

471420

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A**

KWARTALNIK

TOM 5 • ZESZYT 2



WARSZAWA 1967

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

SPIS TREŚCI

J. KESTIN, O zastosowaniu zasad termodynamiki do opisu materiałów odkształconych	147
О применении принципов термодинамики к описанию деформированных материалов	
On the application of the principles of thermodynamics to description of deformed materials	
Z. OLESIAK, O pewnych własnościach naprężeń cieplnych	181
О некоторых свойствах термических напряжений	
On some properties of thermal stresses	
Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, O wyboczeniu biegunowych siatek prętowych	193
О потере устойчивости стержневых сеток	
On the buckling of polar bar networks	
Z. KAZIMIERSKI, Metoda charakterystyk dla dwuwymiarowych nieustalonych przepływów gazu	199
Метод характеристик для двухмерных нестационарных течений газа	
A method of characteristics for two-dimensional unsteady gas flow	
W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, Механика оśrodków ciągłych typu Cosseratów	215
Механика сплошных сред типа Коссера	
Mechanics of continuous media — Cosserat type	
BIULETYN INFORMACYJNY	259

1967

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 5 • Z E S Z Y T 2



W A R S Z A W A 1967
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY

EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ)·ADAM

MITZEL (WROCLAW)·JERZY MUTERMILCH

(WARSZAWA)·WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE)·WACŁAW

OLSZAK (WARSZAWA)·MARIAN PIĄTEK

(GDAŃSK)·JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OLESIĄK — R E D A K T O R

JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI

W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

R E D A K C J A

W a r s z a w a , Ś w i e t o k r z y s k a 21, t e l . 26-12-81, w e w n . 219

Nakład 700 egz. Arkuszy wydawn. 10,25 Arkuszy drukarskich 8,25. Papier druk. sat. III kl., 80 g.
Oddano do składania 31.X. 1966 r., druk ukończono w marcu 1967 r. Cena zł 30.—

Zam. 1586/66 T-74 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

O ZASTOSOWANIU ZASAD TERMODYNAMIKI DO OPISU
MATERIAŁÓW ODKSZTAŁCONYCH

J. KESTIN (PROVIDENCE)

«Fizyka — bez względu na to, czy będziemy ją nazywali termodynamiką, czy nie — nie powinna być bezsilna wobec sytuacji, które można w pełni opisać opierając się na wynikach pomiarów makroskopowych» (P. W. BRIDGMAN [1]).

1. Uwaga wstępna

Wielokrotnie próbowano opisać zachowanie się ciał stałych podlegających odkształceniu w ramach termodynamiki klasycznej. Jedną z takich godnych uwagi prób podjął P. W. BRIDGMAN [1], który doszedł do wniosku, że program taki jest oczywiście możliwy do zrealizowania, ale w tym celu konieczne jest najpierw pewne uogólnienie termodynamiki. To właśnie doprowadziło go do koncepcji uogólnionej entropii i termodynamicznej ilości ciała. Zdaniem autora tej pracy tak daleko idące środki nie są konieczne, a niezbędna jest jedynie dokładna i ostrożna interpretacja wyników doświadczalnych na gruncie znanych idei. Autor sądzi, że na tej drodze można będzie skonstruować logiczny i zwarty schemat opisu. Prawdą jest jednakże, że w tym celu trzeba skorzystać z pewnych obserwacji o charakterze zupełnie ogólnym, których normalnie nie wykorzystuje się w sposób jawny.

Aby skoncentrować się wyłącznie na fizycznych aspektach zagadnienia, przedstawimy nasze rozumowanie na najprostszym możliwym przykładzie układu, mianowicie na przykładzie cienkiego pręta poddanego jednorodnemu naprężeniu σ , określone jako dodatnie dla przypadku rozciągania, jako ujemne zaś w przypadku ściskania, i ulegającego jednorodnemu odkształceniu ϵ , także określone jako dodatnie w przypadku rozciągania, jako ujemne zaś w przypadku ściskania. Pominiemy zupełnie możliwość występowania niestateczności związanej z wyboczeniem lub z powstawaniem lokalnych «szyjek». Założymy wreszcie, że nasz materiał spełnia prawo Hooke'a w zakresie sprężystym i że jego moduł Younga E , jego współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej α i jego ciepło właściwe przy stałym odkształceniu c_ϵ są stałe. Odnośnie do wielkości odkształcenia będziemy zakładali, że są one nieskończenie małe.

Rozszerzenie przedstawionej tu interpretacji na ośrodki sprężyste przy występowaniu w nich złożonych pól tensorowych naprężeń i odkształceń oraz na materiały, których własności zależą od temperatury i dla których związki między naprężeniami i odkształceniami są nieliniowe, czy wreszcie na przypadek skończonych odkształceń sprężystych, wymagałoby dużego nakładu pracy i szczegółowych rozważań; jeśli jednak stanąć na gruncie zasady lokalnego stanu, a nie tak zwanej zasady pamięci, to rozszerzenie takie nie naręcza żadnych trudności podstawowej natury. To samo można powiedzieć o opisie

lepkosprężystości, ale uwzględnienie związków między naprężeniami a odkształceniami w zakresie plastycznym, szczególnie w obecności wzmocnienia materiału, wymaga wprowadzeniu dokładniejszego modelu. Model taki prowadzi do teorii obszarów (domen) sprężysto-plastycznych, która jest w zarysie przedstawiona w punktach 13 i 14.

2. Zakres sprężysty

Zacniemy od przeglądu najbardziej elementarnej teorii sprężystego zachowania się pręta. Ułatwi to nam znacznie dalsze rozważania, w których będziemy się powoływać na ten prosty przykład.

Pierwsze zadanie, jakie nas czeka przed przystąpieniem do wykorzystania zasad termodynamiki, polega na ustaleniu formy równania stanu układu. W tym celu musimy określić liczbę i charakter niezależnych zmiennych opisujących jego stan. Zadanie to można wykonać tylko przez odwołanie się do doświadczenia.

Przyjmujemy, że stan układu sprężystego określają *dwie* niezależne zmienne stanu. Mogą one być wybrane zupełnie dowolnie spośród trzech wielkości termodynamicznych: temperatury termodynamicznej T , naprężenia σ i odkształcenia ε . Biorąc pod uwagę rozszerzenie opisu na przypadek ośrodka ciągłego możemy już teraz stwierdzić, że ogólnie trzeba rozróżnić te składowe tensora odkształcenia ε_{ij} , które charakteryzują zmianę objętości układu (śląd — ε_{ii}), i te, które opisują zmianę kształtu (dewiator tensora odkształcenia $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}$, którego ślad jest oczywiście równy zeru, $\tilde{\varepsilon}_{ii} = 0$). Dla naszego układu jednowymiarowego rozróżnianie takie nie jest rzecz jasna potrzebne.

A zatem istnieje jednoznaczny związek

$$(2.1) \quad f(\sigma, \varepsilon, T) = 0,$$

który będziemy nazywali termicznym równaniem stanu układu. Dla naszego prostego układu równanie powyższe ma postać:

$$(2.2) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha(T - T_0),$$

gdzie α jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej, T_0 zaś dowolnie wybraną temperaturą odniesienia. Oznacza to, że układ przy $T = T_0$ może przyjąć stan, w którym ε i σ jednocześnie równają się zeru. Stan opisany przez $T = T_0$, $\sigma = 0$ i $\varepsilon = 0$ wygodnie jest nazywać stanem naturalnym. Dla prostoty zakładamy, że zarówno współczynnik rozszerzalności cieplnej α , jak i moduł Younga E są niezależne od naprężenia i od temperatury.

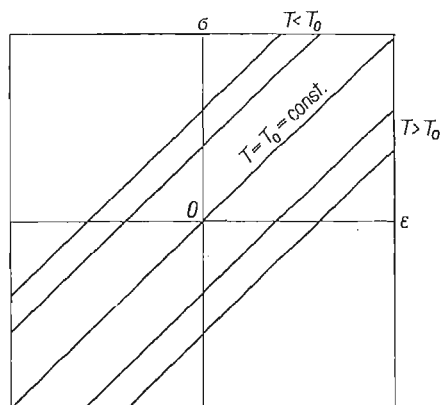
Równanie (2.2) przedstawia płaszczyznę w trójwymiarowej przestrzeni stanów układu (naprężenie-odkształcenie-temperatura). Izotermi na wykresie stanu naprężenie-odkształcenie reprezentuje rodzina równoległych linii prostych, jak to pokazano na rys. 1.

Procesy quasi-statycznego obciążania i odciążania są odwracalne, a praca na jednostkę objętości układu, wykonana w trakcie tych procesów, jest równa

$$(2.3) \quad dW^0 = -\sigma d\varepsilon.$$

Tu i dalej górny wskaźnik zero w dW^0 i dQ^0 będzie zawsze stosowany w celu podkreślenia odwracalnej natury rozpatrywanego procesu. Praca w procesie odwracalnym dW^0 ma

standardową postać iloczynu uogólnionej siły (wielkości intensywnej) i różniczki zupełnej uogólnionego przemieszczenia (wielkości ekstensywnej) i przedstawia sobą wyrażenie Pfaffa. Ponieważ dW^0 odnosi się do procesu *odwracalnego*, więc obie występujące w tym wyrażeniu wielkości są *parametrami stanu*. Jeśli proces nie jest odwracalny, mimo że dalej może być quasi-statyczny, dwie te wielkości nie będą już koniecznymi parametrami stanu⁽¹⁾.



Rys. 1. Równanie stanu dla układu sprężystego

Termiczne równanie stanu nie jest równaniem podstawowym⁽²⁾ i w związku z tym nie zawiera wszystkich informacji o stanie równowagi układu. Dla pełnego scharakteryzowania stanu równowagi trzeba, jak wiadomo, podać energię wewnętrzną u przypadającą na jednostkę objętości jako funkcję gęstości entropii s i odkształcenia ϵ :

$$(2.4) \quad u = u(s, \epsilon).$$

Można w tym celu posłużyć się też entalpią

$$(2.5) \quad u - \sigma\epsilon = h(s, \sigma),$$

funkcją Helmholtza (energiją swobodną)

$$(2.6) \quad u - Ts = f(T, \epsilon)$$

lub funkcją Gibbsa (entalpią swobodną)

$$(2.7) \quad u - \sigma\epsilon - Ts = g(T, \sigma),$$

przy czym każda musi być wyrażona jako funkcja odpowiednich zmiennych, jak to zaznaczono wyżej. Cztery powyższe równania podstawowe są zupełnie równoważne i wynikają jedno z drugiego przez zastosowanie odpowiedniej zamiany zmiennych (transformacji Legendre'a).

Zatrzymamy się obecnie na równaniu (2.4) i dokonamy obliczenia energii wewnętrznej i entropii, wykorzystując w tym celu termiczne równanie stanu. Energię wewnętrzną

⁽¹⁾ Ponieważ ostatnie stwierdzenie może nie być zrozumiałe dla czytelnika, zilustrujemy je na przykładach w p. 4.

⁽²⁾ Podstawowe równanie stanu pozwala obliczyć wszystkie wielkości charakteryzujące stan równowagi układu jedynie na drodze różniczkowania; por. np. [5], str. 533.

u określają dwie pochodne cząstkowe: $(\partial u/\partial \varepsilon)_T$ i $(\partial u/\partial T)_\varepsilon$. Pierwszą z nich można obliczyć wykorzystując pierwszą zasadę termodynamiki i pierwszą część drugiej zasady termodynamiki. Prowadzi to do równań:

$$(2.7) \quad du = dQ^0 - dW^0$$

oraz

$$(2.8) \quad du = Tds + \sigma d\varepsilon,$$

ponieważ

$$dQ^0 = Tds.$$

Wynika stąd również, że

$$(2.9) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_T + \sigma$$

i relacja wzajemności Maxwella

$$(2.10) \quad - \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_T = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\varepsilon$$

prowadzi do równania:

$$(2.11) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_T = -T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\varepsilon + \sigma.$$

Relację wzajemności Maxwella można otrzymać przez dokonanie transformacji Legendre'a równania (2.8) do postaci odpowiadającej (2.6), to znaczy ze związku:

$$(2.12) \quad df = d(u - Ts) = -s dT + \sigma d\varepsilon.$$

Podstawiając σ z równania (2.2) do (2.11) otrzymujemy następujące wyrażenie na pochodną cząstkową energii wewnętrznej względem odkształcenia wyrażoną przez wielkości występujące w termicznym równaniu stanu:

$$(2.13) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_T = E\varepsilon + \alpha E T_0.$$

Jest rzeczą dobrze znaną, że całkowanie ostatniego równania prowadzi do poszukiwanego równania podstawowego, które jest zgodne z przyjętym przez nas poprzednio termicznym równaniem stanu. W wyniku całkowania otrzymujemy:

$$u = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 + \alpha E\varepsilon T_0 + \psi(T),$$

gdzie $\psi(T)$ jest stałą całkowania, będącą jedynie funkcją temperatury.

Ciepło właściwe c_ε przy stałym odkształceniu jest określone jako $(\partial u/\partial T)_\varepsilon$ i jest w związku z tym równe:

$$c_\varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\varepsilon = \psi'(T).$$

Zgodnie z naszym dążeniem do maksymalnej prostoty matematycznej założymy najprostszą formę funkcji $c_\varepsilon = \psi'(T)$, przyjmując mianowicie, że c_ε jest stałe. Mamy wówczas:

$$(2.14) \quad u(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 + \alpha E\varepsilon T_0 + c_\varepsilon(T - T_0),$$

przy czym $u = 0$ przy $T = T_0$ i $\varepsilon = \sigma = 0$. Przy $T = T_0$

$$(2.15) \quad u = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 + \alpha E\varepsilon T_0 = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha\sigma T_0, \quad T = T_0.$$

Na marginesie warto tu zauważyć, że zwykle człon $\alpha\sigma T_0$ w równaniu (2.15) jest znacznie większy od członu reprezentującego energię odkształcenia $(\sigma^2/2E)^{(3)}$. Tak więc podczas izotermicznego ściskania energia wewnętrzna w przeciwieństwie do energii odkształcenia maleje osiągając pierwotną wartość przy nierealnie wysokim naprężeniu ściskającym $\sigma' = -2\alpha E T_0^{(4)}$.

Entropię należy obliczyć z wyrażenia dQ^0 dla ilości ciepła wymienianego przez układ z jego otoczeniem podczas *odwrotnego* przejścia od stanu początkowego do stanu końcowego korzystając przy tym z równania:

$$(2.16) \quad ds = \frac{dQ^0}{T}.$$

Ilość ciepła dQ^0 wymienionego z otoczeniem przy przejściu odwracalnym podczas procesu sprężystego nie jest znana bezpośrednio. Aby ją obliczyć, trzeba skorzystać z pierwszej zasady termodynamiki zastosowanej do przejścia odwracalnego:

$$(2.17) \quad dQ^0 = du + dW^0 = \alpha E T d\varepsilon + c_e dT.$$

Mamy stąd

$$(2.18) \quad ds = \alpha E d\varepsilon + c_e \frac{dT}{T}$$

oraz

$$(2.19) \quad s = \alpha E \varepsilon + c_e \ln \frac{T}{T_0},$$

przy czym $s = 0$ dla stanu naturalnego. Przy $T = T_0$

$$(2.20) \quad s = \alpha E \varepsilon = \alpha \sigma, \quad (T = T_0).$$

Eliminacja temperatury z równań (2.14) i (2.18) prowadzi do podstawowego równania stanu

$$(2.21) \quad u(s, \varepsilon) = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 + \alpha E\varepsilon T_0 + c_e T_0 \left[\frac{\exp(s/c_e)}{\exp(\alpha E\varepsilon/c_e)} - 1 \right],$$

$$(2.22) \quad \approx \frac{1}{2} E\varepsilon^2 + (c_e - \alpha E\varepsilon) T_0 (e^{s/c_e} - 1);$$

aproksymacja (2.22) odnosi się do przypadku, gdy

$$\frac{\alpha E \varepsilon}{c_e} \ll 1.$$

⁽³⁾ Dla glinu $E = 7 \cdot 10^5$ kG/cm², $\alpha = 23,5 \cdot 10^{-6}$ 1/°K; dla stali $E = 21 \cdot 10^5$ kG/cm², $\alpha = 13,3 \cdot 10^{-6}$ 1/°K; przy $\sigma = 400$ kG/cm² stosunek $(\alpha\sigma T_0) / \left(\frac{1}{2} \sigma^2 / E \right)$ jest równy około 20 dla glinu i około 40 dla stali.

⁽⁴⁾ σ' jest równe około $-10\,000$ kG/cm² dla glinu i około $-17\,000$ kG/cm² dla stali.

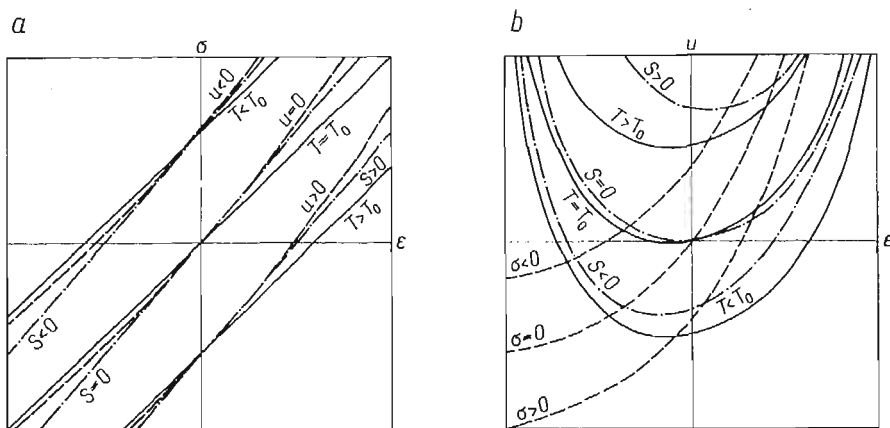
Powyższe równanie podstawowe zawiera stałe materiałowe E , α i c_ε , które są konieczne i jednocześnie wystarczają do określenia wszystkich własności materiału w stanie równowagi termodynamicznej.

Warto zauważyć, że odwracalne obciążenie pręta przy stałej temperaturze $T \neq T_0$ od $\sigma = 0$ do σ wymaga wykonania następującej pracy i dostarczenia następującej ilości ciepła:

$$(2.23) \quad W^0 = - \int_{\alpha(T-T_0)}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} E[\varepsilon - \alpha(T-T_0)]^2 = -\frac{\sigma^2}{2E},$$

$$(2.24) \quad Q^0 = \int_{\alpha(T-T_0)}^{\varepsilon} T ds = \alpha ET[\varepsilon - \alpha(T-T_0)] = \alpha\sigma T.$$

Zauważymy znowu, podobnie jak to uczyniliśmy w związku z równaniem (2.15), że ilość odwracalnego ciepła Q^0 wymieniona przez układ z otoczeniem podczas takiego procesu izotermicznego jest wielokrotnie większa od odwracalnej pracy ($-W^0$); uwaga ta jest o tyle istotna, że w wielu elementarnych książkach na temat teorii sprężystości stosunek ten jest oszacowany błędnie. Wzięta ze znakiem ujemnym praca w procesie odwracalnym mierzona względem $\sigma = 0$ (ale nie $\varepsilon = 0$), W^0 reprezentuje energię odkształcenia układu, tzn. zmianę funkcji Helmholtza przy stałej temperaturze.



Rys. 2. Wykresy stanu dla pręta sprężystego

Równania wyprowadzone w tym punkcie pozwalają uzupełnić wykres stanu (rys. 1) krzywymi stałej energii wewnętrznej i stałej entropii. Uzupełnienie to przedstawione jest na rys. 2, na którym podany jest także wykres stanu $u-\varepsilon$. Pomijamy tu, dla skrócenia naszych rozważań, wyprowadzenie odpowiednich równań i zakres podanych wykresów stanu ograniczamy jedynie do współrzędnych interesujących inżynierską teorię sprężystości.

3. Sprężysty ośrodek ciągły^(*)

Może być rzeczą pożyteczną przytoczenie tu równań liniowej («infinitezmalnej») teorii sprężystości w języku termodynamiki. Termiczne równanie stanu ma postać:

$$(3.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \delta_{ij} \alpha (T - T_0)$$

lub

$$(3.2) \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - \frac{E}{1-2\nu} \delta_{ij} \alpha (T - T_0).$$

Równanie powyższe odnosi się do izotropowego ośrodka ciągłego, jako że opiera się na założeniu, iż zmiana temperatury powoduje tylko zmianę objętości. W takim przypadku równanie zawiera cztery zmienne niezależne, mianowicie trzy składowe tensora naprężenia lub odkształcenia (albo ich niezmienniki) i temperaturę oraz trzy stałe materiałowe: E , ν i α .

Zamiast relacji wzajemności Maxwella (2.10) mamy teraz równanie:

$$(3.3) \quad \left[\frac{\partial \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, T)}{T} \right]_{\varepsilon_{kl}} = - \left[\frac{\partial s(\varepsilon_{kl}, T)}{\partial \varepsilon_{ij}} \right]_T,$$

jako że funkcja Helmholtza $f = u - Ts$ musi spełniać równanie Gibbsa:

$$df = -s dT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Energia wewnętrzna jest więc równa

$$(3.4) \quad u(\varepsilon_{kl}, T) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{E}{1-2\nu} \alpha (T - T_0) \varepsilon_{kk} + \frac{E}{1-2\nu} \alpha T_0 \varepsilon_{kk} + c_e (T - T_0),$$

entropia zaś wyraża się wzorem:

$$(3.5) \quad s(\varepsilon_{kl}, T) = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} + c_e \ln \frac{T}{T_0}.$$

Jest rzeczą godną uwagi, że przy zmianie naprężeń, wywołującej jedynie zmianę kształtu, entropia nie ulega zmianie. Jest to bezpośrednią konsekwencją izotropii, wyrażonej założeniem o skalarnym charakterze współczynnika rozszerzalności cieplnej. Z tego względu odwracalny proces izotermiczny przy stałej objętości jest także procesem izoentropowym i przebiega bez wymiany ciepła z otoczeniem, a więc w takim procesie

$$Q^0 = T \Delta s = 0.$$

Podstawowe równanie stanu $u = u(s, \varepsilon_{ij})$ można teraz przepisać w postaci:

$$(3.6) \quad u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{kk})^2 + \frac{E}{1-2\nu} \alpha T_0 \varepsilon_{kk} + c_e (T - T_0)$$

$$(3.7) \quad = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{kk})^2 + \frac{E}{1-2\nu} \alpha T_0 \varepsilon_{kk} + c_e T_0 \left[\frac{\exp(s/c_e)}{\exp[\alpha E \varepsilon_{kk}/c_e (1-2\nu)]} - 1 \right].$$

^(*) Równania podane w tym punkcie zostały wyprowadzone przez profesora J. R. RICE'A (Brown University).

4. Uwaga na temat pracy w procesie quasi-statycznym

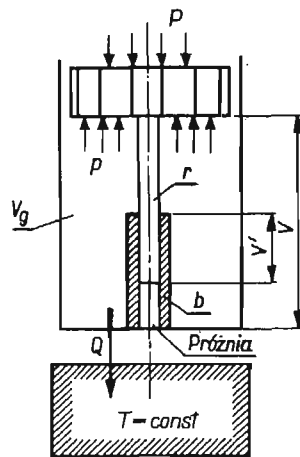
Wyrażenie dla pracy w termodynamice jest naturalnym uogólnieniem pojęcia pracy w mechanice. Kiedy proces przebiega quasi-statycznie, odwracalnie lub nie, wyrażenie dla pracy elementarnej ma postać iloczynu pewnej *zewnętrznej*, uogólnionej siły i różniczki uogólnionego przemieszczenia układu. Kiedy proces jest odwracalny, to znaczy stanowi ciągłą sekwencję stanów równowagi, wówczas siła zewnętrzna jest dokładnie równoważona przez siłę wewnętrzną. Wynika stąd, że siła uogólniona wchodzi do opisu chwilowego stanu układu i w związku z tym stanowi parametr stanu. Przemieszczenie odpowiadające sile zewnętrznej w procesie odwracalnym jest co do wartości równe i przeciwne co do znaku w stosunku do przemieszczenia układu i także *stanowi parametr stanu*. Najbardziej znanym przykładem jest praca wykonana przy odwracalnej zmianie objętości płynu

$$(4.1) \quad dW^0 = p dV,$$

dla którego zarówno ciśnienie p , jak i objętość V są parametrami stanu. To samo odnosi się do naprężenia i odkształcenia, które występują w równaniu (2.2).

Powyższego stwierdzenia nie można zastosować do quasi-statycznych procesów *nieodwracalnych*, gdyż podczas takich procesów układ nigdy nie jest w stanie równowagi, ale przechodzi przez ciąg *stanów bliskich stanom równowagi*. Stany takie będziemy opisywali przez przyporządkowanie im takich wartości odpowiednich wielkości, jakie układ osiągnąłby, gdyby mu pozwolić dojść do stanu równowagi w izolacji adiabatycznej. Wynika stąd, że co najmniej jeden parametr nie może być parametrem stanu.

Oto kilka przykładów ilustrujących tę kwestię. Rysunek 3 przedstawia najbardziej znany układ termodynamiczny, składający się z gazu zamkniętego w naczyniu cylindrycz-



Rys. 3. Tłok poruszający się z tarcem

nym, którego objętość ulega zmianie wskutek ruchu tłoka. Zakładamy w tym przypadku, że tłok porusza się z tarcem związanym z ruchem pręta r w tulejce b (z której wypompowano powietrze). Zakładamy także, że proces jest izotermiczny (lub prawie izotermiczny), to znaczy w jego trakcie następuje wymiana ciepła ze zbiornikiem o stałej temperaturze. Proces kompresji lub ekspansji jest quasi-statyczny, ale oczywiście nieodwracalny. Układ

nie jest dokładnie w stanie równowagi, jako że przepływ ciepła do zbiornika wymaga istnienia gradientu temperatury. Praca wykonana w procesie jest równa

$$(4.2) \quad dW = PdV,$$

gdzie P oznacza ciśnienie zewnętrzne. Oczywiście ciśnienie P nie jest równe ciśnieniu p gazu; zachodzi bowiem związek:

$$(4.3) \quad P = p \pm p', \quad \text{przy czym} \quad p' = |F/A|.$$

Symbol F przedstawia tu siłę tarcia w układzie pręt-tulejka, natomiast A pole powierzchni tłoka. Podczas gdy p jest prawdziwym parametrem stanu, P nim nie jest. Następnie V nie jest dokładnie równe objętości gazu, jeśli uwzględnić przesunięcie pręta r ; wielkość tę można przedstawić jako sumę:

$$V = V_g + V'$$

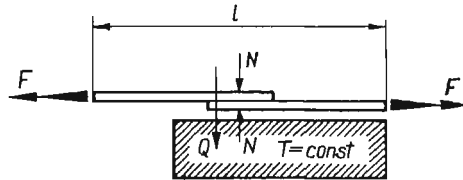
objętości gazu V_g i przesuniętej objętości pręta (dodatniej lub ujemnej). Tak więc V w równaniu (4.2) reprezentuje parametr stanu tylko wówczas, gdy można pominąć przemieszczenie pręta; w przeciwnym przypadku V nie jest parametrem stanu. Zatem w wyrażeniu

$$dW = (p \pm p')dV_g + (p \pm p')dV'$$

jedynie człon

$$dW^0 = pdV_g$$

przedstawia sobą pracę w procesie odwracalnym i co najmniej jeden z dwu parametrów P i V nie jest parametrem stanu.



Rys. 4. Pręty sprężyste poruszające się z tarciami

Drugi przykład przedstawiony na rys. 4 dotyczy dwu sprężystych prętów, które mogą swobodnie poruszać się względem siebie. Podczas ruchu prętów występuje siła tarcia $F_f = \mu N$, gdzie N oznacza siłę poprzeczną do prętów przyciskającą je do siebie. Tu także zakładamy, że proces jest izotermiczny i mamy

$$(4.4) \quad dW = -Fdl$$

bez względu na to czy proces jest odwracalny, czy nie. Jednakże proces będzie odwracalny dopóki, dopóki $F < F_f$, gdyż w tym przypadku może nastąpić jedynie odkształcenie sprężyste. Zatem

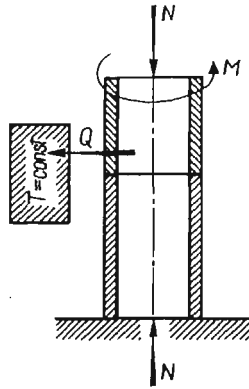
$$(4.5) \quad dW^0 = Fdl, \quad \text{jeśli} \quad F < F_f.$$

Z chwilą jednak, gdy siła zewnętrzna F stanie się równa sile tarcia, może nastąpić poślizg w miejscu styku prętów i wtedy ciepło będzie przepływać do rezerwuaru w sposób nieodwracalny. Przepływ ciepła był wszakże odwracalny, jeśli F była mniejsza od F_f . Niech

dalej siła przenoszona przez sprężystość odkształcone pręty będzie równa sile zewnętrznej F . Suma odkształceń obu prętów sprężystych nie będzie jednak dalej równa całkowitemu przemieszczeniu l mierzonemu od końca do końca. W dalszym ciągu możemy napisać wyrażenie dla pracy wykonanej w takim procesie w postaci (4.4); musimy jednak zauważyć, że długość l traci w tym przypadku charakter parametru stanu. Długość ta jest w przybliżeniu równa sumie łącznej długości obu odkształconych prętów l_r i długości względnego przesunięcia l_d ; różnica wynika stąd, że przy zmianie l_d inaczej odkształcają się pokrywające się odcinki prętów. Pomijając tę drobną komplikację możemy napisać:

$$(4.6) \quad dW = -Fd(l_r + l_d) = -(Fdl_r + Fdl_d).$$

W tym wyrażeniu tylko pierwszy człon: $dW^0 = -Fdl_r$ reprezentuje pracę w procesie odwracalnym.



Rys. 5. Skręcane powłoki walcowe

Analogiczny przykład przedstawiono na rys. 5. Mamy tu dwie bardzo cienkie powłoki cylindryczne dociśnięte do siebie i skręcane momentem M . Jeśli nie ma poślizgu, to

$$(4.7) \quad dW^0 = Mdy,$$

gdzie γ oznacza kąt obrotu i zarówno M jak i γ są parametrami stanu. Kiedy następuje poślizg, w dalszym ciągu mamy

$$(4.8) \quad dW = Mdy,$$

jednakże w tym przypadku γ traci charakter parametru stanu.

Jako ostatni przykład rozważymy cienką cylindryczną i nieskończenie długą warstwę cieczy lepkiej ulegającej jedynie odkształceniu postaciowemu (a więc przy stałej objętości) wskutek obrotu z prędkością kątową ω pod wpływem momentu M (rys. 6). Tu także możemy założyć, że wymiana ciepła następuje w sposób (w przybliżeniu) izotermiczny. Praca jest wykonywana z szybkością

$$(4.9) \quad \frac{dW}{dt} = M \frac{d\gamma}{dt},$$

co możemy także zapisać jako

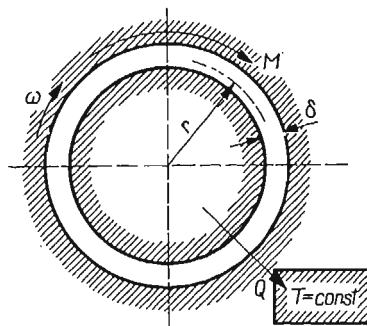
$$(4.10) \quad dW = Mdy,$$

gdzie γ oznacza kąt obrotu.

Jest rzeczą dobrze znaną, że stan płynu opisują dwa parametry stanu — powiedzmy temperatura T i objętość V . W rozważanym procesie obydwie wielkości pozostają stałe, skąd musimy wnioskować, że stan układu nie ulega zmianie. Innymi słowy, $dW^0 = 0$ i parametry występujące w równaniu (4.10) nie nadają się do opisu stanu. Entropia układu nie ulega zmianie, gdyż ustalony jest stan układu i — ponieważ

$$ds = dQ^0/T = 0,$$

przeto musimy wnioskować, że $dQ^0 = 0$, chociaż w trakcie procesu następuje wymiana ciepła. Mamy tu do czynienia ze stacjonarnym procesem dysypacji energii.



Rys. 6. Przepływ Couette'a

Zauważmy, że w tym przykładzie moment M jest bezpośrednio związany z szybkością odkształcenia $d\gamma/dt$ i że

$$M = 0, \quad \text{gdy} \quad d\gamma/dt = 0.$$

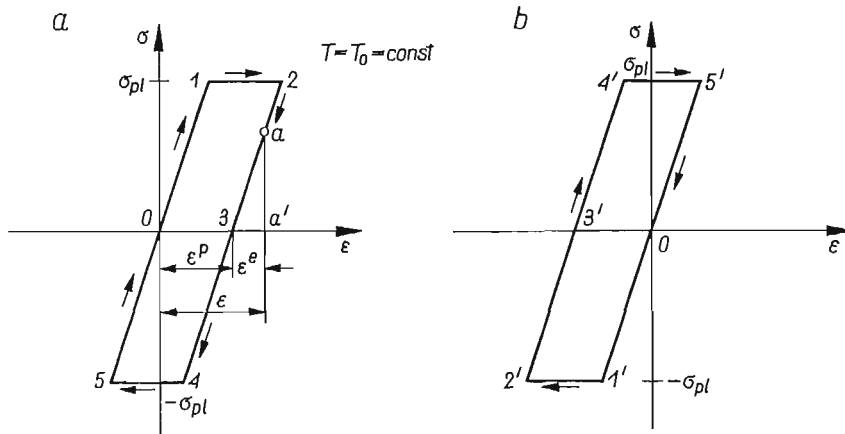
Żadna tego rodzaju relacja między uogólnioną siłą i uogólnionym przemieszczeniem nie występowała w poprzednich przykładach, w których związek między uogólnioną siłą i uogólnionym przemieszczeniem można było zmieniać dość dowolnie przez odpowiednie manipulacje z siłami tarcia. Dalej, w układzie z rys. 3 jego stan podczas procesu nieodwracalnego zmieniał się, podczas gdy w układach na rysunkach 4, 5 i 6 procesy nieodwracalne przebiegały przy ustalonym (lub prawie ustalonym) stanie układu.

Powyższe przykłady prowadzą do istotnego wniosku, że jako kryterium pozwalającego określić właściwe parametry stanu można użyć wyrażenia na pracę w procesie odwracalnym dW^0 . Odpowiednie wyrażenie dla dW dla procesów nieodwracalnych można wykorzystać w celu sprawdzenia, czy określone wielkości są parametrami stanu, czy też nie.

5. Idealna deformacja plastyczna

Dokonyamy teraz analizy przypadku idealnej deformacji plastycznej pręta sprężystego. W punkcie tym będziemy rozważali pętlę histerezy odpowiadającą procesowi przebiegającemu w rozważanym układzie przy stałej temperaturze. Pętla taka jest przedstawiona na diagramie stanu naprężenie-odkształcenie na rys. 7a jako proces 0 1 2 3 4 5 0. Przypuśćmy, że po pełnym cyklu układ osiąga dokładnie stan naturalny 0 oraz że proces odciążenia jest odwracalny i przebiega przy pierwotnej wartości modułu sprężystości. Założenie takie nie zawsze jest prawdziwe; to bowiem czy układ po pełnym cyklu powraca dokładnie

do stanu wyjściowego, czy nie — zależy od własności pręta. Na przykład materiał pręta może być w stanie zahamowanej równowagi chemicznej; w tym przypadku podczas procesu deformacji zwykle następuje reakcja chemiczna, w której wyniku stan równowagi chemicznej ulega zmianie. Wówczas początkowy stopień reakcji ξ_1 w stanie 0 może być inny, niż końcowy stopień reakcji ξ_2 także w stanie 0. W przypadkach tego rodzaju dwie wielkości nie opisują stanu w sposób kompletny, tak że dla pełnego opisu stanu trzeba do poprzednich parametrów dołączyć jeszcze tyle dodatkowych parametrów, ile niezależ-



Rys. 7. Pętla histerezy dla pręta sprężysto-idealnie plastycznego

nych reakcji może przebiegać w układzie. To samo można powiedzieć o module sprężystości podczas procesu odciążania. Na razie wykluczmy takie możliwości, a w p. 12 wykażemy, że w przypadku prętów metalowych powrót dokładnie do pierwotnego stanu po pełnym cyklu ogólnie rzecz biorąc nie jest możliwy.

Trzeba tu wyraźnie podkreślić, że pętla histerezy 0 1 2 3 4 5 0 nie reprezentuje cyklu odwracalnego, jako że odwrócenie kierunku obciążania od 0 do 1', jak to pokazano na rys. 7b, daje w efekcie inną pętlę, mianowicie 0 1' 2' 3' 4' 5' 0. Wskazuje to na to, że procesy deformacji plastycznej 1 2 i 4 5 na rys. 7a oraz 1' 2' i 4' 5' na rys. 7b są nieodwracalne, gdyż odwracalne są pozostałe procesy.

Niezależnie jednak od tego można twierdzić, że całkowita praca

$$W = - \oint \sigma d\epsilon$$

dokładnie jest zrównoważona przez całkowitą ilość ciepła:

$$Q = \oint dQ,$$

o ile pozostaje w mocy założenie o powrocie układu dokładnie do tego samego stanu naturalnego 0 po pełnym cyklu. Jest to konsekwencją faktu, że pierwsza zasada termodynamiki stosuje się do procesów zarówno odwracalnych, jak i nieodwracalnych. Odwrotnie, jeśli doświadczenie potwierdza równość pracy i ciepła, to z tego wynika, że przy pełnym obiegu pętli histerezy energia wewnętrzna musi osiągać dokładnie pierwotną wartość.

Doświadczenie sugeruje dalej, że praca podczas deformacji plastycznej dąży do zrównoważenia odpowiedniej ilości ciepła przy idealnej plastyczności. Tak więc dla przejścia idealnie plastycznego, powiedzmy 1 2 na rys. 7a, możemy napisać:

$$\int_1^2 dQ = \int_1^2 dW,$$

tak że mamy:

$$(5.1) \quad dQ = dW = -\sigma d\varepsilon \text{ (dla idealnie plastycznej deformacji).}$$

Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki ($du = dQ - dW$) wnioskujemy, że

$$(5.2) \quad du = 0 \text{ (dla deformacji plastycznej).}$$

Dochodzimy zatem do wniosku, że energia wewnętrzna pręta deformowanego plastycznie w sposób izotermiczny pozostaje stała. Oznacza to, że energia wewnętrzna pręta deformowanego plastycznie w zakresie płynięcia nie zależy zupełnie od wielkości deformacji plastycznej.

Poprzednie rozważania wykazały, że wzdłuż linii odpowiadających deformacji plastycznej (1 2, 4 5, 1' 2' oraz 4' 5') pozostają stałe następujące parametry:

$$\sigma = \sigma_y; T; u.$$

Z drugiej strony, odkształcenie ε może osiągać nieskończenie wiele wartości. Zwykle w związku z tym stwierdza się, że ta okoliczność eliminuje deformację plastyczną z przypadków, do których można stosować termodynamikę klasyczną, jako że równanie stanu

$$f(\sigma, \varepsilon, T) = 0$$

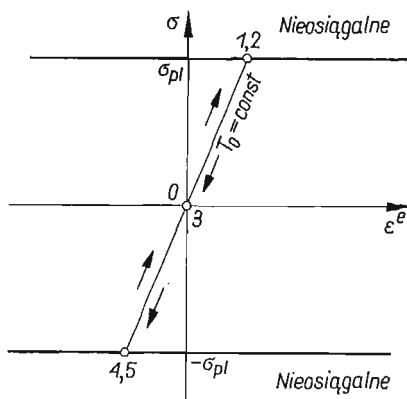
musi przedstawiać związek jednoznaczny. W wyniku dochodzi się więc do wniosku, że «nie istnieje» termiczne równanie stanu dla takich układów, gdyż poprzednie równanie jest oczywiście wieloznaczne, i że dla objęcia tego przypadku «trzeba dokonać odpowiedniego uogólnienia termodynamiki» [1]. Wniosek ten jest nieunikniony, ale tylko wówczas, gdy zakłada się, że całkowite odkształcenie ε stanowi prawdziwy parametr stanu.

W celu znalezienia wyjścia z sytuacji musimy odrzucić to niczym nieusprawiedliwione założenie bez względu na to, jak do jego przyjęcia skłaniałyby nas wyobrażenia intuicyjne. Fakt, że $dW = -\sigma d\varepsilon$ dla nieodwracalnego procesu plastycznego 1 2 i 4 5 powinien stanowić wskazówkę, że całkowite odkształcenie ε nie jest prawdziwym parametrem stanu.

Fakty doświadczalne interpretujemy w tym sensie, że stan pręta w zakresie deformacji plastycznej w dalszym ciągu opisują dwie wielkości niezależne. Wykazaliśmy poprzednio, że podczas każdego izotermicznego procesu deformacji plastycznej trzy parametry pozostają stałe. Wniosek jest oczywisty: *wszystkie parametry stanu pozostają stałe*. Innymi słowy, proces izotermicznej deformacji plastycznej przebiega przy niezmiennym stanie układu. Tak więc wszystkie punkty wzdłuż poziomej linii $\sigma = \text{const}$ ($\sigma \leq \sigma_y$) na izotermicznym wykresie naprężenie-odkształcenie są identyczne.

Do prawie tego samego wniosku doszedł P. W. BRIDGMAN [1], który wszystkim takim punktom przypisał tę samą wartość entropii. Sądził on jednak, że w ten sposób wprowadził «uogólnioną entropię», ponieważ milcząco przyjął założenie, iż całkowite odkształcenie jest parametrem stanu. Dokładniejsza analiza wskazuje jednakże, że żadne uogólnienie nie jest potrzebne.

Musimy zatem wyraźnie odróżniać wykres naprężenie-odkształcenie i wykres stanu. Wykres stanu dla układu przedstawionego na rys. 7 jest pokazany na rys. 8. Dla układów sprężystych różnicowanie takie oczywiście nie jest potrzebne.



Rys. 8. Wykres stanu dla układu przedstawionego na rys. 7

Dla określenia właściwego parametru odkształcenia wystarczy odciążyć układ od danego stanu deformacji plastycznej, powiedzmy od stanu 2 na rys. 7 wzdłuż linii 2 3. Zachodzący wówczas proces będzie odwracalny i praca w tym procesie będzie równa

$$dW^0 = -\sigma d\varepsilon^e,$$

gdzie ε^e musi być mierzone względem punktu 3 odpowiadającemu stanowi naturalnemu. Tak więc w dowolnym punkcie pośrednim, powiedzmy w punkcie *a* na rys. 7a, musimy odróżnić odkształcenie sprężyste ε^e , które jest parametrem stanu, i odkształcenie plastyczne ε^p (odkształcenie trwałe), które parametrem stanu nie jest. Jest rzeczą jasną, że

$$(5.3) \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p,$$

czyli że poprzednie argumenty wskazują na konieczność rozłożenia całkowitego odkształcenia na część sprężystą i część plastyczną (odkształcenia trwałe).

Musimy teraz poświęcić kilka uwag entropii. Ponieważ izotermiczna deformacja plastyczna pręta nie zmienia stanu pręta, w takim razie nie zmienia także jego entropii. Często stosuje się następującą argumentację [1]: rozważmy dwa dowolnie wybrane punkty *A* i *D*, jak to pokazano na rys. 9. Wszelka próba obliczenia różnicy odpowiadających im wartości entropii musi być bezowocna, gdyż aby tego dokonać, trzeba je połączyć linią odpowiadającą odwracalnemu przejściu od jednego stanu do drugiego. Rzecz oczywista, że nie można znaleźć żadnej takiej linii łączącej dwa takie «stany». W konsekwencji nie można tu zastosować równania (2.16), gdyż dQ^0 nie daje się określić ze względów zasadniczych. Rozumowanie tego rodzaju skłoniło P. W. BRIDGMANA [1] do napisania: «Mamy tu do czynienia z podwójnym problemem — problemem rozszerzenia formalnego schematu tak, aby był on w stanie objąć nowe sytuacje, i problemem eksperymentalnym polegającym na rozstrzygnięciu, które fakty nie mieszczą się w granicach stosowalności starego schematu, a które obejmuje schemat rozszerzony». Jak już wspominaliśmy, dla wykazania, że stany

A i D są identyczne, zachodzi konieczność dokonania jedynie zmian formalnych. Jest rzeczą jasną, jak to wykazano wyżej, że stany B i C są identyczne. Ponieważ dalej $s_B = s_C$ i

$$s_B - s_A = s_C - s_D,$$

więc także mamy:

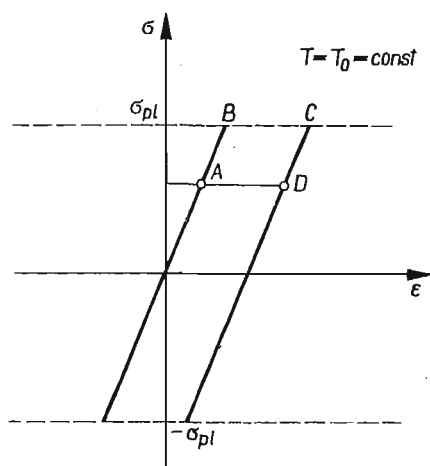
$$s_A = s_D.$$

Nie ma więc żadnej potrzeby szukania procesu odwracalnego łączącego odpowiednie punkty, gdyż różnica całkowitych odkształceń odpowiadającym «stanom» A i D nie stanowi różnicy stanów.

Odwracając argumentację możemy natomiast stwierdzić, że

$$dQ^0 = 0 \quad \text{przy} \quad \sigma = \text{const} \text{ i } T = \text{const}.$$

To jest właśnie wielkość, którą P. W. BRIDGMAN nazwał «termodynamiczną ilością ciepła» dla odróżnienia od «empirycznej ilości ciepła» — ilości ciepła w procesie nieodwracalnym w naszej obecnej terminologii. P. W. BRIDGMAN dochodzi do poprawnego wniosku, że



Rys. 9. Obliczenie entropii

«termodynamiczna» ilość ciepła w fikcyjnym procesie przy $\sigma = \text{const}$ i $T = \text{const}$ jest równa zero. W ten sam sposób znikają też trudności związane z «morzem nieodwracalności» P. W. BRIDGMANA; wystąpią one ponownie, ale w innej postaci w p. 12. Wrażenie «morza nieodwracalności» odnosi się przy okazji rozpatrywania procesu nieodwracalnego (takiego jak tarcie), przebiegającego izotermicznie przy niezmiennym w zasadzie stanie układu.

Akceptując powyższe wnioski dochodzimy do stwierdzenia, że podstawowe równanie stanu dla naszego układu jest identyczne z równaniem (2.21), ale pod warunkiem, że w równaniu tym od całkowitego odkształcenia ε odejmiemy się odkształcenie trwałe ε^p , albo że ε zastąpi się przez ε^e . Tak więc dla układów poddanych deformacji plastycznej mamy

$$u(s, \varepsilon) = \frac{1}{2} E (\varepsilon^e)^2 + \alpha E \varepsilon^e T_0 + c_e T_0 \left[\frac{\exp(s/c_e)}{\exp(\alpha E \varepsilon^e / c_e)} - 1 \right].$$

Ponieważ wszystkie własności można określić na podstawie tego równania, więc dla rozważanego tu przypadku pozostają w mocy wszystkie równania punktów 2 i 3, jeśli zamieni się w nich ε na ε^e . Ogólnie rzecz biorąc, jeśli φ oznacza którykolwiek z potencjałów termodynamicznych u , s , h , f lub g , to możemy napisać:

$$(5.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^p} = 0, \text{ ale ogólnie rzecz biorąc } \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \neq 0,$$

gdzie różniczkowanie odbywa się przy ustalonym drugim parametrze. Zauważmy również, że

$$(5.6) \quad dW^0 = -\sigma d\varepsilon^e \text{ (zakres sprężystości),}$$

podczas gdy

$$(5.7) \quad dW = -(\sigma d\varepsilon^p + \sigma d\varepsilon^e) \text{ (zakres plastyczności),}$$

przy czym

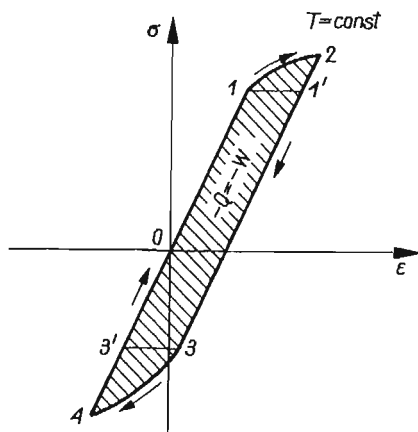
$$(5.8) \quad dQ = -\sigma d\varepsilon^p$$

oznacza ilość ciepła dysypowanego.

Odształcenie sprężyste można zawsze określić zakładając odciążenie układu. Nie można zapominać, że jakakolwiek teoria zakładająca, że energia u , entropia s (lub funkcja Helmholtza f , albo którykolwiek inny potencjał termodynamiczny) zależy od całkowitego odkształcenia ε lub od odkształcenia plastycznego ε^p , nie może prowadzić do rezultatów zgodnych z wynikami doświadczeń.

6. Odkształcenia związane ze wzmocnieniem materiału

Rozszerzenie naszych idei na przypadek materiałów ze wzmocnieniem można przeprowadzić na dwu poziomach przybliżenia. W pierwszym przybliżeniu będziemy w dalszym ciągu pomijać zmiany przekroju poprzecznego i inne efekty trójwymiarowe. W drugim



Rys. 10. Histereza dla materiału ze wzmocnieniem

przybliżeniu, które przedstawimy w p. 12, proponujemy teorię obszarów (domen) sprężysto-plastycznych i weźmiemy pod uwagę owe efekty trójwymiarowe nawet w przypadku cienkiego pręta poddanego jednoosiowemu obciążeniu.

Wykres na rys. 10 przedstawia idealizowaną pętlę histerezy z odcinkami 4 1 i 2 3, odpowiadającymi procesom odwracalnym i odcinkami 1 2 i 3 4, odpowiadającymi nieodwracalnym procesom wzmocnienia. Przyjmujemy, że pętla histerezy może być zamknięta i że pręt powraca po pełnym cyklu do pierwotnego swego stanu naturalnego 0. Zdajemy sobie jednak sprawę z tego, że wiele eksperymentów wskazuje, iż układ nie powraca po pełnym cyklu do początkowego stanu naturalnego 0 i zagadnieniem tym zajmiemy się później. W pierwszym przybliżeniu przyjmiemy, że taka sytuacja jest możliwa, akceptując tym samym zwykle milcząco przyjmowaną w termodynamice zasadę, która stwierdza, iż każdy układ może być doprowadzony do dowolnego ustalonego stanu równowagi za pomocą odpowiedniego ciągu procesów (odwracalnych lub nie).

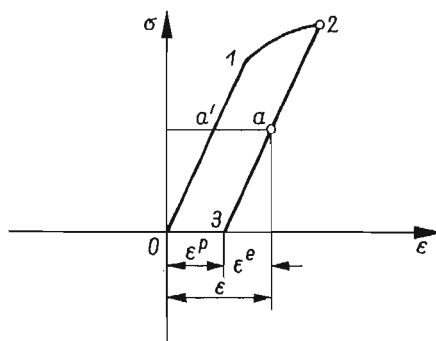
W celu określenia parametru naprężenia opisującego stan termodynamiczny użyjemy jako kryterium wyrażenia na pracę w odwracalnym procesie odciążenia zakładając, że stałe materiałowe, w tym także moduł Younga, mają pierwotne wartości. Wnioskujemy, że odkształcenie sprężyste

$$(6.1) \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E},$$

przy czym

$$(6.2) \quad \varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e$$

wciąż odgrywa rolę parametru stanu. Metoda określenia ε^e jest przedstawiona na rys. 11, który pod tym względem jest podobny do rys. 7 z tą tylko różnicą, że naprężenia, przy których następuje plastyczne płynięcie, są zmienne; odpowiednia zależność jest przy tym dana empirycznie.



Rys. 11. Naprężenie sprężyste

Ponieważ dla dwu stanów charakteryzujących się tym samym naprężeniem (a i a' na rys. 11) co najmniej trzy parametry stanu σ , ε^e i T mają te same wartości, więc wnioskujemy stąd, że dwa takie stany są identyczne. Wskazuje to na fakt, że dwa kolejne po sobie następujące procesy: nieodwracalny proces 1 2 i odwracalny proces 2 1' stanowią nieodwracalny cykl izotermiczny.

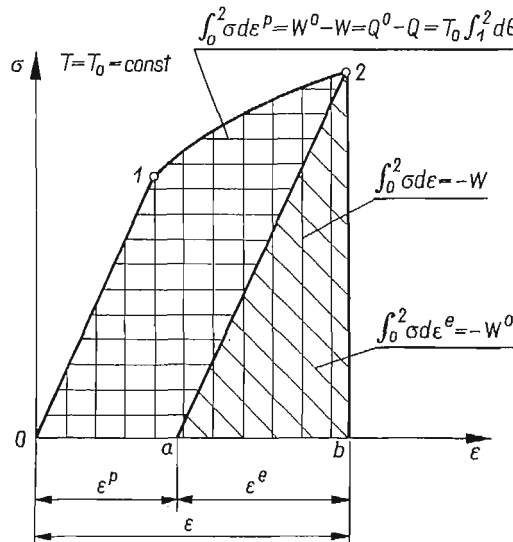
Dla rozważanego przypadku zachodzi swą słuszność termiczne równanie stanu oraz wyrażenia dla energii wewnętrznej, entropii, pracy w procesie odwracalnym i ilości ciepła, które odnoszą się do przypadku pręta sprężystego, z tym tylko, że należy w nich zamiast ε

podstawić ϵ^e . Podobnie zachowują ważność równania (5.4)–(5.7). Wykres stanu jest identyczny z przedstawionym poprzednio na rys. 8 (lub 1 i 2) z tym jednak, że teraz izotermy są ograniczone przez naprężenia zrywające σ_r , a nie przez granicę plastyczności σ_{p1} jak dla układu sprężysto-idealnie plastycznego.

Wyrażenia dla pracy i ciepła dysypowanego — równania (5.6)–(5.8) — można przedstawić jako pola powierzchni na wykresie naprężenie-odkształcenie w przypadku procesów izotermicznych; przedstawia je rys. 12. Pole 0 1 2 b reprezentuje aktualną pracę wykonaną w układzie

$$\int_0^2 \sigma d\epsilon = -W,$$

podczas gdy pole a 2 b pracę wykonaną w układzie w procesie odwracalnym. Różnica — pole 0 1 2 a jest proporcjonalna do energii dysypowanej podczas procesu (por. równanie w p. 10); nie jest ona równa ani ilości ciepła Q^0 wymienionej w sposób odwracalny, ani aktualnie wymienionej ilości ciepła Q , ale ich różnicy. Kiedy po pełnym cyklu od stanu początkowego układ po odciążeniu powraca do stanu a, wówczas pole 0 1 2 a staje się równe energii dysypowanej podczas cyklu, to znaczy ciepłu oddanemu otoczeniu. Ilość oddanego ciepła jest wtedy równa całkowitej wykonanej pracy.



Rys. 12. Geometryczna interpretacja całek na izotermicznym wykresie naprężenie-odkształcenie

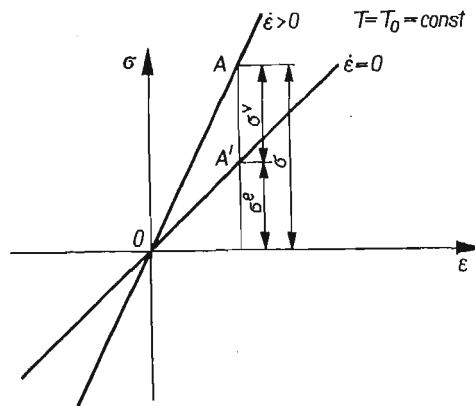
Rysunek 5 przedstawia prostą analogię mechaniczną pręta odkształcanego plastycznie. Przypadek $N = \text{const}$ odpowiada przypadkowi idealnej plastyczności, podczas gdy przypadek ze wzrastającym N powyższemu uproszczonemu przypadkowi wzmocnienia.

7. Materiał lepkosprężysty

Zajmiemy się teraz możliwie najprostszym materiałem lepkosprężystym, mianowicie takim, który spełnia prawo Hocke'a przy dowolnie danej szybkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$. Uwzględniając, że szybkość odkształcenia ma wpływ na związek między odkształceniem

i naprężeniem, przyjmiemy, że efekty bezwładnościowe można pominąć. Izotermiczny wykres naprężenie-odkształcenie dla takiego materiału przedstawiony jest na rys. 13; szybkość odkształcenia $\dot{\epsilon}$ występuje tu w roli dodatkowego parametru. Pierwszą nasuwającą się myślą jest, że stan układu, na przykład w punkcie A , opisują w sposób zupełny trzy spośród czterech zmiennych: σ , ϵ , T i $\dot{\epsilon}$. Innymi słowy «naturalne» wydaje się dołączenie szybkości odkształcenia jako dodatkowego parametru i przyjęcie w związku z tym, że stan określają nie dwie, lecz trzy niezależne wielkości. Słuszności tego przypuszczenia nie można rozstrzygnąć przez odwołanie się do jakiejś zasady; poprawną odpowiedź może dać tylko interpretacja faktów doświadczalnych.

Na podstawie danych doświadczalnych przyjmujemy, że odwracalne są tylko procesy przebiegające przy $\dot{\epsilon} = 0$; wszystkie inne są natomiast nieodwracalne. Fakt ten, jak to



Rys. 13. Materiał lepkosprężysty

zaraz zobaczymy, wyklucza możliwość, że $\dot{\epsilon}$ reprezentuje prawdziwy parametr stanu, i prowadzi do wniosku, że takie wielkości, jak entropia i energia wewnętrzna lub jakikolwiek inny potencjał termodynamiczny muszą być niezależne od $\dot{\epsilon}$.

Gdyby $\dot{\epsilon}$ było prawdziwym parametrem stanu i gdyby termiczne równanie stanu miało postać

$$(7.1) \quad f(\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}, T) = 0,$$

wówczas możliwe byłoby przeprowadzenie procesu odwracalnego, to znaczy procesu, podczas którego układ przechodziłby przez ciąg stanów równowagi przy dodatkowym warunku $\dot{\epsilon} = \text{const}$. Wspomnieliśmy już, że jest to możliwe tylko wówczas, gdy $\dot{\epsilon} = 0$. A ten właśnie fakt wyklucza $\dot{\epsilon}$ jako zmienną z równania (7.1).

Szybkość, z jaką jest wykonywana praca (w sposób nieodwracalny) przy $\dot{\epsilon} > 0$, jest równa

$$(7.2) \quad dW/dt = -\sigma\dot{\epsilon},$$

co wskazuje na to, że σ może nie mieć charakteru parametru stanu. Równanie (7.2) można także przepisać w postaci

$$(7.3) \quad dW = -\sigma d\epsilon,$$

tak że praca w procesie odwracalnym przy $\dot{\varepsilon} = 0$, jest równa

$$(7.4) \quad dW = -\sigma^e d\varepsilon,$$

gdzie $\sigma^e < \sigma$. Równanie powyższe identyfikuje σ^e jako prawdziwy parametr stanu. W takim razie naprężenie musi być rozłożone na «odwracalną» część sprężystą σ^e i część lepka σ^v :

$$(7.5) \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^v$$

jak to sugeruje rys. 13. W konsekwencji, z punktu widzenia termodynamiki stany A i A' na wykresie są identyczne. W celu obliczenia energii wewnętrznej u lub entropii s w punkcie A nie konieczne trzeba łączyć A i, powiedzmy, punkt reprezentujący stan naturalny linią odpowiadającą procesowi odwracalnemu od jednego stanu do drugiego; zamiast punktu A można równie dobrze posłużyć się punktem A' .

Jest teraz rzeczą jasną, że dla rozpatrywanego przypadku pozostają słuszne wszystkie równania dla układu sprężystego. W szczególności niezmienione pozostaje równanie podstawowe (2.21), ale we wszystkich pozostałych równaniach trzeba σ zastąpić przez σ^e . Na przykład, zamiast dobrze znanego równania

$$(7.6) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_s = \sigma$$

dla układu sprężystego, które wynika bezpośrednio z zależności

$$du = Tds + \sigma d\varepsilon,$$

musimy napisać

$$(7.7) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_s = \sigma^e.$$

Podobnie przy przeprowadzaniu transformacji Legendre'a równania podstawowego (2.21) nie wolno zapominać, że dla materiału lepkosprężystego

$$(7.8) \quad h(s, \sigma^e) = u - \sigma^e \varepsilon, \quad f(T, \varepsilon) = u - T\varepsilon, \quad g(T, \sigma^e) = u - \sigma^e \varepsilon - T\varepsilon$$

i że

$$(7.9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma^v} \equiv 0, \quad \text{ale że na ogół } \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma^e} \neq 0$$

dla każdego potencjału termodynamicznego φ (różniczkowanie przeprowadza się przy ustalonych innych zmiennych).

Przedstawiona obecnie sytuacja jest analogiczna do sytuacji w przypadku cieczy lepkiej, dyskutowanej krótko w związku z rys. 6. W tym ostatnim przypadku nie było mowy o tym, że moment M lub prędkość kątowa ω powinny wejść do równania stanu. Innymi słowy: ponieważ moment M jest całką z naprężenia ścinającego τ w cieczy lepkiej, prędkość zaś kątowa ω jest proporcjonalna do gradientu prędkości w warstwie, nikt nie zaproponował, aby którąkolwiek z tych dwu wielkości wstawić do równania stanu cieczy lepkiej. W równaniu stanu zachowuje się jedynie ciśnienie, to znaczy jedna trzecia śladu pełnego tensora naprężenia i objętość, to znaczy jedna trzecia całki po czasie ze śladu tensora szybkości odkształcenia.

W przypadku lepkosprężystym proces przebiegający przy $\dot{\varepsilon} > 0$ jest nieodwracalny i entropia produkuje się z szybkością

$$(7.10) \quad T \frac{d\theta}{dt} = \sigma^v \dot{\varepsilon}$$

zupełnie analogicznie jak w przypadku cieczy lepkiej. W procesie izotermicznym kompensacyjny strumień ciepła zapewnia utrzymanie stałej wartości entropii, to znaczy wartości odpowiadającej temu samemu odkształceniu, ale przy równej zeru szybkości odkształcenia.

Dalsza różnica między materiałem lepkosprężystym i materiałem plastycznym polega na tym, że teraz trzeba rozważać procesy przebiegające ze skończonymi prędkościami, podczas gdy poprzednio dopuszczalne były jedynie procesy quasi-statyczne. Możliwość wykorzystywania w dalszym ciągu równań klasycznej termodynamiki opiera się na hipotezie, w myśl której w każdej chwili procesy przebiegające ze skończonymi prędkościami można traktować jako procesy quasi-statyczne. Warto tu zauważyć, że na tej hipotezie bazuje cała mechanika płynów.

8. Pełzanie i relaksacja

Rozważania prowadzone w poprzednich punktach mogą sugerować, że termiczne równanie stanu materiału, w którym przebiegać mogą procesy pełzania i relaksacji, powinno mieć również postać:

$$(8.1) \quad f(\varepsilon, \sigma, T) = 0.$$

Jednakże jest to oczywiście niemożliwe, jako że w procesie pełzania zmienia się odkształcenie, podczas gdy $\sigma = \text{const}$ i $T = \text{const}$, natomiast w procesie relaksacji zmienia się σ , podczas gdy $\varepsilon = \text{const}$ i $T = \text{const}$. Musimy oczywiście dojść do wniosku, że równanie (8.1) powinno zawierać co najmniej jeszcze jedną zmienną ξ , której zmiana skompensuje zmianę σ lub ε zależnie od przypadku. W konsekwencji termiczne równanie stanu musi przyjąć postać:

$$(8.2) \quad f(\varepsilon, \sigma, T, \xi_i) = 0,$$

gdzie symbol ξ_i oznacza tyle zmiennych ξ , ile nakazuje przyjąć doświadczenie w każdym przypadku.

Interpretujemy tu wyniki doświadczeń w taki sposób, że zakładamy, iż zmienna lub zmienne ξ są tej samej natury, co i stopień reakcji chemicznej. Włączenie takich zmiennych do równania stanu przedstawia ciągłą aproksymację, która daje możliwość uwzględnienia przemian chemicznych czy dyfuzji, jeśli takie mogą wystąpić w układzie w stanie zahamowanej równowagi chemicznej.

Ten punkt widzenia przyjęty jest w pracy J. MEIXNERA na temat zjawisk relaksacji [2, 3], a także w monografii S. R. DE GROOTA i P. MAZURA [4] w związku z opisem relaksacji sprężystej. Praca J. MEIXNERA [2] zawiera szczególnie prosty opis relaksacji w przecie poddanym działaniu jednoosiowego naprężenia. Teoria jest oparta na rozwinięciu na szereg Taylora funkcji Helmholtza (co do której zakłada się, że zależy od jednego tylko parametru wewnętrznego ξ) w pobliżu stanu równowagi chemicznej, dla którego przyjmuje się $\xi = 0$.

Ograniczając się do procesów izotermicznych można równanie podstawowe napisać w postaci:

$$(8.3) \quad f(\varepsilon, \xi) = f(0, 0) + \frac{1}{2} E_{\infty} \varepsilon^2 + b \varepsilon \xi + \frac{1}{2} c \xi^2;$$

różniczka f ma wtedy postać:

$$(8.4) \quad df = \sigma d\varepsilon - \mathcal{A} d\xi,$$

gdzie \mathcal{A} jest powinowactwem sprzężonym z ξ .

Z relacji przyjętej dla funkcji Helmholtza wynika, że

$$(8.5) \quad \sigma = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_{\xi} = E_{\infty} \varepsilon + b \xi$$

oraz

$$(8.6) \quad -\mathcal{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{\varepsilon} = b \varepsilon + c \xi.$$

Podczas procesu odwracalnego $\mathcal{A} = 0$ i mamy:

$$\sigma = \left(E_{\infty} - \frac{b^2}{c} \right) \varepsilon,$$

co wskazuje, że moduł Younga jest dany wzorem:

$$(8.7) \quad E = E_{\infty} - \frac{b^2}{c} < E_{\infty}.$$

Postulując liniowy związek między powinowactwem \mathcal{A} i uogólnionym strumieniem $d\xi/dt$, to znaczy zakładając

$$(8.8) \quad \mathcal{A} = C \frac{d\xi}{dt},$$

można wyprowadzić tak zwane dynamiczne równanie stanu⁽⁶⁾

$$(8.9) \quad \sigma + \tau_{\varepsilon} \dot{\sigma} = E(\varepsilon + \tau_{\sigma} \dot{\varepsilon}),$$

gdzie

$$(8.10) \quad \tau_{\varepsilon} = \frac{C}{c} \quad \text{i} \quad \tau_{\sigma} = \frac{C}{c} \frac{E_{\infty}}{E}.$$

Rozwiązanie ogólne równania (8.9) można napisać w postaci

$$(8.11) \quad \sigma(t) = E_{\infty} \varepsilon(t) - \frac{E_{\infty} - E}{\tau_{\varepsilon}} \int_0^{\infty} e^{-u/\tau_{\varepsilon}} \varepsilon(t-u) du,$$

gdzie pominięto addytywny, zanikający człon $\text{const} \times \exp(-t/\tau_{\varepsilon})$.

Interpretacja tego równania prowadzi często do pewnych nieporozumień. Jak widać, równanie to opisuje proces termodynamiczny będący wynikiem «przyłożenia» zmiennego

⁽⁶⁾ Użycie tu określenia «równanie stanu» jest nieusprawiedliwione, gdyż równanie to zawiera wielkości, które nie są prawdziwymi parametrami stanu.

odkształcenia $\varepsilon(t)$ do końców pręta. Jeśli z wyrażenia dla $\varepsilon(t)$ i $\sigma(t)$ wyeliminujemy parametr t , to powinniśmy otrzymać pewną reprezentację tego procesu na płaszczyźnie naprężenie-odkształcenie; w tej reprezentacji procesu parametr wewnętrzny ξ nie jest stały, ale zmienia się od punktu do punktu, jak tego żąda równanie (8.5). Tak więc związek tego typu nie może stanowić równania stanu; wszystkie równania stanu dla izotermicznie «zamrożonej» równowagi wewnętrznej są zawarte w równaniu (8.3). Nie jest więc rzeczą zaskakującą, że szczegóły procesu zależą od wszystkich «obecnych» i «przeszłych» wartości funkcji $\varepsilon(t)$ opisującej zależność odkształcenia od czasu («historii» odkształceń na brzegu). To nie usprawiedliwia stwierdzenia interpretowanego często bardzo szeroko, że rozważany układ jest obdarzony «pamięcią» (zanikającą lub jakąś inną) i że jego aktualny stan zależy od całej historii układu. Ilekroć rozpatruje się proces termodynamiczny, tylekroć stwierdza się, że wszystkie parametry stanu są funkcjami czasu i że ich wartości w jakiejś szczególnej chwili zależą od wszystkich wartości wszystkich parametrów w danej chwili i w przeszłości. To jednak nie oznacza, że czas musi występować w sposób jawny w równaniach stanu, stanowiących przecież związki między parametrami stanu w danej chwili. Odwrotnie, jeśli do opisu przyjęte są poprawne niezależne parametry stanu, czas musi zniknąć z każdego prawdziwego równania stanu.

Obecność parametru wewnętrznego ξ w poprzednich rozważaniach sugeruje wyraźnie, że teoria materiałów lepkosprężystych, potraktowana opisowo w poprzednim punkcie, może być zbudowana na założeniu istnienia wewnętrznych zmiennych układu. Ten punkt widzenia jest szczególnie wyraźnie przyjęty w licznych pracach J. MEIXNERA [3].

9. Schemat ogólny

Rozszerzenie powyższych rozważań na ośrodki ciągłe w przypadku materiałów sprężystych okazuje się proste i nie budzące wątpliwości. W bardziej skomplikowanych przypadkach różni autorzy stosują różne podejścia; w związku z tym przed przystąpieniem do zbadania zjawiska wzmocnienia w ramach teorii obszarów (domen) sprężysto-plastycznych nie od rzeczy będzie rozpatrzenie pewnych ogólnych zasad analizy.

Autor jest przekonany, że dla skonstruowania termodynamicznego opisu układów ciągłych trzeba zaakceptować *zasadę* stanu lokalnego [5]. Zasada ta zapewnia, że wszystkie związki między wielkościami termodynamicznymi, które są słuszne dla układów jednorodnych, pozostają w mocy w każdym punkcie w przestrzeni i w każdej chwili czasu, nawet jeśli procesy przebiegają ze skończonymi prędkościami. Osiągnięcia teorii sprężystości i mechaniki płynów są zbudowane właśnie na tej zasadzie. Zgodność między tymi teoriami i doświadczeniem sugeruje, że zasadę stanu lokalnego można bez żadnych zastrzeżeń przyjąć także jako podstawowe założenie teorii mających opisać niesprężyste zachowanie się materiałów. Kwestii czy zasadzie tej można nadać charakter uniwersalnej zasady termodynamiki ośrodków ciągłych nie ma potrzeby tu dyskutować.

W każdej chwili czasu t układ ciągły znajduje się w określonym stanie, który charakteryzują rozkłady przestrzenne jego (prawdziwych) parametrów termodynamicznych φ_i . Stan jest zatem określony przez n pól $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ gdzie \mathbf{x} jest wektorem położenia, zaś n oznacza liczbę niezależnych wielkości termodynamicznych odpowiedniego układu jednorodnego. Czas t odgrywa rolę parametru. Kiedy czas zmienia się, wówczas mówimy, że w układzie

przebiega proces. Jeśli ψ jest dowolną wielkością zależną, wówczas istnieje jednoznaczne równanie stanu:

$$(9.1) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = F[\varphi_1(\mathbf{x}, t), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}, t)],$$

które jest spełnione w każdym punkcie \mathbf{x} i w każdej chwili czasu t . Funkcja F nie może zależeć jawnie ani od wektora położenia \mathbf{x} , ani od czasu t .

Wygodne okaże się dokonanie przeglądu tych równań termodynamiki, które muszą być w zwarty sposób uogólnione dla układów trójwymiarowych⁽⁷⁾. We wszystkich dyskutowanych poprzednio przykładach analiza faktów doświadczalnych dostarcza nam wyrażań dla pracy całkowitej dW i pracy w procesie odwracalnym dW^0 . Pozwala to napisać pierwszą zasadę termodynamiki w dwu postaciach. Rozważając elementarną quasi-statyczną zmianę stanu między dwoma sąsiednimi stanami możemy dla procesu odwracalnego napisać:

$$(9.2) \quad dU = dQ^0 - dW^0$$

i osobno dla procesu nieodwracalnego:

$$(9.3) \quad dU = dQ - dW.$$

W równaniach tych U przedstawia całkę wziętą po objętości V układu przy $t = \text{const}$; dU reprezentuje w takim razie zmianę tej wielkości w ciągu czasu dt . Wielkości dQ , dW , dQ^0 i dW^0 są liczone jako całki ze strumienia ciepła i ze strumienia pracy odpowiednio po powierzchni Σ układu, oczywiście przy założeniu, że na układ nie działają pola elektryczne, magnetyczne czy grawitacyjne; strumienie te można przy tym opisać za pomocą odpowiednich pól wektorowych.

Równanie (9.3) stanowi równanie energii dla procesu w układzie. U jest tu jedynie funkcją prawdziwych parametrów termodynamicznych układu⁽⁸⁾. Wyrażenia dla dQ i dW mogą jednak zawierać wielkości, które nie muszą być wielkościami termodynamicznymi. Równanie (9.2) może natomiast zawierać tylko wielkości termodynamiczne. W różnych zmodyfikowanych postaciach równanie (9.2) jest znane jako równanie Gibbsa, szczególnie wówczas, gdy przyjmuje się w nim $dQ^0 = TdS$ i podstawia się odpowiednie wyrażenie na dW^0 . Na przykład dla układu w stanie zahamowanej równowagi chemicznej, w którym przebiega pojedyncza reakcja chemiczna, równanie (9.2) zakłada się w dobrze znanej postaci:

$$(9.4) \quad dU = TdS - PdV - \mathcal{A}d\xi,$$

gdzie \mathcal{A} jest powinowactwem chemicznym, ξ zaś stopniem reakcji. ξ jest tu parametrem stanu, tak że $U = U(S, V, \xi)$. Oczywiście w tym przypadku

$$dW^0 = PdV + \mathcal{A}d\xi$$

i, jak łatwo się przekonać, PdV przedstawia wyrażenie dla pracy całkowitej, a nie dla pracy wykonanej w sposób odwracalny, poza przypadkiem gdy $\xi = \text{const}$ lub $\mathcal{A} = 0$. W przypadku układu ciągłego S musi być liczone jako całka objętościowa i dS przedstawia wtedy zmianę tej całki w ciągu czasu dt .

(7) Szerszą dyskusję można znaleźć w [5], rozdział 13.

(8) W wielu pracach energię wewnętrzną przyjmuje się często błędnie jako funkcję wszystkich parametrów występujących w danym problemie.

Porównując równania (9.2) i (9.3) otrzymujemy:

$$(9.5) \quad dQ^0 - dQ = dW^0 - dW,$$

co wyraża sobą niezależność zmiany energii wewnętrznej od procesu. Pozwala to napisać wyrażenie dla entropii

$$dS = dQ^0/T$$

w postaci

$$(9.6) \quad dS - \frac{dQ}{T} = \frac{dW^0 - dW}{T}.$$

Równanie to wyraża fakt, że różnica między zmianą entropii układu dS i tą jej częścią, która jest związana z wymianą ciepła w procesie nieodwracalnym, wyrażającą się przez strumień entropii, jest równa wielkości

$$(9.7) \quad d\theta = \frac{dW^0 - dW}{T},$$

którą można interpretować jako ilość entropii generowaną przez proces nieodwracalny w ciągu czasu dt . Nierówność Clausiusa żąda, aby dla procesu nieodwracalnego

$$d\theta > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{dW^0 - dW}{T} > 0,$$

czyli aby obydwie powyższe wielkości były dodatnio określone. Równanie (9.6) można przekształcić do postaci

$$(9.8) \quad dQ = TdS - Td\theta.$$

Ma mocy (9.3) równanie to jest równoważne następującemu:

$$(9.10) \quad dU = TdS - dW - Td\theta,$$

co stanowi inną postać równania Gibbsa. Z porównania powyższego równania z (9.4) widać, że dla układu chemicznego

$$dW = PdV, \quad d\theta = \frac{\mathcal{E}l}{T} d\xi \quad \text{oraz} \quad dW^0 - dW = \mathcal{A}d\xi.$$

Kiedy znane są już wyrażenia dla pracy wykonanej w sposób odwracalny i nieodwracalny, nie ma potrzeby uogólniania równania Gibbsa na przypadek trójwymiarowy⁽⁹⁾; wyrażenie dla produkcji entropii można bowiem napisać od razu — jest to równanie (9.7). Wyrażenie dla wydajności źródła entropii $d\theta/dt$ na jednostkę objętości (lub masy) i jednostkę czasu będzie miało szczególnie prostą matematycznie postać. W poprzednich przykładach wykazaliśmy, że obydwa wyrażenia dla pracy mają postać:

$$dW^0 = X^0 dy^0 \quad \text{oraz} \quad dW = X dy,$$

gdzie X i X^0 są wielkościami intensywnymi, y i y^0 zaś wielkościami ekstensywnymi⁽¹⁰⁾. Przy tej formie zapisu wyrażen dla pracy wiadomo, że tylko X^0 i y^0 są parametrami stanu. Tak więc

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{X^0 dy^0/dt - X dy/dt}{T},$$

⁽⁹⁾ Ze względu na występowanie w tym równaniu T równanie musi być najpierw napisane dla objętości elementarnej i dopiero potem scałkowane.

⁽¹⁰⁾ W ogólniejszym przypadku może wystąpić suma takich wyrażen, dla prostoty pomijamy tu znak sumowania.

to znaczy wydajność źródła entropii wyraża się przez iloczyny uogólnionych sił X i X^0 przez uogólnione strumienie y i y^0 . Wyniki doświadczalne odnoszące się do układów prostych, zawarte w równaniach stanu — na przykład w podstawowym równaniu stanu — dostarczają jedynie informacji o związku między X^0 i y^0 . Relację między X i y trzeba określić w oparciu o doświadczenia innego charakteru.

10. Równania konstytutywne

Poprzednie uwagi prowadzą do ważnej interpretacji równań konstytutywnych. Ponieważ napężenie i odkształcenie mogą występować jako wielkości termodynamiczne oraz jako wielkości występujące w wyrażeniu dla całkowitej pracy dW w procesie nieodwracalnym, więc relacje między nimi mogą wynikać z dwu niezwiązanych ze sobą zespołów danych doświadczalnych: tych, które prowadzą do równania stanu, i tych, które określają związki między siłami i strumieniami w procesie nieodwracalnym. Dla wyraźnego odróżnienia tych parametrów, które występują w wyrażeniach dla energii, entropii i pozostałych potencjałów termodynamicznych, i tych, które do tych wyrażań nie wchodzi — najlepiej jest obie te grupy danych doświadczalnych interpretować osobno. W równania ruchu (równania Cauchy'ego) wchodzi pełna relacja konstytutywna; w przeciwieństwie do tego wypisując równanie energii trzeba zwrócić baczną uwagę, aby człon dU zawierał tylko te parametry, które są określone przez równanie stanu; w wyrażeniu dla pracy całkowitej występują ponownie wszystkie człony relacji.

Na przykład dla układu lepkosprężystego

$$(10.1) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sigma^v \dot{\epsilon}}{T}$$

i możemy założyć liniową relację między σ^v i $\dot{\epsilon}$:

$$(10.2) \quad \sigma^v = \mu \dot{\epsilon},$$

gdzie μ odgrywa rolę współczynnika lepkości. W układzie mamy oczywiście zawsze do czynienia z dodatkowym rozkładem źródeł entropii, związanym z przewodnictwem cieplnym. Zasada Curie⁽¹¹⁾ pozwala jednak stwierdzić, że te dwa rodzaje źródeł entropii w ośrodku izotropowym nie wpływają na siebie nawzajem, tak że to ostatnie możemy dla prostoty pominąć. Dochodzimy w takim razie do wniosku, że kompletne równanie konstytutywne ma dla naszego układu postać:

$$(10.3) \quad \sigma = \epsilon E - \alpha E(T - T_0) + \mu \dot{\epsilon}.$$

Jednakże

$$(10.4) \quad u = \frac{1}{2} E \epsilon^2 + \alpha E \epsilon T_0 + c_e (T - T_0) = \\ = \frac{1}{2} E \left[\frac{\sigma^e}{E} + \alpha (T - T_0) \right]^2 + \alpha \sigma^e T_0 + \alpha^2 E T_0 (T - T_0) + c_e (T - T_0)$$

oraz

$$(10.5) \quad s = \alpha E \epsilon + c_e \ln(T/T_0) = \alpha \sigma^e + \alpha^2 E (T - T_0) + c_e \ln(T/T_0).$$

⁽¹¹⁾ Por. [4], str. 57.

11. Relacje Onsagera

Przypominamy, że macierz współczynników fenomenologicznych jest konsekwencją zapisu związków między uogólnionymi siłami i uogólnionymi strumieniami w oparciu o wyrażenie dla produkcji entropii. Twierdzenie Onsagera orzeka, że macierz ta musi być symetryczna⁽¹²⁾. W tym ujęciu⁽¹³⁾ rozważa się małe odchylenia od stanu równowagi; jest więc rzeczą jasną, że jesteśmy zupełnie usprawiedliwieni mówiąc, iż dany strumień jest wywołany przez daną siłę, jeśli obydwie wielkości znikają jednocześnie. Jest również jasne, że w tym ujęciu te strumienie, które występują w ogólnym wyrażeniu, są pochodnymi ekstensywnych wielkości termodynamicznych.

W naszych poprzednich przykładach sytuacji tej odpowiada przypadek lepkiego naprężenia σ^v i sprzężonego z nim strumienia $\dot{\epsilon}$. Wyjątek stanowi natomiast przypadek przepływu plastycznego (z uwzględnieniem wzmocnienia lub bez). W tym przypadku siła nie znika, gdy znika strumień, i układ jest wyprowadzony ze stanu równowagi jedynie wskutek zaburzenia pola temperatury, pozostając jednocześnie, że tak powiemy, w równowadze względem pola naprężenia. Trudno jest tu stwierdzić, czy rzeczywiste zachowanie się układu można opisać w ramach normalnego schematu prowadzącego do macierzy współczynników fenomenologicznych; wydaje się, że nie mamy tu innej możliwości, jak tylko stwierdzić, że przepływ plastyczny nie spełnia relacji Onsagera.

12. Teoria obszarów (domen) sprężysto-plastycznych

Dokładna analiza faktów doświadczalnych wskazuje, że pręty metalowe nie są naprawdę jednorodne. Oglądane przez mikroskop przedstawiają sobą mieszaninę obszarów (domen) o przypadkowych kształtach i chaotycznie zorientowanych względem siebie, które w sprzyjających okolicznościach ulegają poślizgowi. Poślizgi te następują wzdłuż wyraźnie widocznych płaszczyzn i są wynikiem ruchu dyslokacji.

Proponujemy wyjaśnienie procesu wzmocnienia przez założenie, że każda taka domena wzięta osobno zachowuje się sprężysto aż do pewnej granicy; po jej przekroczeniu domena deformuje się plastycznie bez zmiany objętości w sposób, który sugeruje szkic na rys. 14. Odnośnie deformacji plastycznej zakładamy, że następuje ona wzdłuż płaszczyzny poślizgu. Stan termodynamiczny obszaru (domeny) sprężysto-plastycznego jest więc opisany przez parametry zidentyfikowane w p. 5 jako parametry termodynamiczne pręta ulegającego deformacji idealnie plastycznej.

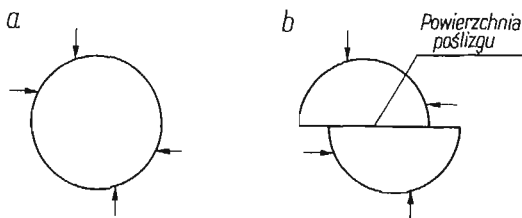
Od razu zakładamy, że układ domen spełnia warunek ciągłości; naruszenie tego warunku jest równoważne powstaniu okoliczności, w których zapoczątkowuje się proces zerwania. Żądanie ciągłości oznacza, że domeny, które stykają się z domeną ulegającą deformacji plastycznej, poddane są działaniu wewnętrznych naprężeń sprężystych i w związku z tym same mogą ulec deformacji plastycznej, jeśli powstaną sprzyjające po temu warunki. Stan termodynamiczny całego układu opisują pola: naprężeń $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$, odkształceń sprężystych $\epsilon_{ij}^e(\mathbf{x})$, temperatury $T(\mathbf{x})$ itd.; do opisu stanu nie wchodzi jednak pole odkształceń plastycznych $\epsilon_{ij}^p(\mathbf{x})$. Proces następuje wówczas, gdy pola te zmieniają się w czasie, ale zasada stanu

⁽¹²⁾ Pomijamy tu komplikacje wynikające z istnienia dwu rodzajów sił uogólnionych ([2] artykuł w encyklopedii), ponieważ ten fakt nie ma wpływu na nasze rozważania.

⁽¹³⁾ Por. [4], str. 36, 40 i 57.

lokalnego zapewnia, że równania p. 3 zachowują swą słuszność. Wystąpienie poślizgów samo przez się nie powoduje zmiany stanu; zmiana taka następuje w sposób pośredni wskutek wpływu poślizgów na naprężenia i wskutek wpływu źródeł entropii na rozkład temperatury.

Różnice w zachowaniu się różnych ciał są uwarunkowane różnymi średnimi rozmiarami domen i różnymi kryteriami poślizgu. Zakładamy, że poślizg następuje wówczas, gdy naprężenie ścinające, działające na powierzchni poślizgu, osiąga wartość krytyczną τ_{kr} . Aby sformułować dokładne kryteria określające orientację płaszczyzny poślizgu i liczbę możliwych płaszczyzn poślizgu w domenie dla konkretnego materiału, trzeba przeprowadzić



Rys. 14. Deformacja obszaru (domeny sprężysto-plastycznego)
a) sprężysta — poniżej granicy poślizgu, b) czysto plastyczna — powyżej granicy plastyczności

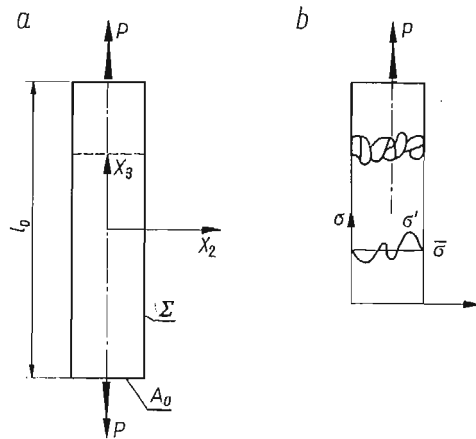
szczegółowe i dokładne badania doświadczalne. I choć nie jesteśmy w stanie podać tu tych kryteriów, możemy jednak rozważyć dwa przypadki graniczne, jako że można je rozpatrzyć w sposób zupełnie ogólny.

Rozważmy wyżarzony materiał pozbawiony zupełnie wewnętrznych naprężeń. Jeśli domeny nie mają żadnych wyróżnionych kierunków płaszczyzn poślizgu, to możemy przewidzieć następującą kolejność zdarzeń, kiedy, powiedzmy, do końców pręta przyłożone jest naprężenie rozciągające. Na początku układ będzie się zachowywał zupełnie sprężysto i odwracalnie. Kiedy obciążenie zewnętrzne osiągnie wartość, przy której napięcia ścinające przewyższą τ_{kr} , wówczas cały układ zacznie płynąć. Tak więc pierwsza powierzchnia płynięcia układu będzie odpowiadać dokładnie warunkowi plastyczności Treski. Z drugim warunkiem granicznym będziemy mieli do czynienia wówczas, gdy domeny są małe i bardzo liczne, i gdy każda posiada jeden wyróżniony kierunek poślizgu, przy czym kierunki te są w układzie rozłożone w sposób zupełnie przypadkowy. Taki układ na początku będzie się zachowywał także idealnie sprężysto. Jednakże teraz płynięcie nie nastąpi, gdy w pewnym punkcie naprężenie ścinające osiągnie wartość przewyższającą τ_{kr} , gdyż w punkcie tym wyróżniony kierunek może się różnić od kierunku maksymalnego ścinania wywołanego przez obciążenie zewnętrzne. Ze względu na założony przypadkowy rozkład wyróżnionych kierunków i założony brak zmian objętości przy deformacji plastycznej ogólne kryterium dla układu mogłoby wyrażać warunek, że siły zewnętrzne w chwili osiągnięcia przez układ makroskopowej granicy płynięcia powodują jedynie zmiany kształtu układu. Przy założeniu, że współczynnik przewodnictwa cieplnego jest bardzo duży, a więc — że proces przebiega przy stałej temperaturze, powyższe kryterium płynięcia byłoby prawdopodobnie identyczne w swej formie z kryterium postulowanym niezależnie przez M. T. HUBERA [6], R. MISESA [7] i B. P. HAIGHA [8]. Innymi słowy, powinniśmy oczekiwać, że kryterium płynięcia będzie odnosić się do stanu osiągniętego przez układ

jako całość i opisanego przez pracę, jaką trzeba wykonać izotermicznie w sposób odwracalny, aby w kompletnie wyżarzonym materiale wywołać krytyczne zmiany kształtu. Termodynamiczną naturę tego kryterium stwierdził po raz pierwszy G. A. KLUITENBERG [9].

Jest rzeczą dobrze znaną, że większość materiałów w stanie wyżarzonym cechuje się pierwszą izotermiczną powierzchnią plastyczności, która leży między tymi dwoma ekstremami. Wskazuje to na fakt, że aby obliczyć analitycznie pierwszą granicę plastyczności, trzeba dysponować wystarczającą ilością informacji o mikrostrukturze układu. Warto też zauważyć, że poprzedni obraz sugeruje, iż podczas procesu pole tensora odkształceń plastycznych $\varepsilon^p(\mathbf{x}, t)$ jest w zasadzie nieciągłe, gdyż założenie o nieistnieniu wyróżnionych kierunków poślizgu jest nie do utrzymania.

Aby otrzymać nieco bardziej przejrzysty obraz zachowania się takiego przyjętego układu, możemy znowu rozważyć pręt poddany jednorodnemu rozciąganiu, jak to pokazano na rys. 15. Rozważmy jego górną część już po przekroczeniu granicy plastyczności.



Rys. 15. Istota naprężeń wewnętrznych

Widzimy, że na skutek przypadkowego rozkładu domen zdeformowanych plastycznie powierzchnia początkowo płaska nie pozostanie powierzchnią płaską. Ilustruje to rys. 15. Jest rzeczą jasną, że rozkład naprężeń normalnych, które powinny zapewnić spełnienie warunku ciągłości, nie może być jednorodny, ale musi być określony przez naprężenie średnie

$$(12.1) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{P}{A_0} \delta_{3i} \delta_{3j},$$

gdzie P oznacza jednorodne obciążenie, zaś A_0 początkowe pole przekroju poprzecznego. Ponadto w materiale będzie istnieć niejednorodny rozkład naprężeń σ'_{ij} o wartości średniej równej zero. Pole naprężenia $\sigma'_{ij}(\mathbf{x}, t)$ jest polem wewnętrznym, znikającym na brzegu.

Podczas procesu odciążania naprężenie średnie $\bar{\sigma}_{ij}$ będzie jednostajnie maleć do zera; nie można jednak tego powiedzieć o polu naprężeń wewnętrznych, które zachowuje się z razu nietknięte. Po pewnym czasie pole naprężeń wewnętrznych będzie zawierać składowe ściskające i w tych okolicznościach wywrze wpływ na powierzchnię plastyczności przy ściskaniu, prowadząc tym samym do efektu Bauschingera.

Zgodnie z tą teorią po cyklu składającym się z obciążenia i odciążenia układ nie może powrócić do stanu pierwotnego. Stany 0 i 3 na rys. 11 nie są więc dalej identyczne, jak to założono w teorii elementarnej w p. 6. Okoliczność tę implikuje «morze nieodwracalności» P. W. BRIDGMANA. Faktem bowiem jest, że rzeczywiście nie można, ogólnie mówiąc, odtworzyć pierwotny stan złożonego układu za pomocą odpowiednich sił przyłożonych do jego powierzchni. Jednakże stan pierwotny każdej domeny odtworzyć można, przynajmniej myślowo, tak że tracą swą moc obiekcje odnośnie zastosowania równań klasycznej termodynamiki do opisu zjawisk mechanicznych.

13. Pewne ogólne wyniki J. R. Rice'a

Profesor J. R. RICE, opierając się na poprzednio przedstawionych ideach, uzyskał szereg interesujących rezultatów. Przytaczamy je tutaj za jego zgodą.

Wracając do przypadku pręta przedstawionego na rys. 15 znajdujemy, że na powierzchni Σ zachodzi:

$$n_j \sigma'_{ij} = 0,$$

gdzie n_j oznacza wektor normalny skierowany na zewnątrz. Równania równowagi mają postać:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

zatem:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \sigma'_{ik}) dV = \int_V \left(\delta_{jk} \sigma'_{ik} + x_j \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \right) dV = \int_V \sigma'_{ij} dV.$$

Ale

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j \sigma'_{ik}) dV = \int_{\Sigma} x_j n_k \sigma'_{ik} d\Sigma,$$

gdzie Σ jest polem powierzchni. Dowodzi to, że

$$(13.1) \quad \int_V \sigma'_{ij} dV = 0.$$

Równanie stanu (3.6) oraz zasada stanu lokalnego pozwalają nam napisać:

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij}) (\bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon'_{ij}) + \frac{E\alpha T_0}{1-2\nu} (\bar{\varepsilon}_{kk} + \varepsilon'_{kk}) \right] dV,$$

gdzie $\bar{\varepsilon}_{ij}$ reprezentuje odkształcenie średnie wywołane przez średnie naprężenie $\bar{\sigma}_{ij}$. Zatem

$$U = \left(\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{E\alpha T_0}{1-2\nu} \bar{\varepsilon}_{kk} \right) V + \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV;$$

$V = A_0 l_0$ oznacza tu objętość pręta. Równanie to wyraża sobą podział energii wewnętrznej na dwie części: *makroenergię*

$$(13.2) \quad U_M = \left(\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{E\alpha T_0}{1-2\nu} \bar{\varepsilon}_{kk} \right) V,$$

którą układ posiada niezależnie od tego, czy są w nim naprężenia wewnętrzne, czy ich nie ma, i *mikroenergię*

$$(13.3) \quad U_m = \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV$$

związaną z istnieniem mikronaprężeń w układzie.

Przeprowadzając takie same rachunki dla entropii w oparciu o równanie (3.5) znajdujemy, że

$$(13.4) \quad S = \int_V \frac{\alpha E}{1-2\nu} (\bar{\varepsilon}_{kk} + \varepsilon'_{kk}) dV = \frac{\alpha E V}{1-2\nu} \bar{\varepsilon}_{kk}.$$

Równanie to pokazuje, że układ posiada tylko makroentropię S_M ; jego mikroentropia S_m jest tożsamościowo równa zero.

Stanowi to podstawę do zastosowania równania Gibbsa (9.10). Praca całkowita jest równa

$$dW = -Pd\bar{l},$$

przy czym

$$dW^0 = -Pd\bar{l},$$

gdzie \bar{l} — oznacza sprężyste wydłużenie pręta. Zatem

$$dU_M + dU_m = TdS_M + Pd\bar{l} - Td\theta.$$

Ponieważ mikroentropia jest równa zero, możemy również napisać

$$dU_M = TdS_M + Pd\bar{l}$$

i mamy

$$(13.5) \quad Pd(l - \bar{l}) - dU_m = Td\theta \geq 0.$$

Równanie to dowodzi, że praca sprężysta $Pd\bar{l}$, gdzie

$$l^p = l - \bar{l},$$

jest większa od zmiany «mikroenergii» pręta.

Te wstępne i jak do tej pory zupełnie ogólne rezultaty skłaniają nas do wyrażenia nadziei, że teorię domen sprężysto-plastycznych można dalej rozwinąć i udoskonalić. Jest rzeczą jasną, że w tym celu konieczne jest dokładniejsze zbadanie natury płaszczyzn poślizgu oraz że natura powierzchni plastyczności układu musi być zależna nie tylko od omówionych czynników, ale także od programu obciążenia na powierzchni układu. Wyjaśnia to, dlaczego wyniki doświadczeń odnośnie powierzchni płynięcia są tak trudne do sklasyfikowania i interpretacji.

14. Cykl naprężeniowy

Jeśli układ jest poddany działaniu izotermicznego cyklu naprężeniowego od początkowego stanu sprężystego do końcowego stanu sprężystego, to po pełnym cyklu następuje odwrócenie jego objętości, a także jego entropii; ale jeśli cykl obejmuje deformację plastycz-

ną, wówczas musi ulec zmianie kształt układu. Możemy się również przekonać, że wzrasta energia wewnętrzna układu. Tak więc dla poszczególnych członów równania (9.10) mamy warunki

$$\oint T dS = 0, \quad \oint dU > 0, \quad T \oint d\theta > 0.$$

Zatem

$$-W = -\oint dW = \oint dU + T \oint d\theta - T \oint dS$$

oraz

$$-W = \oint dU + T \oint d\theta \geq 0.$$

Praca całkowita jest określona przez całkę krzywoliniową z pracy sił t_i na przemieszczeniach ξ_i mierzonych na powierzchni Σ . W konsekwencji otrzymujemy

$$(14.1) \quad \oint_{\Sigma} t_i d\xi_i d\Sigma \geq 0.$$

Równanie to przypomina kryterium stateczności D. C. DRUCKERA, ale nie jest mu równoważne.

Podziękowanie. Autor chciałby wyrazić w tym miejscu wdzięczność swoim kolegom z Brown University za wiele wyczerpujących dyskusji na temat zagadnień stanowiących przedmiot niniejszej pracy. Autor chciałby podziękować szczególnie profesorom D. C. DRUCKEROWI, J. MEIXNEROWI (który wykladał gościnnie pod koniec 1965 r.), E. T. ONATOWI i J. R. RICE'MU. Profesor J. R. RICE wyprowadził szereg równań i tym samym wzbudził przekonanie o żywotności teorii domen (obszarów) sprężysto-plastycznych. Jestem mu wdzięczny za pozwolenie przytoczenia tu przykładów jego wyników i mam nadzieję, że całość tych wyników ukaże się bez zbytejnego opóźnienia.

Dziękując moim kolegom nie chciałbym sugerować, że zawsze zgadzali się oni z przedstawionymi tu poglądami albo że są oni w jakimkolwiek stopniu odpowiedzialni za błędy, jakie mogą się jeszcze w pracy znajdować. Za to można winić wyłącznie mnie.

Wykresy stanu przygotował p. R. T. WOOD.

Literatura cytowana w tekście

1. P. W. BRIDGMAN, Rev. of Mod. Phys., **22** (1950), 56.
2. J. MEIXNER, Natuurk., **26** (1960), 259; por. także artykuł J. MEIXNERA i H. G. REIKA w «Encyclopedia of Physics», vol. III/2, 413.
3. J. MEIXNER, *Consequences of an Inequality in Nonequilibrium Thermodynamics*, Brown University ARPA Report E25, 1965.
5. S. R. DE GROOT and P. MAZUR, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland 1962.
- 4 J. KESTIN, *A Course in Thermodynamics*, Blaisdell 1966.
6. M. T. HUBER, *Czasopismo techniczne*, Lwów 1904.
7. R. MISES, Gött. Nachr. (Math-Phys. Kl.), 1913, 582.
8. B. P. HAIGH, Rep. Brit. Association, 1919, 486.
9. G. A. KLUITENBERG, Physica, **28** (1962), 217.

Р е з ю м е

О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПОВ ТЕРМОДИНАМИКИ К ОПИСАНИЮ
ДЕФОРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В работе доказывается, что анализ деформированных материалов основывается, прежде всего, на соответствующем подборе термодинамических параметров, определяющих состояние материала. Например, в теории пластичности следует разделить деформацию на две части, одна из которых является параметром состояния, другая же — нет; в теории вязко-упругости подобным образом следует разложить тензор напряжения; в теории ползучести и релаксации необходимо ввести один или даже больше добавочных параметров состояния. Значение этих фактов состоит в том, что термодинамические потенциалы могут быть только функциями параметров состояния.

В работе дается общая схема метода описания, дающая возможность расширить классическую теорию простых систем на непрерывные системы. Этот метод основывается на принятии принципа локального состояния, успешно применяемого в теории упругости, в механике жидкости и в теории теплопроводности. Данный принцип является одним из основных положений термодинамики необратимых процессов, представленных напр. в монографии С.Р. де Гроута и П. Мазура [4].

Особое внимание обращается на пластические деформации и явление упрочнения. Прежде всего доказывается, что соотношение между напряжением и скоростью пластической деформации имеет, в общем случае, характер зависимости, выходящей за пределы класса уравнений Онзагера, правильность которых ограничивается малыми отклонениями от состояния равновесия. Далее, предлагается вполне трехмерная теория упругопластических областей. В свете некоторых результатов Райса, вероятно, что такая теория может привести к физически реалистическому описанию эффекта Баушингера и эффекта изменений поверхностей течения под влиянием циклической нагрузки.

S u m m a r y

ON THE APPLICATION OF THE PRINCIPLES OF THERMODYNAMICS TO
DESCRIPTION OF DEFORMED MATERIALS

The paper shows that the analysis of deformed materials is to be based above all on proper selection of independent thermodynamic parameters determining the state of material. For instance, in the theory of plasticity the deformation should be decomposed into two parts, one of them being a parameter of the state, the other not. Similar procedure applies to the deformation tensor in the theory of creep and relaxation it is indispensable to introduce one or even more additional variables of the state. The meaning of these facts is that thermodynamic potentials can be only functions of state parameters.

In the paper a general method of description has been outlined, which allows to generalize the classic theory of simple systems to continuous systems. The method is based on the acceptance of the principle of the local state successfully applied in the theory of elasticity in fluid mechanics or in the theory of heat transfer. This method is one of the fundamental principles of irreversible processes of thermodynamics shown, for instance, in S. R. de Groot's and P. Mazur's mono-graph 4.

Special attention has been devoted to the plastic deformations and reinforcement phenomenon. It has been shown above all that the relation between the stress and the rate of plastic deformation is generally of a character of a relation transcending the class of Onsager's equations, the correctness of which is limited to cases concerning small deflections from the state of equilibrium. Further, a fully three dimensional theory of elastic-plastic domains is proposed. In the light of some results obtained by J. R. Rice, it seems possible that such a theory is likely to lead to a physically realistic description of the Bauschinger effect and that of the variations in the yield surface under loading cycles.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 lipca 1966 r.

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

Wstęp

W wykładach wytrzymałości materiałów rozpatruje się kilka elementarnych przykładów obrazujących występowanie naprężeń, powstających wskutek działania temperatury. Do takich przypadków należy liniowe wydłużenie się lub skrócenie pręta spowodowane zmianą temperatury; o ile pręt taki może wydłużać się swobodnie, naprężenia nie powstaną, gdy natomiast jest on pozbawiony możliwości swobodnego wydłużenia się (lub skrócenia) powstaną na ogół znaczne naprężenia ściskające (rozciągające). Zagadnienia te posiadają duże znaczenie praktyczne i muszą być uwzględnione przy projektowaniu sieci przewodów, zwłaszcza przewodów do przesyłania pary lub wody gorącej, ale również przy projektowaniu rurociągów naftowych. Podobnie w przypadku torów kolejowych i tramwajowych, gdzie mogą powstać siły ściskające, powodujące wyboczenie. Następnym zagadnieniem, w którym uwzględnia się wpływ temperatury, jest zagadnienie obliczania cięgien. Tutaj obniżenie temperatury powoduje zwiększenie sił w cięgnach, związane ze zmniejszeniem zwisu. Kolejnym zagadnieniem są naprężenia w bandażach nasadzanych w podwyższonej temperaturze na koła wagonowe i następnie pracujących wspólnie. Podobne zagadnienia spotykane są w technice często. Naprężenia termiczne powstaną w elementach złożonych z materiałów o różnych współczynnikach liniowej rozszerzalności cieplnej i pracujących w jednej konstrukcji. Już z tych kilku wymienionych powyżej przykładów widać, że w zależności od rodzaju konstrukcji przyrost temperatury może spowodować wzrost naprężeń, ich zmniejszenie lub nie wywoła naprężeń. Dlatego wydaje się celowe rozpatrzenie bardziej skomplikowanych przypadków dwu- i trójwymiarowych z punktu widzenia własności naprężeń, jakie wywołuje zmiana temperatury. Omówione tu przypadki będą dotyczyły zagadnień liniowej teorii sprężystości. Zmiany temperatury są tego rodzaju, że nie powodują istotnych zmian stałych materiałowych ani innych efektów jak na przykład pełzania czy relaksacji.

2. Twierdzenie Muscheliszwilego

W przypadku dwuwymiarowego stanu odkształcenia we współrzędnych kartezjańskich otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych termosprężystości:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$(2.2) \quad \sigma_x = -\beta T + \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = -\beta T + \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

gdzie jak zwykle μ , λ są stałymi Lamégo, θ oznacza dylatację, β jest pewną stałą zależną od materiału ośrodka, u i v są składowymi wektora przemieszczeń. Przy ustalonym strumieniu ciepła temperatura będzie funkcją harmoniczną zmiennych x i y :

$$\nabla^2 T = 0.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że

$$(2.3) \quad \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial y} = T, \quad \frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{\partial v^*}{\partial x}$$

oraz że

$$(2.4) \quad u = u' + \frac{\beta u^*}{2(\lambda + \mu)}, \quad v = v' + \frac{\beta v^*}{2(\lambda + \mu)},$$

gdzie u' i v' są nowymi funkcjami, a następnie podstawimy do równań (2.1) i (2.2), to otrzymamy równania identyczne jak w dwuwymiarowym przypadku teorii sprężystości, gdy ośrodek jest ogrzany równomiernie (np. $T = 0$), z tą różnicą, że wystąpią tu wielkości u' , v' zamiast przemieszczeń u i v . Jeżeli rozpatrywany obszar jest jednorodny, a warunki brzegowe zakładają brak naprężeń na brzegu, to naprężenia normalne i styczne znikają w całym obszarze, a naprężenia w kierunku prostopadłym wyrażają się wzorem

$$(2.5) \quad \sigma_z = -\frac{\beta\mu}{\lambda + \mu} T(x, y),$$

natomiast wzory na składowe przemieszczenia przyjmą postać

$$(2.6) \quad u = \frac{\beta u^*}{2(\lambda + \mu)}, \quad v = \frac{\beta v^*}{2(\lambda + \mu)}.$$

Powyższe twierdzenie jest znane jako twierdzenie Muscheliszwilego [1]. Sformułowanie powyższe należy uzupełnić dwiema uwagami, mianowicie: 1) w przypadku obszaru wielospójnego zmiany temperatury na ogół spowodują powstanie naprężeń σ_x i σ_y , 2) twierdzenie to odnosi się tylko do dwuwymiarowego stanu odkształcenia, w przypadku dwuwymiarowego stanu naprężenia przyjęcie dwuwymiarowego równania przewodnictwa cieplnego prowadziłoby do zbyt dużych błędów.

3. Półprzestrzeń i warstwa sprężysta ogrzana na części powierzchni ograniczającej

Zagadnienie naprężeń cieplnych w warstwie i półprzestrzeni rozpatrywało wielu autorów. Warstwę sprężystą omawia ŁURIE [2] dochodząc do wniosku, że dla ustalonego przepływu ciepła nie wystąpią naprężenia normalne do powierzchni ograniczającej ani naprężenia styczne w płaszczyznach równoległych do warstwy środkowej. Pozostałe składowe naprężenia wyrażają się jako pochodne jednej funkcji naprężeń.

W. NOWACKI [3] oblicza wielkości naprężeń występujących w półprzestrzeni, gdy na pewnym kole powierzchni ograniczającej półprzestrzeń znany jest gradient temperatury lub temperatura, a na zewnątrz tego koła powierzchnia jest idealnie izolowana lub utrzymywana w temperaturze zerowej. W pracy tej udowodniono, że we wszystkich tych trzech przypadkach znikają składowe naprężenia σ_z i τ_{rz} (zagadnienie jest osiowo-symetryczne). Sprawę tę również poruszyli w swojej pracy STERNBERG i MCDOWELL [4].

Weźmy pod uwagę zagadnienie ogólniejsze, gdy warstwa sprężysta jest ogrzana na dowolnej części powierzchni brzegu. Dowód przeprowadzimy posługując się metodą transformacji całkowych. Jak wiadomo, zagadnienie opisują przemieszczeniowe równania teorii naprężeń cieplnych i równanie przewodnictwa cieplnego:

$$(3.1) \quad (1+2\nu)\nabla^2\mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} = 2(1+\nu)\alpha \text{ grad } T,$$

$$(3.2) \quad \nabla^2 T = 0,$$

gdzie ν oznacza liczbę Poissona, α jest współczynnikiem rozszerzalności liniowej rozpatrywanego ciała. Do powyższych równań zastosujemy dwustronną transformację całkową Fouriera

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \bar{f}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy, \\ f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, \eta) \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

W ten sposób układ równań różniczkowych cząstkowych (3.1) i (3.2) został sprowadzony do układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$(3.4) \quad \begin{aligned} [(1-2\nu)(D^2 - \eta^2) - 2(1-\nu)\xi^2]\bar{u} - \xi\eta\bar{v} - i\xi D\bar{w} &= -2(1+\nu)\alpha i\xi\bar{T}, \\ -\xi\eta\bar{u} + [(1-2\nu)(D^2 - \xi^2) - 2(1-\nu)\eta^2]\bar{v} - i\eta D\bar{w} &= -2(1+\nu)\alpha i\eta\bar{T}, \\ -i\xi D\bar{u} - i\eta D\bar{v} + [2(1-\nu)D^2 - (1-2\nu)(\xi^2 + \eta^2)]\bar{w} &= 2(1+\nu)\alpha D\bar{T}, \\ (D^2 - \xi^2 - \eta^2)\bar{T} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $D \equiv d/dz$.

Jeżeli założymy, że składowe wektora przemieszczeń \mathbf{u} i temperatura znikają w nieskończoności, to rozwiązanie powyższego układu równań przyjmie postać:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= (A_1 + z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}B_1)\exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \\ \bar{v} &= (A_3 + z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}B_3)\exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \\ \bar{w} &= (A_2 + z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}B_2)\exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \\ \bar{T} &= A\exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}), \end{aligned}$$

przy czym zachodzą następujące związki:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \xi B_1 + \eta B_3 &= i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}B_2, \quad \eta B_1 = \xi B_3 \\ \sqrt{\xi^2 + \eta^2}[2(1-\nu)B_2 - A_2] &= (1+\nu)\alpha A. \end{aligned}$$

Z warunku, że na płaszczyźnie $z = 0$ znikają naprężenia styczne, otrzymujemy

$$(3.7) \quad \eta A_1 = \xi A_3, \quad i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}(B_2 - A_2) = \eta A_3 + \xi A_1.$$

Szóstą stałą całkowania określimy z warunku brzegowego dla równania przewodnictwa cieplnego, a siódmą z warunku statyki.

Przypuśćmy, że parametr A został znaleziony oraz że brzeg jest wolny od naprężeń, to znaczy, że dla $z = 0$, $\sigma_z = 0$.

Ponieważ

$$(3.8) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{2\mu}{1-2\nu} [(1-\nu)D\bar{w} - i\nu(\xi\bar{u} + \eta\bar{v}) - (1+\nu)\alpha\bar{T}] = \\ = -\frac{\mu}{1-\nu} [\sqrt{\xi^2 + \eta^2} A_2 + (1+\nu)\alpha A] (1 + \sqrt{\xi^2 + \eta^2} z) \exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}),$$

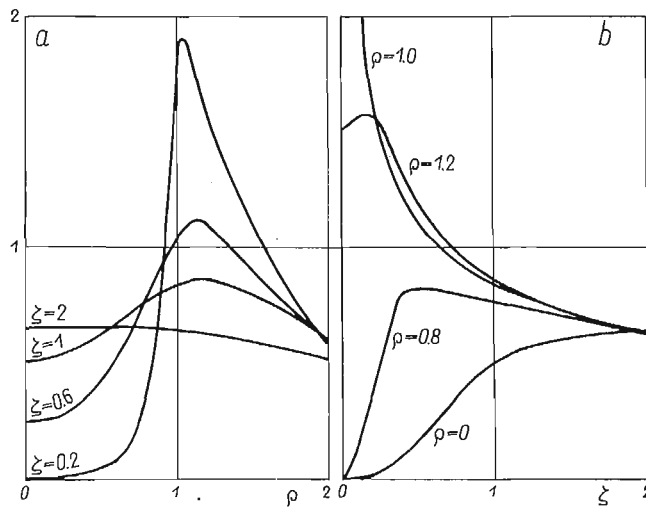
to z warunku znikania naprężeń normalnych na brzegu $z = 0$ wyniknie następujący związek:

$$(3.9) \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} A_2 + (1+\nu)\alpha A = 0.$$

O ile spełniony jest związek (3.9), to naprężenia normalne σ_z są równe zeru w całym obszarze półprzestrzeni. Wynika to z postaci wzoru na naprężenia. W podobny sposób znikną w całym obszarze wszystkie składowe naprężenia stycznych. Wynik ten jest również prawdziwy dla warstwy sprężystej, lecz obliczenia potrzebne do udowodnienia go są znacznie żmudniejsze z dwóch powodów: po pierwsze trzeba uwzględnić warunki brzegowe na dolnej powierzchni warstwy (mogą one być różnego rodzaju), po drugie w związku z wpływem dolnej powierzchni będziemy mieli dwukrotnie więcej parametrów do wyznaczenia z warunków brzegowych.

4. Zagadnienie szczeliny

Przypuśćmy, że w płaszczyźnie symetrii nieograniczonego obszaru sprężystego znajduje się szczelina rozwierana ciepłem przyłożonym do płaskich początkowo powierzchni



Rys. 1

szczeliny. W przypadku szczeliny osiowo-symetrycznej [5] naprężenia normalne σ_z są proporcjonalne do pewnej funkcji

$$(4.1) \quad f(\varrho, \zeta) = \frac{1}{R} \cos \frac{1}{2} \varphi + \frac{\zeta}{R^3} \left(\zeta \cos \frac{3}{2} \varphi + \sin \frac{3}{2} \varphi \right),$$

gdzie

$$R^4 = (\varrho^2 + \zeta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\zeta}{\varrho^2 + \zeta^2 - 1},$$

$$\varrho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad a \text{ — promień szczeliny.}$$

Interesującym faktem, udowodnionym tamże [5], jest to, że charakter naprężeń nie zależy od rozkładu strumienia ciepła (lub temperatury) przyłożonego na powierzchniach szczeliny. Od rozkładu strumienia ciepła lub temperatury przyłożonej do powierzchni szczeliny zależy tylko współczynnik, przez który pomnożona jest funkcja (4.1). Wynik powyższy łatwo udowodnimy, gdy weźmiemy pod uwagę, że w przypadku osiowej symetrii i współrzędnych bezwymiarowych otrzymujemy dla $z = 0$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w &= \int_0^\infty \psi(\eta) J_0(\varrho\eta) d\eta, \\ T &= \frac{1}{(1+\nu)\alpha a} \int_0^\infty \eta\varphi(\eta) J_0(\varrho\eta) d\eta, \\ \sigma_z &= -\frac{\mu}{(1-\nu)a} \int_0^\infty \eta[\psi(\eta) + \varphi(\eta)] J_0(\varrho\eta) d\eta, \end{aligned}$$

gdzie $\psi(\eta)$ i $\varphi(\eta)$ są parametrami podlegającymi wyznaczeniu z warunków brzegowych.

Parametr $\varphi(\eta)$ wyznaczmy z warunków termicznych

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} Q, & 0 \leq r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Natomiast parametr $\psi(\eta)$ wyznaczmy z warunków mechanicznych:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0, & 0 \leq r < a, \\ w &= 0, & r > a, \end{aligned}$$

czyli z następującego układu dualnych równań całkowych

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \eta\psi(\eta) J_0(\varrho\eta) d\eta &= f(\varrho), & 0 \leq \varrho < 1, \\ \int_0^\infty \psi(\eta) J_0(\varrho\eta) d\eta &= 0, & \varrho > 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$f(\varrho) = (1+\nu)\alpha a^2 \int_0^\infty \int_0^1 tQ(t) J_0(t\eta) dt J_0(\varrho\eta) d\eta.$$

Rozwiązaniem układu tych równań całkowych będzie:

$$(4.4) \quad \psi(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin(\eta s) ds \int_0^s \frac{x f(x) dx}{\sqrt{s^2 - x^2}},$$

skąd po przekształceniach [5] otrzymamy

$$(4.5) \quad \psi(\eta) = (1+\nu)\alpha a^2 \left(\frac{1-\cos\eta}{\eta} \int_0^1 tQ(t)dt - \int_0^1 \int_{\rho}^1 tQ(t)dtJ_0(\varrho\eta)d\varrho \right).$$

W przypadku gdy rozkład strumienia ciepła można przedstawić w postaci szeregu Fouriera-Bessela

$$(4.6) \quad Q(\varrho) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m J_0(j_m \varrho),$$

gdzie j_1, j_2, \dots są zerami funkcji Bessela $J_0(z)$, suma parametrów $\psi(\eta) + \varphi(\eta)$ przyjmie postać

$$(4.7) \quad \psi(\eta) + \varphi(\eta) = -(1+\nu)\alpha a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_m J_1(j_m)}{j_m} \frac{\cos\eta}{\eta}.$$

Podstawiając (4.7) do wzoru na naprężenia

$$(4.8) \quad \sigma_z = -\frac{\mu}{(1-\nu)a} \int_0^{\infty} [\psi(\eta) + \varphi(\eta)] \eta (1+\eta\zeta) e^{-\zeta\eta} J_0(\varrho\eta) d\eta,$$

otrzymamy poszukiwany wynik

$$(4.9) \quad \sigma_z = \frac{\mu(1+\nu)\alpha a}{(1-\nu)} C f(\varrho, \zeta),$$

gdzie

$$C = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_m J_1(j_m)}{j_m}$$

jest liczbą niezależną od ϱ i ζ , a funkcję $f(\varrho, \zeta)$ określa (4.1). Jeżeli $Q(\varrho) = \text{const}$, to wynik powyższy otrzymamy bezpośrednio, a stała C wynosi $-1/2 Q_0$.

W identyczny sposób zachowują się naprężenia styczne τ_{rz} . Można to udowodnić o wiele prościej niż w pracy E. DEUTSCHA [6], mianowicie wystarczy zauważyć, że τ_{rz} (w tym zagadnieniu, to znaczy po uwzględnieniu, że dla $z=0$ τ_{rz} znika) również zależy od sumy $\psi(\eta) + \varphi(\eta)$ i może być przedstawione wzorem

$$(4.10) \quad \tau_{rz} = -\frac{\mu}{1-\nu} \frac{\zeta}{a} \int_0^{\infty} [\psi(\eta) + \varphi(\eta)] \eta^2 e^{-\eta\zeta} J_1(\eta\varrho) d\eta,$$

skąd po podstawieniu (4.6) otrzymujemy

$$(4.11) \quad \tau_{rz} = \frac{(1+\nu)\alpha\mu}{1-\nu} C \zeta a \int_0^{\infty} \eta \cos\eta e^{-\eta\zeta} J_1(\eta\varrho) d\eta.$$

Wydaje się, że oba powyższe wnioski dotyczące własności naprężeń normalnych i stycznych mogą być uogólnione na przypadek szczeliny w warstwie sprężystej oraz na szczeliny o innym kształcie od kołowego i przypadku osiowo-symetrycznego.

5. Zagadnienia kontaktowe

Rozpatrzmy zagadnienie kontaktu tego rodzaju, że stempel Ω styka się bez nacisku z półprzestrznią (lub warstwą sprężystą) w temperaturze początkowej, natomiast gdy stempel zacznie ogrzewać półprzestrzeń, powstanie pewien nacisk wywołany rozszerzaniem się półprzestrzeni na skutek istniejącego pola temperatury i z tego powodu, że sztywny stempel jest pozbawiony możliwości przesuwu. Rozważamy więc następujące warunki brzegowe dla $z = 0$:

termiczne

$$(5.1) \quad T(x, y) = \begin{cases} v(x, y), & x, y \in \Omega, \\ 0, & x, y \in R - \Omega; \end{cases}$$

mechaniczne

$$(5.2) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, & x, y \in R, \\ w = 0, & x, y \in \Omega, \\ \sigma_z = 0, & x, y \in R - \Omega, \end{cases}$$

gdzie R oznacza całą płaszczyznę $z = 0$.

Wykorzystując wzory (3.5) i (3.8) stwierdzimy, że warunek (5.2) jest równoważny następującemu układowi dualnych równań całkowych

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_2 \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta &= 0, \quad x, y \in \Omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2} A_2 + (1 + \nu)\alpha A] \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta &= 0, \quad x, y \in R - \Omega. \end{aligned}$$

Przyjmijmy na chwilę, że normalna składowa naprężeń pod stemplem dla $x, y \in \Omega, z = 0$ jest wielkością znaną i równą $p(x, y)$. Wtedy możemy odwrócić transformację i otrzymamy

$$(5.4) \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} A_2 + (1 + \nu)\alpha A = \frac{1 - \nu}{\mu} \int_{\Omega} p(x, y) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy.$$

Podstawiając do wzoru (5.4)

$$A = \iint_{\Omega} T(x, y) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy,$$

otrzymamy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} A_2 &= -(1 + \nu)\alpha \iint_{\Omega} T \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy + \\ &+ \frac{1 - \nu}{\mu} \iint_{\Omega} p(x, y) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy. \end{aligned}$$

Dla $x, y \in \Omega$ dostaniemy z warunku brzegowego

$$(5.6) \quad w = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \int_{\Omega} \left[\frac{1 - \nu}{\mu} p(r, s) - (1 + \nu)\alpha T(r, s) \right] \exp[i(r\xi + \eta s)] dr ds.$$

Dla $x, y \in R-\Omega$ wyrażenie to jest również równe zeru, ponieważ w tym obszarze zarówno $p(x, y)$ jak i $T(x, y)$ znikają z założenia. Stąd

$$(5.7) \quad p(x, y) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \mu \alpha T(x, y).$$

A więc możemy sformułować następujące twierdzenie [7]: *jeżeli na części płaszczyzny $x, y \in \Omega, z = 0$ ograniczającej półprzestrzeń sprężystą jest przyłożona temperatura $T(x, y)$ oraz jeżeli normalne przemieszczenie obszaru Ω jest równe zeru, to*

- a) *naprężenia kontaktowe są proporcjonalne do temperatury i określone wzorem (5.7),*
- b) *przemieszczenia w znikają w całej płaszczyźnie.*

Rozpatrując zagadnienie kontaktowe ogrzanego stempla działającego na półprzestrzeń (lub warstwę) sprężystą możemy wyróżnić dwa przypadki. W przypadku pierwszym stempla utwierdzonego jest on pozbawiony możliwości przesuwu pomimo ogrzania. Jeżeli jedynym źródłem ciepła jest stempel, to zagadnieniu brzegowemu odpowiadają następujące warunki mechaniczne

$$(5.8) \quad \begin{aligned} w &= w(x, y), & x, y \in \Omega, \\ \sigma_z &= 0, & x, y \in R-\Omega \end{aligned}$$

oraz termiczne (5.1).

Zagadnienie to można rozbić na dwa zadania pomocnicze, a następnie wykorzystać zasadę superpozycji [8]. Pierwsze zadanie pomocnicze będzie klasycznym zagadnieniem teorii sprężystości przy stałej temperaturze ($T = 0$) z warunkami brzegowymi (5.8). Drugie zadanie będzie zagadnieniem termosprężystości z warunkami brzegowymi (5.1) i (5.2). Rozwiązanie tego zagadnienia podaje związek (5.7). Możemy więc wyciągnąć następujące wnioski:

1. Składowa normalna naprężenia na powierzchni ograniczającej $z = 0$ równa się wartości znanej z rozwiązania zagadnienia kontaktowego teorii sprężystości oraz funkcji $p(x, y)$ określonej wzorem (5.7).
2. Składowa w wektora przemieszczeń jest identyczna jak w przypadku klasycznym (mimo działania temperatury).

Przypadek drugi dotyczy stempla swobodnego. Przypuśćmy, że stempel działający na półprzestrzeń z pewną siłą i będący źródłem ciepła jest przyklejony do płaszczyzny ograniczającej w ten sposób, że nie może się od niej oderwać (dla uproszczenia zakładamy, że $\tau_{xy} \equiv 0$). Rozwiązanie obecnego zagadnienia możemy sprowadzić do rozwiązania poprzedniego zagadnienia stempla utwierdzonego, jednak następnie należy zredukować dodatkowe naprężenia kontaktowe $p(x, y)$. Musimy więc dodać rozwiązanie zagadnienia klasycznego teorii sprężystości takie, aby zredukowało wypadkową obciążenia $p(x, y)$ i ewentualny moment powstający od tego obciążenia. Rozwiązujemy zatem zagadnienie tak, jak dla stempla swobodnego oraz dodajemy rozwiązanie zagadnienia brzegowego z następującymi warunkami:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} w &= cx + dy + f, & x, y \in \Omega, \\ \sigma_z &= 0, & x, y \in R-\Omega. \end{aligned}$$

Współczynniki c, d, f określamy z warunków statyki:

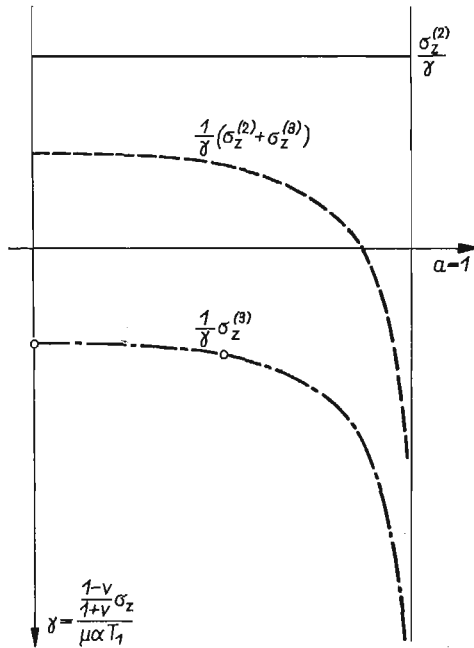
$$(5.10) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} p(x, y) d\Omega &= - \int_{\Omega} q(x, y) d\Omega, \\ \int_{\Omega} xp(x, y) d\Omega &= - \int_{\Omega} xq(x, y) d\Omega, \\ \int_{\Omega} yp(x, y) d\Omega &= - \int_{\Omega} yq(x, y) d\Omega. \end{aligned}$$

Możemy zatem wyciągnąć następujące wnioski:

1. Zagadnienie stempla swobodnego można sprowadzić do zagadnienia stempla utwierdzonego i dodać następnie rozwiązanie zagadnienia brzegowego klasycznej teorii sprężystości z warunkami (5.9).

2. Źródło ciepła, którym jest stempel, może spowodować powstanie naprężeń rozciągających, starających się oderwać stempel od powierzchni kontaktu.

3. Istnieje pewien stosunek siły P do temperatury T , dla którego zaczną występować naprężenia rozciągające.



Rys. 2

Jako przykład rozpatrzmy stempel o przekroju kołowym i średnicy $2a$, a działający z siłą wypadkową P . Przypuśćmy, że płaska podstawa stempla jest ogrzana do temperatury T_1 . Zadanie jest osiowo-symetryczne. Rozwiązanie zagadnienia teorii sprężystości ma postać następującą:

$$\sigma_z^{(1)} = - \frac{1}{2} \frac{P}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r < a.$$

W przypadku stempla utwierdzonego otrzymamy

$$\sigma_z^{(2)} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \mu \alpha T_1,$$

stąd

$$P_1 = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \mu \alpha \pi a^2 T_1.$$

Jeżeli przyłożymy stempel działający z siłą P_1 , to otrzymamy następujące naprężenia:

$$\sigma_z^{(3)} = \frac{a}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \mu \alpha T_1 \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Składając naprężenia $\sigma_z^{(2)}$ i $\sigma_z^{(3)}$ otrzymamy naprężenia normalne wywołane źródłem ciepła

$$\sigma_z^{(T)} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \mu \alpha T_1 \left(\frac{a}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} - 1 \right).$$

Naprężenia rozciągające powstaną na obwodzie koła $r = a$ wtedy, gdy

$$\frac{P}{T_1} < \frac{1+\nu}{1-\nu} \mu \alpha \pi a^2.$$

Literatura cytowana w tekście

1. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1949, 157-161.
2. А. И. ЛУРЬЕ, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва 1955, 193-196.
3. W. NOWACKI, *Two steady state thermoelastic problems*, Arch. Mech. Stos., 5, 9 (1957), 579-592.
4. E. STERNBERG i McDOWELL, *Quart. App. Math.*, 14 (1957), 381.
5. Z. OLESIAK i I. N. SNEDDON, *The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, Arch. Rat. Mech. Anal., 3, 4 (1960), 238-254.
6. E. DEUTSCH, *The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny-shaped crack*, Intern. J. Engng. Sci., 5, 3 (1965), 485-490.
7. Z. OLESIAK i J. ŚLIŻEWICZ, *Stresses and strains in a semi-space heated on a constrained part of the bounding plane*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 13 (1965), 8.
8. Z. OLESIAK, *Some remarks on the contact problem of thermoelasticity for a semi-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 13 (1965), 8.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Обсуждаются некоторые двух- и трехмерные задачи термоупругости с точки зрения свойств поля напряжений, вызванного изменением температуры. Эти изменения такого рода, что не вызывают изменения значений постоянных материала, ни другого рода эффектов, как напр. ползучести или релаксации. Рассматриваются задачи о полупространстве и упругом слое, подверженном нагреву на части поверхности, задача о трещине и контактная задача.

S u m m a r y

ON SOME PROPERTIES OF THERMAL STRESSES

Discussed are properties of thermal stress fields in some two- and three-dimensional thermoelastic problems. It is assumed that the variation of the temperature does not cause any changes in the material constants, and any other effects as creep and relaxation. The problems of half-space or an elastic layer heated on a part of their surface, the crack and contact problems are considered.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1966 r.

O WYBOCZENIU BIEGUNOWYCH SIATEK PRĘTOWYCH

Cz. WOŹNIAK (WARSZAWA), S. ZIELIŃSKI (ŁÓDŹ)

W pracy wyprowadzono wyrażenia dla sił krytycznych w pierścieniowych, radialnie obciążonych gęstych biegunowych siatkach prętowych. Rozważono tylko przypadek wybozczenia kołowo-symetrycznego. Posłużono się kontynualnym modelem siatki korzystając z równań płaskiego ośrodka włóknistego o biegunowej siatce. Zagadnienie rozpatrywano w ramach teorii liniowej.

1. Równania podstawowe

Gęste i regularne siatki prętowe (ruszty) stanowią jeden z przypadków szczególnych tzw. płyt o strukturze siatkowej [1]. Podstawowe równania kontynualnej teorii drugiego rzędu takich płyt składają się z poniższych równań równowagi⁽¹⁾ (siły masowe pomijamy)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} p^\alpha_{;\alpha} + w_{;\alpha\beta} p^{\alpha\beta} &= 0, \\ m^\alpha_{;\beta;\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} p^\alpha - w_{;\alpha\beta} m^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

oraz z równań fizycznych

$$(1.2) \quad p^\alpha = A^{\alpha\mu} \gamma_\mu, \quad m^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\mu\nu} \chi_{\mu\nu}$$

i geometrycznych

$$(1.3) \quad \gamma_\mu = w_{;\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} v_\nu, \quad \chi_{\mu\nu} = v_{\nu;\mu}.$$

W powyższych równaniach p^α i $m^{\alpha\beta}$ są kolejno wektorem gęstości sił poprzecznych i tensorem gęstości momentów w płycie, $p^{\alpha\beta}$ jest tensorem napięć błonowych działających w płaszczyźnie płyty oraz m^α jest wektorem napięć momentowych również działających w płaszczyźnie płyty siatkowej. Zakładamy, że siły i momenty tarczowe $p^{\alpha\beta}$ i m^α zostały uprzednio wyznaczone (por. np. [2, 3]). Stan przemieszczenia jest określony ugięciem płyty w oraz niezależnymi od ugięcia kątami obrotu v_ν . Wszystkie wielkości występujące w (1.1)–(1.3) zależą od zmiennych x^1, x^2 , którymi parametryzowana jest płaszczyzna środkowa płyty.

Jeżeli rozpatrywaną płytą o strukturze siatkowej jest gęsta siatka prętowa (ruszt) o sztywnych węzłach, to tensory sztywności sprężystej $A^{\alpha\mu}$ i $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ występujące w (1.2) mają postać [1]:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A^{\alpha\mu} &= \sum_{(d)} t_{(d)}^\alpha t_{(d)}^\mu R_{(d)}, \\ C^{\alpha\beta\mu\nu} &= \sum_{(d)} t_{(d)}^\alpha t_{(d)}^\mu (t_{(d)}^\beta t_{(d)}^\nu S_{(d)} + \tilde{t}_{(d)}^\beta \tilde{t}_{(d)}^\nu \tilde{S}_{(d)}). \end{aligned}$$

(¹) Wszystkie wskaźniki przebiegają ciąg 1, 2; średnik oznacza pochodną kowariantną, przecinek — pochodną cząstkową.

Wektory $t_{(\Delta)}^{\alpha}$ i $\tilde{t}_{(\Delta)}^z$ są wektorami jednostkowymi; wektor $t_{(\Delta)}^z$ jest styczny, a wektor $\tilde{t}_{(\Delta)}^z$ normalny do rodzin (Δ) , tworzących siatkę (gdy siatka składa się z dwóch rodzin krzywych, wtedy $(\Delta) = (I), (II)$). Ponadto

$$(1.5) \quad R_{(\Delta)} \equiv \frac{12(EJ)_{\Delta}}{l_{\Delta}^2 \tilde{l}_{\Delta}}, \quad S_{(\Delta)} \equiv \frac{(GC)_{\Delta}}{\tilde{l}_{(\Delta)}}, \quad \tilde{S}_{(\Delta)} \equiv \frac{(EJ)_{\Delta}}{\tilde{l}_{(\Delta)}},$$

gdzie $(EJ)_{\Delta}$ i $(GC)_{\Delta}$ są kolejno sztywnością giętną i skrętną prętów (Δ) siatki, \tilde{l}_{Δ} jest odległością sąsiednich prętów (Δ) siatki oraz l_{Δ} jest odległością sąsiednich węzłów pręta (Δ) . Podane powyżej wzory dotyczą tylko przypadku, w którym główne centralne osie bezwładności wszystkich przekrojów prętów leżą na jednej płaszczyźnie (płaszczyzny obojętne prętów leżą na płaszczyźnie ośrodka).

2. Zagadnienie kołowo-symetryczne

Dla siatki biegunowej oraz kołowo-symetrycznego stanu odkształcenia równania (1.1)–(1.3) we współrzędnych biegunowych (r, φ) po prostych przekształceniach można doprowadzić do postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (rp^r + rp^{rr}w, r), r &= 0, \\ (r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r} - rp^r &= 0; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p^r &= A^{rr}(w, r + v), \\ m^{r\varphi} &= C^{r\varphi r\varphi}rv, r, \\ m^{\varphi r} &= -C^{\varphi r\varphi r}v, \end{aligned}$$

w której $v \equiv v_{\varphi}/r$ jest obrotem elementu siatki w płaszczyźnie prostopadłej do linii parametrycznej $r = \text{const}$. Pomnożmy równanie (2.2)₁ przez r i dodajmy stronami do równania (2.1)₂. Wyznamy następnie z (2.1)₂ wielkość rp^r . Otrzymamy wtedy kolejno

$$(2.3) \quad \begin{aligned} rw, r &= \frac{1}{A^{rr}}[(r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r}] - rv, \\ rp^r &= (r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r}. \end{aligned}$$

Scałkujemy równanie (2.1)₁. Oznaczając przez $c = \text{const}$ stałą całkowania napiszemy

$$(2.4) \quad rp^r + rp^{rr}w, r = c.$$

Podstawiając prawe strony (2.3) do powyższego równania uzyskamy

$$(2.5) \quad [(r^2m^{r\varphi}), r + rm^{\varphi r}] \left(1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}\right) - p^{rr}v = c.$$

Wyrażając w (2.5) momenty $m^{r\varphi}$ i $m^{\varphi r}$ zgodnie z (2.2)₂ i (2.2)₃ po prostych przekształceniach dochodzimy do równania

$$(2.6) \quad (C^{r\varphi r\varphi}r^3v, r), r - rC^{\varphi r\varphi r}v - \frac{p^{rr}}{1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}} = \frac{c}{1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}}.$$

Podstawiając następnie do (2.4) prawą stronę wzoru (2.2)₁ napiszemy

$$(2.7) \quad \left(1 + \frac{p^{rr}}{A^{rr}}\right) w, r + v = \frac{1}{r} \frac{c}{A^{rr}}.$$

Równania (2.6) i (2.7) są podstawowymi równaniami kołowo-symetrycznie odkształconej płyty o ortotropowej strukturze siatkowej.

Jeżeli równania (2.6) i (2.7) mają opisywać kołowo-symetrycznie odkształconą biegunową siatką prętową, wtedy wielkości $C^{r\varphi r\varphi}$, $C^{\varphi r r\varphi}$, A^{rr} powinny być określone wzorami (1.4). Otrzymamy wtedy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} C^{r\varphi r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \tilde{S}_{(r)} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_r}{\tilde{l}_r} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_r}{l_\varphi}, \\ C^{\varphi r r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \tilde{S}_{(\varphi)} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_\varphi}{\tilde{l}_\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{(EJ)_\varphi}{l_r}, \\ A^{rr} &= \hat{R}_{(v)} = \frac{12(EJ)_r}{l_r^2 \tilde{l}_r}, \end{aligned}$$

przy czym $(EJ)_r$ i $(EJ)_\varphi$ jest kolejno sztywnością giętą prętów promieniowych i obwodowych siatki, $\tilde{l}_r = l_\varphi$ jest odległością sąsiednich prętów promieniowych (lub odległością sąsiednich węzłów w prętach obwodowych) oraz $\tilde{l}_\varphi = l_r$ jest odległością sąsiednich prętów obwodowych siatki (lub odległością sąsiednich węzłów w prętach promieniowych).

Równanie (2.6) dla przypadku biegunowej siatki prętowej przyjmie teraz postać

$$(r\tilde{S}_{(r)}v_{,r})_{,r} - \frac{1}{r} \left(\tilde{S}_{(\varphi)} + r^2 \frac{p^{rr}}{1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}^r}} \right) v = \frac{c}{1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}^r}}$$

lub po przekształceniach

$$(2.9) \quad v_{,rr} + \frac{(r\tilde{S}_{(\varphi)})_{,r}}{r\tilde{S}_{(r)}} v_{,r} - \frac{1}{r^2 \tilde{S}_{(r)}} \left(\tilde{S}_{(\varphi)} + r^2 \frac{p^{rr}}{1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}_{(r)}^r}} \right) v = \frac{1}{r\tilde{S}_{(r)}} \frac{c}{\left(1 + \frac{p^{rr}}{\hat{R}_{(r)}^r} \right)}.$$

Równania (2.9) i (2.7) dla $A^{rr} = \hat{R}_{(r)}$ są podstawowymi równaniami wyobczonej kolistej biegunowej siatki prętowej.

3. Przypadki szczególne i rozwiązania

Ograniczymy się dalej do rozpatrywania ważnego przypadku szczególnego siatki, w której sztywności zginania prętów promieniowych i obwodowych są stałe:

$$(EJ)_r = \text{const}, \quad (EJ)_\varphi = \text{const}.$$

Oznaczmy przez ψ kąt pomiędzy prętami promieniowymi siatki; wtedy $l_\varphi = \tilde{l}_r = \psi r$. Przyjmijmy następnie, że kształt «oczek» jest stały, tj.

$$(3.1) \quad \frac{l_r}{l_\varphi} = \text{const}.$$

Warunek (3.1) zachodzi, gdy $l_r = \tilde{l}_\varphi = \kappa r$, gdzie κ jest stałą bezwymiarową. Z tego powodu zgodnie z (2.5) otrzymamy wtedy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_{(r)} &= \frac{(EJ)_r}{l_\varphi} = \frac{1}{r} \frac{(EJ)_r}{\psi}, \\ \tilde{S}_{(\varphi)} &= \frac{(EJ)_\varphi}{l_r} = \frac{1}{r} \frac{(EJ)_\varphi}{\kappa}, \\ \hat{R}_{(r)} &= \frac{12(EJ)_r}{l_r^2 l_\varphi} = \frac{1}{r^3} \frac{12(EJ)_r}{\psi \kappa^2}. \end{aligned}$$

Założmy, że rozpatrywana przez nas biegunowa pierścieniowa siatka prętowa jest obciążona na wewnętrznym obwodzie $r = r_w$ obciążeniem radialnym p_w oraz na zewnętrznym obwodzie $r = r_z$ obciążeniem radialnym p_z . Wielkości napięć radialnych p^{rr} w takiej siatce można obliczyć na podstawie wzorów podanych w pracy [3]. Zakładając, że sztywności podłużne $(EA)_r$, $(EA)_\varphi$ prętów siatki są stałe oraz że

$$(3.3) \quad \frac{\psi(EA)_\varphi}{\kappa(EA)_r} = 2,$$

otrzymamy rozkład napięć radialnych p^{rr} wyrażony wzorem (por. [3])

$$(3.4) \quad p^{rr} = -\frac{p}{r^3}, \quad p = \text{const.}$$

Zgodnie ze wzorem (3.4) ograniczymy się więc do badania stateczności takiej biegunowej siatki prętowej, w której pomiędzy obciążeniami radialnymi wewnętrznego i zewnętrznego brzegu siatki zachodzi związek

$$p_w = p_z \left(\frac{r_z}{r_w} \right)^3.$$

Podstawiając prawe strony wzorów (3.2) i (3.4) do równania (2.9), otrzymamy

$$(3.5) \quad v_{,rr} - \frac{\psi}{r^2(EJ)_r} \left[\frac{(EJ)_\varphi}{\kappa} - \frac{p}{1 - \frac{\psi \kappa^2}{12(EJ)_r} p} \right] v = \frac{c}{1 - \frac{\psi \kappa^2}{12(EJ)_r} p}.$$

Założmy, że brzeg $r = r_w$ siatki jest podparty w sposób uniemożliwiający obrót, lecz dopuszczający swobodę przesunięcia w kierunku normalnym do płaszczyzny nieodkształconej siatki. Wtedy

$$(3.6) \quad v(r_w) = 0 \quad \text{oraz} \quad p^r(r_w) = 0.$$

Założmy następnie, że brzeg zewnętrzny $r = r_z$ jest doskonale sztywno utwierdzony:

$$(3.7) \quad v(r_z) = 0 \quad \text{oraz} \quad w(r_z) = 0.$$

Z warunków (3.6) oraz wzoru (2.2) wynika, że dla $r = r_w$ zachodzi $w_{,r} = 0$. Zgodnie z równaniem (2.4) stała c występująca w (3.5) jest równa zero. Oznaczając

$$(3.8) \quad \lambda \equiv \frac{\psi}{(EJ)_r} \left[\frac{(EJ)_\varphi}{\kappa} - \frac{p}{1 - \frac{\psi \kappa^2}{12(EJ)_r} p} \right]$$

równanie (3.5) napiszemy w postaci

$$v_{,rr} - \frac{\lambda}{r^2} v = 0.$$

Całka ogólna powyższego równania ma postać

$$(3.9) \quad v = \sqrt{r} [C_1 \cos(\mu \ln r) + C_2 \sin(\mu \ln r)],$$

gdzie

$$(3.10) \quad \mu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{|1+4\lambda|}, \quad 1+4\lambda < 0.$$

Warunki brzegowe (3.6)₁ i (3.7)₁ dla $v \neq 0$ mogą być spełnione tylko w przypadku, gdy

$$\begin{vmatrix} \sqrt{r_w} \cos(\mu \ln r_w), & \sqrt{r_w} \sin(\mu \ln r_w) \\ \sqrt{r_z} \cos(\mu \ln r_z), & \sqrt{r_z} \sin(\mu \ln r_z) \end{vmatrix} = 0.$$

Powyzszy warunek istnienia nietrywialnych rozwiązań (3.9) rozpatrywanego tu zagadnienia brzegowego sprowadza się do warunku

$$\sin\left(\mu \ln \frac{r_w}{r_z}\right) = 0,$$

z którego wynika, że

$$(3.11) \quad \mu = \frac{k\pi}{\ln \frac{r_z}{r_w}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ze wzorów (3.10) i (3.11) dla $k = 1$ otrzymamy

$$(3.12) \quad \lambda = - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{\ln \frac{r_z}{r_w}} \right)^2 \right].$$

Wyznaczmy ze wzoru (3.8) parametr p :

$$(3.13) \quad p = \frac{\frac{(EJ)_\varphi}{\kappa} - \lambda \frac{(EJ)_r}{\psi}}{1 + \frac{\psi \kappa}{12} \frac{(EJ)_\varphi}{(EJ)_r} - \frac{\lambda \kappa^2}{12}}.$$

Podstawiając do (3.13) wyrażenie (3.12) dla λ otrzymamy krytyczną wartość p .

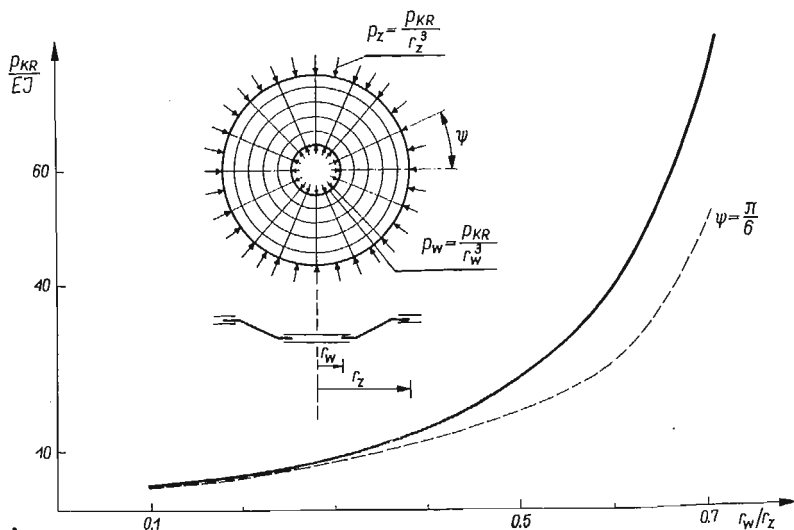
Gdy przekroje belek promieniowych i obwodowych są takie same,

$$(EJ)_\varphi = (EJ)_r = EJ, \quad (EA)_\varphi = (EA)_r,$$

wtedy dla rozpatrywanej siatki zgodnie z (3.3) mamy także $\kappa = \psi/2$. Wzór (3.13) ma wtedy postać

$$p_{KR} = \frac{2-\lambda}{1 + \frac{\psi^2}{48} (2-\lambda)} \frac{EJ}{\psi},$$

przy czym λ jest określone wzorem (3.12). Na rysunku 1 przedstawiono dla tego przypadku wykresy parametru bezwymiarowego $p_{KR}\psi/EJ$ w zależności od stosunku r_u/r_z oraz dla kąta $\psi = \pi/6$ pomiędzy prętami radialnymi.



Rys. 1

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability of lattice-type plates*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966).
2. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *Some problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7 (1966).
3. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *On the solution of axially-symmetrical problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 8 (1966).

Р е з ю м е

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СЕТОК

В работе обсуждается вопрос устойчивости кольцевых радиально нагруженных густых полярных стержневых сеток (ростверков). Использовалась континуальная модель сетки и уравнения плоской волокнистой среды с полярной сеткой [1]. Даются зависимости критических сил для некоторого частного вида ростверка в функции плотности сетки и произведения внутреннего и внешнего радиусов сетки.

S u m m a r y

ON THE BUCKLING OF POLAR BAR NETWORKS

The paper considers the stability problem of annular radially loaded dense polar networks of bars (grates). The use of continuous model of network is applied by utilising equations of a plane fibrous continuum with polar network [1]. Expressions for critical loads depending on the network density and the ratio of internal and external network radii are given for a certain particular type of grate.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lipca 1966 r.

METODA CHARAKTERYSTYK DLA DWUWYMIAROWYCH
NIEUSTALONYCH PRZEPIŹYWÓW GAZU

ZBYSZKO KAZIMIERSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstępi

W artykule przedstawiono rozważania dotyczące metody charakterystyk zastosowanej do układu nieliniowych równań dynamiki gazów, opisujących dwuwymiarowe, nieustalone, niepotencjalne przepływy. Celem artykułu jest wykonanie pewnej części pracy przygotowawczej przed przystąpieniem do numerycznych obliczeń dwuwymiarowych nieustalonych przepływów gazu. Z tego powodu położono nacisk na opis geometryczny powierzchni charakterystycznych i analizę związków charakterystycznych pomiędzy funkcjami określającymi stan gazu na tych powierzchniach. Związki charakterystyczne wyprowadzono w postaci dogodnej do bezpośredniego przedstawiania ich jako równania różnicowe na dowolnej płaszczyźnie charakterystycznej. Wyprowadzono również związki charakterystyczne napisane tylko dla kierunku bicharakterystyk.

Rozpatrzenie przypadku trójwymiarowego (dwie zmienne przestrzenne i czas) zostało podyktowane chęcią nadania poszczególnym rozmaiitościom matematycznym pogładowej interpretacji geometrycznej, co jest niemożliwe w przypadkach czterowymiarowych.

Artykuł nawiązuje do ujęć metody charakterystyk spotykanych w publikacjach [1, 2, 3] zawiera rozwinięcie niektórych problemów związanych z tą metodą.

2. Układ równań różniczkowych

Rozpatrujemy dowolny punkt P wewnątrz nieustalonego dwuwymiarowego przepływu gazu. Przepływ w tym punkcie opisujemy w układzie kartezjańskim o współrzędnych $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv t$. Początek układu umieszczony jest w punkcie P . Współrzędne x_1 i x_2 nazywamy współrzędnymi przestrzennymi, a płaszczyznę $x_1 x_2$ «przestrzenią». Natomiast x_3 jest współrzędną czasową. Bazę układu $x_1 x_2 x_3$ oznaczmy $\{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$. Stan gazu w każdym punkcie przepływu określają cztery skalarne funkcje współrzędnych. Są to: dwie składowe prędkości v_1 i v_2 , ciśnienie p i gęstość ρ . Lokalną prędkość dźwięku oznaczmy przez a . Wymienione funkcje są bezwymiarowe, ponieważ prędkości określamy w stosunku do pewnej wybranej prędkości dźwięku a_0 , ciśnienie w stosunku do $a_0^2 \rho_0$ i gęstość do ρ_0 . Ogólnie funkcje te oznaczmy przez $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$; ($j = 1, 2, 3, 4$) i przyporządkujemy

$$u_1 \equiv v_1, \quad u_2 \equiv v_2, \quad u_3 \equiv p, \quad u_4 \equiv \rho.$$

Zdefiniujemy poza tym przestrzenno-czasowy wektor prędkości $\mathbf{V}(v_1, v_2, 1)$, który posiada składową przestrzenną $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ oraz przestrzenno-czasowy gradient funkcji u_j :

$$\nabla u_j \equiv \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Układ równań dynamiki gazów dla rozpatrywanego przepływu w opisanych współrzędnych można wyrazić w postaci sum iloczynów skalarnych

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^4 \mathbf{a}_{i,j} \cdot \nabla u_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Trójwymiarowe wektory $\mathbf{a}_{i,j}(a_{i,j,1}, a_{i,j,2}, a_{i,j,3})$ można przedstawić w postaci macierzy

$$(2.2) \quad \mathbf{a}_{i,j} \equiv \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} & 0 & \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \rho \mathbf{V} & \mathbf{e}_2 & 0 \\ a^2 \rho \mathbf{e}_1 & a^2 \rho \mathbf{e}_2 & \mathbf{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{V} & a^2 \mathbf{V} \end{bmatrix}.$$

Pierwsze dwa wiersze (2.2) pochodzą z równań zachowania pędu, trzeci z zachowania masy, a czwarty entropii.

Jest zatem dany jednorodny układ czterech quasi-liniowych równań różniczkowych potrzebny do określenia czterech funkcji niewiadomych u_j .

Wyrażenie typu $\mathbf{c} \cdot \nabla u$ (funkcja u ma różniczkę zupełną) można przedstawiać w postaci

$$d_{\mathbf{c}} u = \mathbf{c} \cdot \nabla u$$

znanego pod nazwą pochodnej kierunkowej.

3. Równanie i związki charakterystyczne

Rozpatrzmy kombinację liniową równań (2.1)

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^4 \mathbf{W}_j \cdot \nabla u_j = 0,$$

gdzie wektory \mathbf{W}_j dla $j = 1, 2, 3, 4$ są przedstawione również jako kombinacje liniowe wektorów $\mathbf{a}_{i,j}$

$$(3.2) \quad \mathbf{W}_j = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{a}_{i,j}.$$

Liczby α_i występujące w (3.2) są rzeczywiste i nie znikają jednocześnie.

Żądamy, aby wszystkie wektory \mathbf{W}_j leżały w jednej płaszczyźnie. Ustanowimy wektor $\mathbf{N}(N_1, N_2, N_3)$ zawsze różny od zera, normalny do tej płaszczyzny, którą nazwano płaszczyzną charakterystyczną $\pi_{\mathbf{N}}$. Składowa przestrzenna \mathbf{N} jest oznaczona przez $\mathbf{n}(N_1, N_2)$.

Powyższe żądanie koplanarności \mathbf{W}_j zapisać można jako układ równań $\mathbf{W}_j \cdot \mathbf{N} = 0$ dla $j = 1, 2, 3, 4$ czyli

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i (\mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{N}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Układ (3.3) służy do obliczenia współczynników α_i i ma rozwiązanie, o ile jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru

$$(3.4) \quad \det[\mathbf{a}_{i,j} \cdot \mathbf{N}] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Równanie (3.4) nazywamy równaniem charakterystycznym układu (2.1). Jeśli w oparciu o (2.2) obliczymy (3.4), to otrzymamy

$$(3.5) \quad a^2 \varrho^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 - a^2 (N_1^2 + N_2^2)] = 0.$$

Z (3.5) wynika, że \mathbf{n} nie może nigdy zniknąć, bo prowadzi to do sprzeczności z założoną niezerowością \mathbf{N} . Okazuje się więc, że

$$(3.6) \quad (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 - a^2 n^2 = 0,$$

$$(3.7) \quad (\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{N}})^2 = 0$$

nie mogą być spełnione równocześnie, czyli opisują w rozpatrywanym punkcie P dwie rodziny wektorów normalnych oznaczone jako \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$.

Długość wektorów \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$ określimy normując ich składowe przestrzenne, czyli zakładając

$$(3.8) \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad |\bar{\mathbf{n}}| = 1,$$

co można zrobić, ponieważ nigdy nie są one zerowe.

Zbadaniem rodzin wektorów \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$ zajmiemy się w następnym punkcie sygnalizując w tym miejscu, że obowiązujące na płaszczyznach charakterystycznych $\pi_{\mathbf{N}}$ i $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ wyznaczonych przez wektory \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$ związki (3.1) nazywają się związkami charakterystycznymi.

4. Rozważania geometryczne

W tym punkcie zostaną omówione powierzchnie utworzone przez wektory \mathbf{N} i $\bar{\mathbf{N}}$, płaszczyzny $\pi_{\mathbf{N}}$ i $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ oraz powierzchnie obwiednie tych płaszczyzn.

4.1. Stożek normalnych \mathbf{N} i stożek charakterystyczny. Rozpatrywany punkt przepływu P ustanawiamy punktem początkowym wszystkich wektorów \mathbf{N} z równania (3.6), które po wykorzystaniu (3.8) piszemy w postaci

$$(4.1) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = a.$$

Rodzina wektorów \mathbf{N} wyrażona przez (4.1) tworzy zatem powierzchnię stożkową o wierzchołku w P . Kierownicą stożka i jednocześnie miejscem geometrycznym końców wektorów \mathbf{N} jest elipsa E . Elipsę E otrzymamy z przecięcia powierzchni bocznej walca kołowego o podstawie $|\mathbf{n}| = 1$ (rys. 1), na której leżą końce \mathbf{N} , płaszczyzną

$$(4.2) \quad \mathbf{V} \cdot (\mathbf{N} - \mathbf{N}_0) = 0,$$

na której również jak wynika z (4.1) muszą leżeć końce \mathbf{N} . Wektor \mathbf{N}_0 jest dowolnie wybranym wektorem spośród wszystkich \mathbf{N} określonych przez (4.1). Płaszczyzna (4.2) jest prostopadła do \mathbf{V} . Opisany przez (4.1) stożek wektorów \mathbf{N} nazwiemy stożkiem normalnych.

Przecięcie (3.8) z (4.2) dla rozpatrywanego przepływu istnieje zawsze. Równanie (4.1) ma zawsze rozwiązanie ze względu na czasową składową N

$$(4.3) \quad N_3 = a - (v_1 N_1 + v_2 N_2) = a - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

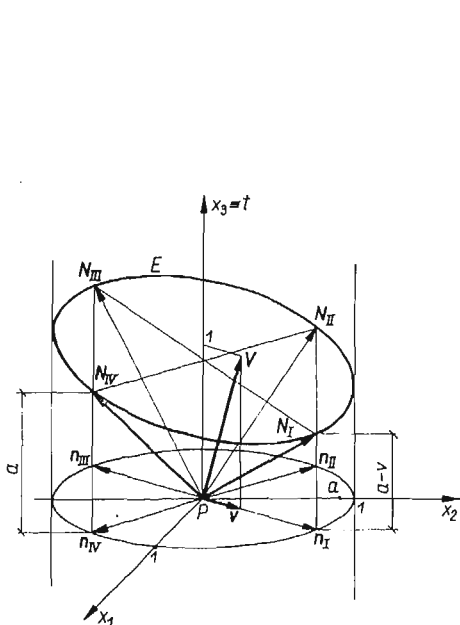
Wśród kierunków \mathbf{n} z okręgu $|\mathbf{n}| = 1$ na płaszczyźnie x_1x_2 wyróżnić należy ze względu na wartość iloczynu $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ cztery kierunki (wg oznaczeń na rys. 1):

$$\mathbf{n}_I \text{ i } \mathbf{n}_{III}; \quad \mathbf{n}_I = -\mathbf{n}_{III}, \text{ dla których } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \pm v$$

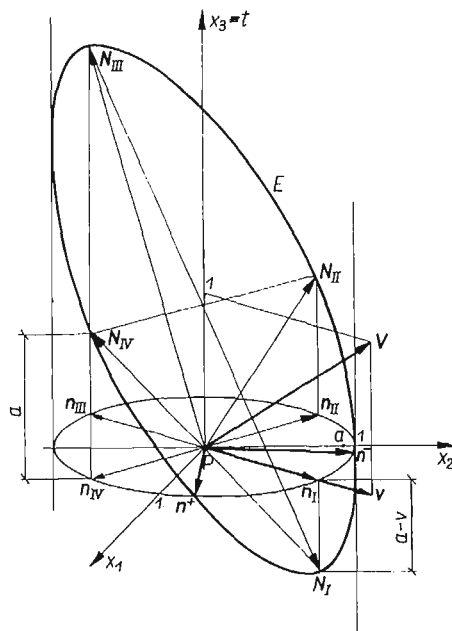
oraz

$$\mathbf{n}_{II} \text{ i } \mathbf{n}_{IV}; \quad \mathbf{n}_{II} = -\mathbf{n}_{IV}, \text{ dla których } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Średnice koła $|\mathbf{n}| = 1$ wyróżnione przez wektory \mathbf{n}_I i \mathbf{n}_{III} są rzutami osi głównych elipsy E . Krótsza z osi jest równoległa do płaszczyzny x_1x_2 i jej odległość od x_1x_2 według (4.3) jest zawsze równa N_3 dla $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{II}$ czyli lokalnej prędkości dźwięku a . Jako dodatkowe wyjaśnienie



Rys. 1



Rys. 2

nie podać należy, że rysunki zrobione są dla założenia, że prędkość dźwięku odniesienia a_0 , do której redukowane są wszystkie prędkości, w tym lokalna prędkość dźwięku, jest maksymalną spośród lokalnych prędkości dźwięku dowolnie dużego otoczenia punktu P . Wynika stąd, że na rysunkach zawsze $a \leq 1$. Rysunki 1 i 2 przedstawiają stożki normalnych. Rysunek 1 wykonany jest dla przepływu poddźwiękowego w punkcie P , a rys. 2 dla przepływu naddźwiękowego.

Ze wzoru (4.3) wynika, że dla

$$(4.4) \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_I; \quad N_3 \geq 0 \quad \text{gdy} \quad \begin{cases} a > |v| \\ a = |v|, \\ a < |v|. \end{cases}$$

Oznacza to, że dla prędkości poddźwiękowych stożek (4.1) leży całkowicie ponad «prze-strzeżeniem» x_1x_2 , dla dźwiękowych jest do niej styczny wzdłuż linii wyznaczonej przez \mathbf{n}_I , a dla prędkości naddźwiękowych przecina x_1x_2 dając w przecięciu dwa kierunki pokazane

na rys. 2 i oznaczone przez \mathbf{n}^+ i \mathbf{n}^- . Inaczej mówiąc równanie (4.1) dla przepływu ustalono-
nego, gdy $\mathbf{V} = \mathbf{v}$, ma rozwiązanie tylko dla $|\mathbf{v}| > a$ i rozwiązaniem są kierunki \mathbf{n}^+ i \mathbf{n}^- .

Każdy wektor \mathbf{N} z równania (3.6), czyli każdy wektor wzięty z powierzchni tworzącej stożka (4.1) wyznacza w czasoprzestrzeni $x_1 x_2 x_3$ prostopadłą do niego płaszczyznę charakterystyczną $\pi_{\mathbf{N}}$. Płaszczyzny charakterystyczne wyznaczone przez wektory \mathbf{N} nazwiemy płaszczyznami falowymi. Zbiór wszystkich płaszczyzn $\pi_{\mathbf{N}}$ przechodzących przez punkt P ma powierzchnię obwiednią będącą podobnie jak (4.1) powierzchnią stożkową. Można uważać, że powierzchnia ta jest utworzona z wektorów \mathbf{B} , z których każdy wyznacza styczną między płaszczyzną $\pi_{\mathbf{N}}$ przyporządkowaną danemu \mathbf{N} , a powierzchnią obwiednią wszystkich $\pi_{\mathbf{N}}$. Rodzinę wektorów \mathbf{B} można wyznaczyć z dokładnością do stałego niezerowego mnożnika μ stosując znany w teorii obwiedni wzór

$$(4.5) \quad B_k = \mu \frac{\partial}{\partial N_k} [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^2 - a^2 \mathbf{n}^2], \quad k = 1, 2, 3.$$

Po obliczeniu (4.5) otrzymamy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} B_1 &= 2\mu[v_1(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) - a^2 N_1], \\ B_2 &= 2\mu[v_2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) - a^2 N_2], \\ B_3 &= 2\mu(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}). \end{aligned}$$

Uwzględniając w (4.6) związek (4.1) stwierdzamy, że B_3 zawsze jest różne od zera i możemy dzieląc obustronnie składowe B_k ($k = 1, 2, 3$) przez B_3 określić wektor \mathbf{B} następująco

$$(4.7) \quad \frac{\mathbf{B}}{B_3} = \mathbf{V} - a\mathbf{n}.$$

Rodzina wektorów \mathbf{B} tworzy znany stożek charakterystyczny przedstawiający lokalną prędkość rozchodzenia się małego zaburzenia w punkcie P .

Składowe tej prędkości są równe

$$(4.8) \quad \frac{B_1}{B_3} = v_1 - aN_1, \quad \frac{B_2}{B_3} = v_2 - aN_2.$$

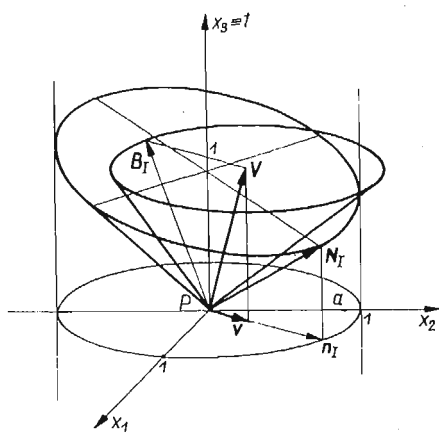
Rysunek 3 pokazuje stożek (4.7).

Powierzchnię charakterystyczną w otoczeniu punktu P zdefiniować można jako powierzchnię, która jest w dowolnym swym punkcie prostopadła do wektora \mathbf{N} będącego jedną z tworzących stożka (4.1) zbudowanego w tym punkcie.

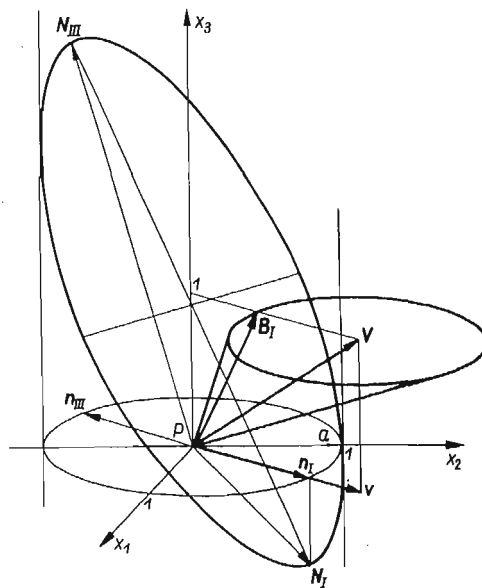
Rozpatrzmy dowolną powierzchnię charakterystyczną przechodzącą przez P . W każdym punkcie tej powierzchni w otoczeniu P można znaleźć wektor \mathbf{B} , który będzie określał styczną między rozpatrywaną powierzchnią i stożkiem charakterystycznym (4.7), utworzonym w tym punkcie. Wobec tego przez dowolny punkt wymienionej powierzchni charakterystycznej można poprowadzić linię pola wektorowego wektorów \mathbf{B} . Te linie nazywamy bicharakterystykami układu równań (2.1) dla rozwiązania $u_j(x_1, x_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Przez wybrany punkt P można z uwagi na istnienie w nim jednego stożka (4.1) i zdefiniowane wyżej pojęcie powierzchni charakterystycznej poprowadzić nieskończenie wiele

miast wzajemne położenie stożków przy prędkościach poddźwiękowych i naddźwiękowych. Rysunki 4 i 5 wykonano jak i wszystkie pozostałe dla założenia $a \leq a_0$, czyli $a \leq 1$. Wtedy dla prędkości poddźwiękowych stożek (4.7) mieści się w stożku (4.1), a nałoży się na niego, gdy $a = a_0$ i $|v| \rightarrow 0$. Wraz ze wzrostem $|v|$ do prędkości naddźwiękowych stożek (4.7) «wychyla» się coraz bardziej ze stożka normalnych i dla przepływów hiperdźwiękowych stożek normalnych zbliża się do płaszczyzny (4.2), a stożek falowy otacza «coraz ciaśniej» kierunek \mathbf{V} .



Rys. 4



Rys. 5

Gdyby wybrano tak a_0 , że mogłoby być $a > a_0$, przy prędkościach poddźwiękowych stożek falowy mógłby obejmować stożek normalnych. Przy wzroście prędkości $|v|$ do ponaddźwiękowych usytuowanie stożków byłoby takie samo jak na rys. 5.

4.2. Płaszczyzna wektorów normalnych $\bar{\mathbf{N}}$ i kierunek toru cząstki \mathbf{V} . Rodzinę wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ przedstawia równanie (3.7). Jest to mnożony dwukrotnie związek

$$(4.11) \quad \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{N}} = 0.$$

Wektor $\bar{\mathbf{N}}$ jest zawsze prostopadły do kierunku \mathbf{V} , leży więc w płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{V} . Początki wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ leżą w punkcie P , końce natomiast na elipsie \bar{E} powstałej z przecięcia walca jednostkowego $|\bar{\mathbf{n}}| = 1$ płaszczyzną (4.11).

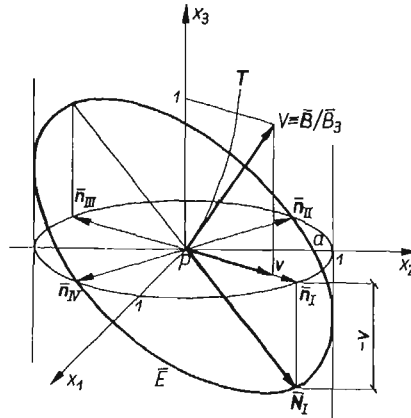
Z (4.11) wynika, że $\bar{N}_3 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. W takim razie $-\bar{N}_3$ jest rzutem prędkości przemieszczania się cząstki (w sensie cząstki ośrodka ciągłego) na wybrany przez $\bar{\mathbf{n}}$ kierunek na płaszczyźnie $x_1 x_2$. Rodzina wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ wyznacza prostopadłe do nich płaszczyzny $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$, które będziemy nazywać płaszczyznami toru. Płaszczyzny $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ mają obwiednię, która degeneruje się do jednej prostej — prostej wyznaczającej kierunek toru w punkcie P , czyli

$$(4.12) \quad \bar{\mathbf{B}} = \mu \mathbf{V};$$

$\bar{\mathbf{B}}$ jest styczną do krzywej opisującej tor cząstki T w punkcie P jak na rys. 6. Porównując

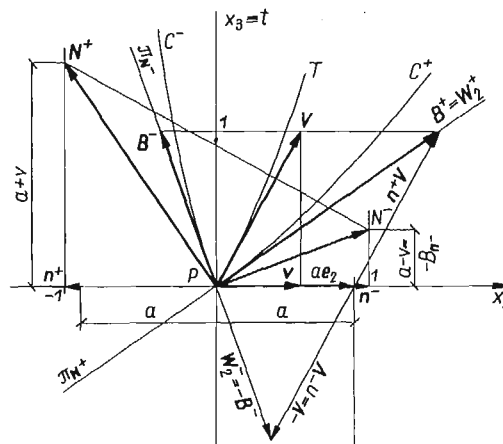
składowe wektorów prawej i lewej strony równości (4.12) można wobec niezerowości μ napisać

$$(4.13) \quad \frac{\bar{\mathbf{B}}}{\bar{B}_3} = \mathbf{V}.$$



Rys. 6

4.3. Charakterystyki przepływów opisanych w przestrzeni dwóch zmiennych niezależnych. Przepływ jednowymiarowy nieustalony. Zakładamy, że funkcje opisujące stan gazu w P i otoczeniu zależą tylko od x_2 i x_3 . Rozpatrujemy więc jednowymiarowy nieustalony przepływ. Oś x_2 jest skierowana zgodnie z \mathbf{v} . Każdy przekrój płaszczyzną $x_1 = \text{const}$ daje jednakowe ślady stożków charakterystycznych.



$$\begin{aligned} W_2^+ &= \alpha e_2 - n^+ v = \alpha e_2 + v = B^+ \\ W_2^- &= \alpha e_2 - n^- v = \alpha e_2 - v = -B^- \end{aligned}$$

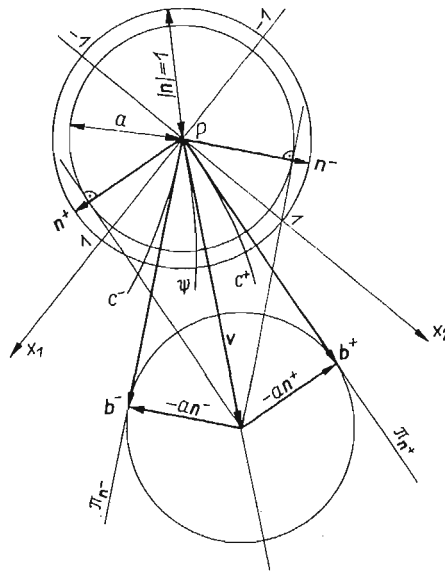
Rys. 7

Przekrój stożka normalnych wyznacza dwa wektory \mathbf{N} oznaczone przez N^+ i N^- na rys. 7. Oznaczenie to nawiązuje do wzoru (4.9), który objaśnia sens fizyczny wektorów \mathbf{N} , a właściwie składowej czasowej tych wektorów.

Ślady płaszczyzn falowych π_{N^+} i π_{N^-} są prostymi prostopadłymi do N^+ i N^- i pokrywają się ze śladami przekroju stożka kierunków bicharakterystyk czyli z kierunkami B^+ i B^- .

Przekrój konoidu K daje dwie linie charakterystyk oznaczone przez C^+ i C^- .

Płaski ustalony przepływ naddźwiękowy. Zakładamy, że funkcje opisujące stan gazu w P i otoczeniu zależą tylko od x_1 i x_2 . Przepływ jest ustalony $V = v$. Jak pokazano w p. 4.1. przecięcie stożka normalnych z płaszczyzną x_1x_2 czyli rozwiązanie równania $v \cdot n = a$ istnieje tylko dla przepływów naddźwiękowych. Ślady przecięcia stożka normalnych płaszczyzną x_1x_2 lub inaczej rozwiązanie równania $v \cdot n = a$ oznaczono przez n^+ i n^- na rys. 2 i na rys. 8.



Rys. 8

Ślady płaszczyzn falowych π_{n^+} i π_{n^-} są na rys. 8 liniami prostymi prostopadłymi odpowiednio do n^+ i n^- .

Proste π_{n^+} i π_{n^-} pokrywają się, jak widać na rys. 8, z rzutami na x_1x_2 kierunków bicharakterystyk określonych równaniami

$$B^+ = V - an^+, \quad B^- = V - an^-,$$

rzuty są oczywiście równe

$$(4.14) \quad b^+ = v - an^+, \quad b^- = v - an^-.$$

Związki (4.14) wyznaczają w punkcie P kierunki dwóch charakterystyk na płaszczyźnie x_1x_2 . Charakterystyki oznaczone przez C^+ i C^- określają zakres oddziaływania drobnego zaburzenia wywołanego w P w naddźwiękowym płaskim ustalonym przepływie. C^+ i C^- są rzutami na x_1x_2 bicharakterystyk wyróżnionych wektorami B^+ i B^- .

5. Związki charakterystyczne

Związek charakterystyczny (1.3) jest kombinacją liniową równań tworzących układ równań wyjściowych. Związek (2.3) mówi o tym, że suma iloczynów skalarnych gradientów funkcji u_j , określających stan gazu przez wektory \mathbf{W}_j , jest równa zeru. Wektory \mathbf{W}_j leżą w jednej płaszczyźnie — może to być płaszczyzna falowa π_N ze zbioru płaszczyzn określanych rodziną wektorów \mathbf{N} lub płaszczyzna toru $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ ze zbioru płaszczyzn wyznaczonych przez rodzinę wektorów $\bar{\mathbf{N}}$. Związki charakterystyczne dla płaszczyzn falowych i związki dla płaszczyzn toru nie są jednakowe. Rozpatrzmy je kolejno.

5.1. Związki charakterystyczne na płaszczyznach falowych. Macierz współczynników do układu równań liniowych (3.3) dla płaszczyzny π_N po uwzględnieniu (4.1) jest następująca:

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} \rho a & 0 & a^2 \rho N_1 & 0 \\ 0 & \rho a & a^2 \rho N_2 & 0 \\ N_1 & N_2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy (5.1) jest równy 3, wobec czego istnieje jedno liniowo niezależne rozwiązanie układu (3.3) z macierzą (5.1). Oznacza to również, że dla każdego \mathbf{N} z (4.1) istnieje jeden liniowo niezależny związek charakterystyczny.

Rozwiązaniem (3.3) z macierzą (5.1) jest z dokładnością do jednakowego stałego mnożnika następujący układ współczynników:

$$(5.2) \quad \alpha_1 = -aN_1, \quad \alpha_2 = -aN_2, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0.$$

Wektory \mathbf{W}_j na podstawie (2.2), (3.2) i (5.2) określone są jak niżej:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= a\rho(\mathbf{ae}_1 - N_1\mathbf{V}), \\ \mathbf{W}_2 &= a\rho(\mathbf{ae}_2 - N_2\mathbf{V}), \\ \mathbf{W}_3 &= \mathbf{V} - \mathbf{an}, \\ \mathbf{W}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Związek (3.1) dla każdej płaszczyzny falowej π_N ze względu na tożsamości $u_1 \equiv v_1$, $u_2 \equiv v_2$, $u_3 \equiv p$ przedstawia wyrażenie

$$(5.4) \quad \sum_{q=1}^2 (\mathbf{ae}_q - N_q\mathbf{V}) \cdot \nabla v_q + \frac{1}{a\rho} (\mathbf{V} - \mathbf{an}) \cdot \nabla p = 0.$$

Widać, że \mathbf{W}_3 pokrywa się z kierunkiem bicharakterystyki \mathbf{B} . Można łatwo sprawdzić, że \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 nie są nigdy kolinearne oraz że \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 nie są nigdy kolinearne z \mathbf{W}_3 czyli z \mathbf{B} .

Proste przekształcenia (5.4) i wykorzystanie pojęcia pochodnej kierunkowej pozwalają napisać je w postaci

$$a\rho\mathbf{n} \cdot \left(d_v \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = a^2 \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) + d_v p.$$

Prawa strona powyższej równości jest po prostu równaniem zachowania masy i równa się tożsamościowo zeru. Lewa strona jest równaniem zachowania pędu mnożonym skalarnie przez niezerowy wektor $a\rho\mathbf{n}$. Widać więc, że (5.4) zawiera w sobie równanie zachowania

pędu i masy, a więc niepełny układ równań wyjściowych. Należy zauważyć, że dla przepływu jednowymiarowego niestalonego przedstawianego we współrzędnych x_2x_3 (jak na rys. 7) kierunki wektorów \mathbf{W}_j , które są wtedy tylko dwa \mathbf{W}_2 i \mathbf{W}_3 na każdej z dwóch prostych π_N , a więc na π_{N^+} i π_{N^-} , równe są $\mathbf{W}_2^+ = \mathbf{B}^+$, $\mathbf{W}_2^- = -\mathbf{B}^-$, $\mathbf{W}_3^+ = \mathbf{B}^+$, $\mathbf{W}_3^- = \mathbf{B}^-$. Otrzymujemy więc dwa znane związki charakterystyczne

$$(5.5) \quad \mathbf{B}^+ \cdot \left(\nabla v + \frac{1}{a\rho} \nabla p \right) = 0, \quad \mathbf{B}^- \cdot \left(\nabla v - \frac{1}{a\rho} \nabla p \right) = 0.$$

Przekształcenie (5.4) do postaci wygodnej w obliczeniach numerycznych zostanie przeprowadzone w p. 6.

5.2. Związki charakterystyczne na płaszczyznach toru. Macierz współczynników do układu równań (3.3) po uwzględnieniu (4.11) jest następująca

$$(5.6) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_2 & 0 \\ a^2 \rho \bar{N}_1 & a^2 \rho \bar{N}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rząd macierzy (5.6) jest równy 2. Oznacza to, że każdemu $\bar{\mathbf{N}}$ z (4.11) lub inaczej dla każdej płaszczyzny toru $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ obowiązują dwa liniowo niezależne związki charakterystyczne. Rozwiązując układ (3.3) z macierzą (5.6) otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązania: pierwsze

$$(5.7) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1,$$

drugie

$$(5.8) \quad \alpha_1 \bar{N}_1 + \alpha_2 \bar{N}_2 = 0, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Pierwsza równość w (5.8) odpowiada równaniu $\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ i wyznacza wektor $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ leżący w płaszczyźnie x_1x_2 , prostopadły do $\bar{\mathbf{n}}$. Wektor α daje oczywiście jeden liniowo niezależny kierunek na x_1x_2 . A więc α_i opisane przez (5.7) i (5.8) przedstawiają dwa niezależne rozwiązania. Określone zostały zatem dwie grupy wektorów \mathbf{W}_j dla każdego $\bar{\mathbf{N}}$ z (4.11).

Dla rozwiązania (5.7) otrzymamy

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 = 0, \quad \mathbf{W}_3 = -\mathbf{V}, \quad \mathbf{W}_4 = a^2 \mathbf{V},$$

stąd pierwszy związek charakterystyczny

$$(5.9) \quad \mathbf{V} \cdot (\nabla p - a^2 \nabla \rho) = 0.$$

Związek (5.9) mówi o zachowaniu entropii na kierunku toru cząstki i jest równaniem identycznym z ostatnim równaniem układu wyjściowego (2.1) i (2.2).

Grupa α_i podana w (5.8) odpowiada następującemu układowi wektorów \mathbf{W}_j

$$\mathbf{W}_1 = \alpha_1 \rho \mathbf{V}, \quad \mathbf{W}_2 = \alpha_2 \rho \mathbf{V}, \quad \mathbf{W}_3 = \alpha, \quad \mathbf{W}_4 = 0,$$

co pozwala obliczyć drugi związek charakterystyczny

$$(5.10) \quad \rho(\alpha_1 \mathbf{V} \cdot \nabla v_1 + \alpha_2 \mathbf{V} \cdot \nabla v_2) + \alpha \nabla p = 0.$$

Korzystając z pojęcia pochodnej kierunkowej przekształcimy (5.10) do postaci

$$(5.11) \quad \alpha_1 d_v v_1 + \alpha_2 d_v v_2 + \frac{1}{\rho} d_\alpha p = 0$$

lub po prostu

$$(5.12) \quad \alpha \cdot \left(d_v v + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0.$$

Gdy założymy $|\alpha| = 1$, co można uczynić wobec jego niezerowości, widać, że (5.12) jest rzutem równania pędu na kierunek α .

Wektory \mathbf{V} i α , które wytyczają kierunki rzutowania gradientów funkcji v_1, v_2 i p , leżą oczywiście w jednej i tej samej płaszczyźnie toru $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ określonej przez wybrany z (4.11) $\bar{\mathbf{N}}$. Wektor α leży na prostej będącej śladem przecięcia płaszczyzny $\pi_{\bar{\mathbf{N}}}$ z płaszczyzną $x_1 x_2$.

5.3. Zależności między związkami charakterystycznymi. Wiadomo, że dla każdego wektora \mathbf{N} istnieje jeden niezależny związek charakterystyczny (5.4). Natomiast dla każdego wektora $\bar{\mathbf{N}}$ obowiązują dwa niezależne związki charakterystyczne: związek (5.9), który jest jednako-owy dla wszystkich $\bar{\mathbf{N}}$ z całej ich rodziny i związek (5.11) zależny od wybranego $\bar{\mathbf{N}}$.

Narzucają się dwa pytania ważne z punktu widzenia zastosowań związków charakterystycznych.

1. Czy w ogóle istnieją cztery liniowo niezależne związki charakterystyczne w każdym punkcie przepływu potrzebne do obliczenia czterech funkcji niewiadomych.

2. Gdy napiszemy związki charakterystyczne dla wektorów $\mathbf{N}^{(1)}, \dots, \mathbf{N}^{(p)}, \bar{\mathbf{N}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{N}}^{(s)}$, to ile i które spośród nich są liniowo niezależne. Problemy te zbadał dokładnie RUSANOW w [3] dla pełnych równań dynamiki gazów w czterowymiarowej czaso-przestrzeni. Ograniczymy się tutaj do podania następujących odpowiedzi na postawione pytania.

Jeżeli chodzi o związki charakterystyczne na płaszczyznach falowych, wyróżnianych wektorami \mathbf{N} , to dla trzech liniowo niezależnych \mathbf{N} można napisać trzy niezależne związki (5.4). Wystarcza to do rozwiązywania przepływów potencjalnych.

Wiadomo, że dla wszystkich wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ obowiązuje zawsze związek (5.9). Natomiast dwa niezależne związki (5.12) można napisać dla dwóch liniowo niezależnych α , czyli dla dwóch liniowo niezależnych $\bar{\mathbf{n}}$, a tym samym dla dwóch liniowo niezależnych $\bar{\mathbf{N}}$.

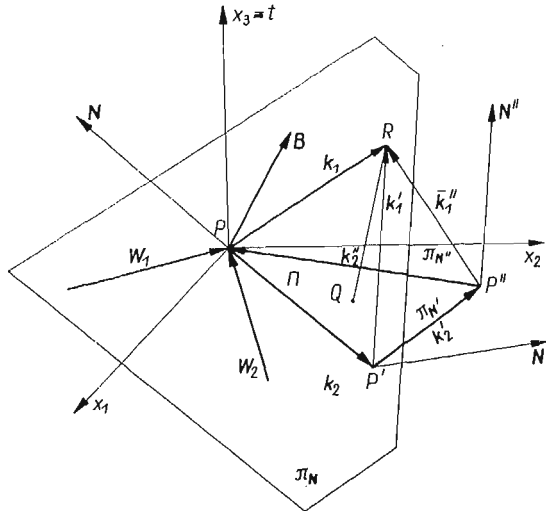
W sumie dla rodziny wektorów $\bar{\mathbf{N}}$ można także napisać trzy niezależne związki. Tak więc czterech potrzebnych niezależnych związków nie można napisać jedynie dla płaszczyzn wyróżnionych wektorami \mathbf{N} , czy też $\bar{\mathbf{N}}$. Wydaje się, że wobec złożoności związku (5.12) dla przepływu nieustalonego najlepiej wybrać cztery potrzebne związki spośród trzech związków na płaszczyznach falowych, a jako czwarty dołączyć do nich związek zachowania entropii (5.9). Pod tym kątem widzenia będą prowadzone dalsze rozważania.

6. Dostosowanie związku charakterystycznego obowiązującego na płaszczyźnie falowej do zastosowania w obliczeniach numerycznych

Dla numerycznego obliczenia wartości funkcji niewiadomych w punkcie wewnętrznym przepływu R , położonym w sąsiedztwie powierzchni niecharakterystycznej II , na której znany jest stan gazu, należy zastosować pewien schemat obliczeniowy. Będzie on podobny do tych, które są używane w ustalonych naddźwiękowych przepływach trójwymiarowych np. w [4 i 5].

Schemat oparty jest na koncepcji wykorzystania do określenia funkcji niewiadomych trzech związków charakterystycznych (5.4), obowiązujących na trzech płaszczyznach falowych, i związku (5.9) na odcinku toru cząstki QR (por. rys. 9).

Na powierzchni Π wybieramy trzy blisko położone punkty P, P' i P'' , w których są oczywiście znane funkcje u_j . Punkty te łączymy wektorami k_2, k'_2 i k''_2 (rys. 9). Płaszczyzny charakterystyczne $\pi_N, \pi_{N'}$ i $\pi_{N''}$ prowadzimy tak, aby leżały na nich odpowiednio wektory k_2, k'_2 i k''_2 i aby płaszczyzny te były prostopadłe do wektorów normalnych N, N' i N'' w punktach P, P' i P'' . Wektory N, N' i N'' są wzięte z powierzchni bocznych stożków (4.1), zbudowanych w punktach P, P' i P'' .



Rys. 9

W oparciu o rozważania geometryczne z p. 4 można stwierdzić, że przez każdy z wektorów k_2 , można poprowadzić po dwie płaszczyzny π_N , które będą prostopadłe do wektorów normalnych wziętych z powierzchni bocznych stożków (4.1). Wybieramy z nich tylko jedną trójkę płaszczyzn np. tę, która przecina się w punkcie R leżącym bliżej powierzchni Π .

Trzy wybrane płaszczyzny falowe $\pi_N, \pi_{N'}$ i $\pi_{N''}$ przecinają się wzdłuż prostych, które wyznaczone są na rys. 9 przez wektory k_1, k'_1 i k''_1 .

Utworzony został ostrosłup $PP'P''R$, którego ścianami bocznymi są wycinki płaszczyzn $\pi_N, \pi_{N'}$ i $\pi_{N''}$, a krawędziami pary wektorów $k_1k_2, k'_1k'_2$ i $k''_1k''_2$. Każda para wektorów łączy trzy punkty. W dwóch z nich są znane parametry gazu, a trzecim jest zawsze punkt R .

Związek (5.4) przedstawia sumę pochodnych kierunkowych

$$\sum_{j=1}^3 d_{W_j} u_j = 0.$$

Gdyby tę sumę przedstawić tak, że zamiast rzutowania na trzy dość różnorodnie (wg 5.1) położone wektory W_j , można by gradienty ∇u_j rzutować na pary wektorów k_1k_2 , to uzyskalibyśmy wzór dogodny do formułowania go w postaci równania różnicowego nadającego się do bezpośrednich obliczeń funkcji niewiadomych w punkcie R .

Dla każdej z trzech par wektorów k_1k_2 można by napisać równanie różnicowe, które w sumie wraz ze związkiem (5.9) dla odcinka toru cząstki QR stanowiłyby cztery równania potrzebne do obliczenia czterech funkcji niewiadomych w R .

Dla realizacji tego konieczne jest proste przekształcenie polegające na zastąpieniu w (5.4) wektorów $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ i \mathbf{W}_3 dwoma liniowo niezależnymi wektorami $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$.

W tym celu wektory \mathbf{W}_j ($j=1, 2, 3$) rozkładamy w bazie lokalnej $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ określonej w podstawowym układzie kartezjańskim $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$(6.1) \quad \mathbf{W}_j = \gamma^1_j \mathbf{k}_1 + \gamma^2_j \mathbf{k}_2, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie składowe kontrawariantne wektorów \mathbf{W}_j są określone jako

$$(6.2) \quad \gamma^l_j = \mathbf{W}_j \cdot \mathbf{k}^l, \quad j = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2.$$

Baza wzajemna $\{\mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2\}$ została ustanowiona w $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ za pomocą wzorów

$$(6.3) \quad \mathbf{k}^1 = \frac{\mathbf{k}_2 \times \mathbf{N}}{\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{N})}, \quad \mathbf{k}^2 = \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{k}_1}{\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{N})}.$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadzono oznaczenia

$$(6.4) \quad \zeta_1 = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{N}, \quad \zeta_2 = \mathbf{N} \times \mathbf{k}_1.$$

Wykorzystując powyższe można (5.4) sformułować następująco:

$$(6.5) \quad \sum_{q=1}^2 \sum_{l=1}^2 A_{l,q} d_{\mathbf{k}_l} v_q + \frac{1}{a\varrho} \sum_{l=1}^2 G_l d_{\mathbf{k}_l} p = 0,$$

gdzie współczynniki liczbowe

$$(6.6) \quad A_{l,q} = a \zeta_{l,q} - n_q \left(\sum_{r=1}^3 V_r \zeta_{l,r} \right) \quad \text{dla } l, q = 1, 2,$$

$$G_l = \sum_{r=1}^3 V_r \zeta_{l,r} - a \sum_{r=1}^3 n_r \zeta_{l,r}.$$

W (6.6) występują składowe wektorów $\mathbf{n}(N_1, N_2, 0)$ i $\mathbf{V}(v_1, v_2, 1)$ oraz $\zeta_l(\zeta_{l,1}, \zeta_{l,2}, \zeta_{l,3})$. Składowe wektora ζ_l określimy obliczając wyznaczniki opisujące (6.4).

7. Związek charakterystyczny na kierunku bicharakterystyki

W 5.1 pokazano, że dla jednowymiarowego nieustalonego przepływu kierunku \mathbf{W}_2 i \mathbf{W}_3 są jednakowe i pokrywają się z kierunkiem \mathbf{B} , czyli po prostu z kierunkiem charakterystyki. Związki charakterystyczne (5.5) napisane są dla dwóch występujących tam kierunków charakterystyk oznaczonych przez \mathbf{B}^+ i \mathbf{B}^- .

Powstaje pytanie. Czy związki charakterystyczne przepływu dwuwymiarowego, nieustalonego w rozpatrywanym punkcie P , a więc związki (5.4) lub (6.5) dadzą się napisać tylko dla kierunku dowolnej bicharakterystyki \mathbf{B} , przechodzącej przez punkt P ? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a jej uzasadnienie wynika natychmiast z przeprowadzonego wyżej przekształcenia (5.4) na (6.5).

Założmy więc, że jeden z wektorów lokalnej bazy $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ leżącej na płaszczyźnie $\pi_{\mathbf{N}}$ np. $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{B}$. Związek (5.4) zapisujemy wtedy następująco:

$$(7.1) \quad \gamma^1_1 d_{\mathbf{B}} v_1 + \gamma^1_2 d_{\mathbf{B}} v_2 + \frac{1}{a\varrho} d_{\mathbf{B}} p + \gamma^2_1 d_{\mathbf{k}_2} v_1 + \gamma^2_2 d_{\mathbf{k}_2} v_2 = 0;$$

γ^l_q для $l, q = 1, 2$ są kontrawariantnymi współrzędnymi wektorów \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 opisanymi przez (6.2) i (6.3), w których należy przyjąć $\mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{B}$.

Z (7.1) wynika, że na to, aby omawiany związek charakterystyczny napisać tylko dla kierunku bicharakterystyki \mathbf{B} , a więc w sposób następujący:

$$(7.2) \quad \gamma^1_1 d_{\mathbf{B}} v_1 + \gamma^1_2 d_{\mathbf{B}} v_2 + \frac{1}{aQ} d_{\mathbf{B}} p = 0,$$

musi zachodzić

$$(7.3) \quad \mathbf{k}_2 \cdot (\gamma^2_1 \nabla v_1 + \gamma^2_2 \nabla v_2) = 0.$$

Współrzędne kontrawariantne γ^2_1 i γ^2_2 nie mogą zniknąć jednocześnie, bo \mathbf{W}_1 i \mathbf{W}_2 nie są nigdy współosiowe [por. wzór (6.2)]. Wobec tego musi być równy zeru iloczyn skalarny wektora \mathbf{k}_2 przez wektor zawarty w nawiasach we wzorze (7.3).

Jakkolwiek będzie skierowany wektor zawarty w nawiasach wzoru (7.3), zawsze można dobrać tak kierunek \mathbf{k}_2 na płaszczyźnie π_N , aby warunek (7.3) był wypełniony.

Związek (5.4) i (6.5) można przedstawić w postaci (7.2) dla każdego z nieskończenie wielu wektorów \mathbf{B} przechodzących przez punkt przepływu P .

Wszystkie przeprowadzone tutaj rozważania mogą być rozszerzone na przypadek trójwymiarowych nieustalonych przepływów. Wymaga to z reguły prostego uzupełnienia wzorów wyrazami zawierającymi trzecią składową przestrzenną występujących tutaj wektorów.

Literatura cytowana w tekście

1. R. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Acad. Press Inc. Publ., New York 1958.
2. M. BURNAT, *Метод характеристик для квазилинейных уравнений типа газодинамики*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Math., Astr., Phys., 5, 10 (1962).
3. В. В. РУСАНОВ, *Характеристики общих уравнений газовой динамики*, Журн. выч. мат. и физ. 3 (1963).
4. M. BURNAT, A. KIEŁBASIŃSKI, A. WAKULICZ, *The method of characteristics for a multidimensional gas flow*, Arch. Mech. Stos., 2, 16 (1964).
5. Ю. Н. ПОДЛАДЧИКОВ, *Метод характеристик для расчёта пространственных сверхзвуковых течений газа*, Изв. Ак. Наук СССР, Механика 4 (1965).

Резюме

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Предлагается рассуждения, касающиеся метода характеристик в приложении к системе уравнений динамики газов, описывающих непотенциальные двухмерные и нестационарные течения. Исследованы некоторые свойства характеристических поверхностей, связанных с отдельной внутренней точкой в течении. Подробно исследован так наз. конус нормалей и взаимное расположение конуса нормалей и известного волнового конуса (называемого иногда конусом Маха). Характеристические зависимости получены в форме удобной для непосредственного представления их в виде разностных уравнений на произвольной характеристической плоскости. Выведена также характеристическая зависимость для направления произвольной бихарактеристики, проходящей через рассматриваемую точку течения.

S u m m a r y

A METHOD OF CHARACTERISTICS FOR TWO DIMENSIONAL
UNSTEADY GAS FLOW

Investigations on the method of characteristics applied to a set of gasodynamics equations describing nonpotential two-dimensional and unsteady flows are presented. Some properties of characteristic surfaces connected with a single internal point in the flow are investigated and particular attention is paid to the so called cone of normals and mutual position of the normal cone and the known wave cone (which is sometimes called also the Mach's cone). Characteristic terms are obtained in a convenient form for their direct presentation in difference equations on any characteristic surface. The characteristic terms for the direction of any bicharacteristic going through the examined point of flow are given.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 czerwca 1966 r.

MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH TYPU COSSERATÓW

W. BARAŃSKI (ŁÓDŹ), K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W większości zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych zakłada się, że każdy punkt materialny ośrodka posiada trzy stopnie swobody oraz że gęstość energii wewnętrznej zależy tylko od pierwszych pochodnych wektora przemieszczenia. Stan naprężenia jest wówczas jednoznacznie określony symetrycznym tensorem naprężenia. Ośrodek ciągły, w którym nie jest spełnione co najmniej jedno z powyższych założeń, nazwijmy ośrodkiem typu Cosseratów.

Praca zawiera przegląd zagadnień dotyczących mechaniki ośrodków tego typu. Omówiono w niej szczegółowo dwa podstawowe kierunki rozwojowe. Pierwszy z nich polega na uogólnieniu kinematyki ciała (punkt materialny ma więcej niż trzy stopnie swobody). Drugi kierunek postuluje występowanie wyższych gradientów przemieszczenia w wyrażeniu dla gęstości energii wewnętrznej. Zarówno pierwsze jak i drugie podejście prowadzą do niesymetrycznego tensora naprężenia. Ponadto pojawia się wtedy tensor naprężeń momentowych; wystąpić mogą również tzw. tensory hipernaprężeń.

Pierwsze wzmianki o możliwości występowania naprężeń momentowych można znaleźć już w pracy VOIGTA [1887]. Natomiast pierwszy model ciała z bardziej złożoną kinematyką wprowadzili bracia COSSERATOWIE [1909]. W modelu przez nich proponowanym każdy element materialny ośrodka ma sześć stopni swobody podobnie jak ciało sztywne. Do tego modelu bracia COSSERATOWIE doszli uogólniając opis ruchu jednowymiarowego modelu pręta i dwuwymiarowego modelu powłoki na przypadek kontinuum trójwymiarowego. Poza tym w ich pracy podano zasady zachowania wraz z warunkami niezmienniczości gęstości energii względem ruchów euklidesowych. Wykazano również równoważność zasad zachowania z odpowiednimi warunkami niezmienniczości. Szczegółowy opis kontinuum omawianego przez E. i F. COSSERATÓW podano dalej w p. 2.

Do pracy E. i F. COSSERATÓW współcześnie im nawiązywały tylko cztery prace. F. KLEIN [1918] i E. NOETHER [1918] rozpatrywali wspomniane wyżej twierdzenie o równoważności zasad zachowania i warunków niezmienniczości względem ruchów euklidesowych. Poza tym ukazały się prace E. HELLINGERA [1914] i K. HEUNA [1914] nie wnoszące do teorii kontinuum COSSERATÓW żadnych nowych elementów.

Postulat o wystąpieniu w gęstości działania również gradientu odkształcenia drugiego rzędu wprowadził po raz pierwszy T. J. JARAMILLO [1929], ale wzmianki na ten temat można znaleźć w pracach A. L. CAUCHY'EGO [1851] i A. J. C. B. DE SAINT-VENANTA [1869]. W ten sposób dochodzi się do pojęcia tzw. materiału nieprostego drugiego rzędu. Teorie materiałów tego typu omówimy szczegółowo w p. 3.

W 1944 r. ukazała się praca E. REISSNERA omawiająca możliwości niesymetrii tensora naprężenia. Jednak przeprowadzone przez niego rozumowanie okazało się błędne. Dalsze prace z tej dziedziny pojawiły się w latach pięćdziesiątych. Można tu wymienić opracowania Y. LE CORRE'A [1953, 1954, 1955, 1956, 1958], J. LAVALA [1957] oraz R. TIF-FENA, A. C. STEVENSONA [1956]. W pracach tych (z wyjątkiem ostatniej) usiłowano wykazać pojawienie się niesymetrii tensora naprężenia poprzez analizę stanu energetycznego siatki krystalicznej. Y. LE CORRE i J. LAVAL dopuszczali działanie momentów masowych. Gęstość energii odkształcenia wyrażali wzorem $W = \frac{1}{2} A_{ijkl} w_{i,j} w_{k,l}$, gdzie $w_{i,j}$ jest gradientem odkształcenia, a A_{ijkl} afinorem sprężystości. Afinor ten różni się od klasycznego niesymetrią względem wskaźników i i j . W konsekwencji tensor naprężeń siłowych

$$t_{ij} = A_{ijkl} w_{k,l}$$

nie był symetryczny i zależał w sposób jawny do rotacji kierunków głównych odkształcenia. Ta sprzeczność w porównaniu z klasyczną mechaniką ośrodka ciągłego była krytykowana przez N. JOELA i W. A. WOOSTERA [1957, 1958], E. S. RAJAGOPALA [1960] oraz R. S. KRISH-NANA i E. S. RAJAGOPALA [1961]. Inercję obrotową do równań mechaniki wprowadził S. BODASZEWSKI [1953] opierając się na pojęciu tzw. naprężenia wrotnego, zaproponowa-nego przez W. BURZYŃSKIEGO [1949]. Należy zaznaczyć, że większość cytowanych wyżej autorów nie znała pracy braci COSSERATÓW, podstawowej dla tego kierunku.

Nawrót do koncepcji ośrodka Cosseratów nastąpił w pracach J. L. ERICKSENA i C. TRUESDELLA [1958] oraz C. TRUESDELLA i R. A. TOUPINA [1960]. Uogólnili oni model Cosseratów wprowadzając model tzw. ciała zorientowanego. W tym samym czasie ukazały się nie wnoszące zasadniczo nowych elementów prace F. A. MC. CLINTOCKA, P. A. ANDRE'A, K. R. SCHWERDTA i R. E. STOECKLEY'A [1958], F. A. MC. CLINTOCKA [1960]. W. GÜNTHER [1958] zauważył podobieństwo kontinuum Cosseratów i ciała z kontynuualnym rozkładem dyslokacji. Tej samej grupy zagadnień dotyczą prace E. KRÖNERA [1958, 1959, 1960, 1962, 1963], M. MIŚCICU [1965, 1966] i C. TEODOSIU [1964, 1965].

Szereg rozwiązań szczegółowych zwłaszcza dla tzw. ośrodka ze «związanymi» obrotami (punkt materialny ma tylko trzy stopnie swobody, por. p. 3) podali H. SCHAEFER [1962], R. D. MINDLIN [1963], O. HOFFMAN [1964], M. SOKOŁOWSKI [1965], G. N. SAWIN i A. N. GUZ [1966]. W oparciu o ten sam model próbowano wyjaśnić niektóre zagadnienia kon-centracji naprężeń. Pierwsze rozwiązania w tym zakresie podał R. D. MINDLIN [1963], a następnie J. L. BLEUSTEIN [1966], T. S. COOK i V. WEITSMAN [1966], R. J. HARTRANFT i G. C. SIH [1965], R. MUKI i E. STERNBERG [1965], J. N. NIEMISZ [1965, 1966], G. N. SAWIN [1965] oraz V. WEITSMAN [1965, 1966].

Ostatnio J. SCHIJE [1966] opublikował materiały z własnych prac doświadczalnych, w których określał wartość stałej materiałowej l wprowadzonej przez MINDLINA w ośrodku izotropowym ze «związanymi obrotami».

Ciec typu Cosseratów opisał J. L. ERICKSEN [1960, 1961, 1962, a, b, c, d]. Prace te zawierają również interpretację kontinuum Cosseratów jako ciągłego modelu wysokich polimerów. Poza tym zagadnienie ośrodka ciekłego z naprężeniami momentowymi roz-ważali E. L. AERO, A. N. BUŁUGIN i E. W. KUWSZYŃSKI [1965], A. C. ERINGEN [1964] i P. N. KALONI [1965].

Niesymetrię tensora naprężeń w modelu ciągłym opisującym wysiłki przestrzennej ramy o siatce prostokątnej wykazał S. KALISKI [1963]. Zagadnienie naprężeń momentowych w prętach zginanych omówili L. P. WINOKUROW, N. J. DIEREWIANKO [1966]. Teoria naprężeń momentowych wyłoniła się również w zagadnieniach pól sprzężonych: R. C. DIXON, A. C. ERINGEN [1965], S. KALISKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA [1962]. M. MIŚCICU [1963, 1964, a, b, 1965, d] rozpatrzył szereg zagadnień szczegółowych z zakresu lepkosprężystości, plastyczności, lepko-elasto-plastyczności ośrodka Cosseratów ze «związanymi obrotami». P. D. KELLY [1964] podał dla tego ośrodka teorię dyfuzji. Kierunku reprezentowanego powyższymi pracami, jako wychodzącego poza zakres teorii mechanicznych, nie będziemy dalej omawiać.

W ostatnich latach ukazał się szereg prac uogólniających koncepcję Cosseratów. R. A. TOUPIN [1964] zaproponował model tzw. ciała z mikrostrukturą, dla którego podał zasady zachowania oraz warunki niezmienniczości. Mikrostruktura wprowadzona przez R. A. TOUPINA jest opisana układem tzw. wektorów kierunkowych (ang. director). Zagadnieniem tym zajmujemy się szczegółowo w p. 4. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN [1964b] uogólnili kinematykę ośrodka ciągłego przyjmując oprócz klasycznego pola wektora przemieszczenia również tzw. wielobiegunowe przemieszczenia. Zagadnienie to omówimy w p. 5, gdzie wykazemy, że podejścia R. A. TOUPINA oraz A. E. GREENA, R. S. RIVLINA są równoważne.

Poza powyższymi kierunkami w ostatnich latach zbudowano teorię ośrodka z mikrostrukturą konstrukcyjną. Doprowadziło to do powstania koncepcji tzw. ośrodka włóknistego. Przegląd prac z tego zakresu podamy w p. 7.

2. Ośrodek giroskopowy Cosseratów

2.1. Pojęcie podstawowe. W punkcie tym omówimy podstawowe związki i przeprowadzimy ich analizę dla pewnego «uogólnionego» ośrodka ciągłego wprowadzonego przez braci Cosseratów [1909]. Ośrodek ten nazywać będziemy ośrodkiem giroskopowym Cosseratów lub w skrócie ośrodkiem Cosseratów.

Przyjmujemy, że każda cząstka materialna X ośrodka Cosseratów B wyposażona jest w trzy ortonormalne wektory d_{α} ($\alpha = I, II, III$) zwane dalej wektorami kierunkowymi. Aby opisać konfigurację cząstki $X \in B$ ciała Cosseratów, należy podać zarówno jej położenie x w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa E_3 , jak i usytuowanie ortonormalnych wektorów kierunkowych d_{α} . Inaczej mówiąc każda cząstka ciała Cosseratów ma sześć stopni swobody (trzy przesunięcia i trzy obroty). Ruch ciała Cosseratów można opisać związkami

$$(2.1) \quad x_i = x_i(X, t), \quad d_{\alpha i} = d_{\alpha i}(X, t),$$

w których parametr t oznacza czas, x_i są współrzędnymi kartezjańskimi punktu x , natomiast $d_{\alpha i}$ są składowymi wektorów kierunkowych d_{α} .

2.2. Ruch sztywny. Niech

$$x_i^* = x_i^*(X, t^*), \quad d_{\alpha i}^* = d_{\alpha i}^*(X, t^*),$$

oraz

$$x_i = x_i(X, t), \quad d_{\alpha i} = d_{\alpha i}(X, t)$$

będą dwoma ruchami ciała Cosseratów. Będziemy o nich mówili, że różnią się o ruch sztywny, jeżeli zachodzą związki:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_i^*(X, t^*) &= R_{ij} x_j(X, t) + S_i, \\ d_{\alpha i}^*(X, t^*) &= R_{ij} d_{\alpha j}(X, t), \\ t^* &= t + c, \end{aligned}$$

gdzie R_{ij} jest dowolnym tensorem ortogonalnym oraz S_i dowolnym wektorem. Zbiór przekształceń (2.2) ma własności grupy. R. A. TOUPIN [1964] nazywa ją grupą przemieszczeń euklidesowych. Grupa nieskończonych przemieszczeń euklidesowych dana związkami:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x_i^*(X, t^*) &= x_i(X, t) + [\Omega_{ij} x_j(X, t) + S_i] d\lambda, \\ d_{\alpha i}^*(X, t^*) &= d_{\alpha i}(X, t) + \Omega_{ij} d_{\alpha j}(X, t) d\lambda, \\ t^* &= t + c d\lambda, \quad \Omega_{ij} = 0 \end{aligned}$$

jest podgrupą grupy przemieszczeń euklidesowych. Wielkości niezmiennicze względem grupy nieskończonych przemieszczeń euklidesowych są również niezmiennicze względem grupy przemieszczeń euklidesowych (por. np. PONTRIAGIN, *Grupy topologiczne*, W-wa 1961). W dalszym ciągu będziemy zakładali, że pewne wielkości występujące w teorii ciała Cosseratów są niezmiennicze względem zdefiniowanej powyższej grupy przemieszczeń euklidesowych.

2.3. Zasada Hamiltona dla ciała sprężystego Cosseratów. Bracia COSSERATOWIE [1909] rozważania swoje oparli na zasadzie Hamiltona. Przyjęli oni, że wielkość działania ma postać

$$(2.4) \quad A(P \cdot I) = \int_I \int_{X_i(P)} j^{-1} L(x_i, t, d_{\alpha i}, \dot{x}_i, \dot{d}_{\alpha i}, x_{i,K}, d_{\alpha i,K}, X) dv dt,$$

gdzie I jest przedziałem czasu $[t_1, t_2]$, $j = \det x_{i,K}^i$ jest jacobianem odwzorowania $X \rightarrow x$, L — gęstością działania, natomiast $X_i(P)$ jest obszarem przestrzeni Euklidesa E_3 zajęтым przez część $P \subset B$ ciała Cosseratów. Dla ośrodka Cosseratów dopuszczalne są jedynie wariacje $\delta d_{\alpha i}$ wektorów kierunkowych, spełniające warunek:

$$(2.5) \quad d_{\alpha j} \delta d_{\alpha i} + d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j} = \delta(d_{\alpha i} d_{\alpha j}) = 0.$$

Warunek ten oznacza, że wektory kierunkowe w każdej chwili tworzą bazę ortonormalną. Zasada Hamiltona dla ciała sprężystego Cosseratów [wariacje $\delta d_{\alpha i}$ spełniają związek (2.5)] ma postać:

$$(2.6) \quad \delta A(P \cdot I) + \int_I \int_{X_i(P)} (f_i \delta x_i + \tilde{l}_{ij} d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j}) dv dt + \int_I \int_{X_i(\partial P)} (t_i \delta x_i + \tilde{h}_{ij} d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j}) da dt - \\ - \int_{X_i(P)} \varrho (p_i \delta x_i + \tilde{q}_{ij} d_{\alpha i} \delta d_{\alpha j}) dv \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

gdzie f_i i t_i są odpowiednio gęstościami sił objętościowych i powierzchniowych, p_i jest gęstością pędu, ϱ jest gęstością materiału, wielkości \tilde{l}_{ij} , \tilde{h}_{ij} i \tilde{q}_{ij} nazywamy kolejno gęstościami momentów objętościowych i powierzchniowych oraz lokalną gęstością krętu. Nadkreślenia oznaczają, że dany tensor jest antysymetryczny. Jeżeli w równaniach (2.4) i (2.6) pominiemy wektory kierunkowe $d_{\alpha i}$, to otrzymamy zasadę Hamiltona znaną z klasycznej

teorii sprężystości. Warunkami koniecznymi i dostatecznymi spełnienia równania wariacyjnego (2.6) dla dowolnych różniczkowalnych wariacji δx_i , $\delta d_{\alpha i}$, ograniczonych zależnością (2.5), są warunki początkowe

$$(2.7) \quad \varrho p_i = j^{-1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad \varrho \tilde{q}_{ij} = j^{-1} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}_{\alpha [ij]}} d_{\alpha j},$$

warunki brzegowe

$$(2.8) \quad t_{ji} n_j - t_i = 0, \quad \tilde{h}_{kji} n_k - \tilde{h}_{ji} = 0$$

oraz równania ruchu

$$(2.9) \quad \begin{aligned} t_{ji,j} + f_i &= \varrho \dot{p}_i - j^{-1} L_{,i}, \\ \tilde{h}_{kji,k} + t_{[jij]} + \tilde{l}_{ji} &= \varrho \dot{q}_{ji} - j^{-1} K_{[jij]} + \varrho p_{[i} \dot{x}_{j]}. \end{aligned}$$

Występujący w powyższych równaniach tensor t_{ij} zdefiniowany wzorem:

$$(2.10) \quad t_{ji} = -j^{-1} x_{j,k} \frac{\partial L}{\partial x_{i,k}}$$

jest tensorem naprężeń Cauchy'ego. Tensor o składowych

$$(2.11) \quad \tilde{h}_{kij} = -j^{-1} x_{k,\kappa} \frac{\partial L}{\partial d_{\alpha [j,\kappa]} } d_{\alpha i}$$

jest tzw. tensorem naprężeń momentowych. Wielkość K_{ij} występująca w równaniach (2.9) jest zdefiniowana wzorem

$$(2.12) \quad K_{ij} = x_i L_{,j} + d_{\alpha i} \frac{\partial L}{\partial d_{\alpha j}} + \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} + \dot{d}_{\alpha i} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}_{\alpha j}} + x_{i,\kappa} \frac{\partial L}{\partial x_{j,\kappa}} + d_{\alpha i,\kappa} \frac{\partial L}{\partial d_{\alpha j,\kappa}}.$$

Równania (2.8) i (2.9) bywają nazywane warunkami brzegowymi oraz równaniami ruchu Cosseratów. Równanie (2.9)₂ wskazuje na to, że tensor naprężeń Cauchy'ego t_{ij} nie jest tu symetryczny.

2.4. Warunki niezmienniczości i zasady zachowania. Za E. i F. COSSERATAMI będziemy postulowali niezmienniczość gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Można wykazać, że warunki konieczne i dostateczne niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych mają postać

$$(2.13) \quad L_{,i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad K_{[ij]} = 0.$$

Rozpatrując zasadę Hamiltona (2.6) dla poniższych dopuszczalnych kombinacji wariacji zmiennych niezależnych

1. $dx_i = S_i, \quad \delta d_{\alpha i} = 0, \quad \dot{S}_i = 0;$
2. $dx_i = \Omega_{ij} x_j, \quad \delta d_{\alpha i} = \Omega_{ij} d_{\alpha j}, \quad \dot{\Omega}_{ij} = \Omega_{(ij)} = 0;$
3. $\delta x_i = \dot{x}_i, \quad \delta d_{\alpha i} = 2d_{\alpha j} \tilde{\omega}_{ji},$

gdzie

$$(2.14) \quad \tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} d_{\alpha i} \dot{d}_{\alpha j}$$

otrzymamy następujące równania:

$$(2.15) \quad \int_{X_i(P)} \varrho p_i dv \Big|_{t_1}^2 - \int_I \int_{X_i(P)} f_i dv dt - \int_I \int_{X_i(\partial P)} t_i da dt = \int_I \int_{X_i(P)} j^{-1} L_{,i} dv dt,$$

$$(2.16) \quad \int_{X_i(P)} \varrho (p_{[i} x_{j]} + \tilde{q}_{ji}) dv \Big|_{t_1}^2 - \int_I \int_{X_i(P)} (f_{[i} x_{j]} + \tilde{l}_{ji}) dv dt - \\ - \int_I \int_{X_i(\partial P)} (t_{[i} x_{j]} + \tilde{h}_{ji}) da dt = \int_I \int_{X_i(P)} j^{-1} K_{[j]i} dv dt,$$

$$(2.17) \quad \int_{X_i(P)} E dv \Big|_{t_1}^2 - \int_I \int_{X_i(P)} (f_i \dot{x}_i + 2\tilde{l}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) dv dt - \\ - \int_I \int_{X_i(\partial P)} (t_i \dot{x}_i + 2\tilde{h}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) da dt = - \int_I \int_{X_i(P)} j^{-1} \frac{\partial L}{\partial t} dv dt.$$

W równaniach tych

$$E = \varrho (p_i \dot{x}_i + 2\tilde{q}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) - j^{-1} L$$

jest gęstością całkowitej energii wewnętrznej. Z uwagi na warunki (2.13) wyrażenia po lewych stronach równań (2.15)–(2.17) są równe zeru. Zatem

$$(2.18) \quad \int_{X_i(P)} \varrho p_i dv \Big|_{t_1}^2 = \int_I \int_{X_i(P)} f_i dv dt + \int_I \int_{X_i(\partial P)} t_i da dt,$$

$$(2.19) \quad \int_{X_i(P)} \varrho (p_{[i} x_{j]} + \tilde{q}_{ji}) dv \Big|_{t_1}^2 = \int_I \int_{X_i(P)} (f_{[i} x_{j]} + \tilde{l}_{ji}) dv dt + \int_I \int_{X_i(\partial P)} (t_{[i} x_{j]} + \tilde{h}_{ji}) da dt,$$

$$(2.20) \quad \int_{X_i(P)} E dv \Big|_{t_1}^2 = \int_I \int_{X_i(P)} (f_i \dot{x}_i + 2\tilde{l}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) dv dt + \int_I \int_{X_i(P)} (t_i \dot{x}_i + 2\tilde{h}_{ij} \tilde{\omega}_{ij}) da dt.$$

Otrzymane związki nazywamy kolejno zasadami zachowania pędu, krętu i energii mechanicznej dla ciał typu Cosseratów. Z drugiej strony można wykazać, że zasady zachowania pędu (2.18), krętu (2.19) i energii mechanicznej (2.20) są równoważne warunkom (2.13) niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Z całkowych zasad zachowania pędu i krętu można otrzymać warunki brzegowe (2.8) oraz równania ruchu (2.9).

2.5. Pseudotensor naprężeń momentowych. Zwróćmy uwagę, że prawie wszystkie wielkości wprowadzone w poprzednich punktach tego rozdziału, nie występujące w klasycznej teorii sprężystości, są tensorami antysymetrycznymi. Mianowicie tensory gęstości momentów powierzchniowych \tilde{h}_{ij} , gęstości momentów objętościowych \tilde{l}_{ij} , lokalnej gęstości krętu \tilde{q}_{ij} , naprężeń momentowych \tilde{h}_{kij} oraz tensor $\tilde{\omega}_{ij}$ prędkości obrotu wektorów kierunkowych są antysymetryczne względem indeksów ij . Każdy z nich może być jednoznacznie przedstawiony przy pomocy pseudowektora bądź też pseudotensora. Dla przykładu tensor naprężeń momentowych \tilde{h}_{kij} można przedstawić w następującej postaci:

$$(2.21) \quad \tilde{h}_{kij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijl} m_{kl},$$

gdzie m_{kl} jest tzw. pseudotensorem naprężeń momentowych, natomiast ε_{ijl} jest trójwektorem Ricciego. Związek odwrotny do (2.21) ma postać

$$(2.22) \quad m_{kl} = \tilde{h}_{kij} \varepsilon_{ijl}.$$

Nasuwając na równania (2.8)₂ i (2.9)₂ trójwektor Ricciego ε_{ijl} otrzymamy równoważną postać równań ruchu i warunków brzegowych Cosseratów

$$(2.23) \quad m_{kl,k} + t_j \varepsilon_{jil} + l_l = \rho q_l + \rho p_j \dot{x}_i \varepsilon_{ijl}, \quad m_{kl} n_k - m_k = 0,$$

gdzie występujące pseudowektory momentów objętościowych l_l , momentów powierzchniowych m_k oraz lokalnej gęstości krętu q_k są zdefiniowane analogicznie jak (2.22). W podobny sposób można przekształcić zasady zachowania krętu i energii mechanicznej:

$$(2.24) \quad \int_{x_i(P)} \rho (p_j x_i \varepsilon_{ijl} + q_l) dv \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_I \int_{x_i(P)} (f_j x_i \varepsilon_{ijl} + l_l) dv dt + \int_I \int_{x_i(P)} (t_j x_i \varepsilon_{ijl} + m_l) da dt,$$

$$\int_{x_i(P)} E dv \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_I \int_{x_i(P)} (f_i \dot{x}_i + l_i \omega_i) dv dt + \int_I \int_{x_i(P)} (t_i \dot{x}_i + m_i \omega_i) da dt,$$

gdzie ω_i jest pseudowektorem prędkości obrotu bazy wektorów kierunkowych d_a .

Przedstawiona w tym rozdziale teoria ciała sprężystego Cosseratów została oparta na podstawowej pracy Toupin [1964], aczkolwiek zawiera głównie idee braci Cosseratów. Z prac dotyczących podstaw teorii można wymienić elementarne liniowe ujęcia KUWSZYŃSKIEGO i AERO [1963] oraz PALMOWA [1964 a]. Zagadnienie całkowania zlinearyzowanego podstawowego układu równań zostało poruszone w pracach GÜNTHERA [1958], AERO i KUWSZYŃSKIEGO [1964] oraz SANDRU [1966]. GÜNTHER [1958] wykazał analogię statyczno-geometryczną w liniowej teorii ośrodków typu Cosseratów i wykorzystał ją do zbudowania funkcji naprężeń. AERO i KUWSZYŃSKI [1964] przedstawili rozwiązanie układu równań przemieszczeniowych w postaci sumy dwóch funkcji wektorowych, z których jedna jest rozwiązaniem układu równania Lamégo. SANDRU [1966] przedstawił rozwiązanie typu Galerkinia oraz Papkowicza-Neubera. Rozwiązał również kilka zagadnień szczególnych. Płaskie zagadnienie koncentracji naprężeń rozpatrywał PALMOW [1964], który wykazał, że zagadnienia płaskiego stanu naprężenia dla ośrodków Cosseratów i dla tzw. ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami (por. p. 3) są sobie równoważne.

Szczególną odmianę teorii Cosseratów zbudował WESOŁOWSKI [1965]. Założył on, że momenty powierzchniowe wykonują pracę na sumie obrotów bazy wektorów kierunkowych i obrotów elementów powierzchniowych. Z przeprowadzonych rozważań wynika jednak, że momenty powierzchniowe pracują tylko na obrotach baz wektorowych.

3. Materiały nieproste drugiego rzędu

3.1. Sprężyste materiały nieproste. W klasycznej teorii sprężystości gęstość energii odkształcenia zależy od pierwszego gradientu odkształcenia $x_{i,\alpha}$. Jednak nie ma formalnych przeszkód do wprowadzenia wyższych gradientów jako dodatkowych argumentów gęstości energii. Zaproponowali to po raz pierwszy A. L. CAUCHY [1851] i A. J. C. B. DE SAINT-VENANT [1869]. Powyższe zagadnienie omawiał również J. T. JARAMILLO [1929]. We wszystkich wymienionych pracach stan naprężenia był opisywany symetrycznym tensorem

naprężeń Cauchy'ego. Teoria materiałów zawierająca wyższe gradienty odkształcenia i uwzględniająca powstawanie naprężeń momentowych została podana przez R. TIFFENA i A. C. STEVENSONA [1956]. Jednak zarówno w tej pracy, jak i w monografii C. TRUESDELLA i R. A. TOUPINA [1960] nie zwrócono uwagi na fakt, że część naprężeń momentowych nie wyraża się przez gęstość działania. Powyższe spostrzeżenie, dokonane przez R. D. MINDLINA, zostało uwzględnione w pracy R. A. TOUPINA [1962]. W pracy tej przyjęto, że gęstość działania zależy od pierwszego i drugiego gradientu odkształcenia. W pracach R. A. TOUPINA [1964] oraz C. TRUESDELLA i W. NOLLA [1965] podano zasady zachowania dla tej teorii w zestawieniu z równaniami ośrodka Cosseratów.

Materiał, dla którego gęstość energii odkształcenia zależy od drugiego gradientu odkształcenia, będziemy dalej nazywać materiałem nieprostym drugiego rzędu (R. A. TOUPIN [1964]). Przez analogię do powyższej definicji można również wprowadzić materiały nieproste rzędu N (tj. materiały, dla których gęstość energii zależy od N -go gradientu odkształcenia).

Poniżej podamy podstawowe równania opisujące materiał nieprosty rzędu drugiego. W następnym podpunkcie omówimy pewien przypadek szczególny tego materiału, pokrywający się z pewnym typem ośrodka Cosseratów. Ograniczymy się do zagadnień trójwymiarowych. Powłoki z materiału nieprostego drugiego rzędu zostały opisane w pracy H. COHENA i C. N. DE SILVY [1966]. Zawiera ona kinematykę takich powłok, podstawowy układ równań otrzymany z zasady wariacyjnej oraz podział zagadnień na membranowe i zgięciowe. Omówiono tam również izotropową powłokę z materiału nieprostego drugiego rzędu.

Zgodnie z przytoczoną powyżej definicją materiału nieprostego drugiego rzędu energię sprężystą dla pewnego obszaru P tego materiału wyrazimy wzorem:

$$(3.1) \quad E(P) = \int_P \mathcal{L}(x_{i,\alpha}; x_{i,\alpha\beta}; X_\alpha) dV,$$

gdzie $x_{i,\alpha}$ oznacza gradient odkształcenia, $x_{i,\alpha\beta}$ — gradient gradientu odkształcenia.

O występującej we wzorze (3.1) gęstości energii wewnętrznej zakładamy, że jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych (p. 2.2). Musi ona wtedy spełniać warunek:

$$(3.2) \quad \mathcal{L}(x_{i,\alpha}; x_{i,\alpha\beta}; X_\alpha) = \mathcal{L}(R_{ij}x_{j,\alpha}; R_{ij}x_{j,\alpha\beta}; X_\alpha),$$

gdzie R_{ij} jest dowolnym tensorem ortogonalnym. A. R. TOUPIN [1964] wykazał, że aby warunek (3.2) był spełniony, gęstość \mathcal{L} powinna dać się przedstawić w postaci:

$$(3.3) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(E_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta\gamma}, A_{\alpha\beta}, X_\alpha),$$

gdzie:

$$(3.4) \quad E_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (g_{ij} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} - A_{\alpha\beta}),$$

$$K_{\alpha\beta\gamma} \equiv x_{i,\alpha} x_{i,\beta\gamma} = E_{\alpha\beta,\gamma} + E_{\alpha\gamma,\beta} - E_{\gamma\beta,\alpha}.$$

Funkcja \mathcal{L} zależy więc dla sprężystych materiałów nieprostych drugiego rzędu od sześciu składowych klasycznego tensora odkształceń skończonych, materialnych gradientów tego tensora oraz współrzędnych materialnych X_α .

Równania ruchu i warunki brzegowe można otrzymać z odpowiedniego równania dla wariacji $\delta\mathcal{L}$. Rozwijając to równanie we współrzędnych przestrzennych, po pominięciu członów dynamicznych, otrzymuje się następujące równania równowagi:

$$(3.5) \quad t_{ij,i} + f_j = 0,$$

w których t_{ij} jest niesymetrycznym tensorem naprężenia, a f_j wektorem gęstości sił masowych. Tensor t_{ij} jest tu definiowany innym związkiem niż w p. 2, mianowicie

$$(3.6) \quad t_{ij} \equiv j^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha\beta}} \right)_{,\beta} \right] x_{j,\alpha}.$$

Warunki brzegowe otrzymane z tego samego równania wariacyjnego mają postać:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} t_{ij} n_j - d_j h_{jik} n_k + h_{jik} (b_{jk} - b_{qq} n_j n_k) &= t_i, \\ h_{jik} n_j n_k &= m_i, \quad X_\alpha \in \partial P, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.8) \quad h_{jik} = j^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j,\alpha\beta}} x_{i,\alpha} x_{k,\beta}$$

jest tzw. tensorem hipernaprężeń oraz m_i wektorem hipersił powierzchniowych, n_i jednostkowym wektorem normalnym do ∂P , b_{ij} drugim tensorem podstawowym powierzchni ∂P , $d_j h_{jik}$ dywergencją tensora h_{jik} na ∂P ($d_j \equiv \partial_j - n_j n_i \partial_i$).

Oprócz tego przy definiowaniu tensora naprężeń otrzymuje się zależność

$$(3.9) \quad h_{jik,k} + t_{ij} = \sqrt{\frac{A}{a}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha}} x_{j,\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i,\alpha\beta}} x_{j,\alpha\beta} \right].$$

Jak łatwo dostrzec, z równania (3.3) wynika symetria wyrażenia w nawiasie kwadratowym wzoru (3.9) względem wskaźników i, j . Lewa strona (3.9) musi więc spełniać dodatkowy związek

$$t_{[ij]} + h_{[j]i]k,k} = 0,$$

który jest podobny do równań równowagi Cosseratów dla momentów [por. wzór (2.9)₂].

Pojęcie materiału nieprostego zostało rozszerzone w pracy Cz. WOŹNIAKA [1967, b] na zagadnienia termosprężystości. Wprowadzono tam pojęcie materiału «termicznie nieprostego», tj. materiału, w którym gęstość energii swobodnej φ (oraz pozostałe funkcje stanu) zależy nie tylko od gradientów odkształcenia i od temperatury, lecz również od gradientów temperatury. W cytowanej pracy (por. także p. 6.7) wyprowadzono podstawowy układ równań sprzężonej termosprężystości takich materiałów. W szczególnym przypadku materiału nieprostego drugiego rzędu energia swobodna φ zależy od parametrów mechanicznych $C_{\alpha\beta} = x_{k,\alpha} x_{k,\beta}$, $C_{\alpha\beta\gamma} = x_{k,\alpha} x_{k,\beta\gamma}$ oraz temperatury θ i jej gradientu $\theta_{,\alpha}$. Równanie stanu dla tensora naprężeń t_{ik} oraz tensora hipernaprężeń t_{mak} mają postać

$$(3.10) \quad \begin{aligned} t_{ik} + (t_{mak,m} + \bar{f}_{ak}) x_{i,\alpha} &= \varrho \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_{\alpha\beta}} x_{k,\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma}} x_{k,\beta\gamma} \right) x_{i,\alpha}, \\ t_{i(\gamma)k|X_\beta),t} &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma}} x_{k,\alpha}, \end{aligned}$$

w której $\bar{f}_{\alpha k}$ jest tensorem gęstości hipersił objętościowych (łącznie z siłami bezwładności). Równanie przewodnictwa cieplnego ma postać:

$$(3.11) \quad h_{i,i} + \varrho (c \dot{\theta} + c_{\alpha} \dot{\theta}_{,\alpha}) + \varrho \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial \theta} \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{\alpha\beta} \partial \theta_{,\delta}} \theta_{,\delta} \right) \dot{C}_{\alpha\beta} + \\ + \varrho \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma} \partial \theta} \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{\alpha\beta\gamma} \partial \theta_{,\delta}} \theta_{,\delta} \right) \dot{C}_{\alpha\beta\gamma} + \varrho h = 0,$$

w której $h_i = h_i(\theta_{,i}/\theta)$ jest wektorem przepływu ciepła, h jest wydajnością źródeł ciepła oraz c i c_{α} są wielkościami charakteryzującymi pojemność cieplną ciała. Nadmienimy jeszcze, że rozkład entropii w powyższym przypadku jest określany nie tylko polem skalarowym $\eta = -\partial\varphi/\partial\theta$, lecz również polem wektorowym $d_{\alpha} = -\partial\varphi/\partial\theta_{,\alpha}$.

Wiele prac omawia pewne szczególne zagadnienie materiału nieprostego. Jeśli założymy, że w kontinuum Cosseratów (por. p. 2) prędkość obrotu bazy wektorowej $\overset{\circ}{d}$ pokrywa się z prędkością obrotu elementu objętościowego ośrodka, to otrzymamy model ciała, który jest również przypadkiem szczególnym materiału nieprostego drugiego rzędu. Model ten R. A. TOUPIN [1964] nazywa ośrodkiem Cosseratów ze związanymi obrotami. C. TRUESDELL i W. NOLL [1964, § 96] taki materiał nazywają materiałem Grioli-Toupina. Zajmiemy się nim poniżej. Należy zaznaczyć, że oprócz materiału Grioli-Toupina możliwe są również inne przypadki szczególne materiału nieprostego drugiego rzędu, z których dwa przedstawiono w pracy Cz. WOŹNIAKA [1967, a].

3.2. Materiał Grioli-Toupina. Jak pamiętamy (p. 2) w ośrodku Cosseratów ortonormalna baza wektorowa $\overset{\circ}{d}$, zaczepiona w punkcie X , przemieszcza się tak jak punkt X , lecz może doznać obrotów niezależnych od ruchu punktu X . Poniżej rozpatrzmy przypadek, gdy prędkość obrotu bazy $\overset{\circ}{d}$ w punkcie X jest taka sama jak prędkość obrotu kierunków głównych odkształcenia w tym punkcie, to znaczy:

$$\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij},$$

gdzie ω_{ij} jest prędkością obrotu kierunków głównych odkształcenia ośrodka, a $\tilde{\omega}_{ij}$ — zdefiniowaną wzorem (2.15) prędkością obrotu wektorów kierunkowych. Gęstość całkowitej energii wewnętrznej wyraża się wtedy wzorem:

$$(3.12) \quad E = \frac{1}{2} \varrho \dot{x}^2 + \mathcal{L}(x_{,i}^i; x_{i,\alpha\beta}; X_{\alpha}).$$

W pracy R. A. TOUPINA [1964] wykazuje się, że dla takich materiałów naprężenia momentowe wyrażają się zależnością

$$(3.13) \quad h_{[i(j]k)} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{[j,\alpha\beta]}^i} x_{i,\alpha} x_{k,\beta},$$

przy czym $h_{[i]jk}$ pozostaje w rozpatrywanej teorii nieokreślone. Funkcja \mathcal{L} powinna wtedy dodatkowo spełniać 10 następujących związków:

$$(3.14) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{(i\alpha\beta}^j} x_{j,\alpha} x_{k),\beta} = 0.$$

Warunki niezmienniczości \mathcal{L} względem ruchów sztywnych można przedstawić następująco:

$$(3.15) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{[i, \alpha}} x_{j], \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{[i, \alpha \beta}} x_{j], \alpha \beta} = 0.$$

Ogólne rozwiązanie równań (3.14), (3.15) (wg R. A. TOUPINA [1962]) ma postać

$$(3.16) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(E_{\alpha\beta}, K_{[\alpha\beta]\gamma}, X_{\alpha}).$$

Wyrażenie (3.16) świadczy o tym, że omówiony przypadek szczególny kontinuum Cosseratów jest jednocześnie przypadkiem szczególnym materiału nieprostego drugiego rzędu [por. wzór (3.3)].

Podstawowy układ równań dla ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami (materiał Grioli-Toupina) został podany w pracach G. GRIOLI [1960, 1962], w pracy R. A. TOUPINA [1962] oraz dla przypadku liniowego materiału hipersprężystego w pracach E. A. AERO i E. W. KUWSZYŃSKIEGO [1960, 1964]).

Zasady zachowania masy, pędu, krętu i energii mechanicznej mają dla materiału Grioli-Toupina poniższą postać:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} J\varrho &= \varrho_0, \quad J \equiv \sqrt{\frac{a}{A}} \det x_{i, \alpha}, \\ t_{ij, i} + f_j &= \varrho \ddot{x}_j, \\ m_{ij, i} + l_j + t_{kl} \varepsilon_{klj} &= 0, \\ \dot{\mathcal{L}} &= t_{(ij)} \dot{x}_{j, i} + \frac{1}{2} m_{ij} \varepsilon_{nmj} \dot{x}_{n, ml}. \end{aligned}$$

Występujący we wzorach (3.17) tensor naprężeń momentowych m_{ij} został omówiony w p. 2 [por. wzór (2.21)], a $m_{ij}^{(d)}$ oznacza część dewiacyjną tego tensora.

Z równania (3.17)₄ R. D. MINDLIN i H. F. TIERSTEN ponownie wprowadzili równania konstytutywne, oparte na miarach odkształcenia R. A. TOUPINA $E_{\alpha\beta}, K_{[\alpha\beta]\gamma}$. Zamiast drugiej z tych miar w ich pracy wykorzystano tensor:

$$(3.18) \quad K_{\alpha\beta} \equiv -E_{\alpha\mu, \nu} \varepsilon_{\mu\nu\beta}.$$

Równania konstytutywne dla hipersprężystych materiałów Grioli-Toupina mają wtedy postać:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} t_{(ij)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_{\alpha\beta}} x_{i, \alpha} x_{j, \beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\alpha\beta}} x_{i, \alpha\mu} x_{j, \nu} \varepsilon_{\mu\nu\beta}, \\ m_{ij}^{(d)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{\alpha\beta}} x_{i, \alpha} X_{\beta, j}. \end{aligned}$$

W omawianej pracy oraz w pracy R. D. MINDLINA [1964] przeprowadzono linearyzację powyższych związków. Wtedy

$$(3.20) \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl} + b_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varkappa_{kl} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl},$$

gdzie ε_{ij} oznacza klasyczny tensor małych odkształceń, a $\varkappa_{ij} \equiv \varepsilon_{il, n} \varepsilon_{nlj}$. W przypadku szczególnym izotropii materiału w związku (3.20) występują cztery niezależne stałe ma-

teriałowe. W. NOWACKI [1966] wprowadził dodatkowo wpływ klasycznego pola termicznego do równań konstytutywnych izotropowego materiału Grioli-Toupina. Gęstość energii ma wtedy postać:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{C} &= \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{ii})^2 + \mu' \kappa_{ij} \kappa_{ij} + \mu'' \kappa_{ij} \kappa_{ji} - \beta \gamma_{kk} \theta - \frac{m}{2} \theta^2, \\ \beta &\equiv \alpha_i (3\lambda + 2\mu), \end{aligned}$$

gdzie θ oznacza temperaturę odniesioną do temperatury stanu naturalnego, α_i współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej. Z dodatniej określoności formy (3.21) R. D. MINDLIN i H. F. TIERSTEN wyprowadzają następujące nierówności dla stałych materiałowych

$$(3.22) \quad \mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu' > 0, \quad -1 < \frac{\mu''}{\mu'} < 1.$$

Związki fizyczne dla omawianego materiału przyjmują postać

$$(3.23) \quad \begin{aligned} t_{(ij)} &= \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \beta \theta) \delta_{ij}, \\ m_{ij}^{(d)} &= 2\mu' \left(\kappa_{ij} + \frac{\mu''}{\mu'} \kappa_{ji} \right). \end{aligned}$$

W cytowanej pracy W. NOWACKIEGO [1966] znajduje się również przemieszczeniowy układ równań, dla którego przeprowadzano dyskusję własności poprzez formalne rozprężenie. Funkcje Greena dla tego układu wyprowadził J. WYRWIŃSKI [1966].

Należy zwrócić uwagę na pewną osobliwość materiału Grioli-Toupina związaną z warunkami brzegowymi. Jak wykazali R. D. MINDLIN i H. F. TIERSTEN [1962] oraz W. T. KOITER [1964], w kontinuum ze związanymi obrotami można dać jedynie pięć warunków brzegowych [por. również wzór (3.6)]. Na przykład wyrażone w naprężeniach będą one miały postać:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \left[t_{(ij)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jli} (m_{kl, k}^{(d)} - m_{(nn), l}) \right] n_j &= t_i - \frac{1}{2} \varepsilon_{jli} m_{(n), l} n_j, \\ m_{ji}^{(d)} n_j - m_{nn} n_i &= m_i - m_{(n)} n_i, \end{aligned}$$

gdzie $m_{(n)} \equiv m_i n_i$, $m_{(nn)} \equiv m_{ji}^{(d)} n_j n_i$.

Można dostrzec, że wzór (3.24)₁ opisuje trzy składowe wektora gęstości siły, a wzór (3.24)₂ dwie składowe (styczne do brzegu) wektora gęstości momentu.

Cytowana wyżej praca W. T. KOITERA zawiera również warunki na krawędzi dwu płatów gładkich powierzchni brzegowej w kontinuum z materiału Grioli-Toupina, wprowadzone po raz pierwszy w innym ujęciu przez R. A. TOUPINA [1962].

Opracowanie R. D. MINDLINA i H. F. TIERSTENA [1964] obok podstaw liniowej teorii materiału Grioli-Toupina zawiera również analizę ruchu falowego, którą przeprowadzono przy pomocy funkcji przemieszczeń. Jeśli u jest wektorem przemieszczenia, to powyższe funkcje wprowadza się następująco:

$$(3.25) \quad u = \text{grad } \varphi + \text{rot } H, \quad \text{div } H = 0.$$

Po podstawieniu do układu równań przemieszczeniowych otrzymamy

$$(3.26) \quad c_1^2 \nabla^2 \varphi = \ddot{\varphi}, \quad c_2^2 (1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 H = \ddot{H},$$

gdzie

$$(3.27) \quad c_2^2 \equiv \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 \equiv \frac{\mu}{\rho}, \quad l^2 \equiv \frac{\mu'}{\mu}.$$

Układ równań (3.26) został wykorzystany do konstrukcji rozwiązań szczegółowych w pracach R. D. MINDLINA [1963 b, 1964], G. N. SAWINA [1965], G. N. SAWINA i A. N. GUZA [1966], W. A. PALMOWA [1964 a, b]. W pierwszej z wyżej cytowanych prac R. D. MINDLINA oraz w pracy G. N. SAWINA i A. N. GUZA rozwiązania oparto na wprowadzonej funkcji zmiennej zespolonej.

Na zakończenie należy wspomnieć o wyprowadzonych w pracy W. F. KOITERA [1964] twierdzeniach o minimum energii potencjalnej i minimum pracy dodatkowej, które pozwalają zastosować przybliżone metody rozwiązań.

4. Ciała z mikrostrukturą

4.1. Podstawowe pojęcie i definicje. W punkcie tym rozważać będziemy pewien uogólniony model ośrodka wprowadzony przez R. A. TOUPINA [1964], który będziemy nazywać ciałem z mikrostrukturą⁽¹⁾ i oznaczać symbolem B . Elementami ciała B są punkty materialne X , przy czym każdemu punktowi $X \in B$ przyporządkowujemy układ zaczepionych w nim n wektorów d_n ($n = 1, 2, \dots, n$). Wektory d_n nazwijmy wektorami kierunkowymi.

Powyższa definicja ciała z mikrostrukturą jest jedną z możliwych koncepcji uogólnienia klasycznej definicji ciała (W. NOLL [1958]). Szczególnym przypadkiem ciała z mikrostrukturą jest ośrodek Cosseratów omówiony w p. 2. Nie będziemy tu zajmować się związkiem pomiędzy zdefiniowanym powyższym modelem ciała z mikrostrukturą a rzeczywistym ciałem z mikrostrukturą.

Przegląd zagadnień dotyczących ciała z mikrostrukturą oprzemy przede wszystkim na podstawowej pracy R. A. TOUPINA [1964] jako najbardziej reprezentatywnej dla tej problematyki⁽²⁾.

4.2. Kinematyka. Niech x oznacza punkt trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa E , w którym w chwili t znajduje się punkt materialny X ciała B . Ruch ciała z mikrostrukturą możemy wtedy opisać związkami:

$$(4.1) \quad x = x(X, t), \quad d_n = d_n(X, t)$$

bądź wprowadzając kartezjańskie współrzędne materialne X_K ($K = 1, 2, 3$) w B oraz przestrzenne x_k ($k = 1, 2, 3$) w E można je przedstawić w równoważnej postaci

$$(4.2) \quad x_k = x_k(X_K, t), \quad d_{nk} = d_{nk}(X_K, t).$$

(1) Według wcześniejszej nomenklatury jest ono nazywane ciałem zorientowanym (ang. oriented body). Koncepcja ciała zorientowanego pochodzi od J. L. ERICKSENSA i C. TRUESDELLA [1958]. Była ona pierwotnie zastosowana do opisu kinematyki i statyki prętów i powłok, a następnie uogólniona przez C. TRUESDELLA [1960, § 61] na przypadek ciała trójwymiarowego.

(2) Zwięzłe omówienie pracy R. A. TOUPINA [1964] przedstawili C. TRUESDELL i W. NOLL [1965, § 98].

Niech $x_{k,K}$ oraz $d_{\alpha k,K}$ oznaczają odpowiednio gradient odkształcenia oraz gradient odkształcenia mikrostruktury. Wprowadźmy następnie prawy tensor odkształcenia Cauchy'ego-Greena

$$(4.3) \quad a_{KL} \equiv x_{i,K} x_{i,L}$$

oraz tzw. tensor odkształcenia mikrostruktury

$$(4.4) \quad q_{\alpha\beta} \equiv d_{i\alpha} d_{i\beta}.$$

Wartości tych tensorów w chwili porównawczej $t = T$ oznaczmy odpowiednio

$$(4.5) \quad A_{KL}(X) \equiv a_{KL}(X, T), \quad Q_{\alpha\beta}(X) \equiv q_{\alpha\beta}(X, T).$$

4.3. Ruch sztywny. Ruchem sztywnym ciała z mikrostrukturą nazywać będziemy ruch, w którym związki (4.2) mają postać (por. 2.2)

$$(4.6) \quad x_i(X, t) = R_{iK}(t) X_K + V_i(t), \quad d_{\alpha i}(X, t) = R_{iK}(t) D_{\alpha K}(X),$$

gdzie R_{iK} jest tensorem ortogonalnym, natomiast

$$(4.7) \quad D_{\alpha}(X) \equiv d_{\alpha}(X, T)$$

są wektorami kierunkowymi w chwili porównawczej. Oznacza to, że ciało nie odkształca się w sensie klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych, a wektory kierunkowe są związane w sposób sztywny z ciałem. Warunki konieczne ruchu sztywnego wyrażają się wzorami:

$$(4.8) \quad a_{KL}(X, t) = A_{KL}(X), \quad q_{\alpha\beta}(X, t) = Q_{\alpha\beta}(X).$$

Według R. A. TOUPINA [1964] są to również warunki dostateczne. Nie trudno udowodnić, że stwierdzenie to nie jest prawdziwe. Na przykład dla

$$(4.9) \quad x_i(X, t) = R_{iK}(t) X_K + V_i(t), \quad d_{\alpha i}(X, t) = S_{iK}(t) D_{\alpha K}(X),$$

gdzie R_{iK} i S_{iK} są dwoma dowolnymi lecz różnymi od siebie tensorami ortogonalnymi, związki (4.6) nie są spełnione, podczas gdy warunki konieczne (4.8) zachodzą. Związki (4.3), (4.4) i (4.9) wskazują na to, że miary odkształcenia a_{KL} i $q_{\alpha\beta}$ nie opisują względnego obrotu mikrostruktury.

4.4. Zasada Hamiltona. Punktem wyjścia dalszych rozważań dotyczących ciała hipersprężystego z mikrostrukturą może być zasada wariacyjna Hamiltona. Zasadę tę R. A. TOUPIN [1964] przyjmuje w postaci

$$(4.10) \quad \delta A(P \cdot I) + \int_I \int_P (F_i \delta x_i + G_i^\alpha \delta d_{\alpha i}) dV dt + \\ + \int_I \int_{\partial P} (T_i \delta x_i + H_i^\alpha \delta d_{\alpha i}) dA dt - \int_P (P_i \delta x_i + Q_i^\alpha \delta d_{\alpha i}) dV \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

gdzie A jest wielkością działania dopuszczającą istnienie gęstości działania: $L = L(x_i, t, d_{\alpha i}, \dot{x}_i, \dot{d}_{\alpha i}, x_{i,K}, d_{\alpha i,K}, X)$, F_i, G_i^α są uogólnionymi siłami objętościowymi, T_i, H_i^α są uogólnionymi siłami powierzchniowymi, natomiast P_i, Q_i^α są uogólnionymi pędami. Wszystkie te wielkości są odniesione względem jednostki objętości lub powierzchni konfiguracji porównawczej.

Z postaci gęstości działania wynika, że rozpatrywany materiał może być nazwany materiałem prostym z mikrostrukturą. Ogólną teorię materiału nieprostego z wektorami

kierunkowymi, zbudowaną w oparciu o termodynamikę materiałów o zanikającej pamięci (B. D. COLEMAN [1964]) przedstawił S. ZAHORSKI [1967]. Wykazał on, że funkcjonal energii swobodnej może w ogólnym przypadku zależeć od pól uogólnionych sił objętościowych.

Postulowana przez TOUPINA zasada Hamiltona jest uogólnieniem zasady przyjętej we wcześniejszych pracach J. L. ERICKSENA [1961], [1962 b. c]. Równanie (4.10) jest bowiem ogólniejszą postacią równania podanego u J. L. ERICKSENA [1962, b], które w przyjętych w p. 2 niniejszej pracy oznaczeniach przyjmuje postać

$$(4.11) \quad \delta \int_{X_i(P)} L(\varrho, d_i d_i, \kappa) dv = \int_{X_i(\partial P)} (t_i \delta x_i + h_i \delta d_i) da + \int_{X_i(P)} \varrho (f_i \delta x_i + l_i \delta d_i) dv.$$

Powyższe równanie opisuje zachowanie się cieczy nielepkiej z jednym wektorem kierunkowym, zwanej przez J. L. ERICKSENA cieczą anizotropową.

4.5. Równania ruchu w opisie materiałowym. Warunkami koniecznymi i dostatecznymi spełnienia równania wariacyjnego (4.10) dla dowolnych różniczkowalnych wariacji δx_i , $\delta d_{\alpha i}$ pól zmiennych niezależnych są równania ruchu:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} T_{Ki, K} + F_i - \dot{P}_i^* &= -L_i, \\ H_{Ki, K}^{\alpha} - G^{*\alpha}_i + G^{\alpha}_i - \dot{Q}^{*\alpha}_i &= 0, \end{aligned} \quad X \in P, \quad t \in I,$$

w których

$$(4.13) \quad \begin{aligned} G^{*\alpha}_i &\equiv -\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha i}}, & T_{Ki} &\equiv -\frac{\partial L}{\partial x_{i, K}}, & H_{Ki}^{\alpha} &\equiv -\frac{\partial L}{\partial d_{\alpha i, K}}, \\ P_i^* &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, & Q_i^{*\alpha} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{d}_{\alpha i}}, \end{aligned}$$

oraz warunki brzegowe i początkowe:

$$(4.14) \quad T_{Ki} N_K - T_i = 0, \quad H_{Ki}^{\alpha} N_K - H^{\alpha}_i = 0, \quad X \in \partial P, \quad t \in I,$$

$$(4.15) \quad P_i^* - P_i = 0, \quad Q_i^{*\alpha} - Q_i^{\alpha} = 0, \quad X \in P, \quad t = t_1 \quad \text{lub} \quad t = t_2.$$

W powyższych wzorach N_K jest jednostkowym wektorem zewnętrznym normalnym do brzegu $X_T(\partial P)$ obszaru $X_T(P)$ zajmowanego przez część P ciała B w chwili porównawczej T .

Z równań (4.12) i (4.14) wynika, że T_{Ki} i H_{Ki}^{α} mogą być nazwane uogólnionymi tensorami naprężeń Pioli-Kirchhoffa.

4.6. Grupa przemieszczeń euklidesowych. Będziemy mówili, że dwa ruchy $(x^*(X, t^*), d_{\alpha}^*(X, t^*))$, $(x(X, t), d_{\alpha}(X, t))$ danego ciała z mikrostrukturą różnią się o przemieszczenie euklidesowe, jeżeli zachodzą związki

$$(4.16) \quad \begin{aligned} x_i^*(X, t^*) &= R_{ij} x_j(X, t) + S_i, \\ d_{\alpha i}^*(X, t^*) &= R_{ij} d_{\alpha j}(X, t), \quad t^* = t + c, \end{aligned}$$

gdzie R_{ij} jest tensorem ortogonalnym. Podstawowe właściwości zbioru przekształceń (4.16), zwanego grupą przemieszczeń euklidesowych, zostały wymienione w p. 2.2.

4.7. Warunki niezmienniczości i zasady zachowania. Analogicznie do pracy Cosseratów TOUPIN [1964] przyjmuje, że gęstość działania jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń

euklidesowych. Podobnie jak w p. 2.4 pracy można wykazać, że zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$(4.17) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad K_{[ij]} = 0,$$

gdzie tensor K_{ij} jest określony związkiem (2.12).

Rozpatrując zasadę Hamiltona (4.10) dla następujących kombinacji wariacji zmiennych niezależnych

1. $\delta x_i = S_i, \quad \delta d_{\alpha i} = 0, \quad \dot{S}_i = 0;$
2. $\delta x_i = \Omega_{ij} x_j, \quad \delta d_{\alpha i} = \Omega_{ij} d_{\alpha j}, \quad \dot{\Omega}_{ij} = \Omega_{(ij)} = 0;$
3. $\delta x_i = \dot{x}_i, \quad \delta d_{\alpha i} = \dot{d}_{\alpha i}$

otrzymujemy poniższe związki

$$(4.18) \quad \int_P P_i dV|_{t_1}^2 - \int_I \int_P F_i dV dt - \int_I \int_{\partial P} T_i dA dt = \int_I \int_P \frac{\partial L}{\partial x_i} dV dt,$$

$$(4.19) \quad \int_P (P_{[i} x_{j]} + Q_{[i}^{\alpha} d_{\alpha j]}) dV|_{t_1}^2 - \int_I \int_P (F_{[i} x_{j]} + G_{[i}^{\alpha} d_{\alpha j]}) dV dt - \\ - \int_I \int_{\partial P} (T_{[i} x_{j]} + H_{[i}^{\alpha} d_{\alpha j]}) dA dt = \int_I \int_P K_{[ij]} dV dt,$$

$$(4.20) \quad \int_P (P_i \dot{x}_i + Q_i^{\alpha} \dot{d}_{\alpha i} - L) dV|_{t_1}^2 - \int_I \int_P (F_i \dot{x}_i + G_i^{\alpha} \dot{d}_{\alpha i}) dV dt - \\ - \int_I \int_{\partial P} (T_i \dot{x}_i + H_i^{\alpha} \dot{d}_{\alpha i}) dA dt = - \int_I \int_P \frac{\partial L}{\partial t} dV dt.$$

Z warunków niezmienniczości (4.17) gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych wynika, że prawe strony równań (4.18)–(4.20) są równe zeru. Zatem lewe strony są również równe zeru, skąd wynika

$$(4.21) \quad \int_P P_i dV|_{t_1}^2 = \int_I \int_P F_i dV dt + \int_I \int_{\partial P} T_i dA dt,$$

$$(4.22) \quad \int_P (P_{[i} x_{j]} + Q_{[i}^{\alpha} d_{\alpha j]}) dV|_{t_1}^2 = \int_I \int_P (F_{[i} x_{j]} + G_{[i}^{\alpha} d_{\alpha j]}) dV dt + \\ + \int_I \int_{\partial P} (T_{[i} x_{j]} + H_{[i}^{\alpha} d_{\alpha j]}) dA dt,$$

$$(4.23) \quad \int_P (P_i \dot{x}_i + Q_i^{\alpha} \dot{d}_{\alpha i} - L) dV|_{t_1}^2 = \int_I \int_P (F_i \dot{x}_i + G_i^{\alpha} \dot{d}_{\alpha i}) dV dt + \int_I \int_{\partial P} (T_i \dot{x}_i + H_i^{\alpha} \dot{d}_{\alpha i}) dA dt.$$

Warunki powyższe mogą być nazwane uogólnionymi zasadami zachowania pędu (4.21), krętu (4.22) i energii mechanicznej (4.23) dla ciała sprężystego z mikrostrukturą. Z drugiej strony można wykazać, że z tak określonych zasad zachowania pędu, krętu i energii mechanicznej wynikają warunki (4.17) niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych. Zatem za TOUPINEM [1964] można powiedzieć, że dla ciała

sprężystego z mikrostrukturą zasady zachowania pędu, krętu i energii mechanicznej są równoważne warunkom niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych.

4.8. Energia kinetyczna i potencjał sprężysty. R. A. TOUPIN [1964] zakłada, że gęstość działania ma postać

$$(4.24) \quad L = T - W,$$

gdzie

$$(4.25) \quad T = \frac{1}{2} (\varrho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i + \nu^{ab} \dot{d}_{ai} \dot{d}_{bi}), \quad \nu^{[ab]} = \nu^{ab} = 0, \quad \dot{\varrho}_0 = 0$$

jest gęstością energii kinetycznej, natomiast

$$(4.26) \quad W = W(d_{ai}^i, x_i, K, d_{ai, K}, X)$$

jest potencjałem sprężystym. Z (4.24) i (4.25) wynika, że gęstość energii kinetycznej jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych, wektor pędu

$$P_i = \varrho_0 \dot{x}_i$$

jest równoległy do prędkości x_0 i jest jej liniową funkcją, natomiast uogólniony pęd

$$Q_i^a = \nu^{ab} \dot{d}_{bi}$$

jest liniową funkcją prędkości zmiany wektorów kierunkowych.

4.9. Równania ruchu w opisie przestrzennym. Równania ruchu (4.12) oraz warunki brzegowe (4.14) w opisie przestrzennym mają postać

$$(4.27) \quad \begin{aligned} t_{ji, j} + f_i &= \varrho \ddot{x}_i, \\ h_{kji, k} + t_{ji} + j^{-1} K_{ji} + l_{ji} &= j^{-1} \dot{Q}_{ij} + \varrho \dot{x}_i \dot{x}_j, \end{aligned}$$

$$(4.28) \quad t_{ji} n_j - t_i = 0, \quad h_{kji} n_k - h_{ji} = 0,$$

gdzie $j = \det x_{k, K}$ jest jakobianem odwzorowania $X \rightarrow x$, n_k jest wektorem jednostkowym zewnętrznie normalnym do brzegu ciała w konfiguracji aktualnej,

$$t_{ji} \equiv j^{-1} T_{K_i} x_{j, K}, \quad h_{kji} \equiv j^{-1} H_{K^a}^j x_{k, K} d_{ai}$$

są odpowiednio tensorem naprężeń Cauchy'ego i tzw. tensorem hipernaprężeń (ang. hyperstresses),

$$t_i \equiv T_i \frac{dA}{da}, \quad h_{ij} \equiv H^a_j d_{ai} \frac{dA}{da},$$

są uogólnionymi siłami powierzchniowymi,

$$Q_{ij} = \nu^{ab} d_{aj} \dot{d}_{bi}$$

jest uogólnionym pędem, natomiast

$$\varrho = j^{-1} \varrho_0$$

jest gęstością materiału w chwili t .

Przedstawiony opis nie jest w ogólnym przypadku kompletny. Dla przykładu (4.12) zawiera $3(n+1)$ równań, podczas gdy (4.27) przedstawia tylko dwanaście równań. Podobnie

wygląda liczba warunków brzegowych (4.14) i (4.28) oraz liczba niezależnych składowych uogólnionego tensora naprężenia. Powyższy opis jest kompletny jedynie w przypadku $n \leq 3$. Dla $n = 3$ równania (4.27) i (4.28) opisują ciało z mikrostrukturą doznającą jednorodnego odkształcenia, rozpatrzone w ujęciu liniowym przez R. D. MINDLINA [1964].

Biorąc część antysymetryczną równań (4.27)₂ i (4.28)₂ otrzymujemy równania ruchu

$$h_{k[ij],k} + t_{[ji]} + l_{[ij]} = j^{-1} \dot{Q}_{[ij]}$$

oraz warunki brzegowe Cosseratów

$$h_{k[ij]n_k} - h_{[ij]} = 0.$$

4.10. Miary odkształcenia. Wprowadzając miary odkształcenia R. A. TOUPIN [1964] wykorzystuje zasadę niezmienniczości. Mianowicie z (4.24), (4.25) i (4.26) wynika, że gęstość działania będzie niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych wtedy i tylko wtedy, gdy niezmienniczy będzie potencjał sprężysty. Można wykazać, korzystając np. z twierdzenia Cauchy'ego (C. TRUESDELL i W. NOLL [1965, § 11]), że zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy potencjał sprężysty jest funkcją następujących argumentów

$$(4.29) \quad \begin{aligned} a_{KL} &\equiv x_{i,K} x_{i,L}, \\ \Delta_{\alpha K} &\equiv x_{i,K} d_{\alpha i}, \\ \Delta_{\alpha KL} &\equiv x_{i,K} d_{\alpha i L}, \\ s &\equiv \text{sign det } x_{i,K}, \\ X. \end{aligned}$$

Zatem $a_{KL}, \Delta_{\alpha K}, \Delta_{\alpha KL}$ są miarami odkształcenia ośrodka z mikrostrukturą. Miarą odkształcenia jest również klasyczny tensor odkształcenia względnego

$$(4.30) \quad e_{KL} \equiv \frac{1}{2} (a_{KL} - A_{KL})$$

oraz tzw. tensor odkształcenia mikrostruktury względem «makrostruktury»

$$(4.31) \quad \gamma_{\alpha K} \equiv -(\Delta_{\alpha K} - a_{KL} D_{\alpha L}).$$

W przypadku gdy wektory kierunkowe są wektorami materialnymi, tzn. gdy

$$d_{\alpha i} = x_{i,K} D_{\alpha K},$$

to wszystkie składowe tensora $\gamma_{\alpha K}$ są tożsamościowo równe zeru.

R. D. MINDLIN [1964] rozpatrzył liniową teorię ciała z mikrostrukturą doznającą jednorodnego odkształcenia. W przypadku $n = 3$ oraz $D_{\alpha K} = \delta_{\alpha K}$ zlinearyzowane miary odkształcenia (4.29)₃, (4.30) oraz (4.31) pokrywają się z miarami odkształcenia Mindlina:

$$(4.32) \quad \begin{aligned} \Delta_{\alpha ji} &\approx \psi_{\alpha i, j} = \varkappa_{\alpha ij}, \\ e_{ij} &\approx u_{(i, j)}, \\ \gamma_{\alpha i} &\approx \psi_{\alpha i} + u_{i, \alpha}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\psi_{\alpha i} = d_{\alpha i} - D_{\alpha i}$$

nazwane jest tensorem dystorsji, $\varkappa_{\alpha ij}$ jest tzw. gradientem mikro-odkształcenia, natomiast u_i jest wektorem przemieszczenia.

Teorię ciała z mikrostrukturą doznającą jednorodnego odkształcenia na innej drodze zbudowali A. ERINGEN i E. S. SUHUBI [1964 a], [1964 b] oraz A. ERINGEN [1964]. Intencją

ich było wyprowadzenie wszystkich równań ośrodka w oparciu o założenie, że pojedyncza mikrostruktura jest klasycznym kontinuum. Jakkolwiek otrzymany układ równań podstawowych jest poprawny, to jednak pewne zastrzeżenia wzbudzają niektóre przekształcenia. Biegunowo-symetryczne zagadnienie koncentracji naprężeń w takim ciele rozpatrzył J. L. BLEUSTEIN [1966].

A. E. GREEN, P. M. NAGHDI i W. L. WAINRIGHT [1965] rozpatrzyli szczególny przypadek ciała dwuwymiarowego z jednym wektorem kierunkowym. Zbudowana przez nich teoria ma opisać zachowanie się cienkiej powłoki.

4.11. Ośrodek Cosseratów. R. A. TOUPIN [1964] wyjaśnił związki przedstawionej teorii z teorią braci Cosseratów (por. p. 2). Ośrodkiem Cosseratów jest kinematycznie równoważne ciało z trzema liniowo niezależnymi wektorami kierunkowymi przy dodatkowym założeniu

$$(4.33) \quad d_{\alpha i} d_{\beta i} = q_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

oznaczającym, że wektory kierunkowe mogą w procesie odkształcenia doznać tylko sztywnego obrotu. Ograniczenie (4.33) jest równoważne warunkom

$$(4.34) \quad \delta d_{\alpha(j} d_{\alpha i)}^{\alpha} = 0.$$

lub

$$(4.35) \quad \dot{d}_{\alpha(j} d_{\alpha i)}^{\alpha} = 0,$$

gdzie $d_{\alpha i}^{\alpha}$ jest bazą wzajemną względem bazy $d_{\alpha i}$. Z równań (4.35) wynika, że zasada zachowania energii dla ciała sprężystego Cosseratów przyjmuje postać

$$(4.36) \quad \frac{d}{dt} \int_{X_i(P)} E dv = \int_{X_i(P)} (f_i \dot{x}_i + 2l_{[ij]} \tilde{\omega}_{ij}) dv + \int_{X_i(\partial P)} (t_i \dot{x}_i + 2h_{[ij]} \tilde{\omega}_{ij}) da,$$

gdzie

$$E \equiv \frac{1}{2} \rho \dot{x}_i \dot{x}_i + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \nu^{\alpha\beta} \dot{d}_{\alpha i} \dot{d}_{\beta i} + \frac{\rho}{\rho_0} W,$$

natomiast

$$\tilde{\omega}_{ij} \equiv \frac{1}{2} d_{\alpha i}^{\alpha} \dot{d}_{\alpha j}$$

jest tensorem prędkości rotacji bazy wektorów kierunkowych.

4.12. Ciecz anizotropowa Ericksena. J. L. ERICKSEN [1960, 1961, 1962 a, b, c, d] rozpatrzył ogólną teorię ośrodka ciągłego z jednym wektorem kierunkowym d_0 . Punktem wyjścia jego rozważań były zasady zachowania przyjęte w następującej postaci:

$$(4.37) \quad \frac{d}{dt} \int_{X_i(P)} \rho dv = 0,$$

$$(4.38) \quad \frac{d}{dt} \int_{X_i(P)} \rho \dot{d}_i dv = \int_{X_i(\partial P)} h_i da + \int_{X_i(P)} k_i dv,$$

$$(4.39) \quad \frac{d}{dt} \int_{X_i(P)} \rho \dot{x}_i dv = \int_{X_i(\partial P)} t_i da + \int_{X_i(P)} f_i dv,$$

$$(4.40) \quad \frac{d}{dt} \int_{x_i(P)} \varrho (x_{[i} \dot{x}_{j]} + d_{[i} \dot{d}_{j]}) dv = \int_{x_i(\partial P)} (x_{[i} t_{j]} + d_{[i} h_{j]}) da + \int_{x_i(P)} (x_{[i} f_{j]} + d_{[i} l_{j]}) dv,$$

$$(4.41) \quad \frac{d}{dt} \int_{x_i(P)} \varrho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i + \frac{1}{2} \dot{d}_i \dot{d}_i \right) dv = \\ = \int_{x_i(\partial P)} (t_i \dot{x}_i + h_i \dot{d}_i - h) da + \int_{x_i(P)} (f_i \dot{x}_i + l_i \dot{d}_i + q) dv,$$

gdzie ε jest gęstością energii wewnętrznej, h_j i l_j są uogólnionymi siłami powierzchniowymi i objętościowymi, h opisuje przepływ ciepła przez powierzchnię $X_i(\partial P)$, natomiast q jest wydajnością źródeł ciepła.

Zasady (4.37) i (4.39)–(4.41) są odpowiednio zasadami zachowania masy, pędu, krętu i energii, natomiast zasada (4.38) ma opisywać «lokalny ruch cząstki materialnej». Wydaje się jednak, że nie można jej postulować niezależnie od zasad zachowania pędu i krętu. Zauważmy jeszcze, że przyjmując w równaniach Toupina (4.21), (4.22) $d_{\alpha i} = (d_i)$ otrzymujemy zasady zachowania pędu i krętu postulowane przez Ericksena. Następnie jeżeli w zasadzie zachowania energii (4.41) zatrzymamy tylko człony mechaniczne, to będzie ona równoważna równaniu (4.23) przy założeniach $d_{\alpha i} = (d_i)$, $v^{\alpha b} = (q_0)$.

Pewne problemy szczególne dla cieczy anizotropowej rozpatrzył P. N. KALONI [1965]. C. TRUESDELL i W. NOLL [1965, §§ 127, 128, 129] zebrali najciekawsze dotychczasowe wyniki dotyczące równań konstytutywnych postulowanych dla cieczy anizotropowej.

5. Materiał prosty z wielobiegunowymi przemieszczeniami

5.1. Podstawowe określenia i definicje. Jak wiadomo, w klasycznej mechanice ośrodka ciągłego aktualne położenie cząstki materialnej X w przestrzeni euklidesowej wyznaczają jej trzy współrzędne przestrzenne x_i . Są one funkcjami czasu t i współrzędnych materialnych X_A cząstki ciała

$$(5.1) \quad x_i = x_i(X_A, t).$$

Jeżeli przyjmiemy, że do określenia aktualnej konfiguracji cząstki ciała oprócz (5.1) należy podać ν pól tensorowych

$$(5.2) \quad x_{i|B\beta} = x_{i|B\beta}(X_A, t), \quad \beta = 1, 2, \dots, \nu,$$

gdzie oznaczono

$$x_{i|B\beta} \equiv x_{iB_1 B_2 \dots B_\beta},$$

to ciało takie nazwiemy ciałem z wielobiegunowymi przemieszczeniami (ang. multipolar displacements). Nowe zmienne kinematyczne $x_{i|B\beta}$ zostały nazwane przez A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 b] 2^β -biegunowymi przemieszczeniami, zaś ich pochodna materialna

$$v_{i|B\beta} = \dot{x}_{i|B\beta}$$

została nazwana polem 2^β -biegunowych prędkości (ang. 2^β pole-displacement field, oraz odpowiednio 2^β — pole-velocity field).

Powyższą koncepcję uogólnionego ośrodka ciągłego wprowadzili A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b]. Zaproponowany przez A. E. GREENA i R. S. RIVLINA opis ruchu ciała

jest w pewnym sensie równoważny opisowi R. A. TOUPINA [1964] (por. p. 4) ruchu ciała z mikrostrukturą. Mianowicie jeżeli w równaniach (4.2)₂ zamiast wektorów kierunkowych d_{i0} wprowadzimy odpowiednią liczbę pól tensorowych $x_{i|B\beta}$ w taki sposób, by liczba tych równań pokrywała się z liczbą równań (5.2), to opis Greena i Rivlina będzie odpowiadał opisowi Toupina. Równoważność opisów w szczególnym przypadku ciała z jednym wektorem kierunkowym została wykazana w inny sposób przez A. E. GREENA, P. M. NAGHDIEGO i R. S. RIVLINA [1965], a w przypadku ogólnym przez Cz. WOŹNIAKA [1967a] (por. p. 5.6).

Jakkolwiek opisy Greena, Rivlina oraz Toupina są kinematycznie równoważne, to jednak ze względu na bardziej ogólne podejście do zagadnienia przytoczymy w tym rozdziale najważniejsze rezultaty przedstawione w pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 b].

5.2. Ruch sztywny. W pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 b] przyjęto, że dwa ruchy ($x_i^* = x_i^*(X, t^*)$, $x_{i|B\beta}^* = x_{i|B\beta}^*(X, t^*)$), ($x_i = x_i(X, t)$, $x_{i|B\beta} = x_{i|B\beta}(X, t)$) ciał z wielobiegunowymi przemieszczeniami różnią o ruch sztywny, jeżeli zachodzą związki

$$(5.3) \quad \begin{aligned} x_i^*(X, t^*) &= c_i^*(t^*) + Q_{ij}(t)[x_j(X, t) - c_j(t)], \\ x_{i|B\beta}^*(X, t^*) &= Q_{ij}(t)x_{j|B\beta}(X, t), \quad \beta = 1, \dots, \nu, \\ t^* &= t + a, \end{aligned}$$

gdzie Q_{ij} jest tensorem ortogonalnym.

Różniczkując względem czasu związki (5.3) otrzymamy

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \dot{v}_i^*(X, t^*) &= \dot{c}_i^*(t^*) + Q_{ij}(t)[\dot{v}_j(t) - \dot{c}_j(t)] + \Omega_{ij}(t)[x_j^*(X, t^*) - c_j^*(t^*)], \\ \dot{v}_{i|B\beta}^*(X, t^*) &= Q_{ij}(t)\dot{v}_{j|B\beta}(X, t) + \Omega_{ij}(t)x_{j|B\beta}^*(X, t^*), \end{aligned}$$

gdzie

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \equiv \dot{Q}_{ik}Q_{jk}.$$

Z (5.4) wynika wprost

$$(5.5) \quad \begin{aligned} A_{ij}^* &= Q_{ir}Q_{is}A_{rs}, \quad \omega_{ij}^* = Q_{ir}Q_{js}\omega_{rs} + 2\Omega_{ij}, \\ A_{i_1 \dots i_\mu}^* &= Q_{ij}Q_{l_1 j_1} \dots Q_{l_\mu j_\mu} A_{j_1 \dots j_\mu}, \\ B_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}}^* &= B_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}}, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$(5.6) \quad \begin{aligned} A_{ij} &\equiv 2v_{(i,j)}, \quad \omega_{ij} \equiv 2v_{[i,j]}, \\ A_{i|i_\mu} &\equiv v_{i|i_\mu}, \\ B_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}} &= v_{m,A}x_{m\{B\beta\},\{A_\alpha\}} + x_{m,A}v_{m\{B\beta\},\{A_\alpha\}}. \end{aligned}$$

Z (5.3) wynikają również związki

$$(5.7) \quad E_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}}^* = E_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}},$$

gdzie $E_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}}$ jest miarą odkształcenia zdefiniowaną następująco:

$$(5.8) \quad E_{\{B\beta\}: A\{A_\alpha\}} \equiv x_{m,A}x_{m\{B\beta\},\{A_\alpha\}}.$$

Klasyczny lewy tensor odkształcenia Cauchy'ego-Greena oznaczać będziemy symbolem E_{AB} .

O dwóch ruchach ($x_i^* = x_i^*(X, t^*)$, $x_{i|B\beta}^* = x_{i|B\beta}^*(X, t^*)$), ($x_i = x_i(X, t)$, $x_{i|B\beta} = x_{i|B\beta}(X, t)$) będziemy mówili, że w danej chwili t_0 różnią się o prędkość ruchu ciała sztywnego, jeżeli zachodzą związki

$$(5.9) \quad \begin{aligned} x_i^*(X, t_0) &= x_i(X, t_0), & x_{i|B\beta}^*(X, t_0) &= x_{i|B\beta}(X, t_0), \\ v_i^*(X, t_0) &= v_i(X, t_0) + b_i + \Omega_{ij} x_j(X, t_0), \\ v_{i|B\beta}^*(X, t_0) &= v_{i|B\beta}(X, t_0) + \Omega_{ij} x_{j|B\beta}(X, t_0). \end{aligned}$$

Charakterystyka kinematyczna (5.3)₂ wielobiegunowych przemieszczeń pokrywa się z podaną przez R. A. TOUPINA [1964] dla wektorów kierunkowych. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] wprowadzili również wielobiegunowe przemieszczenia $x_{ii_1 \dots i_p}$ z charakterystyką kinematyczną

$$x_{ii_1 \dots i_p}(X, \tau^*) = Q_{ij}(\tau) Q_{i_1 j_1}(\tau) \dots Q_{i_p j_p}(\tau) x_{j_1 \dots j_p}(X, \tau)$$

nie różniącą się w zasadzie od (5.3)₂. Dopiero w późniejszej pracy [1965] wspólnej z P. M. NAGHDIM można znaleźć wzmiankę o wielobiegunowych przemieszczeniach z charakterystyką kinematyczną

$$x_{ii_1 \dots i_\alpha i_{\alpha+1} \dots i_p}(X, \tau^*) = Q_{ij}(\tau) Q_{i_1 j_1}(\tau) \dots Q_{i_\alpha j_\alpha}(\tau) Q_{i_{\alpha+1} j_{\alpha+1}}(\tau) \dots Q_{i_p j_p}(\tau) x_{j_1 \dots j_\alpha j_{\alpha+1} \dots j_p}(X, \tau).$$

MISICU [1964 c], [1965 b, c, e, f, g], [1966] rozpatrzył podobne pola kinematyczne i efekty mechaniczne z nimi związane.

5.3. Wielobiegunowe siły masowe i powierzchniowe. Jeżeli $F_{i|B\beta} : \{A_\alpha\}$ oraz $p_{i|B\beta} : \{A_\alpha\}$ są tensorami i jeżeli

$$F_{i|B\beta} : \{A_\alpha\} v_{i|B\beta} : \{A_\alpha\}$$

oraz

$$p_{i|B\beta} : \{A_\alpha\} v_{i|B\beta}, \{A_\alpha\}$$

są gęstościami pracy odpowiednio na jednostkę masy i powierzchni, wtedy $F_{i|B\beta} : \{A_\alpha\}$ oraz $p_{i|B\beta} : \{A_\alpha\}$ nazywać będziemy $2^{\alpha+\beta}$ -biegunowymi $(\beta+1)$ -go rodzaju siłami masowymi i powierzchniowymi (ang. odpowiednio body force $2^{\alpha+\beta}$ — pole of the $(\beta+1)$ -th kind oraz surface force $2^{\beta+\alpha}$ — pole of the $(\beta+1)$ -th kind. Według powyższej terminologii wielobiegunowe siły rozpatrzone we wcześniejszej pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a] (por. p. 6) są siłami 2^α -biegunowymi pierwszego rodzaju.

Wielobiegunowe siły powierzchniowe działające na płaszczyźnie parametrycznej $X_K = \text{const}$ są oznaczone symbolem $\pi_{K i|B\beta} : \{A_\alpha\}$ i nazwane $2^{\alpha+\beta}$ -biegunowymi naprężeniami $(\beta+1)$ -go rodzaju (ang. surface stress $2^{\alpha+\beta}$ -pole of the $(\beta+1)$ -th kind).

W dalszym ciągu punktu będziemy rozpatrywać materiał z siłami 2^β -biegunowymi $(\beta+1)$ rodzaju. Wzorując się na terminologii Nolla można go nazwać materiałem prostym z wielobiegunowymi przemieszczeniami.

5.4. Energia kinetyczna. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] zakładają, że gęstość energii kinetycznej dla materiału z wielobiegunowymi przemieszczeniami ma postać

$$\frac{1}{2} v_i v_i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^v Y_{\{A_\alpha\} : \{B_\beta\}} v_{i|A_\alpha} v_{i|B_\beta},$$

gdzie

$$(5.10) \quad Y_{\{A\alpha\};\{B\beta\}} = Y_{\{B\beta\};\{A\alpha\}}$$

są tensorami stałymi w czasie. Nie trudno zauważyć, że tak określona energia kinetyczna jest niezmiennicza względem grupy przemieszczeń euklidesowych (por. p. 4.8) oraz jest quasi-diagonalną formą kwadratową argumentów $v_i, v_{i\{A\beta\}}$ ($\beta = 1, 2, \dots, \nu$). Przyjęta postać energii kinetycznej jest pełnym analogiem postaci przyjętej przez R. A. TOUPINA [1964] [por. równanie (4.26)].

5.5. Zasada zachowania energii. Zasada entropii. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] postulują zasadę zachowania energii i zasadę entropii w poniższej postaci:

$$(5.11) \quad \int_P \varrho_0 (v_i \dot{v}_i + \dot{U}) dV = \int_P \varrho_0 \left(r + F_i v_i + \sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{F}_{i\{B\beta\}} v_{i\{B\beta\}} \right) dV + \\ + \int_{\partial P} \left(-h_0 + p_i v_i + \sum_{\beta=1}^{\nu} p_{i\{B\beta\}} v_{i\{B\beta\}} \right) dA, \\ \int_P \varrho \left(\dot{S} - \frac{r}{T} \right) dV + \int_{\partial P} \frac{h_0}{T} dA \geq 0,$$

gdzie ϱ_0 jest gęstością masy, U gęstością energii wewnętrznej, r wydajnością źródeł ciepła, h_0 wpływem ciepła przez powierzchnię ∂P , S gęstością entropii, T temperaturą bezwzględną, F_i są siłami masowymi, p_i siłami powierzchniowymi, natomiast $\bar{F}_{i\{B\beta\}}$ sprowadzonymi wielobiegunowymi siłami masowymi zdefiniowanymi następująco:

$$(5.12) \quad \bar{F}_{i\{B\beta\}} \equiv F_{i\{B\beta\}} - \sum_{\alpha=1}^{\nu} Y_{\{A\alpha\};\{B\beta\}} \dot{v}_{i\{A\alpha\}}.$$

A. E. GREEN i R. S. RIVLIN zakładają następnie, że wszystkie wielkości z wyjątkiem prędkości v_i , występujące w (5.11) są niezmiennicze względem nałożonej stałej prędkości ruchu postępowego. Z powyższego założenia wynika zasada zachowania pędu

$$(5.13) \quad \int_P \varrho_0 \dot{v}_i dV = \int_P \varrho_0 F_i dV + \int_{\partial P} p_i dA,$$

a zatem wynikają również klasyczne równania ruchu

$$(5.14) \quad \pi_{Ki, K} + \varrho_0 F_i = \varrho_0 \dot{v}_i$$

oraz warunki brzegowe

$$(5.15) \quad p_i = N_K \pi_{Ki}.$$

Rozwijając zasadę zachowania energii dla nieskończenie małego czworościanu ograniczonego płaszczyznami parametrycznymi $X_K = \text{const}$ oraz płaszczyzną z wektorem jednostkowym N_K zewnętrznym ortogonalnym do niej i korzystając z klasycznych warunków brzegowych (5.15) otrzymujemy:

$$(5.16) \quad \sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{p}_{i\{B\beta\}} v_{i\{B\beta\}} - \bar{h}_0 = 0,$$

gdzie⁽³⁾

$$\bar{p}_{i|B_\rho} \equiv p_{i|B_\rho} - N_K \pi_{K i|B_\rho}, \quad \bar{h} = h_0 - N_K q_K,$$

a q_K są strumieniami ciepła.

Następnie korzystając z (5.14), (5.15) i (5.16) oraz twierdzenia Greena można zasadę zachowania energii (5.11)₁ przedstawić w postaci różniczkowej

$$(5.17) \quad \varrho_0 r - q_{K,K} - \varrho_0 \dot{U} + \pi_{K i} v_{i,K} + \sum_{\beta=1}^v \bar{\pi}_{i|B_\rho} v_{i|B_\rho} + \sum_{\beta=1}^v \pi_{K i|B_\rho} v_{i|B_\rho, K} = 0,$$

gdzie⁽⁴⁾

$$(5.18) \quad \bar{\pi}_{i|B_\rho} = \varrho_0 \bar{F}_{i|B_\rho} + \pi_{K i|B_\rho, K}.$$

Posługując się uprzednio wprowadzonymi oznaczeniami (5.6) otrzymujemy podstawowe równania (5.16) i (5.17) w następującej postaci:

$$(5.19) \quad \sum_{\beta=1}^v \bar{p}_{i|B_\rho} \left(X_{A,i} B_{i|B_\rho} : A - \frac{1}{2} A_{mi} x_{m|B_\rho} \right) - \bar{h}_0 - \frac{1}{2} \omega_{mi} \sum_{\beta=1}^v \bar{p}_{i|B_\rho} x_{m|B_\rho} = 0,$$

$$(5.20) \quad \varrho_0 r - q_{K,K} - \varrho_0 \dot{U} + \frac{1}{2} A_{mi} \pi'_{Km} x_{i,K} + \frac{1}{2} \omega_{mi} \pi'_{Km} x_{i,K} + \\ + X_{A,i} \sum_{\beta=1}^v \bar{\pi}_{i|B_\rho} B_{i|B_\rho} : A + X_{A,i} \sum_{\beta=1}^v \pi_{K i|B_\rho} B_{i|B_\rho} : AK = 0,$$

gdzie⁽⁵⁾

$$(5.21) \quad \pi'_{Am} = \pi_{Am} - X_{A,i} \sum_{\beta=1}^v (\bar{\pi}_{i|B_\rho} x_{m|B_\rho} + \pi_{K i|B_\rho} x_{m|B_\rho, K}).$$

Następnie A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 b] zakładają, że wielkości

$$\bar{h}_0, q_K, p_{i|B_\rho}, r, \dot{U}, \pi_{Km}, \bar{\pi}_{i|B_\rho}, \pi_{K i|B_\rho}$$

są niezmiennicze względem nałożonego stałego ruchu obrotowego⁽⁶⁾. Jako konsekwencję powyższych założeń otrzymuje się następujące związki

$$(5.22) \quad \sum_{\beta=1}^v \bar{p}_{[i|B_\rho} x_{j]|B_\rho} = 0, \quad \pi'_{K[m} x_{i],K} = 0.$$

⁽³⁾ Równania (5.16) wskazują na to, że warunki brzegowe (4.14) otrzymane przez R. A. TOUPINA [1964] nie zachodzą dla materiału niesprężystego.

⁽⁴⁾ Związek (5.18) jest odpowiednikiem równań ruchu (4.12)₂ TOUPINA.

⁽⁵⁾ Tensor π'_{Am} jest pełnym odpowiednikiem tensora K_{ij} (por. równanie (2.12) (wprowadzonego przez R. A. TOUPINA [1964])).

⁽⁶⁾ Wystarczy spojrzeć na budowę wzorów (5.18) i (5.12), aby zauważyć, że założenie o niezmienniczości tensorów $\bar{\pi}_{i|B_\rho}$ zostało przyjęte w celu uniknięcia niekonsekwencji mechaniki Newtona, na której gruncie została zbudowana cała teoria.

Wobec (5.22) równania (5.19) i (5.20) redukują się do postaci

$$(5.23) \quad \sum_{\beta=1}^{\nu} \bar{p}_{i|B_{\beta}} \left(X_{A,i} B_{|B_{\beta}|:A} - \frac{1}{2} A_{mi} x_{m|B_{\beta}} \right) - \bar{h}_0 = 0$$

oraz

$$(5.24) \quad \varrho_0 r - q_{K,K} - \varrho_0 \dot{U} + \frac{1}{2} A_{mi} \pi'_{Km} x_{i,K} + X_{A,i} \sum_{\beta=1}^{\nu} (\bar{\pi}_{i|B_{\beta}} B_{|B_{\beta}|:A} + \pi_{K i|B_{\beta}} B_{|B_{\beta}|:AK}) = 0.$$

Równanie (5.22)₂ jest równoważne warunkom (4.17)₃ niezmienniczości gęstości działania względem grupy przemieszczeń euklidesowych podanym przez R. A. TOUPINA [1964]. Można przewidzieć, że równania (5.22) są inaczej zapisanymi warunkami brzegowymi oraz równaniami ruchu Cosseratów.

A. E. GREEN i P. M. NAGHDI [1965 b, 1966] opierając się na zasadzie zachowania energii, zasadzie entropii oraz na zasadach niezmienniczości w podobny sposób wyprowadzili warunki nieciągłości dla ciała z wielobiegunowymi przemieszczeniami.

5.6. Materiał sprężysty prosty. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964b] materiałem sprężystym nazywają materiał, dla którego zachodzą związki:

$$(5.25) \quad \begin{aligned} U &= U(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}), \\ \pi'_{Ki} &= \pi'_{Ki}(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}), \\ \pi_{K i|B_{\beta}} &= \pi_{K i|B_{\beta}}(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}), & \beta &= 1, 2, \dots, \nu, \\ \bar{\pi}_{i|B_{\beta}} &= \bar{\pi}_{i|B_{\beta}}(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}), & \gamma &= 1, 2, \dots, \mu, \\ T &= T(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}), & \mu &\geq \nu + 1, \\ \bar{p}_{i|B_{\beta}} &= \bar{p}_{i|B_{\beta}}(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}, N_K), \\ \bar{h}_0 &= \bar{h}_0(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}, T_{i|A_{\gamma}}, N_K), \\ q_K &= q_K(S, x_{i,A}, x_{i|B_{\gamma}}, x_{i|B_{\gamma},A}, T_{i|A_{\gamma}}). \end{aligned}$$

Dla danego odkształcenia i entropii pola wielobiegunowych prędkości mogą być wybrane niezależnie, zatem z (5.25) i (5.23) wynika

$$(5.26) \quad \bar{h}_0 = 0, \quad \bar{p}_{i|B_{\beta}} = 0$$

lub

$$(5.27) \quad h_2 = N_K q_K, \quad p_{i|B_{\beta}} = N_K \pi_{K i|B_{\beta}}.$$

A. E. GREEN i R. S. RIVLIN postulują następnie obiektywność gęstości energii wewnętrznej, tzn. zakładają, że jest ona niezmiennicza nie tylko względem nałożonej prędkości ruchu sztywnego, ale jest niezmiennicza również względem nałożonego ruchu sztywnego. Można wykazać, że energia wewnętrzna U będzie wielkością obiektywną wtedy i tylko wtedy, gdy będzie ją można przedstawić w poniższej postaci:

$$(5.28) \quad U = U(S, E_{:AB}, E_{|B_{\gamma}|:A}, E_{|B_{\gamma}|:AK}), \quad \gamma = 1, 2, \dots, \mu.$$

Korzystając z (5.27)₁, (5.28) i (5.24) oraz z twierdzenia Greena-Stokesa można zasadę entropii (5.11)₂ przedstawić w następującej postaci różniczkowej:

$$(5.29) \quad \varrho_0 \left(T - \frac{\partial U}{\partial S} \right) \dot{S} - \frac{q_K T_{,K}}{T} + \frac{1}{2} x_{i,K} \left(\pi'_{Km} - 2\varrho_0 x_{m,A} \frac{\partial U}{\partial E_{AK}} \right) A_{mi} + \\ + X_{A,i} \sum_{\beta=1}^{\nu} \left(\bar{\pi}_{i|B\beta} - \varrho_0 x_{i,B} \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:B}} \right) B_{|B\beta|:A} + X_{A,i} \sum_{\beta=1}^{\nu} \left(\pi_{K i|B\beta} - \varrho_0 x_{i,B} \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:BK}} \right) B_{|B\beta|:AK} - \\ - \sum_{\beta=\nu+1}^{\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:A}} B_{|B\beta|:A} + \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:AK}} B_{|B\beta|:AK} \right) \geq 0.$$

Dla danego stanu odkształcenia i entropii powyższa nierówność musi być spełniona dla dowolnych wartości \dot{S} , A_{mi} , $B_{|B\beta|:A}$, $B_{|B\beta|:AK}$, które mogą być wzięte niezależnie od siebie. Zatem mamy

$$(5.30) \quad \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:A}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:AK}} = 0, \quad \nu+1 \leq \beta \leq \mu,$$

$$(5.31) \quad T = \frac{\partial U}{\partial S},$$

$$(5.32) \quad \pi'_{Km} = 2\varrho_0 x_{m,A} \frac{\partial U}{\partial E_{AK}}, \\ \bar{\pi}_{i|B\beta} = \varrho_0 x_{i,A} \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:A}}, \quad \beta = 1, 2, \dots, \nu,$$

$$(5.33) \quad \pi_{K i|B\beta} = \varrho_0 x_{i,A} \frac{\partial U}{\partial E_{|B\beta|:AK}}, \\ -q_K T_{,K} \geq 0.$$

Równania (5.32)₂ są odpowiednikami równań ruchu wyższego rzędu Toupinia (4.12)₂. Równania (5.32)₃ odpowiadają związkom (4.13)₃, natomiast zespół równań (5.21) i (5.32) odpowiada związkom (4.13)₂.

A. ERINGEN i E. S. SUHUBI [1964 a, b] oraz A. ERINGEN [1964] zbudowali teorię tzw. mikromateriału prostego, który jest kinematycznie równoważny ciału z dwubiegunowymi przemieszczeniami. Koncepcja mikromateriału była przedmiotem krytyki A. E. GREENA [1965 a]. Autorzy chcieliby zwrócić uwagę na to, że w pracy A. E. GREENA nie wszystkie przekształcenia są poprawne. Ogólnie wydaje się, że w ramach klasycznej mechaniki Newtona nie można z zasad niezmienniczości wydedukować zasady zachowania masy.

Pojęcie sprężystego kontinuum wielobiegunowego (oraz kontinuum z mikrostrukturą) zostało przez Cz. WOŹNIAKA [1967 a] rozszerzone na zagadnienia termosprężystości. Oprócz wielobiegunowych pól przemieszczeń (względnie pól wektorów kierunkowych) wprowadzono i zinterpretowano także «wielobiegunowe» (względnie «zorientowane») pola temperatury. Energia swobodna φ zależy wtedy od parametrów mechanicznych $x_{k,A}$, $x_{k\alpha}$, $x_{k\alpha,A}$, temperatury θ oraz dodatkowych parametrów termicznych θ_α . Występujące tu wskaźniki gótyckie można traktować albo jako martwe (wtedy $\alpha = I, II, \dots$), albo jako

przebiegające ciągi indeksów materiałowych (wtedy $\alpha = A_1, A_1 A_{11}, A_1 A_{11} A_{111}, \dots$). Tym samym wszystkie otrzymane związki w cytowanej pracy można interpretować bądź w sposób przedstawiony w p. 4 (tj. oparty na podejściu Toupin), bądź w równoważny sposób stosowany w tym punkcie pracy (oparty na podejściu Greena-Rivlina). Równania stanu dla tensora naprężeń t_{ik} oraz tensora hipernaprężeń $t_{i\alpha k}$ mają postać:

$$(5.34) \quad t_{ik} = \varrho \frac{\partial q}{\partial X_{k,A}} X_{i,A}, \quad t_{i\alpha k} = \varrho \frac{\partial q}{\partial X_{k\alpha,A}} X_{i,A},$$

$$t_{i\alpha k,l} + \bar{f}_{\alpha k} = \varrho \frac{\partial q}{\partial X_{k\alpha}},$$

w której $\bar{f}_{\alpha k}$ są tensorami (wektorami) gęstości hipersił objętościowych. Oprócz gęstości entropii $\eta = -\partial q / \partial \theta$, w omawianej teorii pojawiają się również dodatkowe wielkości $d_{\alpha} = -\partial q / \partial \theta_{\alpha}$ charakteryzujące rozkład entropii. W następnej pracy tego autora [1967 c] rozpatrzono bardziej jeszcze ogólny model termosprężystego kontinuum, w którym parametrami stanu są gradienty przemieszczenia, przemieszczenia wielobiegunowe i ich gradienty, temperatura i gradienty temperatury oraz «wielobiegunowe» pola temperatur i ich gradienty.

6. Ośrodki niegiroskopowe wyższego rzędu

6.1. Podstawowe określenia i definicje. Pojęcie materiału nieprostego wyższego rzędu zostało wprowadzone w p. 2. W niniejszym punkcie zajmować się będziemy ośrodkiem nieżyroskopowym n -tego rzędu. Rozpatrywany ośrodek rozumiany jest w sensie W. NOLLA [1958] (jedynymi niezależnymi zmiennymi kinematycznymi są współrzędne przestrzenne x_i). Materiał nieprosty dowolnego rzędu był rozpatrywany w pracach A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a], [1965] oraz A. E. GREENA i P. M. NAĞHDIEGO [1965 a]. Liniową teorię materiału nieprostego trzeciego rzędu wraz z zastosowaniem do opisu napięć powierzchniowych rozpatrzył R. D. MINDLIN [1965]. Teoria materiału nieprostego drugiego rzędu wraz z omówieniem prac dotyczących tego zagadnienia została rozpatrzona w p. 2. Niniejszy punkt (z wyjątkiem p. 6.7) zostanie oparty częściowo na pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a], rozważania ograniczymy jednak tylko do pól mechanicznych^(?).

6.2. Zasada zachowania energii (opis przestrzenny). Podstawę rozważań A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a] stanowią: zasada zachowania energii i zasada entropii. Ograniczymy się tylko do pierwszej z nich. Ośrodkiem ciągłym $(\nu+1)$ -go rzędu nazywać będziemy ośrodek, dla którego zasada ta ma postać:

$$(6.1) \quad \int_{X_i(P)} \varrho (v_i \dot{v}_i + \dot{U}) dv = \int_{X_i(P)} \varrho \left(\sum_{\beta=0}^{\nu} \bar{F}_{[i\beta]i} v_{i,[i\beta]} \right) dv + \int_{X_i(\partial P)} \left(- \sum_{\beta=0}^{\nu} t_{[i\beta]i} v_{i,[i\beta]} \right) da,$$

w której v_i jest polem prędkości, ϱ jest gęstością, U gęstością energii wewnętrznej, natomiast $\bar{F}_{[i\beta]i}$ oraz $t_{[i\beta]i}$ są zdefiniowanymi w p. 5 2^{β} -biegunowymi sprowadzonymi siłami masowymi i powierzchniowymi pierwszego rodzaju. Wielobiegunowe siły powierzchniowe działające

(?) W cytowanej pracy postulowano klasyczną postać zasady entropii [przy rozszerzonej postaci zasady zachowania energii, por. (6.1)], co prowadzi do wniosków sprzecznych z elementarnymi rozważaniami geometrycznymi i fizykalnymi, por. Cz. WOŹNIAK [1967 b].

na płaszczyznach parametrycznych, zwane wg terminologii Greena i Rivlina 2^β -biegunowymi naprężeniami pierwszego rodzaju, są oznaczone symbolem $\sigma_{j|i_\beta}i$. Tensory $\bar{F}_{|i_\beta}i$, $t_{|i_\beta}i$ oraz wielobiegunowe naprężenia $\sigma_{j|i_\beta}i$ są z założenia wielkościami symetrycznymi względem indeksów $\{i_\beta\}$. W pracy A. E. GREENA i R. S. RIVLINA [1964 a] zamiast $\bar{F}_{|i_\beta}i$ wprowadzono do zasady (6.1) wielkości $F_{|i_\beta}i$.

Rozwijając zasadę zachowania energii dla infinitezimalnego czworościanu ograniczonego płaszczyznami parametrycznymi $x_i = \text{const}$ oraz płaszczyzną z wektorem jednostkowym n_k zewnętrznym normalnym do niej otrzymujemy:

$$(6.2) \quad \sum_{\beta=0}^v (t_{|i_\beta}i - n_j \sigma_{j|i_\beta}i) v_{i,|i_\beta} = 0.$$

Następnie korzystając z (6.2) oraz z twierdzenia Greena-Stokesa można zasadę zachowania energii przedstawić w postaci różniczkowej

$$(6.3) \quad (\sigma_{ji,j} + \varrho \bar{F}_i) v_i - \varrho \dot{U} + \sum_{\beta=0}^v (\sigma_{j|i_\beta}i_{,j} + \sigma_{(i_\beta)i} + \varrho \bar{F}_{|i_\beta}i) v_{i,|i_\beta} + \sigma_{(i_{v+1})i} v_{i,|i_{v+1}} = 0.$$

6.3. Warunki niezmienniczości. Rozumując podobnie jak w p. 5 można z równań (6.2) i (6.3) wydedukować następujące warunki z niezmienniczości tensorów $\bar{F}_{|i_\beta}i$, $t_{|i_\beta}i$, U oraz naprężeń wielobiegunowych $\sigma_{j|i_\beta}i$ względem nałożonej prędkości ruchu ciała sztywnego

$$(6.4) \quad t_i = n_j \sigma_{ji}, \quad t_{[ki]} = n_j \sigma_{j[ki]},$$

$$(6.5) \quad \sigma_{ji,j} + \varrho \bar{F}_i = 0, \quad \sigma_{j[ki],j} + \sigma_{[ki]} + \varrho \bar{F}_{[ki]} = 0.$$

Równania (6.4) są warunkami brzegowymi Cosseratów, natomiast równania (6.5) są równaniami ruchu ośrodka Cosseratów. Z równań (6.4) wynika, że wielkości σ_{ji} oraz $\sigma_{j[ki]}$ są odpowiednio tensorami o walencji dwa i trzy.

6.4. Zasada zachowania energii (opis materialny). W opisie materialnym równania (6.1)–(6.3) przyjmują postać

$$(6.6) \quad \int_P \varrho_0 (v_i \dot{v}_i + \dot{U}) dV = \int_P \varrho_0 \left(\sum_{\beta=0}^v \bar{F}_{|A_\beta}i v_{i|A_\beta} \right) dV + \int_{\partial P} \left(\sum_{\beta=0}^v p_{|A_\beta}i v_{i|A_\beta} \right) dA,$$

$$(6.7) \quad \sum_{\beta=0}^v (p_{|A_\beta}i - N_B \pi_{B|A_\beta}i) v_{i|A_\beta} = 0,$$

$$(6.8) \quad (\pi_{Bi,B} + \varrho_0 \bar{F}_i - \varrho_0 \dot{v}_i) v_i - \varrho_0 \dot{U} + \sum_{\beta=1}^v (\pi_{B|A_\beta}i_{,B} + \pi_{(A_\beta)i} + \varrho_0 \bar{F}_{|A_\beta}i) v_{i,|A_\beta} + \pi_{(A_{v+1})i} v_{i,|A_{v+1}} = 0,$$

gdzie $\bar{F}_{|A_\beta}i$, $p_{|A_\beta}i$, $\pi_{B|A_\beta}i$ są odpowiednio 2^β -biegunowymi siłami masowymi, siłami powierzchniowymi i naprężeniami. Z równań (6.6) oraz (5.11)₁ wynika, że ośrodek niegiroskopowy jest kinematycznie równoważny ośrodkowi z wielobiegunowymi przemieszczeniami dopuszczającymi w charakterze potencjału pola współrzędnych przestrzennych x_i .

6.5. Materiał sprężysty. Rozpatrywany w tym punkcie materiał A. E. GREEN i R. S. RIVLIN nazywają sprężystym, gdy

$$(6.9) \quad U = U(x_i, |A_\mu), \quad p_{|A_\beta}i = p_{|A_\beta}i(x_i, |A_\mu, N_K),$$

$$\pi_{B|A_\beta}i = \pi_{B|A_\beta}i(x_i, |A_\mu), \quad \mu = 1, 2, \dots, \gamma, \quad \gamma \geq v+1.$$

Ponieważ dla danych gradientów odkształcenia $x_{i, \{A_\mu\}}$ można niezależnie dobrać pola prędkości v_i oraz pola gradientów prędkości $v_{i, \{A_\mu\}}$, zatem z (6.7) i (6.9) wynika

$$(6.10) \quad p_{A_\beta i} = N_B \pi_{B \{A_\beta\} i}.$$

Korzystając z (6.10) i (6.8) oraz z twierdzenia Greena-Stokesa można zasadę (6.6) przedstawić w postaci:

$$(6.11) \quad (\pi_{B i, B} + \varrho_0 \bar{F}_i) v_i + \sum_{\beta=1}^{\nu} \left(\pi_{B \{A_\beta\} i, B} + \pi_{\{A_\beta\} i} + \varrho_0 \bar{F}_{\{A_\beta\} i} - \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x_{i, \{A_\beta\}}} \right) v_{i, \{A_\beta\}} + \\ + \left(\pi_{\{A_{\nu+1}\} i} - \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x_{i, \{A_{\nu+1}\}}} \right) v_{i, \{A_{\nu+1}\}} \sum_{\beta=\nu+2}^{\beta=\gamma} \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x_{i, \{A_\beta\}}} v_{i, \{A_\beta\}} = 0.$$

Powyższa równość zachodzi dla dowolnych $v_i, v_{i, \{A_\beta\}}$ przy danych $x_{i, \{A_\beta\}}$. Wynika stąd, że

$$(6.12) \quad \pi_{B i, B} + \varrho_0 \bar{F}_i = 0, \\ \pi_{B \{A_\beta\} i, B} + \pi_{\{A_\beta\} i} + \varrho_0 \bar{F}_{\{A_\beta\} i} - \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x_{i, \{A_\beta\}}} = 0, \quad 1 \leq \beta \leq \nu, \\ \pi_{\{A_{\nu+1}\} i} - \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x_{i, \{A_{\nu+1}\}}} = 0$$

oraz

$$(6.13) \quad \frac{\partial U}{\partial x_{i, \{A_\beta\}}} = 0, \quad \nu+2 \leq \beta \leq \gamma.$$

6.6. Warunki obiektywności gęstości energii wewnętrznej. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [1964 a] zakładają, że gęstość energii wewnętrznej U jest wielkością obiektywną, tzn. że dla dowolnego tensora ortogonalnego Q_{ij} zachodzi równanie

$$(6.14) \quad U(x_{i, \{A_\beta\}}) = U(Q_{ij} x_{j, \{A_\beta\}}), \quad \beta = 1, 2, \dots, \nu+1.$$

W sposób podobny jak w p. 5 można wykazać, że (6.14) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy U da się przedstawić w następującej postaci:

$$(6.15) \quad U = U(E_{B \{A_\beta\}}), \quad \beta = 1, 2, \dots, \nu+1,$$

gdzie

$$(6.16) \quad E_{B \{A_\beta\}} \equiv x_{i, B} x_{i, \{A_\beta\}}.$$

Następnie można wykazać, że warunkami koniecznymi i dostatecznymi obiektywności gęstości energii wewnętrznej są równania

$$(6.17) \quad \sum_{\beta=1}^{\nu} (\pi_{B \{A_\beta\} i, B} + \pi_{\{A_\beta\} i} + \varrho_0 \bar{F}_{\{A_\beta\} i}) x_{j, \{A_\beta\}} - \sum_{\beta=1}^{\nu} (\pi_{B \{A_\beta\} j, B} + \pi_{\{A_\beta\} j} + \varrho_0 \bar{F}_{\{A_\beta\} j}) x_{i, \{A_\beta\}} + \\ + 2\pi_{\{A_{\nu+1}\} i} x_{j, \{A_{\nu+1}\}} = 0.$$

Równania powyższe są inaczej zapisanymi równaniami ruchu ciała Cosseratów.

6.7. **Materiały sprężyste termicznie nieproste.** Pojęcie materiału nieprostego nie tylko mechanicznie lecz również termicznie zostało wprowadzone w p. 3.1. Parametrami stanu są w takim materiale nie tylko pierwszy oraz wyższe gradienty odkształcenia i temperatury θ , lecz również gradienty temperatury. Podstawowy układ równań materiału rzędu $n+1$, wprowadzony i omówiony w pracy Cz. WOŹNIAKA [1967 b], składa się z równań ruchu

$$(6.18) \quad \begin{aligned} t_{ik,i} + \bar{f}_k &= 0, \\ (t_{k\alpha[m]x_{l,\alpha}}, k + t_{l[m]} + \bar{f}_{\alpha[m]x_{l,\alpha}}) &= 0, \end{aligned}$$

równań stanu

$$(6.19) \quad \begin{aligned} t_{ik} + (t_{mAk,m} + \bar{f}_{Ak})x_{l,A} &= \varrho \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB}} x_{k,B} + \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB\alpha}} x_{k,B\alpha} \right) x_{l,A}, \\ t_{l(\alpha|k|} X_{B),l} + t_{l(B\alpha)k,l} + \bar{f}_{(B\alpha)k} &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial C_{AB\alpha}} x_{k,A}, \end{aligned}$$

w których $C_{AB} = x_{k,A} x_{k,B}$, $C_{AB\alpha} = x_{k,A} x_{k,B\alpha}$, oraz z równania przewodnictwa cieplnego

$$(6.20) \quad \begin{aligned} h_{i,i} + \varrho (c\dot{\theta} + c_\alpha \dot{\theta}_{,\alpha}) + \varrho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{AB} \partial \theta} \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{AB} \partial \theta_{,\alpha}} \theta_{,\alpha} \right) \dot{C}_{AB} + \\ + \varrho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{AB\alpha} \partial \theta} \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_{AB\alpha} \partial \theta_{,\alpha}} \theta_{,\alpha} \right) \dot{C}_{AB\alpha} + \varrho h = 0, \end{aligned}$$

w którym $h_i = h_i(\theta_{,j}, \theta_{,\alpha})$ jest wektorem przepływu ciepła. Wskaźniki gótyckie w powyższych wzorach przebiegają ciąg indeksów materiałowych ($\alpha = A_I, A_I A_{II}, \dots, A_I A_{II} \dots A_n$), przy czym $t_{lA\alpha k} \equiv 0$, $\bar{f}_{A\alpha k} \equiv 0$ dla $\alpha = A_I A_{II} \dots A_n$. Wielkości $\bar{f}_k, \bar{f}_{A\alpha k}$ są siłami objętościowymi, a wielkości c, c_α charakteryzują pojemność cieplną ciała. Bardziej ogólny model materiału nieprostego mechanicznie i termicznie (z wewnętrznymi stopniami swobody i wielobiegowymi polami temperatury) rozpatrzono w uprzednio już cytowanej pracy tegoż autora [1967, c].

7. Mikrostruktura konstrukcyjna i ośrodek włóknisty

7.1. **Pojęcia wstępne.** W punkcie tym przedstawimy model ciągły ciał, w strukturze których można wyróżnić pewien «powtarzający się» element składowy. Element ten nazywamy dalej cząstką ciała. Zakładamy, że: 1) wszystkie wymiary każdej cząstki danego ciała są bardzo niewielkie wobec wymiarów całego ciała; 2) wszystkie parametry geometryczne (kształt, wielkość, konfiguracja), statyczne (sposób obciążenia) oraz fizyczne (materiał) każdych dwóch sąsiadujących z sobą cząstek niewiele różnią się od siebie; 3) modelem cząstki jest klasyczny ośrodek ciągły (z symetrycznym tensorem naprężenia). Ciało utworzone z cząstek i spełniające powyższe trzy założenia nazywamy ciałem o mikrostrukturze konstrukcyjnej, w odróżnieniu od tzw. mikrostruktury materiałowej oraz formalnie wprowadzonej mikrostruktury omówionej w punkcie czwartym. Przykładem ciał o mikrostrukturze konstrukcyjnej są np. gęste i regularne siatki prętowe, materiały zbrojone gęstymi siatkami, dźwigary powierzchniowe o gęstej i regularnej perforacji itp.

Teoretycznie, ciała o mikrostrukturze konstrukcyjnej można opisać za pomocą równań klasycznego ośrodka ciągłego. Praktycznie jednak opis taki jest niecelowy z uwagi na

występowania w obszarze zajęтым przez ciało bardzo dużej liczby powierzchni nieciągłości (wywołanych np. skokowymi zmianami własności fizykalnych w przypadku materiałów zbrojonych siatkami) lub dużej liczby otworów (np. w dźwigarach perforowanych) itp. W związku z tym nasuwa się koncepcja fenomenologicznego opisu ciała o mikrostrukturze konstrukcyjnej za pomocą nieklasycznego lecz ciągłego i jednospójnego modelu kontynuального. Model taki nazwijmy ośrodkiem ciągłym o mikrostrukturze konstrukcyjnej.

Jest rzeczą oczywistą, że dane ciało o konstrukcyjnej mikrostrukturze można opisać za pomocą różnych modeli (różnych typów ośrodka ciągłego o mikrostrukturze konstrukcyjnej) w zależności np. od stopnia dokładności takiego opisu. Korzystając z prac Cz. WOŹNIAKA [1966 c-f] poniżej wyprowadzimy najpierw ogólne równanie ośrodka ciągłego o mikrostrukturze konstrukcyjnej (p. 7.3 i 7.4), a następnie omówimy tzw. ciała o strukturze siatkowej, będące ważnym przypadkiem szczególnym ciał o mikrostrukturze konstrukcyjnej (p. 7.5). Ogólne równania ośrodka ciągłego o mikrostrukturze konstrukcyjnej stanowią punkt wyjścia do otrzymania równań tzw. teorii «pierwszego przybliżenia», mającej duże znaczenia praktyczne (p. 7.6). Na zakończenie punktu (p. 7.7) zwięźle przedstawimy uzyskane w tym zakresie rozwiązania, możliwości uproszczenia równań teorii «pierwszego przybliżenia» (efekty brzegowe, teoria «bezmomentowa», teoria «skrępowanych obrotów») jak również niektóre perspektywy dalszego rozwoju teorii.

7.2. Kinematyka i geometria ciała o mikrostrukturze konstrukcyjnej. Niech M będzie obszarem trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa zajęтым przez ciało w chwili $\tau = \tau_0$ ⁽⁸⁾. Parametryzujemy obszar M kartezjańskim ortogonalnym układem współrzędnych. Oznaczmy przez Y^α współrzędne dowolnego punktu ciała oraz przez $Y_{(K)}^\alpha$ współrzędne środka masy jego K -tej cząstki ($K = 1, 2, \dots, N$, gdzie N jest liczbą cząstek ciała). Parametryzujemy niezależnie obszar K -tej cząstki ciała ($K = 1, 2, \dots, N$) współrzędnymi kartezjańskimi $\tilde{Y}_{(K)}^\alpha \equiv Y^\alpha - Y_{(K)}^\alpha$; punkt $\tilde{Y}_{(K)}^\alpha = 0$ jest wtedy środkiem masy K -tej cząstki. Powyżej wprowadzone współrzędne będziemy traktować jako współrzędne materialne ciała, a obszar M nazwiemy konfiguracją odniesienia tego ciała.

Niech y^i będą (w przyjętym powyżej układzie współrzędnych) współrzędnymi miejsca, które w chwili τ zajmuje punkt materialny Y^α . Niech następnie $y_{(K)}^i$ oznacza współrzędne miejsca zajmowanego w chwili τ przez środek $Y_{(K)}^\alpha$ masy K -tej cząstki ciała ($K = 1, 2, \dots, \dots, N$). Utwórzmy w obszarze $b_{(K)}$, zajęтым w chwili τ przez K -tą cząstkę ciała, różnicę $\tilde{y}_{(K)}^i \equiv y^i - y_{(K)}^i$. Równania ruchu K -tej cząstki ciała możemy wtedy napisać w poniższej postaci

$$(7.1) \quad \begin{aligned} y_{(K)}^i &= y^i(Y_{(K)}^\alpha, \tau), \\ \tilde{y}_{(K)}^i &= y^i(Y_{(K)}^\alpha + \tilde{Y}_{(K)}^\alpha, \tau) - y^i(Y_{(K)}^\alpha, \tau). \end{aligned}$$

Przyjmując w (7.1) kolejno $K = 1, 2, \dots, N$, otrzymamy równania ruchu rozpatrywanego ciała.

Przeprowadzimy przez punkt $y_{(K)}^{i(0)}$ płaszczyznę π o wektorze jednostkowym n normalnym do niej. Podzielmy zbiór cząstek otaczających K -tą cząstkę ciała na dwa podzbiory $\Sigma^{(+)}$, $\Sigma^{(-)}$ zaliczając do $\Sigma^{(-)}$ te cząstki, których środki leżą w chwili τ na płaszczyźnie π lub po jej ujemnie zorientowanej stronie.

⁽⁸⁾ W dalszym ciągu punktu określenia «ciało o mikrostrukturze konstrukcyjnej» zastąpimy kolejno określeniami «ciało» oraz «kontinuum» lub «model ciała».

Oznaczmy przez \tilde{n} wektor jednostkowy, zewnętrznie normalny do powierzchni $s_{(K)}$ otaczającej obszar $b_{(K)}$ zajęty w chwili τ przez K -tą cząstkę ciała. Załóżmy, że dla każdej cząstki ciała dana jest funkcja

$$(7.2) \quad \Delta P_{(K)} = \Delta P_{(K)}(n, \tilde{n}),$$

przy czym $\Delta P_{(K)}$ jest elementem płaszczyzny π , przez który należy podzielić siłę kontaktową działającą na element powierzchni $s_{(K)}$ o normalnej \tilde{n} , aby otrzymać odpowiadającą jej elementarną średnią siłę kontaktową pomiędzy podzbiorami $\Sigma^{(-)}$ i $\Sigma^{(+)}$, przypadającą na jednostkę płaszczyzny π . Inaczej mówiąc, funkcja (7.2) charakteryzuje intensywność (uśrednioną w otoczeniu każdej cząstki), z jaką oddziaływanie przez element powierzchni $s_{(K)}$ o normalnej \tilde{n} zostaje przekazane przez płaszczyznę π o normalnej n . Funkcja (7.2) określa tym samym sposób powiązania sąsiadujących ze sobą cząstek, a jej postać można określić w sposób ścisły dla tzw. ciał o strukturze siatkowej (por. p. 7.5).

7.3. Model sześciowymiarowy i model trójwymiarowy ciała. Oznaczmy przez $b = b(x^i)$ obszar w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa, zależny w sposób ciągły od zmiennych x^i , który dla $x^i = y_{(K)}^i$ pokrywa się z obszarem $b_{(K)}$ ($K = 1, 2, \dots, N$, por. p. 7.2). Powierzchnię otaczającą obszar $b(x^i)$ oznaczmy przez $s = s(x^i)$. Zastąpmy następnie $6N$ związków (7.1) sześcioma poniższymi równaniami:

$$(7.3) \quad x^i = x^i(X^\alpha, \tau), \quad \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(X^\alpha, \tilde{X}^\alpha, \tau),$$

w których funkcje $x^i(X^\alpha, \tau)$, $\tilde{x}^i(X^\alpha, \tilde{X}^\alpha, \tau)$ dla $X^\alpha \equiv Y_{(K)}^\alpha$, $\tilde{X}^\alpha \equiv \tilde{Y}_{(K)}^\alpha$ przyjmują kolejno wartości $y_{(K)}^i$, $\tilde{y}_{(K)}^i$, $K = 1, 2, \dots, N$. Zakładamy, że funkcje (7.3)₁ są ciągłe i różniczkowalne potrzebną liczbę razy w obszarze M oraz że $\det \partial x^i / \partial X^\alpha \neq 0$. Podobnie zakładamy, że funkcje (7.3)₂ są ciągłe i różniczkowalne w obszarze $b(x^i)$ oraz $\det \partial \tilde{x}^i / \partial \tilde{X}^\alpha \neq 0$.

Równania (7.3) można interpretować jako równania ruchu pewnego sześciowymiarowego ciągłego i jednospójnego modelu ciała z mikrostrukturą konstrukcyjną (zmiennne X^α , \tilde{X}^α , podobnie jak i zmiennne x^i , \tilde{x}^i , stanowią bowiem w (7.3) sześć zmiennych niezależnych). Stosowanie takiego modelu (można go nazwać modelem dokładnym) jest możliwe, lecz praktycznie niecelowe z uwagi na konieczność układania warunków brzegowych w przestrzeni afinicznej sześciowymiarowej (tj. na powierzchni granicznej ciała i na powierzchni granicznej typowej cząstki ciała niezależnie).

Założmy teraz, że funkcja (7.3)₂ może być rozłożona w szereg podług układu znanych funkcji $\xi^a(\tilde{X}^\alpha)$, $a = \text{I, II, } \dots$:

$$(7.4) \quad \tilde{x}^i = x_{\cdot a}^i \xi^a, \quad x_{\cdot a}^i = x_{\cdot a}^i(X^\alpha, \tau).$$

Korzystając z równań (7.3)₁ i (7.4) oraz rugując współrzędne \tilde{x}^i i \tilde{X}^α za pomocą uśrednień po obszarze $b(x^i)$ lub $s(x^i)$ otrzymamy ogólny trójwymiarowy model ciągły ciała z mikrostrukturą konstrukcyjną. Pozostawiając w szeregu (7.4) większą lub mniejszą liczbę wyrazów uzyskujemy następnie bardziej lub mniej dokładne trójwymiarowe modele ciągłe ciała^(*). Tylko do rozpatrywania takich modeli ograniczamy się w dalszym ciągu tego punktu.

(*) Sposób przejścia od «dokładnego» sześciowymiarowego modelu ciągłego ciała z mikrostrukturą do modeli trójwymiarowych jest analogiczny jak sposób przejścia od równań płyty lub powłoki rozpatrywanych jako ciała trójwymiarowe do równań dwuwymiarowych (por. p. 7.4).

7.4. Podstawowe równania. Punktem wyjścia rozważań będzie zasada zachowania energii. Postulujemy ją dla dowolnego obszaru V ograniczonego powierzchnią P w postaci (dla uproszczenia pomijamy wyrazy niemechaniczne)

$$(7.5) \quad \int_V (\dot{\varepsilon} + \dot{K}) \varrho dV = \int_P w_{(n)} dP + \int_V i w \varrho dV,$$

w której ε , K , ϱ , w są kolejno średnimi gęstościami energii wewnętrznej, energii kinetycznej, masy i prędkości pracy sił masowych w obszarze $b(x^i)$:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon &\equiv \frac{1}{\varrho b} \int_b \tilde{\varepsilon} \tilde{\varrho} db, & \varrho &\equiv \frac{1}{b} \int_b \tilde{\varrho} db, \\ K &\equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\varrho b} \int_b (\dot{x}^i + \dot{\bar{x}}^i)(\dot{x}_i + \dot{\bar{x}}_i) \tilde{\varrho} db, \\ w &\equiv \frac{1}{\varrho b} \int_b \tilde{f}^i (\dot{x}_i + \dot{\bar{x}}_i) \tilde{\varrho} db, \end{aligned}$$

natomiast $w_{(n)}$ jest średnią gęstości prędkości pracy sił kontaktowych na powierzchni P :

$$(7.7) \quad w_{(n)} \equiv \int_s \frac{\tilde{p}_{(\bar{n})}^i (\dot{x}_i + \dot{\bar{x}}_i) ds}{\Delta P(n, \bar{n})}.$$

Występujące w (7.6) funkcje $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varrho}$, \tilde{f}^i (zależne od x^i oraz \bar{x}^i) oznaczają kolejno gęstość energii wewnętrznej, gęstość masy oraz sił masowych w sześciowymiarowym modelu ciągłym ciała. Dla $x^i = y_{(K)}^i$ oraz $\bar{x}^i = \bar{y}_{(K)}^i$ funkcje te opisują kolejno gęstość energii wewnętrznej, gęstość masy i gęstość sił masowych w K -tej cząstce ciała. Analogicznie w (7.7) wielkość $\tilde{p}_{(\bar{n})}^i$ jest gęstością siły kontaktowej na powierzchni $s(x^i)$. Dla $x^i = y_{(K)}^i$ gęstość $\tilde{p}_{(\bar{n})}^i$ jest identyczna z gęstością siły kontaktowej na powierzchni $s_{(K)}$ otaczającej K -tą cząstkę ciała. Funkcja $\Delta P(n, \bar{n})$ dla $s = s_{(K)}$ jest identyczna z funkcją (7.2).

Podstawmy do (7.6) i (7.7) prawe strony wzoru (7.4). Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \varrho^n &\equiv \frac{1}{b} \int_b \xi^n \tilde{\varrho} db, & \varrho^{nb} &\equiv \frac{1}{b} \int_b \xi^n \xi^b \tilde{\varrho} db, \\ f^i &\equiv \frac{1}{\varrho b} \int_b \tilde{f}^i \tilde{\varrho} db, & f^{ni} &\equiv \frac{1}{\varrho b} \int_b \xi^n \tilde{f}^i \tilde{\varrho} db, \\ p_{(n)}^i &\equiv \int_s \frac{\tilde{p}_{(\bar{n})}^i ds}{\Delta P(n, \bar{n})}, & p_{(n)}^{ni} &\equiv \int_s \frac{\xi^n \tilde{p}_{(\bar{n})}^i ds}{\Delta P(n, \bar{n})}, \end{aligned}$$

zasada zachowania energii mechanicznej (7.5) przyjmuje ostatecznie postać

$$(7.9) \quad \int_V \dot{\varepsilon} \varrho dV + \int_V [\dot{x}^i \dot{\bar{x}}_i \varrho + (\ddot{x}^i \dot{\bar{x}}_{i\alpha} + \dot{x}^i \ddot{\bar{x}}_{i\alpha}) \varrho^n + \dot{x}^i_{\alpha} \dot{\bar{x}}_{i\beta} \varrho^{n\beta}] dV = \\ = \int_P (\dot{x}_i p_{(n)}^i + \dot{x}_{i\alpha} p_{(n)}^{i\alpha}) dP + \int_V (\dot{x}_i f^i + \dot{x}_{i\alpha} f^{\alpha i}) \varrho dV.$$

Wielkości f^i, f^{a_i} nazywamy gęstościami sił i hipersił masowych, a wielkości $p_{(n)}^i, p_{(n)}^{a_i}$ — gęstościami sił hipersił kontaktowych. Z warunków niezmienniczości gęstości energii, masy oraz obciążeń i sił kontaktowych wynikają z (7.9) poniższe równania ruchu:

$$(7.10) \quad \begin{aligned} p^{ik}_{,i} + \rho f^k &= \rho \dot{x}^k + \rho^a \dot{x}^k_a, \\ (p^{i_1 k_1} x^{j_1}_{,i_1})_{,i_1} + p^{i_1 k_1} + \rho f^{a_1 k_1} x^{j_1}_{,i_1} - \dot{x}^{i_1 k_1} x^{j_1}_{,i_1} \rho^a - \dot{x}^{i_1 k_1}_a x^{j_1}_{,i_1} \rho^{ab} &= 0, \end{aligned}$$

w których p^{ik} oraz $p^{i_1 k_1}$ są gęstościami sił oraz hipersił kontaktowych na płaszczyźnie $x^i = \text{const}$. Wielkości p^{ik} nazwiemy składowymi tensora naprężenia, natomiast wielkości $p^{i_1 k_1}$ — hipernaprężeniami. Dla mikrostruktury sprężystej zachodzą ponadto związki

$$(7.11) \quad \begin{aligned} p^{ik} &= \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{k,\alpha}} x^i_{,\alpha}, & p^{i_1 k_1} &= \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{k_1 \alpha, \alpha}} x^i_{,\alpha}, \\ p^{i_1 k_1}_{,i_1} + \rho f^{a_1 k_1} - \dot{x}^{i_1 k_1} \rho^a - \dot{x}^{i_1 k_1}_a \rho^{ab} &= \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{k_1 \alpha}}. \end{aligned}$$

Równania (7.10) można również otrzymać postulując zasady zachowania pędu i krętu w podobny sposób, jak zasadę zachowania energii (7.5). Uogólnienie równań (7.11) na przypadek termosprężystości omówiono w pracach Cz. WOŹNIAKA [1967 a, b, e].

7.5. Ciało o strukturze siatkowej. Ośrodek włóknisty. Zadajmy w obszarze zajęтым w chwili τ przez ciało z mikrostrukturą konstrukcyjną trzy rodziny powierzchni takie, że przez każdy punkt x^i tego obszaru przechodzi jedna i tylko jedna powierzchnia każdej z rodzin. Pary przecinających się rodzin powierzchni tworzą trzy kongruencje krzywych (\mathcal{E}) , $(\mathcal{E}) = (1), (2), (3)$. Wektory jednostkowe, styczne do poszczególnych rodzin kongruencji krzywych (\mathcal{E}) oznaczymy dalej przez $t^k_{(\mathcal{E})}$. Powyższe trzy pola wektorowe $t^k_{(\mathcal{E})}$ opisują siatkę ciągłą w obszarze zajęтым przez ciało⁽¹⁰⁾.

Założmy teraz, że środki wszystkich sześciu cząstek ciała, przylegających do dowolnej K -tej cząstki ciała, leżą wyłącznie na krzywych \mathcal{E} , przechodzących przez środek cząstki K . Zdefiniowana powyżej siatka ciągła charakteryzuje tym samym sposób rozmieszczenia cząstek w ciele o konstrukcyjnej mikrostrukturze. Oznaczmy dalej przez $\Delta P_{(\mathcal{E})}$ pole przekroju normalnego do wektora $t^k_{(\mathcal{E})}$ przypadającego na jedną cząstkę ciała. Pola skalarowe $\Delta P_{(\mathcal{E})}$ charakteryzują gęstość rozmieszczenia cząstek ciała (lub ich wielkość). Ciało o mikrostrukturze konstrukcyjnej, w którym rozmieszczenie cząstek jest określone wektorami $t^k_{(\mathcal{E})}$ oraz skalarami $\Delta P_{(\mathcal{E})}$ nazwiemy ciałem o strukturze siatkowej, a jego model ciągły (trójwymiarowy) — ośrodkiem włóknistym.

Dla ciała o strukturze siatkowej (przy założeniu siatki sześciościennej) możemy przyjąć, że sąsiadujące cząstki oddziałują na siebie siłami kontaktowymi $\tilde{p}^i_{(\mathcal{E})}$, rozłożonymi na powierzchniach $\Delta P_{(\mathcal{E})}$ zorientowanych dodatnim zwrotem wektora $\tilde{t}^i_{(\mathcal{E})}$ lub na częściach tych powierzchni. Dla $\tilde{n} = \tilde{t}_{(\mathcal{E})}$, $(\mathcal{E}) = (1), (2), (3)$, zachodzi wtedy (por. Cz. WOŹNIAK [1967 f])

$$(7.12) \quad \Delta P(n, \tilde{t}_{(\mathcal{E})}) = \frac{\Delta P_{(\mathcal{E})}}{t^k_{(\mathcal{E})} n_k}.$$

⁽¹⁰⁾ Ograniczymy się tu do omówienia tylko tzw. siatki sześciościennej zakładając, że z daną cząstką ciała sąsiaduje bezpośrednio tylko sześć innych cząstek.

Tym samym dla ciał o strukturze siatkowej funkcja (7.2) jest jednoznacznie określona sposobem i gęstością rozmieszczenia cząstek ciała. Dla ośrodka włóknistego jako modelu ciągłego takich ciał wzory (7.8)_{5,6} mają postać

$$(7.13) \quad p_{(n)}^i = p^{ki}n_k, \quad p_{(n)}^{ni} = p^{kni}n_k,$$

gdzie

$$(7.14) \quad p^{ki} = \sum_{(\mathcal{E})} p_{(\mathcal{E})}^{ki}, \quad p^{kni} = \sum_{(\mathcal{E})} p_{(\mathcal{E})}^{kni},$$

$$p_{(\mathcal{E})}^{ki} = t_{(\mathcal{E})}^k p_{(\mathcal{E})}^i, \quad p_{(\mathcal{E})}^{kni} = t_{(\mathcal{E})}^k p_{(\mathcal{E})}^{ni}$$

oraz

$$(7.15) \quad p_{(\mathcal{E})}^i \equiv \frac{1}{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \int_{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \tilde{p}_{(\mathcal{E})}^i dP_{(\mathcal{E})}, \quad p_{(\mathcal{E})}^{ni} \equiv \frac{1}{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \int_{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \xi^n \tilde{p}_{(\mathcal{E})}^i dP_{(\mathcal{E})}.$$

Wielkości $p_{(\mathcal{E})}^{ki}$ oraz $p_{(\mathcal{E})}^{kni}$ można nazwać kolejno tensorem naprężeń oraz tensorami hipernaprężeń we włóknach (\mathcal{E}) . Suma (7.14)_{1,2} tych tensorów daje kolejno tensor naprężenia p^{ki} oraz tensory hipernaprężenia p^{kni} w ośrodku włóknistym. Zaznaczmy, że dla ośrodka włóknistego wszystkie wzory wyprowadzone w p. 7.4 pozostają nadal aktualne, a jedynie dochodzą związki (7.12)–(7.15).

7.6. Teoria pierwszego przybliżenia. W wyprowadzonych wyżej równaniach omawianego tu kontinuum wskaźniki gotyckie α, β przebiegają ciąg nieskończony I, II, III ... Pozostawiając w szeregach (7.4) tylko skończoną liczbę Z wyrazów (wtedy $\alpha, \beta = \text{I, II, } \dots, Z$) oraz definiując w każdym punkcie kontinuum Z wektorów $d_\alpha \equiv x_\alpha^i g_i$ (g_i są wektorami bazy układu $\{x^i\}$) otrzymamy model ciała Toupin z wektorami kierunkowymi (por. p. 4). Jeżeli natomiast jako ciąg funkcji ξ^α , $\alpha = \text{I, II, } \dots, Z$, przyjmujemy w (7.4) ciąg iloczynów $\tilde{X}^\alpha, \tilde{X}^{\alpha_1}, \tilde{X}^{\alpha_2}, \tilde{X}^{\alpha_1 \alpha_2}, \tilde{X}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \dots$, to funkcje x_α^i będą dwupunktowymi polami tensorowymi $x_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}^i$, a rozpatrywane w tym punkcie kontinuum sprowadzi się do kontinuum z wielobiegunowymi przemieszczeniami Greena-Rivlina (por. p. 5). Tym samym zarówno model ciała Toupin jak i model ciała Greena-Rivlina są uproszczonymi modelami (pomijamy bowiem wielkość $0(\xi^\alpha)$, $\alpha > Z$) kontinuum omówionego w p. 7.4. Poniżej przedstawiamy pewien szczególnie prosty model ciała opisywany tzw. teorią «pierwszego przybliżenia».

Teorią pierwszego przybliżenia nazwiemy przypadek, w którym współrzędne \tilde{X}^α w równaniu (7.4) traktujemy jako małe parametry (wymiary cząstki są bowiem z założenia bardzo niewielkie w porównaniu z wymiarami ciała). Tym samym równanie (7.4) napiszemy w postaci:

$$(7.16) \quad \tilde{x}^i = x_\alpha^i \tilde{X}^\alpha + 0[(\tilde{X}^\alpha)^2],$$

przy czym wielkości $0[(\tilde{X}^\alpha)^2]$ będziemy dalej pomijać. Macierz x_α^i występująca w (7.16) jest nieosobliwa i zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie biegunowym może być przedstawiona w postaci

$$x_\alpha^i = r^{ij} \delta_j^\beta \bar{v}_{\alpha\beta},$$

z której r^{ij} jest macierzą ortogonalną oraz $\bar{v}_{\alpha\beta}$ macierzą symetryczną, dodatnio określoną. Składowe r^{ij} opisują obrót cząstki (zależą one od trzech parametrów, np. kątów Eulera), natomiast składowe $\bar{v}_{\alpha\beta}$ opisują czyste odkształcenie cząstki. Jeżeli powierzchnie materialne,

otaczające sąsiadujące z sobą cząstki, pozostają w trakcie odkształcenia stale powiązane z sobą (tj. nie dopuszczamy powstania w ciele pustek lub ekstra materii), to w ramach teorii pierwszego przybliżenia główne odkształcenia cząstek mogą zależeć tylko od zmian odległości ich środków. Zachodzi to, gdy tensor $\bar{v}_{\alpha\beta}$ jest tzw. prawym tensorem rozciągnięcia:

$$(7.17) \quad v_{\alpha\beta} = \bar{v}_{\alpha}^{\mu} \bar{v}_{\mu\beta} = x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} \delta_{ij}.$$

Wzory (7.16) i (7.17) redukują liczbę lokalnych stopni swobody omawianego w tym punkcie kontinuum do sześciu (trzech przesunięć i trzech obrotów).

Korzystając z pracy Cz. WOŹNIAKA [1967 a] równania teorii pierwszego przybliżenia dla kontinuum o sześciu lokalnych stopniach swobody [zgodnie z (7.16) i (7.17)] przedstawimy poniżej w postaci zlinearyzowanej. Przyjmijmy w tym celu

$$r^{ij} = \delta^{ij} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{ijk} v_k, \quad x^i = \delta_{\alpha}^i X_{\alpha}^{\alpha} + w^i,$$

gdzie v_k jest wektorem małego obrotu oraz w^i wektorem przemieszczenia. Po wprowadzeniu poniższych tensorów odkształcenia:

$$(7.18) \quad \gamma_{ij} = w_{i,j} + \varepsilon_{ijk} v^k, \quad \varkappa_{ij} = v_{j,i}$$

i po odpowiednich uproszczeniach otrzymamy z (7.11)_{1,2} następujące równania fizyczne:

$$(7.19) \quad \begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn} \gamma_{mn}, \\ m^{kl} &= C^{klmn} \varkappa_{mn} + E^{klmnr} \gamma_{(mn),r}, \\ p^{s(rn)} &= E^{klsrn} \varkappa_{kl} + F^{klmsrn} \gamma_{(kl),m}, \end{aligned}$$

w których antysymetryczna część tensora p^{srn} hipernaprężeń

$$m^{kl} \equiv \varepsilon_{pr}{}^k p^{[rp]},$$

jest tzw. tensorem naprężeń momentowych. Tensory A, C, E, F są tensorami sztywności sprężystej. Dla ośrodka włóknistego (por. p. 7.5) składowe stanu naprężenia występujące w (7.19) wyrażają się ponadto wzorami:

$$(7.20) \quad \begin{aligned} p^{kl} &= \sum_{(\mathcal{E})} p_{(\mathcal{E})}^{kl}, & p_{(\mathcal{E})}^{kl} &= t_{(\mathcal{E})}^k \frac{1}{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \int_{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \tilde{p}_{(\mathcal{E})}^l dP_{(\mathcal{E})}, \\ p^{klm} &= \sum_{(\mathcal{E})} p_{(\mathcal{E})}^{klm}, & p_{(\mathcal{E})}^{klm} &= t_{(\mathcal{E})}^k \frac{1}{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \int_{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \tilde{x}^l \tilde{p}_{(\mathcal{E})}^m dP_{(\mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Zlinearyzowane równania ruchu (7.10) w teorii pierwszego przybliżenia mają postać podobną jak dla ośrodka Cosseratów:

$$(7.21) \quad \begin{aligned} p^{ij}_{,i} + f^j &= \rho \dot{w}^j, \\ m^{ij}_{,i} + \varepsilon_{kl}{}^j p^{kl} + h^j &= \rho^j_i \ddot{v}^i, \end{aligned}$$

przy czym h^j są gęstościami obciążeń momentowych. Zauważmy, że w równaniach ruchu (7.21) nie występuje symetryczna część tensora hipernaprężenia. Jeżeli pominiemy wpływ gradientu $\gamma_{(mn),r}$ na naprężenia momentowe m^{kl} (tj. $E^{klmnr} = 0$), to możemy ograniczyć się do rozpatrywania tylko równań fizycznych o postaci

$$(7.22) \quad p^{kl} = A^{klmn} \gamma_{mn}, \quad m^{kl} = C^{klmn} \varkappa_{mn}.$$

Równania geometryczne (7.18), równania ruchu (7.21) oraz równanie fizyczne (7.22) stanowią wtedy podstawowy układ równań zlinearyzowanej teorii pierwszego przybliżenia. Układ ten wraz z naprężeniowymi warunkami brzegowymi

$$p_{(n)}^k = p^{lk} n_l, \quad m_{(n)}^k = m^{lk} n_l$$

oraz zachodzącymi dla ośrodka włóknistego związkami

$$p^{ij} = \sum_{(\mathcal{E})} p_{(\mathcal{E})}^{ij}, \quad p_{(\mathcal{E})}^{ij} = t_{(\mathcal{E})}^i p_{(\mathcal{E})}^j, \quad p_{(\mathcal{E})}^j \equiv \frac{1}{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \int_{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \tilde{p}_{(\mathcal{E})}^j dP_{(\mathcal{E})},$$

$$m^{ij} = \sum_{(\mathcal{E})} m_{(\mathcal{E})}^{ij}, \quad m_{(\mathcal{E})}^{ij} = t_{(\mathcal{E})}^i m_{(\mathcal{E})}^j, \quad m_{(\mathcal{E})}^j = \varepsilon^{j,kl} \frac{1}{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \int_{\Delta P_{(\mathcal{E})}} \tilde{p}_{(\mathcal{E})}^k \tilde{x}^l dP_{(\mathcal{E})}$$

był podstawą obliczeń różnych typów ciał o strukturze siatkowej, mających duże znaczenie praktyczne. Dotyczy to zwłaszcza dźwigarów powierzchniowych o strukturze siatkowej; przeglądu prac z tego zakresu dokonamy poniżej.

7.7. Dźwigary powierzchniowe o strukturze siatkowej. Spośród ciał o konstrukcyjnej mikrostrukturze główną uwagę poświęcono dotychczas dźwigarom powierzchniowym. W pracach Cz. WOŹNIAKA [1966 a, b], omawiających kolejno tarcze i płyty o strukturze siatkowej, podano wyrażenia dla tensorów sztywności sprężystej w zależności od budowy cząstki oraz od struktury siatkowej dźwigara. Rozpatrywano tu powierzchniowe dźwigary perforowane, dźwigary utworzone z siatki prętów przenoszących siły dowolnego rodzaju oraz dźwigary zbrojone siatkami. Równania (7.22) dla zakrzywionego dźwigara powierzchniowego mają poniższą postać (wskaźniki greckie przebiegają ciąg 1, 2)

$$(7.23) \quad \begin{aligned} p^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}, & l^2 p^{\alpha 3} &= A^{\alpha 3\mu 3} \gamma_{\mu 3}, \\ m^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\mu\nu} \kappa_{\mu\nu}, & m^{\alpha 3} &= a^2 C^{\alpha 3\mu 3} \kappa_{\mu 3}, \end{aligned}$$

przy czym l, a są małymi parametrami o wymiarze długości. Przyjmując $l \rightarrow 0$ oraz $a \rightarrow 0$ otrzymamy teorię, której równania wykazują formalną analogię do równań anizotropowych i niejednorodnych powłok cienkich. Przypadek ten jest uogólnieniem znanego już przedtem pojęcia anizotropii konstrukcyjnej. Występowanie w równaniach (7.23) małych parametrów wskazuje na możliwość asymptotycznego podejścia do zagadnienia. Dla siatkowych tarcz i płyt postać pierwszego i drugiego procesu iteracyjnego została określona przez K. WILMAŃSKIEGO [1967, a]. Przybliżony sposób podejścia, związany z wykorzystaniem efektu brzegowego, podano w pracach Cz. WOŹNIAKA [196 g], S. KONIECZNEGO i Cz. WOŹNIAKA [1967] oraz uogólniono na przypadek naprężeń cieplnych w pracy PIETRASA i WYRWIŃSKIEGO [1967]. Sposób ten polega na zastosowaniu tzw. teorii bezmomentowej (gdy $a \rightarrow 0$, skąd wynika $m^{\alpha 3} \rightarrow 0$) względnie tzw. teorii skrępowanych obrotów (gdy $l \rightarrow 0$, skąd wynika $\gamma_{\mu 3} \rightarrow 0$) oraz uwzględnieniu pomijanych w obu tych teoriach warunków brzegowych (dla $m^{\alpha 3}$ i $\gamma_{\mu 3}$) przez wykorzystanie równań efektu brzegowego.

Cały szereg rozwiązań został uzyskany dla zagadnień osiowo-symetrycznych tarcz i płyt o strukturze siatkowej przez S. KONIECZNEGO [1967], K. WILMAŃSKIEGO [1967, b], Cz. WOŹNIAKA i S. ZIELIŃSKIEGO [1967]. Zagadnienia stateczności były rozpatrywane przez Cz. WOŹNIAKA [1965, d], Cz. WOŹNIAKA i S. ZIELIŃSKIEGO [1967 a, b], P. KLEMMMA i Cz. WOŹNIAKA [1967]. Zagadnieniem powierzchniowych izotropowych siatek prętowych

zajmował się W. BARAŃSKI [1966]. Powierzchniowe gęste siatki kratownicowe były omówione w pracach Z. BACZYŃSKIEGO i Cz. WOŹNIAKA [1966] oraz R. PEŁY i Cz. WOŹNIAKA [1966]. Proste przypadki tarcz perforowanych zostały omówione przez W. BARAŃSKIEGO i Cz. WOŹNIAKA [1966]. Niektóre rozwiązania dla płytowych pasm o strukturze siatkowej zostały zestawione przez B. BOCZKAJA i H. HATA [1967, a, b]. Zagadnienie dużych ugięć siatkowych płyt kolistych były tematem pracy P. KLEMMa i Cz. WOŹNIAKA [1967]. Niektóre problemy związane z teorią i obliczeniem siatkowych płyt na sprężystym podłożu były omówione przez Cz. WOŹNIAKA i M. ŻUKOWSKIEGO [1966].

Poprawność posługiwania się kontynuualnym ośrodkiem włóknistym jako modelem ciągłym dźwigara o mikrostrukturze konstrukcyjnej została na drodze obliczeń porównawczych wykazana dla szczególnego przypadku w pracy S. KONIECZNEGO [1967]. Na podstawie przeliczenia prostych przypadków szczególnych wykazano stosowalność teorii wykorzystujących równania efektu brzegowego wraz z teorią skrępowanych obrotów (w zagadnieniach płytowych) lub wraz z teorią bezmomentową (w zagadnieniach tarczowych). Rozbieżność poszczególnych rozwiązań otrzymanych w oparciu o różne sposoby podejścia są tym mniejsze, im bardziej «gęsta» jest struktura siatkowa, tj. im mniejsze są wymiary cząstek dźwigara o mikrostrukturze konstrukcyjnej (dźwigara siatkowego) w porównaniu z wymiarami samego dźwigara (por. p. 7.1). Zależność pomiędzy dokładnością rozwiązania a stopniem «gęstości» siatki jest ujemną stroną stosowania teorii ośrodka włóknistego jako modelu ciągłego dźwigara siatkowego; dotychczasowe obliczenia porównawcze wykazują jednakże, że nawet dla niezbyt gęstych siatek (w których stosunek skoku siatki do jej wymiaru jest rzędu 1:5) uzyskuje się często praktycznie dobre rezultaty. Ogólnie postawione zagadnienie dokładności poszczególnych teorii ośrodka włóknistego w opisie ciał o konstrukcyjnej mikrostrukturze jest dotychczas otwartym problemem. Również otwartym problemem jest uzyskanie rozwiązań w oparciu o bardziej dokładne równania teorii ośrodka włóknistego niż równania podane w p. 7.6. Dotyczyłoby to np. ośrodka, w którym korzystamy z uproszczonego związku (7.16), lecz nie wykorzystujemy przyjęcia (7.17) (ośrodek o dwunastu lokalnych stopniach swobody). Wydaje się, że również i tutaj warianty podejścia asymptotycznego mogłyby prowadzić do pewnych rezultatów.

Bibliografia

- [1851]. A. L. CAUCHY, *Note sur l'équilibre et les mouvements vibratoires des corps solides*, C. R. Acad. Sci. Paris, **32**, 323–326.
- [1869]. A. J. C. B. DE SAINT-VENANT, *Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope lorsque l'on tient compte des dérivés d'ordre supérieur des déplacements très-petits que leurs points ont éprouvés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **68**, 569–571.
- [1887]. W. VOIGT, *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*, Anh. Ges. Wiss. Göttingen, **34**.
- [1909]. E. i F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, Paris.
- [1914]. E. HELLINGER, *Die allgemeinen Ausätze der Mechanik der Continua*, Enz. Math. Wiss., IV, 4, 30.
- [1914]. K. HEUN, *Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik*, Enz. Math. Wiss., IV, 2, 11.
- [1918]. F. KLEIN, *Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, 235.
- [1918]. E. NOETHER, *Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, 171.

- [1929]. T. J. JARAMILLO, *A generalization of the energy function of elasticity theory*, Dissertation, Univ. Chicago.
- [1944]. E. REISSNER, *Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor*, J. Math. and Physics, **23**, 192–194.
- [1949]. W. BURZYŃSKI, *Skrećenie bez skręcania*, Przegl. Mech., W-wa.
- [1953]. S. BODASZEWSKI, *O niesymetrycznym stanie napięcia i o jego zastosowaniach w mechanice ośrodków ciągłych*, Arch. Mech. Stos., **3**, **5**, 351–396.
- [1953]. Y. LE CORRE, *Constantes élastiques et piezoelectriques cristallines*, Bull. Soc. Franc. Miner. Crist., **76**, 464–471.
- [1954]. Y. LE CORRE, *Etude de l'élasticité*, Bull. Soc. Franc. Miner. Crist., I, **77**, 1363–1392; II, **77**, 1393–1409; III, **18**, 33–53; IV, **18**, 54–83.
- [1956]. Y. LE CORRE, *La dissymétrie du tenseur des efforts et ses conséquences*, J. Phys. Radium, **17**, 934–939.
- [1956]. R. TIFFEN, A. C. STEVENSON, *Elastic isotropy with body force and couple*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., **9**, 306–310.
- [1957]. J. LAVAL, *L'élasticité du milieu cristallin*, J. Phys. Radium, I, **18**, 247–259; II, **18**, 289–296; III, **18**, 369–379.
- [1957]. N. JOEL, W. A. WOOSTER, *Theories of crystal elasticity*, Nature, **180**, 430–431.
- [1958]. Y. LE CORRE, *Les densités de couple et les pseudo-rotations dans la théorie de l'élasticité de Laval*, J. Phys. Radium, **19**, 541–547.
- [1958]. J. L. ERICKSEN, C. TRUESDELL, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **1**, 295–323.
- [1958]. W. GÜNTHER, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abh. Braunschweigischen Wiss. Ges., **10**, 195–213.
- [1958]. N. JOEL, W. A. WOOSTER, *Number of elastic constants required in crystal elasticity*, Nature, **182**, 1078–1079.
- [1958]. E. KRÖNER, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Erg. angew. Math., **5**, 1–176.
- [1958]. F. A. McCLINTOCK, P. A. ANDRE, K. R. SCHWEDT, R. E. STOECKLY, *Interface couples in crystals*, Nature, **182**, 652–653.
- [1958]. W. NOLL, *A mathematical theory of mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **2**, 195–226.
- [1959]. E. KRÖNER, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **4**, 273–334.
- [1960]. Э. Л. АЭРО, Е. В. КУВШИНСКИЙ, *Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц*, Физика Твёрдого Тела, **2**, 1401–1409.
- [1960]. J. L. ERICKSEN, *Theory of anisotropic fluids*, Trans. Soc. Rheol., **4**, 29–40.
- [1960]. G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 4, **50**, 389–417.
- [1960]. F. A. McCLINTOCK, *Contribution of interface couples to the energy of a dislocation*, Acta. Metallurgica, **8**, 127–128.
- [1960]. E. S. RAJAGOPAL, *The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity*, Annalen der Physik, **6**, 192–201.
- [1960]. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, III/2, Berlin-Heidelberg-New York.
- [1961]. J. L. ERICKSEN, *Conservation laws for liquid crystals*, Trans. Soc. Rheol., **5**, 23–34.
- [1961]. R. S. KRISHNAN, E. S. RAJAGOPAL, *The atomistic and the continuum theories of crystal elasticity*, Annalen der Physik, **8**, 121–136.
- [1962a]. J. L. ERICKSEN, *Kinematics of macromolecules*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **9**, 1–8.
- [1962b]. J. L. ERICKSEN, *Hydrostatic theory of liquid crystals*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **9**, 379–394.
- [1962c]. J. L. ERICKSEN, *Nilpotent energies in liquid crystals theory*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **10**, 189–196.
- [1962d]. J. L. ERICKSEN, *Orientation induced by flow*, Trans. Soc. Rheol. **6**, 275–291.
- [1962]. A. CEMAL ERINGEN, *Nonlinear Theory of Continuous Media*, New York.
- [1962]. G. GRIOLI, *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium*, Berlin.

- [1962]. S. KALISKI, Z. PŁOCHOCKI, D. ROGULA, *Asymmetric stress tensor and angular momentum conservation law in the equations of combined mechanical and electromagnetic field in a continuous media*, Proc. Vibr. Probl., 3.
- [1962]. E. KRÖNER, *Dislocations and continuum mechanics*, Appl. Mech. Rev., 15, 599–606.
- [1962]. R. D. MINDLIN, H. T. TIERSTEN, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 11, 415–448.
- [1962]. H. SCHAEFER, *Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat Kontinuums*, Mis. der angew. Mech. Ak. Ver. Berlin, 277–292.
- [1962]. R. A. TOUPIN, *Elastic materials with couples-stresses*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 11, 385–414.
- [1963]. S. KALISKI, *On a model of the continuum with essentially non-symmetric tensor of mechanical stress*, Arch. Mech. Stos., 15.
- [1963]. E. KRÖNER, *On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci, 1, 261–278.
- [1963]. Е. В. КУВШИНСКИЙ, Э. Л. АЭРО, *Континуальная теория асимметричной упругости. Учет «внутреннего» вращения*, Физика Твёрдого Тела, 5, 2591–2598.
- [1963a]. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress-concentrations*, Experimental Mech., 3, 1–7.
- [1963b]. R. D. MINDLIN, *Representation of displacements and stresses in plane strain with couple-stresses*, IUTAM Tbilisi, 256–259.
- [1963]. M. MIȘICU, *Theory of viscoelasticity with couple-stresses and some reductions to two-dimensional problems*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mech. appl. 8, 921–952.
- [1964]. Э. Л. АЭРО, Е. В. КУВШИНСКИЙ, *Континуальная теория асимметрической упругости*, Физика Твёрдого Тела, 6, 2689–2699.
- [1964]. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 17, 1–46.
- [1964]. J. M. DOYLE, *On completeness of stress functions in elasticity*, J. Appl. Mech., 31, 728–729.
- [1964]. A. CEMAL ERINGEN, *Simple microfluids* Int. J. Engng. Sci., 2, 205–217.
- [1964a]. A. CEMAL ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, Int. J. Engng. Sci. 2, 189–204.
- [1964b]. A. CEMAL ERINGEN, E. S. SUHUBIN, *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, Int. J. Engng. Sci. 2, 389–404.
- [1964a]. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Simple force and stress multiples*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 16, 325–353.
- [1964b]. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 17, 113–147.
- [1964]. O. HOFFMAN, *On bending of thin elastic plates in the presence of couple stresses*, J. Appl. Mech., 31, 706–707.
- [1964]. P. D. KELLY, *A reacting continuum*, Int. J. Engng. Sci., 2, 129–154.
- [1964]. W. T. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proc. Koninkl. Nederlandse Akad. Wet., Ser. B, 67.
- [1964]. S. KESSEL, *Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums*, Abh. Brunschw. Wiss. Ges., 16, 1–22.
- [1964]. R. D. MINDLIN, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Analysis, 16, 51–78.
- [1964a]. M. MIȘICU, *Theory of viscoelasticity with couple stresses and some reductions to two-dimensional problems*, II, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl. 9, 3–35.
- [1964b]. M. MIȘICU, *On a theory of asymmetric plastic and viscoelasticplastic solids*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., 9, 477–495.
- [1964c]. M. MIȘICU, *A generalization of the Cosserat equations of the motion of deformable bodies (with internal degrees of freedom)*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., 9, 1351–1359.
- [1964a]. В. А. ПАЛЬМОВ, *Основные уравнения теории несимметрической упругости*, П.М.М., 28, 401–408.
- [1964b]. В. А. ПАЛЬМОВ, *Плоская задача теории несимметричной упругости*, П.М.М., 28, 1117–1120.
- [1964]. C. TEODOSIU, *On the determination of internal stresses and couple stresses in the continuum theory of dislocations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 12, 605–610.

- [1964]. R. A. TOUPIN, *Theories of elasticity with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **17**, 85–112.
- [1964a]. Cz. WOŹNIAK, *Introduction to mechanics of fibrous media*, Arch. Mech. Stos., **16**.
- [1964b]. Cz. WOŹNIAK, *Fibrous media as continuous models of grates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 15–17.
- [1964c]. Cz. WOŹNIAK, *Fibrous media as continuous models of frames and lattices*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 19–22.
- [1964d]. Cz. WOŹNIAK, *Fundamentals of the theory of fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 329–333.
- [1964e]. Cz. WOŹNIAK, *Equations of three-dimensional fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **12**, 389–393.
- [1965]. Э. Л. АЭРО, А. Н. БУЛУГИН, Е. В. КУВШИНСКИЙ, *Асимметрическая гидромеханика*, П. М. М., **2**, 297–308.
- [1965]. R. C. DIXON, A. CEMAL ERINGEN, *A dynamical theory of polar elastic dielectrics*, Int. J. Engng. Sci., **7**, 359–398.
- [1965]. A. E. GREEN, *Micro-materials and multipolar continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **7**, 533–537.
- [1965a]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *Plasticity and multipolar continuum mechanics*, Mathematika, **12**, 21–26.
- [1965b]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *On the derivation of discontinuity conditions in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **2**, 621–624.
- [1965]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, R. S. RIVLIN, *Directors and multipolar displacement in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci., **2**, 611–620.
- [1965]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, W. L. WAINRIGHT, *A general theory of Cosserat surface*, Arch. Rat. Mech. Analysis, **20**, 287–308.
- [1965]. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *Multipolar continuum mechanics: functional theory, I*, Proc. Royal Soc., **284**, 303–324.
- [1965]. R. J. HARTRANFT, G. C. SIH, *The effect of couple-stresses on the stress concentrations of a circular inclusion*, J. Appl. Mech., **32**, 429–431.
- [1965]. W. H. HOPPMAN, F. O. F. SHAHMAN, *Physical model of a 3-constant isotropic elastic material*, J. Appl. Mech., **32**, 837–841.
- [1965]. P. N. KALONI, *On certain steady flows of anisotropic fluids*, Int. J. Engng. Sci., **3**, 515–532.
- [1965a]. R. D. MINDLIN, *On the equations of elastic materials with micro-structure*, Int. J. Solids Structures, **1**, 73–78.
- [1965b]. R. D. MINDLIN, *Second gradient strain and surface-tension in linear elasticity*, Int. J. Solids Structures, **1**, 417–438.
- [1965a]. M. MIŞICU, *On a general solution of the theory of singular dislocations of media with couple-stresses*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 35–46.
- [1965b]. M. MIŞICU, *On the mechanics of structural media. Non-correlated fields*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 295–332.
- [1965c]. M. MIŞICU, *General correlated fields of structural mechanics*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 507–550.
- [1965d]. M. MIŞICU, *The nonlinear elasticity of materials with partially constrained internal rotations*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 841–892.
- [1965e]. M. MIŞICU, *A generalization of the Cosserat equations of the motion of deformable bodies*, Arch. Mech. Stos., **17**, 183–196.
- [1965f]. M. MIŞICU, *The elasticity of structural non-homogeneous centro-asymmetric isotropic bodies*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 1085–1105.
- [1965g]. M. MIŞICU, *On the distortions in special structural media*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 1441–1461.
- [1965]. R. MUKI, E. STERNBERG, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, Z. angew. Math. Physik, **16**, 611–648.
- [1965]. P. M. NAGHDI, *A static-geometric analogue in the theory of couple-stresses*, Proc. Koninkl. Nederlandse Akad. Wet., Ser. B, **68**, 29–32.

- [1965]. Ю. Н. НЕМИШ, *Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием* Прикладная Механика, **1**, 52–59.
- [1965]. Г. Н. САВИН, *Основы плоской задачи моментной теории упругости*, Киев.
- [1965]. M. SOKOŁOWSKI, *Couple stresses in problems of torsion of prismatical bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **13**, 419–424.
- [1965]. C. TEODOSIU, *The determination of stress and couple-stresses generated by dislocations in isotropic media*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **10**, 1461–1481.
- [1965]. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, Berlin-Heidelberg-New York.
- [1965]. Y. WEITSMAN, *Couple-stresses effects on stress concentrations around a cylindrical inclusion in a field of uniaxial tension*, J. Appl. Mech., **32**, 424–428.
- [1965]. Z. WESOŁOWSKI, *On the couple-stresses in an elastic continuum*, Arch. Mech. Stos., **17**, 219–232.
- [1965a]. Cz. WOŹNIAK, *Modele ciągłe gestych siatek prętowych*, Arch. Inżyn. Ładow., **11**, 175–185.
- [1965b]. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media (I)*, Arch. Mech. Stos., **17**, 651–669.
- [1965c]. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media (II)*, Arch. Mech. Stos., **17**, 777–799.
- [1965d]. Cz. WOŹNIAK, *On the stability of dense plane bar grids*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **13**, 53–59.
- [1965e]. Cz. WOŹNIAK, *On the simply connected model of certain multi-hole discs*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, **13**, 261–266.
- [1966]. W. BARAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, *Fibrous media as a simply connected model of multi-hole disc*, Arch. Mech. Stos., **18**, 273–283.
- [1966]. W. BARAŃSKI, *Izotropowy ośrodek włóknisty jako model rusztu powłokowego*, Arch. Mech. Stos., **18**,
- [1966]. J. L. BLEUSTEIN, *Effects of microstructure on stress concentrations at a spherical cavity*, Int. J. Solids Structures, **2**, 83–104.
- [1966]. T. S. COOK, Y. WEITSMAN, *Strain gradient effects around spherical inclusions and cavities*, Int. J. Solids Structures, **2**.
- [1966]. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *On the derivation of discontinuity conditions in continuum mechanics*, Int. J. Engng. Sci. **4**, 96–96.
- [1966]. M. MISICU, *The structural distortion and the basic laws of the structural dislocation theory*, II, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. appl., **11**, 109–124.
- [1966]. Ю. Н. НЕМИШ, *Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости*, Прикладная Механика, **2**, 85–96.
- [1966]. W. NOWACKI, *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**, 129–138.
- [1966]. N. SANDRU, *On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., **4**, 81–94.
- [1966]. Г. Н. САВИН, А. Н. ГУЗЬ, *Об одном способе решения плоских задач моментной теории упругости для многосвязных областей*, Прикладная Механика, **2**, 3–19.
- [1966]. Y. WEITSMAN, *Strain-gradient effects around cylindrical inclusions and cavities in a field of cylindrical symmetric tension*, J. Appl. Mech., **33**, 57–67.
- [1966]. Л. П. ВИНОКУРОВ, Н. И. ДЕРЕВЯНКО, *Построение основных уравнений для расчета стержней (без кручения) с учетом моментных напряжений*, Прикладная Механика, **2**, 72–79.
- [1966]. K. WILMAŃSKI, *O pewnym włóknistym modelu gestego rusztu*, Rozpr. Inżyn. **3**, **14**.
- [1966a]. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *Some problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, **14**.
- [1966b]. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *On the solutions of axially symmetrical problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. IV, **14**.
- [1966]. Z. BACZYŃSKI, Cz. WOŹNIAK, *Statics of lattice — tower shells*, Symposium IASS, Bratysława.
- [1966]. Cz. WOŹNIAK, M. ŻUKOWSKI, *On a model of elastic subsoil carrying surface moments*, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. IV, **14**.
- [1966]. J. WYRWIŃSKI, *Green functions for a thermoelastic Cosserat medium*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**, 145–154.

- [1966a]. Cz. WOŹNIAK, *Load-carrying structures of dense lattice-type*, Arch. Mech. Stos., **18**.
- [1966b]. Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability of lattice-type plates*, Arch. Mech. Stos., **18**.
- [1966c]. Cz. WOŹNIAK, *Foundations of micro-solid theory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
- [1966d]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of micro-materials*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
- [1966e]. Cz. WOŹNIAK, *Hyper-stresses in linear thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
- [1966f]. Cz. WOŹNIAK, *Continuous models of the lattice — type bodies*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
- [1966g]. Cz. WOŹNIAK, *Edge-effect in lattice-type discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **14**.
- [1966]. R. PETA, Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do teorii i obliczeń kratownic powierzchniowych*, Arch. Inżyn. Łądown, **12**.
- [1967a]. B. BOCZKAJ, H. HAT, *Zginanie jednokierunkowo obciążonych pasm rusztowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., — Budownictwo.
- [1967b]. B. BOCZKAJ, H. HAT, *Niektóre przypadki stateczności pasm rusztowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., — Budownictwo.
- [1967]. H. HAT, *O pewnych przypadkach zginania wielootworowych pasm płytowych*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., — Budownictwo.
- [1967]. S. KONIECZNY, *O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych*, Arch. Inżyn. Łądown.
- [1967a]. K. WILMAŃSKI, *Metody asymptotyczne w teorii ciał z mikrostrukturą — zagadnienie płaskie*, Arch. Mech. Stos.
- [1967b]. K. WILMAŃSKI, *Niegiroskopowa płyta włóknista jako model ciągły osiowo-symetrycznych rusztów i płyt wielootworowych*, Mech. Teoret. Stos.
- [1967k]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of the bodies with microstructure*, Arch. Mech. Stos., **19**.
- [1967l]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of non simple materials*, Arch. Mech. Stos., **19**.
- [1967m]. Cz. WOŹNIAK, *Thermoelasticity of non-simple continuous media with internal degrees of freedom*, Int. J. of Eng. Sci.
- [1967]. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Perforated circular plates*, Arch. Mech. Stos., **19**.
- [1967]. F. PIETRAS, J. WYRWIŃSKI, *Naprężenia w cieplne w płaskim ośrodku Cosserat*, Arch. Mech. Stos.
- [1967a]. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *Niektóre zagadnienia stateczności kolistych płyt perforowanych*, Arch. Inżyn. Łądown.
- [1967b]. Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, *O wyboczeniu biegunowych siatek prętowych*, Mech. Teor. i Stos.
- [1967]. S. KONIECZNY, Cz. WOŹNIAK, *Obliczanie płyt siatkowych z uwzględnieniem efektu brzegowego*, Rozpr. Inżyn.
- [1967]. S. ZAHORSKI, *On motion and thermodynamics of non-simple continua with microstructure*, Arch. Mech. Stos.

Р е з ю м е

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД ТИПА КОССЕРА

В большинстве задач механики сплошных сред предполагается, что каждая материальная точка имеет три степени свободы, плотность внутренней энергии зависит от первых производных вектора перемещений а не зависит от высших. При выше упомянутых предположениях напряженное состояние однозначно определяется симметрическим тензором напряжения. Упругая сплошная среда, которая не удовлетворяет хотя бы одному из упомянутых предположений, названа сплошной средой типа Коссера.

В работе дается обзор задач механики сред этого типа. Обсуждается, довольно подробно, оба основные направления развития. Первое из них состоит в обобщении кинематики среды (элемент имеет не более трех степеней свободы), тогда как второе направление постулирует наличие высших градиентов в перемещениях в выражении для плотности внутренней энергии. Оба эти подхода приводят к несимметрии тензора напряжений и к так наз. напряжениям высшего порядка.

В работе обсуждаются последовательно: гироскопическая среда Коссера, теория непростых материалов второго порядка, теория тела с макроструктурой (в смысле дополнительных степеней свободы, определяемых полем направляющим вектор), теория сред с мультиполярными перемещениями (дополнительные степени свободы определяются двухточечными тензорными полями), теория непростых материалов высшего порядка, а также так наз. конструкционная микроструктура. В работе указывается обширная литература.

S u m m a r y

MECHANICS OF CONTINUOUS MEDIA — COSSERAT TYPE

With regard to the problems concerning mechanics of continuous media, it is assumed, on the whole, that any material point of the medium is characterized by three freedom degrees and that the density of internal energy depends on first derivatives of displacement vector and not on the higher ones. With such assumptions the state of stress is defined uniquely by the symmetric stress tensor. The elastic continuous medium in which at least one of the mentioned conditions does not exist is called the continuous medium of Cosserat type.

The paper gives the survey of problems concerning mechanics of media of such a type. Two basic development trends are discussed in a more detailed way. The generalization of medium kinematics (an element of medium is characterized by more than three freedom degrees) is the basis of the first trend, while existence of higher order gradients of displacement in the equation for density of internal energy applies to the second one. Both approaches lead to nonsymmetry of the stress tensor and to the so-called higher order stresses.

The paper deals successively with the following problems: gyroscope Cosserat medium, theory of non-simple materials of second order effect, theory of body with microstructure (in the meaning of additional freedom degrees defined by director field), theory of media with multipolar displacement (additional freedom degrees are defined by two point tensor fields), theory of non-simple materials of higher order effects and so-called construction microstructure. A large bibliography is also included.

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1966 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

KONFERENCJA NAUKOWA ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH W KOŁOBRZEGU PRZEGLĄD REFERATÓW

W dniach od 26 sierpnia do 4 września 1966 r. odbyła się w Kołobrzegu dziesiąta z kolei konferencja naukowa zorganizowana przez Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. W konferencji wzięło udział ogółem 159 osób, przy czym 23 osoby stanowiły grupę reprezentującą zagraniczne ośrodki naukowe. W grupie tej reprezentowanych było 10 krajów (Anglia, Austria, Czechosłowacja, Francja, Indie, Norwegia, NRD, Rumunia, USA, ZSRR). Uczestnicy zagraniczni przedstawili 19 prac, uczestnicy krajowi 67, w sumie wygłoszono więc 86 referatów.

Wśród uczestników krajowych dużą liczbę stanowili pracownicy Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych, których było ogółem pięćdziesięciu czterech, pozostali reprezentowali różne ośrodki naukowe w kraju (Warszawa, Kraków, Łódź, Poznań, Wrocław, Częstochowa i Gdańsk).

Fakt, że w obradach wzięli udział wybitni uczeni zarówno krajowi jak i zagraniczni, przyczynił się do zapewnienia wysokiego jak zwykle poziomu naukowego konferencji.

Tematyka konferencji była niezwykle szeroka. Dużo uwagi poświęcono problemom zupełnie nowym, które stanowiły bogate uzupełnienie zagadnień rozpatrywanych z klasycznego punktu widzenia. Z tego względu zaproponowany niżej podział tematyczny nosi charakter orientacyjny i nie jest w stanie objąć ściśle wszystkich kierunków reprezentowanych w referatach. Podział ten przedstawia się następująco:

1. Teoria sprężystości i termosprężystość
2. Teoria plastyczności i reologia
3. Problemy dynamiczne
4. Teoria defektów i zagadnienia strukturalne
5. Analiza konstrukcji inżynierskich
6. Prace eksperymentalne

Zamieszczony niżej krótki przegląd referatów może stanowić jedynie pewien materiał informacyjny o stanie zaawansowania i kierunkach obecnie prowadzonych badań. Natomiast przegląd ten, ze względu na obszerną tematykę, nie zawiera krytycznej i odpowiednio rzeczowej analizy konferencji w Kołobrzegu.

1. *Teoria sprężystości i termosprężystość.* Do tej grupy zaliczone zostały prace dotyczące klasycznych zagadnień teorii sprężystości z uwzględnieniem zagadnień brzegowych dla płyt i powłok, jak również problemy nieliniowe i prace z termosprężystości. Włączono do tej grupy również prace, w których rozważane są ośrodki włókniste.

Wygłoszono cztery referaty z dziedziny płyt i powłok w zakresie klasycznej teorii sprężystości. K. HENNIG (NRD) przedstawił zmodyfikowaną metodę A. I. ŁURIEGO rozwiązywania zagadnień płaskich teorii sprężystości. Autorowi udało się uzyskać równania dwuwymiarowe, analogiczne do występujących w teorii powłok. Pokazano, że dla płyty uzyskuje się równanie różniczkowe, podane przez ŁURIEGO, jako przypadek szczególny.

C. JENSEN (Norwegia) zajął się wyprowadzeniem równań liniowej teorii sprężystości cienkich niepłaskich powłok o dwóch lub jednej rodzinie prostych tworzących.

Pracę na temat obliczania płyt sprężystych zreferował M. HAIMOVICI (Rumunia). Podana metoda polega na założeniu rozwiązania w postaci szeregu funkcji, których ciąg posiada pewne własności układu zupełnego. Funkcje te spełniają określone warunki brzegowe. Współczynniki szeregu wyznacza się metodą wariacyjną.

W. PIETRASZKIEWICZ przeprowadził dyskusję wieloznaczności funkcji naprężeń dla powłok dwu- i wielospójnych wychodząc z liniowej teorii powłok o małej wyniosłości. Autor wykazał, że wieloznaczność funkcji naprężeń zależy tylko od istnienia pionowej składowej głównego wektora momentu oraz pionowej składowej głównego wektora sił działających na wewnętrzny kontur zamknięty. Podany został algorytm rozwiązania dla powłoki obrotowej o małej wyniosłości o dwuspójnym obszarze przy dowolnym obciążeniu powierzchniowym.

Zagadnienia dotyczące współdziałania dwóch lub więcej elementów sprężystych poruszone zostały w pracach G. S. SZAPIRO (ZSRR), J. KOWALSKIEGO oraz G. HEINRICHA (Austria). Pierwszy z wymienionych autorów przedstawił rozwiązania płaskich osiowo-symetrycznych oraz przestrzennych problemów dotyczących ośrodków składających się z płaskich warstw równoległych przy danych naprężeniach na brzegach ośrodka. Rozpatrzone zostały warstwy sprężyste bez uwzględnienia i z uwzględnieniem naprężeń momentowych, warstwy lepko-sprężyste oraz problemy konsolidacji dla ciał warstwowych.

J. KOWALSKI wyprowadził wzory na przemieszczenia i naprężenia w przestrzeni sprężystej zawierającej wałek nieskończony poddany działaniu statycznej siły wzdłuż jego osi. Rozwiązanie zostało sprowadzone do pojedynczych całek Fouriera.

Problem zachowania się walca kołowego na nieskończonej płaszczyźnie, na który poza siłą normalną i styczną działa także siła osiowa, rozpatrzony został przez G. HEINRICHA. Zagadnienie prowadzi do układu nieliniowych równań całkowych, który rozwiązano w sposób przybliżony.

Tutaj należy również wymienić pracę G. SZEFERA oraz pracę B. STACHOWICZ i G. SZEFERA. Pierwsza z tych prac dotyczy dwóch zagadnień osiowo-symetrycznych: zagadnienia nacisku stempla oraz zagadnienia szczeliny. Założona została niejednorodność półprzestrzeni sprężystej, polegająca na wykładniczej zmianie modułu sprężystości wraz z głębokością. Zadanie rozwiązane zostało w przemieszczeniach za pomocą transformacji Hankela. Otrzymane dualne równania całkowe rozwiązano efektywnie metodą Uflanda-Lebidiewa.

W drugiej pracy autorzy zajęli się badaniem naprężeń kontaktowych w półpłaszczyźnie sprężystej pod działaniem stempla. Również i w tej pracy założono, że moduł sprężystości zmienia się wykładniczo z głębokością. Wychodząc z funkcji naprężeń Airy'ego zastosowano transformację Fouriera, a otrzymany problem brzegowy sprowadzono do dualnych równań całkowych, które rozwiązano metodą Noble'a.

Pracę dotyczącą niesymetrycznych zagadnień teorii sprężystości wygłosił P. P. TEODORESCU (Rumunia). Autor przedstawił pewną ogólną metodę konstruowania sił skupionych dla tego typu zagadnień w oparciu o zasadę superpozycji.

Zagadnienia termosprężystości poruszone zostały w sześciu referatach. W. NOWACKI przedstawił podstawy sprzężonej termosprężystości, w której deformacja ciała opisana została przez wektor przemieszczenia, wektor rotacji oraz temperaturę. Korzystając z podstaw termodynamiki procesów nieodwracalnych wyprowadzono równanie konstytutywne oraz podstawowe równanie różniczkowe termosprężystości. Rozpatrzone zostało szczegółowo zagadnienie propagacji fal termosprężystych w nieograniczonym ośrodku o izotropii centrosymetrycznej. Podana została zasada prac wirtualnych, podstawowe równanie energetyczne i twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań. Jako przypadek szczególny niesymetrycznej termosprężystości rozpatrzona została termosprężystość ośrodka Cosseratów.

Dwie prace, przedstawione przez A. GAŁKĘ oraz R. B. HETNARSKIEGO, dotyczyły bardziej szczególnych zagadnień sprzężonych termosprężystości. Autor pierwszej z nich zajął się wyznaczeniem przemieszczeń i temperatury w sprzężonym płaskim zagadnieniu, gdy działa punktowe źródło ciepła i skupiona siła masowa, zmieniające się dowolnie w czasie. Zastosowana została transformacja Laplace'a, a następnie, po rozwinięciu w szereg względem parametru sprzężenia, otrzymano wynik przybliżony.

W drugiej z tych prac, R. B. HETNARSKI przedstawił rozwiązanie jednowymiarowego zagadnienia sprzężonego dla ciała nieograniczonego, gdy jako warunki początkowe przyjęto przemieszczenie, prędkość przemieszczenia oraz temperaturę w postaci dowolnych funkcji zmiennej przestrzennej. Otrzymano rozkład przemieszczenia i temperatury korzystając z operatorowej metody funkcji początkowych.

Rozwiązanie quasi-statycznego zagadnienia termosprężystości dla walca wynurzającego się ze stałą prędkością z półprzestrzeni o stałej temperaturze podał T. ROŻNOWSKI. Autor wykorzystał wyniki poprzednich swoich prac i uzyskał rozwiązanie zawierające funkcje Bessela, funkcje błędu oraz pojedyncze całki charakterystyczne dla problemu walca.

W. L. INDENBOM (ZSRR), referując pracę przygotowaną wspólnie z W. I. DANIŁOWSKĄ (ZSRR), zajął się zagadnieniem powstawania fal termosprężystych w wyniku działania sił bezwładności przy nagłej zmianie temperatury. Przez superpozycję fal koherentnych można otrzymać wzrost amplitudy. Ze względu na analogię między równaniami potencjału termosprężystego i potencjału ruchomego naboju w elektrodynamice można wyprowadzić wniosek, że pola temperatur poruszające się z prędkościami naddźwiękowymi powodują promieniowanie dźwiękowych fal termosprężystych analogicznie do promieniowania Czerenkowa. Szczególną uwagę zwrócono na metody generowania takich fal, na przykład przy oddziaływaniu strumienia światła na ciała stałe.

Stan naprężenia w wydrążonej kuli sprężysto-plastycznej poddanej procesowi ogrzewania-chłodzenia zbadał B. RANIECKI. Sposób utrzymania chwilowych i końcowych stanów naprężenia podano w oparciu o teorię deformacyjną przy założeniu liniowego wzmocnienia i pominięciu wpływu temperatury na własności fizyczne materiału.

Kilka prac poświęconych zostało ośrodkom włóknistym. Wyprowadzeniem równań termosprężystości ciał z mikrostrukturą zajęli się Cz. WOŹNIAK i F. PIETRAS. W oparciu o ogólne równania termosprężystości wielobiegunowego ośrodka ciągłego wyprowadzono i omówiono równania termosprężystości anizotropowego i niejednorodnego płaskiego kontinuum Cosseratów. Otrzymane równania można wykorzystać w teorii ośrodków włóknistych jako podstawę obliczeń naprężeń cieplnych w tarczach perforowanych i płaskich siatkach.

F. PIETRAS i J. WYRWIŃSKI podali przybliżone metody obliczania naprężeń cieplnych w tarczach o strukturze siatkowej, przy czym jako model takich tarcz przyjęli włóknisty anizotropowy ośrodek Cosseratów. Omówiono zostało zagadnienie efektu brzegowego, wywołane polem temperatury.

Rozwiązania asymptotyczne dla płaskiego ośrodka włóknistego przedstawił K. WILMAŃSKI. Rozwiązania podano w postaci dwóch procesów iteracyjnych. Wykazano zbieżność otrzymanego rozwiązania do rozwiązania ścisłego.

S. KONIECZNY i K. PUSTELNIK zajęli się teorią efektu brzegowego dla płaskich ośrodków włóknistych jako modeli siatkowych tarcz i płyt. W oparciu o tę teorię przedstawiono metodę obliczeniową dla tarczy i płyty kołowo-symetrycznej.

Kołowo-symetryczne zagadnienie dużych ugięć płyt kolistych zawierających dużą liczbę regularnie rozmieszczonych otworów rozpatrzył P. KLEMM. Jako jednorodny model takich płyt autor przyjął ośrodek włóknisty o siatce biegunowej. Dla pewnej klasy płyt perforowanych podane zostały zależności energetyczne, z których uzyskano proste rozwiązania.

Do prac o znaczeniu ogólnym należy zaliczyć referat Z. WASIUTYŃSKIEGO. Autor przedstawił zagadnienie zależności liniowej między składowymi tensora odkształcenia. Po wprowadzeniu zależności funkcyjnej między składowymi odkształcenia omówiono własności takiej zależności. Przedyskutowano otrzymane związki i zilustrowano je przykładami.

Pracę na temat twierdzenia Noether dla ośrodka ciągłego oddziaływującego z polami zewnętrznymi przedstawił D. ROGULA. Na podstawie twierdzenia Noether wykazano istnienie równań zachowania dwóch typów: równań związanych z symetrią przestrzeni fizycznej i czasu oraz równań związanych z symetrią wewnętrzną ośrodka. Wyniki zilustrowano na przykładzie ośrodka polaryzowanego elektrycznie, oddziaływującego z polem elektromagnetycznym.

Kinematyką powierzchniowych i liniowych elementów ośrodka ciągłego zajął się Z. WESOŁOWSKI. Całkowite skończone odkształcenie elementów podzielone zostało na odkształcenie czyste, określone tensorem symetrycznym, oraz na szywny obrót, określony tensorem ortogonalnym. Szczegółowo rozpatrzono przypadek, gdy odkształcenie i obrót są małe.

Pracę na temat kinematyki umiarowych sześcioboków wchrowatych przedstawił D. L. GAUTHIER (Francja).

2. *Teoria plastyczności i reologia.* W grupie tej przedstawiono nowe koncepcje matematycznego opisu zachowania się materiałów niesprężystych, termodynamiczne teorie ośrodka ciągłego oraz takie problemy, jak płaskie zagadnienia teorii plastyczności, zagadnienia nośności granicznej, problemy mechaniki ośrodka sypkiego oraz zagadnienia liniowej i nieliniowej teorii lepkosprężystości.

Grupę prac obejmujących podstawy teorii plastyczności i ośrodków niesprężystych otworzyła praca W. OLSZAKA i P. PERZYNY dotycząca wprowadzenia ogólnych równań konstytutywnych dla materiału

sprężysto-lepkoplastycznego, którego cechą charakterystyczną jest to, że przed uplastycznieniem posiada tylko właściwości sprężyste, a po uplastycznieniu wykazuje sprężone efekty sprężyste, plastyczne i lepkie. Otrzymane równania wyprowadzone zostały z równań konstytutywnych dla materiałów prostych przy założeniu odkształceń skończonych i anizotropii materiału oraz spełnieniu zasady obiektywności materialnej. Przy powyższych założeniach P. PERZYNA i W. WOJNO podali warunki ograniczające równania konstytutywne dla sprężysto-lepkoplastycznych materiałów, wynikające ze spełnienia pierwszego i drugiego prawa termodynamiki. W przypadku granicznym uzyskano równania konstytutywne dla materiałów sprężysto-plastycznych, jakie sformułowali GREEN i NAGHDI.

Nową koncepcję opisu zanikania pamięci dla materiałów prostych przedstawił P. PERZYNA. W oparciu o metryczną przestrzeń topologiczną sformułowane zostały zasady zanikania pamięci oraz wyprowadzono podstawowe twierdzenie o reprezentacji funkcjonu konstytutywnego. Wykorzystanie topologicznej przestrzeni metryczalnej pozwoliło na uzyskanie dużej ogólności w opisie zanikania pamięci.

Opierając się na metodzie analizy termodynamicznej, opracowanej przez COLEMANA dla materiałów prostych, S. ZAHORSKI podjął próbę wyprowadzenia teorii ośrodków ciągłych z oddziaływaniami wyższych rzędów, uwzględniając nie tylko wyższe gradienty odkształcenia, ale i pewną mikrostrukturę charakteryzującą się polem wektorów kierunkowych i ich gradientów. Rozważono takie zagadnienia, jak bilans energii, równania ruchu, równania konstytutywne oraz pewne ograniczenia wynikające z nierówności Clausiusa-Duhema.

Z. SOBOTKA (Czechosłowacja) przedstawił równania przyrostowej teorii plastyczności ośrodków anizotropowych w formie wiążącej składowe prędkości odkształceń i naprężeń, uwzględniając jednocześnie ściśliwość ośrodka. Wprowadzone zostały nowe potencjały plastyczności dające efekty drugorzędowego plastycznego płynięcia. Pewnymi aspektami przyrostowych związków fizycznych w teorii plastyczności zajęła się również M. MIHAILESCU (Rumunia). Zaproponowane przez N. CRISTESCU prawo dynamicznego odkształcania się materiału dla przypadku jednowymiarowego zostało rozszerzone na przypadek fal płaskich.

Uogólnieniu teorii wzmocnienia kinematycznego poświęcona była praca Z. MROZA. Rozważony został przypadek zmiennych modułów wzmocnienia zależnych od historii obciążenia przy jednoczesnym zachowaniu hipotezy o istnieniu powierzchni uplastycznienia przemieszczającej się równolegle. Wykazano, że przy zastosowaniu nowej hipotezy można opisać efekty pamięci materiału przy obciążeniach o zmiennym znaku.

Stosując metodę kinematyczną teorii nośności granicznej ustrojów sztywno-idealnie plastycznych i rachunek prawdopodobieństwa J. MURZEWSKI określił parametry rozkładu nośności granicznej prostszych układów elementów wykonanych z materiału mikroskopowo niejednorodnego takiego, że granica plastyczności jest funkcją stochastyczną punktu fizycznego. M. JANAS przeprowadził analizę wpływu zmian geometrii na nośność graniczną płyt zbudowanych z materiałów o różnych charakterystykach plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu (np. płyty żelbetowe). Rozpatrzono zjawisko przeskoku, związane z niestatecznym zachowaniem się rozpatrywanych układów oraz zanalizowano wpływ odkształceń sprężystych.

Tematycznie ze sobą związane i odnoszące się do zastosowania płaskich stanów teorii plastyczności do procesów obróbki plastycznej są prace J. RYCHLEWSKIEGO, B. A. DRUJANOWA i J. NAJARA. J. RYCHLEWSKI rozważał zagadnienie optymalnego kształtu matrycy do przeciągania pasma z materiału sztywno-idealnie plastycznego. Wykazano, że w przypadku matrycy bez tarcia optymalny kształt uzyskuje się, gdy trajektorie naprężeń głównych pokrywać się będą z pewną ortogonalną siatką materialną, będącą prostoliniową przed i po deformacji pasma. Zagadnieniem walcowania warstwy o dużej grubości zajął się B. A. DRUJANOW (ZSRR) zakładając, że walce są sztywne oraz siły tarcia mogą osiągnąć granicę plastyczności na ścinanie. Dla przypadku, gdy na całej linii kontaktu nie występuje poślizg, skonstruowano siatkę charakterystyk, określoną z dokładnością do dwóch funkcji, które znajduje się z warunków kinematycznych. Analizę płaskiego przepływu ośrodka sztywno-idealnie plastycznego w przypadku gdy nie można założyć quasi-statyczności ruchu przeprowadził J. NAJAR. Wykazano istotny wpływ członów inercyjnych w równaniach ruchu w zakresie dopuszczalnych parametrów technologicznych takich jak prędkość narzędzia lub wymiary materiałów.

W pracy J. ZAWIDZKIEGO rozważono ogólne stany płaskie niejednorodnych ośrodków plastycznych. Wykorzystano geometryczne własności nieortogonalnych układów krzywoliniowych do analizy typu otrzymanego układu równań oraz do znalezienia ogólnej postaci związków wzdłuż charakterystyk.

Zagadnieniu ośrodków sypkich były poświęcone prace J. KRAVTCZENKI (Francja), I. KISIELA i Cz. SZYMAŃSKIEGO. W pracy pierwszej rozpatrzono osobliwości typu Kármána-Sokołowskiego w teorii równowagi

granicznej gruntów spoistych. Rozpatrzono zagadnienie wciskania stempla kołowego w półprzestrzeń wypełnioną ośrodkiem sypkim. Do całkowania równań mających wyżej wspomniane osobliwości zastosowano metodę Poincarégo. W pracy drugiej I. KISTEL przeprowadził analizę zagadnienia osuwiska i jego mechanizmu. W oparciu o czteroparametrowy model reologiczny Maxwella-Saint Venanta rozważono zagadnienie półwarstwy pod obciążeniem własnym, posadowionej na sztywnym gładkim podłożu. Pracę dotyczącą metody sprowadzania równań różniczkowych cząstkowych quasi-liniowych typu hiperbolicznego do postaci kanonicznej przedstawił Cz. SZYMAŃSKI. Podano zastosowanie opracowanej metody dla wielu zagadnień teorii plastyczności i ośrodków sypkich.

Osobną grupę stanowią prace dotyczące liniowych i nieliniowych zagadnień teorii lepkosprężystości. M. PREDELEANU (Rumunia) przedstawił dowody istnienia i jednoznaczności mieszanych zagadnień brzegowych w liniowej teorii lepkosprężystości. Z. BYCHAWSKI i A. FOX sformułowali równania konstytutywne nieliniowej lepkosprężystości, wyrażając składowe stanu odkształcenia bądź przez nieliniowe operatory całkowe, zawierające uogólnioną funkcję pełzania, bądź zapisując je w formie przyrostowej. Podano metodę odwracania nieliniowych operatorów całkowych do postaci różniczkowej.

Rozwiązanie obrotowo-symetrycznej geometrycznie nieliniowej powłoki, której zachowanie się opisane jest za pomocą omówionych wyżej równań konstytutywnych Bychawskiego-Foxa, przedstawione zostało przez H. КОРЕЦКЕГО. Rozwiązanie dla funkcji naprężeń oraz funkcji ugięcia przyjęto w postaci szeregów potęgowych o współczynnikach zależnych od czasu.

Do grupy tej można również zaszeregować pracę J. LITWINISZYNA «O zjawisku kolmotacji», w której rozważono interesujące z punktu widzenia matematycznego i ważne praktycznie zagadnienie przepływu cząstek oraz podano weryfikację doświadczalną otrzymanych rezultatów teoretycznych.

3. *Problemy dynamiczne.* Do tej grupy prac zaliczono zagadnienia rozprzestrzeniania się fal w ośrodkach ograniczonych i nieograniczonych, sprężystych i niesprężystych, w ośrodkach kontynualnych oraz w kryształach, zagadnienia flatteru powłok, niektóre problemy drgań płyt, zagadnienie dynamiki płyty pływającej oraz problem stabilności drgań. Włączono również prace dotyczące metod rozwiązywania dynamicznych zagadnień brzegowych.

W pierwszej z dwu wygłoszonych prac S. KALISKI rozważył zagadnienie występowania bieżących fal powierzchniowych w układach ograniczonych typu samowzbudnego. Fale takie powstają np. w wyniku mechanicznego ruchu układu oscylatorów nad wycinkiem półprzestrzeni sprężystej (przypadek rezonansowy) lub ruchu gazu nad takim wycinkiem wzmocnionym płytą (przypadek tłumieniowy). Zdaniem autora podobnych analogii można oczekiwać dla bardziej złożonych układów fizycznych w szczególności w teorii półsprężonych oraz w teorii wzmocniaczy ultra i hiperdźwiękowych.

Efekt samowzbudności w drugiej pracy S. KALISKIEGO wykorzystany został do uzyskania rozwiązania dla tzw. «rezonatora idealnego», tj. takiego, dla którego amplituda w rezonansie w zakresie liniowym jest nieograniczona. Obydwe prace otwierają szerokie możliwości zastosowań praktycznych we współczesnej technice.

Osobną grupę reprezentowana przez prace S. KALISKIEGO i S. WOROSZYŁA, Z. DŻYGADŁY, B. GAIL oraz J. NIESYTTO dotyczyła zagadnień aerosprężystości. W pracy S. KALISKIEGO i S. WOROSZYŁA rozważono zagadnienie flatteru wirującej powłoki cylindrycznej, zanurzonej w gazie idealnym. Rozwiązanie uzyskano w postaci fali bieżącej z dyskretnym zbiorem liczb fałowych. Z. DŻYGADŁO przedstawił wyniki swych prac dotyczących zjawisk związanych z działaniem zaburzeń jawnie zależnych od czasu na powierzchniowe aerosprężyste układy samowzbudne. Zjawiska te rozpatrzono na przykładach problemów brzegowych parametryczno-samowzbudnych i wymuszonych drgań płyty o skończonej długości w płaskim opływie naddźwiękowym.

Zagadnienie flatteru wycinka powłoki cylindrycznej w opływie naddźwiękowym było tematem pracy B. GAIL. J. NIESYTTO rozpatrzył również drgania samowzbudne cienkiej powłoki osiowo-symetrycznej o skończonej długości przy przepływie wewnątrz powłoki gazu z prędkością naddźwiękową. Dla różnych parametrów konstrukcyjnych i materiałowych powłoki wyznaczono prędkości krytyczne przepływu.

N. W. ZWOLIŃSKI (ZSRR) podał rozwiązanie problemu fali obciążenia w półnieskończonym sprężysto-plastycznym cylindrze, gdy krzywa naprężenie-odkształcenie jest skierowana wypukłością do góry oraz rozwiązanie problemu odbicia płaskiej fali sprężysto-plastycznej od granicy podziału dwu ośrodków w przypadku, gdy krzywa naprężenie-odkształcenie jest skierowana wklęsłością do góry. W obydwu przypadkach zakłada się, że obciążenie zachodzi przy zachowaniu stałej gęstości.

Problemem rozprzestrzeniania się fal termo-sprężysto-plastycznych zajęli się N. CRISTESCU i I. SULICIU oraz N. CRISTESCU i G. DINCA. Rozpatrzone zostały fale podłużne oraz fale płaskie. Do rozważań przyjęto różne postacie prawa przewodnictwa ciepła między innymi prawo S. KALISKIEGO. Uzyskano pewne interesujące ograniczenia odnośnie do równań konstytutywnych.

Również zagadnieniem rozprzestrzeniania się jednowymiarowych fal obciążenia i odciążenia w ośrodku niejednorodnym, opisanym modelem Prandtla z liniowym wzmocnieniem, zajął się E. WŁODARCZYK. Dla pewnej określonej klasy materiałów rozwiązanie uzyskano w postaci zamkniętej.

Analizę fal przyśpieszenia w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym (lepkość w zakresie odkształceń sprężystych) przy założeniu dużych odkształceń przeprowadzili P. PERZYNA i J. BEJDA. Z warunku realności fali otrzymano pewne ograniczenia, jakie powinny być nałożone na postać równań konstytutywnych.

Opracowaniu ogólnych metod rozwiązywania zagadnień brzegowych w ośrodkach niesprężystych i sprężystych były poświęcone prace P. PERZYNY i A. PIELORZ oraz Cz. RYMARZA. W pierwszej przeprowadzono konfrontację stosowanych metod przybliżonego rozwiązywania problemów falowych w ośrodkach niesprężystych oraz opracowano metodę kolejnych przybliżeń w oparciu o koncepcję R. COURANTA. W pracy drugiej opracowano przybliżoną metodę rozwiązywania pewnych problemów brzegowych dynamicznej teorii sprężystości w obszarach o osiowej symetrii. W pracach tych podane zostały dowody zbieżności rozwiązania przybliżonego oraz określono obszar jego zbieżności.

Pozostałe dwie prace dotyczyły problemów drgań. G. SCHMIDT (NRD) przedstawił dwie metody określania stabilności drgań nieliniowych wymuszanych parametrycznie, jedną — opartą o metodę E. METTLERA polegającą na rozwinięciu równań w szeregi Fouriera, drugą — opartą na sposobie W. HAACKE polegającą na rozwinięciu rozwiązań dla specjalnych warunków początkowych w proste szeregi potęgowe.

Drgania nieograniczonej płyty sprężystej znajdującej się na powierzchni cieczy ściślej były przedmiotem badań R. SOŁECKIEGO. Stosując dla półprzestrzeni rozwiązanie typu potencjału opóźnionego oraz zakładając obciążenie typu impulsowego, a następnie stosując kolejno transformację Laplace'a, twierdzenie Bartelsa-Churchilla i transformację Fouriera otrzymano rozwiązanie zadania w postaci całki Fouriera Bessela.

4. *Teoria defektów i zagadnienia strukturalne.* Do grupy tej zaliczone zostały prace z zakresu teorii dyslokacji, a także zagadnienia ośrodków wielofazowych i problemy inkluzji.

Z teorii dyslokacji przedstawiono trzy prace. W pierwszej z nich Ł. TURSKI omówił zasadę wariacyjną dla równań równowagi i niezgodności odkształceń w kontynuualnej teorii dyslokacji. Autor pokazał, jak przez zmianę pewnej grupy transformacji, na podstawie pól kompensujących Utiiamy, można uzyskać równania równowagi i niezgodności odkształceń ośrodka z dyslokacjami.

E. KOSSECKA wyprowadziła wzór na tak zwaną siłę samooddziaływania pojedynczej dyslokacji skoncentrowanej. Siła ta jest wynikiem oddziaływania dyslokacji z jej własnym polem sprężystym. Punktem wyjścia jest zasada wariacyjna połowej teorii defektów w ośrodku sprężystym oraz zasada Wheelera-Feynmana, stosowana w elektrodynamice do wyznaczania siły samooddziaływania elektronu.

Wyniki badań nad charakterem ruchu dyslokacji skoncentrowanych w oparciu o połowę teorii defektów przedstawił J. KOSSECKI. Przy założeniu, że dyslokacja znajduje się w nieskończonym ośrodku sprężystym, zbadano kilka przypadków ruchu rozpatrując zarówno dyslokacje nieważkie jak i posiadające masę.

Statystyczną teorią ciągłego rozkładu dyslokacji zajął się A. RĄDOWICZ wychodząc z metod klasycznej mechaniki statystycznej. Autor wyprowadził równania: quasi-ciągłości, ruchu oraz transportu energii.

Pracę poświęconą badaniu ośrodka wielofazowego przedstawił Cz. EIMER. Autor sformułował na podstawie metod statystyki matematycznej problem naprężeń rzeczywistych i naprężeń średnich w poszczególnych fazach ośrodka wielofazowego. Zagadnienie dotyczy również innych charakterystyk statystycznych ważnych ze względu na powiązanie własności ziaren z własnościami ośrodka jako całości. Rozwiązanie ogólne uzyskane zostało w oparciu o metodę polaryzacji dla niejednorodnego ośrodka nieograniczonego.

Zagadnienie pola sprężystego wywołanego przez inkluzję w nieskończonym ośrodku anizotropowym zostało przedstawione przez L. J. WALPOLE (Anglia). Rozwiązanie uzyskano metodą kolejnych przybliżeń. Bardziej szczegółowe wyniki podano dla przypadku inkluzji w kształcie kuli.

Na temat modelu Poissona ośrodka kruchego z losowymi mikrouszkodzeniami wewnętrznymi mówił J. SOJKA. Autor zanalizował sprężysto-kruchy ośrodek z mikrostrukturą.

5. *Analiza konstrukcji inżynierskich.* Należy tu wyróżnić grupy tematyczne liczniej reprezentowane, mianowicie prace z zakresu optymalnego projektowania, stateczności konstrukcji oraz prace pokrewne.

Wśród prac dotyczących optymalnego projektowania M. ŻYCZKOWSKI rozważył zagadnienie optymalnego kształtowania cienkościennego zamkniętego profilu belek zginanych przy uwzględnieniu warunków stateczności, przyjmując jako kryterium kształtowania minimalny ciężar.

Praca, którą przedstawił W. KRZYŚ, zawierała analizę optymalnego kształtowania cienkościennych prętów osiowo-ściskanych w zakresie niesprężystym. Podano optymalne rozwiązanie przy założeniu dowolnej charakterystyki materiału; równocześnie autor pracy przedstawił numeryczno-graficzną metodę kształtowania rozpatrywanego pręta dla dowolnej charakterystyki materiału, niekoniecznie opisanej równaniem analitycznym.

W referacie M. GALOSA omówiono metodę obliczania nośności granicznej skręcanych prętów zakrzywionych oraz analogię dla plastycznego skręcania prętów niejednorodnych. Rozwiązano efektywnie kilka przypadków kształtu przekroju przy założeniu jednorodności oraz pewnej specjalnej niejednorodności materiału.

Również praca W. MARKSA dotyczyła zagadnień związanych z optymalnym projektowaniem, mianowicie przedyskutowano rozmieszczenie cięgien w belkach sprężonych. Jako kryterium kształtowania obrano wyrównanie w każdym punkcie ustroju odkształceń głównych do wartości stałych. Zagadnienie to sformułowano w postaci równania różniczkowego, z którego po rozwiązaniu można znaleźć przekrój oraz kierunek ciągną sprężającego.

W grupie prac dotyczących zagadnień stateczności konstrukcji Z. BRZOSKA i J. KAPKOWSKI przedstawili studium stateczności słupa żurawia wieżowego z liną odciągową i przeciwwagą umieszczoną u podstawy słupa. W pracy, która składała się z dwóch części, autorzy rozpatrzyli wyboczenie symetryczne w płaszczyźnie wypadu oraz wyboczenie niesymetryczne (prostopaść do płaszczyzny wypadu) uwzględniając oprócz odkształcalności słupa na zginanie, również wpływ skrętnej odkształcalności giętniej.

S. BUĆKO zajął się sprężysto-plastycznym wybočeniami promieniowo ściskanych powłok walcowych. W pracy podano metodę wyprowadzania wzorów określających stateczność powłok walcowych zarówno w zakresie sprężystym jak i niesprężystym, przy czym otrzymane równania rozwiązano metodą uogólnionych szeregów potęgowych.

Natomiast M. ŁUKOWIAK i S. ZIELŃSKI przedstawili pracę o stateczności prostokątnych i kołowych płyt wielootworowych wykorzystując teorię ośrodka włóknistego. Rozważania te doprowadziły do wyznaczenia sił krytycznych dla niektórych płyt prostokątnych.

Wśród pozostałych prac W. BARAŃSKI przedstawił analizę zginania siatkowych powłok walcowych w oparciu o równania powierzchniowego ośrodka włóknistego.

Również praca H. FRĄCKIEWICZA dotyczyła mechaniki siatek powierzchniowych, gdzie rozważono geometrię, równania równowagi i związki fizyczne dyskretnej siatki powierzchniowej. Po wprowadzeniu założeń określających fizyczną strukturę siatki autor podał równania równowagi oraz równania konstytutywne i wykazał analogię powyższych równań z równaniami teorii powłok.

W. GUTKOWSKI przedstawił rozważania dotyczące analizy siatek prętowych w oparciu o geometrię liczb. Odpowiednio zdefiniowana siatka punktów umożliwia analizę układów prętowych o różnorodnych konfiguracjach; dalsze rozważania umożliwiły zdefiniowanie deformacji siatki punktów, związków fizycznych i równań ruchu węzłów siatki prętów.

W referacie S. ŁUKASIEWICZA przedstawiono obliczenia rozkładu ugięć i naprężeń w powłoce kulistej w okolicy punktu działania siły skupionej, stycznej do powierzchni powłoki i skupionego momentu zginającego. Ugięcia powłoki i funkcje naprężeń przedstawiono w postaci całek Fouriera; uzyskane w ten sposób rozwiązania pozwala na obliczenie koncentracji naprężeń w powłoce.

Przedmiotem pracy Z. WASZCZYŻYNA były sprężysto-plastyczne ugięcia płyt kołowych z rozciągliwą powierzchnią środkową. Rozważono płytę o stałej grubości z materiału nieściśliwego wykazującego wzmocnienie liniowe. Po sformułowaniu równań równowagi i związków fizycznych wg. teorii Iliuszyna opracowano algorytm dla rozwiązania otrzymanego układu nieliniowych równań różniczkowych. Jako przykład obliczono płytę pierścieniową obciążoną momentem gnącym równomiernie rozłożonym wzdłuż zewnętrznego brzegu konturu płyty.

Dla przedstawionej grupy prac jest charakterystyczne to, że oprócz stale podejmowanych zagadnień dotyczących nośności granicznej pojawiały się liczne prace, w których rozważano ustroje siatkowe.

6. *Prace eksperymentalne.* W tej grupie należy wymienić prace dotyczące eksperymentalnej weryfikacji ustrojów inżynierskich bądź elementów konstrukcyjnych. Oprócz tego można wyróżnić prace dotyczące badania własności mechanicznych materiałów konstrukcyjnych, a następnie prace, w których badano mechanikę procesu deformacji odkształcalnego ośrodka.

S. S. GILL (Anglia) przedstawił wyniki doświadczeń uzyskane przy badaniu zachowania się odgałęzień w walcowych i kulistych zbiornikach poddanych ciśnieniu wewnętrznemu. Stosowane ciśnienia były tak duże, że pozwalały na badanie zachowania się odgałęzień po lokalnym przekroczeniu granicy sprężystości. Jako metodę pomiaru autor stosował tensometrię elektrooporową oraz czujniki zegarowe. W wyniku doświadczeń stwierdzono, że teoria stanów granicznych zbiorników kulistych wykazuje zadowalającą zgodność z doświadczeniem (autor ma na myśli wielkość ciśnienia granicznego).

Doświadczalna weryfikacja teoretycznych rozwiązań dla dużych odkształceń plastycznych metali została przedstawiona przez W. SZCZEPIŃSKIEGO. Autor podał teoretyczne rozwiązania odkształcania się kwadratowych siatek dla czterech różnych procesów (przecinanie bloku, ściskanie klina, ściskanie bloku płaskimi płytami oraz wytlaczanie z dzielonej matrycy) i porównał je z rzeczywistymi deformacjami takich siatek, otrzymanymi doświadczalnie dla ołowiu i aluminium. Stwierdzono praktyczną przydatność rozwiązań dla modelu ciała sztywno-plastycznego bez wzmocnienia, jednak w niektórych przypadkach rozwiązania te wymagają weryfikacji doświadczalnej, gdyż wzmocnienie może istotnie wpływać na kinematykę procesu.

W. SZCZEPIŃSKI i J. MIASTKOWSKI przedstawili pracę pt. «Doświadczalna weryfikacja kinematycznej hipotezy wzmocnienia». Przedstawiono w niej pewne efekty zaobserwowane w doświadczeniach i związane z historią deformacji w dwuosowym stanie naprężenia na tle kinematycznej hipotezy wzmocnienia.

Wśród prac dotyczących badania własności materiałów należy wymienić pracę J. KLEPACZKI, który przedstawił wyniki badań doświadczalnych nad wpływem trwałego odkształcenia dynamicznego na twardość miękkiej stali i aluminium. Omawiana praca dotyczy badanych ostatnio efektów pamięci w deformujących się plastycznie materiałach. Autor wykazał, że własności mechaniczne badanych metali zależą w istotny sposób od przebytej historii prędkości odkształcenia.

J. HALAUNBRENNER i A. KUBISZ w swoim referacie podali wyniki doświadczeń uzyskanych przy badaniu własności lepkosprężystych kilku żywic, aby na tej podstawie zanalizować opór toczenia się sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym. W wyniku doświadczeń uzyskano zależność współczynnika oporu przy toczeniu od czasu kontaktu.

Zagadnienia, które dotyczą analizy pracy prętów z różnego rodzaju korbami, zostały przedstawione w pracach L. DIETRICHA i W. SZCZEPIŃSKIEGO oraz E. DRESCHEROWEJ. W pierwszej pracy autorzy podali rozwiązanie określające nośność graniczną osiowo-symetrycznych prętów z nierówno pochyłonymi tworzącymi karbu oraz przedyskutowali wpływ średnicy części pręta poza karbem. Poza tym autorzy podali wyniki doświadczeń mających na celu weryfikację teoretycznych rozważań nośności granicznej i zbadanie wpływu średnicy pręta poza karbem. W drugiej pracy autorka przeprowadziła doświadczalne badania przy rozciąganiu statycznym i udarowym próbek osiowo-symetrycznych z korbami kątowymi i półkolistymi mierząc pracę zerwania w obydwu przypadkach. Stwierdzono, że iloraz pracy zmierzonej dla warunków dynamicznych i pracy zmierzonej dla warunków statycznych zwiększa się ze wzrostem ostrości korbów.

Wspólną pracę na temat kinematyki wciskania klina w ośrodek sypki przedstawili A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA i Z. MRÓZ. Badania przeprowadzono dla modelu ośrodka sypkiego utworzonego z wałeczków szklanych o różnych średnicach oraz na piasku średnioziarnistym. Uzyskane pola przemieszczeń metodą fotograficzną pozwoliły znaleźć pole prędkości odkształceń, a także pole kierunków głównych. Porównanie wyników doświadczeń z rozwiązaniami teoretycznymi pozwoliło uzyskać informacje o kinematyce ośrodka sypkiego znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia.

*J. Bejda, R. B. Hetnarski, J. Klepaczko
Warszawa*

V MIĘDZYNARODOWE SYMPOZJUM GAZÓW ROZRZEDZONYCH W OXFORDZIE

V Międzynarodowe Sympozjum Gazów Rozrzedzonych odbyło się w Oxfordzie w dniach 4–8 lipca 1966 r. Zgromadziło ono około 220 uczonych, przy czym interesująco przedstawia się podział:

USA	90,	Kanada	9,
Anglia	40,	Włochy	8,
Francja	21,	NRF	15.

Wszystkie pozostałe kraje były reprezentowane przez grupy uczonych 5 i mniej osobowe. Z krajów socjalistycznych reprezentowane były ZSRR (5 osób), NRD (2) i Polska (2), przy czym ZSRR i NRD po raz pierwszy przysłali swoich uczonych na ten ważny międzynarodowy zjazd naukowy.

Przedstawione propozycje liczbowe dość dobrze odzwierciedlają też (być może z wyjątkiem Anglii) wkład poszczególnych krajów w aktualny rozwój badań. Nie ulega wątpliwości dominacja badań amerykańskich zarówno w zakresie doświadczenia, jak i stosowania nieraz bardzo skomplikowanych i trudnych metod numerycznych; rozwój obu tych dziedzin w znakomitym stopniu uzależniony jest od przeznaczonych na nie środków materialnych.

Prace doświadczalne w ośrodkach europejskich najżywiej są prowadzone we Francji, NRF i Anglii i wyraźnie ujawnia się tendencja ich rozszerzania. Np. w zwiedzonym przez uczestników Kongresu nowym laboratorium prof. Holdera, głównego organizatora Sympozjum, ma on do dyspozycji nowoczesne urządzenia (część z nich jest już standardowa, wyrabiana przez specjalistyczne firmy) choć same badania znajdują się w fazie początkowej. (Sądzę, że do tego laboratorium można i należy posłać na rok kogoś z kraju).

Prace teoretyczne, jak przyznano w dyskusji, cechuje pewna jednostronność. Przedstawiono bardzo niewiele rozważań o charakterze czysto analitycznym i postęp w rozumieniu teorii równania Boltzmanna nie wydaje się znaczny. Uzyskano natomiast wiele ważnych rozwiązań numerycznych głównie przy zastosowaniu różnych wariantów metody Monte-Carlo. Wszystkie one wymagają posiadania wielkich maszyn cyfrowych i dlatego te rezultaty były wyłącznie domeną USA.

Odbywały się tylko ogólne zebrania Kongresu — nie było sekcji; zwracano jednak uwagę, że być może, korzystne byłoby ich wprowadzenie w przyszłości. Referaty były grupowane według dziedzin i każdy cykl referatów był poprzedzony godzinnym referatem przeglądowym.

Na pierwszy ogień poszło zastosowanie kinetycznej teorii gazów. Przeglądowy referat wygłosił J. P. GUIRAUD (Francja). Do najbardziej interesujących referatów zaliczyłbym referaty nielicznej lecz prężnej grupy włoskiej (CERCIGNANI, PAGANI, BOSSANINI i inni).

I. L. PATTEN (USA) przedstawił szczegółowy przegląd osiągnięć w dziedzinie przepływów w zakresie mieszanym (Transition flow), najbardziej niepokojącego odcinka w dziedzinie gazów rozrzedzonych. Największa liczba prac dotyczyła zagadnienia płytki z brzegiem (leading edge) i w tym zadaniu przedstawiono nowe rezultaty teoretyczne i doświadczalne (BOGDONOFF i jego grupa). Z prac teoretycznych za najciekawsze uważam pracę CHAHINE'A (USA) dotyczącą «dwuwymiarowego» równania Boltzmanna oraz pracę WILLISA i HAMELA dotyczącą wpływu braku równowagi. Z prac doświadczalnych bardzo interesujące są prace pozwalające na bezpośrednie doświadczalne wyznaczenie funkcji rozkładu. Do dawnych metod doszły tu nowe, np. zastosowanie lasera (praca KARAMCHETI, KOUTSOYANIS, KWOK i RASMUSSEN).

Kolejna wielka grupa prac dotyczyła oddziaływań powierzchni z cząstkami. Przeglądowy wykład wygłosił HURLBUT, znany jako autor bardzo wielu precyzyjnych doświadczeń. Zwracano uwagę na brak powiązania tej tematyki z tematyką innych działów; w gruncie rzeczy rezultaty badań dotyczących powierzchni nie są wykorzystywane w teorii przepływów gazów rozrzedzonych.

Najskromniej, jeżeli chodzi o liczbę referatów, obsadzona była sekcja dotycząca badań jonosfery. Referat przeglądowy wygłosił J. H. LEEUW (Kanada). Z wygłoszonych prac specjalnie ładną wydała mi się praca MASLENNIKOWA i SZIGOWA (ZSRR) dotycząca modelu rozrzedzonej plazmy i jej oddziaływań z naładowanym ciałem.

Poza konferencją, jeśli nie liczyć oficjalnych bankietów (na których dyskusje były kontynuowane), odbył się pokaz filmu przesłanego z księżyca przez Surveyora.

Materiały Kongresu zostaną w całości opublikowane. Na razie wyszła tylko książka streszczeń (350 str.). Ustalono, że następny Kongres odbędzie się za dwa lata w MIT, Cambridge Mass., USA i obowiązki gospodarza przyjął na siebie prof. BOGDONOFF.

Organizacja Kongresu była znakomita, co w niemałym stopniu przyczyniło się do stworzenia miłej i dobrej atmosfery.

R. Herczyński (Warszawa)

MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH W WARNIE

W dniach od 20 do 25 września 1966 odbyła się Międzynarodowa Konferencja Mechaniki Ośrodków Ciągłych zorganizowana przez Instytut Mechaniki Bułgarskiej Akademii Nauk. Uczestnicy zostali zakwaterowani w nowoortwartym Międzynarodowym Domu Naukowca w uzdrowisku Družba koło Warny.

W domu tym wybudowanym z funduszków międzynarodowych (m. in. i polskich) znajdują się oprócz luksusowo wyposażonej części hotelowej wraz z restauracją, basenem krytym i otwartym itp. również i dwie sale konferencyjne w tym jedna duża z pełnym wyposażeniem projekcyjnym i instalacją do bieżącego tłumaczenia referatów na kilka języków.

W konferencji oprócz bułgarskich gospodarzy wzięli również udział zaproszeni goście z krajów demokracji ludowej, mianowicie z Czechosłowacji — 2 osoby, z NRD — 2 osoby, z Polski — 4 osoby, z Węgier — 2 osoby i z ZSRR — 4 osoby. Obrady odbywały się wspólnie bez podziału na sekcje. Ogółem wygłoszono 22 referaty po 20 minut oraz 19 komunikatów, na które przeznaczono po 10 minut. Największą liczbę prac przedstawili Bułgarzy, mianowicie 10 referatów i 18 komunikatów, następnie przedstawiciele Polski i ZSRR po 4 referaty, a dalej NRD — 2 referaty i 1 komunikat i CSR — 2 referaty.

Konferencję cechowała duża różnorodność tematyczna. Największą grupę tematyczną stanowiło jedenaście prac z dziedziny statyki i dynamiki elementów konstrukcyjnych (powłoki, płyty, ramy, pręty). Tematyka pozostałych referatów była rozproszona. Z podstawowych zagadnień teorii lepkości i lepkoplastyczności przedstawiono 5 prac. Matematycznymi metodami rozwiązywania równań ośrodka ciągłego zajmowało się trzech autorów. W dwóch pracach rozpatrywano zagadnienia ośrodków ortotropowych. Również po dwie prace poświęcono mechanice gruntów i betonów. Przedstawiono po dwie prace z hydrodynamiki, dynamiki ruchu ciał sztywnych i teorii plastyczności. Trzy prace zajmowały się metodyką pomiarów naprężeń. Pozostałe prace obejmowały różne dziedziny. Zaledwie w czterech pracach przedstawiono wyniki badań doświadczalnych. Pozostałe prace z wyjątkiem dwóch, w których zajmowano się techniką pomiarów tensometrycznych, obejmowały opracowania teoretyczne.

Organizatorzy planują wydanie pełnego tekstu wszystkich referatów i komunikatów w specjalnej książce. Do dyspozycji uczestników wydano drukiem krótkie streszczenia prac.

Organizacja konferencji była na bardzo wysokim poziomie, co wraz z niezwykle serdecznym przyjęciem zagranicznych uczestników przyczyniło się do stworzenia doskonałej atmosfery obrad.

W. Szczepiński (Warszawa)

SYMPOZJUM TECHNIKI WIBRACYJNEJ

W dniach 21–22 października 1966 r. odbyło się w Gdańsku I Sympozjum Techniki Wibracyjnej zorganizowane przez Oddziały Gdański i Krakowski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn IPPT Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, Katedrę Mechaniki Technicznej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie oraz Zakład Naukowy Mechanicznej Teorii Maszyn Politechniki Gdańskiej. W Sympozjum brało udział 90 osób reprezentujących uczelnie techniczne, instytuty naukowo-badawcze oraz zakłady przemysłowe. Wygłoszonych zostało 21 referatów i komunikatów, w tym jeden referat uczestnika zagranicznego, członka Łotewskiej Akademii Nauk, prof. J. G. PANOWKO z Leningradu. W dyskusji zabierało głos 18 dyskutantów.

Referaty przedstawiały prace teoretyczne i doświadczalne. Dotyczyły zagadnień podstawowych i techniczno-konstrukcyjnych. Wygłoszone zostały następujące referaty i komunikaty:

1. S. ZIEMBA, Z. ENGEL, «Stosowanie drgań w realizacji pewnych procesów technologicznych».
2. B. ZIEMBA, B. KOWALCZYK, «Drgania wibruderzeniowe».
3. W. BOGUSZ, «Dopuszczalne amplitudy drgań maszyn wibracyjnych».
4. M. ZABAWA, «Zagadnienia obciążeń stochastycznych w wibrotechnice».
5. A. CZUBAK, «Możliwości stosowania transportu wibracyjnego w przemyśle».
6. R. JUCHA, «Dozowanie materiałów sypkich za pomocą podajników wibracyjnych».
7. A. CZUBAK, «Badania dynamiki prostego przenośnika wibracyjnego».
8. Z. ORŁOWSKI, «Zastosowanie przenośników wibracyjnych do transportu ziarna zbóż».
9. J. PUGANIEC, H. MODZELEWSKI, «Wyładowywanie zmarzniętych materiałów kopalnianych i budowlanych sypkich przy pomocy wibracji».
10. J. HAMAN, A. ZDANOWICZ, «Drgania narzędzia w procesie skrawania gruntu».
11. J. HAMAN, J. GROCHOWICZ, «Wpływ sprężystości cząstek na ruch materiału ziarnistego w warunkach płaszczyzny drgającej».

12. J. G. PANOWKO, «Wpływ okresowych uderzeń na układy liniowe i nieliniowe».
15. B. KOWALCZYK, «Analiza układu wibruderzeniowego z tarciami wiskotycznym».
16. B. KOWALCZYK, «Analiza układu wibruderzeniowego z tarciami suchym».
16. Z. WIŚNIEWSKI, «Badania wstępne układu wibruderzeniowego z nieliniową charakterystyką sprężystą».
16. B. KOSSOWSKI, «Impulsowe zagęszczanie betonu».
17. Z. TRZECIAK, «Wibracyjne zagęszczarki kroczące».
18. J. RANISZEWSKI, «Stateczność pracy wibromłota o jednym stopniu swobody».
19. Z. GŁĄŻEWSKI, «Urządzenie wibracyjne do wyładunku materiałów sypkich z krytych wagonów kolejowych».
20. W. ROKSELA, «Asortyment urządzeń wibracyjnych produkowanych w Łódzkich Zakładach Budowy Maszyn».
21. A. OSTROWSKI, «Perspektywy zastosowania wibrotechniki w obróbce skał twardych».

W referatach ogólnych omówione zostały zagadnienia stosowania drgań do realizacji różnych procesów technologicznych. Przedstawiały one w pewnym stopniu dotychczasowy stan wiedzy w dziedzinie wibrotechniki. W referatach tych poruszono potrzebę teoretycznych badań drgań układów: 1) o większej liczbie stopni swobody, 2) o zmiennej masie, 3) o charakterystykach nieciągłych bądź niejednoznacznych, 4) o więzach anholonomicznych, 5) z uwzględnieniem możliwie pełnych charakterystyk reologicznych elementów sprężynujących i tłumiących, 6) z uwzględnieniem roli procesów udarowych, 7) z uwzględnieniem roli tarcia wewnętrznego i zewnętrznego, 8) z uwzględnieniem losowego charakteru parametrów układu, warunków początkowych, wymuszeń, oporów, zakłóceń, 9) o kilku wibratorach, ze szczególnym uwzględnieniem synchronizacji i samosynchronizacji.

Oprócz referatów ogólnych wygłoszone zostały referaty omawiające szczegółowe badania w dziedzinie wibrotechniki oraz podane zostały komunikaty, w których przedstawiono urządzenia wibracyjne produkowane w naszym kraju. Referaty te oraz dyskusja wykazały, że w dziedzinach transportu wibracyjnego zarówno pionowego jak i poziomego daje się zauważyć stopniowy rozwój prac naukowo-badawczych oraz techniczno-konstrukcyjnych. W dziedzinie wibracyjnych i wibrudarowych urządzeń do pogrążania i wyciągania stwierdza się wyraźny rozwój prac naukowo-badawczych teoretycznych i konstrukcyjnych, natomiast zbyt powolny jest rozwój badań doświadczalnych i niewystarczający rozwój metod badań prototypów. W pozostałych dziedzinach, jak zagęszczanie wibracyjne materiałów, wibracyjna obróbka, zastosowanie techniki wibracyjnej w przeróbce plastycznej metali, w odlewnictwie itp. dotychczasowy rozwój prac naukowo-badawczych i konstrukcyjnych oraz zastosowań jest skromny.

Dyskusja wykazała, że niedostatecznie zostały potraktowane takie problemy jak 1) wibrodynamika ciał sypkich, 2) wpływ drgań na procesy tarcia spoczynkowego, ślizgowego, tocznego, 3) regulacja automatyczna urządzeń wibracyjnych, 4) szersze uwzględnienie i celowe wprowadzenie nieliniowości w powiązaniu z postulatami optymalizacji, 5) wyznaczanie dynamicznych charakterystyk urządzeń. Problemami tymi powinny zająć się placówki naukowo-badawcze.

Do podstawowych problemów, którymi należy się również zająć, zaliczyć należy: opracowanie skutecznych metod badania niezawodności urządzeń wibracyjnych, opracowanie adekwatnych metod badania procesów dynamicznych w urządzeniach wibracyjnych ze szczególnym uwzględnieniem diagnostyki drganiowej, opracowanie nowych, lżejszych bardziej skutecznych wibratorów jako źródeł drgań.

Zebrani wyrazili opinię, że celowe będzie organizowanie okresowych zebrań Zespołu Techniki Wibracyjnej w różnych ośrodkach krajowych (np. Kraków, Gdańsk, Poznań, Warszawa).

Bohdan Kowalczyk, Zbigniew Engel

KONFERENCJA SZKOLENIOWA NA TEMAT «METODY TEORII POTENCJAŁU W TEORII SPRĘŻYSTOŚCI» — JABŁONNA 1966

Staraniem Biura Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych PAN odbyła się w Jabłonie w dniach 3.X–10.X.1966 r. konferencja szkoleniowa poświęcona metodom teorii potencjału i jej zastosowań w teorii sprężystości. Problematyka wykładów dotyczyła nowych rezultatów teorii potencjału, rozwiniętej przez prof. W. D. KUPRADZE z Gruzińskiej A.N. i jego uczniów. Zakres przedstawionej teorii obejmował trzy

zasadnicze kwestie: istnienie, jednoznaczność i konstrukcję rozwiązania problemów brzegowych teorii sprężystości. Omówione zostały podstawowe zagadnienia brzegowe dla obszarów ograniczonych (skończonych i nieskończonych), ciał jednorodnych i obszarami niejednorodnych. Rozważono zarówno zagadnienia dynamiczne (dla drgań ustalonych), jak i statyczne. Przedstawiono własności potencjałów sprężystych oraz ich znaczenie dla dowodów istnienia, jednoznaczności i konstrukcji rozwiązania zadań klasycznej teorii sprężystości. Zwrócono uwagę na znaczenie teorii równań całkowych z jądrem silnie osłabliwym dla podstawowych zagadnień teorii sprężystości. Niezależnie od aspektu czysto teoretycznego zwrócono również uwagę na możliwości tej teorii w zakresie praktycznego, efektywnego wyznaczania rozwiązań problemów brzegowych teorii sprężystości. Przedstawione rezultaty nabierają znaczenia zwłaszcza wobec wzrastających możliwości zastosowania maszyn automatycznego przetwarzania informacji (popularnie zwanych maszynami cyfrowymi). Poziom wykładów prof. KUPRADZE ocenić należy bardzo wysoko. Konferencja zgromadziła 23 uczestników z całej Polski, dla których zetknięcie z nowymi wynikami teorii stworzyć może nowe możliwości badań naukowych w fizyce, matematyce i naukach technicznych.

Gwidon Szefer

SPIS TREŚCI

TOM I. ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastoptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o fałdowanej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

TOM II. ZESZYT 1/1964

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczenie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LIĘWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastoptycznych materiałów używanych w elastoptyce
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIĘTZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIĘCHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYNIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
Biuletyn Informacyjny PTMTS:
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem
Sympozja naukowe IUTAM

SPIS TREŚCI

[c.d.]

TOM III. ZESZYT 1/1965

- S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego
Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczenia nieliniowych zagadnień przewodnictwa ciepłego
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 2/1965

- WITOLD WIERZBICKI — Wspomnienie pośmiertne
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczeniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń
Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, Pomiar sześciu składowych odkształcenia w ściskany walcu betonowym
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego
Z. WASZCZYŹYŃ, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwanych podporach
J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu
T. AGOPŚOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających
J. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 3/1965

- W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości
W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem
W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe
P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się sztywną kulą
S. PYTKO, O możliwościach wykorzystania metody elastooptycznej dla badań wyężenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

TOM IV. ZESZYT 1/1966

- S. OCHĘDUSZKO, Zmiany spowodowane w mechanice przez międzynarodowy układ jednostek miar
W. GOGÓŁ, Teoria stanu uporządkowanego i możliwości jej zastosowania
J. RYCHLEWSKI, Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności
K. WILMAŃSKI, Cz. Woźniak, Układy współrzędnych prostokreślnych w geometrii powierzchni środkowej cienkich powłok

Biuletyn Informacyjny

SPIS TREŚCI

[c.d.]

ZESZYT 2/1966

- KONSTANTY LISOWSKI — Wspomnienie pośmiertne
J. MIASTKOWSKI, Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności
J. SOBIESZCZAŃSKI, Doświadczalne badania stateczności płyt trójkątnych
J. KLEPACZKO, Wpływ dynamicznego odkształcenia trwałego na twardość miękkiej stali i aluminium
A. WILCZYŃSKI, Doświadczalne badania własności mechanicznych polichloru winylu
J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYŻYŃ, Analiza zjawiska przeskoku w zakresie sprężysto-plastycznym na modelu układu kratowego Misesa
B. STACHOWICZ, G. SZEFER, O pewnym zagadnieniu kontaktowym niejednorodnej półpłaszczyzny sprężystej
B. KOWALCZYK, Stabilność układu wibro-uderzeniowego o wymuszeniu kinematycznym

Biuletyn Informacyjny

ZESZYT 3/1966

- W. A. GROBOW, Drgania układów quasi-liniowych z członami giroskopowymi z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego
Z. MARCINIĄK, Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych
T. WARTANOWICZ, Generatory termoelektryczne
L. DIETRICH, Teoretyczna i doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganego pręta z wycięciami o niesymetrycznie nachylonych krawędziach
R. GANOWICZ, Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

TOM V. ZESZYT 1/1967

- I. I. BLECHMAN, Zagadnienie dynamiki i maszyn wibracyjnych
J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ, O oporze przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym
J. MURZEWSKI, Z. MENDERA, Korelacja cech wytrzymałościowych i wyężenie materiału
J. JASIEWICZ, Wymiana masy z powierzchni kul i kropel
J. MARYŃIAK, Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym
E. DRESCHEROWA, Wpływ wstępnego odkształcenia plastycznego na energię udarowego zrywania
A. GAJEWSKI, Zastosowanie rachunku zaburzeń w problemach stateczności płyt prostokątnych

Biuletyn Informacyjny

TOM V. ZESZYT 2/1967

- J. KESTIN, O zastosowaniu zasad termodynamiki do opisu materiałów odkształconych
Z. OLESIAK, O pewnych własnościach naprężeń cieplnych
Cz. WOŹNIAK, S. ZIELIŃSKI, O wyboczeniu biegunowych siatek prętowych
Z. KAZIMIERSKI, Metoda charakterystyk dla dwuwymiarowych nieustalonych przepływów gazu
W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosseratów

Biuletyn Informacyjny

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA — 1/1967
ERRATA⁽¹⁾

Redakcja prosi o wycięcie tej kartki i dołączenie jej do zeszytu 1/1967

Strona wzór	Jest	Powinno być
3 ²	Agranowski	Agranowska
5 wzór (2.1)	$\sqrt{\left(\frac{a^2 \xi}{d\tau^2}\right)}$	$\sqrt{\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2}\right)^2}$
8 wzór (3.1)	$= \zeta$	$= 3$
12 ²¹	η	n
12 ₁₅	ruchowi obrotowemu	ruchu obrotowego
13 wzór (3.4)	α W	α_k W_s
13 ₉	$= \alpha_1$	$= \alpha_1^*$
14 wzór (3.8)	$= A$	$= A_0$
22 ¹³	$= (x_0/Z_0)$	$= (x_0/2y)$
36 wzór (2.1)	$-2r_{Qr} \frac{\bar{Q}-Q}{\mu_Q}$	$-2r_{Qr} \frac{Q-\bar{Q}}{\mu_Q}$
42 Tabl. 2, poz. 8	$\frac{6}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{4} \sigma$
48 ₄	$3''/8 - 3''/4$	$3/8'' - 3/4''$
68 wzór (5.8) wzór (5.9)	$= l_1 \cos \varphi_1 \lambda dT_1 + dx_1$ $= l_1 \sin \varphi_1 \lambda dT_1 + dz_1$	$+ l_1 \cos \varphi_1 \lambda dT_1 = dx_1$ $+ l_1 \sin \varphi_1 \lambda dT_1 = dz_1$
68 wzór (5.13)	$X_{z_1}^I = A_1 X_{z_1}' - A_2 X_{x_1}''$ $Z_{z_1}^I = A_1 Z_{z_1}' + A_2 Z_{z_1}''$	$X_{z_1}^I = A_1 X_{z_1}' + A_2 X_{x_1}''$ $Z_{z_1}^I = A_1 Z_{z_1}' - A_2 Z_{z_1}''$
117 ⁹	$\lambda = -N_0 D_0$	$\lambda = -N_0/D_0$
118 wzór (4.15)	$\lambda_n^{(1)} = N_{nn}^{(1)}$	$\lambda_n^{(1)} = N_{nn}^{(2)}$
119 ¹	$= N_{nn}^{(1)} \sum_{m=0}^{\infty}$	$-N_{nn}^{(1)} \sum_{m=0}^{\infty}$
124	Z. Kączkowski	Z. Kączkowski

(¹) Redakcja bardzo przeprasza za błędy, które wkradły się do wydrukowanych prac wskutek niemożliwości wykorzystania drugiej korekty autorskiej

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
