2}}{x_1^2} X_1 \right] L_N + \right. \\
&\quad \left. + 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{62} &= - \left\{ \frac{2h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) + \left[X_{x_2}^l \left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) - \frac{2h_{z2}}{x_1^2} X_1 \right] L_N + \right. \\
&\quad \left. + 2X_{x_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{63} &= \left[-\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) X_{z_1}^l L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{64} &= - \left[-\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) X_{z_2}^l L_N - 2X_{z_1}^l (X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) L_S \right] \frac{1}{\varrho S_1 V^2}, \\
c_{65} &= \left\{ -\frac{2h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} (L_V + L_P) - \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2h_{z1} h_{z2}}{x_1^2} X_1 \right] L_N - 2(X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2}) (X_{x_1}^l h_{z1} + X_{z_1}^l k_{z1}) L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}}, \\
c_{66} &= \left\{ -M_{w2} U_1 + \frac{2h_{z2}^2}{x_1^2} (L_V + L_P) + \left[\left(\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{2h_{z2}}{x_1} \right) (X_{x_2}^l h_{z2} - X_{z_2}^l k_{z2}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - T_1 \cos \varphi_1 \frac{h_{z2}^2}{x_1^2} \right] L_N + 2(X_{x_1}^l h_{z2} - X_{z_1}^l k_{z2})^2 L_S \right\} \frac{1}{\varrho S_1 V^2 l_{H1}},
\end{aligned}$$

$$c_{61} = \frac{16X_1^2}{q x_1^3} \left(\frac{2X_1}{q x_1} k_{z2} + h_{z2} \right) L_N \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{71} = -c_{72} \frac{X'_{x_1}}{X'_{x_2}} = -c_{73} \frac{X'_{x_1}}{X'_{z_2}} = c_{74} \frac{X'_{x_1}}{X'_{z_2}} = -\frac{8X_1}{q x_1^2} X'_{x_1} L_N \frac{l_{H1}}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{75} = \frac{8X_1}{q x_1^2} (X'_{x_1} h_{z1} + X'_{z_1} k_{z1}) L_N \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{76} = -\frac{8X_1}{q x_1^2} (X'_{x_2} h_{z2} - X'_{z_2} k_{z2}) L_N \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$c_{77} = -\frac{64X_1^2}{q^2 x_1^4} L_N \frac{l_{H1}}{\rho S_1 V^2}.$$

Wyrazy macierzy **D** — bezwymiarowe wyrazy wolne:

$$d_1 = -d_2 = 2 \left[-\frac{1}{x_1} (L_V + L_P) + T_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{L_N}{x_1} + X'_{x_1} L_S \right) \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$d_3 = \left[-Q_1 + \frac{4X_1}{q x_1^2} (L_V + L_P - T_1 \cos \varphi_1 L_N) - 2T_1 \cos \varphi_1 X'_{z_1} L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$d_4 = \left[-Q_2 + \frac{4X_1}{q x_1^2} (L_V + L_P - T_1 \cos \varphi_1 L_N) + 2T_1 \cos \varphi_1 X'_{z_1} L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2},$$

$$d_5 = \left[\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z1} L_V + \frac{2L_P}{q x_1^2} (2X_1 k_{z1} + q x_1 h_{z1}) + 2T_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{2X_1}{q x_1^2} k_{z1} + \frac{h_{z1}}{x_1} \right) L_N - \right. \\ \left. - 2T_1 \cos \varphi_1 (X'_{x_1} h_{z1} + X'_{z_1} k_{z1}) L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2 l_{H1}},$$

$$d_6 = \left[-\frac{4X_1}{q x_1^2} k_{z2} L_V - \frac{2L_P}{q x_1^2} (2X_1 k_{z2} + q x_1 h_{z2}) + 2T_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{2X_1}{q x_1^2} k_{z2} + \frac{h_{z2}}{x_1} \right) L_N + \right. \\ \left. + 2T_1 \cos \varphi_1 (X'_{x_1} h_{z2} - X'_{z_1} k_{z2}) L_S \right] \frac{1}{\rho S_1 V^2 l_{H1}},$$

$$d_7 = \frac{8X_1}{q x_1^2} (L_V + L_P - T_1 \cos \varphi_1 L_N) \frac{1}{\rho S_1 V^2}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. Э. И. БУРМАН, *Анализ влияния буксирного троса на картину флаттера планера*, Исследования по теории пластин и оболочек, Сборник II, Издательство Казанского Университета, 1964.
2. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected Researches on the Stability of Kites and Towed Gliders*, Reports and Memoranda Nr 2303, 1942.
3. В. ЕТКИН, *Dynamics of flight*, New York-London 1959.
4. W. FISZDON, *Mechanika Lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
5. F. JANIК, *O obciążeniach w locie holowanym*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa, Nr 11, Warszawa 1933.
6. В. К. КАЧУРИН, *Гибкие нити с малыми стрелками*, Москва 1956.
7. W. KACZURIN, *Teoria konstrukcji wiszących*, Arkady, Warszawa 1965.
8. В. Н. КУБЛАНОВСКАЯ, *О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений*, Доклады Академии Наук СССР, 136 (1961).

9. В. Н. КУБЛАНОВСКАЯ, *О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений*, Журнал вычислительной математики и математической физики, том I (1961).
10. В. Н. КУБЛАНОВСКАЯ, *Решение проблемы собственных значений для произвольной матрицы*, Труды математического института имени В. А. Стеклова, Издательство Академии Наук СССР, 14 (1962).
11. E. ŁUCZYWEK, *Analiza metody związków całkowych w zastosowaniu do badania opływu ciał tępych naddźwiękowym strumieniem gazu*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1965.
12. J. MARYNIAK, *Uproszczona stateczność podłużna szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret. Stos. 1, 5 (1967).
13. S. NEUMARK, *Equilibrium Configurations of Flying Cables of Captive Balloons, and Cable Derivatives for Stability Calculations*, Reports and Memoranda, Nr 3333. 1963.
14. *Nowoczesne metody numeryczne*, — Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
15. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолёта*, Москва 1957.
16. J. R. PESKIN, I. N. RABINOWICZ, *Fortran differential Equation Solution Package (Runge-Kutta)*, Princeton University, Technical Memorandum, Nr 75, 1959.
17. K. PETRIKAT, E. PIERUSCHKA, *Die Stabilitätsbedingungen des Fieseler-Deichselschepps*, Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung.
18. J. RŻYSKO, A. WILCZYŃSKI, *Uwzględnienie sprężystości podpór w procesie drgań zamocowanych na stale lin nośnych*, Prace Katedry Mechaniki Technicznej, Zeszyt 2-1965. Wydawnictwo Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Warszawskiej.
19. G. K. SUSŁOW, *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa 1960.
20. E. Mzyk, *Wejście w podmuch samolotu PZL — 104 Wilga 2*, Sprawozdanie Katedry Mechaniki Politechniki Warszawskiej Nr 48 (nie publikowane).

Резюме

ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАНЕРА В БУКСИРНОМ КОМПЛЕКСЕ

В работе рассматривается буксир жесткого планера жестким самолетом на тяжелом, гибком и упругом буксирном тросе, на который влияют аэродинамические силы. Буксирный комплекс (буксирующий самолет + буксирный трос + буксируемый планер) перед возмущением находился в горизонтальном, прямолинейном, установившемся полете. С использованием уравнений Лагранжа второго рода, выведены дифференциальные уравнения движения, представленные после линеаризации в линейной форме. Получена система семи дифференциальных обыкновенных уравнений второго рода с постоянными коэффициентами. Их решение приведено к проблеме определения собственных значений для произвольной матрицы, имеющей в рассматриваемом случае четырнадцатый порядок. На основе численных методов, для одного типа планера и буксирующего самолета, исследовано влияние положения планера относительно буксирующего самолета и скорости буксировки на устойчивость планера. Выводы:

1. Поскольку во время буксирного полета минимальная скорость планера может быть меньше чем минимальная скорость самолета, то следует определить безопасную скорость буксировки.
2. Большие скорости буксира гарантируют увеличение динамической устойчивости планера.
3. Более полезным положением планера является его положение по линии буксирующего самолета или ниже его.
4. Полет буксирного комплекса является математически неустойчивым. Даже для больших скоростей буксира выступают небольшие расхождения аperiodических движений, требующие интервенции пилота после внешних возмущений.

S u m m a r y

DYNAMIC LONGITUDINAL STABILITY OF A TOWED SAILPLANE

The problem of longitudinal dynamic stability of the rigid glider towed behind the rigid aircraft with heavy and flexible towing rope affected by aerodynamic forces, has been considered. Before the disturbance had occurred the aircraft as well as the glider performed horizontal, straightlinear, steady flight. Using the second kind Lagrange's equations, differential equations of motion have been derived. After the linearization had been performed, the system consisted of seven ordinary, second order differential equations with constant coefficients. The solution of the system consists in finding out the eigenvalues of asymmetric (arbitrary) matrices, which were of the fourteenth order in the case considered. By means of numerical calculations, the influence of the reciprocal location of the typical aircraft and the high-performance typical glider on the stability of the glider, has been investigated. The results are as follows:

1. Since it is possible to reach the critical angle of attack first at the glider and afterwards at the aircraft, the minimum towing velocity should be determined.
2. The stability of the glider increases with increasing the towing velocity.
3. The order to increase the stability, the glider should fly in the line of- or below the aircraft.
4. In all cases the towed glider is slightly unstable and even at higher velocities there exist some divergences of the aperiodic motions, calling the intervention of pilot.

KATEDRA MECHANIKI WYDZ. MEIL.
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 listopada 1966 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE Z KONWERSATORIUM «ZAGADNIENIA OPTIMALIZACJI W MECHANICE»

W dniach od 1 do 7 lutego 1967 odbyło się w Szczyrku ogólnokrajowe konwersatorium pod hasłem «Zagadnienia optymalizacji w mechanice» zorganizowane przez Oddział Gliwicki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Do komitetu organizacyjnego należeli: prof. mgr. inż. Kazimierz KUTARBA (przewodniczący), doc. dr inż. Stanisław GDULA, doc. dr inż. Jerzy NIEWIADOMSKI, prof. dr inż. Jan SZARGUT, dr inż. Tadeusz ŚWIERZAWSKI. Sprawy kwaterunkowe, kancelaryjne i rozliczenia prowadziła p. Teresa BŁASZCZYŃSKA.

Na konwersatorium nadesłano streszczenia 21 referatów. Streszczenia te dzięki subwencji Rektoratu Politechniki Śląskiej zostały wydrukowane w postaci broszury, którą otrzymali wszyscy uczestnicy konwersatorium. Autorzy 4 zgłoszonych referatów nie przybyli na obrady, natomiast w chwili rozpoczęcia obrad uczestnicy zgłosili 5 dalszych referatów. Łącznie więc wygłoszono i przedyskutowano 22 referaty.

R. HAGEL (Gliwice) omówił zagadnienia optymalizacji procesu walcowania blach. Po sformułowaniu równań opisujących obiekt regulacji przeprowadził analizę systemów regulacji i na podstawie wymagań stawianych funkcji błędu grubości podał optymalną postać transmitancji regulatora.

E. BRZUCHOWSKI (Wrocław) przedstawił zagadnienie optymalizacji przebiegu regulacji w świetle mechaniki, wprowadzając energetyczną interpretację procesów nieustalonych w obwodzie regulacji.

J. GOLIŃSKI (Warszawa) mówił o zastosowaniu kilku metod programowania nieliniowego do rozwiązywania zadań z zakresu optymalnej syntezy maszyn. Autor przedstawił tzw. metodę błędzenia w dopuszczalnym obszarze zmiennych niezależnych. Metoda ta skraca obliczenia, umożliwia bowiem poszukiwanie ekstremum funkcji optyimizowanej w okolicy punktu najlepszego.

J. JAWORSKI (Warszawa) naświetlił zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do wyznaczania przekrojów poprzecznych belek sprężonych o wyrównanym wyężeniu określonym hipotezą Caquote'a.

S. JENDO (Warszawa) wygłosił referat o kształtowaniu siatek ciągnowych, tj. wyznaczaniu formy powierzchni, na której ma być rozpięta siatka spełniająca przyjęte kryteria i warunki. Autor poszukiwał formy wynikającej z kryterium minimum energii sprężystej przy ustalonej objętości tworzywa.

E. KOSTOWSKI (Gliwice) zajął się zagadnieniem doboru optymalnych parametrów konstrukcyjnych rekuperatora opromieniowanego, zbudowanego z elementów Fielda. Funkcją celu stanowił wskaźnik efektywności ekonomicznej wynikający z kosztu inwestycyjnego rekuperatora i kosztu przetłaczania powietrza przez rekuperator.

W. KRZYŚ (Kraków) wygłosił referat na temat kształtowania słupów przy uwzględnieniu warunków stateczności ścianki. Przedmiotem rozważań był słup o zmiennym przekroju pierścieniowym. Główną uwagę zwrócono na zakres niesprężysty, w którym charakterystyka materiału jest nieliniowa.

M. KULIG (Warszawa) zreferował zagadnienie optymalizacji wymiarów zaizolowanego rurociągu pary przegrzanej. Analizę rocznego kosztu przesyłania pary przeprowadzono zakładając zmienną średnicę rurociągu i zmienną grubość izolacji. Straty ekonomiczne wywołane przez dławienie i przekazywanie ciepła do otoczenia oceniono metodą egzergetyczną.

S. LESSAER (Gliwice) poruszył zagadnienie osiowo-symetrycznych ustrojów siatkowych o ekonomicznym kształcie zapewniającym optymalne wykorzystanie materiału elementów nośnych. Przedmiotem rozważań były ustroje wiszące i ustroje kopulaste.

S. OWCZAREK (Warszawa) omawiał zagadnienie kształtowania słupów mimośrodowo ściskanych w oparciu o kryterium minimum potencjału sprężystości przy stałej objętości materiału.

Z. ROMANISZYN (Kraków) zajął się zagadnieniem optymalizacji kinematycznej mechanizmu napędowego typu «ALSTHOM». Celem pracy był taki dobór kątów charakteryzujących kształt mechanizmu, aby występujące w ruchu przyspieszenia były możliwie małe.

J. SZARGUT (Gliwice) i K. MACZEK (Kraków) przedstawili zagadnienie optymalizacji techniczno-ekonomicznej przy projektowaniu wieloogniowego procesu cieplnego. Funkcją celu jest koszt roczny wynikający z kosztów inwestycyjnych i kosztu energii napędowej. Jest to nieliniowa funkcja parametrów doskonałości ogniów procesu. Zaproponowano przybliżone ujęcie kosztu za pomocą funkcji kwadratowej, dzięki czemu jest możliwe analityczne wyznaczenie optymalnego zespołu parametrów doskonałości. Podano przykład dotyczący optymalizacji skraplacza i parowacza ziębiarki parowej sprężarkowej.

J. SZARGUT i A. ZIĘBIK (Gliwice) naświetlili zagadnienie wyznaczania optymalnej grubości izolacji cieplnej na przykładzie rurociągu pary świeżej. Zaproponowano analizowanie wpływu grubości izolacji na wymagany koszt inwestycyjny kotła. Metoda ta eliminuje konieczność arbitralnej oceny ekonomicznej strat ciepła, spośród zaś dwu możliwych metod analizowania wpływu grubości izolacji na koszty inwestycyjne daje niższą ocenę strat ekonomicznych.

R. SZYMANIK (Warszawa) przedstawił problemy optymalizacji występujące przy projektowaniu komór spalania w lotnictwie i technice raketowej.

A. LESKIEWICZ (Warszawa) mówił o zagadnieniu optymalizacji spalania w komorach silników raketowych. Między innymi naszkicował projekt analogu fizycznego przeznaczzonego do ustalenia strumieni cieplnych występujących w komorze spalania.

R. SZYMANIK i S. WIŚNIEWSKI (Warszawa) zreferowali zagadnienie optymalizacji dysz silników raketowych. Omówiono metody takiego doboru ciśnienia obliczeniowego na wylocie dyszy, aby był osiągnięty maksymalny średni ciąg jednostkowy dla całego czasu działania silnika. Naświetlono możliwości regulowania ciśnienia obliczeniowego.

M. ŻYCZKOWSKI (Kraków) zajął się zagadnieniem optymalnego punktowania wzmocnienia ściskanych powłok walcowych z uwagi na ich stateczność. Celem rozważań było ustalenie minimalnej liczby kolków usztywniających przy respektowaniu kilku możliwych schematów zniszczenia powłoki.

B. SEREDYŃSKI (Gliwice) wygłosił referat o modelowaniu procesu technologicznego metodą wyznaczania powierzchni regresji opisanej liniową funkcją parametrów.

K. TARAIMA (Wrocław) naświetlił zagadnienie optymalizacji stosunku nadmiaru powietrza w kotłach pyłowych. Funkcją celu była suma straty wylotowej fizycznej, chemicznej i straty chemicznej w produktach stałych. Autor omówił trudności ciągłego pomiaru stosunku niecałkowitego spalania i przedstawił proponowaną metodę pomiaru.

E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI (Wrocław) omówił niektóre zagadnienia doboru optymalnego kształtu ustroju prętowego.

L. MÜLLER (Gliwice) przedstawił kilka wybranych zagadnień z dziedziny optymalizacji elementów maszyn. Autor omówił zagadnienie optymalizacji łożysk ślizgowych ze względu na najmniejszą średnicę, najmniejszą długość, najmniejszą objętość i najmniejsze straty mocy. Następnie przedstawił wykres do optymalnego doboru korekcji zębów ze względu na zatarcie. Wreszcie naświetlił zagadnienie optymalnego doboru położenia zębniaka przekładni ze względu na uzyskanie równomiernego rozkładu obciążeń na zębie.

M. BIEROWSKI (Rzeszów) mówił o wielokryterialnej optymalizacji współpracy urządzeń mechanicznych i grzejnych. Przedmiotem rozważań był układ złożony z pieców grzejnych i np. młotów kuziennych. Celem optymalizacji było uzyskanie maksymalnej wydajności procesu.

W konwersatorium wzięło udział 56 osób. Zebraniom przewodniczyli profesorowie: S. ANDRZEJEWSKI, Z. WUSATOWSKI, J. LEDWOŃ, R. SZYMANIK, T. OPOLSKI, J. SZARGUT. Po wygłoszeniu każdego z referatów odbywała się dyskusja, która częstokroć była kontynuowana poza zebraniem ogólnym.

W tematyce wygłoszonych referatów przeważały 2 grupy zagadnień: zagadnienia wytrzymałościowe (7 referatów) i zagadnienia cieplne (8 referatów). Pozostałe referaty dotyczyły zagadnień optymalizacji konstrukcji (3 referaty), optymalizacji procesów regulacji (2), optymalnej eksploatacji złożonych układów (1) i modelowania matematycznego procesów technologicznych (1).

Dzięki naświetleniu problemów optymalizacji, występujących w różnorodnych dziedzinach mechaniki, konwersatorium dało okazję do nawiązania bezpośrednich kontaktów pomiędzy pracownikami naukowymi różnych dziedzin, umożliwiło zapoznanie się z szerokim zakresem problemów i pozwoliło na wymianę doświadczeń z dziedziny metod stosowanych przy optymalizowaniu.

Część referatów była wynikiem wieloletniej działalności w danej dziedzinie naukowej. Informacje przekazane przez autorów tych referatów były dla uczestników szczególnie cenne, gdyż w wielu przypadkach mogą one stanowić wskazówkę dla wyboru tematyki prac badawczych i metod rozwiązywania problemów.

Zgodnie z założeniami konwersatorium referowano również liczne prace znajdujące się w fazie początkowej. Dyskusja przeprowadzona po tych referatach na pewno ułatwi autorom właściwe ustalenie dalszego kierunku prac.

Biorąc pod uwagę zakres tematyki, poziom referowanych prac oraz duże ożywienie dyskusji można stwierdzić, że konwersatorium spełniło swoje zadania.

J. Szargut

W Y K A Z
REFERATÓW WYGŁOSZONYCH W POLSKIM TOWARZYSTWIE
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ
W CIĄGU R. 1966

I. ZEBRANIA NAUKOWE

L.p.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest-	dysku-
				ników	tantów
Oddział w Gdańsku					
1	16.2.66	J. WIĘCKOWSKI	Problem optymalizacji rozkładów mas w kadłubie okrętu na współmiernej fali regularnej	11	3
2	3.3.66	P. WILDE	Wariacyjne ujęcia metody różnic skończonych w teorii łupin	16	7
3	5.3.66	K. WYSIATYCKI	Problemy płaskiego stanu naprężenia w belkach dwuteowych	18	6
4	21.10.66	CZAMBANIAN	Zagadnienie skręcania niejednorodnych prętów przyrmatycznych		
Oddział w Gliwicach					
5	27.1.66	J. DIETRICH	Współczynnik bezpieczeństwa czy liczba pewności	64	9
6	24.2.66	Z. WUSATOWSKI	Związki fizyczne teorii płynięcia dla metali o anizotropii plastycznej	14	4
7	28.3.66	T. BES (prace konkursowe)	Przepływ ciepła w laminarnym strumieniu cieczy chłodzącej reaktor jądrowy		
8	28.3.66	E. CZOGAŁA i A. TYLIKOWSKI	Zagadnienie quasistatyki lepkościowego bębna obciążonego ruchomą siłą promieniową		
9	28.3.66	J. TOMECZEK	Wyznaczenie optymalnych rozmiarów pionowego pierścieniowego kanału chłodzącego w materiale chłodzonym na drodze konwekcji swobodnej		
10	28.3.66	A. GUZIK	Obliczanie współczynnika przenoszenia ciepła w regeneratorskiej instalacji niesymetrycznej		
11	28.3.66	S. KOPEĆ	Sala widowiskowa bez ludzi jako obiekt w procesie regulacji temperatury		
12	28.3.66	E. KOSTOWSKI	Obliczenia cieplne dwuszczelinowego rekuperatora opromieniowanego do przeniesienia	123	29

L.p.	Data	Autor	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
			z przeniesienia	123	29
13	28.3.66	S. LOSKA O. MATE- JA i E. SWITOŃSKI	Badania modelowe stateczności hiperbolicznych chłodni wieżowych obciążonych statycznie wiatrem przy jednoczesnym uwzględnieniu ciężaru własnego powłoki		
14	28.3.66	Z. SULIMOWSKI	Zakotwienie na zasadzie przyczepności ciężną sprężającego w betonie		
15	18.3.66	Z. GĘBICKI	Dynamiczny model mechanizmu maszyny roboczej i metoda bilansów energii jako sposób badania jej właściwości	29	45 (łącznie referaty konkur- sowe)
16	19.5.66	J. ADAMCZYK	Umocnienie stali austenicznych typu 18-8	6	5
17	26.5.66	W. KOWALCZYK	Włączanie stempla z tarciami w półprzestrzeń sztywno-plastyczną	10	6
18	16.6.66	L. MÜLLER	Analogie fizyczne i matematyczne w dynamice maszyn	18	5
19	13.10.66	L. MÜLLER	Laboratoryjna metoda analizy drgań i hałasów	24	9
20	24.11.66	S. MAJEWSKI	Wybrane zagadnienia z teorii wielomateriałowych belek klejonych z lekkim rdzeniem piankowym	8	4
21	15.22.66	J. SZPILECKI	Nawigacja kosmiczna	10	5
Oddział w Krakowie					
22	19.1.66	A. OSTROWSKI	Metody wibracyjne przy przecinaniu skał	28	10
23	30.3.66	E. MACIĄG	Pewne zagadnienia dynamiczne obciążonych belek z materiału sztywno-plastyczno-lepkiego	9	7
24	19.6.66	Zespół Techniki Wibracyjnej			
25		(wspólnie z O/Poznań ogłoszono 3 referaty)		43	15
26					
27	18.10.66	J. PANOWKO	Niektóre zagadnienia drgań nieliniowych z ZSRR	28	18
28	16.11.66		Informacje z konferencji naukowych	18	6
29	16.11.66	J. HALAUNBRENNER	Kongres Mechaniki w Splicie		
30	16.11.66	W. KRZYŚ	Konferencja Naukowa ZMOC PAN w Kołobrzegu		
31	16.11.66	J. MURZEWSKI	Symposium IASS w Bratysławie		
32	16.11.66	R. CIESIELSKI	III Konferencja Naukowa Konstrukcji Metalowych w Warszawie		
33	16.11.66	R. CIESIELSKI	XII Konferencja KI PAN w Krynicy		
34	16.11.66	Z. ENGEL	Symposium Techniki Wibracyjnej w Gdańsku		
35	14.12.66	K. PISZCZEK	Układ mechaniczny o sile zwrotnej zależnej od tarcia suchego		
36	14.12.66	B. OLSZEWSKI	Uwagi o ogólnej metodzie asymptotycznej w teorii drgań nieliniowych	19	11
Oddział w Łodzi					
37	13.1.66	W. OLSZAK	Z zagadnień teorii niesprężystych powłok cienkościennych do przeniesienia	65	7
				438	182

L.p.	Data	Autor	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
			z przeniesienia	438	182
38	3.3.66	K. WILMAŃSKI	Niegiroskopowe płyty włókniste jako modele ciągle osiowo symetrycznych rusztów i płyt wieloobrotowych	11	4
39	31.3.66	W. BARAŃSKI	Wstęp do teorii powłok siatkowych		
40	31.3.66	K. WILMAŃSKI	Metody asymptotyczne w teorii tarcz i płyt o strukturze siatkowej	11	3
41	21.4.66	W. NOWACKI	Zagadnienie mieszanych warunków brzegowych w teorii płyt	87	10
42	17.11.66	M. TROMBSKI	Gęstość drgań własnych kołowej płyty ortotropowej o zmiennej liniowo grubości	15	3
43	12.12.66	PIERRE BROUSSE	Zginanie i drgania płyt niejednorodnych	96	12
			Oddział w Poznaniu		
44	13.1.66	A. LITEWKA	Elastoosprężona metoda analizy naprężeń	12	4
45	31.3.66	Z. KAĆKOWSKI	O pewnym sposobie rozwiązywania płyt o nieliniowych warunkach brzegowych	21	6
46	28.4.66	E. KARAŚKIEWICZ	Efekt giroskopowy w wałach wirujących	20	2
47	13.10.66	W. DERSKI	Równania teorii konsolidacji	16	2
48	27.10.66	W. DERSKI	Zastosowanie dualnych równań całkowych w teorii konsolidacji	16	3
49	16.12.66	J. SKOWROŃSKI	Optymalna synteza kinetyczna nieliniowych uogólnionych układów mechanicznych	11	4
			Oddział w Szczecinie		
50	10.1.66	T. KABAT	Zastosowanie algebry macierzy w teorii sprężystości	12	1
51	4.3.66	W. NOWACKI	Mieszane zagadnienia brzegowe w teorii membran i płyt	29	3
52	29.4.66	A. RADZIKOWSKI	Problem skażeń gruntów i wody gruntowej w wyniku awarii rurociągu paliwowego	16	3
53	27.5.66	H. PRIEBE	Obliczanie ram płaskich z prętów o zmiennych przekrojach za pomocą analogów elektrycznych	15	5
54	29.0.66	H. PRIEBE	Obliczanie ram przestrzennych metodą analogii elektrycznej	14	3
55	7.10.66	R. SOLECKI	Dynamika płyty pływającej	21	3
56	14.11.66	H. OSTAPIUK	Przybliżony sposób obliczania ugięć ramowych układów szkieletu stalowego budynku wielopiętrowego	11	4
57	28.11.66	L. MARTINI i B. TĘCZYŃSKA	Optymalizacja kształtu wieży kratowej z uwagi na minimum materiału	14	6
58	16.12.66	A. STĘPNIEWSKI	Dynamika układu materialnego jako dynamika punktu w przestrzeni Riemanna	10	2
			Oddział w Warszawie		
59	14.2.66	W. NOWACKI	Zagadnienia termosprężystości w ośrodku Cosseratów	18	11
			do przeniesienia	914	276

L.p.	Data	Autor	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
			z przeniesienia	914	276
60	14.2.66	J. P. DEN HARTOG (USA) (wspólnie z IPPT)	Zagadnienia dynamiki konstrukcji	20	5
61	14.3.66	Z. KĄCZKOWSKI	O pewnym sposobie rozwiązywania płyt o nie- ciągłych warunkach brzegowych	18	4
62	28.3.66	W. KUCZYŃSKI	Reologiczne przemieszczenia belek żelbetowych	9	4
63	21.5.66	SEICHIRO MAEZAWA (Yamanashi Univer- sity Kofu, Japonia)	Teoria drgań nieliniowych	10	5
64	13.6.66	J. SKOWROŃSKI	Synteza kinetyczna ogólnych układów mechaniki	6	4
65	10.10.66	JA. G. PANOWKO, Czl. Koresp. Łotewskiej Akademii Nauk	Pewne problemy stateczności powłok	18	4
66	19.10.66	JA. G. PANOW- KO	Problem drgań wahadła fizycznego o ruchomym punkcie zawieszenia		
67	19.12.66	J. BEJDA (praca nagrodzona na Konkursie Od- działu)	Teoria rozprzestrzeniania się i odbicia fal napre- żenia w sprężysto-lepkoplastycznych belkach	22	5
Oddział we Wrocławiu					
68	24.1.66	K. BIERNATOWSKI	Stateczność fundamentów w ujęciu rachunku prawdopodobieństwa	15	7
69	28.2.66	S. DMITRUK	Niektóre poglądy na opór ścinania w gruntach	13	5
70	4.4.66	I. KISIEL	O dynamicznej teorii wytrzymałości	27	9
71	20.4.66	Z. GRODECKI	O pewnym sposobie sporządzania linii wpływo- wych i linii ugięcia dla płaskich kratownic prostych	18	7
72	27.4.66	W. KASPRZAK	Pomiary naprężeń w małych obszarach polikrysz- tałów	15	8
73	14.11.66	M. WERSZKO	Badania dynamicznych własności pneumatycznych linii sygnałowych układów automatycznej regulacji	15	6
74	19.12.66	E. BRZUCHOWSKI	Więź między maszyną a układem samoczynnej regulacji oraz jej konsekwencje	18	7
				1.138	356

II. SYMPOZJA

I. KONWERSATORIUM ODDZIAŁU GLIWICE «ZAGADNIENIA TERMICZNE I PLASTYCZNE W MECHANICE»

- | | | |
|----|--|--|
| 75 | A. WILCZYŃSKI (Warszawa) | Pewne zagadnienia weryfikacji liniowych teorii ciał lepkosprężystych |
| 76 | Z. OLESIĄK (Warszawa) | Rozkład naprężeń cieplnych w półprzestrzeni i warstwie sprężystej |
| 77 | S. DREWŃOWSKI (Warszawa) | Problem energii podczas niszczenia konstrukcji |
| 78 | B. SKALMIERSKI i E. CZOGAŁA
(Gliwice) | Lepkosprężysta powłoka walcowa na podłożu lepkosprężystym o jednokierunkowej charakterystyce |

- 79 B. SKALMIERSKI i A. TYLIKOWSKI (Gliwice) Problem lepkości sprężystego pręta kołowego o dwukierunkowej charakterystyce lepkości sprężystej
- 80 S. ZIEMBA i W. BABUL (Warszawa) Pewne aspekty zderzenia się ciał
- 81 S. ZIEMBA, M. JÓZKO i T. KARPIŃSKI (Warszawa) Zagadnienia badania udarów cieplnych i zmęczenie cieplne metali
- 82 A. LISOWSKI (Kraków) Próby zastosowania elektrycznego analogu do zagadnień programowania, przy uwzględnieniu sprężysto-plastycznego charakteru niektórych współczynników
- 83 W. ŁUKASZEK (Gliwice) (komunikat) Wpływ promieniowania na niektóre własności mechaniczne materiałów
- 84 S. GAJDA (Warszawa) Konstrukcja nowej zrywarki udarowej
- 85 T. KARPIŃSKI Wpływ nagrzania z dużą prędkością na niektóre własności wytrzymałościowe stali 45
- 86 H. OLESIAKOWA (Warszawa) Problem przybliżonego równania przewodnictwa cieplnego dla grubych powłok cylindrycznych
- 87 J. KLEPACZKO (Warszawa) Wykładnicze prawo wpływu odkształcenia i temperatury na naprężenie plastyczne płynięcia niektórych metali
- 88 J. KRZEMIŃSKI (Warszawa) Problem pola temperatury w nieograniczonej powłoce walcowej, wywołanego działaniem poruszającego się skupionego źródła ciepła wzdłuż tworzącej walca
- 89 M. JÓZKO (Warszawa) Badania udarowe próbek w podwyższonych temperaturach
- 90 J. MIASTKOWSKI Zagadnienia wpływu historii obciążenia na powierzchnię plastyczności
- 91 J. RYCHLEWSKI i A. MIODUCHOWSKI (Warszawa) Problem nośności granicznej skręcanych prętów o skokowej niejednorodności
- 92 J. STACHURSKI (Kraków) Problemy związane z ruchem nosiwa na przenośniku wibracyjnym
- 93 W. SZUŚCIK (Gliwice) Obciążenie graniczne łuku kołowego upodatkowanego, zabudowanego w idealnie sztywnym podłożu
2. SYMPOZJUM ODDZIAŁU W GDAŃSKU ZORGANIZOWANE WSPÓLNIE Z ODDZIAŁEM W KRAKOWIE N.T. «TECHNIKI WIBRACYJNEJ»
- 94 S. ZIEMBA i ENGEL Stosowanie drgań w realizacji pewnych procesów technologicznych
- 95 S. ZIEMBA i B. KOWALCZYK Drgania wibro-uderzeniowe
- 96 W. BOGUSZ Dopuszczalne amplitudy drgań maszyn wibracyjnych
- 97 M. ZABAWA Zagadnienie obciążeń stochastycznych w wibrotechnice
- 98 A. CZUBAK Możliwości stosowania transportu wibracyjnego w przemyśle
- 99 R. JUCHA Dozowanie materiałów sypkich za pomocą podajników wibracyjnych
- 100 A. CZUBAK Badanie dynamiki prostego przenośnika wibracyjnego
- 101 Z. GŁĄŻEWSKI Urządzenia wibracyjne do wyładunku materiałów sypkich z krytych wagonów kolejowych
- 102 J. PUGANIEC i H. MODZELEWSKI Wyładowywanie zmarzniętych materiałów kopalnianych i budowlanych sypkich przy pomocy wibracji
- 103 J. HAMAN, A. ZDANOWICZ Drgania narzędzia w procesie skrawania gruntu
- 104 J. HAMAN, J. GRODZIOWICZ Wpływ sprężystości cząstek na ruch materiału ziarnistego w warunkach płaszczyzny drgającej
- 105 B. KOWALCZYK Analiza układu wibrouderzeniowego z tarciami wiskotycznym
- 106 B. KOWALCZYK Analiza układu wibrouderzeniowego z tarciami suchymi
- 107 Z. WIŚNIEWSKI Badania wstępne układu uderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą
- 108 B. KOSSOWSKI Impulsowe zagęszczenie betonu

- 109 Z. TRZECIAK Wibracyjne zagęszczarki kroczące
 110 Cz. GAWLIK Wibromłot BC 10 do formowania pali żelbetowych w gruncie
 111 J. RANISZEWSKI Stateczność pracy wibromłota o jednym stopniu swobody
 112 W. ROKSELA Asortyment urządzeń wibracyjnych produkowanych w Łódzkich Zakładach Budowy Maszyn
 113 A. OSTROWSKI Perspektywy zastosowania wibrotechniki w obróbce skal twardych
 114 M. GREGORASZCZUK Wyniki wstępnych badań amortyzowanych zespołów wstrząsowych maszyn formierskich
 115 L. ŻURAWSKI Wprowadzenie do teorii amortyzowanych zespołów wstrząsowych maszyn formierskich

3. SYMPOZJUM ODDZIAŁU W GDAŃSKU N.T. «KONSTRUKCJI WISZĄCYCH»

- 116 P. WILDE Przegląd prac dotyczących teorii siatek wiszących
 117 B. KOY Dwa oryginalne przekrycia wiszące o dużych rozpiętościach dla centrum Warszawy
 118 Cz. BRANICKI Wstępne obliczenie pewnego przekrycia wiszącego nad budynkiem o kolistym rzucie
 119 P. WILDE W sprawie równań podstawowych siatki dyskretnej
 120 St. LESSAER Kształt osiowo-symetrycznego siatkowego ustroju wiszącego o minimum zużycia materiału
 121 E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI Niektóre zagadnienia statyki mostów trójpasowych w łuku
 122 E. BIELEWICZ Pewne zagadnienie pełzania żelbetowej powłoki wiszącej
 123 P. WILDE Obliczenie żelbetowej cylindrycznej powłoki wiszącej na obciążenie śniegiem
 124 R. GANOWICZ Zastosowanie powłoki brezentowej do osłony robót zimowych na budowie elektrowni Pątnów
 125 M. WIZMUR Niektóre problemy przekrycia Opery Leśnej w Sopocie
 126 St. UMIŃSKI Przekrycia wiszące stanowisk technologicznych w gospodarce morskiej

4. ODDZIAŁ WE WROCŁAWIU III-CI SYMPOZJON POŚWIĘCONY REOLOGII

Reologia Metali i Polimerów

- 127 R. TAKSERMAN-KROZER Teoria reologicznego zachowania się rozcieńczonych roztworów polimerów w warunkach złożonych deformacji (Warszawa)
 128 J. ZAWADZKI, B. GABRYSZEWSKA, E. GROZIK (Wrocław) Widma (spektra) czasów retardacji wybranych tworzyw sztucznych przy czystym zginaniu i skręcaniu
 129 M. NOWAK, J. ZAWADZKI, J. KAŁWAK (Wrocław) Analiza porównawcza pełzania statycznego i dynamicznego niektórych tworzyw sztucznych
 130 J. ZAWADZKI, I. HYLA (Gliwice) Anomalie wykresów relaksacji naprężeń a zmiany strukturalne w poliamidzie (Wrocław)
 131 M. NOWAK (Wrocław) Wpływ okresowo zmiennych naprężeń na obraz dyfrakcyjny polistyrenu i poliamidu
 132 J. ZAWADZKI, B. OKOŁÓW (Wrocław) Pełzanie taśm przenośników z przekładkami steelonowymi
 133 J. ZAWADZKI, J. ORŁOWSKI, W. SIĘTA (Wrocław) Quasistatyczna metoda oceny reoeftów stabilizacji taśm przenośników z przekładkami steelonowymi
 134 S. MAZURKIEWICZ (Kraków) Wyniki badań doświadczalnych pewnych własności mechanicznych poliamidu Tarlon X-A
 135 W. STARZEWSKI (Kraków) Wpływ reologicznych własności poliamidowych wykładzin kół kolei linowych na zużycie wykładzin oraz właściwości eksploatacyjne

- 136 A. JAKOŁŁUK
(Warszawa) Wpływ małych głębokości zawibrowania na proces pelzania w metalach
- 137 S. PIŁECKI
(Warszawa) Kumulacja uszkodzeń w procesie zmęczenia metali

Reologia Betonu i Konstrukcji

- 138 A. MITZEL
(Wrocław) Funkcje pelzania i skurczu betonu
- 139 A. MITZEL, M. KŁAPOĆ
(Wrocław) Nieliniowe pelzanie betonu
- 140 A. MITZEL, M. KŁAPOĆ O superpozycji odkształceń skurczu i pelzania
- 141 J. SZCZYGIŁ, M. DZIURLA, Z. KOZAKOW
(Gdańsk) Badania modelowe dwóch przęseł mostowych o ustrojach zespolonych betonowo-stalowych sprężonych
- 142 J. KMITA
(Wrocław) Niektóre problemy oceny strat siły sprężania w konstrukcjach kablobetonowych
- 143 S. BYCZKOWSKI, M. RYBAK
(Warszawa) Niektóre wyniki badań długotrwałych mostów sprężonych
- 144 M. SIERADZKI
(Gdańsk) Reologia kratownicy koblobetonowej w świetle badań
- 145 Z. KOWAL
(Wrocław) Wyboczenie pelzające osiowo ściskanych prętów lepkosprężystych
- 146 Z. BYCHAWSKI, H. SIENNICKI
(Kraków) Zginanie tarczy kolowej w zakresie nieliniowej deformacji natychmiastowej i pelzania
- 147 W. KUCZYŃSKI
(Łódź) Wpływ sekwencji obciążeń na ugięcia reologiczne belek żelbetowych

Reologia gruntów

- 148 E. DEMBICKI
(Gdańsk) Obciążone skarpy ziemne w stanie równowagi granicznej
- 149 I. KISIEL, K. KUJAWIŃSKI
(Wrocław) Zadanie Sadowskiego dla półpłaszczyzny o modelu reologicznym M/V
- 150 Z. SOBCZYŃSKA
(Poznań) Osiadanie półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem obciążenia skupionego, w przypadku nieprzepuszczalnej powierzchni półprzestrzeni
- 151 D. PAŃCZAK
(Poznań) Równania teorii konsolidacji w przypadku działania źródeł dylatacji
- 152 J. PRZYSTAŃSKI
(Poznań) Określanie fizyko-mechanicznych własności gruntów za pomocą współczynników sprężystości Biota-Willisa
- 153 S. DMITRUK, H. SUCHNICKA
(Wrocław) Lepkość strukturalna jako charakterystyka oporu ścinania
- 154 J. KWIATEK
(Katowice) Wpływ relaksacji naprężeń w gruncie na wielkość sił rozciągających w fundamentach budowli
- 155 A. KIDYBIŃSKI Badania reologicznych własności skał karbońskich prowadzone w Głównym Instytucie Górnictwa

Zagadnienia ogólne

- 156 A. BOROWSKI, Z. BYCHAWSKI
(Kraków) Podstawowe własności nieliniowych ciał lepkosprężystych
- 157 A. JAKOŁŁUK, S. ZIEMBA
(Warszawa) Pewien nieliniowy model reologiczny
- 158 W. DERSKI
(Poznań) O zastosowaniu dualnych równań całkowych w zagadnieniach teorii konsolidacji z mieszanymi warunkami brzegowymi

- | | | |
|-----|-------------------------------------|---|
| 159 | J. BROŚ
(Kraków) | Metody określania własności mechanicznych niektórych nowych tworzyw konstrukcyjnych |
| 160 | Z. LISOWSKI
(Kraków) | Metoda określania deformacji plastycznej tworzyw przy badaniu ich przydatności na łożyska ślizgowe |
| 161 | W. PARZONKA
(Wrocław) | Metoda analizy zakresu pomiarowego wiskozymetru typu Couette'a dla ciał Bingham'a |
| 162 | W. BABUL, S. ZIEMBA
(Warszawa) | Pewne aspekty modelu przebicia ładunkami kumulacyjnymi |
| 163 | B. BIREK
(Kraków) | O kształcie powierzchni podłoża lepko-sprężystego w otoczeniu obszaru styku toczącej się sztywnej kuli z podstawą reprezentowaną modelem Voigta i modelem Voigta połączonym szeregowo ze sprężyną |
| 164 | M. WARSZYŃSKI, P. ŚRODA
(Kraków) | Zjawiska reologiczne w przypadku elementów pracujących w warunkach nacisków stykowych wielokrotnie powtarzalnych |

III. KURSY

ODDZIAŁ W POZNANIU

Teoria drgań
Teoria dystrybucji
Analiza funkcjonalna

IV. SEMINARIA

ODDZIAŁ W KRAKOWIE Z ODDZIAŁEM W GDAŃSKU

Technika wibracyjna

ODDZIAŁ W POZNANIU — SEMINARIUM N.T. «TEORII DRGAŃ»

Z. MAĞIERA-ULLRICH	O zastosowaniu drgań normalnych do układów nieliniowych
B. RADZISZEWSKI	Pewien nieliniowy układ mechaniczny

ODDZIAŁ W WARSZAWIE

SEMINARIA N.T. «TEORII DRGAŃ NIELINIOWYCH»

JA. G. PANOWKO (ZSRR)	Pewne paradoksy rozwiązań zadań mechaniki
A. TONDL (CSRS)	Pewne problemy drgań układów nieliniowych o n stopniach swobody i niektóre zagadnienia globalnej stateczności
W. BOGUSZ	Warunki absolutnej stateczności układów nieliniowych
K. SZPUNAR	Parametryczne drgania nieliniowe układów o dwu stopniach swobody
K. SZPUNAR	Pewien przypadek drgań parametrycznych
W. BOGUSZ	Absolutna stateczność układów nieliniowych
S. KASPRZYK	Zastosowanie twierdzenia „Olech-Hartman” do optymalizacji układów mechanicznych
ZAJDLER	Drgania sprzężone w prętach
MAGIERA	Badanie stateczności układów nieliniowych metodą drgań normalnych

RECENZJE

APPLIED MECHANICS, PROCEEDINGS OF THE ELEVENTH INTERNATIONAL CONGRESS
OF APPLIED MECHANICS, MUNICH (GERMANY), 1964, EDITOR H. GÖRTLER,
SPRINGER-VERLAG, BERLIN-HEIDELBERG-NEW YORK, 1966,
1189 STRON, 740 RYS.

Tradycja międzynarodowych kongresów mechaniki stosowanej, organizowanych co cztery lata, datuje się od roku 1924, gdy odbył się pierwszy kongres w Delft, podczas gdy kongres monachijski, któremu poświęcone jest wydawnictwo, jest już jedenasty z rzędu. Wydawnictwa kongresowe stanowią pewnego rodzaju podsumowanie aktualnego stanu tej dziedziny nauki, pozwalają zorientować się, jak szybko i wszechstronnie wzbogaca się zakres jej zainteresowań. Zmusza to do ograniczania liczby referatów sekcyjnych, których liczba w Monachium spadła do 145 wobec ponad 200 na poprzednim kongresie w Stresie, 1960, obok 9 referatów ogólnych o charakterze syntetyczno-przeglądowym.

Obszerna księga kongresowa, wydana w bardzo starannej szacie typograficznej, znanionującej wydawnictwa Springer, zawiera na wstępie listę autorów, listę uczestników, przemówienia powitalne wygłoszone przez H. GÖRTLERA, reprezentującego gospodarzy kongresu oraz przez G. TEMPLE, aktualnego przewodniczącego Międzynarodowego Stowarzyszenia Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM), po czym następują referaty generalne, w kolejności:

- L. I. SIEDOW (Moskwa), Pewne problemy tworzenia nowych modeli ośrodków ciągłych,
- E. REISSNER (Cambridge, Mass.), O podstawach teorii sprężystych odkształceń powłok,
- R. LEGENDRE (Châtillon-sous-Bagneux), Przepływy nieustalone wokół ciał drgających,
- J. N. WEKUA (Nowosybirsk), Nowe metody w matematycznej teorii powłok,
- L. J. BROER (Eindhoven), Nowe osiągnięcia w teorii rozchodzenia się fal,
- G. F. CARRIER (Cambridge, Mass.), Zjawiska w wirujących płynach,
- K. MAGNUS (Stuttgart), Ruchy obrotowe ciał sztywnych w centralnym polu grawitacji,
- H. ZIEGLER (Zürich), Termodynamika odkształceń,
- T. B. BENJAMIN (Cambridge), Przepływ płynów przy giętkich warunkach brzegowych.

Referaty sekcyjne zgrupowane są w dwóch sekcjach, mechaniki ciał stałych oraz mechaniki cieczy i gazów, zbliżonych objętościowo. Pierwsza sekcja obejmuje następujące problemy: mechanika ośrodka ciągłego, drgania nieliniowe, wytrzymałość materiałów, drgania (ogólnie), teoria powłok, teoria sprężystości, odkształcenia sprężysto-plastyczne, lepkosprężystość i pełzanie, synteza mechanizmów, dynamika, teoria płyt, propagacja zaburzeń w ciałach stałych, teoria odkształceń, naprężenia termiczne, naprężenia termiczne — teoria plastyczności, teoria zniszczenia, teoria zniszczenia — teoria plastyczności. W ramach sekcji drugiej problematyka jest następująca: przepływy strumieniowe, laminarna warstwa graniczna, kinetyczna teoria gazów, przepływy super- i hipersoniczne, meteorologia, stateczność hydrodynamiczna, hydrodynamika, przepływ z mieszaniem, przepływ molekularny, turbulentna warstwa graniczna, magnetohydrodynamika, hydrodynamika, fale uderzeniowe, stateczność hydrodynamiczna płynów wirujących, drgania magnetohydrodynamiczne, przepływ naddźwiękowy, przepływ z wyparowywaniem, generacja szumów przy przepływie ciepła, dyspersja w ośrodkach niejednorodnych, kawitacja- przepływ z tarciami.

Zwraca uwagę odejście od tego, co zwykle się uważa za klasyczny zakres poszukiwań mechaniki ośrodków ciągłych, zwrócenie się ku zagadnieniom nieliniowym, zagadnieniom wymagającym pogłębionej fizycznej interpretacji przebiegu zjawisk. Stosunkowo wiele prac poświęcono podstawom mechaniki różnych

ośrodków nieklasycznych (ośrodki z mikrostrukturą, naprężenia momentowe itp.). Znaczną uwagę skupiła reologia oraz nieklasyczne zagadnienia teorii ustrojów powierzchniowych. Również w centrum zainteresowania pozostaje problematyka fal i drgań. W dziedzinie hydromechaniki dużo uwagi skupiły zagadnienia «sprężone», zwłaszcza magnetohydrodynamika, teoria warstwy przyściennej turbulentnej, przepływy ośrodków niejednorodnych, z mieszaniem, ewaporacją itd., słowem «nieklasyczne», obok nadal żywego zainteresowania zagadnieniami przepływów super- i hipersonicznych oraz zagadnieniami stateczności hydrodynamicznej w różnych warunkach.

Księgę zamykają przemówienia końcowe W. T. KOITERA oraz H. GÖRTLERA.

Zakres poruszonej tematyki, współdziałanie wielu wybitnych nazwisk w dziedzinie mechaniki stosowanej, nowe, interesujące spojrzenie na wiele zagadnień — mimo iż obraz jest niepełny, zwłaszcza wskutek mniejszego zainteresowania problematyką «klasyczną» — sprawiają, że księga kongresowa daje autorytatywny przegląd najaktualniejszych kierunków poszukiwań i jest prawdziwą «kopalnią» wiadomości.

Cz. Eimer

KONKURS

Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

Zarząd Główny PTMTS ogłasza konkurs na prace doświadczalne z dziedziny mechaniki.

Za najlepsze prace będą przyznane trzy nagrody pieniężne w wysokości

I nagroda	zł 8.000.—
II nagroda	„ 4.000.—
III nagroda	„ 2.000.—

Prace zgłaszane na konkurs powinny obejmować zagadnienie mieszczące się w tematyce konkursu i zawierać elementy nowości w stosunku do aktualnego stanu wiedzy.

Prace konkursowe należy przysyłać w postaci maszynopisu z podwójną interlinią lub odbitki drukowanej w trzech egzemplarzach do Sekretariatu Zarządu Głównego PTMTS, mieszczącego się w Warszawie w Pałacu Kultury i Nauki, pokój 1724, **w nieprzekraczalnym terminie do dnia 15 października 1967 r.** Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani złożona do druku poza czasopiśmie «Mechanika Teoretyczna i Stosowana».

Konkurs jest ograniczony, dostępny tylko dla członków PTMTS.

Zarząd Główny zastrzega sobie prawo nieprzyznawania lub innego podziału nagród.

Nagrodzone prace opublikowane zostaną w czasopiśmie «Mechanika Teoretyczna i Stosowana».

Przewodniczący
Zarządu Głównego PTMTS
(—) Prof. dr *Jerzy Mutermilch*

Przewodniczący
Sądu Konkursowego PTMTS
(—) Prof. dr *Zbigniew Brzoska*

Sekretarz Generalny PTMTS
(—) Prof. dr *Bogumił Staniszewski*

Następny zeszyt Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zawiera prace

- B. DUSZCZYK, Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym
Устойчивость сплошного цилиндра под действием гидростатического давления
Stability of a full circular cylinder loaded with hydrostatic pressure
- A. KOWALSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Naprężeniowy warunek bezpieczeństwa w przypadku niekonserwatywnych zagadnień stateczności sprężystej
Условие безопасности по напряжениям в неконсервативных задачах об упругой устойчивости
Stress criterion of safety for non-conservative problems of elastic stability
- J. KŁEPACZKO, Urządzenie do dynamicznego skręcania
Устройство для динамических испытаний на кручение
Impact torsion test apparatus
- E. KĄSKI, Quasi-statyczne termonaprężenia w płaskowniku przewodzącym prąd elektryczny i oddającym ciepło przez konwekcję
Термические нестационарные напряжения в брусе с прямоугольным сечением проводящим электрический ток и отдающим тепло через поверхность
Quasi-static thermal stresses in a bar of rectangular cross-section conducting electric current and exchanging heat by convection
- Z. ENGEL, Badania synchronizacji i samosynchronizacji wibratorów mechanicznych
Исследование синхронизации и автосинхронизации механических вибраторов
Investigations of synchronization and selfsynchronization of mechanical vibrators
- J. ORKISZ, Skończoone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym w świetle teorii płynięcia plastycznego
Применение теории пластического течения для анализа конечных деформаций гибких осесимметрических оболочек в безмоментном состоянии.
Finite deformation of flexible axially symmetric membrane shells in the light of the theory of plastic flow

Biuletyn Informacyjny

Konkurs

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
