

411720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 5 • ZESZYT 1



Pw

WARSZAWA 1967
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

<p>I. I. BLECHMAN, Zagadnienie dynamiki maszyn wibracyjnych Вопрос динамики вибрационных машин The problems of vibration machines dynamics</p>	<p>3</p>
<p>J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ, O oporze przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym О сопротивлении при качении жесткого шара по вязко-упругому основанию On the rolling resistnace of a rigid ball moving on the visco-elastic base</p>	<p>19</p>
<p>J. MURZEWSKI, Z. MENDERA, Korelacja cech wytrzymałościowych i wyćężenie materiału Корреляция прочностных свойств и напряженность материала The correlation of strength characters and material yield conditions</p>	<p>35</p>
<p>J. JASIEWICZ, Wymiana masy z powierzchni kul i kropeł Массообмен с поверхности шаров и капель The mass transfer from spheres and drops surfaces</p>	<p>45</p>
<p>J. MARYNIAK, Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym Упрощенный анализ продольной устойчивости планера во время полета Simplified longitudinal stability of a towed saiplane</p>	<p>57</p>
<p>E. DRESCHEROWA, Wpływ wstępного odkształcenia plastycznego na energię udarowego zrywania Влияние предварительных пластических деформаций на энергию разрушения при ударе разрыве The influence of the initial plastic deformation on the fracture energy in tension impact test</p>	<p>103</p>
<p>A. GAJEWSKI, Zastosowanie rachunku zaburzeń w problemach stateczności płyt prostokątnych o zmiennej grubości Применение метода возмущений в задачах устойчивости прямоугольных пластинок толщины The application of the perturbation method in stability problems of rectangular plates with variable thickness</p>	<p>113</p>
<p>Biuletyn Informacyjny</p>	<p>125</p>

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 5 • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 6 7

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZĄCY
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM
MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH
(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)
STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW
OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN PIATEK
(GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OLESIK — R E D A K T O R
JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI
W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

R E D A K C J A

W a r s z a w a, Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 11,5 Arkuszy drukarskich 9,0. Papier druk. sat. III kl., 80 g.
Oddano do składania 31.X. 1966 r., druk ukończono w styczniu 1967 r. Cena zł 30.—

Zam. 1243/66 M-80 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ZAGADNIENIE DYNAMIKI MASZYN WIBRACYJNYCH

I. I. BLECHMAN (LENINGRAD)

1. Wstęp

W ostatnich latach maszyny i urządzenia wibracyjne znalazły powszechne zastosowanie w najróżniejszych gałęziach przemysłu.

W obecnej chwili nie ma ogólnie przyjętego określenia maszyny wibracyjnej (tak samo jak nie ma ogólnego określenia procesu wibracyjnego). Nie siląc się na podanie takiego określenia zaznaczmy, że przez nazwę «maszyny wibracyjnej» będziemy tutaj rozumieli takie maszyny, których oddziaływanie na ośrodek poddawany obróbce albo napęd oparty jest w istotny sposób na wykorzystaniu zjawisk związanych z drganiami mechanicznymi. Do takich zjawisk należą w szczególności:

1. Transport rozdrobnionych lub sypkich materiałów na powierzchniach drgających, stosowany szeroko w wibracyjnych urządzeniach przenośnikowych oraz w maszynach i urządzeniach transportowo-technologicznych.

2. Obniżenie efektywnych (pozornych), a czasami również rzeczywistych współczynników tarcia suchego między ciałami pod działaniem wibracji, w wyniku czego bardzo znacznie zmniejsza się opór ciał na przesunięcie pod działaniem sił stałych, na przykład siły ciężkości. Cząstki ośrodka sypkiego poddanego wibracji nabywają pewnej ruchliwości, tak że ośrodek staje się pod wieloma względami podobny do cieczy lepkiej.

Zjawiska te wykorzystane są między innymi w wibracyjnych kafarach do zabijania pali i ścianek szczelnych oraz w wibracyjnych urządzeniach do usuwania nawisów materiałów sypkich w bunkrach i w innych maszynach.

3. Rozwarstwienie za pomocą wibracji cząstek materiałów sypkich ze względu na ciężar właściwy i wielkość cząstek (segregacja). Zjawisko to, pojawiające się w wyniku działania siły ciężkości w warunkach pseudorozrzedzenia i obniżenia efektywnych współczynników tarcia podczas wibracji, jest powszechnie uwzględniane w sitach wibracyjnych, w urządzeniach osadowych oraz w innych maszynach służących do klasyfikacji.

4. Zjawisko spulchnienia albo, odwrotnie, zagęszczenia materiałów pod wpływem wibracji. Zjawiska te są uwzględnione w wibracyjnych urządzeniach do zagęszczania i spulchniania, w wibracyjnych suszarkach i urządzeniach do ochładzania.

5. Periodyczne podrzucanie ciał na drgających płaszczyznach albo w drgających naczyniach wykorzystane na przykład w wibracyjnych urządzeniach do rozdrabniania (młynach) oraz w suszarkach wibracyjnych.

6. Obniżenie wytrzymałości materiałów na zniszczenie pod działaniem okresowo zmiennych obciążeń.

7. Zjawisko rozdzielania cząstek materiału sypkiego na drgających powierzchniach ze względu na współczynniki tarcia, postać oraz niektóre inne wielkości charakterystyczne. Zjawisko to, polegające na różnicy szybkości przesuwania się po drgających powierzchniach cząstek różniących się co do kształtu i mikrowłasności powierzchni, jest uwzględnione w separatorach wibracyjnych.

8. Wiele zjawisk rezonansu i drgań własnych, zjawisko samosynchronizacji i samofazowania wibratorów, zjawisko wibracyjnego utrzymywania ruchu wirnika. Zjawiska te uwzględniane są powszechnie w napędach maszyn wibracyjnych.

Podany wykaz nie wyczerpuje wszystkich zjawisk typowo wibracyjnych. Należy także wziąć pod uwagę, że wykaz ten jest ciągle uzupełniany w miarę badania zagadnień dotyczących drgań i możliwości ich technicznego zastosowania.

Wydaje się, że zaleta podanego określenia pojęcia maszyny wibracyjnej polega na klasyfikacji maszyn w zależności od występujących zjawisk fizycznych, a to, z kolei, określa ogólność stosowanych metod badawczych.

Zagadnienia dynamiki, które pojawiają się w procesie konstruowania maszyny wibracyjnej, można podzielić na dwie duże grupy.

Do pierwszej grupy należą zagadnienia teorii procesów roboczych, zachodzących w maszynach wibracyjnych. Tutaj zasadniczy problem polega na znalezieniu takich parametrów trajektorii i częstości drgań elementu roboczego, które okażą się optymalne lub przynajmniej nadają się do przyjęcia ze względów technologicznych.

Druga grupa zagadnień związana jest z koniecznością pewnego zabezpieczenia wymaganych drgań elementu roboczego w okresie eksploatacji maszyny. Zagadnienia te można zaliczyć do problemów dynamiki napędu maszyn wibracyjnych.

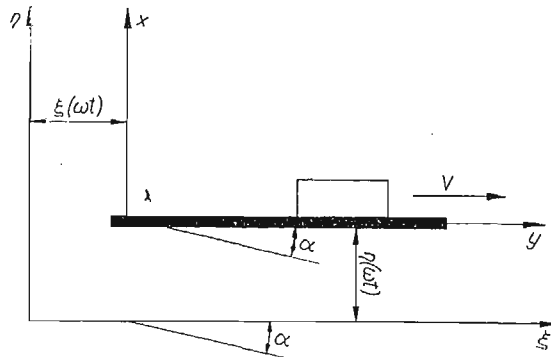
W krótkim artykule nie można oczywiście zajmować się wszystkimi wymienionymi zagadnieniami i rozpatrywać wszystkich kierunków rozwojowych. Zajmiemy się tutaj głównie badaniami związanymi bezpośrednio z zainteresowaniami autora i jego współpracowników, specjalistów w dziedzinie maszyn wibracyjnych, stosowanych do wzbogacenia użytecznych kopalin oraz ich kawałkowania (zbylania).

2. Prace z zakresu teorii procesów wibracyjnych

Znaczna część procesów roboczych realizowanych w maszynach wibracyjnych (między innymi transport, oddzielanie i przesiewanie, wbijanie pali, ładowanie sypkich materiałów) jest szczególnym przypadkiem tak zwanego procesu przemieszczania wibracyjnego. W procesie tym kierunek «średni» zmiany przemieszczenia otrzymuje się w wyniku (okresowych) oddziaływań średnio nieskierowanych. Jednym z prostszych przykładów jest transport wibracyjny, to znaczy przemieszczanie cząstek materiału sypkiego po drgającej chropowatej powierzchni (rys. 1). Jedno z głównych zagadnień polega tutaj na obliczeniu szybkości przemieszczenia wibracyjnego, a także na właściwym wyborze parametrów drgań elementu drgającego w zależności od przeznaczenia maszyny i właściwości materiału przenoszonego. Prace na temat teoretycznych studiów przemieszczenia wibracyjnego omówione zostały w opublikowanej niedawno książce G. J. DZANELIDZE i autora artykułu [1].

Spośród nowych szybko rozwijających się kierunków wspomniemy prace dotyczące optymalizacji procesu przemieszczenia wibracyjnego. E.A. AGRANOWSKI wraz z autorem artykułu opublikowali w 1961 r. pracę [2], poświęconą przypadkowi szczególnemu drgań biharmonicznych. Zagadnienie optymalizacji było następnie przedmiotem interesujących badań W. A. TROICKIEGO, E. E. LAWENDELA, I. J. LIEPINSZA i innych autorów [3-6].

W jednym z praktycznie ważnych przypadków zagadnienie wyboru optymalnego prawa drgań elementu roboczego wibracyjnej maszyny transportującej można ująć w sposób następujący. Niech element roboczy wykonuje okresowo drgania postępowe w kierunku



Rys. 1

podłużnym według prawa $\xi = \xi(\omega t)$ i w kierunku poprzecznym według prawa $\eta = \eta(\omega t)$, gdzie $\omega = 2\pi/T$. Tutaj T jest najmniejszym ogólnym okresem funkcji ξ i η , a ω oznacza odpowiednią częstość.

Oznaczmy przez

$$(2.1) \quad W_{\max} = \omega^2 \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha^2 \xi}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} \right)^2} \right]_{\max} = \omega^2 \left[\sqrt{(\xi'')^2 + (\eta'')^2} \right]_{\max}, \quad \tau = \omega t$$

największą co do bezwzględnej wartości wartość przyspieszenia drgań płaszczyzny. Będziemy wtedy nazywali optymalnym takie prawo ruchu $\xi = \xi(\omega t)$, $\eta = \eta(\omega t)$, któremu przy danych: częstości drgań ω , największym przyspieszeniu W_{\max} , kącie nachylenia płaszczyzny do poziomu α i danych własnościach przemieszczanego materiału odpowiada największa szybkość transportu V , to znaczy średnia szybkość ruchu wzdłuż płaszczyzny.

Podstawą do sformułowania opisanego wyżej zagadnienia jest ta okoliczność, że przy danym poziomie największego przyspieszenia i postaci drgań elementu roboczego podana średnia szybkość jest odwrotnie proporcjonalna do częstości drgań. Oprócz tego, przy niezmiennych pozostałych warunkach największa osiągalna średnia prędkość z reguły jest tym większa, im wyższa jest największa wartość przyspieszenia drgań W_{\max} . W związku z tym przy projektowaniu wibracyjnych maszyn transportujących należy przyjąć jak najniższą częstość drgań ω , tak jak to jest tylko możliwe ze względów konstrukcyjnych i innych. W podobny sposób największe przyspieszenie W_{\max} drgań należy wybrać na tyle duże, na ile jest to celowe ze względów konstrukcyjnych i techniczno-ekonomicznych. Wybór częstości ω i największego przyspieszenia W_{\max} jest więc w zasadzie zagadnieniem

konstrukcyjnym lub techniczno-ekonomicznym. Natomiast wybór optymalnego prawa drgań doprowadza do sformułowanego poprzednio zagadnienia matematycznego. Ponieważ średnia prędkość V jest funkcjonalem wielkości $\xi(\omega t)$ i $\eta(\omega t)$, łatwo dojść do wniosku, że ostatnie zagadnienie jest zagadnieniem wariacyjnym dotyczącym warunkowego ekstremum funkcjonału V przy dodatkowym ograniczeniu

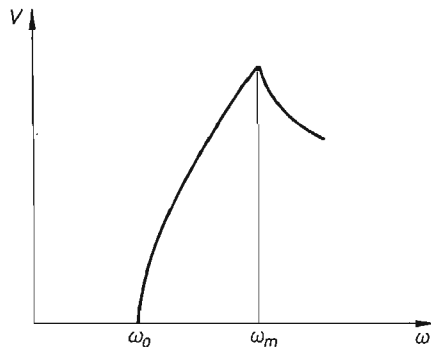
$$\omega^2 \sqrt{(\xi'')^2 + (\eta'')^2} \leq W_{\max}.$$

Tego rodzaju zagadnienia przyciągające w ostatnich latach uwagę matematyków i inżynierów otrzymały nazwę zagadnień optymalnego sterowania; do ich rozwiązywania obok znanych metod klasycznych rozwinięto szereg metod specjalnych [7].

Pewne wyniki zostały osiągnięte ostatnio w zakresie badania procesu wibracyjnego rozdzielania mieszanin sypkich. Opiszemy tu jedną z podstawowych części tego zagadnienia.

Załóżmy, że mamy naczynie zawierające mieszaninę twardych cząstek różniących się co do kształtu, wielkości i ciężaru właściwego. Niech naczynie będzie wprawiane w pewnego rodzaju ruch drgający. Znając początkowy rozkład cząstek w naczyniu należy określić rozkład cząstek po upływie dostatecznie długiego czasu trwania ruchu drgającego. Należy również zbadać kinetykę procesu, to znaczy prędkość przybliżenia do tego stanu granicznego. Jest to ważne zagadnienie dla wielu maszyn wibracyjnych, między innymi dla osadzarek, sit, stołów koncentracyjnych oraz maszyn do przerabiania produktów przemiału zboża.

W pracy [8] na podstawie hipotezy, że siła oporu w stosunku do względnego przemieszczenia poszczególnej cząstki w otaczającym ośrodku sypkim jest podobna do siły tarcia



Rys. 2

suchego, udało się wyjaśnić zjawisko pozornego rozrzedzenia ośrodka sypkiego pod wpływem drgań, obliczyć efektywny współczynnik lepkości oraz określić warunki, w których zachodzi takie «rozrzedzenie». Wyjaśniono «paradoksalną» sytuację, gdy proces rozwarstwienia następuje w kierunku odpowiadającym wzrastającej energii potencjalnej układu.

Zauważono ciekawe zjawisko, że w pewnych przypadkach zależność prędkości wpływania lub zanurzania cząstki w ośrodku sypkim od częstości drgań ma bardzo wyraźnie zaznaczone maksimum (rys. 2) podobne do maksimum rezonansowego. Należy jednak

zauważyć, że w rzeczywistości nie występuje tutaj rezonans (wbrew temu co czasami się na ten temat pisze), gdyż maksimum to jest spowodowane zupełnie innymi przyczynami.

Obok wyłącznie deterministycznego podejścia w ostatnich czasach wykonano badania, w których zagadnienie rozdzielania synekij mieszanej rozpatruje się statystycznie [9, 10].

3. Prace z zakresu dynamiki napędu maszyn wibracyjnych

Napęd maszyny wibracyjnej i jej element roboczy współdziałający bezpośrednio z ośrodkiem poddawany obróbce stanowią jeden układ dynamiczny. Niemniej jednak można wydzielić pewne zagadnienia teoretyczne, które można zaliczyć do zagadnień dynamiki napędu maszyn wibracyjnych.

Jednym z takich zagadnień jest zagadnienie dotyczące wzajemnego oddziaływania układu drgającego ze źródłem zaburzenia o mocy ograniczonej. Sprawa polega na tym, że wielu ważnych własności maszyn wibracyjnych nie można wykryć, jeśli się założy, że siła wymuszająca drgania jest dana i nie zależy od ruchu układu. Taka idealizacja byłaby słuszna tylko w przypadku źródła zaburzeń o nieograniczonej mocy, kiedy drgania układu nie wpływają wcale na charakter zaburzeń. W rzeczywistości warunki takie występują bardzo rzadko i wobec tego obserwuje się wiele zjawisk oryginalnych.

Uwzględnienie wzajemnego oddziaływania silnika z układem drgającym powoduje znaczne skomplikowanie zagadnienia; należy wtedy rozpatrywać układ z większą liczbą stopni swobody, z reguły nieliniowy.

Do niedawna w dostatecznie ścisłym sformułowaniu uwzględniano wzajemne oddziaływanie z układem drgającym tylko nierównoważonych wibratorów mechanicznych, napędzanych przez silniki dowolnego typu.

W wielu pracach, w szczególności w artykułach A. SOMMERFELDA [11], B. C. MARTYSZKINA [12], G. J. DZANELIDZE i autora niniejszej pracy [13, 14] oraz szczególnie obszernie w pracach W. O. KONONIENKI i jego kontynuatorów [15] pokazano wiele interesujących prawidłowości zachowania się takich układów: niestateczność warunków pracy, odpowiadających poszczególnym częściom klasycznej krzywej rezonansowej, skokowe przejście od jednych warunków pracy do drugich, zależność charakteru ruchu ustalonego układu od kierunków zmiany parametrów.

Wydaje się rzeczą dziwną, że podobne własności przez długi czas pozostawały niezauważone i nieobjaśnione w przypadku układów z elektromagnetycznymi synchronicznymi elementami do wzbudzania drgań.

Odpowiednie badania przeprowadził niedawno K. S. HODŻAJEW (Instytut Obróbki Mechanicznej), który studiował współdziałanie elektromagnetycznego układu wzbudzającego z dowolnym układem drgającym. Oprócz poprawek ilościowych badania K.S. Hodżajewa doprowadziły do zaobserwowania zjawisk bardzo podobnych do zjawisk zachodzących w układach z mechanicznym wzbudaniem drgań, jak również wielu nowych zjawisk. Mówiąc ogólnie, wyniki K.S. Hodżajewa sprowadzają się do tego, że zamiast zwykłej charakterystyki amplitudowo-częstościowej (krzywej rezonansowej, odpowiadającej układowi liniowemu) dla układu z przyłączonym wibratorem elektromagnetycznym (czyli dla nieliniowego układu połączonego) otrzymuje się charakterystykę ze stromą krzywą rezonansową, której określone odcinki odpowiadają niestatecznym warunkom pracy, to znaczy nie mogą być realizowane w rzeczywistości.

Uwagę wielu inżynierów i badaczy zajmują badania dynamiki wielonapędowych elektrycznych maszyn wibracyjnych. Wiadomo na przykład, że jeśli połączyć w jedną całość kilka dobrze pracujących oddzielnych części przenośnika rurowego z elektromagnetycznymi elementami wzbudzającymi (rys. 3a), to układ połączony bardzo rzadko pracuje zadowolająco. W wyniku połączenia poszczególnych części równomierność drgań elementu roboczego wzdłuż długości zostaje zwykle naruszona, wobec czego następuje utrata normalnego toku przenoszenia materiału wzdłuż rury.

W pracy G. J. DŻANELIDZE i autora artykułu [16] udowodniono, że jeśli odstęp między wibratorami l (skok wibratorów) nie jest większy niż

$$(3.1) \quad l_{\max} = \zeta \sqrt[4]{EJ/\rho\omega^2}$$

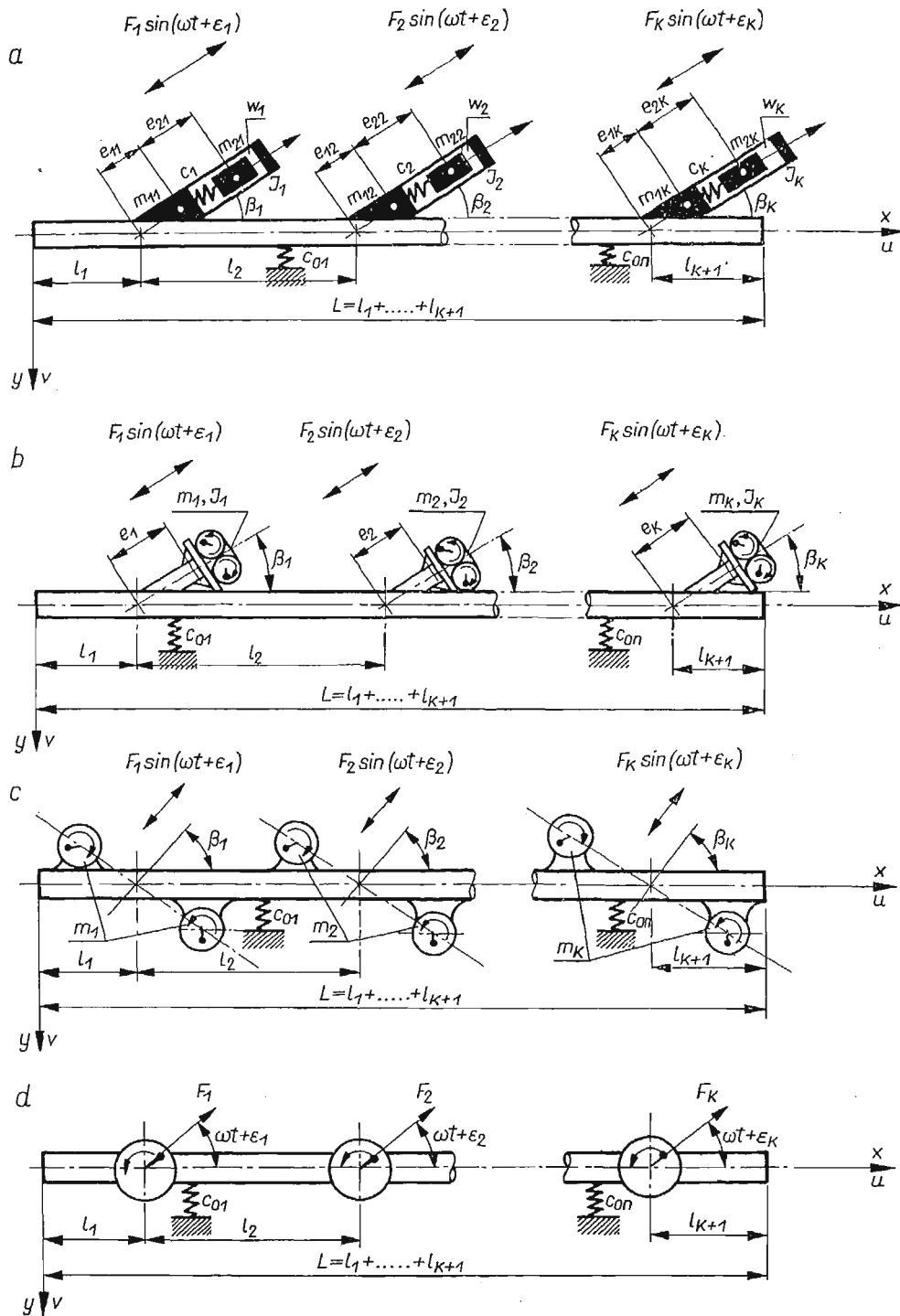
i wszystkie wibratory są dokładnie jednakowe, to maszyna składająca się z nieskończenie wielkiej liczby kolejno połączonych części pracuje zadowolająco; jej roboczy element realizuje drgania bliskie drganiom postępowym, charakterystycznym dla każdego z oddzielnych segmentów.

Wynika stąd, że przyczyny zaburzenia drgań elementu roboczego mogą leżeć albo w tym, że poszczególne części nie są jednakowe, albo w ograniczonych rozmiarach maszyn (efekt brzegowy). Dlatego jednym z głównych problemów badań było wyjaśnienie, która z podanych przyczyn jest najistotniejsza i jakie środki mogą być zastosowane w celu osłabienia działania nieodpowiednio przyjętych czynników.

Trudność rozwiązania tego zagadnienia jest z jednej strony uwarunkowana tym, że maszyna wielonapędowa opisana jest dość złożonym układem równań różniczkowych cząstkowych i w różniczkach zupełnych, którego analityczne rozwiązanie nie może być sprowadzone do prostej postaci. Z drugiej strony, bezpośrednie doświadczenia na rzeczywistych maszynach są dość skomplikowane i trudne, w wyniku czego badania większej liczby wariantów, konieczne dla otrzymania ogólnych zależności, wymagałyby wyjątkowo dużego nakładu czasu.

W związku z tym podczas wykonywania pracy zdecydowano zastosować szybkie maszyny liczące. Za pomocą maszyny BESM-2 rozpatrzono kilka tysięcy wariantów wielonapędowych elektrowibracyjnych przenośników rurowych, a następnie dla sprawdzenia poprawności rozwiązania teoretycznego przeprowadzono względnie niewielką serię doświadczeń na obiekcie w normalnych warunkach eksploatacyjnych.

Po opracowaniu wyników obliczeń i doświadczeń okazało się, że w przypadku, gdy skok wibratorów był mniejszy od wielkości krytycznej, określonej wzorem (3.1), wyłączną rzeczywistą przyczyną nierówności drgań elementu drgającego jest rozrzut parametrów poszczególnych części, w szczególności rozrzut sztywności układów sprężystych wibratorów. Zostało również ustalone, że zniekształcenie trajektorii drgań polega praktycznie na zmianie kątów pochylenia trajektorii prostoliniowych punktów elementu roboczego względem jego osi; amplitudy drgań przy zwykle występujących odchyleniach parametrów pozostają niemal niezmiennie wzdłuż elementu roboczego; istotna eliptyczność trajektorii także nie występuje. Zauważono przy tym, że zmiana jednoimiennych parametrów wszystkich wibratorów o taką samą wielkość nie doprowadza do zmiany kątów pochylenia trajektorii drgań punktów, może tylko spowodować zmianę średniej amplitudy drgań.



Rys. 3

Ostatnia uwaga ma istotne znaczenie, gdyż wynika z niej, że zagadnienie podwyższenia niezawodności maszyn wielonapędowych można rozłożyć na dwa oddzielne zagadnienia: pierwsze zagadnienie polega na zapewnieniu równomierności rozkładu kątów nachylenia trajektorii drgań wzdłuż długości maszyny, drugie zagadnienie dotyczy podwyższenia stateczności średniej w czasie amplitudy drgań. To ostatnie zagadnienie należy rozwiązać dokładnie tak jak w przypadku dowolnej jednonapędowej maszyny.

Po stwierdzeniu, że najistotniejszy wpływ na rozkład drgań wzdłuż długości maszyny ma rozkład sztywności wibratorów, należało wyjaśnić, czy nie można by było dobrać nominalnych parametrów maszyny w taki sposób, żeby przy danych maksymalnych odchyleniach osłabić czułość maszyny na zmiany sztywności. Początkowo wydawało się, że jeśli zmieniać skok wibratorów l w granicach $0 < l < l_{\max}$, to czułość maszyny na zmianę parametrów będzie znaczna wskutek tego, że przy pewnych wartościach skoku do częstości podstawowej drgań własnych przenośnika (1) bliskiej 50 herców zbliżyć się będą częstości uboczne drgań własnego układu. Obliczenie częstości drgań własnych maszyny nie potwierdziło jednak takiej hipotezy (tak zwanej teorii skoków zakazanych [17]) (2). Okazało się, że wymienione zbliżenie częstości możliwe jest tylko w tym przypadku, gdy skok zbliża się do l_{\max} .

Wbrew oczekiwaniu okazało się także, że na drodze dobierania nominalnych wartości takich parametrów jak na przykład odchylenie od rezonansu i współczynnik tłumienia, nie można w istotny sposób obniżyć czułości maszyny na różnice występujące w parametrach poszczególnych segmentów.

Stwierdzenie, że w miarę powiększania całkowitej długości maszyny czułość nieco się zwiększa, a przy powiększeniu sztywności pręseł — obniża się, miało poważne konsekwencje. Jeżeli jednak zmniejszać skok wibratora przy takiej samej całkowitej długości przenośnika, osiągając to przez zwiększenie liczby wibratorów, to nie otrzymuje się praktycznie odczuwalnej korzyści w zakresie stateczności.

W trakcie prowadzenia opisanych prac autorzy (I. I. BLECHMAN, W. I. POLIAKOW, K. S. HODZAJEW) stwierdzili, że tym samym zagadnieniem zajmują się badacze z Instytutu Konstrukcji Lekkich i Ekonomicznego Wykorzystania Materiałów Budowlanych (Magdeburg NRD) pod kierownictwem inż. W. LANGERA [18]. Wydaje się, że zgodne wysiłki tych zespołów doprowadzą do szybkiego rozwiązania wymienionych zagadnień interesujących z punktu widzenia teoretycznego i aktualnych ze względu na możliwości ich zastosowania.

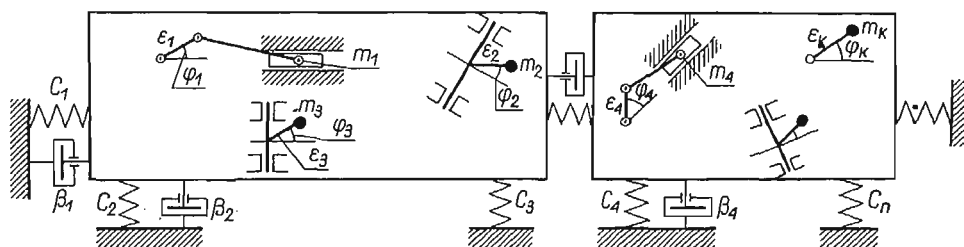
Na zakończenie zatrzymamy się na serii badań poświęconych zagadnieniu synchronizacji wibratorów mechanicznych, których podstawowym elementem jest albo ciało wykonujące ruch zwrotno-posuwisty, albo niewyważony wirnik. Należą one do najbardziej rozpowszechnionych urządzeń napędowych maszyn wibracyjnych.

(1) To znaczy do częstości określonej przez sztywność sprężystego układu wibratorów.

(2) Należy zauważyć, że w przypadku bezwładnościowych maszyn wielonapędowych (rys. 3b i 3c), w których częstość podstawowa nie występuje, teoria skoków zakazanych została potwierdzona zarówno na drodze doświadczalnej jak i teoretycznej. Sprawa polega na tym, że dla takich maszyn przy zmianie skoku w granicach $0 < l < l_{\max}$ może nastąpić równość częstości siły wymuszającej i częstości drgań własnych układu.

W wielu typach maszyn wibracyjnych przyjmuje się nie jeden, lecz kilka wibratorów zainstalowanych na jednej podstawie (elemente drgającym) albo na dwóch lub większej liczbie podstaw połączonych (rys. 4). W pewnych przypadkach przyjęcie kilku wibratorów o względnie niewielkiej mocy zamiast jednego o większej mocy jest uzasadnione koniecznością rozłożenia siły wymuszającej na elemencie drgającym o dużych rozmiarach (rys. 3). Na tej drodze, przy zachowaniu określonych warunków, o których częściowo była już mowa, udaje się zapewnić drgania elementu roboczego maszyny wibracyjnej, różniące się mało od drgań tego elementu jako ciała idealnie sztywnego, chociaż częstość siły wymuszającej przewyższa rząd częstości i sprężystych drgań własnych elementu roboczego.

W wielu przypadkach korzysta się z kilku wibratorów zamiast z jednego w celu zmniejszenia obciążenia na łożyska wibratorów, rozkładając obciążenie na większą liczbę łożysk. Przyjęcie dwóch wibratorów (albo dowolnej liczby parzystej) obracających się z jednakową prędkością w przeciwnych kierunkach pozwala otrzymać siłę wymuszającą o stałym



Rys. 4

kierunku. Dwa lub więcej jednakowych wibratorów ze skrzyżowanymi osiami przy określonej zgodności faz i kierunków ruchu powoduje drgania śrubowe elementu [23]. Kilka niewyważonych wibratorów obracających się z różnymi (z reguły wielokrotnymi) prędkościami kątowymi wykorzystuje się w maszynach wibracyjnych, w których element roboczy drga według złożonego prawa poliharmonicznego.

W znacznej większości maszyn i urządzeń wibracyjnych z wieloma wibratorami koniecznym warunkiem normalnej ich pracy jest synchroniczność obrotów, a czasami również istnienie określonych zależności między fazami ruchu obrotowego wirników poszczególnych wibratorów, jak na przykład współfazowość lub przeciwfazowość ruchu.

Obecnie znane są trzy zasadnicze sposoby uzgodnienia ruchu wibratorów mechanicznych.

Najprostszym i historycznie pierwszym sposobem jest wprowadzenie połączeń kinematycznych między wirnikami wibratorów. Takimi połączeniami mogą być na przykład przekładnie zębate lub łańcuchowe, wały synchronizujące itp. Kinematyczna synchronizacja ruchu ma jednak wiele istotnych wad. Przede wszystkim nie można jej zastosować w sposób właściwy w wielu praktycznie ważnych przypadkach, w szczególności jeśli odległość między wibratorami jest znaczna i dochodzi w przypadku niektórych maszyn do dziesięciu metrów. Drugą wadą jest duży hałas towarzyszący pracy przekładni zębatej lub łańcuchowej w maszynach wibracyjnych i zwiększone zużycie kół zębatych i łańcuchów.

Drugi sposób polega na zastosowaniu połączeń elektrycznych między silnikami wprowadzając w ruch wirnik, na przykład za pomocą układu wału elektrycznego.

Za pomocą trzeciego sposobu, polegającego na wykorzystaniu wewnętrznych własności samego układu drgającego, synchroniczność i wymagana zgodność faz ruchu obrotowego wirników pewnej liczby wibratorów, ustawionych na maszynie wibracyjnej i napędzanych różnymi niezależnymi od siebie silnikami (na przykład asynchronicznymi silnikami elektrycznymi albo silnikami elektrycznymi prądu stałego) osiągnięta jest automatycznie. Chodzi tu o pewne szczególne zjawisko fizyczne samosynchronizacji wibratorów, które, o ile nam wiadomo, zostało wykryte i opisane po raz pierwszy w Instytucie Obróbki Mechanicznej w 1948 r. podczas prac prowadzonych pod kierunkiem D. A. PLISSA.

Samosynchronizacja a tym bardziej wymagana ze względu na warunki pracy maszyn zgodność faz ruchu obrotowego wirników nie występuje oczywiście zawsze. Niemniej jednak, jak wykazały badania, o których będzie mowa w dalszym ciągu, istnieje dostatecznie szeroka klasa maszyn wibracyjnych, w których zjawisko samosynchronizacji może być skutecznie wykorzystane. W takich przypadkach nie ma oczywiście potrzeby uciekania się do wymuszanej synchronizacji kinematycznej lub elektrycznej oraz do wymuszanego uzgadniania fazy ruchu obrotowego wirników.

Rozpatrzmy w ogólnych zarysach sformułowanie zagadnienia dotyczącego synchronizacji wibratorów [13, 24].

W przypadku wystarczająco ogólnym maszyna wibracyjna może być przedstawiona w sposób wyidealizowany w postaci układu złożonego z pewnej liczby η ciał sztywnych (rys. 4), połączonych między sobą i z nieruchomym podłożem za pomocą pewnych więzów geometrycznych oraz elementów sprężystych i tłumiących. Położenie ciał określone jest za pomocą uogólnionych współrzędnych u_1, \dots, u_ν .

Niech na ciałach sztywnych umieszczona zostanie pewna liczba k wibratorów mechanicznych o osiach skierowanych dowolnie oraz różnych podstawowych parametrach. Położenie niezrównoważonych mas wibratorów określa się kątami obrotu $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

Przypuśćmy również, że na wały wibratorów działają pewne momenty wewnętrzne lub zewnętrzne względem rozpatrywanego układu. Takimi momentami mogą być momenty sił oporu ruchowi obrotowemu wibratorów, momenty obrotowe przekazywane od silników oraz momenty sił zależnych od elektrycznych, sprężystych lub ciernych połączeń między wirnikami wibratorów. Momenty te mogą być różne dla różnych wibratorów i mogą zależeć od kątów obrotu $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, współrzędnych u_1, \dots, u_ν oraz od ich pochodnych względem czasu a także bezpośrednio od czasu.

Podstawowym zagadnieniem dotyczącym synchronizacji wibratorów jest zbadanie warunków, przy których wały wszystkich wibratorów bez względu na możliwe różnice w parametrach wibratorów i w działających na nie siłach obracają się z jednakowymi co do modułu średnimi w czasie każdego obrotu prędkościami kątowymi $|\dot{\varphi}_s^*| = \omega$, ($s = 1, \dots, k$), a ciała wykonują przy tym drgania o okresie $T = 2\pi/\omega$.

Wyrażając to inaczej zagadnienie polega na ustaleniu warunków koniecznych i dostatecznych istnienia i stateczności ruchów synchronicznych układu, to znaczy ruchów w postaci

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varphi_s &= \sigma_s[\omega t + \alpha_s + \psi_s^*(\omega t)], & s &= 1, \dots, k, \\ u_r &= u_r(\omega t), & r &= 1, \dots, \nu, \end{aligned}$$

gdzie σ_s oznaczają liczby, z których każda może być równa $+1$ albo -1 w zależności od kierunku obrotu wirników wibratorów w rozpatrywanym ruchu; α_s są stałymi; ψ_s^* i u_r są funkcjami okresowymi czasu t o okresie $2\pi/\omega$. Stałe α_s można określić tak, żeby średnie w czasie jednego obrotu wartości funkcji ψ_s^* były równe zeru. Należy zaznaczyć, że drgania faz są zwykle małe.

W zastosowaniach interesujące jest także nieco ogólniejsze zagadnienie (można je nazwać zagadnieniem dotyczącym wielokrotnej synchronizacji), w którym chodzi o określenie warunków istnienia i stateczności ruchów postaci

$$(3.3) \quad \varphi_s = \sigma_s n_s [\omega t + \alpha_s + \psi_s^*(\omega t)], \quad s = 1, \dots, k, \\ u_r = u_r(\omega t), \quad r = 1, \dots, \nu,$$

gdzie n_s są dowolnymi liczbami naturalnymi.

W przypadku gdy układ rozpatrywany jest autonomiczny, w szczególności w zagadnieniu dotyczącym samosynchronizacji, prędkość kątowna ω nie jest wielkością daną, ale należy ją wyznaczyć w trakcie rozwiązywania zagadnienia.

Wyjaśnienie i teoretyczne zbadanie zjawiska samosynchronizacji wibratorów w prostszym przypadku, gdy element roboczy maszyny ma tylko jeden stopień swobody, znaleźć można w pracy autora [13]. Bardziej złożone zagadnienie, dotyczące samosynchronizacji wibratorów zainstalowanych na maszynie, której element drgający może wykonywać dowolny ruch płaski, to znaczy ma trzy stopnie swobody, zostało przez nas zbadane w pracach [19–21]. Teoretycznym badaniom synchronizacji elektrycznej i uzgodnienia faz ruchu wibratorów poświęcona jest praca [22].

Podstawowe wyniki teorii synchronizacji wibratorów można sformułować następująco: aby był możliwy ruch synchroniczny wszystkich wibratorów według równania (3.2), bliski równomiernemu ruchowi obrotowemu, konieczne jest istnienie rzeczywistych rozwiązań układu równań przestępnych

$$(3.4) \quad P_s(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \omega) = \frac{1}{k_s} [L_s(\alpha_s, \omega) - R_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \omega) - \\ - S_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - W(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \omega)] = 0, \quad s = 1, \dots, k$$

względem $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Znaczenie wielkości występujących w tych równaniach będzie podane dalej.

Każdemu układowi stałych rzeczywistych $\alpha_1 = \alpha_1, \dots, \alpha_k = \alpha_k^*$, spełniającemu równania (3.4), odpowiada w rzeczywistości jeden jedyny asymptotycznie stateczny ruch synchroniczny rozpatrywanego typu, jeżeli dla tego układu wszystkie pierwiastki \approx równania algebraicznego stopnia k

$$(3.5) \quad \left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \alpha \right| = 0,$$

gdzie δ_{sj} jest symbolem Kroneckera, mają ujemne części rzeczywiste. Jeśli istnieje choćby jeden pierwiastek równania (3.5) z dodatnią częścią rzeczywistą, to odpowiadający mu ruch jest niestateczny. Przypadek rozwiązań zerowych lub czysto urojonych wymaga dodatkowego badania.

Sformułowany wynik dotyczy zagadnienia synchronizacji zewnętrznej, gdy układ jest nieautonomiczny i prędkość kątowa synchronicznego ruchu obrotowego ω jest z góry znana. W zagadnieniu dotyczącym synchronizacji wewnętrznej (w szczególności samo-synchronizacji), wielkości α_j mogą być wyznaczone z równań (3.4) tylko z dokładnością do dowolnej stałej addytywnej. Prócz tego, z równań tych jednocześnie określa się nie znaną poprzednio (z powodu autonomiczności układu) przybliżoną wartość prędkości kątowej obrotowego ruchu synchronicznego ω . Aby istniały ruchy synchroniczne, równania (3.4) powinny posiadać rozwiązania rzeczywiste względem α_j i dodatnie względem ω . Równanie (3.5) ma w danym przypadku niezmiennie jeden pierwiastek zerowy, nie mający wpływu na rozwiązanie zagadnienia dotyczącego istnienia i stateczności ruchów synchronicznych.

Przy podanych warunkach wielkości $\alpha_j = \alpha_j^*$, określone z (3.4), są (z dokładnością do znaków) wartościami przybliżonymi początkowych faz ruchu wibratorów w ruchach synchronicznych (3.2).

Równania (3.4) mają dostatecznie prosty sens. Są one równaniami równowagi średnich (w czasie jednego obrotu) momentów sił działających na wały każdego wibratora przy warunku, że układ potusza się zgodnie z równaniem (3.2) przy $\psi_s^* = 0$. Zgodnie z tym w równaniach (3.4) oznaczono przez L_s i R_s średnie wartości momentu obrotowego na wale s -tego wibratora; $S_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ oznacza moment pochodzący od sprężystych połączeń wymuszających synchronizację, jeśli połączenia takie istnieją; k_s oznacza pochodną $d(L_s - R_s)/d\omega$, zwykle dodatnią.

Momenty W_s grają zasadniczą rolę w rozpatrywanych zjawiskach. Przedstawiają one odwrotny wpływ drgań na ruch wibratorów i dlatego można je nazwać momentami wibracyjnymi. Jeśli momenty W_s nie istnieją, równości (3.4) przechodzą w równania ustalonego zakresu ruchu obrotowego wałów wibratorów umieszczonych na nieruchomym podłożu

$$(3.6) \quad L_s(\omega) = S_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + R_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \omega), \quad s = 1, \dots, k.$$

W przypadku zagadnienia dotyczącego samosynchronizacji ($S_s = 0$) z równań tych określa się prędkości kątowe ruchu wałów takich wibratorów. Te prędkości kątowe ω_s będziemy nazywać cząsteczkowymi prędkościami kątowymi. Ze względu na to, że momenty L_s i R_s są niejednakowe, co spowodowane jest rzeczywistym rozrzutem parametrów, cząstkowe prędkości kątowe ω_s są w ogólności różne. Istnienie jednak momentów wibracyjnych W_s może doprowadzić do wyrównania prędkości kątowych poszczególnych maszyn i do ustalenia określonych faz ruchu obrotowego, wyznaczonych z równań (3.4).

W pracach [25–27] wykazano, że zachodzą związki

$$(3.7) \quad W_s = \frac{\partial A_0}{\partial \alpha_s},$$

gdzie

$$(3.8) \quad A_0 = A(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [L_0] dt$$

są średnimi w okresie $2\pi/\omega$ wartościami funkcji Lagrange'a $L_0 = T_0 - \Pi_0$, przy czym T_0 i Π_0 oznaczają odpowiednio energię kinetyczną i potencjalną. Wartości (3.8) oblicza się tylko dla ciał sztywnych, na których zamocowane są wibratory, a w obliczeniach zakłada się, że wały wibratorów obracają się synchronicznie według prawa określonego równaniami (3.2) przy $\psi_s^* = 0$, tak że ciała wykonują ustalone harmoniczne drgania wymuszone. Wyrażenia na momenty wibracyjne mają przy tym postać

$$(3.9) \quad W_s = \frac{1}{2} \frac{m_s \varepsilon_s \omega^2}{M} \sum_{j=1}^k [R_{sj} \sin(\alpha_s - \alpha_j) + Q_{sj} \cos(\alpha_s - \alpha_j)], \quad s = 1, \dots, k,$$

gdzie m_s i ε_s oznaczają odpowiednio masę niezrównoważoną i jej mimośród albo amplitudę drgań względnych, M jest masą całego układu, P_{sj} i Q_{sj} są wielkościami, zależnymi tylko od stałych parametrów układu: od mas ciał sztywnych, na których ustawione są wibratory, od sztywności podstawy i połączeń sprężystych, od parametrów określających miejsce umieszczenia wibratorów na ciałach, od prędkości kątowej ruchu synchronicznego ω itd.

Wzory na momenty wibracyjne dla niektórych ważnych praktycznie przypadków podane są w pracach autora [20–22] i w pracy B. P. ŁAWROWA [23]. Dla innych przypadków momenty te można obliczyć albo na podstawie prac [28–30], w których przestudiowano pewną liczbę interesujących praktycznie zagadnień dotyczących samosynchronizacji wibratorów albo bezpośrednio ze wzorów (3.7) i (3.8).

Podane powyżej zależności dotyczą najbardziej rozpowszechnionego przypadku nierezonansowego, gdy można uważać, że częstość synchroniczna ω dostatecznie różni się od częstości drgań własnych układu. W przypadku rezonansu podstawowe zależności rachunkowe nieco się zmieniają.

Analiza równań w przypadku samosynchronizacji ($S_s = 0$) wykazuje [13, 19–22], że istnienie lub brak samosynchronizacji najbardziej zależy od tego, jak bardzo różnią się od siebie cząstkowe prędkości kątowe ruchu obrotowego wałów wibratorów ω_s . Jeżeli prędkości te są jednakowe, to znaczy, jeśli wały wibratorów ustawionych na nieruchomym podłożu obracają się z jednakową prędkością kątową, to samosynchronizacja praktycznie zawsze występuje niezależnie od wartości innych parametrów również przy ustawieniu wibratorów na podłożach ruchomych.

Samosynchronizacja może jednak występować nawet w przypadku, gdy cząstkowe prędkości kątowe różnią się znacznie między sobą. Mówiąc ogólnie, wielkości granicznie możliwych odchyień prędkości cząstkowych, dla których występuje jeszcze samosynchronizacja, jest określona za pomocą największych możliwych wartości momentów wibracyjnych, które, jak już powiedzieliśmy, spełniają rolę rozdzielaczy energii w układzie wyrównywując prędkości kątowe poszczególnych maszyn.

Te graniczne wartości momentów wibracyjnych przy niezmiennych pozostałych warunkach są proporcjonalne do kwadratu momentów statycznych mas niezrównoważonych i do kwadratu prędkości kątowej ruchu synchronicznego. Ponadto, mówiąc ogólnie, momenty te zmniejszają się przy zwiększaniu masy fundamentów i ich momentów bezwładności. Dlatego można powiedzieć, że momenty wibracyjne wzrastają wraz z powiększaniem się intensywności drgań ciał, na których zostały ustawione wibratory. W granicy,

przy nieograniczeniu wzrastających masie i momentach bezwładności fundamentu (to znaczy przy przejściu do nieruchomego podłoża), momenty vibracyjne są równe zeru. Drgające ciało lub połączone ze sobą ciała, na których ustawiono wibratory, grają jakby rolę kanałów, przekazujących energię od jednej maszyny do drugiej, w wyniku czego prędkości kątowe maszyn mogą się wyrównywać.

Tak więc jeżeli parametry maszyn, a w szczególności ich cząstkowe prędkości kątowe, są jednakowe, to samosynchronizacja i uzyskanie ścisłej zgodności faz z pewnością zostaną osiągnięte. Jednak parametry występujące w praktyce mniej lub więcej różnią się między sobą w poszczególnych maszynach. W jednym przypadku (gdy «połączenie vibracyjne» jest słabe) może się okazać, że nawet nieznaczne odchylenia uniemożliwiają samosynchronizację. Wtedy prędkości kątowe i fazy ruchu obrotowego mają charakter przypadkowy. W drugim przypadku (gdy «połączenie vibracyjne» jest silne) okazuje się na odwrót, że nawet przy dużych odchyleniach występuje samosynchronizacja i określone uzgodnienie faz.

Założmy, że znane są prawa rozkładu odchylenia parametrów występujących w równaniach (3.4) jako wielkości o charakterze przypadkowym. Wtedy w zasadzie zawsze można znaleźć prawdopodobieństwo samosynchronizacji W_ω . Jeśli to prawdopodobieństwo jest bliskie zeru, to wykorzystanie samosynchronizujących się wibratorów w danym przypadku jest niemożliwe. Jeśli prawdopodobieństwo to jest znaczne oraz istnieje duże prawdopodobieństwo, że odchylenia trajektorii drgań od nominalnych trajektorii elementu roboczego są dostatecznie małe, to zjawisko samosynchronizacji można z powodzeniem wykorzystać [21].

Zwróćmy uwagę, że «ośrodki przyciągania» faz ruchu obrotowego wibratorów w statecznym ruchu synchronicznym z reguły można łatwo znaleźć z równań (3.4) i (3.5); w tym celu należy założyć, że parametry wszystkich wibratorów są dokładnie takie same.

Skuteczny sposób wyjaśnienia charakteru statecznego ruchu synchronicznego daje tak zwane całkowite kryterium stateczności, zaproponowane przez B. P. ŁAWROWA i autora [25] i uzasadnione w pracach [26–27]. Zgodnie z tym kryterium statecznemu ruchowi synchronicznemu jednakowych lub prawie jednakowych wibratorów odpowiada taka kombinacja faz ruchu, że średnia w jednym okresie wartość \mathcal{A}_0 funkcji Lagrange'a, odpowiadającej ciałom, na których umieszczono wibratory, przyjmuje wartość najmniejszą.

Oprócz wymienionych badań dotyczących samosynchronizacji wibratorów należy wspomnieć prace O. J. SZECHTER [28], K. M. RAGULSKISA [29] i R. F. NAGAJEWA [30].

Wykorzystanie zjawiska samosynchronizacji otwiera szerokie możliwości ulepszenia istniejących i budowania nowych maszyn vibracyjnych. Obecnie skonstruowano i z powodzeniem eksploatuje się zarówno w Związku Radzieckim jak i w innych krajach dużą liczbę maszyn vibracyjnych z wibratorami samosynchronizującymi się.

Rozwinęła się również teoria samosynchronizacji nie tylko wibratorów, ale również innych układów dynamicznych. W związku z tym należy zauważyć, że dążenie do osiągnięcia ruchu synchronicznego jest własnością charakterystyczną dla dość szerokiej klasy obiektów zarówno wytworzonych sztucznie, jak i naturalnych. Ogólne sformułowanie zagadnienia i przegląd prac z tego zakresu można znaleźć w pracy autora [24]. Ostatnio ukazały się nowe interesujące prace R. F. NAGAJEWA [31 i 32].

Literatura cytowana w tekście

1. И. И. БЛЕХМАН и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, *Вибрационное перемещение*, Издательство «Наука», М. 1964.
2. Э. А. АГРАНОВСКАЯ и И. И. БЛЕХМАН, *Выбор оптимальных параметров вибрационных транспортирующих машин с помощью электронной моделирующей установки*, Бюллетень «Обогащение руд», изд. института Механобр, № 5, Л. 1961.
3. В. А. ТРОИЦКИЙ, *Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями*, Прикл. мат. мех., 2, 26 (1962).
4. В. А. ТРОИЦКИЙ, *Об оптимизации процесса вибротранспортировки*, Прикл. мат. мех., 6, 27 (1963).
6. Э. Э. ЛАВЕНДЕЛ и И. Ю. ЛИЕПИНЫШ, *Оптимизация безотрывных режимов вибротранспортировки*, Известия вузов, Машиностроение, № 4, 1963.
5. Э. Э. ЛАВЕНДЕЛ, *О выборе параметров оптимального закона вибротранспортировки деталей*, Известия вузов, Машиностроение, № 4, 1964.
7. Л. С. ПОНТРЯГИН, В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ и Е. Ф. МИШЕНКО, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, 1961.
8. И. И. БЛЕХМАН, В. В. ГОРТИНСКИЙ и Г. Е. ПТУШКИНА, *Движение частицы в колеблющейся среде при наличии сопротивления типа сухого трения (К теории вибрационного разделения сыпучих смесей)*, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1963.
9. Е. А. НЕПОМНЯЩИЙ, *К теории самосортирования сыпучих смесей*, Известия Ленинградского электротехнического института, 46, 1961.
10. Е. А. НЕПОМНЯЩИЙ, *К теории отсадки тяжелых зерен в слое конечной толщины*, Бюллетень «Обогащение руд», изд. института Механобр, 6, Л. 1964.
11. A. SOMMERFELD, *Beiträge zum Dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre*, Zeitschr. VDI, 11, 46 (1902).
12. В. С. МАРТЫШКИН, *Установка для изучения динамических характеристик строительных материалов*, Сб. «Динамические свойства строительных материалов» под ред. Ю. А. НИЛЕНДЕРА, изд. ЦНИИПС, М.-Л. 1960.
13. И. И. БЛЕХМАН, *Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин*, Инженерный сборник, 11 (1953).
14. И. И. БЛЕХМАН и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, *Динамика регулятора Буасса-Сарду*, Известия АН СССР, ОТН, 10 (1955).
15. В. О. КОНОНЕНКО, *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*, Издательство «Наука», М. 1964.
16. И. И. БЛЕХМАН и Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ, *Исследование вынужденных колебаний некоторых вибрационных машин со многими вибраторами*, Известия АН СССР, ОТН, 3, 1959.
17. И. И. БЛЕХМАН, *Об условиях нормальной работы многовибраторных вибрационных машин*, Труды третьего Всесоюзного совещания по основным проблемам машин и механизмов, Машгиз, 1963.
18. W. LANGER, *Beitrag zur Berechnung elektromagnetisch angetriebener Schwingförderer*. Mitteilungen aus dem Institut für Hochbau und ökonomische Verwendung von Werkstoffen, Heft 9/10, Dresden 1963.
19. И. И. БЛЕХМАН, *О самосинхронизации механических вибраторов*, Известия АН СССР, ОТН, 6, 1958.
20. И. И. БЛЕХМАН, *Теория самосинхронизации механических вибраторов и ее приложения*, Труды второго Всесоюзного совещания по основным проблемам теории машин и механизмов, Динамика машин, Машгиз 1960.
21. И. И. БЛЕХМАН, *Вибрационные машины с механическими возбудителями колебаний*, Применение вибротехники в горном деле, Сборник статей, Госгортехиздат, М. 1960.
22. И. И. БЛЕХМАН, *Динамика привода вибрационных машин со многими синхронными механическими вибраторами*, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1, 1960.
23. В. П. ЛАВРОВ, *Пространственная задача о синхронизации механических вибраторов*, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 5, 1961.

24. И. И. БЛЕХМАН, *Проблема синхронизации динамических систем*, Прикл. мат. мех., 2, 28 (1964).
25. И. И. БЛЕХМАН и Б. П. ЛАВРОВ, *Об одном интегральном признаке устойчивости движения*, Прикл. мат. мех., 5, 24 (1960).
26. И. И. БЛЕХМАН, *Обоснование интегрального признака устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов*, Прикл. мат. мех., 6, 24 (1960).
27. И. И. БЛЕХМАН, *Интегральный критерий устойчивости периодических движений некоторых нелинейных систем и его приложения*, Доклад на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям, Киев 1961.
28. О. Я. ШЕХТЕР, *О погружении тяжелых железобетонных оболочек*, Динамика грунтов, сб. № 44. Госстройиздат, 1961.
29. К. М. РАГУЛЬСКИС, *Механизмы на вибрирующем основании* (вопросы динамики и устойчивости), Изд. Ин-та энергетики и электротехники АН ЛитССР, Каунас 1963.
30. Р. Ф. НАГАЕВ, *Динамика виброударной дробилки с парой самосинхронизирующихся вибраторов*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 5, 1963.
31. Р. Ф. НАГАЕВ, *О синхронизации почти одинаковых динамических систем, близких к системам Ляпунова*, Прикл. мат. мех., 3, 28 (1964).
32. Р. Ф. НАГАЕВ, *Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы*, Прикл. мат. мех., 2, 29 (1965).

Р е з ю м е

ВОПРОС ДИНАМИКИ ВИБРАЦИОННЫХ МАШИН

В работе описывается развитие исследований машин, проводимых сотрудниками Института механобр. (Ленинград). Во введении даются определения вибрационных машин и определения процесса колебаний. В дальнейшем рассматриваются, в основном, следующие вопросы:

- 1) оптимизация процесса колебаний, а также вибрационное разделение смесей,
- 2) вопросы вибрационных машин, в особенности вибрационных машин с периодическим действием с вибраторами ограниченной мощности (механическими и электромагнитными).

Обсуждается проблема взаимодействия одного вибратора со многими вибраторами, а также вопрос о механической синхронизации вибраторов и приложения.

S u m m a r y

THE PROBLEMS OF VIBRATION MACHINES DYNAMICS

The paper gives the survey of investigations in the field of vibration machines carried out mostly by the scientific staff of the Mekhanobr Institute (Leningrad).

The definitions of a vibration machine and vibration process are given in the introduction part of the paper. Later on the main attention is paid to the following points:

- 1) The theory of vibration movement processes and especially the problem of the optimization of these processes and the problem of vibrational separation of the bulk mixtures.
- 2) The problems of the vibration machine drive, especially the problem of the reciprocal action of a vibrating system with a vibrator of a limited capacity (both for mechanical and for electromagnetic vibrators). The problems of guaranteeing the normal operation of a single working organ with several vibrators. The problem of the mechanical vibrators synchronisation and its applications.

INSTITUT MECHANOBŔ., LENINGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1966 r.

O OPORZE PRZY TOCZENIU SZTYWNEJ KULI PO PODŁOŻU LEPKOSPĘŻYSTYM

J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ (KRAKÓW)

Wstęp

Ze względu na coraz szersze zastosowanie tworzyw sztucznych jako materiałów na elementy maszyn oraz jako materiałów dźwiękochłonnych i tłumiących drgania zachodzi potrzeba zbadania ich zachowania się w połączeniach tarciovych. Poniższa praca rozpatruje związek, jaki zachodzi pomiędzy oporem przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkospężystym a własnościami mechanicznymi podłoża. Ograniczono się do niewielkich nacisków normalnych, aby rezultaty pomiarów można było porównać z wynikami przybliżonych teorii, opracowanych dla liniowych związków między naprężeniami a odkształceniami oraz ich pochodnymi względem czasu.

Przez długi czas przyczynę oporu przy toczeniu upatrywano w poślizgach ciała toczącego się, zachodzących w obszarze styku [1–7]. Fakt, że smarowanie niemal nie zmienia oporu przy toczeniu, chociaż współczynnik tarcia powierzchni smarowanych znacznie maleje, wskazuje, że mikropoślizgi biorą nieznaczny udział w oporze. Nowy, podstawowy krok w tej dziedzinie, uczynił D. TABOR [8], który powiązał opór przy toczeniu stalowej kuli po różnych gatunkach gumy ze stratami na histerezę sprężystą w podłożu.

Niewątpliwie, na opór przy toczeniu składają się trzy czynniki: 1) pochodzący od strat energii wywołanych lepkością podłoża, 2) pochodzący od oddziaływań powierzchniowych wywołanych adhezją, elektryzowaniem się obu ciał itd., 3) spowodowany mikropoślizgami w obszarze styku.

Dla ciał o dużej histerezie sprężystej, a małej adhezji, czynnik pierwszy zdecydowanie przeważa. Dla takich warunków uzyskał D. TABOR [8] wzór teoretyczny, podający zależność oporu przy toczeniu kuli od nacisku normalnego, promienia kuli i strat spowodowanych histerezą dla niewielkich prędkości toczenia. Zależność oporu od prędkości ruchu, wielkość i kształt obszaru styku nie były w tej pracy rozpatrywane.

Dalsze prace [9–18] rozpatrują, przeważnie teoretycznie, opór przy toczeniu sztywnej kuli lub walca po podłożu lepkospężystym, przy czym własności podłoża są reprezentowane prostymi modelami reologicznymi. Nieliczne prace doświadczalne [12, 17, 18] zajmują się zależnością tego oporu od prędkości toczenia. W pracy [9] autorzy podają przybliżoną teorię oporu przy toczeniu sztywnego walca kołowego po podłożu lepkospężystym, przedstawionym kolejno kilkoma prostymi modelami mechanicznymi, i przewidują, że zależność tarcia tocznego od prędkości (w dużym zakresie prędkości) daje pierwsze przybliżenie krzywej rozkładu czasów relaksacji.

Przedstawiona praca składa się z trzech części: w części pierwszej zbadano własności lepkosprężyste kilku żywic odznaczających się dużym opóźnieniem sprężystym i małą wartością modułów sprężystości (w stałej temperaturze 21°C); w części drugiej zmierzono: a) opór przy toczeniu stalowej kuli po płytach wykonanych z tych żywic w zależności od prędkości toczenia, b) zbadano obszar styku kuli z podłożem w zależności od prędkości toczenia; w części trzeciej przedyskutowano rezultaty doświadczeń.

1. Własności lepkosprężyste użytych żywic

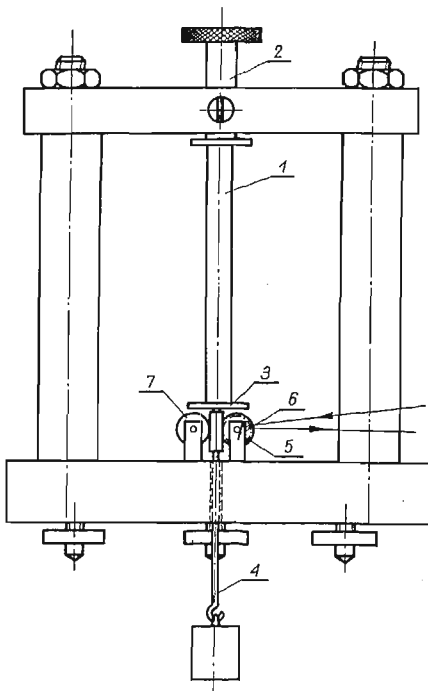
Zbadano własności lepkosprężyste następujących żywic: a) żywicy epoksydowej P 52, b) żywicy poliestrowej Polimal 152.

1. *Przygotowanie próbek.* Ciekły monomer mieszano z utwardzaczem i przyśpieszczaczem i wstawiano pod kłosz pompy próżniowej dla usunięcia pęcherzyków powietrza. Następnie masę tę wlewano do szklanych kuwet dla otrzymania płyt płasko-równoległych i szklanych rurek dla otrzymania prętów o przekroju kołowym. Warstwę antyadhezyjną stanowiła powłoka alkoholu poliwinylowego. Próbki polimeryzowały przez kilka dni w temperaturze pokojowej, następnie wyjmowano je z form i wygrzewano w temperaturze 60°C przez 12 godzin dla ustalenia własności mechanicznych (starzenie). Pomiary przeprowadzano w temperaturze $(21 \pm 0,5)^\circ\text{C}$ przy wilgotności względnej powietrza około 70%.

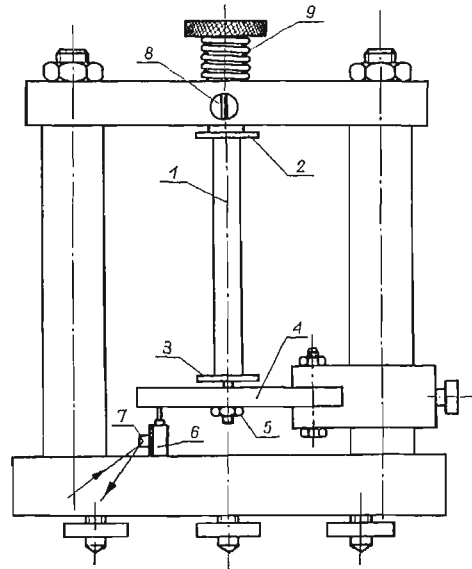
2. *Aparatura pomiarowa.* W celu opisanía własności lepkosprężystych użytych żywic obserwowano: a) zjawisko pełzania prętów poddanych stałemu naprężeniu rozciągającemu, b) zjawisko relaksacji naprężeń w prętach poddanych stałemu odkształceniu (wydłużeniu). Dla obserwacji pełzania prętów zbudowano aparat przedstawiony na rys. 1.

Składa się on z masywnego statywu dającego się ustawić pionowo za pomocą trzech śrub nożnych i libelli. Do walca 2 zamocowanego w górnej poprzeczce wspartej na dwu kolumnach przyklejono górny koniec próbki 1. Dolny jej koniec jest przyklejony do dużej płytki 3, w którą wkręcono pręt 4 przepuszczony przez podstawę statywu i obciążony odważnikiem. Podczas wydłużania się próbki umieszczona na pręcie zębata obraca kółko zębate 5, na którego osi nalepiono zwierciadło 6. Rolka 7 zapewnia prowadzenie pręta. Urządzenie to pozwala na zapis optyczny pełzania na obracającym się walcu, pokrytym papierem światłoczułym.

Dla obserwacji relaksacji naprężeń w rozciągniętym pręcie aparat powyższy zmodyfikowano w sposób przedstawiony na rys. 2. Między płytkę 2 i poprzeczkę statywu wsuwano płytkę dystansową o grubości równej założonemu przyrostowi długości próbki i zamocowywano walec śrubą 8. Dolny koniec próbki łączono z krótkim nagwintowanym prętem przesuniętym przez otwór w sztywnej, płaskiej sprężynie 4 i nakręcano na pręt nakrętkę 5 do styku ze sprężyną. Ugięcie sprężyny 4 rejestrowano za pomocą czujnika mechanicznego 6 wmontowanego w podstawę statywu i zwierciadła 7, umieszczonego na jego osi. Ten sposób pomiaru ugięcia okazał się znacznie dogodniejszy i czulszy niż pomiar odkształcenia za pomocą tensometrów oporowych. W celu nagłego rozciągnięcia próbki usuwano płytkę dystansową i zluźniano śrubę 8. Sprężyna walcowa 9 rozciągała próbkę o długość równą grubości płytki dystansowej w czasie rzędu 10^{-3} – 10^{-2} sek. Ugięcie sprężyny 4 stanowiło około 0,5% przyrostu długości próbki. Można zatem przyjąć, że odkształcenie próbki



Rys. 1. Aparat do obserwacji pełzania prętów

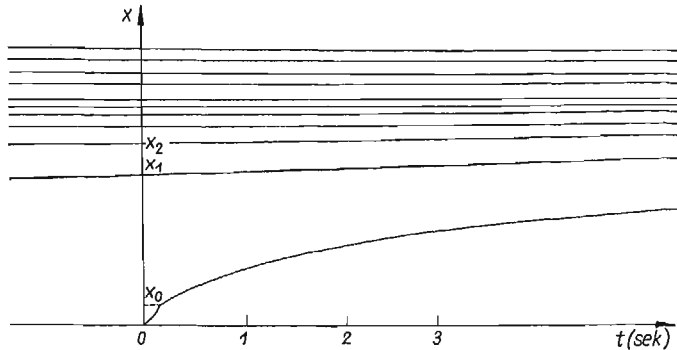


Rys. 2. Aparat do obserwacji relaksacji naprężeń w rozciągniętym pręcie

było stałe w czasie pomiaru naprężenia. Sprężynę wycechowano statycznie znanymi odważnikami stwierdzając przy tym proporcjonalność ugięcia do przyłożonej siły.

3. *Wyniki pomiarów.* Rysunek 3 przedstawia zapis pełzania przy rozciąganiu pręta z żywicy Polimal 152.

Odcinki na osi poziomej przedstawiają czasy, jakie upłynęły od momentu przyłożenia siły rozciągającej. Na osi pionowej promień świetlny zapisał wychylenie x plamki świetl-



Rys. 3. Pełzanie żywicy Polimal 152.

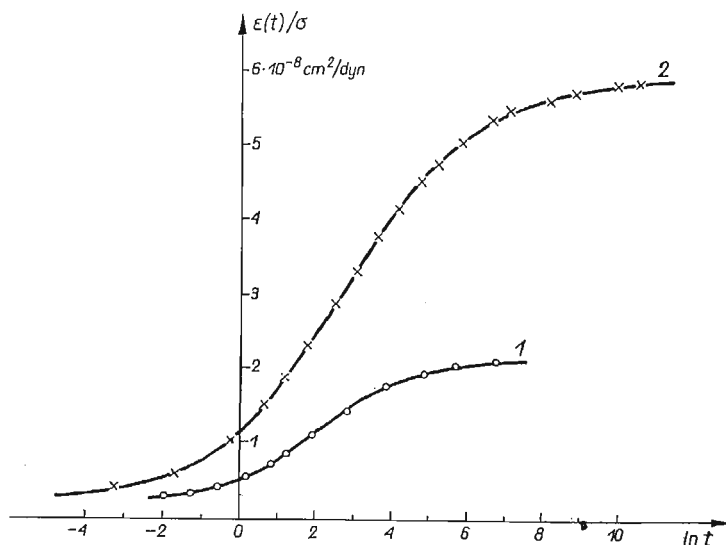
Długość pręta $l = 15,8$ cm, pole przekroju $S = 0,89$ cm², obciążenie $N = 50$ G; odległość papieru światłoczułego $y = 80$ cm, prędkość posuwu $v = 2,61$ cm/sek. Cztery górne linie przedstawiają kolejno zapisy pełzania po upływie czasów: 2, 5, 10, 20 minut

nej z położenia równowagi. Wychylenie osiąga wartości x_1, x_2, \dots, x_n po 1, 2, 3, ... obrotach walca. Zapis prowadzono w sposób ciągły aż do zagęszczenia się linii, następnie obserwowano plamkę po upływie 20, 30 minut, następnie co parę godzin, łącznie przez 24 godziny. Po zarejestrowaniu krzywej pelzania usuwano obciążenie i sprawdzano, czy próbka nie doznała odkształceń trwałych. Badane w tej pracy próbki żywic wracały do stanu pierwotnego po upływie kilku dni (w granicach dokładności pomiaru przyrostu długości: $2 \cdot 10^{-4}$ cm).

Porównując krzywe pelzania otrzymane przy obciążeniach 100 G, 200 G, ..., 500 G, stwierdzono, że dla tych obciążeń w tym samym czasie (liczonym od momentu przyłożenia obciążenia) wychylenia x pozostają w stosunku 1 : 2 : ... 5; materiał w zakresie naprężeń rozciągających $\sigma \leq 0,5$ kG/cm² można przyjąć za liniowy.

Z rysunku 3 widać, że od chwili przyłożenia obciążenia odkształcenie wzrasta niemal natychmiastowo do pewnej wartości $\varepsilon_0 = (x_0/Z_0)(R/l)$, gdzie R jest promieniem zębatego kółka (odkształcenie natychmiastowe). Można też na rysunku zaobserwować drgania próbki wywołane sprężystością i bezwładnością układu, do którego nagle przyłożono siłę.

Wpływu zmiany pola przekroju próbki na wielkość naprężenia rozciągającego nie uwzględniano. Maksymalne wydłużenia względne osiągnane w doświadczeniach nad pelzaniem wynosiły $\varepsilon \approx 0,3\%$; stąd przy wartości współczynnika Poissona $\nu \approx 0,5$ maksy-



Rys. 4. Zależność podatności na pelzanie $\varepsilon(t)/\sigma$ od $\ln t$ dla: 1-żywicy epoksydowej P 52, 2-żywicy Polimal 152

malne skrócenia względne wymiarów poprzecznych próbki $\varepsilon = 0,15\%$, zmiany zaś pola przekroju $\Delta S/S \approx 0,3\%$. O tyle też procent mogło wzrastać naprężenie w próbce w końcowych fazach obserwacji pelzania.

Na podstawie zapisu pelzania sporządzono tablicę zależności podatności na pelzanie $\varepsilon(t)/\sigma = (X(t)/2y)(RS/lN)$ od czasu t . Następnie wykreślono tę zależność w układzie półlogarytmicznym współrzędnych odcinając na osi odciętych $\ln t$ (t w sek), na osi zaś

rzędnych $\varepsilon(t)/\sigma$ w skali liniowej. Otrzymane w ten sposób wykresy podatności na pełzanie mają kształt nachylonej litery S (rys. 4).

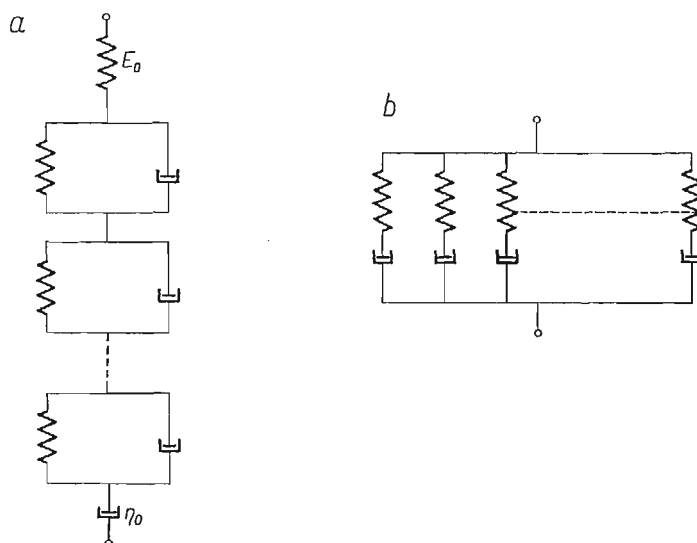
Przyjęto model mechaniczny materiału, złożony z nieskończenie wielu elementów Voigta o zmieniających się w sposób ciągły wartościach współczynników lepkości η i modułów Younga E , połączonych szeregowo ze sobą oraz ze sprężyną E_0 i tłumikiem η_0 (rys. 5a). Model ten poddany naprężeniu $\sigma = \text{const}$ odkształca się zgodnie z równaniem

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = \frac{1}{E_0} + \int_0^{\infty} f(\tau) \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] d\tau + \frac{t}{\eta_0},$$

gdzie E_0 jest modułem sprężystości «natychmiastowej», $\tau = \eta/E$ czasem opóźnienia pojedynczego elementu Voigta; funkcja $f(\tau)$ — funkcją rozkładu podatności $1/E$ na czasy opóźnień (zwana «widmem» czasów opóźnienia). Wyraz t/η_0 przedstawia nieodwracalne płynięcie materiału proporcjonalne do czasu.

Opis własności lepkospężystych materiału wymaga przy przyjęciu tego modelu podania wartości: E_0 , η_0 i funkcji rozkładu podatności $f(\tau)$ w zależności od czasu opóźnienia τ .

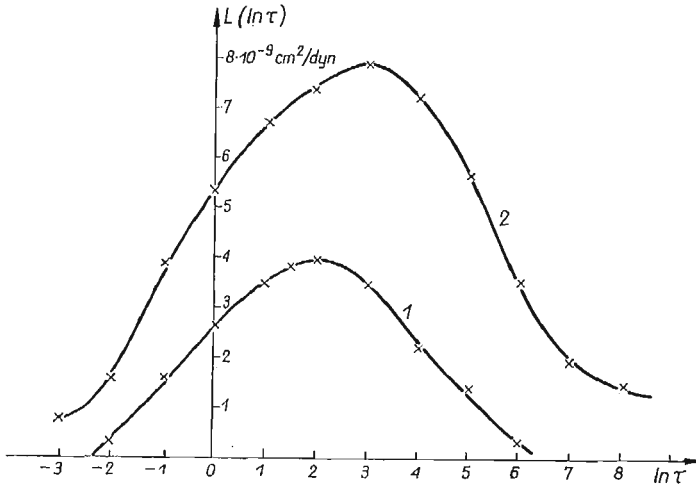
Funkcja rozkładu podatności na pełzanie w zależności od $\ln \tau$ nosi nazwę «logarytmicznego widma czasów opóźnienia»; oznaczymy tę funkcję przez $L(\ln \tau) = \tau f(\tau)$.



Rys. 5. Przyjęte modele mechaniczne

Pierwsze przybliżenie funkcji $L(\ln \tau)$ otrzymano metodą omówioną przez STAVERMANNĄ i SCHWARTZLĄ [14]. Polega ona na różniczkowaniu graficznym funkcji $\varepsilon(\ln \tau)/\sigma$ i nanieśnieniu pochodnej w zależności od $\ln \tau$. Jest to dobre przybliżenie w przypadku rozkładu ciągłego, obejmującego duży przedział wartości $\ln \tau$, gorsze zaś w przypadku widma dyskretnego. Rysunek 6 przedstawia pierwsze przybliżenia widm czasów opóźnienia dla badanych żywic.

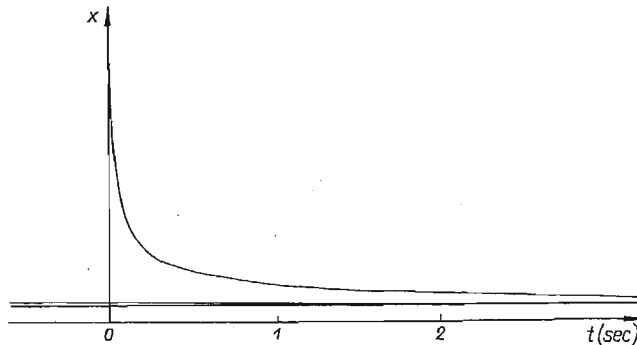
Z kształtu krzywej rozkładu oraz położenia i wartości maksimumów można od razu zdać sobie sprawę jakościowo z zachowania się materiału poddanego stałemu obciążeniu. Wysokie maksima np. odpowiadają dużej podatności; jeżeli ponadto to maksimum przy-



Rys. 6. Widma czasów opóźnienia (1-sze przybliżenie) dla:
1-żywicy epoksydowej P 52, 2-żywicy poliestrowej Polimal 152

pada na bardzo krótkie czasy opóźnienia, to materiał zachowuje się prawie jak ciało sprężyste o małym module sprężystości. Z wykresu na rys. 4 można wprost odczytać podatność «natychmiastową» $I_0 = 1/E_0$, a jeżeli materiał nie wykazuje lepkiego płynięcia, podatność w równowadze $I(t = \infty) = I_\infty$.

Obserwowano następnie relaksację naprężeń w próbkach poddanych stałemu wydłużeniu względnemu $\Delta l/l = \text{const}$. Przy opracowaniu obserwacji przyjęto model złożony z nieskończenie wielu elementów Maxwella, połączonych równolegle (rys. 5b). (Opis relaksacji oparty o model 5a jest nadzwyczaj skomplikowany). Po nagłym odkształceniu



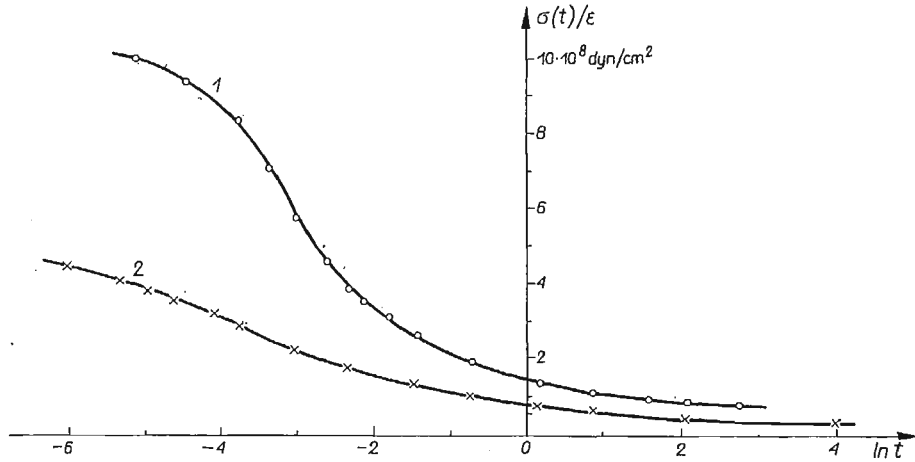
Rys. 7. Relaksacja naprężeń w żywicy epoksydowej P52

x – wychylenie plamki świetlnej z położenia równowagi, odległość papieru światłoczułego $y = 50$ cm, prędkość posuwu taśmy $v = 4,25$ cm/sek, długość pręta $l = 17,5$ cm, pole przekroju $S = 0,88$ cm², przyrost długości pręta $\Delta l = 1,0$ mm

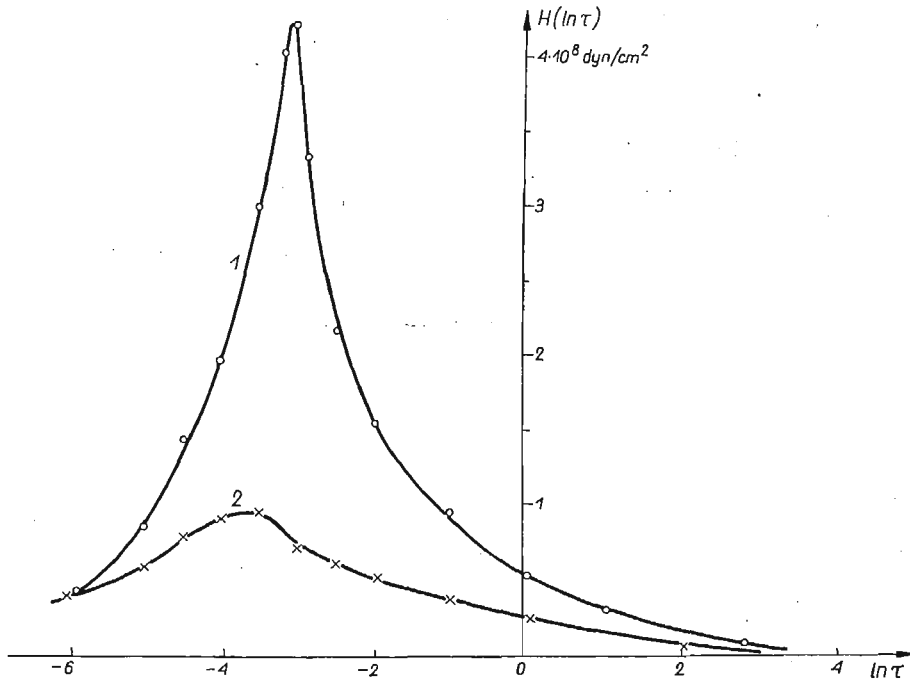
tego modelu do wielkości $\varepsilon = \text{const}$ moduł sprężystości $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon$ maleje wraz z czasem wg. wzoru

$$E(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau + E_{\infty},$$

gdzie $g(\tau)$ jest funkcją rozkładu E na czasy relaksacji τ . Logarymiczną funkcję rozkładu $H(\ln \tau) = \tau g(\tau)$ zwaną «logarymicznym widmem czasów relaksacji» otrzymujemy róż-



Rys. 8. Wykresy funkcji $\sigma(t)/\varepsilon$ w układzie półlogarymicznym współrzędnych: 1) P52, 2) Polimal 152



Rys. 9. Widma czasów relaksacji (pierwsze przybliżenie) dla: 1) P52, 2) Polimal 152

niczując graficznie krzywą na rys. 8. Własności lepkosprężyste materiału przy przyjęciu tego modelu są w zupełności opisane przez podanie funkcji $H(\ln\tau)$ i E_∞ .

Rysunek 7 przedstawia zapis odkształcenia sprężyny 4 (na rys. 2) mierzącej naprężenie.

Na podstawie krzywej z rys. 7 i znajomości stałej sprężyny 4 sporządzono tablicę i wykres funkcji $\sigma(t)/\varepsilon$ w zależności od $\ln\tau$ (rys. 8), a następnie różniczkując graficznie tę krzywą otrzymano pierwsze przybliżenie widma czasów relaksacji $H(\ln\tau)$ dla materiału próbki. Widma takie dla obu badanych żywic przedstawia rys. 9.

Na podstawie opracowanych obserwacji pelzania i relaksacji naprężeń przy rozciąganiu można dla obu badanych żywic podać dane liczbowe:

1. *Żywica epoksydowa P52*. Widmo czasów opóźnienia obejmuje przedział (e^{-3} do e^6) sek. Jedno ostre maksimum przypada na czas $\tau_1 = 8$ sek; podatność natychmiastowa $J_0 = 4,1 \cdot 10^{-9}$ cm²/dyn; ($E_0 = 248$ kG/cm²); $\eta_0 = \infty$; podatność w równowadze $J_\infty = 2,1 \cdot 10^{-8}$ cm²/dyn. Widmo czasów relaksacji rozciąga się w przedziale (e^{-7} do e^4) sek. Jedno bardzo ostre maksimum przypada na $\tau_2 = 7 \cdot 10^{-2}$ sek: $E_\infty = 0,8 \cdot 10^8$ dyn/cm².

2. *Żywica Polimal 152*. Widmo czasów opóźnienia obejmuje przedział (e^{-3} do e^{12}) sek. Jedno (płaskie) maksimum przypada na czas $\tau_1 = 23$ sek; podatność natychmiastowa $J_0 = 3,6 \cdot 10^{-8}$ cm²/dyn ($E_0 = 280$ kG/cm²); $J_\infty = 5,8 \cdot 10^{-8}$ cm²/dyn. Widmo czasów relaksacji obejmuje przedział (e^{-7} do e^3) sek z jednym maksimum dla $\tau_2 = 5,0 \cdot 10^{-2}$ sek; $E_\infty = 0,36 \cdot 10^8$ dyn/cm².

Dane liczbowe dla τ_1 i τ_2 są średnimi z trzech zapisów. Zastosowana metoda graficzna nie pozwala na większą dokładność niż 30%. Należy zauważyć, że wobec szybkiego spadku naprężeń w próbce bezpośrednio po jej odkształceniu wartości naprężeń dla czasów krótszych od $5 \cdot 10^{-3}$ sek są niepewne. Dane powyższe odnoszą się do temperatury 21°C.

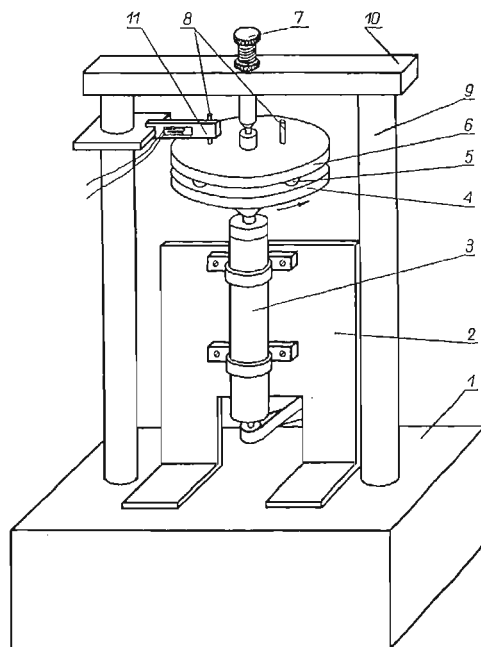
2. Zależność oporu przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym od prędkości ruchu

Dla zbadania tej zależności zbudowano aparat przedstawiony na rys. 10.

Na masywnej betonowej podstawie 1 zamocowano stalową płytę 2 grubości 10 mm, do której za pomocą uchwytów regulacyjnych przymocowano obudowę wrzeciona 3. Na stożkowy koniec wrzeciona nasadzono masywną tarczę stalową 4 o średnicy 20 cm, zaopatrzoną w płytki rowek o profilu kołowym, przy czym promień krzywizny rowka był znacznie większy od promienia toczących się kulek. Wrzeciono było wprawiane w ruch obrotowy za pomocą pasa transmisyjnego bez końca. Napędu dostarczał silnik elektryczny o regulowanej częstotliwości obrotów i układ przekładni pozwalający na otrzymywanie prędkości obwodowych 10^{-3} cm/sek–20 m/sek. Silnik był umieszczony na oddzielnym betonowym bloku spoczywającym na urządzeniu amortyzującym drgania. Po umieszczeniu w rowku tarczy 4 w równych odstępach trzech jednakowych stalowych kulek 5 kładziono na nie stalową tarczę górną 6 z przyklejoną od dołu tarczą z badanego tworzywa grubości około 2 cm. Tarcza stalowa była połączona ze śrubą 7 ślizgowym łożyskiem stożkowym. Była ona zaopatrzona również w dwa stalowe kołki 8. Dwa słupy 9 o średnicy 50 mm wpuszczone w blok betonowy połączono poprzeczką 10. Na jednym ze słupów umieszczono pierścień, służący do zamocowania płaskiej sprężyny stalowej 11 o dużej sztywności (dla zmniejszenia drgań frykcyjnych). Siłę oporu przy toczeniu mierzono za pomocą dwóch

tensometrów oporowych, naklejonych na sprężynę 11 po obu jej stronach. Tensometry włączono w gałęzie mostka Wheatstonea w układzie różnicowym. Odczytów dokonywano za pomocą galwanometru. Układ wycechowano znanymi odważnikami (stała cechowania wynosiła 2,0 G na działkę skali galwanometru).

Ruch obrotowy tarczy dolnej powodował toczenie się kul po tarczy górnej wprowadzając ją w obrót; począwszy od momentu, w którym kołek tarczy oparł się o sprężynę, ugiął ją i moment sił tarcia został zrównoważony momentem sił sprężystych, kule toczyły się



Rys. 10. Aparat do pomiaru oporu przy toczeniu kul

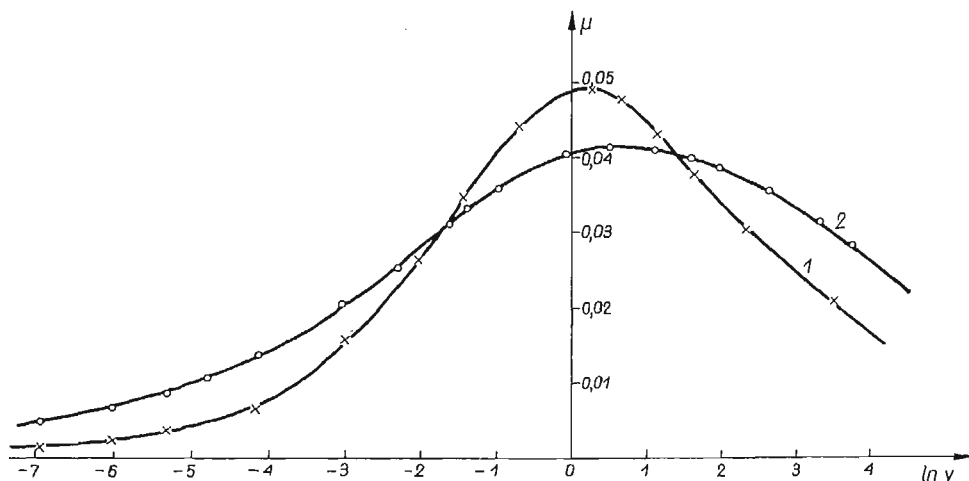
po nieruchomej tarczy górnej. Oś obrotu każdej z kul leżała w obszarze styku kuli z tarczą górną, a prędkość środka kuli równała się $1/2$ prędkości liniowej punktu styku z tarczą dolną. Opór przy toczeniu kul po stalowej tarczy dolnej można pominąć wobec oporu przy toczeniu po podłożu z tworzywa, jeżeli bowiem zastąpimy górną tarczę z polimeru tarczą stalową, opór przy toczeniu leży w granicach błędu pomiaru.

Otrzymany ruch kul nie był czystym toczeniem; ponieważ torem był okrąg koła, toczeniu towarzyszył obrót kuli koło osi pionowej (spin) (na jeden obrót kuli koło osi poziomej przypadało 9 obrotów koło osi pionowej). W pracy [12] pokazano doświadczalnie, że udział nawet znacznie większego spinu niż w naszym przypadku nie ma wpływu na opór przy toczeniu.

Nacisku normalnego na kulę dostarczał ciężar tarczy górnej z próbką i ewentualnie dodatkowe tarcze obciążające. W celu zmniejszenia adhezji kul do polimeru pokryto powierzchnię próbki cienką, lśniąca warstwą MoS_2 .

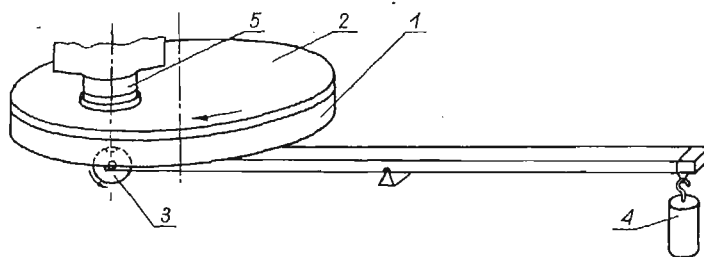
Rysunek 11 przedstawia wykres zależności współczynnika oporu przy toczeniu $\mu = \frac{\text{siła oporu}}{\text{nacisk normalny}}$ stalowej kuli o średnicy 18 mm od prędkości toczenia po tarczach wykonanych z uprzednio badanych żywic.

Krzywe na rys. 11 mają jedno wyraźne maksimum. Nie bez wpływu na ich przebieg pozostaje nagrzewanie się podłoża podczas przetaczania. Zasadniczo pomiar oporu należy przeprowadzać na materiale «wypoczętym», nieodkształconym przez uprzednie przejścia



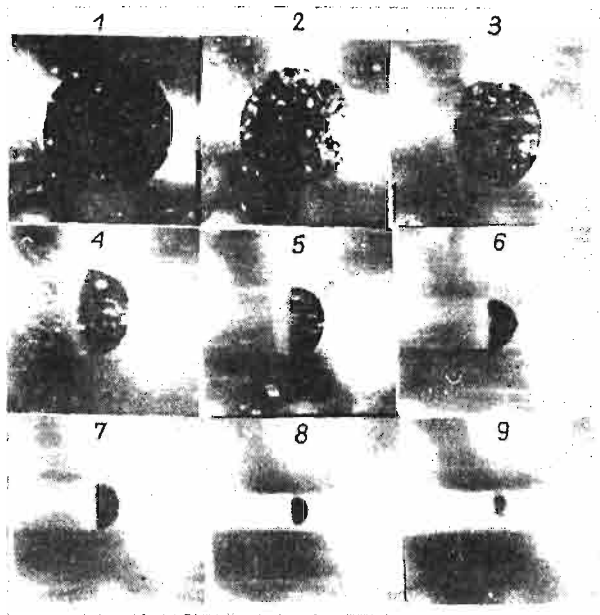
Rys. 11. Zależność współczynnika oporu przy toczeniu stalowej kuli od prędkości toczenia. Średnica kuli 18 mm, nacisk normalny na jedną kulę = 920 G dla żywicy epoksydowej P 52 (krzywa 1) i 760 G dla Polimal 152 (krzywa 2)

kuli; dla małych prędkości toczenia do 5 cm/sek łatwo to uzyskać, zaś dla prędkości większych nie udało się uniknąć kilkakrotnego przejścia kuli po własnym śladzie, gdyż czas ustalania się wskazań galwanometru w mostku był rzędu paru sekund.

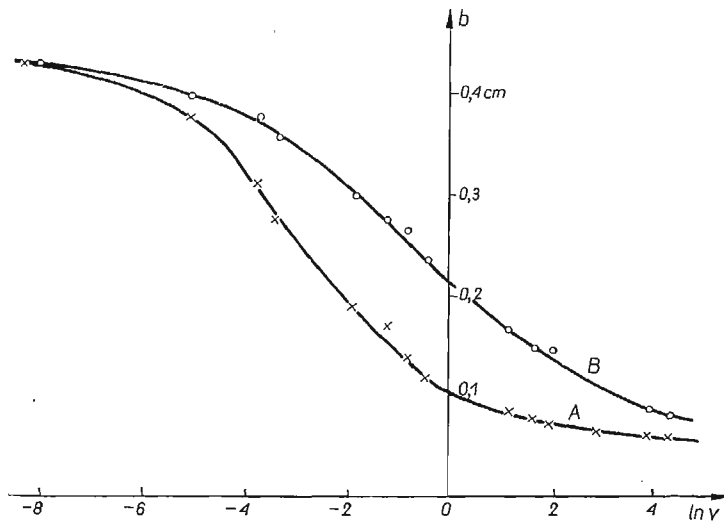


Rys. 12. Urządzenie do obserwacji obszaru styku kuli z podłożem

Ze względu na rozważania w p. 3 uzupełniono pomiary oporu przy toczeniu kuli obserwacjami wielkości i kształtu obszaru styku kuli z podłożem lepkosprężystym w zależności od prędkości ruchu, przy stałym nacisku normalnym, równym naciskowi w pomiarach oporu. Zastąpiono w tym celu płytę stalową 6 z rys. 10 płytą szklaną 2 (rys. 12), do której



Rys. 13. Fotografia obszaru styku kuli stalowej o średnicy 18 mm toczącej się po płycie z żywicy epoksydowej P 52 w zależności od prędkości toczenia. Nacisk normalny 920 G, powiększenie 4-krotne:
 1-po 2 min. spoczynku, 2- $v = 6,8 \cdot 10^{-3}$ cm/sek, 3- $v = 3,5 \cdot 10^{-2}$ cm/sek, 4- $v = 2,8 \cdot 10^{-1}$ cm/sek, 5- $v = 1,17$ cm/sek, 6- $v = 3,15$ cm/sek, 7- $v = 5,0$ cm/sek, 8- $v = 17,5$ cm/sek, 9- $v = 65,5$ cm/sek



Rys. 14. Zależność średnicy obszaru styku kuli z podłożem lepkosprężystym od \ln prędkości toczenia (v w cm/sek).

Podłoże: żywica epoksydowa P 52, nacisk normalny 920 G, A-średnica równoległa do prędkości (2a), B-średnica prostopadła do prędkości (2b).

przyklepiono tarczę z badanej żywicy 1. Obie sklezione płyty połączono sztywnie z wrzecionem zachowując między nimi a tarczą dolną odstęp kilku cm. Stalową kulkę 3 z poprzednich pomiarów osadzono na osi poziomej na końcu ramienia dźwigni równoramiennej; ciężarek 4 dostarczał nacisku normalnego. Obszar styku pozostaje stale w środku pola widzenia aparatu fotograficznego 5 (fotografowano przez płytę szklaną i plastikową). Rysunek 13 przedstawia otrzymane zdjęcia.

Z rosnącą prędkością obszar styku maleje i zmienia kształt: przy prędkościach rzędu 10^{-3} cm/sek jest on niemal kołowy, następnie przyjmuje postać księżycy między pełnią i trzecią kwadrą, przy prędkościach zaś rzędu 10 cm/sek przybiera dla tej żywicy kształt zbliżony do półkola zwróconego stroną wypukłą w kierunku ruchu. Wykres na rys. 14 przedstawia zależność średnic obszaru styku: A równoległej do wektora prędkości, B prostopadłej do wektora prędkości od prędkości toczenia.

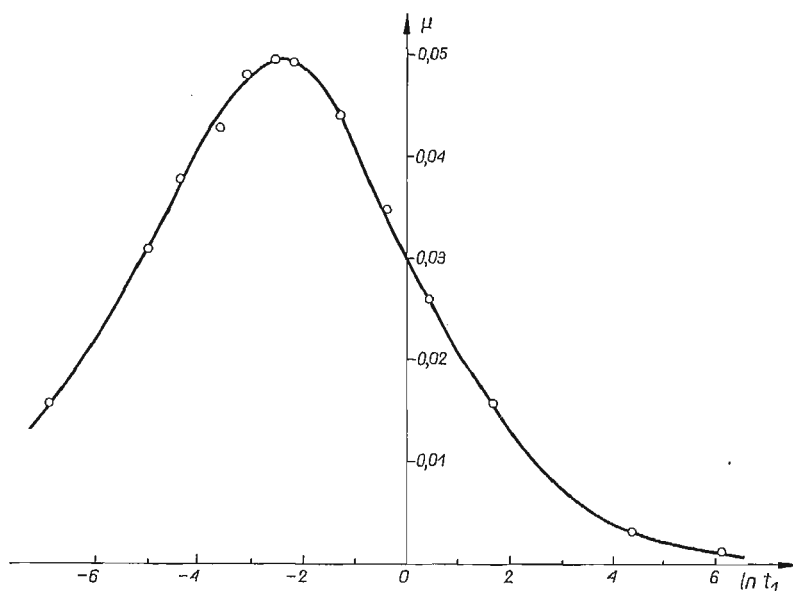
3. Dyskusja otrzymanych rezultatów

Zespół zagadnień dotyczących toczenia sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym, a więc oporu przy toczeniu, wielkości i kształtu obszaru styku, kształtu powierzchni podłoża w otoczeniu obszaru styku w zależności od nacisku normalnego, promienia kuli, prędkości ruchu i własności mechanicznych podłoża nie został dotychczas rozwiązany ściśle w ramach teorii lepkosprężystości. Główną trudność stanowi niezajomość kształtu obszaru styku [20]. Prace teoretyczne [7,10], podające przybliżone teorie toczenia kuli, zastępują półprzestrzeń lepkosprężystą układem pionowych słupków od siebie niezależnych. Pomijają one zatem naprężenia ścinające w podłożu; pomijają też opory bezwładności ośrodka i siły adhezji. Rezultaty otrzymane w tych pracach ograniczają się do podłoży reprezentowanych prostymi, «liniowymi» modelami reologicznymi.

Żadna z badanych przez nas żywic nie miała widm złożonych z jednej lub kilku linii, lecz widma ciągłe obejmujące kilkanaście (9–15) rzędów e^n . Nie mamy zatem możliwości prawidłowego porównania wyników eksperymentu z teorią, nawet przybliżoną. Autorzy pracy [9] sugerują, że «pomiar tarcia tocznego lub ślizgowego w dużym zakresie prędkości dają wprost pierwsze przybliżenie rozkładów czasów relaksacji». Autorzy pracy [10] stwierdzają, że pomiar oporu przy toczeniu lub ślizganiu ze smarem mógłby być szybką metodą określania stratności $\text{tg } \delta$ materiałów lepkosprężystych.

Porównując wykres na rys. 11 przedstawiający zależność współczynnika oporu przy toczeniu z wykresami widm czasów opóźnienia (rys. 6) i relaksacji (rys. 9) można dostrzec podobieństwo przebiegów funkcyjnych na rys. 11 do rys. 9. Krzywe na rys. 11 przebiegają bardziej płasko; być może, że ta zmiana kształtu jest spowodowana adhezją kuli do podłoża i faktem, że naciski jednostkowe w obszarze styku znacznie przekraczały naciski, dla których stwierdzono liniowe zachowanie się żywicy i opracowane widma. Jest też rzeczą bardzo prawdopodobną, że «widma» otrzymane przy rozciąganiu próbek mają inny przebieg niż widma uzyskiwane przy ich ściskaniu. Aby z otrzymanej doświadczalnie krzywej $\mu = \mu(\ln v)$ wnioskować o widmie czasów relaksacji, należałoby przyporządkować każdej wartości v — odpowiednie τ , a przynajmniej wartości v , dla której ma miejsce maksimum oporu — wartości τ_2 , dla której zachodzi maksimum w widmie czasów relaksacji. Należy zaznaczyć, że t_1 , czas trwania eksperymentu, decyduje o zachowaniu się materiału w tym

znaczeniu, że dla t_1 krótszego od najkrótszych czasów τ zawartych w widmie czasów relaksacji, materiał zachowuje się jak sprężyste ciało stałe; dla czasów t_1 większych od najdłuższych czasów w widmie — jak ciecz. Dla czasów t_1 porównywalnych z czasami relaksacji, dla których widmo posiada znaczne «natężenie», materiał zdradza najwyraźniej właściwości lepkospężyste. W naszym przypadku «czasem eksperymentu» t_1 jest czas przejścia kuli ponad danym punktem podłoża (czas styku), zatem $t_1 = 2a/v$, gdzie $2a$ jest średnicą obszaru styku równoległą do wektora prędkości. Maksimum oporu dla P52 przypada na $v = 1,28$ cm/sek; dla tej prędkości średnica obszaru styku $2a = 0,10$ cm (patrz rys. 13); zatem $t_1 = \frac{0,10 \text{ cm}}{1,28 \text{ cm/sek}} = 7,8 \cdot 10^{-2}$ sek.; istotnie maksimum w widmie czasów relaksacji przypada na $7 \cdot 10^{-2}$ sek, co należy uważać za bardzo dobrą zgodność, spowodowaną być może tylko jednym ostrym maksimum w widmie. Jeżeli teraz przedstawimy współczynnik oporu przy toczeniu jako funkcję logarytmu czasu styku t_1 , otrzymamy wykres (rys. 15) posiadający przebieg podobny do widma czasów relaksacji, przy czym maksimum przypada



Rys. 15. Wykres zależności współczynnika oporu przy toczeniu kuli od czasu styku t_1 .
Materiał żywica epoksydowa P 52, $N = 920$ G, $R = 0,90$ cm

na $t_1 = \tau_2$. Metoda otrzymywania widm czasów relaksacji z obserwacji oporu przy toczeniu wymagałaby zatem dodatkowo pomiaru średnicy obszaru styku, co jest rzeczą żmudną, a dla żywic nieprzezroczystych (jak np. Polimal 152) opisaną tu techniką niewykonalną. Na koniec uczyniono próbę konfrontacji doświadczeń z teorią przedstawioną w pracy [10]. Autorzy rozważają tu podłoże reprezentowane modelem Voigta.

Jakkolwiek żadna z żywic tu opisanych nie może być reprezentowana modelem Voigta (obie żywice mają sprężystość natychmiastową; widma czasów opóźnienia w pierwszym przybliżeniu rozciągają się na szereg rzędów e^n), to jednak wiedząc, że dalsze przybliżenia czynią maksima w widmie bardziej ostrymi, uczyniono próbę sprawdzenia podanych przez

autorów relacji $\mu = \mu(v)$ zastępując widmo ciągłe jedną linią, odpowiadającą maksimum w widmie czasów opóźnienia. Jak należało oczekiwać, zarówno wartość prędkości, na którą przypada maksimum oporu, jak też i wartości μ dla małych (rzędu 10^{-3} cm/sek) i dużych (rzędu 10^2 cm/sek) prędkości odbiegają od przewidzianych przez teorię wartości.

Tak np. dla żywicy P52, przy $N = 920$ G, $R = 0,90$ cm, maksimum μ zachodziło dla $v = 1,29$ cm/sek, z teorii zaś wynika $v = 0,025$ cm/sek. Podobnie zmierzona wartość współczynnika oporu dla $v = 10^{-3}$ cm/sek wynosi $\mu_{\text{obs}} = 0,002$, $\mu_{\text{obl}} = 0,009$; Dla $v = 50$ cm/sek, $\mu_{\text{obs}} = 0,026$, $\mu_{\text{obl}} = 0,06$.

W końcu dyskusji należy uznać, że związek oporu przy toczeniu sztywnej kuli z własnościami lepkosprężystymi podłoża scharakteryzowanego widmami czasów relaksacji lub opóźnienia nie jest prosty; opracowanie nawet przybliżonej teorii tego procesu dla dowolnego przebiegu widma czasów relaksacji mogłoby dać podstawę do doświadczalnego wyznaczania widm w oparciu o krzywą zależności oporu od prędkości przy minimalizacji oddziaływań czysto powierzchniowych.

Literatura cytowana w tekście

1. O. REYNOLDS, Phil. Trans. Roy. Soc. **166**, 155, 1876.
2. H. L. HEATHCOTE, Proc. Inst. Auto-Engers **15**, 569, 1921.
3. K. L. JOHNSON, Proc. Roy. Soc. A. **230**, 531, 1955.
4. H. B. UFLER, Ingr. Arch. **27**, 137, 1959.
5. K. L. JOHNSON, J. Appl. Mech. **80**, 339, 1958.
6. J. HALLING, J. Mech. Eng. Soc. **6**, 64, 1964.
7. S. ZIEMBA, Biuletyn W.A.T. **3**, 1955.
8. D. TABOR, Proc. Roy. Soc. A. **229**, 189, 1954.
9. W. D. MAY, F. L. MORRIS, D. ATACK, J. of Appl. Phys. **30**, 11, 1713, 1959.
10. D. G. FLOM, A. M. BUCHE, J. of Appl. Phys. **30**, 1725, 1959.
11. D. BULGIN, G. D. HUBBARD, Trans. Inst. Rubber Ind. **34**, 201, 1958.
12. D. G. FLOM, J. of Appl. Phys. **31**, 306, 1960.
13. S. C. HUNTER, J. of Appl. Mech. **28**, 611, 1961.
14. D. G. FLOM, J. of Appl. Phys. **32**, 1426, 1961.
15. L. W. MORLAND, J. of Appl. Mech. **29**, 345, 1962.
16. R. H. NORMAN, Brit. J. of Appl. Phys. **13**, 358, 1962.
17. D. G. FLOM, Proc. Symposium: Rolling Contact Phenom, s. 97, 1962.
18. J. A. GREENWOD, H. MINSHALL, D. TABOR, Proc. Roy. Soc. A. **259**, 480, 1961.
19. A. J. STAVERMANN, F. SCHWARTZL, Die Phys. d. Hochpolymeren; V. 4. 44, Springer, Berlin, 1956.
20. G. A. C. GRAHAM, *Contact Problems in the Linear Theory of Visco-elasticity*. North Carolin State Univer. at Raleigh Sept. 10, 1965.
21. R. C. DRUTOWSKI, Annual Meeting A.S.M.E. N. 4, 1958.

Р е з ю м е

О СОПРОТИВЛЕНИИ ПРИ КАЧЕНИИ ЖЕСТКОГО ШАРА ПО ВЯЗКО-УПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ

Представленная экспериментальная работа состоит из трех частей.

В первой описаны результаты исследования вязко-упругих свойств ряда смол, для которых характерно большое упругое последствие и малый модуль упругости. На основе наблюдений над ползучестью и релаксацией напряжений в растянутом стержне, получены спектры времен ретардации и спектры времен релаксации.

Во второй части приведены результаты замеров сопротивлений движению при качении стального шара по пластинкам из указанных смол и зависимости этих сопротивлений от скорости движения. Зона контакта шара с основанием фотографировалась при разных скоростях движения.

В третьей части дана кривая зависимости коэффициента сопротивления при качении от „времени контакта” (равного диаметру области контакта в направлении движения деленному на скорость движения).

Ход этой кривой напоминает спектр времен релаксации для материала, из которого выполнено основание. Максимумы обеих кривых соответствуют одному и тому же времени.

S u m m a r y

ON THE ROLLING RESISTANCE OF A RIGID BALL MOVING ON THE VISCO-ELASTIC BASE

The presented experimental work consists of 3 parts. In part I the visco-elastic properties of some resins of considerable retardation times and low elastic moduli were investigated. From the creep and relaxation measurements the retardation and relaxation spectra were obtained.

In the second part, the resistance of rolling of the steel ball on the samples made of the investigated resins was measured. The effect of speed on the resistance force was observed and the photographs of contact area at various speeds were taken.

Part III contains the plot of rolling resistance coefficient vs. „time of contact” t_1 ,

$$t_1 = \frac{\text{contact diameter parallel to the velocity}}{\text{velocity}} .$$

This curve has a shape similar to the relaxation spectrum: the maxima on both the curves appearing at the same time.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
KATEDRA FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1966 r.

KORELACJA CECH WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH I WYTYŻENIE MATERIAŁU

JANUSZ MURZEWSKI, ZBIGNIEW MENDERA (KRAKÓW)

1. Statystyczne określenie wytyżenia

Rozpatrujemy materiał, który pod działaniem naprężenia może ulec zniszczeniu bądź to w formie uplastycznienia, bądź to pęknięcia. Materiał pozostaje niezniszczony, jeśli jednocześnie zachodzą następujące nierówności:

$$(1.1) \quad \sigma_H < Q, \quad \sigma_G < R,$$

gdzie σ_H jest to naprężenie zastępcze ze względu na uplastycznienie, a σ_G naprężenie zastępcze ze względu na pęknięcie. Naprężenie zastępcze rozumie się tak, jak w klasycznej teorii wytyżenia; Q jest granicą plastyczności, a R granicą wytrzymałości rozdzielczej. Granice te są skorelowanymi zmiennymi losowymi.

Prawdopodobieństwo, że materiał pozostaje niezniszczony przy ustalonym stanie naprężenia, równa się prawdopodobieństwu spełnienia układu nierówności (1.1):

$$(1.2) \quad W = P(\sigma_H < Q, \sigma_G < R),$$

a prawdopodobieństwo zniszczenia:

$$(1.3) \quad w = 1 - W = F(Q^*, R^*) \quad \text{dla} \quad Q^* = \sigma_H, R^* = \sigma_G.$$

Prawdopodobieństwo w nazywamy wytyżeniem materiału, a $F(Q, R)$ jest dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu zmiennych losowych Q i R .

Probabilistyczną definicję wytyżenia wprowadził pierwszy z autorów dla ośrodków mikro-niejednorodnych [7]. Oznaczając prawdopodobieństwo mikro-uplastycznienia symbolem κ , a prawdopodobieństwo mikro-speknięcia symbolem λ i zakładając stochastyczną niezależność granic mikro-plastyczności i mikro-wytrzymałości, podał on wzór:

$$(1.4) \quad \mu = 1 - (1 - \kappa)(1 - \lambda) = \kappa - \kappa\lambda + \lambda,$$

gdzie μ jest wytyżeniem w sensie mikroskopowym, czyli miarą koncentracji mikro-elementów uszkodzonych w jednostce objętości.

Tenże autor w rozdziale zamieszczonym w monografii o konstrukcjach aluminiowych [4] interpretuje wzór (1.4) w sensie makroskopowym w zastosowaniu do złomu kruchego lub poślizgowego.

W obecnej pracy autorzy rozumieją wytyżenie (1.3) również w sensie makroskopowym i jako przykładową bazę empiryczną przyjmują zbiór doświadczeń wykonanych na próbkach makroskopowych przez drugiego z autorów [2]. A więc wytyżenie w dla ustalonego naprężenia i materiału równa się granicy, do której dąży częstość zniszczenia w normal-

nych próbach wytrzymałościowych. Różnica merytoryczna między wzorem (1.3) i (1.4) polega na tym, że dystrybuanta $F(Q, R)$ dla skorelowanych Q i R nie da się napisać za pomocą prawdopodobieństw brzegowych \varkappa i λ , tak jak to ma miejsce we wzorze (1.4). Ponadto w pracy niniejszej zwrócona jest uwaga na rozbieżność pojęć wyężenia i wadliwości. Wprawdzie wadliwość partii materiału można określić tym samym wzorem (1.3) co wyężenie, ale wtedy przez Q^* , R^* należy rozumieć nie naprężenie zastępcze, a minimalne gwarantowane wartości granicy plastyczności i wytrzymałości:

$$(1.5) \quad Q^* = Q_{\min}, \quad R^* = R_{\min}.$$

Jeśli brakiem nazwiemy materiał o cechach nie spełniających układu nierówności, analogicznych do (1.1),

$$(1.6) \quad Q > Q_{\min}, \quad R > R_{\min},$$

to wadliwość w , określona wzorami (1.3) i (1.5), jest prawdopodobieństwem wypuszczenia braku pod warunkiem, że nie ma kontroli jakości.

W dalszym ciągu pracy przedstawione będą konsekwencje wynikające z różnego interpretowania wartości granicznych Q^* i R^* w przypadku wyężenia i wadliwości.

2. Rozkład losowych cech wytrzymałościowych

Funkcje rozkładu cech wytrzymałościowych są przedmiotem wielu prac teoretycznych i doświadczalnych [1, 9 i 11]. Najczęściej jednak rozkłady tych cech analizuje się z osobna nie przypuszczając istnienia stochastycznej zależności.

Mając przede wszystkim na uwadze stal konstrukcyjną przyjmujemy normalny łączny rozkład prawdopodobieństw granicy plastyczności Q i wytrzymałości R o gęstości prawdopodobieństw jak następuje:

$$(2.1) \quad f(Q, R) = \\ = \frac{1}{2\pi\mu_Q\mu_R\sqrt{1-r_{QR}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{QR}^2)} \left[\frac{(Q-\bar{Q})^2}{\mu_Q^2} - 2r_{QR} \frac{Q-\bar{Q}}{\mu_Q} \frac{R-\bar{R}}{\mu_R} + \frac{(R-\bar{R})^2}{\mu_R^2} \right] \right\},$$

gdzie \bar{Q} , \bar{R} oznaczają wartości średnie, μ_Q , μ_R odchylenia standardowe, $r_{QR} = \text{cov}(Q, R)/\mu_Q \mu_R$ współczynnik korelacji.

Odpowiednie rozkłady brzegowe przedstawia rys. 1.

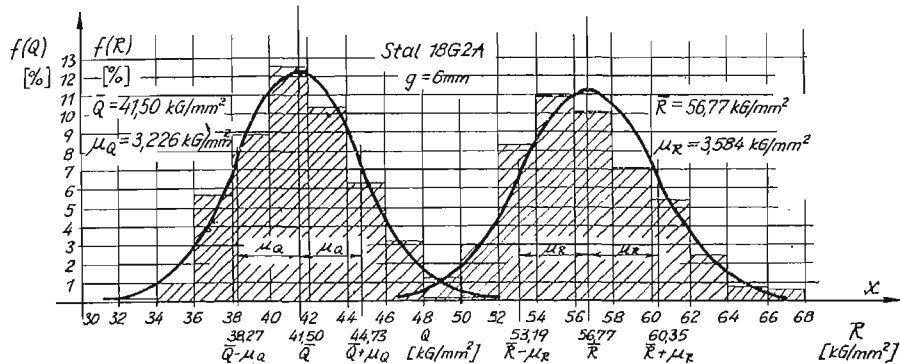
Przy takich założeniach abstrahujemy od tego, że cechy wytrzymałościowe są funkcją stochastyczną punktu ośrodka. Ogranicza to nasze rozważania do elementów konstrukcyjnych o wymiarach mniej więcej tego rzędu, co badane doświadczalnie próbki, i naprężonych równomiernie, choć niekoniecznie jednoosiowo. W ten sposób eliminujemy tzw. efekty skali.

W celu jaśniejszego przedstawienia sprawy i możliwości zilustrowania wywodów realnymi wykresami wyspecyfikowano przykładowe parametry rozkładu prawdopodobieństw.

Analizę statystyczną przeprowadzono na podstawie doświadczeń rozciągania 874 próbek losowo wyciętych z arkuszy blach o grubości 6 mm stali niskostopowej, manganowo-krzemowej 18G2A [2].

Stal ta zyskuje coraz większe znaczenie w zastosowaniach do niektórych rodzajów konstrukcji stalowych, mianowicie tam, gdzie może być wykorzystana jej podwyższona wytrzymałość.

Próby rozciągania przeprowadzono przy kontrolowanych naprężeniach. Wyniki doświadczeń zestawiono w tabelcy 1 podając jednocześnie zależność stochastyczną między granicą plastyczności Q i granicą wytrzymałości R .



Rys. 1

Tabela 1. Rozkład empiryczny wartości Q i R stali 18G2A n_{ij}

Q_i kg/mm ²	kg/mm ² R_j										n_i
	48-50	50-52	52-54	54-56	56-58	58-60	60-62	62-64	64-66	66-68	
30-32	2										2
32-34	2	2									4
34-36	2	12	4	1							19
36-38		30	51	17	1	1					100
38-40		10	74	57	14	1	1				157
40-42		1	16	90	81	26	10				224
42-44			3	23	62	70	20	2			180
44-46				5	15	20	56	13	1		110
46-48					5	8	9	29	4	1	56
48-50								1	9	11	21
50-52										1	1
n_j	6	55	148	193	178	126	96	45	14	13	874

Parametry rozkładu prawdopodobieństw oszacowano na podstawie rozkładu empirycznego jak następuje:
wartości średnie

$$(2.2) \quad \bar{Q} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i Q_i = 41,50 \text{ kG/mm}^2,$$

$$\bar{R} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l n_j R_j = 56,77 \text{ kG/mm}^2;$$

odchylenia średnie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mu_Q &\approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i Q_i^2 - \bar{Q}^2} = 3,226 \text{ kG/mm}^2, \\ \mu_R &\approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^l n_j R_j^2 - \bar{R}^2} = 3,584 \text{ kG/mm}^2, \end{aligned}$$

współczynnik korelacji

$$(2.4) \quad r_{QR} = \frac{\text{cov}(Q, R)}{\mu_Q \mu_R} \approx \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij} Q_{ij} R_{ij} - \bar{Q} \bar{R}}{\mu_Q \mu_R} = 0,809.$$

Dystrybuanta rozkładu normalnego wyraża się wzorem symbolicznym

$$(2.5) \quad F(Q^*, R^*) = \int_{-\infty}^{Q^*} \int_{-\infty}^{R^*} f(Q, R) dQ dR,$$

i jej wartości oblicza się dla ustalonych Q^* , R^* za pomocą tablic dwuwymiarowego rozkładu normalnego [10].

3. Warunki plastyczności i wytrzymałości

Zagadnienie najtrafniejszego wyboru hipotezy wyężeniowej, a więc warunku plastyczności i warunku wytrzymałości, jest w zasadzie zagadnieniem odrębnym [5 i 6].

Dla prostoty przyjmiemy klasyczne hipotezy. Jako pierwszą, najlepszą naszym zdaniem kombinację, przyjmiemy warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (σ_H) i warunek wytrzymałości Galileusza (σ_G). Naprężenia zastępcze wyrażają się następującymi wzorami:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_H &= \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}, \\ \sigma_G &= \sigma_1, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \end{aligned}$$

Równanie

$$(3.2) \quad w(\sigma_H, \sigma_G) = F(\sigma_H, \sigma_G) = \text{const}$$

określa powierzchnię równych wyężzeń, która pokrywa się z powierzchnią graniczną naprężeń dla poziomu wyężenia w według definicji probabilistycznej [7].

Powierzchnię graniczną naprężeń wyrazimy analitycznie przy użyciu układu walcowych niezmienników naprężenia σ_A , σ_D , ω_σ .

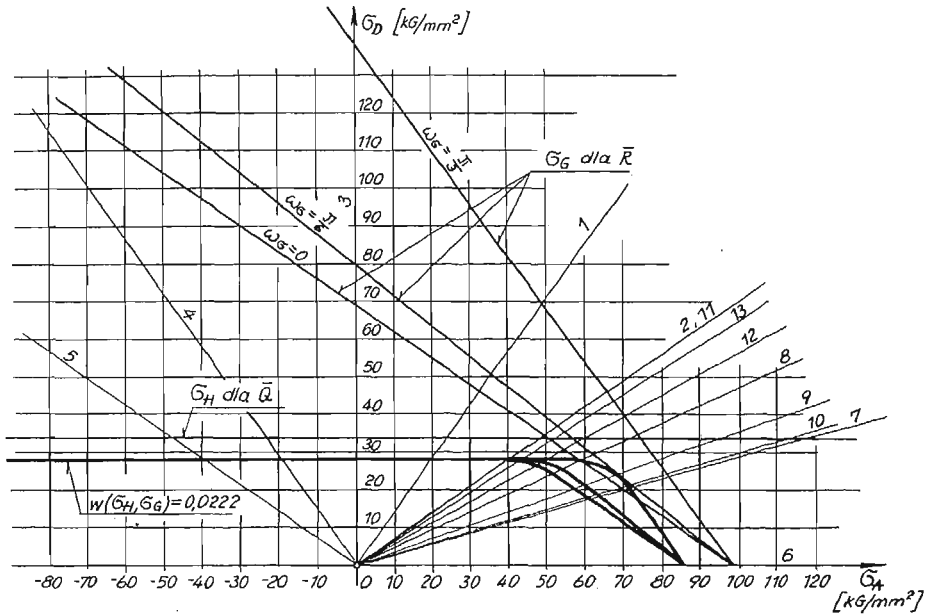
Walcowym układem niezmienników względnie współrzędnych w przestrzeni naprężeń nazywa się następującą transformację naprężeń głównych:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_A &= \sqrt{\frac{1}{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \sigma_D &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \\ \omega_\sigma &= \arcsin \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \sigma_D} = \arctg \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{3} \sigma_1 - \sigma_A}. \end{aligned}$$

Zapis analityczny warunku plastyczności i warunku wytrzymałości we współrzędnych walcowych jest następujący:

$$(3.4) \quad \sigma_H = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_D, \quad \sigma_G = \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_A + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_D \cos \omega_\sigma,$$

a interpretację geometryczną podaje rys. 2.



Rys. 2

Ślady przecięcia powierzchni granicznej z pękiem płaszczyzn przechodzących przez oś σ_A dla różnych kątów ω_σ dają proste σ_H dla warunku plastyczności i proste σ_G dla warunku wytrzymałości.

Wprowadzamy parametr t :

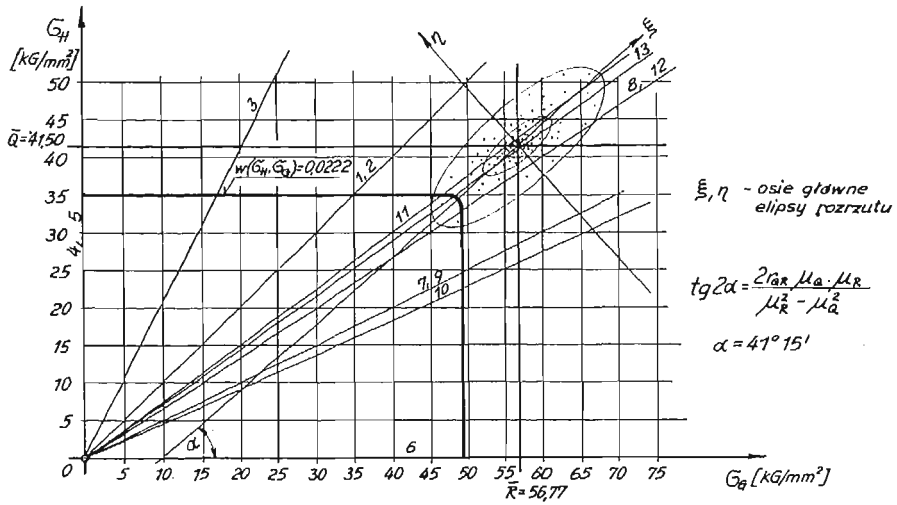
$$(3.5) \quad t = \frac{\sigma_D}{\sigma_A}$$

i przyporządkowujemy każdej prostej drodze obciążenia wychodzącej z punktu początkowego $\sigma_A = 0, \sigma_D = 0$ określoną wartość tego parametru. A zatem przy ustalonym kącie ω_σ mamy również linię prostą na płaszczyźnie naprężeń zastępczych σ_H, σ_G . Jej równanie uzyskujemy ze wzoru (3.4):

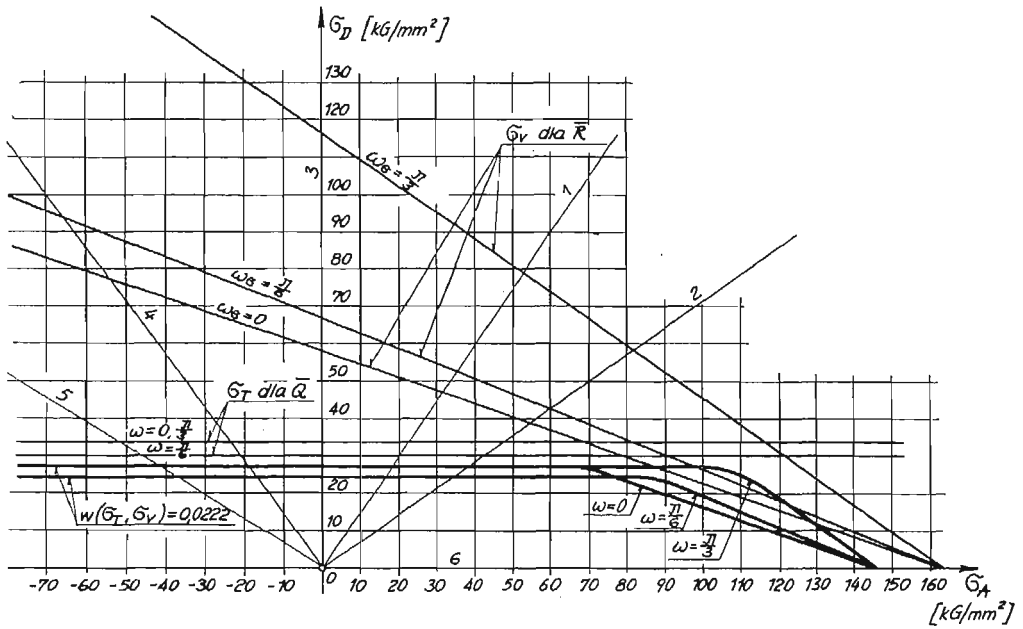
$$(3.6) \quad \sigma_G = \left(\frac{\sqrt{2}}{3t} + \frac{2}{3} \cos \omega_\sigma \right) \sigma_H,$$

co obrazuje rys. 3.

Analogicznie, przy założeniu innych warunków wytrzymałościowych można zbudować inne warianty powierzchni granicznych w przestrzeni naprężeń głównych i pęku prostych na płaszczyźnie naprężeń zastępczych.



Rys. 3



Rys. 4

Na przykład dla kombinacji warunku plastyczności Treski-Guesta i warunku wytrzymałości St Venanta:

$$(3.7) \quad \sigma_T = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_V = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

otrzymuje się proste proporcjonalnego obciążenia na płaszczyźnie naprężeń zastępczych wg wzoru:

$$(3.8) \quad \sigma_V = \left[\frac{1-2\nu}{\sqrt{2}t} + (1+\nu)\cos\omega_\sigma \right] \frac{\sigma_T}{\frac{3}{2}\cos\omega_\sigma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega_\sigma}.$$

Warunek analogiczny do (3.2):

$$(3.9) \quad w(\sigma_T, \sigma_V) = \text{const}$$

określa odpowiednią powierzchnię graniczną w przestrzeni naprężeń, co obrazuje rys. 4.

4. Ustalenie poziomu wytyżenia

Wykresy $w = \text{const}$ na rys. 2, 3, 4 wykonane są dla ustalonego konkretnego poziomu wytyżenia $w = 2,22 \%$ (tabl. 2).

Różnice krzywoliniowych wykresów granicznych w stosunku do linii łamanych wynikających z deterministycznych «zjednoczonych» hipotez byłyby inne dla niższych lub wyższych poziomów wytyżenia.

Wartość $2,22 \%$ obliczono przyjmując, że dla jednoosiowego stanu naprężenia argument dystrybuanty wynosi 35 kG/mm^2 , a zatem:

$$(4.1) \quad w = P(Q < k^*, R < k^*) = 1 - \int_{k^*}^{\infty} \int_{k^*}^{\infty} f(Q, R) dQ dR = 0,0222$$

dla $k^* = 35 \text{ kG/mm}^2$ i $f(Q, R)$ wg wzorów (2.1), (2.2), (2.3), (2.4).

Przyjęta wartość k^* jest nieco mniejsza niż normatywna minimalna granica plastyczności $Q_{\min} = 36 \text{ kG/mm}^2$ dla stali 18G2A i grubości 4–16 mm, ale większa niż tzw. naprężenie graniczne $K = 30 \text{ kG/mm}^2$ (dla metody obliczeń uwzględniającej współczynniki przeciążenia) i większa niż naprężenie dopuszczalne $k = 25 \text{ kG/mm}^2$ (określone z zastosowaniem pełnego współczynnika bezpieczeństwa). Wartość k^* ma znaczenie przykładowe. Racjonalne, obiektywne jej wyznaczenie wymagałoby sprecyzowania przeznaczenia konstrukcji i kosztu awarii oraz zastosowania metod optymalizacyjnych teorii bezpieczeństwa [8].

Istotną i ważną rzeczą, którą szczególnie chcemy podkreślić, jest, że wytyżenie $w = 2,22 \%$ zostało obliczone wg (4.1) po podstawieniu we wzorze (1.3) równych wartości:

$$(4.2) \quad \sigma_H = \sigma_G = k^*,$$

co odpowiada punktowi położonemu na prostej nachylonej pod kątem 45° względem osi układu naprężeń zastępczych (rys. 3). Równość naprężeń zastępczych (4.2) jest tu konieczna, bo przy jednoosiowym stanie naprężenia wynika ona z definicji naprężenia zastępczego.

Natomiast jeślibyśmy określali wadliwość, to możemy ustalić dowolne proporcje Q_{\min} i R_{\min} i na ogół ustala się:

$$(4.3) \quad Q_{\min} \neq R_{\min},$$

bowiem racjonalne podejście do sprawy ustalenia nominalnych wartości Q_{\min} i R_{\min} w świetle pracy [3] polega raczej na tym, by zrównać częstość występowania braków

Tablica 2. Numeryczne wyliczenie granicznych tensorów naprężenia dla $w(\sigma_H, \sigma_G) = \text{const}$

Lp.	Stan naprężenia										$t = \frac{\sigma_D}{\sigma_A}$	$\sigma_G = \left(\frac{\sqrt{2}}{3t} + \frac{2}{3} \cos \omega_\sigma \right) \sigma_H$		$w(\sigma_H, \sigma_G)$
	Naprężenie główne			Współrzędne walcowe			Wzór ogólny	Wartość σ_H (kG/mm ²)	Wartość σ_G (kG/mm ²)					
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_A	σ_D	ω_σ								
1.	σ	0	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$	0°	$\sigma_G = \sigma_H = k^*$	35,00	35,00	0,0222				
2.	σ	σ	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$	60°	$\sigma_G = \sigma_H$	35,00	35,00	0,0222				
3.	σ	0	$-\sigma$	0	$\sqrt{2}\sigma$	30°	$\sigma_G = \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_H$	35,00	20,20	0,0222				
4.	0	0	$-\sigma$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$	60°	$\sigma_G = 0$	35,00	0	0,0222				
5.	0	$-\sigma$	$-\sigma$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$	0°	$\sigma_G = 0$	35,00	0	0,0222				
6.	σ	σ	σ	$\sqrt{3}\sigma$	0	dowolne	$\sigma_G = \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_A$	0	49,57	0,0222				
7.	σ	σ	$\frac{1}{2}\sigma$	$\frac{5}{2\sqrt{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{1}{6}}\sigma$	60°	$\sigma_G = 2\sigma_H$	24,75	49,50	0,0222				
8.	σ	σ	$\frac{1}{4}\sigma$	$\frac{9}{4\sqrt{3}}\sigma$	$\frac{6}{4}\sigma$	60°	$\sigma_G = 1,5\sigma_H$	33,00	49,50	0,0222				
9.	σ	$\frac{1}{2}\sigma$	$\frac{1}{2}\sigma$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{1}{6}}\sigma$	0°	$\sigma_G = 2\sigma_H$	24,75	49,50	0,0222				
10.	σ	$\frac{9}{16}\sigma$	$\frac{9}{16}\sigma$	1,23 σ	0,36 σ	0°	$\sigma_G = 2,287\sigma_H$	21,60	49,50	0,0222				
11.	σ	$\frac{1}{4}\sigma$	$\frac{1}{4}\sigma$	$\frac{3}{2\sqrt{3}}\sigma$	$\sqrt{\frac{6}{4}}\sigma$	0°	$\sigma_G = \frac{4}{3}\sigma_H$	35,00	46,70	0,0222				
12.	σ	$\frac{1}{3}\sigma$	$\frac{1}{3}\sigma$	$\frac{5}{3\sqrt{3}}\sigma$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$	0°	$\sigma_G = 1,5\sigma_H$	33,00	49,50	0,0222				
13.	σ	0,28 σ	0,28 σ	0,90 σ	0,59 σ	0	$\sigma_G = 1,387\sigma_H$	34,70	48,10	0,0222				

o zaniżonym Q lub R , a uzyskuje się to wtedy, gdy Q_{\min} i R_{\min} są kwantylami tego samego rzędu rozkładów brzegowych, czyli

$$(4.4) \quad Q_{\min} = \bar{Q} - \lambda\mu_Q, \quad R_{\min} = \bar{R} - \lambda\mu_R,$$

gdzie $\lambda = \text{const}$ jest standaryzowanym odchyleniem granicznym, będącym funkcją wadliwości parametrycznej.

Na zakończenie poruszymy jeszcze kwestię związku wytężenia z bezpieczeństwem. Otóż uważamy, że nawet w najprostszym jednorodnym polu naprężeń, działającym w elemencie konstrukcyjnym, nie są to pojęcia ściśle z siebie wynikające. Bowiem ten sam element projektowany dla wielu powtarzalnych budowli, mających pracować w tych samych warunkach, narażony bywa w rzeczywistości na niekoniecznie takie same obciążenia. Trzeba więc zrezygnować z postulatu stałości naprężenia i analizować bezpieczeństwo traktując także obciążenia jako zmienną losową.

Literatura cytowana w tekście

1. А. М. ДЛИН, *Математическая статистика в технике*, Советская Наука, Москва 1958.
2. Z. MENDERA, *Wytężenie spoiny czolowej w połączeniach stali konstrukcyjnej o podwyższonej wytrzymałości*, Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1964.
3. Z. MENDERA, *Korelacja cech wytrzymałościowych stali i jej wpływ na wadliwość*, Arch. Inżyn. Lądowej, 1966.
4. R. MROMLIŃSKI, *Konstrukcje aluminiowe*, Wyd. II, Arkady, Warszawa 1964.
5. J. MURZEWSKI, Z. MENDERA, *Yield surface of steel determined by semi-empirical method*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci., Techn., 7, 11 (1963).
6. J. MURZEWSKI, Z. MENDERA, *Wytrzymałość stali i żeliwa w ogólnym stanie naprężenia*, PAN i PZITB, Konstrukcje stalowe w budownictwie i mostownictwie, Księga pokonferencyjna, Arkady, Warszawa 1960, 243.
7. J. MURZEWSKI, *A probabilistic theory of plastic and brittle behaviour of quasi-homogeneous materials*, Arch. Mech. Stos., 2, 12 (1960), 203.
8. J. MURZEWSKI, *Wprowadzenie do teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, PWN, Warszawa 1963.
9. J. RYŚ, *Zależność statystyczna R_p i a_5 od składu chemicznego w stalach konstrukcyjnych węglowych wyższej jakości*, Arch. Hutn., 2, 4 (1961), 147.
10. Н. В. СМЕРНОВ, Л. Н. ВОЛШЕВ, *Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения*, АН СССР, Москва 1962.
11. W. WIERZBIŃSKI, *Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych*, PWN, Warszawa 1961.

Резюме

КОРРЕЛЯЦИЯ ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ И НАПРЯЖЕННОСТЬ МАТЕРИАЛА

Для конструкционной стали предполагается двумерное, нормальное распределение предела текучести Q и предела прочности R , $f(Q, R)$ и определяются все пять параметров этого распределения, а именно: средние значения \bar{Q} и \bar{R} , среднее отклонение μ_Q и μ_R , а также коэффициент корреляции r_{QR} — с использованием статистического анализа.

Статистический анализ проводился на основе результатов испытаний на растяжение 874 образцов, случайно вырезанных из листов низколегированной, марганцево-кремниевой стали толщиной 6 мм.

Полученные результаты дают возможность определить предел разрушения при одноосном напряженном состоянии, понимаемый как объединение (в смысле теории вероятности) предела пластичности Q и предела прочности R для заданного уровня натуги.

Натуга понимается как вероятность и может быть выражена при помощи двумерных функций распределения предела текучести и предела прочности, на основе формулы (4.1).

Понятие предела разрушения обобщается на случай сложного напряженного состояния. Это приводит к граничным поверхностям, построенным для заданного уровня натуги 2,22% и для комбинации условий пластичности и прочности Губера-Мизеса-Генки и Галилея, а затем Треска и Сен-Венана.

Далее, уточняется взаимосвязь понятия натуги в вероятностном смысле и понятия прочности употребляемого при статистическом контроле качества.

S u m m a r y

THE CORRELATION OF STRENGTH PROPERTIES AND MATERIAL UNSERVICEABILITY

Two dimensional normal distribution of yield limit Q , and cleavage limit R , $f(Q, R)$, has been assumed for structural steel. A set of five parameters of the distribution has been found by means of statistical analysis, namely:

mean values \bar{Q} and \bar{R} , mean deflection μ_Q and μ_R as well as the correlation coefficient r_{QR} .

The statistical analysis was carried out on the basis of 874 test specimens cut out from low alloy manganese silicon steel sheet 6 mm thick.

The results allow to define a failure limit in uniaxial stress meant as an alternative of yield limit Q and cleavage limit R (in probabilistic meaning) for given unserviceability level.

The unserviceability is considered as probability and may be expressed with the help of the cumulative function of the two-dimensional yield limit and cleavage distribution by the formula (4.1). The definition of the failure limit is generalized for three-axial stress states and limit surfaces are derived for the given unserviceability level 2.22% and for the combination of either Huber-Mises-Hencky and Galileo or Tresca and St. Venant yield and fracture conditions.

Further a relation between unserviceability in probabilistic meaning and defectiveness as applied in statistical control of quality has been defined.

WYMIANA MASY Z POWIERZCHNI KUL I KROPEL

JAN JASIEWICZ (WARSZAWA)

Wstęp

Intensyfikacja i efektywność licznych procesów wymiany masy i ciepła we współczesnej energetyce klasycznej i jądrowej, przemyśle chemicznym, artykułów spożywczych, preparatów leczniczych, materiałów budowlanych, przetwórstwie ropy naftowej itp. jest warunkowana zjawiskami przebiegającymi w dwufazowych układach «cząsteczka-płyn». Cząsteczki substancji rozproszone w ośrodku ciągłym, zawieszona w nim lub poruszająca się mogą posiadać poza nielicznymi wyjątkami kształt zupełnie dowolny i przypadkowy. Jednakże z racji złożonych zjawisk występujących na ich powierzchniach przyjmuje się ich kształt jako kulisty, co pozwala w niektórych przypadkach na teoretyczne ujęcie zagadnienia i ułatwia uogólnienie wyników.

Z bardzo licznych zastosowań przemysłowych układów «cząsteczki-płyn» wymienić należy: transport pneumatyczny materiałów sypkich, suszenie rozdrobnionych ciał stałych i zawiesin, spalanie paliw stałych i ciekłych, chłodzenie wody obiegowej w siłowniach, nawilżanie gazów, sublimacje cząstek stałych w strumieniu gazu, rozpuszczanie ciał stałych w cieczy, zagęszczanie roztworów itp. Większość wspomnianych procesów przebiega w warunkach konwekcji wymuszonej, przy czym opływ poszczególnych cząstek odbywa się w zakresie liczb Reynoldsa: $Re = 1-1000$.

Atrakcyjność tych układów wynikająca ze wzrostu współczynników wymiany masy w miarę zmniejszania się cząsteczek oraz wzrostu powierzchni kontaktujących ze sobą faz, co prowadzi do skrócenia czasu procesu, skłoniła do podjęcia intensywnych badań nad poznaniem mechanizmów przenoszenia masy i ich ilościowego ujęcia. Badania nad określeniem współczynników wymiany masy zapoczątkowane w latach trzydziestych prowadzone są w dwóch zasadniczych kierunkach:

- 1) badania nad pojedynczymi cząstkami ciał stałych lub cieczy (krople),
- 2) studia i badania przy makroskopowej analizie zjawisk wymiany masy i ciepła w układach «cząsteczki-płyn».

Do grupy pierwszej należy również zaliczyć niniejsze opracowanie, sporządzone na podstawie dostępnej autorowi literatury, zawierające krótkie informacje o dotychczas przeprowadzonych pracach doświadczalnych i teoretycznych nad określeniem współczynników wymiany masy na powierzchni kul i kropeł.

Wykaz oznaczeń

- Gr liczba Grashofa,
Pe liczba Pecleta ($Pe = Sc \cdot Re$),

Re liczba Reynoldsa,
 Sc liczba Schmidta,
 Sh liczba Sherwooda,
 Sh_m liczba Sherwooda, wartość średnia na całej powierzchni,

$$j_m = \frac{Sh_m}{Re \cdot Sc^{1/3}} \text{ moduł Colburna wymiany masy.}$$

U w a g a. Wymiarem charakterystycznym przy określaniu liczb Grashofa, Reynoldsa, Sherwooda i Pecleta jest średnica kuli.

1. Równania wymiany masy

Wymiana masy z rozpuszczającą się, sublimującą lub parującą cząsteczką do otaczającego płynu może odbywać się na drodze dyfuzji molekularnej, dyfuzji wywołanej konwekcją naturalną, względnie konwekcją wymuszoną lub wzajemnej kombinacji tych trzech zjawisk równocześnie. Nadmienić jednakże należy, że w większości zastosowań układów cząsteczka-płyn o szybkości wymiany masy decyduje konwekcja wymuszona.

W warunkach swobodnej i wymuszonej konwekcji równanie bezwymiarowego współczynnika wymiany masy będzie opisane następującą ogólną zależnością

$$Sh_m = f_1(Gr, Re, Sc).$$

W przypadkach układów o małych wymiarach cząstek i niewielkiej różnicy gęstości płynu w bezpośredniej bliskości cząsteczki i w pewnej od niej odległości (w warstwie przyściennej i poza nią) dopuszczalne jest pominięcie wpływu konwekcji naturalnej na intensywność wymiany masy. Według GARNERA i KEELY'ego [13] przy opływie kul wpływ swobodnej konwekcji może być pominięty, gdy

$$Re \geq 0.4 \cdot Gr^{1/2} \cdot Sc^{-1/6}.$$

Spełnienie tego warunku pozwala na zapisanie równania bezwymiarowego współczynnika wymiany masy w sposób następujący:

$$Sh_m = f_2(Re, Sc).$$

W przypadkach bardzo małych cząsteczek umieszczonych w nieruchomym i nieskończenie dużym ośrodku mechanizm wymiany masy odbywać się będzie wyłącznie na drodze dyfuzji molekularnej. LANGMUIR [23] dysponując danymi doświadczalnymi MORSE'go [25] z jego badań nad sublimacją małych kulek jodu uzasadnił na drodze teoretycznej, że w tych warunkach bezwymiarowy współczynnik wymiany masy zbliża się do wartości równej 2 przy wartościach liczby Reynoldsa dążących do zera. Podobny wynik został również podany przez FUCHSA [9]:

$$\lim Sh_m = 2, \quad \text{gdy} \quad Re \rightarrow 0.$$

Wzór ten wyprowadzony podobnie jak w przypadku wymiany ciepła stosuje się w przypadku wymiany masy dla dyfuzji ekwimolarnej, a przy dyfuzji jednokierunkowej (sublimacja, parowanie itd.) tylko przy małych koncentracjach rozpraszanego składnika.

Poniżej przedstawiono chronologicznie wyniki ważniejszych dotychczasowych prac nad określeniem średnich współczynników wymiany masy na powierzchni kul i kropeł przy niewielkich różnicach stężeń czynnika dyfundującego pomiędzy strumieniem płynu a powierzchnią międzyfazową.

Wzajemne proporcje liczby prac doświadczalnych do teoretycznych wynikają z treści niniejszego opracowania.

2. Prace doświadczalne

Pierwszą klasyczną pracą traktującą o wymuszonym odparowaniu kropeł cieczy jest publikacja FRÖSSLINGA w 1938 r. [10]. Autor określając prędkość ubytku substancji z zawieszonych w strumieniu powietrza kropeł wody, aniliny, nitrobenzenu i naftalenu podał następujące równanie:

$$Sh_m = 2 + 0,552 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Badania przeprowadzono w zakresie $Re = 2-800$; wartości liczb Schmidta zawierały się w granicach $Sc = 0,6-2,56$.

Następną zanotowaną w literaturze pracą były badania WYRUBOWA (1946) [8]. Równanie dla $Re = 100-500$

$$Sh_m = 0,52 \cdot Re^{1/2}$$

powstało w wyniku badań swobodnego opadania kropeł o średnicy 2 mm w strumieniu powietrza, którego temperatura zmieniała się w granicach 40–100 °C.

W 1948 r. SOKOLSKI i TIMOFIEJEW [8] używając do badań kropeł wody o średnicy 1–2 mm, odparowujących w strumieniu powietrza, otrzymali dla zakresu $Re = 0,7-200$ następujące równanie:

$$Sh_m = 2 + 0,16 \cdot Re^{2/3}.$$

Dla wartości $Re > 200$ wyniki badań opisano równaniem:

$$Sh_m = 0,52 \cdot Re^{1/2},$$

identycznym z równaniem Wyrubowa.

Podobny wynik otrzymali w 1949 r. VAN KREVELEN i HOFTUZER [21] badając odparowanie wody do powietrza z powierzchni kul o średnicy 6–15 mm zwilżanych wodą. Dla $Re > 200$ otrzymali oni

$$Sh_m = 0,50 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

W wyniku pracy nad rozpuszczaniem kulek uformowanych z 2-naftolu ($C_{10}H_7OH$) w wodzie przy $Re = 30-500$ MC CUNE i WILHELM [7] w 1949 r. podali związek

$$Sh_m = 2 + 0,95 Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Badania odparowania różnych cieczy organicznych z powierzchni kuli o średnicy 0,88 mm w strumieniu powietrza o temperaturach zmieniających się od 20 do 500°C pozwoliły INGEBE [16] na podanie w 1950 r. równania:

$$Sh_m = 2 + 0,30(Re \cdot Sc)^{0,6} \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda_p},$$

gdzie λ_g oznacza przewodność cieplną powietrza, λ_p przewodność cieplną par.

Równanie to opisuje zjawisko parowania w zakresie $Re = 1000-1600$ i daje wyniki bardziej poprawne przy wyższych temperaturach powietrza, gdyż wysoka wartość wykładnika potęgowego, występującego w tym równaniu, uwzględnia równocześnie wpływ promieniowania cieplnego na szybkość wymiany masy.

W 1952 r. RANZ i MARSHALL [28] po zrealizowaniu obszernego programu badań parowania kropel wody, benzenu i aniliny ($Sc = 0,6-2,2$) w powietrzu przy $Re = 0-200$ podali równanie wymiany masy w następującej postaci:

$$Sh_m = 2 + 0,60 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

W tym samym roku RANZ [29] dokonał porównania wyników FRÖSSLINGA [10], MAISELA i SHERWOODA [24], RANZA i MARSHALLA [28] dotyczących badań nad wymianą masy z powierzchni kulistych i rozszerzył zakres zastosowania równania Ranzo-Marshalla:

$$Sh_m = 2 + 0,60 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Dla rozcieńczonych roztworów lub mieszanin, w których stężenie par cieczy jest dalekie od stanu nasycenia, równanie to jest słuszne dla $Re = 1-70\ 000$, i $Sc = 0,6-400$. Należy zwrócić uwagę, że do chwili obecnej równanie to uznane jest jako wzorcowe i służy wielu badaczom do oceny uzyskiwanych przez siebie wyników.

W 1953 r. AKSELRUD [1] przeprowadził badania nad rozpuszczaniem kul z saletry i soli kuchennej w wodzie. W wyniku doświadczeń przeprowadzonych przy $Re = 100-3000$ otrzymał równanie;

$$Sh_m = 0,82 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Autor otrzymał również podobne równanie w wyniku teoretycznej analizy zjawiska, co zostanie podane w następnej części opracowania. Interesującą pracę doświadczalną wykonali w 1954 r. HSU i zespół [15] nad wpływem rzeczywistego kształtu kropli cieczy na szybkość wymiany masy. Autorzy ci używając kapilar o różnej średnicy uzyskiwali różne kształty zawieszonych kropeł. Badania przeprowadzono przy użyciu *n*-heptanu ($Sc = 2,1$) odparowującego w strumieniu powietrza o temperaturze ok. $40^\circ C$, w zakresie $Re = 70-300$. Wymiarem charakterystycznym przy określaniu liczb Reynoldsa i Sherwooda była wartość max średnicy poziomej, która w czasie doświadczeń wynosiła ok. 1,8 mm. Dokonywano również pomiaru burzliwości strumienia powietrza, której średnia wartość wynosiła 1,3%, co wskazywało, że opływ bardzo niewiele odbiegał od opływu potencjalnego. Wyniki doświadczeń opisano następującym równaniem:

$$Sh_m = (2 + 0,556 \cdot Re^{0,56} \cdot Sc^{0,33}) \cdot [1 + 2,292(1 - \mu)][1 - 0,257(1 - h/d)].$$

W równaniu tym współczynnik kulistości kropli (dla kuli $\mu = 1$) oznaczono przez $\mu = 6V/Fd$, gdzie V jest objętością kropli, F powierzchnią kropli, d_{max} średnicą poziomą, h wysokością kropli.

Analiza wyników badań wskazuje, że kształt kropli ma niewielki wpływ na szybkość wymiany masy. Uwidoczni się on dopiero przy silnym zdeformowaniu kropeł. Wzrost lub zmniejszenie stosunku h/d z wartości 1 o 0,4 powoduje odpowiednio zmniejszenie, względnie wzrost szybkości wymiany masy tylko o 10%.

Badania przeprowadzone w 1958 r. przez GARNERA i SUCLINGA [14] nad rozpuszczaniem kul kwasu benzoowego o średnicach $3''/8-3''/4$ w wodzie doprowadziły do równania:

$$Sh_m = 2 + 0,95 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Równanie to określone dla zakresu $Re = 30-700$ jest identyczne z równaniem podanym w 1949 r. przez Mc CUNE i WILHELMA [7].

GARNER i KEYE [13] podali w tym samym roku równanie, które wynikało z badań nad rozpuszczaniem kul z kwasu benzoowego w wodzie w zakresie $Re = 250-900$

$$Sh_m = 0,94 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Przeprowadzone w 1959 r. przez STEELE^A i GEANKOPLISA [31] badania rozpuszczania kul z różnych substancji organicznych o średnicy 1/2'' w wodzie doprowadziły do zależności w zakresie $Re = 100-10\,000$:

$$\begin{aligned} \text{dla kwasu cyjankowego: } & Sh_m = 0,945 \cdot Re^{0,475} \cdot Sc^{0,33}, \\ \text{dla kwasu benzoowego: } & Sh_m = 0,81 \cdot Re^{0,523} \cdot Sc^{0,33}, \\ \text{dla 2-naftolu: } & Sh_m = 0,725 \cdot Re^{0,448} \cdot Sc^{0,33}. \end{aligned}$$

Przyczyn rozbieżności wyników i trudności opisanie ich jednym równaniem należy poszukiwać w wartościach, przyjętych do obliczeń temperatur nominalnych (przyjęto temperaturę strumienia cieczy), mających zdecydowany wpływ na wartości liczb Schmidta.

Próby uogólnienia równań wymiany masy w ośrodkach gazowych dla kul na inne kształty geometryczne, jak półkule, stożki, krótkie powierzchnie walcowe, sześciiany itp. podjęli się w 1960 r. PASTERNAK i GAUVIN [27]. Podane przez nich równanie

$$Sh_m = 0,692 \cdot Re^{0,514} \cdot Sc^{0,33}$$

zalecane jest dla $Re = 500-5000$. Wymiarem charakterystycznym podobnie jak w poprzednich pracach jest średnica kuli, w przypadku innych kształtów oblicza się ją jako stosunek

$$l = F/U,$$

gdzie F jest całkowitym polem powierzchni przedmiotu, a U obwodem rzutu przedmiotu na płaszczyznę prostopadłą do kierunku przepływu strumienia.

Uzupełnieniem prac FRÖSSLINGA [10] i RANZ-MARSHALLA [28] w zakresie małych liczb Reynoldsa $Re = 0-6$ jest publikacja z 1962 r. APASZOWA i MAŁOWA [2].

Przeprowadzone przez nich badania nad parowaniem małych kropeł alkoholu i eteru etylowego, wody, benzyny, nafty oraz oleju napędowego w powietrzu o temperaturze 20-370°C doprowadziły do równania identycznego z [28]

$$Sh_m = 2 + 0,60 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

W 1963 r. SKALLAND i CORNISH [30] przeprowadzili badania wymiany masy z powierzchni sferoidów w strumieniu powietrza. Sferoidy o stosunku osi 1:1 do 3:1 wykonane zostały z naftalenu. Krótsza oś była skierowana równolegle do przepływającego strumienia powietrza. Dla zakresu $Re = 200-6000$ podano następującą zależność:

$$Sh_m = 0,74 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

Charakterystyczny wymiar liniowy był określony analogicznie jak w pracy PASTERNAKA i GAUVINA [27].

W cytowanych pracach liczba Schmidta została zdefiniowana następująco:

$$Sc = \nu_f/D,$$

gdzie ν_f jest współczynnikiem lepkości kinematycznej napływającego strumienia płynu, D dyfuzyjnością rozpraszanej substancji w rozpatrywanym ośrodku.

Dla przypadków wymiany masy w gazach (parowanie, sublimacja) wartości parametrów materiałowych: lepkości i dyfuzyjności określa się dla średniej temperatury powierzchni

i przepływającego strumienia gazu. Dopuszczalne jest również oznaczanie tych parametrów dla temperatury przepływającego gazu, gdyż ich ilościowe zmiany w funkcji temperatury są bardzo zbliżone, nie powodując istotnych zmian w wartości liczby Schmidta i bezwymiarowych równań wymiany masy.

W pracach nad rozpuszczaniem ciał stałych temperatura nominalna została przyjęta równa temperaturze strumienia cieczy. Zwrócić należy uwagę, że wobec dużych zmian wartości liczby Schmidta przy nieznacznych zmianach temperatury cieczy [31] konieczne jest w układach ciało stałe-ciecz niezwykle staranne określenie temperatury strumienia rozpuszczalnika. Wydaje się również, że wyniki badań prac [1, 7, 13, 14 i 31] dałyby się opisać jednym równaniem przy właściwym doborze temperatury nominalnej, której wartość, zależna od ciepła rozpuszczania poszczególnych substancji, różniłaby się od temperatury strumienia cieczy.

3. Prace teoretyczne

W dalszym ciągu przeglądu dotychczasowych prac zostaną podane równania, umożliwiające obliczenie średnich współczynników wymiany masy na powierzchniach kulistych, uzyskane na drodze teoretycznej analizy zjawiska. Liczba tych prac jest niezwykle skromna w porównaniu z liczbą publikacji dotyczących badań doświadczalnych.

W 1951 r. SZWEC [8] na drodze przybliżonego rozwiązania równań warstwy przyściennej, opartego na metodzie kolejnych przybliżeń, podał równanie opisujące wymianę masy na kuli dla niskich wartości Re (opływ bez oderwania):

$$Sh_m = 0,680 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

W 1953 r. AKSELRUD [1] z rozwiązania równań warstwy przyściennej metodą bilansową podał równania wymuszonej wymiany masy z powierzchni kuli dla opływu przy dwóch zakresach liczb Reynoldsa dla układów, w których liczba Schmidta $Sc > 1$:

$$Sh_m = 1,037 \cdot Pe^{1/3} \quad \text{dla} \quad Re < 1$$

oraz

$$Sh_m = 0,80 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3} \quad \text{dla} \quad 1 < Re < 10^4.$$

Dla opływu w obszarze $Re < 1$ przy wymianie masy z powierzchni kulistych w ośrodkach ciekłych BOWMANN i zespół w 1961 r. [4] na drodze liczbowego rozwiązania równania dyfuzji podali

$$Sh_m = 0,978 \cdot Pe^{1/3}.$$

a więc bardzo zbliżone do analitycznego rozwiązania Akselruda. W 1963 r. GRAFTON [12] korzystając z rozwiązania opływu kuli uzyskanego przez TOMOTIKĘ w 1936 r. otrzymał równanie dla wymiany masy konwekcji wymuszonej:

$$Sh_m = 0,95 \cdot Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}.$$

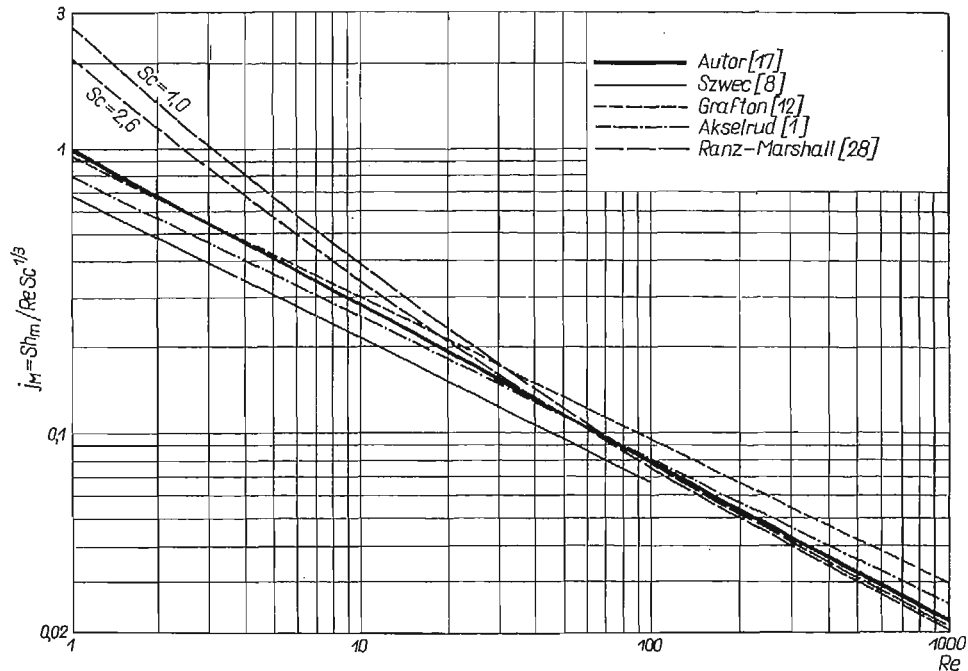
Aczkolwiek wyniki tej pracy odbiegają nieco od wartości doświadczalnych (rys. 1), tym niemniej stanowi ona interesującą próbę rozwiązania problemu wymiany masy na powierzchni kuli leżącej poza linią oderwania strumienia.

W 1965 r. autor niniejszego opracowania na drodze przybliżonego rozwiązania równań warstwy przyściennej otrzymał równanie opisujące wymianę masy na powierzchni kuli przy konwekcji wymuszonej w następującej postaci [17]:

$$Sh_m = 0,994 \cdot Re^{0,45} \cdot Sc^{0,33}$$

dla wartości liczb Schmidta $Sc = 0,6-2,6$. Porównanie otrzymanego wyniku z danymi doświadczalnymi potwierdza jego słuszność w zakresie liczb Reynoldsa $Re = 60-1000$.

Na rysunku 1 porównano wyniki określonych teoretycznie średnich bezwymiarowych współczynników wymiany masy na powierzchni kuli uzyskanych przez AKSELRUDA [1], GRAFTONA [12], SZWECA [8] i autora [17] na tle wyników doświadczalnych opisanych równaniem Ranz-Marshalla [28]. Porównano bezwymiarowe moduły Colburna j_m wymiany masy. Rozbieżności wyników w obszarze niskich wartości liczb Reynoldsa wynikają z uwzględnienia w pracach teoretycznych wymiany masy jedynie na drodze konwekcji wymuszonej.



Rys. 1. Porównanie wyników prac teoretycznych z doświadczeniami

4. Wpływ parametrów mechanicznych i hydrodynamicznych na szybkość wymiany masy

Oprócz prac nad określeniem współczynników wymiany masy różnych substancji z powierzchni kulistych zostały również przeprowadzone badania nad wpływem burzliwości strumienia, drgań cząsteczek i cyrkulacji cieczy wewnątrz kropeł na szybkość parowania bądź sublimacji. Powszechnie wiadome jest, że wzrost stopnia burzliwości strumienia powodować będzie intensyfikację wymiany masy lub ciepła, jednakże oddziaływającym w różnym stopniu w zależności od rodzaju opływu. W 1950 r. MAISEL i SHERWOOD [24]

podczas badań parowania na kulach, zwilżanych wodą i benzenem, przy opływie w zakresie $Re = 2000-50\,000$ podali pierwsze jakościowe wyniki wpływu turbulencji strumienia na szybkość wymiany masy. W czasie pomiarów zwiększano stopień burzliwości od 3,5% do 24%, szybkość parowania wzrastała o 18% przy $Re = 2440$ i o 25% przy $Re = 19\,500$. Wyniki pomiarów wskazywały na wyraźne zmniejszanie wpływu burzliwości na intensyfikację wymiany masy przy malejących liczbach Reynoldsa. Stwierdzono ponadto, że wpływ burzliwości strumienia może być całkowicie pominięty przy cząsteczkach o średnicy mniejszej od 2 mm.

Badania przeprowadzone w 1958 r. przez BROWNA z zespołem [5] wykazały brak wyraźnego wpływu burzliwości na intensywność wymiany masy przy $Re < 1000$, jeżeli stopień turbulencji nie przekraczał 15%. Podobny wynik uzyskał w tym samym roku van der HEGGE ZIJNEN [35] na podstawie badań nad wymianą ciepła. Przeprowadzając badania przy $Re = 60$ i 580 stwierdził, że w tym obszarze liczb Reynoldsa wzrost stopnia turbulencji do 15% nie ma wpływu na intensyfikację przejmowania ciepła na powierzchni kulistej.

W 1962 r. VENEZIAN, CRESPO i SAGE [34] po przeprowadzeniu badań nad parowaniem z porowatej kuli o średnicy 1" zwilżanej *n*-oktanem oraz badań nad wymianą ciepła z kuli metalowej o tej samej średnicy w zakresie $Re = 1800-7500$ potwierdzili dotychczasowe wyniki. W doświadczeniu zmieniano stopień burzliwości strumienia od 1,3% do 15%. Badania wykazały, że dla $Re < 2000$ wpływ burzliwości jest pomijalny przy analizie wymiany masy i ciepła, jeżeli jej intensywność jest niższa od 10-12%.

Inną grupę badań stanowiły doświadczenia nad określeniem wpływu wymuszonych drgań cząsteczek, lub kropeł cieczy na wzrost szybkości parowania bądź wymiany ciepła z ich powierzchni.

Publikacje KUBANSKIEGO [18] z 1952 r., TESSINA i JAKOBA [33] z 1953 r., MARTINELLIEGO i BOELTERA [26] oraz ANANTARAYANUNA i RAMANANCHANDRANA [13] z 1958 r. dotyczące wymiany ciepła wskazują, że drgania kul nie mają wpływu na wzrost współczynników przejmowania ciepła, jeżeli liniowa prędkość wibracji jest niższa od prędkości strumienia gazu. W 1963 r. CONSTAN i CALVERT [6] potwierdzili to dla przypadku wymiany masy, przeprowadzając badania na drgających kulkach naftalenu i kroplach cieczy. Autorzy ci wskazali również na brak wpływu cyrkulacji cieczy wewnątrz kropli na szybkość wymiany masy przez parowanie.

Na nieistotny wpływ cyrkulacji wewnątrz kropeł cieczy jednoskładnikowych przy parowaniu wskazali również THORSEN i TERJESEN w 1962 r. [32], przypisując wzrost współczynników wymiany masy jedynie silnej turbulencji hydrodynamicznej.

Zwrócić należy uwagę, że przy analizie zjawisk wymiany masy przy opływach w tym samym obszarze liczb Reynoldsa w układach ciecz-ciecz (lub ciało stałe-ciecz) nie należy pomijać cyrkulacji wewnątrz kropeł, drgań cząsteczek jak również turbulencji przepływającej cieczy. Na istotny wpływ cyrkulacji wewnątrz kropeł w tych układach na szybkość wymiany masy wskazują prace KISZYŃIEWSKIEGO i KORNIENKI [19] oraz LEWICZA [22], który równocześnie zwraca uwagę na wpływ burzliwości strumienia cieczy intensyfikujący wymianę masy. Publikacja FIKLISTOWA i AKSELRUDA [11] omawia istotny wpływ drgania cząstek na ich szybkość rozpuszczania się w cieczach.

5. Wnioski

Analiza materiału zawartego w cytowanej literaturze pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

1. Dwojaka forma zapisu równań kwalifikuje je do podziału na dwie grupy. Do grupy pierwszej zaliczyć należy równania o postaci:

$$Sh_m = 2 + M \cdot Re^m \cdot Sc^n.$$

Opis wyników doświadczeń powyższym typem równania wynikał z przyjęcia przez autorów założenia o addytywności molekularnej i wymuszonej wymiany masy.

Założenie to, aczkolwiek wątpliwe, jest do przyjęcia w zakresie małych liczb Reynoldsa. Przy większych wartościach Re o wymianie substancji decyduje konwekcja wymuszona. Opis wyników równania drugiej grupy w postaci:

$$Sh_m = M \cdot Re^m \cdot Sc^n$$

jest formalnie i z fizycznego punktu widzenia bardziej uzasadniony⁽¹⁾.

2. Rozbieżności wartości M , m i n w poszczególnych równaniach doświadczalnych nie mogą dyskwalifikować żadnego z nich. Różnice wynikają z możliwości badawczych każdego z autorów, dokładności przeprowadzenia pomiarów i sposobu opisu wyników.

3. Wobec zbieżności równań Frösslinga, Ranz-Marshalla i Apaszowa-Malowa oraz przeprowadzonej przez Ranza i innych autorów analizy dużej liczby wyników z badań nad wymianą masy z powierzchni kulistych, uznać należy równanie Ranz-Marshalla za najbardziej reprezentatywne dla przypadków, gdy $Re = 0-70\ 000$ i $Sc = 0,6-400$.

4. Dopuszczalne jest zastąpienie kształtu kropli kształtem kulistym. Zgodnie z wynikami pracy Hsu, Sato i Sage tak przeprowadzone obliczenia wymiany masy nie będą obciążone błędem większym niż $\pm 10\%$, jeżeli stosunek wysokości kropli do jej średnicy poziomej zawierać się będzie w granicach 0,6-1,4.

5. W świetle badań Pasternaka-Gauwina i Skalland-Cornisha równania wymiany masy dla kul dadzą się również zastosować do ciał dowolnych kształtów o niewielkich wymiarach pod warunkiem właściwego doboru liniowego wymiaru charakterystycznego.

6. Wartości współczynników wymiany masy uzyskane z równań teoretycznych mieszczą się w obszarze przeciętnych wartości otrzymanych doświadczalnie i co wykazano na wykresie rys. 1 głównie dla wyższych wartości liczb Reynoldsa.

7. Wzrost burzliwości strumienia płynu powoduje intensyfikację wymiany masy, jednakże przy opływach powierzchni kulistych strumieniem gazu przy $Re < 1000$ nie ma wpływu, o ile stopień turbulencji nie przekracza 15 %.

8. Drgania kropel lub cząstek nie powodują zmiany współczynników wymiany masy, jeżeli liniowa prędkość wibracji nie przekracza prędkości strumienia gazu.

⁽¹⁾ Próbą opisaną wyników doświadczalnych w szerokim zakresie liczb Reynoldsa jest publikacja z 1963 r. KINARDA z zespołem [20], w której liczba Sherwooda stanowi sumę czterech wyrazów: pierwszy jest stałą, drugi uwzględnia konwekcję swobodną na całej powierzchni kuli, trzeci udział konwekcji wymuszonej na części nawietrznej i czwarty udział konwekcji wymuszonej poza linią oderwania.

9. Cyrculacja wewnątrz kropeł cieczy jednoskładnikowych nie ma wpływu na szybkość parowania substancji.

Literatura cytowana w tekście

1. Г. А. АКСЕЛРУД, Журнал физ. химии, 10, 27 (1953).
2. M. APASZOW, R. MALOW, ARS — Journal, 3, 32 (1962).
3. R. ANANTARAYANAN, A. RAMANANCHANDRAN, Trans. ASME, 80 (1958), 1426.
4. C. W. BOWMANN, D. M. WARD, A. I. JOHNSON, O. TRASS, The Canad. J. Chem. Eng., Febr. 1961, 9.
5. N. A. BROWN i inni, Ind. Eng. Chem. Data Series, 3 (1958), 263.
6. G. L. CONSTAN, Seymour Calvert, A.I.Ch.E. J. 1, 9 (1963).
7. L. K. McCUNE, R. H. WILHELM, Ind. Eng. Chem., 41 (1949), 1124.
8. N. A. FUCHS, *Evaporation and Droplet Growth in Gaseous Media*, Pergamon Press, London 1959.
9. Н. А. ФУКС, Журнал Техн. Физики, 4 (1934), 7.
10. N. FRÖSSLING, Gerl. Beitr. z. Geophysik, 52 (1938), 170.
11. И. Н. ФИКЛИСТОВ, Г. А. АКСЕЛРУД, Инж. физ. журнал, 1, 7 (1964), 45.
12. R. W. GRAFTON, Chem. Eng. Sci., 18 (1963), 1457.
13. F. H. GARNER, R. B. KEY, Chem. Eng. Sci., 9 (1958), 119.
14. F. H. GARNER, R. D. SUCLING, AIChE Journal, 4 (1958), 114.
15. N. T. HSU, K. SATO, B. H. SAGE, Ind. Eng. Chem., 46 (1954), 870.
16. R. D. INGEBO, Chem. Eng. Progr., 46 (1950), 131.
17. J. JASIEWICZ, Dysertacja doktorska, Warszawa 1965.
18. П. Н. КУВАНСКИЙ, Журнал тех. Физики, 22 (1952), 592.
19. М. Ц. КИШИНЕВСКИЙ, Т. С. КОРНЕНКО, Журн. прикл. химии, 36 (1963), 1869.
20. G. E. KINARD i inni, Brit. Chem. Engng., 8 (1963), 326.
21. D. W. VAN KREVELEN, P. J. HOFFIJZER, J. Soc. Chem. Eng., 68 (1949), 59.
22. В. Г. ЛЕВИЧ, *Физико-химическая гидродинамика*, Физматгиз, Москва 1959.
23. I. LANGMUIR, Phys. Rev., 12 (1918), 368.
24. D. S. MAISEL, T. K. SHERWOOD, Chem. Eng. Progr., 46 (1950), 131.
25. H. W. MORSE, Proc. Am. Acad. Arts Sci., 45 (1910), 363.
26. R. C. MARTINELLI, L. K. M. BOELTER, Proc. Fifth Int. Congr. Appl. Mech., 1958.
27. I. S. PASTERNAK, W. H. GAUVIN, The Canad. J. Chem. Eng., 38 (1960), 35.
28. W. E. RANZ, W. R. MARSHALL, Chem. Eng. Progr., 48 (1952), 141.
29. W. E. RANZ, Chem. Eng. Progr., 48 (1952), 247.
30. A. H. P. SKALLAND, A. R. H. CORNISH, AIChE, Journal, 9 (1963), 73.
31. L. R. STEELE, C. J. GEANKOPLIS, AIChE — Journal, 5 (1959), 178.
32. G. THORSEN, S. G. TERJESEN, Chem. Eng. Sci., 17 (1962), 137.
33. W. TESSIN, M. JAKOV, Trans. ASME, 75, (1953), 473.
34. E. VENEZIAN i inni, AIChE — Journal, 8 (1962), 383.
35. B. G. VAN DER HEGGE ZIJNEN, Appl. Sc. Res., A7 (1958), 205.

Резюме

МАССООБМЕН С ПОВЕРХНОСТИ ШАРОВ И КАПЕЛЬ

Работа является обзором главных результатов полученных до настоящего времени в области исследований массообмена на поверхностях отдельных шаров и капель. Даются эмпирические и теоретические уравнения для процессов испарения, сублимации или растворения, происходящих в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 0-1000$. Обсуждается также влияние механических и гидромеханических параметров на скорость обмена массы.

S u m m a r y

THE MASS TRANSFER FROM SPHERES AND DROPS SURFACES

The paper gives the survey of more important up to now made investigations in the field of mass transfer on single sphere and drops surfaces. Experimental and theoretical equations for evaporation processes, sublimation or dissolving in range of Reynolds number $Re = 0 - 100$ are given. The discussion of the influence of mechanical and hydrodynamical parameters on the mass transfer rate has been investigated.

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1966 r.

UPROSZCZONA ANALIZA STATECZNOŚCI PODŁUŻNEJ SZYBOWCA W LOCIE HOLOWANYM

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Loty holowane szybowców są obecnie szeroko stosowane. Dotychczas jednak zagadnienie stateczności szybowców w locie holowanym nie zostało w pełni rozwiązane. Istnieje zaledwie kilka prac związanych z tym zagadnieniem.

W roku 1933 F. JANIK [6] rozpatrywał obciążenia w locie holowanym szybowca. W pracy tej nie poruszał zagadnień stateczności. Określił konfigurację liny holowniczej przyjmując przybliżoną zmianę współczynników aerodynamicznych w funkcji kąta nachylenia liny nie popartą doświadczeniem.

W pracy [12] rozpatrywano stateczność szybowca holowanego na krótkim nieodkształcalnym «dyszlu».

Praca [1] zawiera szereg publikacji BRYANTA, BROWNA i SWEETINGA dotyczących stateczności latawców i szybowców w locie holowanym. Autorzy określając kąt holu (φ_1) rozpatrywali wyłącznie równowagę sił, pomijając równowagę momentów, co znacznie wpływa na wartości danych wyjściowych potrzebnych do obliczeń stateczności dynamicznej. Wprowadzając w równania ruchu pochodną momentu pochylającego względem zmiany prędkości pionowej m_w jak dla lotu swobodnego, nie uwzględniano zmian wynikających z holu. Zmiany te przy niektórych konfiguracjach są znaczne i mają wpływ na stateczność dynamiczną. W wymienionej pracy linę holowniczą traktowano jako nierozciągliwą.

S. NEUMARK w pracy [9] rozpatrywał konfigurację nierozciągliwej liny balonu w oparciu o dmuchania wykonane w r. 1934 w Instytucie Aerodynamicznym w Warszawie. W pracy [10] z r. 1963 rozpatruje on zagadnienia stateczności balonu na nierozciągliwej linie. Wyprowadza pochodne linowe i określa konfiguracje liny nierozciągliwej z pominięciem oporów tarcia. W przypadku holu szybowca zwis liny holowniczej jest mały i opory tarcia mogą być równorzędne z siłą aerodynamiczną normalną do liny i nie powinny być pomijane.

W niniejszej pracy rozpatrzono przypadek holu szybowca sztywnego (nieodkształcalnego) przez samolot (ciężki) znajdujący się w poziomym prostoliniowym locie ustalonym. Opierając się na pracach [9] i [10] określono konfiguracje rozciągliwej liny holowniczej z uwzględnieniem oporów tarcia. Rozpatrzono równowagę i stateczność statyczną podłużną szybowca w locie holowanym, określono zakresy kątów holu i współczynników siły nośnej możliwych do uzyskania w czasie holu.

Rozpatrując stateczność dynamiczną szybowca zastosowano teorię małych zakłóceń. Równania ruchu otrzymano w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami [1]. Pozwoliło to na określenie współczynników

równania charakterystycznego i zastosowanie kryteriów stateczności ROUTH-A-HURWITZA jak również obliczenie pierwiastków równania charakterystycznego metodą BAIRSTOWA.

W pracy nie uwzględniono dynamiki liny holowniczej jak również zakłóceń wynikających z nieustalonych ruchów samolotu. Zagadnienie rozwiązano metodą stosowaną przy rozważaniu stateczności w locie swobodnym [3, 4 i 11]. Pozwoliło to na wzajemną konfrontację wyników, odpowiadających lotowi swobodnemu i holowanemu oraz uprościło analizę.

Na podstawie obliczeń numerycznych wykonanych dla jednego z szybowców wyczynowych dokonano analizy stateczności. Zbadano jak wpływa na stateczność szybowca położenie względem samolotu holującego, prędkość holu, usytuowanie zaczepu holującego względem środka ciężkości szybowca i długość liny holowniczej.

Ważniejsze oznaczenia

$\alpha = \frac{dC_z}{d\alpha}$ [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej szybowca w zależności od kąta natarcia,
$\alpha_1 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H}$ [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej usterzenia w zależności od kąta natarcia usterzenia,
$\alpha_2 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta_H}$ [1/rad]	zmiana współczynnika siły nośnej usterzenia w zależności od kąta wychylenia steru wysokości,
C_{ma}	współczynnik momentu pochyłającego szybowiec, pochodzący od sił aerodynamicznych,
C_{mt}	współczynnik momentu pochyłającego szybowiec, pochodzący od liny holowniczej,
C_n, C_t	współczynniki aerodynamiczne siły normalnej i stycznej do liny określone w stosunku do jej średnicy i długości jednostkowej,
C_z	współczynnik aerodynamiczny siły nośnej,
C_x	współczynnik aerodynamiczny oporu,
d [m]	średnica liny holowniczej,
g [m/sek ²]	przyspieszenie ziemskie,
h_z [m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona pionowo wzgl. środka ciężkości,
$\bar{h}_1 = -\frac{dC_{ma}}{dC_z}$	zapas stateczności statycznej szybowca w locie swobodnym,
$\bar{h}_h = -\frac{dC_m}{dC_z}$	zapas stateczności statycznej szybowca w locie holowanym,
$\bar{h}_l = -\frac{dC_{ml}}{dC_z}$	zmiana zapasu stateczności statycznej szybowca wywołana holem,
I_y [kGm sek ²]	moment bezwładności szybowca względem osi poprzecznej,
k_z [m]	współrzędna zaczepu holowniczego szybowca mierzona poziomo względem środka ciężkości,
l_0, l_1 [m]	długość liny swobodnej i obciążonej,
l_a [m]	średnia cięciwa aerodynamiczna,
l_H [m]	odległość osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości szybowca,
$m_u, m_w, m_{\dot{w}}, m_q$	pochodne aerodynamiczne momentu pochyłającego względem zmiany: prędkości podłużnej, prędkości pionowej, prędkości zmiany kąta natarcia i prędkości kątowej pochylenia w postaci bezwymiarowej,
m [kG sek ² /m]	masa szybowca,
M [kG m]	moment pochyłający szybowca,

- n [kG/m] siła aerodynamiczna normalna do linii działająca na 1 m długości,
 P_n [kG] siła aerodynamiczna normalna do linii,
 P_t [kG] siła aerodynamiczna styczna do linii,
 P_x [kG] siła aerodynamiczna oporu,
 P_z [kG] siła aerodynamiczna wyporu (nośna),
 P_{xH} [kG] siła oporu aerodynamicznego usterzenia poziomego,
 P_{zH} [kG] siła nośna usterzenia poziomego,
 q [kG/m] ciężar jednostkowy metra bieżącego linii,
 Q [kG] ciężar szybowca,
 $Re = dV/\nu$ liczba Reynoldsa,
 S [m²] powierzchnia nośna skrzydeł szybowca,
 S_H [m²] powierzchnia nośna usterzenia poziomego,
 t [kG/m] siła aerodynamiczna styczna działająca na 1 m długości linii,
 t [sek] czas,
 T [kG] naciąg linii,
 T_1 [kG] siła pochodząca od linii, działająca na zaczepie szybowca,
 u [m/sek] zmiana prędkości poziomej,
 w [m/sek] zmiana prędkości pionowej,
 $U_1 = V$ [m/sek] prędkość lotu,
 x_s [m] odległość środka ciężkości od środka aerodynamicznego,
 x_1 [m] odległość pozioma między końcami linii holowniczej,
 x_{x_1}, x_{z_1} pochodne linowe poziomej składowej siły naciągu linii względem przesunięcia: poziomego i pionowego w postaci bezwymiarowej,
 x_u, x_w, x_q pochodne aerodynamiczne składowej poziomej siły aerodynamicznej względem zmian prędkości: poziomej, pionowej i kątowej pochylania w postaci bezwymiarowej,
 X_1 [kG] składowa pozioma naciągu siły przyłożona na zaczepie holowniczym szybowca działająca zgodnie z kierunkiem lotu,
 z_1 [m] odległość pionowa między końcami linii holowniczej,
 z_s [m] odległość pionowa środka aerodynamicznego od środka ciężkości,
 Z_H [m] odległość pionowa osi obrotu steru wysokości od środka ciężkości,
 Z_{x_1}, Z_{z_1} pochodne linowe pionowej składowej siły naciągu linii względem przesunięcia: poziomego i pionowego w postaci bezwymiarowej,
 Z_u, Z_w, Z_q pochodne aerodynamiczne składowej pionowej siły aerodynamicznej względem zmian prędkości: poziomej, pionowej i kątowej pochylania w postaci bezwymiarowej,
 Z'_1 [kG] składowa pionowa naciągu siły przyłożona na zaczepie holowniczym szybowca działająca, normalnie do kierunku lotu,
 α [rad] kąt natarcia szybowca,
 α_{zH} [rad] kąt zaklinowania usterzenia poziomego,
 β_H [rad] kąt wychylenia steru wysokości,
 $\varepsilon = 2C_z/\pi A_e$ [rad] kąt odchylenia strug spływających ze skrzydła,
 φ_1 [rad] kąt nachylenia linii holowniczej w stosunku do linii lotu mierzony na zaczepie szybowca,
 φ_0 [rad] kąt nachylenia linii holowniczej w stosunku do linii lotu mierzony na zaczepie samolotu,
 φ_P [rad] ograniczenie kąta holu ze względu na równowagę sił,
 φ_M [rad] ograniczenie kąta holu ze względu na równowagę momentów,
 λ [1/kG] współczynnik wydłużalności linii,
 A_e wydłużenie skrzydła szybowca,
 $\bar{\lambda} = \bar{\xi} \pm i\bar{\eta}$ pierwiastki równania charakterystycznego w postaci bezwymiarowej,
 $\kappa_H = S_H I_H / S I_a$ współczynnik efektywności usterzenia poziomego,

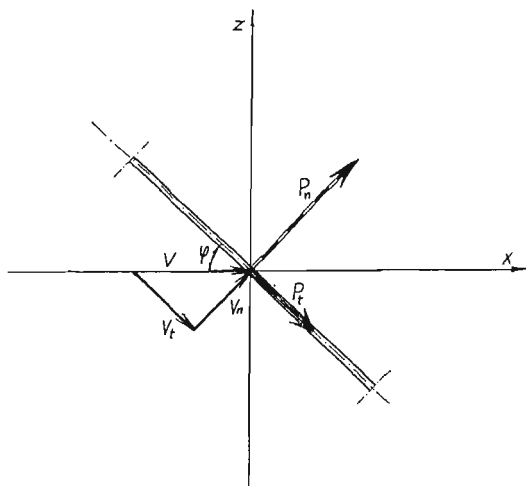
$\bar{\xi}$ współczynnik tłumienia w postaci bezwymiarowej,
 $\bar{\eta}$ częstość oscylacji w postaci bezwymiarowej,
 ρ [kGsek²/m⁴] gęstość powietrza.

2. Aerodynamika linii holowniczej

Do określenia konfiguracji linii holowniczej oprócz danych o ciężarze jednostkowym i własnościach sprężystych linii niezbędna jest znajomość sił aerodynamicznych. Ze względu na zmienny kąt nachylenia linii w stosunku do linii lotu należy określić zależność współczynnika siły nośnej C_{z1} i współczynnika oporu C_{x1} od kąta nachylenia linii φ .

Współczynnik oporu aerodynamicznego linii ustawionej prostopadle do przepływu powietrza ($\varphi = 90^\circ$) oznaczono przez C_n , a współczynnik oporu tarcia linii ustawionej równoległe w przepływie ($\varphi = 0$) oznaczono przez C_t .

Rozpatrzono siły aerodynamiczne działające na element linii o długości l i średnicy d nachylonej pod kątem φ do przepływu o prędkości V (rys. 1).



Rys. 1. Rozkład prędkości i sił aerodynamicznych działających na element linii o długości l i średnicy d

Siły aerodynamiczne określone przez współczynniki mają postać

$$P_n = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_n \sin^2 \varphi, \quad P_t = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_t \cos^2 \varphi.$$

Rozkładając siły P_n i P_t na kierunek normalny i styczny do przepływu otrzymano:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} P_{z1} &= P_n \cos \varphi - P_t \sin \varphi = \frac{1}{2} \rho l d V^2 (C_n \sin^2 \varphi \cos \varphi - C_t \sin \varphi \cos^2 \varphi), \\ P_{x1} &= P_n \sin \varphi + P_t \cos \varphi = \frac{1}{2} \rho l d V^2 (C_n \sin^3 \varphi + C_t \cos^3 \varphi). \end{aligned}$$

Siłę nośną działającą na element linii P_{z1} i siłę oporu P_{x1} określono za pomocą współczynników C_{z1} i C_{x1} :

$$(2.2) \quad P_{z1} = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_{z1}, \quad P_{x1} = \frac{1}{2} \rho l d V^2 C_{x1},$$

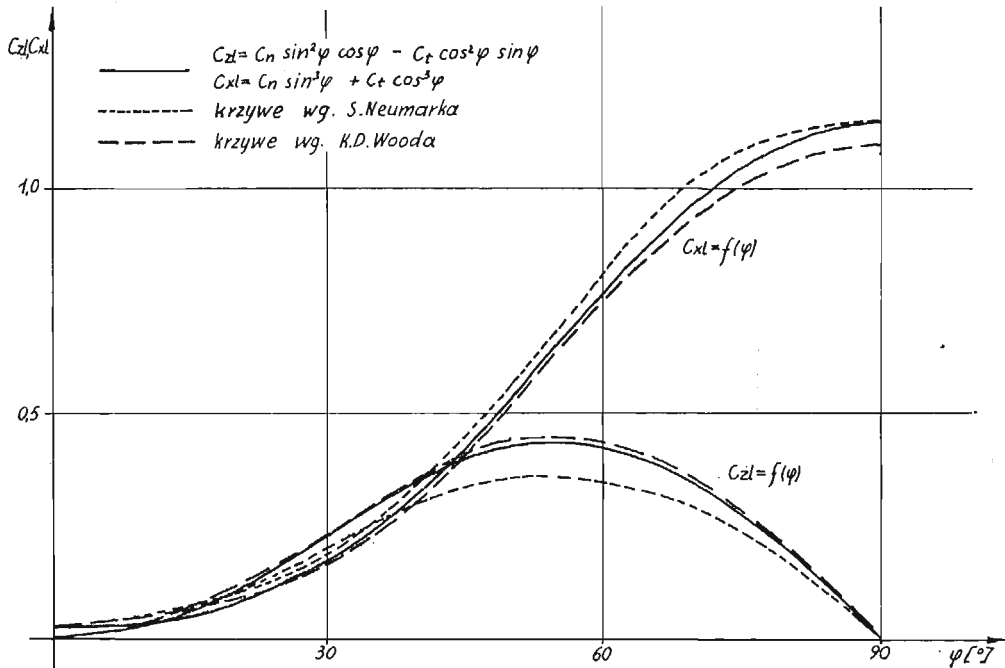
gdzie

$$(2.3) \quad \begin{aligned} C_{z1} &= C_n \sin^2 \varphi \cos \varphi - C_t \sin \varphi \cos^2 \varphi, \\ C_{x1} &= C_n \sin^3 \varphi + C_t \cos^3 \varphi. \end{aligned}$$

Wartości C_n i C_t dobrano tak, aby zależności (2.3) były zgodne z doświadczeniem [9 i 13] (por. rys. 2).

$$C_n = 1,15, \quad C_t = 0,035.$$

Na rysunku 2 krzywe oznaczone symbolem N zostały otrzymane przez S. NEUMARKA w czasie dmuchań lin balonowych w r. 1934 w Instytucie Aerodynamicznym w Warszawie [9]. Natomiast krzywe oznaczone symbolem W zostały podane przez K. D. WOODA [13].



Rys. 2. Doświadczalne i teoretyczne zależności aerodynamicznych współczynników siły nośnej i oporu w funkcji zmiany kąta pochylenia

Otrzymane zależności (2.3) na współczynniki aerodynamiczne mogą być stosowane dla lin holowniczych w całym zakresie prędkości stosowanych przy holu szybowców. Zakres liczb Reynoldsa dla lin holowniczych osiąga wartość $Re = (1 \div 6) \cdot 10^4$. Maksymalne wartości liczby Re są dużo niższe od krytycznej liczby $Re_{kr} = (1,8 \div 5) \cdot 10^5$ [2 i 13]. Daje nam to pewność, że zawsze znajdujemy się w zakresie podkrytycznym i przy obliczeniach nie ma potrzeby dokonywania odrębnych dmuchań dla poszczególnych lin holowniczych [9].

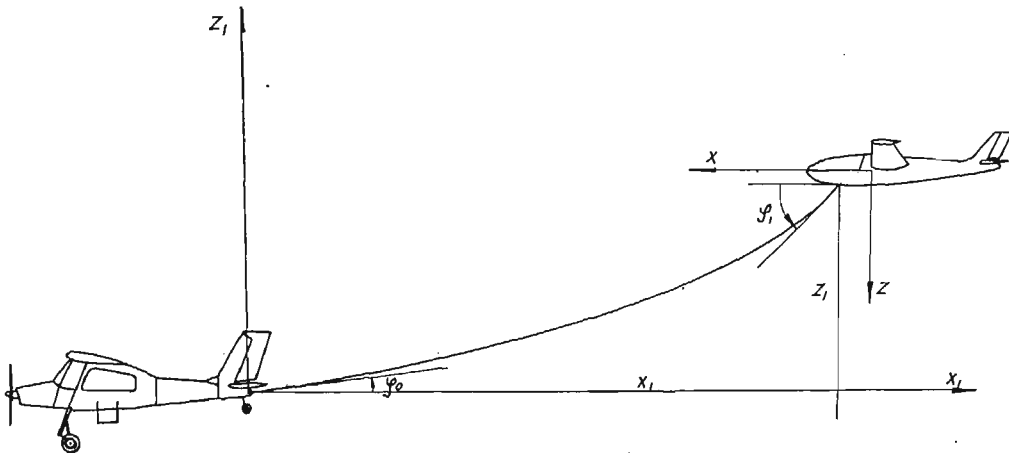
3. Charakterystyka linii holowniczej

W poniższej tabelicy podano ciężary jednostkowe q lin holowniczych, współczynniki wydłużalności określone jako $\lambda = \Delta l / Pl_0$ i średnice d lin używanych obecnie w Polsce do holowania szybowców [14].

Typ liny	Opis liny	d (m)	q (kG/m)	λ (1/kG)
<i>A</i>	Lina stylonowa zwijana	0,0070	0,0308	0,00117
<i>B</i>	Linia stylonowa w oplocie	0,0067	0,0326	0,00025
<i>C</i>	Lina stylonowa w oplocie	0,0083	0,0462	0,00035
<i>D</i>	Lina konopna zwijana	0,0113	0,0771	0,00021

4. Konfiguracja liny holowniczej

Przy rozpatrywaniu zagadnień równowagi i stateczności szybowców w locie holowanym konieczna jest znajomość siły T_1 na zaczepie szybowca zależnej od współrzędnych końców liny holowniczej x_1, z_1 oraz kątów φ_0 i φ_1 względem linii lotu, jakie lina tworzy na zaczepach samolotu i szybowca (rys. 3).



Rys. 3. Wielkości geometryczne charakteryzujące hol szybowca

Rozpatrzmy przypadek holu szybowca, gdy samolot holujący znajduje się w ustalonym, poziomym locie prostoliniowym, natomiast szybowiec może zajmować dowolne położenie w płaszczyźnie pionowej zgodnej z linią lotu.

Linę holowniczą traktujemy jako cięno idealnie wiotkie, ciężkie, obciążane siłami aerodynamicznymi. W przypadku liny holowniczej można pominąć momenty zginające, wynikające ze sztywności liny [5, 7 i 8].

Rozpatrzono element liny dl obciążony siłą naciągu liny T i $T+dT$, ciężarem własnym qdl , siłami aerodynamicznymi: styczną $t \cos^2 \varphi dl$ i normalną $n \sin^2 \varphi dl$ (rys. 4). Wprowadzono oznaczenia

$$n = \frac{1}{2} \rho dV^2 C_n, \quad t = \frac{1}{2} \rho dV^2 C_t.$$

Równania rzutów sił na kierunek styczny i normalny do elementu liny mają postać

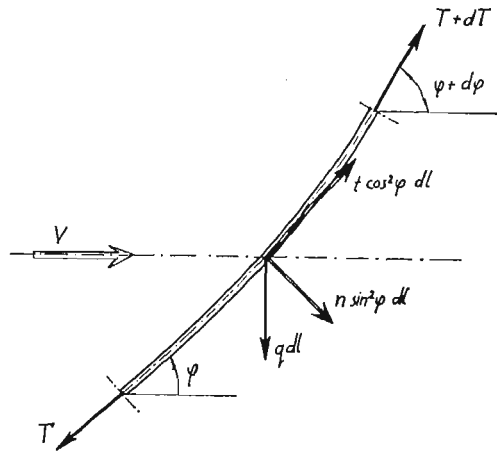
$$(4.1) \quad \begin{aligned} -T + (T+dT)\cos(d\varphi) + t\cos^2\varphi dl - q\sin\varphi dl &= 0, \\ -(T+dT)d\varphi + n\sin^2\varphi dl + q\cos\varphi dl &= 0. \end{aligned}$$

Po przekształceniach, pominięciu małych wyższego rzędu i wprowadzeniu bezwymiarowego współczynnika ciężarowego liny

$$C_q = \frac{q}{\frac{1}{2} \rho d V^2}$$

otrzymano

$$(4.2) \quad \frac{dT}{T} = \frac{\frac{C_q}{C_n} \sin \varphi - \frac{C_t}{C_n} \cos^2 \varphi}{\frac{C_q}{C_n} \cos \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi.$$



Rys. 4. Rozkład sił działających na element liny o długości dl

Po wprowadzeniu nowych stałych [10]

$$\frac{C_q}{C_n} = 2 \operatorname{ctg} 2\psi, \quad \frac{C_t}{C_n} = 2 \frac{C_t}{C_q} \operatorname{ctg} 2\psi$$

i scałkowaniu (4.2) otrzymano zależność

$$(4.3) \quad \frac{T e^\eta}{\tau} = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} = K_1,$$

gdzie

$$(4.4) \quad \tau = \left(\frac{\operatorname{ctg} \psi - \cos \varphi}{\operatorname{tg} \psi + \cos \varphi} \right)^{\cos 2\psi}$$

$$(4.5) \quad \eta = \frac{C_t}{C_q} \cos 2\psi \left[-\frac{2\varphi}{\sin 2\psi} + \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 \psi}} \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg} \psi}{1+\operatorname{tg} \psi}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2 \operatorname{ctg}^2 \psi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \psi - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \psi - 1}{\operatorname{ctg} \psi + 1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Analogicznie do τ i η otrzymamy zależności na τ_1 i η_1 podstawiając φ_1 zamiast φ do (4.4) i (4.5).

Stosując zależność (4.3) możemy obliczyć naciąg liny w dowolnym jej punkcie, o ile znamy wielkości φ i T na jednym z jej końców.

Z drugiego równania (4.1) otrzymamy

$$(4.6) \quad Td\varphi = (q\cos\varphi + n\sin^2\varphi)dl.$$

Po podstawieniu zależności (4.3) do (4.6) otrzymamy długość liny holowniczej w postaci całkowej

$$(4.7) \quad l_1 = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \frac{2}{\rho dV^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\tau e^{-\eta}}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Współrzędne końców liny holowniczej x_1 i z_1 (rys. 3) obliczymy wychodząc z zależności geometrycznych

$$dx_1 = dl \cos\varphi, \quad dz_1 = dl \sin\varphi;$$

otrzymamy

$$(4.8) \quad x_1 = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \frac{2}{\rho dV^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\tau e^{-\eta} \cos\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$(4.9) \quad z_1 = \frac{T_1 e^{\eta_1}}{\tau_1} \frac{2}{\rho dV^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\tau e^{-\eta} \sin\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Zmienimy granice całkowania w celu wprowadzenia nowych funkcji

$$(4.10) \quad \mu = \frac{2}{\rho dV^2} \int_0^\varphi \frac{\tau e^{-\eta}}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$(4.11) \quad \sigma = \frac{2}{\rho dV^2} \int_0^\varphi \frac{\tau e^{-\eta} \cos\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi,$$

$$(4.12) \quad \nu = \frac{2}{\rho dV^2} \int_0^\varphi \frac{\tau e^{-\eta} \sin\varphi}{C_q \cos\varphi + C_n \sin^2\varphi} d\varphi.$$

Korzystając z funkcji (4.10)–(4.12) i zależności (4.3) określono długość liny holowniczej:

$$(4.13) \quad l_1 = K_1(\mu_1 - \mu_0)$$

i współrzędne końca liny na zaczepie szybowca względem zaczepu samolotu holującego:

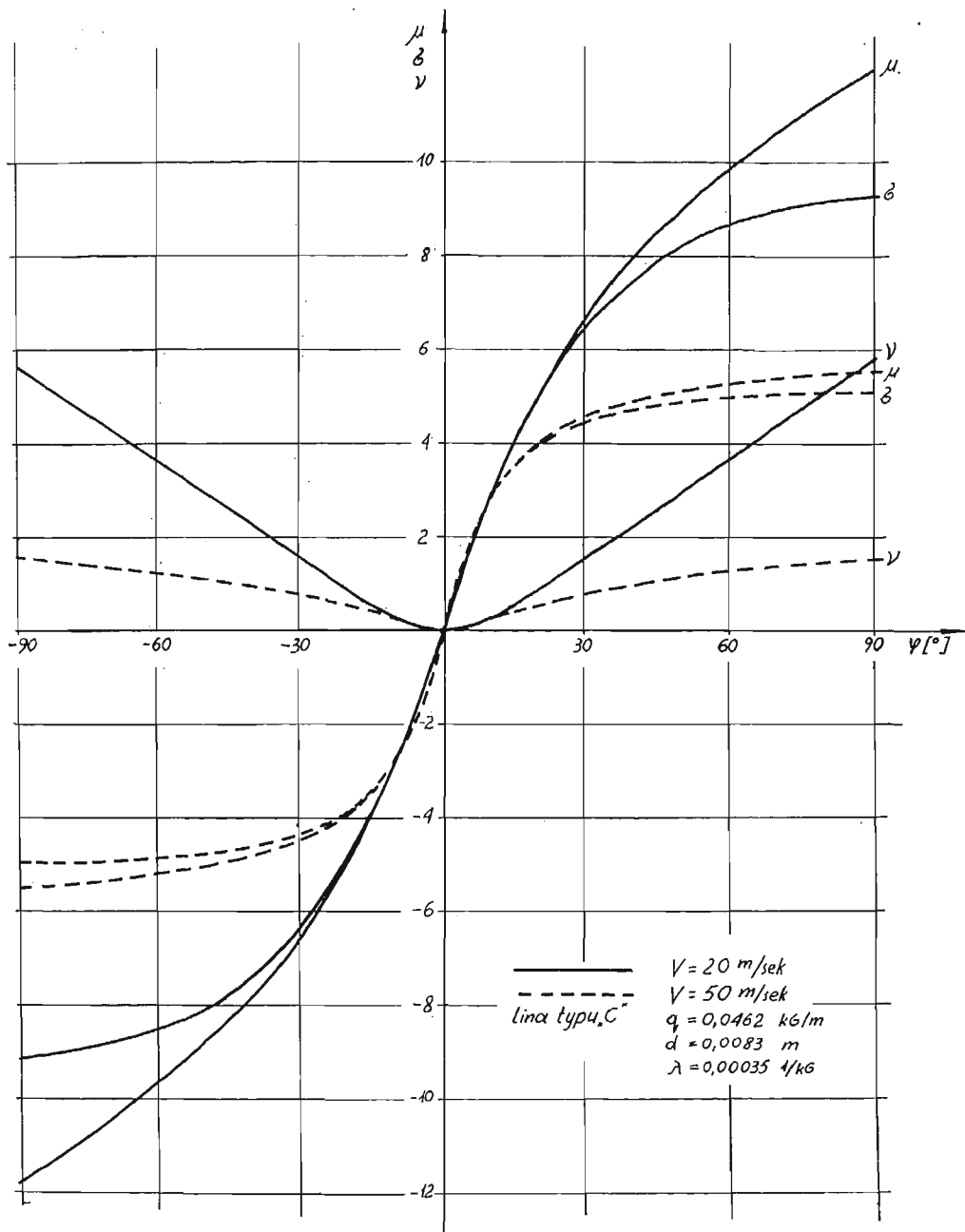
$$(4.14) \quad x_1 = K_1(\sigma_1 - \sigma_0),$$

$$(4.15) \quad z_1 = K_1(\nu_1 - \nu_0).$$

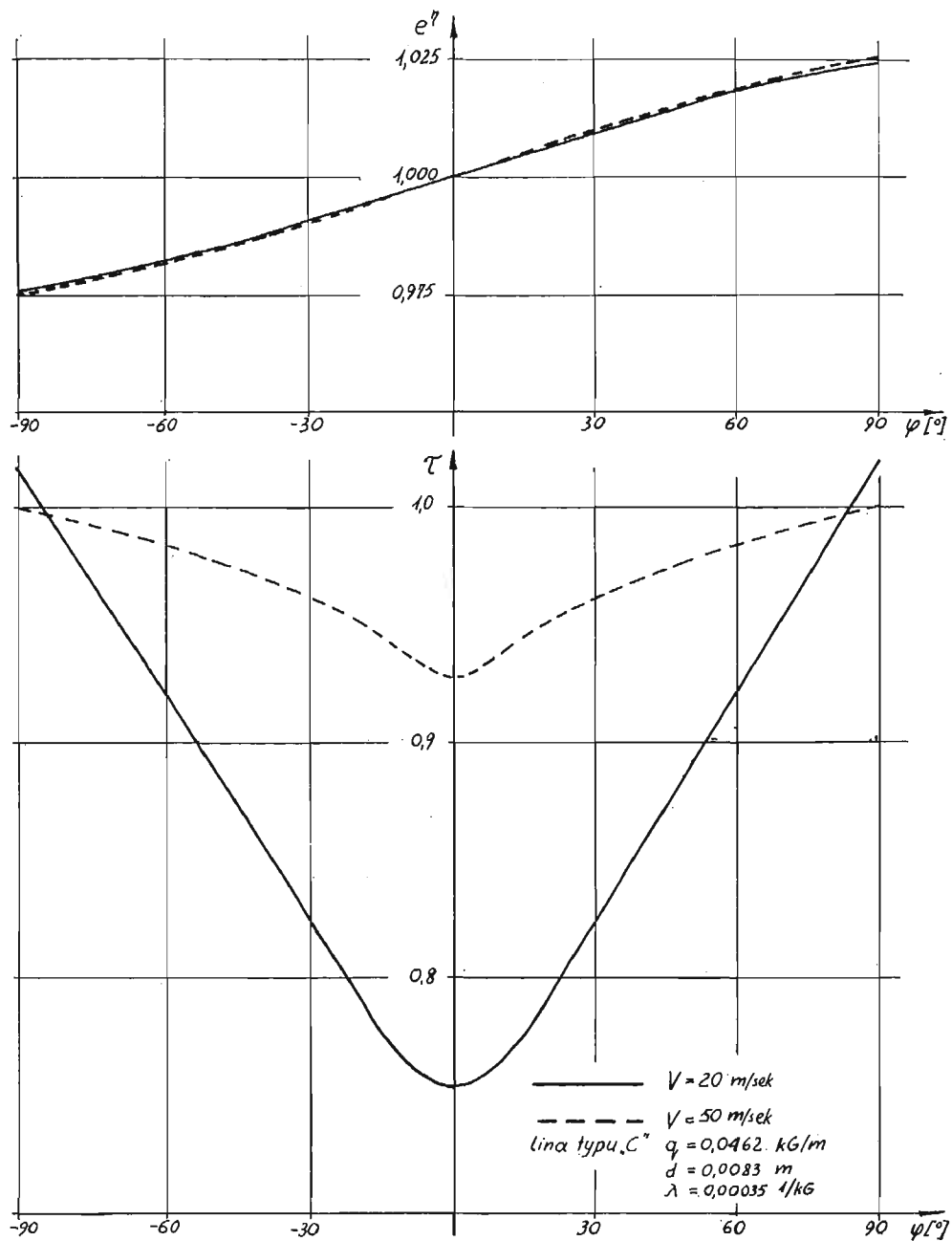
Dla lin wydłużalnych stosowanych do holu przyjęto

$$(4.16) \quad l_1 = l_0(1 + \lambda T_1);$$

uwzględnienie zmiany naciągu T wzdłuż liny daje różnice w stosunku do l_1 obliczonej z (4.16) $\approx 0,01\%$ a w stosunku do Δl_1 (wydłużenia) $\approx 3\%$.



Rys. 5a. Funkcje długości μ i współrzędnych końców liny σ i ν dla liny typu C przy prędkości hoku 20 i 50 m/sec.



Rys. 5b. Funkcje τ i e^η dla liny typu C przy prędkości holu 20 i 50 m/sec.

Na rysunkach 5a i 5b przedstawiono przykładowo funkcje μ , σ , ν , τ i e^n otrzymane po numerycznym scałkowaniu (4.10)–(4.12) dla liny typu C i prędkości hołu $V = 20$ m/sek. i 50 m/sek.

Kąt hołu φ_1 i odpowiadający mu C_z hołu określimy na podstawie p. 6, co umożliwi obliczenie siły na zaczepie szybowca T_1 . Z zależności (4.16) obliczymy całkowitą długość liny l_1 i z wykresów na rys. 5 dla wartości φ_1 znajdziemy μ_1 , σ_1 i ν_1 , co pozwala ze wzorów (4.3) i (4.13) obliczyć μ_0 . Z wykresu na rys. 5 znajdziemy dla wartości μ_0 kąt φ_0 , a następnie σ_0 i ν_0 . Stosując (4.14) i (4.15) obliczymy współrzędne końców liny x_1 i z_1 .

5. Współczynniki sił pochodzące od liny holowniczej (pochodne linowe)

W celu określenia sił pochodzących od liny holującej zakładamy liniowy charakter zmian sił w zależności od przemieszczenia końców liny względem siebie.

Przez analogię do *pochodnych aerodynamicznych*, stosowanych przy rozpatrywaniu stateczności samolotów, wprowadzono *pochodne linowe* (współczynniki sił), które określono następująco:

$$X'_{x_1} = \frac{\partial X'_1}{\partial x_1}, \quad X'_{z_1} = \frac{\partial X'_1}{\partial z_1},$$

$$Z'_{x_1} = \frac{\partial Z'_1}{\partial x_1}, \quad Z'_{z_1} = \frac{\partial Z'_1}{\partial z_1}.$$

Zmiany sił pochodzące od liny holowniczej przedstawiono za pomocą pochodnych liniowych

$$(5.1) \quad \begin{aligned} dX'_1 &= X'_{x_1} dx_1 + X'_{z_1} dz_1, \\ dZ'_1 &= Z'_{x_1} dx_1 + Z'_{z_1} dz_1. \end{aligned}$$

Siła T_1 pochodząca od liny holującej jest przyłożona na zaczepie pod kątem φ_1 w stosunku do linii lotu, a odpowiednie jej składowe są:

$$(5.2) \quad X'_1 = T_1 \cos \varphi_1, \quad Z'_1 = T_1 \sin \varphi_1.$$

Zmianę siły otrzymamy po zróżniczkowaniu zależności (5.2)

$$(5.3) \quad \begin{aligned} dX'_1 &= dT_1 \cos \varphi_1 - T_1 d\varphi_1 \sin \varphi_1, \\ dZ'_1 &= dT_1 \sin \varphi_1 + T_1 d\varphi_1 \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

Jeżeli do (5.3) wprowadzimy zależność na dT_1 i $T_1 d\varphi_1$ wyrażone przez elementarne przesunięcia dx_1 i dz_1 oraz T_1 , l_1 , x_1 , z_1 , φ_1 i φ_0 , to po przyrównaniu do (5.1) obliczymy pochodne linowe X'_{x_1} , X'_{z_1} , Z'_{x_1} i Z'_{z_1} .

Po przekształceniu (4.2) i (4.3) i wprowadzeniu do (4.6) otrzymano zależność na elementarną długość liny

$$(5.4) \quad dl = \frac{T_1}{\tau_1} e^{n_1 - n} \frac{\tau \tau'}{C_q \sin \varphi} \frac{2}{\rho dV^2} d\varphi,$$

i analogicznie

$$(5.5) \quad dx = \frac{T_1}{\tau_1} e^{n_1 - n} \frac{\tau \tau' \cos \varphi}{C_q \sin \varphi} \frac{2}{\rho dV^2} d\varphi,$$

$$(5.6) \quad dz = \frac{T_1}{\tau_1} e^{n_1 - n} \frac{\tau \tau'}{C_q} \frac{2}{\rho dV^2} d\varphi.$$

Korzystając z zależności (5.4)–(5.6) otrzymano trzy równania, które przedstawiają sobą zmianę długości liny i zmiany współrzędnych położenia końców liny pod wpływem zmiany siły dT_1 i kątów hołu $d\varphi_1$ i $d\varphi_0$ analogicznie do [10]:

$$(5.7) \quad \frac{l_1}{T_1} dT_1 + \frac{\tau'_1}{\tau_1} d\varphi_1 \left(\frac{T_1 \tau_1}{\sin \varphi_1} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} - \tau_1 l_1 \right) - \frac{T_1 \tau_0}{\sin \varphi_0} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} \frac{\tau'_0}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta_0} d\varphi_0 = l_1 \lambda dT_1,$$

$$(5.8) \quad \frac{x_1}{T_1} dT_1 + \frac{\tau'_1}{\tau_1} d\varphi_1 \left(\frac{T_1 \tau_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} - \tau_1 x_1 \right) + \\ - \frac{T_1 \tau_0 \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} \frac{2}{\rho dV^2 C_q} \frac{\tau'_0}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta_0} d\varphi_0 = l_1 \cos \varphi_1 \lambda dT_1 + dx_1,$$

$$(5.9) \quad \frac{z_1}{T_1} dT_1 + \frac{\tau'_1}{\tau_1} d\varphi_1 \left(T_1 \tau_1 \frac{2}{\rho dV^2 C_q} - \tau_1 z_1 \right) - T_1 \tau_0 \frac{2}{\rho dV^2 C_q} \frac{\tau'_0}{\tau_1} e^{\eta_1 - \eta_0} d\varphi_0 = l_1 \sin \varphi_1 \lambda dT_1 + dz_1.$$

Po przekształceniu równań (5.7)–(5.9) i wyeliminowaniu $\tau'_0 d\varphi_0$ oraz $\tau'_1 d\varphi_1$ otrzymano zależności

$$(5.10) \quad dT_1 = \frac{1}{\delta(1 - ql_1 \lambda \sin \varphi_1)} \{ dx_1 [T_1(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) - q \sin \varphi_1 (z_1 - l_1 \sin \varphi_0)] + \\ + dz_1 [T_1(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - q \sin \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_0 - x_1)] \},$$

$$(5.11) \quad T_1 d\varphi_1 = \frac{q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1}{\delta(1 - ql_1 \lambda \sin \varphi_1)} \{ dx_1 [l_1 \sin \varphi_0 - z_1 + \lambda T_1 l_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0)] + \\ + dz_1 [x_1 - l_1 \cos \varphi_0 + \lambda T_1 l_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1)] \},$$

gdzie

$$(5.12) \quad \delta = x_1(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) + z_1(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_0).$$

Podstawiając zależności (5.10) i (5.11) do równań (5.3) i porządkując względem dx_1 i dz_1 otrzymamy pochodne linowe w postaci:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} X'_{x_1} &= A_1 X'_{x_1} - A_2 X''_{x_1}, & X'_{z_1} &= A_1 X'_{z_1} - A_2 X''_{z_1}, \\ Z'_{x_1} &= A_1 Z'_{x_1} + A_2 Z''_{x_1}, & Z'_{z_1} &= A_1 Z'_{z_1} + A_2 Z''_{z_1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.14) \quad A_1 = \frac{1}{1 - \lambda q l_1 \sin \varphi_1}, \quad A_2 = \frac{\lambda T_1}{1 - \lambda q l_1 \sin \varphi_1}.$$

Człony X'_{x_1} , X'_{z_1} , Z'_{x_1} i Z'_{z_1} stanowią pochodne linowe obliczone przez S. NEUMARKA [10] dla niewydłużalnych lin. W przypadku gdy współczynnik wydłużalności $\lambda = 0$ wyrażenia (5.13) na pochodne linowe pokrywają się z wynikami S. Neumarka

$$(5.15) \quad \begin{aligned} X'_{x_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) + n \sin^3 \varphi_1 (z_1 - l_1 \sin \varphi_0)], \\ X'_{z_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \cos \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) + n \sin^3 \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_0 - x_1)], \\ Z'_{x_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (z_1 - l_1 \sin \varphi_0)], \\ Z'_{z_1} &= \frac{1}{\delta} [T_1 \sin \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) - (q + n \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) (l_1 \cos \varphi_0 - x_1)]. \end{aligned}$$

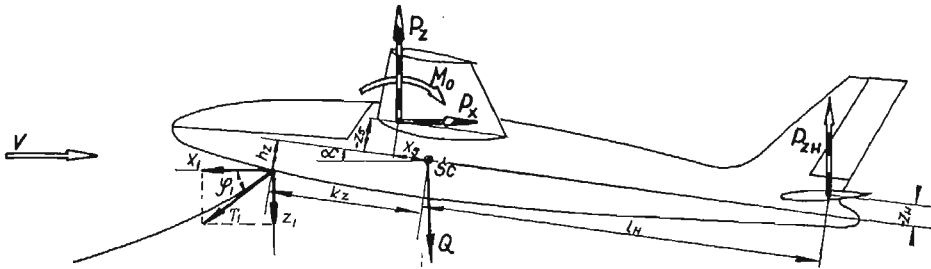
Drugie człony pochodnych linowych mają postać:

$$\begin{aligned}
 X''_{x_1} &= \frac{l_1}{\delta} \sin \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1), \\
 X''_{z_1} &= \frac{l_1}{\delta} \sin \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1), \\
 Z''_{x_1} &= \frac{l_1}{\delta} \cos \varphi_1 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1), \\
 Z''_{z_1} &= \frac{l_1}{\delta} \cos \varphi_1 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) (q \cos \varphi_1 + n \sin^2 \varphi_1).
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Korzystając ze wzorów (5.12)–(5.16) stosunkowo prosto obliczymy pochodne linowe. Są one zależne od $\varphi_1, \varphi_0, T_1, l_1, x_1, z_1, \lambda, q$ i n , które to wielkości obliczymy na podstawie p. 4 niniejszej pracy.

6. Równowaga podłużna szybowca w locie hołowanym

W ustalonym poziomym locie hołowanym musi zachodzić równowaga sił i momentów działających na szybowiec (rys. 6).



Rys. 6. Rozkład sił i momentów działających na szybowiec w locie hołowanym oraz zależności geometryczne

Otrzymano trzy równania równowagi

$$P_z + P_{zH} - Q - T_1 \sin \varphi_1 = 0, \tag{6.1}$$

$$T_1 \cos \varphi_1 - P_x = 0, \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
 M_0 + P_z (x_s \cos \alpha - z_s \sin \alpha) + P_x (x_s \sin \alpha + z_s \cos \alpha) + P_{zH} (l_H \cos \alpha + z_H \sin \alpha) + \\
 + T_1 \cos \varphi_1 (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha) - T_1 \sin \varphi_1 (h_z \sin \alpha + k_z \cos \alpha) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Z równań (6.1) i (6.2) po przekształceniu i podzieleniu stronami otrzymano

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{P_z - Q}{P_x} + \frac{P_{zH}}{P_x}. \tag{6.4}$$

Do równania (6.4) podstawiono zależność na siłę nośną usterzenia P_{zH} [4]

$$P_{zH} = \frac{1}{2} \rho S_H V_H^2 \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \left(\alpha - \varepsilon + \alpha_{zH} + \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta_H} \frac{\partial \alpha_H}{\partial C_{zH}} \beta_H \right) \tag{6.5}$$

oraz zależności na siłę nośną szybowca P_z i całkowity opór P_x przedstawione za pomocą współczynników

$$P_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_z, \quad P_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_x.$$

Otrzymano ograniczenie kąta holu φ_P ze względu na równowagę sił przy skrajnych wychyleniach steru wysokości $+\beta_{H\max}$ (do dołu) i $-\beta_{H\min}$ (do góry)

$$(6.6) \quad \operatorname{tg} \varphi_P = \frac{1}{C_x} \left\{ C_z \left[1 + \frac{S_H}{S} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 \frac{a_1}{\alpha} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{du} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{S_H}{S} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 a_1 \left(a_{zH} \pm \frac{a_2}{a_1} \beta_{H\max} \right) - \frac{2Q}{\rho S V^2} \right\},$$

gdzie

$$a = \frac{dC_z}{du}, \quad a_1 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial u_H}, \quad a_2 = \frac{\partial C_{zH}}{\partial \beta_H}.$$

Z równania (6.2) wyznaczono siłę naciągu liny występującą na zaczepie szybowca

$$(6.7) \quad T_1 = \frac{P_x}{\cos \varphi_1}.$$

Siłę T_1 obliczymy znając opór szybowca P_x i kąt holu φ_1 . Z równania (6.3) określono siłę P_{zH} , która powinna występować na usterzeniu poziomym, aby zapewnić równowagę momentów w locie ustalonym. Po podstawieniu tak obliczonej siły P_{zH} do równania (6.4) otrzymano wzór na zależność kąta holu φ_1 od współczynnika siły nośnej szybowca C_z :

$$(6.8) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{C_{mbH} l a + \left(C_z - \frac{2Q}{\rho S V^2} \right) (l_H \cos \alpha + z_H \sin \alpha) + C_x (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha)}{C_x [(l_H + k_z) \cos \alpha + (z_H + h_z) \sin \alpha]},$$

gdzie C_{mbH} jest to współczynnik momentu pochylającego szybowca bez usterzenia poziomego [4] i ma postać:

$$C_{mbH} = C_{m0} + C_z \bar{x}_s + (C_x - C_z \alpha) \bar{z}_s.$$

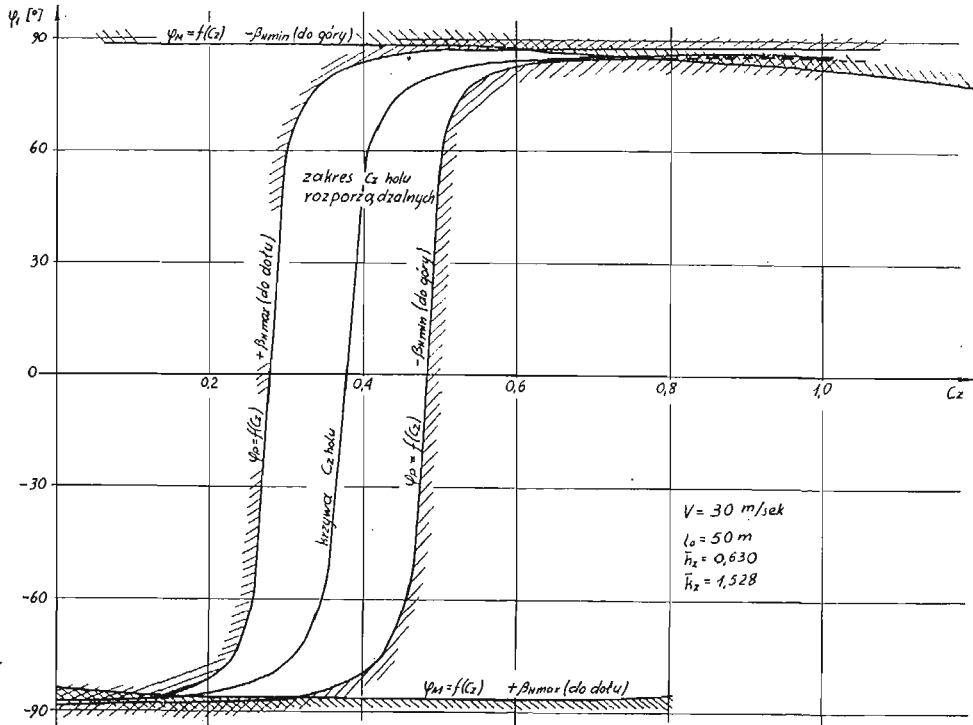
Zależność (6.8) określa dla danego współczynnika siły nośnej C_z jedyny możliwy kąt holu φ_1 , który zapewni równowagę szybowca. Są to C_z holu niezbędne do lotu holowanego danego szybowca z określoną prędkością.

Ze względu na ograniczone wielkości siły nośnej P_{zH} na usterzeniu odpowiadające skrajnym wychyleniom steru wysokości, korzystając z równań (6.3) i (6.5) otrzymano ograniczenia kąta holu φ_M ze względu na równowagę momentów

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{C_{mbH} l a + C_x (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha) - \frac{S_H}{S} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 a_1 (l_H \cos \alpha + z_H \sin \alpha) \left[\alpha \left(1 - \frac{d\varepsilon}{da} \right) + \right. \\ \left. + a_{zH} \pm \frac{a_2}{a_1} \beta_{H\max} \right]}{C_x (k_z \cos \alpha + h_z \sin \alpha)}$$

Na rysunku 7 wykreślono krzywą C_z holu w funkcji kąta holu φ_1 i naniesiono krzywe ograniczające ze względu na równowagę sił φ_P i ze względu na równowagę momentów φ_M . Z rysunku wynika, że równowaga szybowca w locie holowanym tylko wtedy jest moż-

liwa, gdy krzywa C_z holu znajduje się wewnątrz zakresu C_z rozporządzalnych. Warunek powyższy można uzyskać przez odpowiednie umieszczenie zaczepu holującego i właściwe rozwiązanie konstrukcyjne i aerodynamiczne usterzenia poziomego.



Rys. 7. Krzywa współczynników siły nośnej niezbędnych do lotu holowanego (C_z holu) w funkcji kąta φ_1 z naniesionymi ograniczeniami ze względu na równowagę sił $\varphi_P = f(C_z)$ i ze względu na równowagę momentów $\varphi_M = f(C_z)$ dla skrajnych wychyleń steru wysokości

7. Statyczna stateczność podłużna szybowca w locie holowanym

Pojęcie *statycznej stateczności* przyjęte w lotnictwie jest szeroko omówione w pracach poświęconych dynamice lotu samolotów [3, 4 i 11].

Warunkiem podłużnej stateczności statycznej w locie swobodnym jest

$$(7.1) \quad \frac{dC_m}{dC_z} < 0$$

dla przyjętego w niniejszej pracy dodatniego kierunku działania momentów (moment dodatni jest momentem zadzierającym szybowiec, powodującym wzrost kąta natarcia).

Stateczność statyczna mówi jedynie o występowaniu momentów wywołujących powrót szybowca do stanu równowagi w pierwszej chwili po zakłóceniu lotu [3, 4 i 11].

Przez analogię do lotu swobodnego proponuje się wprowadzenia pojęcia *stateczności statycznej* w locie holowanym określając $C_{mh} = f(C_z)$, tzn. współczynnik momentu pochylającego policzony względem środka ciężkości szybowca (rys. 6).

W postaci bezwymiarowej moment pochylający przedstawimy za pomocą współczynnika

$$(7.2) \quad C_{mh} = C_{ma} + C_{ml},$$

gdzie

C_{mh} oznacza współczynnik momentu pochylającego szybowca w locie holowym,

C_{ma} współczynnik momentu pochylającego pochodzący od sił aerodynamicznych, działających na szybowiec,

C_{ml} współczynnik momentu pochylającego pochodzącego od liny holowniczej.

Po zróżniczkowaniu (7.2) względem C_z otrzymamy

$$\frac{dC_{mh}}{dC_z} = \frac{dC_{ma}}{dC_z} + \frac{dC_{ml}}{dC_z}.$$

Zgodnie z określeniami przyjętymi w lotnictwie [3, 4 i 11] otrzymamy zapas stateczności statycznej w locie holowanym \bar{h}_h w postaci

$$(7.3) \quad \bar{h}_h = \bar{h}_1 + \bar{h}_l,$$

gdzie

$\bar{h}_1 = -\frac{dC_{ma}}{dC_z}$ zapas stateczności statycznej z trzymanym sterem w locie swobodnym,

$\bar{h}_l = -\frac{dC_{ml}}{dC_z}$ zmiana zapasu stateczności statycznej, pochodząca od liny holowniczej.

Zapasu stateczności statycznej \bar{h}_1 w locie swobodnym nie wyprowadzono w niniejszej pracy a przyjęto na podstawie pracy [4] w ostatecznej formie

$$(7.4) \quad \bar{h}_1 = \frac{S_H l_H}{S_l a} \left(\frac{V_H}{V} \right)^2 \frac{a_1}{a} \left(1 - \frac{d\varepsilon}{du} \right) - \bar{x}_s - \frac{2C_z}{a} \left(1 - \frac{a}{\pi \Lambda_e} \right) \bar{z}_s.$$

Rozpatrzmy momenty sił pochodzących od liny holowniczej (rys. 6). Składowe X_1^l i Z_1^l siły pochodzącej od naciągu liny i przyłożonej na zaczepie szybowca zmieniają się w zależności od kąta natarcia α . Określimy je korzystając z pochodnych linowych wyprowadzonych w p. 5 niniejszej pracy:

$$(7.5) \quad \begin{aligned} X_1^l &= T_1 \cos \varphi_1 - X_{x_1}^l (h_z \sin \alpha + k_z \cos \alpha - k_z) + X_{z_1}^l (k_z \sin \alpha - h_z \cos \alpha + h_z), \\ Z_1^l &= T_1 \sin \varphi_1 - Z_{x_1}^l (h_z \sin \alpha + k_z \cos \alpha - k_z) + Z_{z_1}^l (k_z \sin \alpha - h_z \cos \alpha + h_z). \end{aligned}$$

Moment sił pochodzących od liny ma postać

$$(7.6) \quad M_1 = X_1^l (h_z \cos \alpha - k_z \sin \alpha) - Z_1^l (k_z \cos \alpha + h_z \sin \alpha).$$

Po podstawieniu do (7.6) zależności (7.5) i (6.7) i uwzględnieniu, że kąt natarcia α jest mały

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

i podzieleniu równania momentów przez $\frac{1}{2} \rho S V^2 l_a$ otrzymano współczynnik momentu w postaci bezwymiarowej

$$(7.7) \quad \begin{aligned} C_{ml} &= -(\bar{x}_{x_1} \bar{h}_z - \bar{x}_{z_1} \bar{k}_z) (a \bar{h}_z - a^2 \bar{k}_z) l_a + (\bar{z}_{x_1} \bar{h}_z - \bar{z}_{z_1} \bar{k}_z) (\bar{k}_z a + \bar{h}_z a^2) l_a + \\ &\quad + (\bar{x}_{x_1} \bar{k}_z + \bar{x}_{z_1} \bar{h}_z) l_a a \bar{h}_z \frac{a^2}{2} - (\bar{z}_{x_1} \bar{k}_z + \bar{z}_{z_1} \bar{h}_z) l_a \bar{k}_z \frac{a^2}{2} + \\ &\quad + C_x (\bar{h}_z - \bar{k}_z \operatorname{tg} \varphi_1) - C_x a (\bar{k}_z + \bar{h}_z \operatorname{tg} \varphi_1) + C_x \frac{a^2}{2} (\bar{k}_z \operatorname{tg} \varphi_1 - \bar{h}_z), \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{x}_{x_1} = \frac{X'_{x_1}}{\frac{1}{2} \rho S V^2}, \quad \bar{k}_z = \frac{k_z}{l_a}, \quad \bar{h}_z = \frac{h_z}{l_a}$$

analogicznie do \bar{x}_{x_1} otrzymano \bar{x}_{z_1} , \bar{z}_{x_1} i \bar{z}_{z_1} .

Współczynnik oporu C_x i kąt natarcia α uzależniono od współczynnika siły nośnej C_z [4], a następnie zależność (7.7) zróżniczkowano względem C_z .

Otrzymano zmianę zapasu stateczności statycznej \bar{h}_1 pochodzącą od holu:

$$(7.8) \quad \bar{h}_1 = \Delta \bar{h}(l) + \Delta \bar{h}(\bar{k}_z) + \Delta \bar{h}(\bar{h}_z),$$

gdzie

$$(7.9) \quad \Delta \bar{h}(l) = \frac{l_a}{a} \left\{ \bar{h}_z^2 \left[\bar{x}_{x_1} - \frac{C_z}{a} (\bar{x}_{z_1} + 2\bar{z}_{x_1}) \right] + \right. \\ \left. + \bar{k}_z^2 \left[\bar{z}_{z_1} + \frac{C_z}{a} (\bar{z}_{x_1} + 2\bar{x}_{z_1}) \right] - \bar{h}_z \bar{k}_z \left[\bar{x}_{z_1} + \bar{z}_{x_1} + \frac{3C_z}{a} \bar{x}_{x_1} - \bar{z}_{z_1} \right] \right\},$$

$$(7.10) \quad \Delta \bar{h}(\bar{k}_z) = \bar{k}_z \left[\frac{C_{x_0}}{a} + \frac{3C_z^2}{\pi a \Lambda_e} + \left(\frac{2C_z}{\pi \Lambda_e} - \frac{C_z C_{x_0}}{a^2} - \frac{2C_z^3}{\pi a^2 \Lambda_e} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \right],$$

$$(7.11) \quad \Delta \bar{h}(\bar{h}_z) = -\bar{h}_z \left[\frac{2C_z}{\pi \Lambda_e} - \frac{C_z C_{x_0}}{a^2} - \frac{2C_z^3}{\pi a^2 \Lambda_e} - \left(\frac{C_{x_0}}{a} + \frac{3C_z^2}{\pi a \Lambda_e} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \right];$$

$\Delta \bar{h}(l)$ pokazuje zmianę zapasu stateczności statycznej, pochodzącą od linii holowniczej. Zależy od własności linii (ciężaru jednostkowego, średnicy, wydłużalności, długości), konfiguracji linii i położenia zaczepu holującego. Wielkość ta powoduje wzrost lub zmniejszenie zapasu stateczności statycznej w zależności od konfiguracji;

$\Delta \bar{h}(\bar{k}_z)$ pokazuje zmianę zapasu stateczności statycznej, pochodzącą od przesunięcia zaczepu holującego poziomo względem środka ciężkości szybowca; zależy ono od danych aerodynamicznych szybowca. Przesunięcie zaczepu do przodu względem środka ciężkości szybowca powoduje, że wartość ta jest zawsze dodatnia i daje wzrost zapasu stateczności statycznej;

$\Delta \bar{h}(\bar{h}_z)$ pokazuje zmiany zapasu stateczności statycznej wywołaną przesunięciem zaczepu holującego pionowo względem środka ciężkości szybowca. Przesunięcie zaczepu poniżej środka ciężkości powoduje przeważnie spadek zapasu stateczności statycznej.

Zapas stateczności statycznej w locie holowanym \bar{h}_h określany jest przez (7.3) po uprzednim obliczeniu \bar{h}_1 z (7.4) i \bar{h}_1 z (7.8).

Jak widzimy, zmiany zapasu stateczności statycznej, wywołane holem, zależą od wielu czynników i mogą w rezultacie powodować wzrost lub spadek stateczności statycznej w stosunku do zapasu stateczności \bar{h}_1 , odpowiadającego lotowi swobodnemu z trzymanym sterem.

Wpływ poszczególnych czynników na zapas stateczności statycznej podłużnej będzie omówiony dokładnie w p. 9 niniejszej pracy.

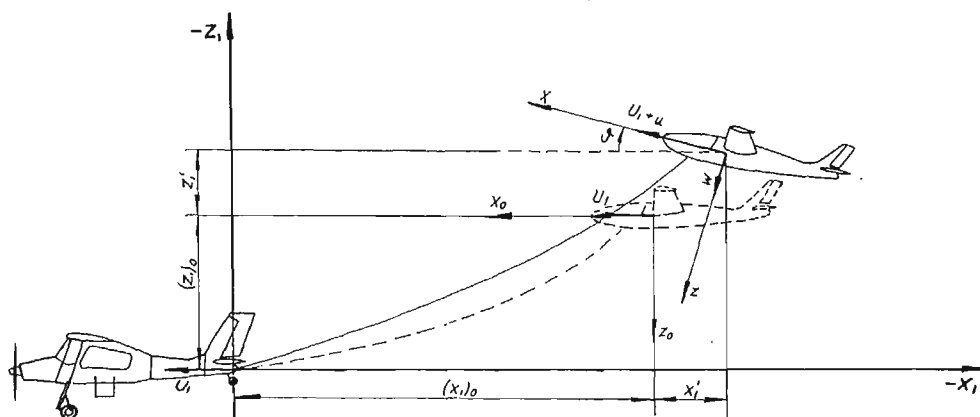
Zapas stateczności statycznej ma wpływ na stateczność dynamiczną szybowca. Występuje w różniczkowych równaniach ruchu jako współczynnik w pochodnej aerodynamicznej m_{ω} .

8. Uproszczona analiza stateczności dynamicznej podłużnej szybowca w locie holowanym

Równania ruchu szybowca w locie holowanym wyprowadzono rozpatrując małe zakłócenia od ustalonego lotu poziomego, prostoliniowego, co pozwoliło na linearyzację równań. Linearyzacja umożliwiła uzyskanie rozwiązania w prostej postaci dla wygodniejszej analizy stateczności.

Małe zakłócenia oznaczono (rys. 8) następująco:

- x'_1, z'_1 zmiana położenia środka ciężkości szybowca względem układu x_1, z_1 związanego z samolotem,
- ϑ zmiana kąta pochylenia (obrót względem środka ciężkości),
- u, w składowe zmian prędkości związane z szybowcem w kierunkach osi x i z (związanych z szybowcem),
- q zmiana prędkości kątowej pochylenia,
- u_1, w_1 składowe zmian prędkości szybowca w kierunkach osi x_1 i z_1 (związanych z samolotem).



Rys. 8. Zmiana położenia szybowca wywołana zakłóceniem w stosunku do prostoliniowego poziomego lotu ustalonego; wzajemne zależności w przyjętych układach współrzędnych

Równania ruchu szybowca w locie swobodnym względem osi związanych z szybowcem (x, z) zostały podane w pracach [3, 4 i 11]. Po wprowadzeniu do nich sił pochodzących od liny holowniczej otrzymano

$$\begin{aligned}
 m\ddot{u} &= -mg\vartheta \cos \Theta_1 + X_u u + X_w w + X_q q + X'_{x_1} x'_1 + X'_{z_1} z'_1 + X'_\vartheta \vartheta, \\
 m(\dot{w} - U_1 q) &= mg\vartheta \sin \Theta_1 + Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z'_{x_1} x'_1 + Z'_{z_1} z'_1 + Z'_\vartheta \vartheta, \\
 I_y \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_w \dot{w} + M_q q + M'_{x_1} x'_1 + M'_{z_1} z'_1 + M'_\vartheta \vartheta, \\
 q &= \dot{\vartheta}.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Przyjęto, że zespół holujący (samolot + szybowiec) znajdował się w poziomym locie ustalonym, prostoliniowym $\Theta_1 = 0$. Uwzględniając powyższe założenie i korzystając z wyprowadzeń [3] otrzymano

$$\dot{x}' = u = u_1, \tag{8.2}$$

$$\dot{z}' = w - U_1 \vartheta = w_1. \tag{8.3}$$

Przekształcając zależność (8.3) otrzymano

$$w = \dot{z}' + U_1 \vartheta = w_1 + U_1 \vartheta. \tag{8.4}$$

Podstawiając zależności (8.2) i (8.4) do równań (8.1) otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami

$$\begin{aligned}
 m\dot{u}_1 &= X_u u_1 + X_w (w_1 + U_1 \vartheta) + X_q q + X'_{x_1} x'_1 + X'_{z_1} z'_1 + X'_\vartheta \vartheta - mg\vartheta, \\
 m\dot{w}_1 &= Z_u u_1 + Z_w (w_1 + U_1 \vartheta) + Z_q q + Z'_{x_1} x'_1 + Z'_{z_1} z'_1 + Z'_\vartheta \vartheta, \\
 I_y \dot{q} &= M_u u_1 + M_w (w_1 + U_1 \vartheta) + M_w (\dot{w}_1 + U_1 q) + M_q q + M'_{x_1} x'_1 + M'_{z_1} z'_1 + M'_\vartheta \vartheta, \\
 q &= \dot{\vartheta}.
 \end{aligned}$$

Współczynniki sił i momentów przy zmianach prędkości zwane są pochodnymi aerodynamicznymi [3, 4 i 11] i oznaczamy je. np.:

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u}, \quad Z_q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad M_{\dot{w}} = \frac{\partial M}{\partial \dot{w}},$$

a przy przesunięciach — pochodnymi linowymi (p. 5) i [10] np.

$$X_{x_1}^l = \frac{\partial X_1^l}{\partial x_1}, \quad Z_{x_1}^l = \frac{\partial Z_1^l}{\partial x_1}, \quad M_{\dot{\vartheta}}^l = \frac{\partial M^l}{\partial \dot{\vartheta}}.$$

Pochodnych aerodynamicznych występujących w układzie równań (8.5) nie wyprowadzono w niniejszej pracy. Są one szeroko omówione i wyprowadzone w wielu pracach związanych z dynamiką lotu samolotów.

Korzystając z pracy [3] przytoczono w ostatecznej postaci pochodne aerodynamiczne w postaci bezwymiarowej stosowane w zakresie małych prędkości (nie uwzględniając ściśliwości powietrza).

Pochodne sił i momentów aerodynamicznych w zależności od zmian prędkości:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} x_u &= -C_x, & x_w &= \frac{1}{2} \left(C_z - \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right), \\ z_u &= -C_z, & z_w &= -\frac{1}{2} \left(C_x + \frac{dC_z}{d\alpha} \right), \\ m_u &= C_m \frac{l_a}{l_H}. \end{aligned}$$

Pochodne sił aerodynamicznych w zależności od kąta pochylenia:

$$(8.7) \quad x_{\vartheta} = \frac{mg \cos \theta_1}{\rho S V^2} = \frac{mg}{\rho S V^2}.$$

Pochodne aerodynamiczne w zależności od kątowej prędkości pochylenia dla skrzydeł prostych zbieżnych:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} x_q &= 0,6 \frac{S_H}{S} \left(C_{zH} - \frac{\partial C_{xH}}{\partial \alpha_H} \right) + \frac{1}{2 S l_H} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(C_z - \frac{\alpha C_x}{\partial \alpha} \right) l_x dy, \\ z_q &= -0,6 \frac{S_H}{S} \left(C_{xH} + \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \right) - \frac{1}{2 S l_H} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dC_z}{d\alpha} \left(\frac{3}{4} - \frac{l_k}{l} \right) l^2 dy, \\ m_q &= -0,6 \frac{S_H}{S} \left(C_{xH} + \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \right) - \frac{1}{S l_H^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{8} \frac{dC_z}{d\alpha} \left(1 - 2 \frac{l_k}{l} \right)^2 + \frac{1}{32} \left(2\pi - \frac{dC_z}{d\alpha} \right) \right] l^2 dy. \end{aligned}$$

Pochodna aerodynamiczna momentu pochyłającego względem prędkości zmiany kąta natarcia:

$$(8.9) \quad m_{\dot{w}} = -\frac{1}{2} \frac{S_H}{S} \frac{\partial C_{zH}}{\partial \alpha_H} \frac{d\varepsilon}{d\alpha}.$$

Pochodna momentu pochyłającego względem prędkości pionowej zależy zarówno od własności aerodynamicznych szybowca, jak również od konfiguracji i charakterystyki linii holowniczej:

$$m_w^h = \frac{1}{2} \frac{l_a}{l_H} \frac{dC_m}{d\alpha}.$$

Korzystając z (7.2) i (7.3) otrzymamy

$$\frac{dC_m}{d\alpha} = \frac{dC_z}{d\alpha} \left(\frac{dC_{m\alpha}}{dC_z} + \frac{dC_{mI}}{dC_z} \right) = -\frac{dC_z}{d\alpha} (\bar{h}_1 + \bar{h}_I).$$

Stąd

$$m_w^h = m_w + m_w^I,$$

gdzie

$$(8.10) \quad m_w = -\frac{1}{2} \frac{l_a}{l_H} \frac{dC_z}{d\alpha} \bar{h}_1, \quad m_w^I = -\frac{1}{2} \frac{l_a}{l_H} \frac{dC_z}{d\alpha} \bar{h}_I.$$

Pochodne liniowe sił względem przesunięć $X_{x_1}^I$, $X_{z_1}^I$, $Z_{x_1}^I$ i $Z_{z_1}^I$ końca linii zostały wyprowadzone w p. 5 niniejszej pracy.

Poniżej wyprowadzono pochodne liniowe momentu pochyłającego względem przesunięć i kąta pochylenia oraz pochodne liniowe sił względem kąta pochylenia.

Zmiany sił i momentów pochodzące od linii w zależności od przesunięcia i zmiany kąta pochylenia mają postać

$$\begin{aligned} dX_1^I &= X_{x_1}^I dx_1 + X_{z_1}^I dz_1 + X_9^I d\vartheta, \\ dZ_1^I &= Z_{x_1}^I dx_1 + Z_{z_1}^I dz_1 + Z_9^I d\vartheta, \\ dM_1^I &= M_{x_1}^I dx_1 + M_{z_1}^I dz_1 + M_9^I d\vartheta. \end{aligned}$$

Uwzględniając zmianę kąta pochylenia $d\vartheta$ otrzymamy (rys. 6)

$$\begin{aligned} dX_1^I &= X_{x_1}^I dx_1 + X_{z_1}^I dz_1 (X_{x_1}^I h_z - X_{z_1}^I k_z + T_1 \sin \varphi_1) d\vartheta, \\ dZ_1^I &= Z_{x_1}^I dx_1 + Z_{z_1}^I dz_1 + (Z_{x_1}^I h_z - Z_{z_1}^I k_z - T_1 \cos \varphi_1) d\vartheta, \\ dM_1^I &= dX_1^I h_z - dZ_1^I k_z = (X_{x_1}^I h_z - Z_{x_1}^I k_z) dx_1 + (X_{x_1}^I h_z - Z_{z_1}^I k_z) dz_1 + \\ &\quad + [X_{x_1}^I h_z^2 - (X_{z_1}^I + Z_{x_1}^I) h_z k_z + Z_{z_1}^I k_z^2 + T_1 (h_z \sin \varphi_1 + k_z \cos \varphi_1)] d\vartheta. \end{aligned}$$

Pochodne liniowe w powyższych równaniach są współczynnikami przy dx_1 , dz_1 i $d\vartheta$.

Poniżej podano pochodne liniowe w postaci bezwymiarowej:

$$(8.11) \quad \begin{aligned} x_{x_1} &= \frac{X_{x_1}^I l_H}{\rho S V^2}, & x_{z_1} &= \frac{X_{z_1}^I l_H}{\rho S V^2}, & x_{\vartheta} &= \frac{1}{\rho S V^2} (X_{x_1}^I h_z - X_{z_1}^I k_z + T_1 \sin \varphi_1), \\ z_{x_1} &= \frac{Z_{x_1}^I l_H}{\rho S V^2}, & z_{z_1} &= \frac{Z_{z_1}^I l_H}{\rho S V^2}, & z_{\vartheta} &= \frac{1}{\rho S V^2} (Z_{x_1}^I h_z - Z_{z_1}^I k_z - T_1 \cos \varphi_1), \\ m_{x_1} &= \frac{1}{\rho S V^2} (X_{x_1}^I h_z - Z_{x_1}^I k_z), \\ m_{z_1} &= \frac{1}{\rho S V^2} (X_{z_1}^I h_z - Z_{z_1}^I k_z), \\ m_{\vartheta} &= \frac{1}{\rho S V^2 l_H} [X_{x_1}^I h_z^2 - (X_{z_1}^I + Z_{x_1}^I) h_z k_z + Z_{z_1}^I k_z^2 + T_1 (h_z \sin \varphi_1 + k_z \cos \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Znając wszystkie pochodne aerodynamiczne i liniowe przystąpiono do rozwiązywania układu równań (8.5). Układ równań (8.5) przekształcono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho V^2 S$, równanie momentów przez $\rho V^2 S l_H$ oraz wprowadzając następujące wyrażenia zgodnie z nazwami przyjętymi w lotnictwie [3, 12 i 13]:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{m}{\rho V S} \quad \text{czas aerodynamiczny,} \\ \mu_i &= \frac{m}{\rho S l_H} \quad \text{względna gęstość samolotu,} \\ \bar{t} &= \frac{\hat{t}}{t} \quad \text{czas bezwymiarowy,} \\ j_y &= \frac{I_y}{m l_H^2} \quad \text{bezwymiarowy moment bezwładności,} \\ \bar{u}_1 &= \frac{u_1}{V}; \bar{w}_1 = \frac{w_1}{V} \quad \text{bezwymiarowe prędkości liniowe,} \\ \bar{q} &= q t \quad \text{bezwymiarowa prędkość kątowa pochylenia,} \\ \bar{m}_u &= -\frac{\mu_1 m_u}{j_y}, \quad \bar{m}_w^h = -\frac{\mu_1 m_w^h}{j_y}, \quad \bar{m}_q = -\frac{m_q}{j_y}, \\ \bar{m}_{\dot{w}} &= -\frac{\mu_1 m_{\dot{w}}}{j_y}, \quad \bar{m}_{x_1} = -\frac{\mu_1 m_{x_1}}{j_y}, \quad \bar{m}_{z_1} = -\frac{\mu_1 m_{z_1}}{j_y}, \quad \bar{m}_\vartheta = -\frac{\mu_1 m_\vartheta}{j_y}. \end{aligned}$$

Przyjęto również, że osie związane z szybowcem zostały tak dobrane, aby kierunek prędkości V przed zakłóceniem równowagi był zgodny z kierunkiem obranej osi x , tzn. $U_1 = V$. Otrzymano układ równań w postaci bezwymiarowej

$$\begin{aligned} (8.12) \quad & \frac{d\bar{u}_1}{dt} - x_u \bar{u}_1 - x_w \bar{w}_1 - \frac{x_q}{\mu_1} \bar{q} - x_{x_1} \bar{x}_1 - x_{z_1} \bar{z}_1 + (x_\vartheta - x_w - x_{\vartheta_1}) \vartheta = 0, \\ & -z_u \bar{u}_1 + \frac{d\bar{w}_1}{dt} - z_w \bar{w}_1 - \frac{z_q}{\mu_1} \bar{q} - z_{x_1} \bar{x}_1 - z_{z_1} \bar{z}_1 - (z_w + z_\vartheta) \vartheta = 0, \\ & \bar{m}_u \bar{u}_1 + \bar{m}_{\dot{w}} \frac{d\bar{w}_1}{dt} + \bar{m}_w^h \bar{w}_1 + \frac{d\bar{q}}{dt} + \left(\bar{m}_q + \frac{\bar{m}_{\dot{w}}}{\mu_1} \right) \bar{q} + \bar{m}_{x_1} \bar{x}_1 + \bar{m}_{z_1} \bar{z}_1 + (\bar{m}_w^h + \bar{m}_\vartheta) \vartheta = 0, \\ & \bar{q} = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \bar{u}_1 = \frac{d\bar{x}_1}{dt}, \quad \bar{w}_1 = \frac{d\bar{z}_1}{dt}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań przewidujemy w postaci

$$\bar{x}_1 = x_0 e^{\bar{\lambda} \bar{t}}, \quad \bar{z}_1 = z_0 e^{\bar{\lambda} \bar{t}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 e^{\bar{\lambda} \bar{t}}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności do układu równań (8.12), podzieleniu przez $e^{\bar{\lambda} \bar{t}}$ i uporządkowaniu względem x_0 , z_0 , ϑ_0 otrzymano układ równań jednorodnych. Warunkiem rozwiązania tego układu jest, aby wyznacznik ze współczynników przy x_0 , z_0 i ϑ_0 był równy zero. Po rozwinięciu wyznacznika i uporządkowaniu względem potęg $\bar{\lambda}$ otrzymano równanie charakterystyczne w postaci

$$(8.13) \quad \bar{\lambda}^6 + B_1 \bar{\lambda}^5 + (C_1 + C_1') \bar{\lambda}^4 + (D_1 + D_1') \bar{\lambda}^3 + (E_1 + E_1') \bar{\lambda}^2 + F_1' \bar{\lambda} + G_1' = 0,$$

gdzie współczynniki B_1 , C_1 , D_1 i E_1 są współczynnikami równania charakterystycznego czwartego stopnia w przypadku lotu swobodnego szybowca [3].

Współczynniki równania charakterystycznego (8.13) dały się rozdzielić na część odpowiadającą lotowi swobodnemu i część uwzględniającą wpływ holu.

Współczynniki równania charakterystycznego dla lotu swobodnego

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B = -(x_u + z_w) + \bar{m}_q + (1 + z_q) \frac{\bar{m}_w^i}{\mu_1}, \\
 C_1 &= x_u z_w - x_w z_u - (x_u + z_w) \bar{m}_q + \left(-z_w + \frac{x_u + z_w}{\mu_1} + \frac{x_u z_q - x_q z_u}{\mu_1} \right) \bar{m}_w^i + \\
 &\quad + \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1} \right) \bar{m}_w + \frac{x_q}{\mu_1} \bar{m}_u, \\
 D_1 &= (x_u z_w - x_w z_u) \bar{m}_q + \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - 1 \right) (x_u z_w - x_w z_u) - z_u x_g \right] \bar{m}_w^i - \\
 &\quad - \left(x_u + \frac{x_u z_q - x_q z_u}{\mu_1} \right) \bar{m}_w + \left(x_w - x_g + \frac{x_w z_q - x_q z_w}{\mu_1} \right) \bar{m}_u, \\
 E_1 &= (z_w \bar{m}_u - z_u \bar{m}_w) x_g.
 \end{aligned}$$

Zmiany współczynników równania charakterystycznego wywołane holom:

$$\begin{aligned}
 C_1^I &= \left(1 + \frac{z_q}{\mu_1} \right) \bar{m}_w^I - x_{x_1} - z_{z_1} + \bar{m}_g + z_g \bar{m}_w^i, \\
 D_1^I &= x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u + x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1} - (x_{x_1} + z_{z_1}) \bar{m}_q - \\
 &\quad - (x_u + z_w) \bar{m}_g + \left(x_{gI} z_u - x_u z_g - \frac{x_{x_1} + z_{z_1}}{\mu_1} + \frac{x_q z_{x_1} - x_{x_1} z_q}{\mu_1} \right) \bar{m}_w^i + \\
 &\quad + z_g \bar{m}_w^h + x_{gI} \bar{m}_u + \frac{x_q}{\mu_1} \bar{m}_{x_1} + \frac{z_q}{\mu_1} \bar{m}_{z_1} - \left(x_u + \frac{x_u z_q - x_q z_u}{\mu_1} \right) \bar{m}_w^i, \\
 E_1^I &= x_{x_1} z_{z_1} - x_{z_1} z_{x_1} + [x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1} + (x_u - z_u) z_{z_1}] \bar{m}_q + \\
 &\quad + (x_u z_w - x_w z_u - x_{x_1} - z_{z_1}) \bar{m}_g + \left[\frac{x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u}{\mu_1} + \right. \\
 &\quad \left. + (x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1}) \left(\frac{1}{\mu_1} - 1 \right) - z_g x_{x_1} - (x_g - x_{gI}) z_{z_1} \right] \bar{m}_w^i + \\
 &\quad + \left(\frac{x_q z_{x_1} - x_{x_1} z_q - x_u z_g + z_u x_{gI} - x_{x_1} - z_{z_1}}{\mu_1} \right) \bar{m}_w^h + \left(\frac{x_{z_1} z_q - x_q z_{z_1} - x_{gI} z_u + x_w z_g}{\mu_1} \right) \bar{m}_u + \\
 &\quad + \left(\frac{x_w z_q - x_q z_w}{\mu_1} + x_w - x_g - x_{gI} \right) \bar{m}_{x_1} + \left(\frac{z_u x_q - x_u z_q}{\mu_1} + z_w + z_g \right) \bar{m}_{z_1}, \\
 F_1^I &= F = (x_{x_1} z_{z_1} - x_{z_1} z_{x_1}) \left(\bar{m}_q + \frac{\bar{m}_w^i}{\mu_1} \right) + (x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u + x_{x_1} z_w - x_w z_{x_1}) \bar{m}_g + \\
 &\quad + [x_u z_{z_1} - x_{z_1} z_u - z_g x_{x_1} - (x_g - x_{gI}) z_{z_1}] \bar{m}_w^h + [z_w x_{z_1} - z_{z_1} x_w + z_g x_{z_1} - (x_g - x_{gI}) z_{z_1}] \bar{m}_u + \\
 &\quad + \left[\frac{x_{z_1} z_q - x_q z_{z_1}}{\mu_1} - z_g x_w + (x_g - x_{gI}) z_w \right] \bar{m}_{x_1} + \\
 &\quad + \left[\frac{z_{x_1} x_q - z_q x_{x_1}}{\mu_1} - z_g x_u - (x_g - x_{gI}) z_u + x_w z_u - x_u z_w \right] \bar{m}_{z_1}.
 \end{aligned}$$

$$G_1^I = G = (x_{x_1}z_{z_1} - x_{z_1}z_{x_1})(\bar{m}_g + \bar{m}_w^h) + [x_{z_1}z_w - x_wz_{z_1} + z_gx_{z_1} + (x_g - x_{gI})z_{z_1}]\bar{m}_{x_1} + \\ + [z_{x_1}x_w - z_wx_{x_1} - z_gx_{x_1} - (x_g - x_{gI})z_{x_1}]\bar{m}_{z_1}.$$

Kryteria stateczności Routha-Hurwitza, dotyczące małych zakłóceń ruchu ustalonego, stawiają warunek, aby wszystkie współczynniki równania charakterystycznego (8.13) były dodatnie:

$$(8.14) \quad B_1, C, D, E, F, G > 0$$

jak również, aby wyróżnik Routha był większy od zera [1]:

$$(8.15) \quad R = \Delta_0\Delta_2 - \Delta_1^2 > 0,$$

gdzie

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ F & E & D \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ D & C & B \\ 0 & G & F \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B & 1 & 0 \\ F & E & D \\ 0 & G & F \end{vmatrix}$$

gdzie

$$B = B_1, \quad C = C_1 + C_1^I, \quad D = D_1 + D_1^I, \quad E = E_1 + E_1^I, \quad F = F_1^I, \quad G = G_1^I,$$

Dla stwierdzenia czy szybowiec jest stateczny w locie holowanym wystarczy sprawdzić kryteria Routha-Hurwitza (8.14) i (8.15).

W przypadku rozwiązania równania (8.13) pierwiastki otrzymane mają postać

$$(8.16) \quad \bar{\lambda}_n^h = \bar{\xi}_n^h \pm i\bar{\eta}_n^h$$

i dla szybowca statecznego współczynniki tłumienia są $\bar{\xi}_n^h < 0$, tzn. ruch jest tłumiony i szybowiec jest stateczny dynamicznie.

Znając pierwiastki równania charakterystycznego (wartości własne), możemy obliczyć wektory własne korzystając z dwóch równań układu 8.12 o postaci

$$(8.17) \quad (\bar{\lambda}_n^2 - x_u\bar{\lambda}_n - x_{x_1})\bar{x}_1^n - (x_w\bar{\lambda}_n + x_{z_1})\bar{z}_1^n - \left(\frac{x_q}{\mu_1}\bar{\lambda}_n - x_g + x_w + x_{gI}\right)\vartheta^n = 0, \\ - (z_u\bar{\lambda}_n + z_{x_1})\bar{x}_1^n + (\bar{\lambda}_n^2 - z_w\bar{\lambda}_n - z_{z_1})\bar{z}_1^n - \left(\frac{z_q}{\mu_1}\bar{\lambda}_n + z_w + z_g\right)\vartheta^n = 0,$$

gdzie $\bar{\lambda}_n$ są to odpowiednie wartości własne, a \bar{x}_1^n , \bar{z}_1^n i ϑ^n odpowiadające im wektory własne.

Równania opisujące ruch szybowca po zakłóceniu otrzymamy w postaci

$$(8.18) \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{z}_1 \\ \vartheta \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^6 K_n \begin{bmatrix} \bar{x}_1^n \\ \bar{z}_1^n \\ \vartheta^n \end{bmatrix} e^{\bar{\lambda}_n \bar{t}}.$$

Stałe K_n obliczymy z warunków początkowych dla $\bar{t} = 0$.

9. Przykład liczbowy i wnioski

Jako przykład przeprowadzono obliczenia dla jednego z prototypowych szybowców wyczynowych. W obliczeniach zmieniano kolejno parametry holu tak, aby można było znaleźć wpływ poszczególnych czynników na stateczność szybowca w locie holowanym.

Jednocześnie przeprowadzono obliczenia stateczności w locie swobodnym i porównano je z wynikami obliczeń dla lotu holowanego. Do obliczeń przyjęto linię typu *C* najczęściej używaną w eksploatacji.

Na wykresach naniesiono liniami ciągłymi zmianę współczynników $\bar{\xi}$ tłumienia, a liniami przerywanymi zmianę częstości $\bar{\eta}$ w funkcji parametrów holu. Linie grube ciągłe i przerywane charakteryzują lot holowany szybowca, a linie cienkie lot swobodny szybowca w warunkach równoważnych lotowi holowanemu.

Wszystkie obliczenia wykonano na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER według programów w języku GIER-ALGOL III. Rozwiązanie równania charakterystycznego 6 stopnia przeprowadzono metodą Bairstowa [15], co pozwoliło na znalezienie pierwiastków zespolonych.

9.1. Wpływ położenia szybowca względem samolotu holującego na stateczność. Szybowiec jest holowany na linii o długości $l_0 = 50$ m ze stałą prędkością $V = 30$ m/sec. Szybowiec może przemieszczać się w płaszczyźnie pionowej $z_1 = \pm 20$ m względem linii lotu samolotu holującego. Zmianę zapasu stateczności statycznej przedstawionej na rys. 9 obliczono z (7.4), (7.8) i (7.3).

Po rozwiązaniu równania charakterystycznego (8.13) otrzymano 6 pierwiastków (8.16), które stanowią wartości własne układu. Występują dwa pierwiastki zespolone sprzężone $\bar{\lambda}_1^h = \bar{\xi}_1^h \pm i\bar{\eta}_1^h$, $\bar{\lambda}_2^h = \bar{\xi}_2^h \pm i\bar{\eta}_2^h$, odpowiadające ruchom okresowym szybowca, oraz dwa pierwiastki rzeczywiste $\bar{\lambda}_3^h = \bar{\xi}_3^h$ i $\bar{\lambda}_4^h = \bar{\xi}_4^h$, odpowiadające ruchom aperiodycznym. Zmianę wartości własnych w zależności od położenia przedstawiono na rys. 10.

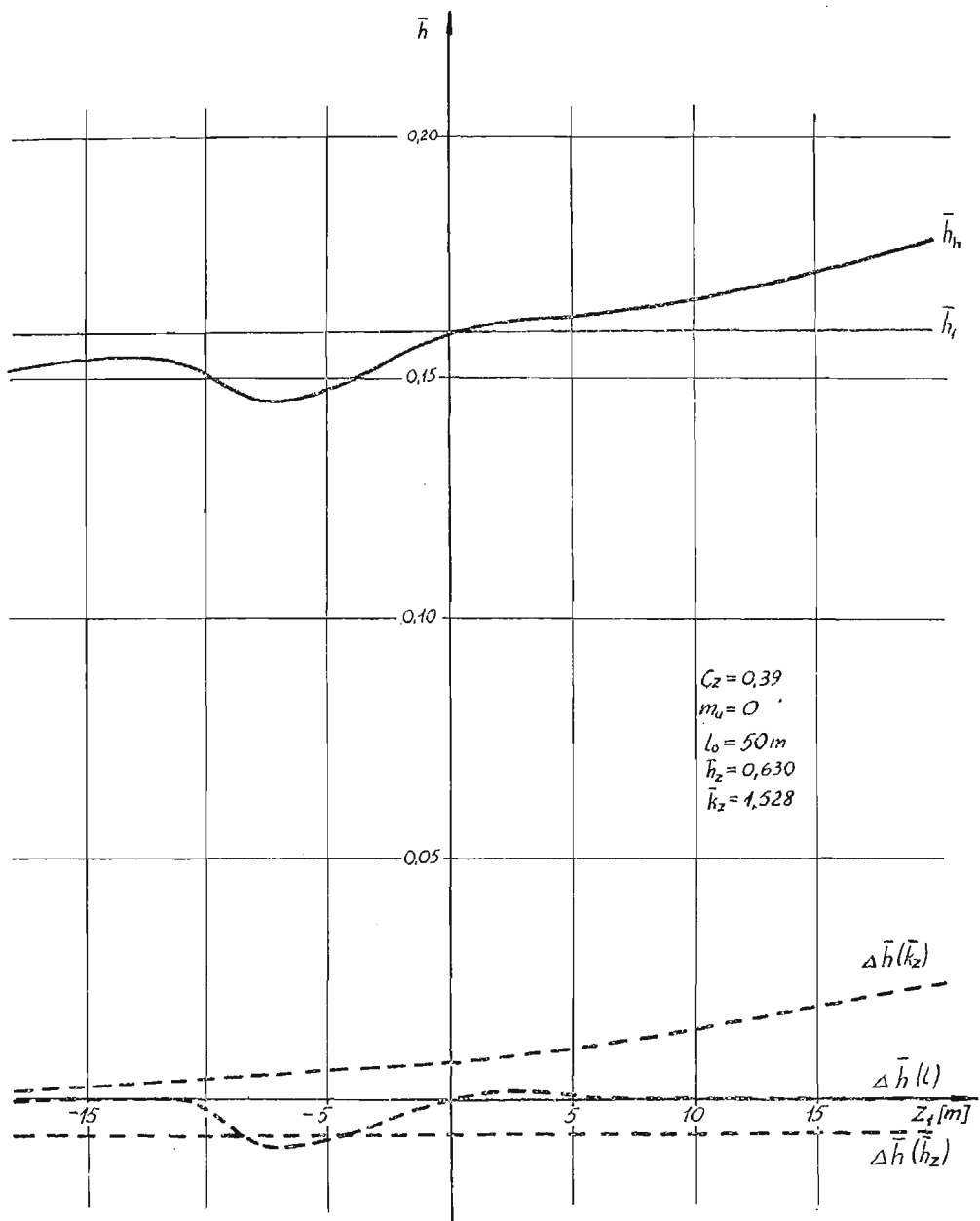
Przykładowo dla obranego kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$ podano poniżej obliczone z równań (8.17) wektory własne, co pozwoliło na właściwe określenie postaci własnych układu.

$\bar{\lambda}_1^h$	$-2,550 \pm i 2,541$	$0,168 \pm i 0,216$	$-0,256$	$-0,017$
x_1^n	$1 \pm i$	$1 \pm i$	1	1
\bar{z}_1^n	$0,046 \pm i 2,650$	$2,105 \pm i 0,641$	$-0,121$	$23,800$
ϑ^n	$0,476 + i 415$	$0,385 \pm i 33,200$	$0,003$	$0,411$

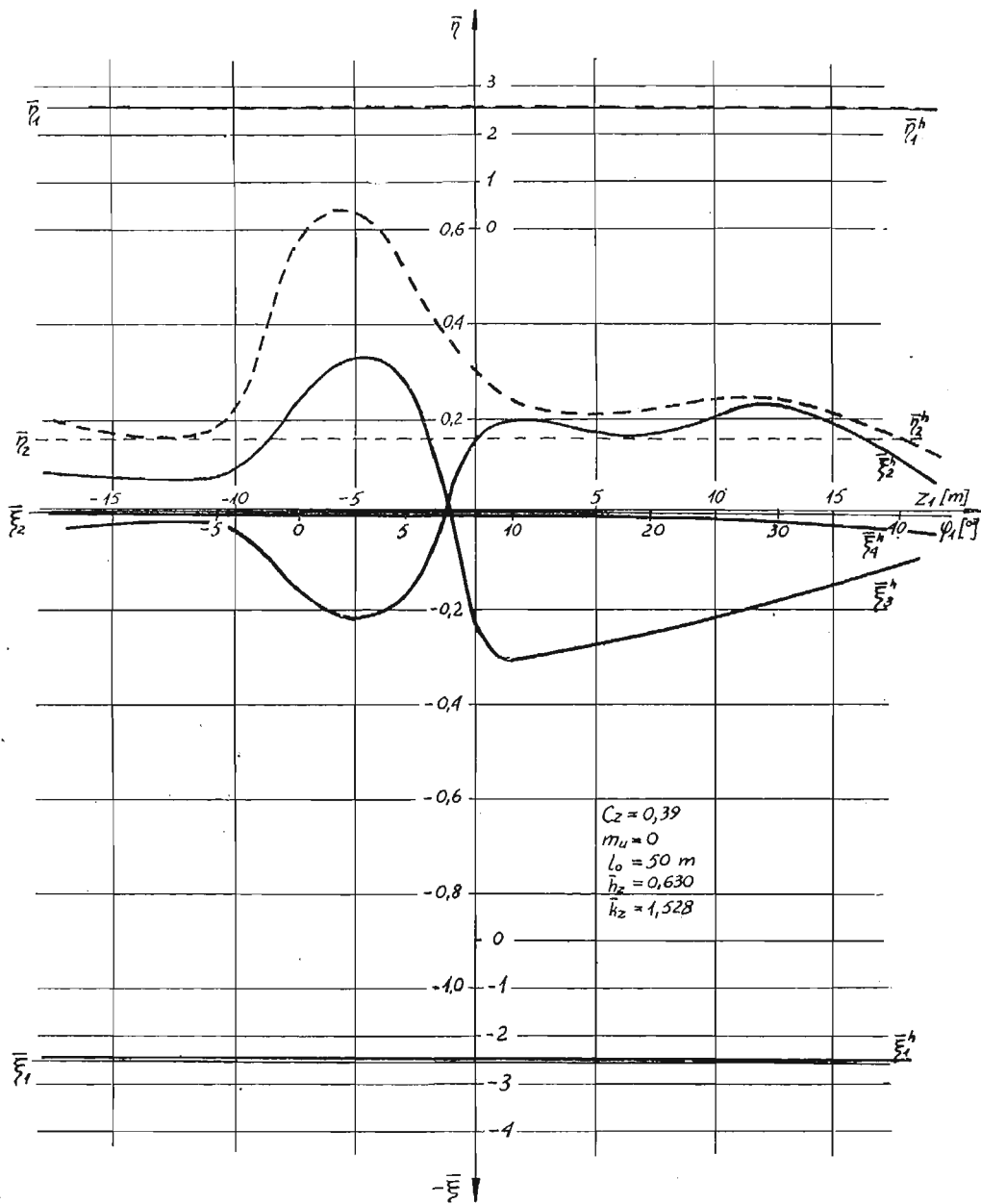
Wartości własne $\bar{\lambda}_1^h$ odpowiadają szybkim silnie tłumionym oscylacjom (duża częstość oscylacji) wokół środka ciężkości szybowca. Wartości własne $\bar{\lambda}_3^h$ odpowiadają aperiodycznym słabo tłumionym przesunięciom podłużnym szybowca, natomiast wartości własne $\bar{\lambda}_4^h$ charakteryzują aperiodyczne bardzo słabo tłumione przemieszczenia pionowe szybowca.

Wartość własna $\bar{\lambda}_2^h$ charakteryzuje okresowe ruchy fugoidalne [3] i [4] (o małej częstości, słabo tłumione). Ma ona wpływ na wszystkie trzy rodzaje ruchów. Najsilniej wpływa na oscylacje wokół środka ciężkości, a najmniej na przesunięcia poziome.

Obliczenie zmian \bar{x} , \bar{z} i ϑ w funkcji czasu (8.18) w zależności od warunków początkowych wskazuje, że największy wpływ na stateczność szybowca w locie holowanym mają zakłócenia powodujące zadzieranie szybowca. Przesunięcia poziome wpływają silnie na oscylacje zaraz po zakłóceniu, natomiast przesunięcia pionowe uwidaczniają się po pewnym czasie (narastanie stopniowe amplitudy) i są słabe.



Rys. 9. Zmiana «zapasu stateczności statycznej» szybowca w funkcji położenia pionowego względem samolotu holującego



Rys. 10. Zmiana współczynników tłumienia $\bar{\xi}$ i częstości $\bar{\eta}$ w funkcji położenia pionowego względem samolotu holującego

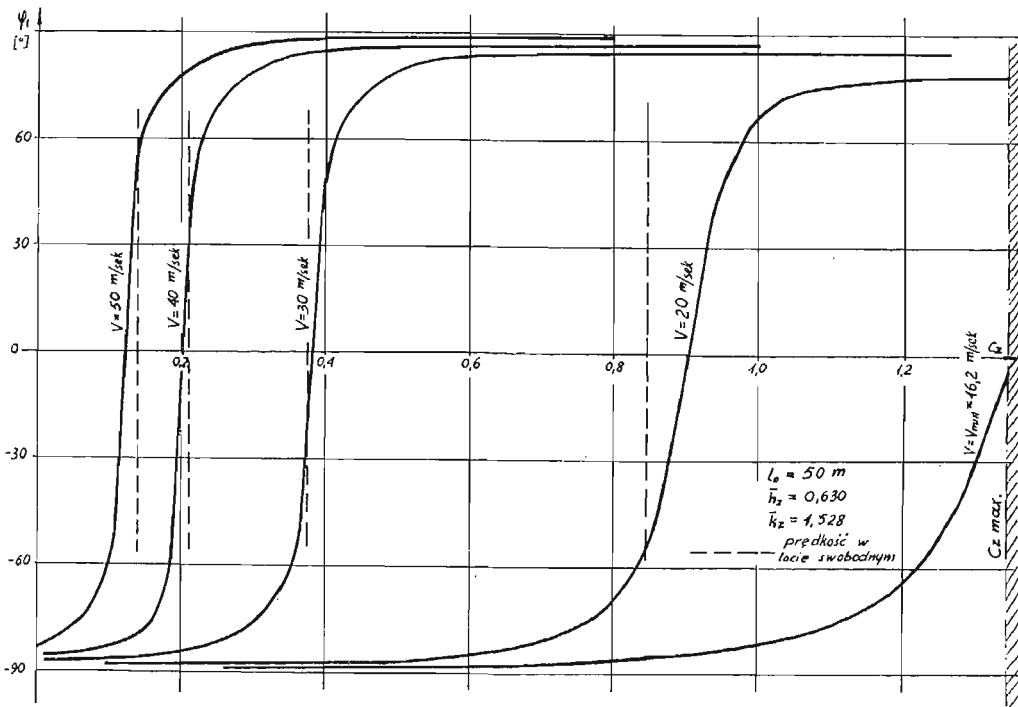
Zmiana położenia szybowca względem linii lotu samolotu holującego ma decydujący wpływ na wahania fugoidalne (wartości własne $\bar{\lambda}_2^h$) i aperiodyczne ruchy podłużne szybowca ($\bar{\lambda}_3^h$) (rys. 10). W locie szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego otrzymano ruchy fugoidalne tłumione ($\bar{\xi}_2^h < 0$) i wahania podłużne nie tłumione ($\bar{\xi}_3^h > 0$).

Zmiana położenia szybowca nie wpływa na oscylacje szybkie ($\bar{\xi}_1^h$, i $\bar{\eta}_1^h$) jak również na aperiodyczne przesunięcia pionowe ($\bar{\xi}_4^h$).

Porównując wartości własne charakteryzujące lot swobodny szybowca widzimy (rys. 10), że hol zupełnie nie wpływa na oscylacje szybkie ($\bar{\xi}_1^h = \bar{\xi}_1$ i $\bar{\eta}_1^h = \bar{\eta}_1$), natomiast silnie wpływa na tłumienie wahań fugoidalnych ($\bar{\xi}_2^h \neq \bar{\xi}_2$) przy niewielkich zmianach częstości ($\bar{\eta}_2^h \approx \bar{\eta}_2$). W locie holowanym w stosunku do swobodnego występują dwie dodatkowe wartości własne $\bar{\lambda}_3$ i $\bar{\lambda}_4$, które przeważnie są wielkościami rzeczywistymi i charakteryzują ruchy aperiodyczne.

Przewyższenie szybowca w stosunku do samolotu holującego powoduje wzrost zapasu stateczności statycznej, rys. 9, nie powoduje to jednak wzrostu stateczności dynamicznej.

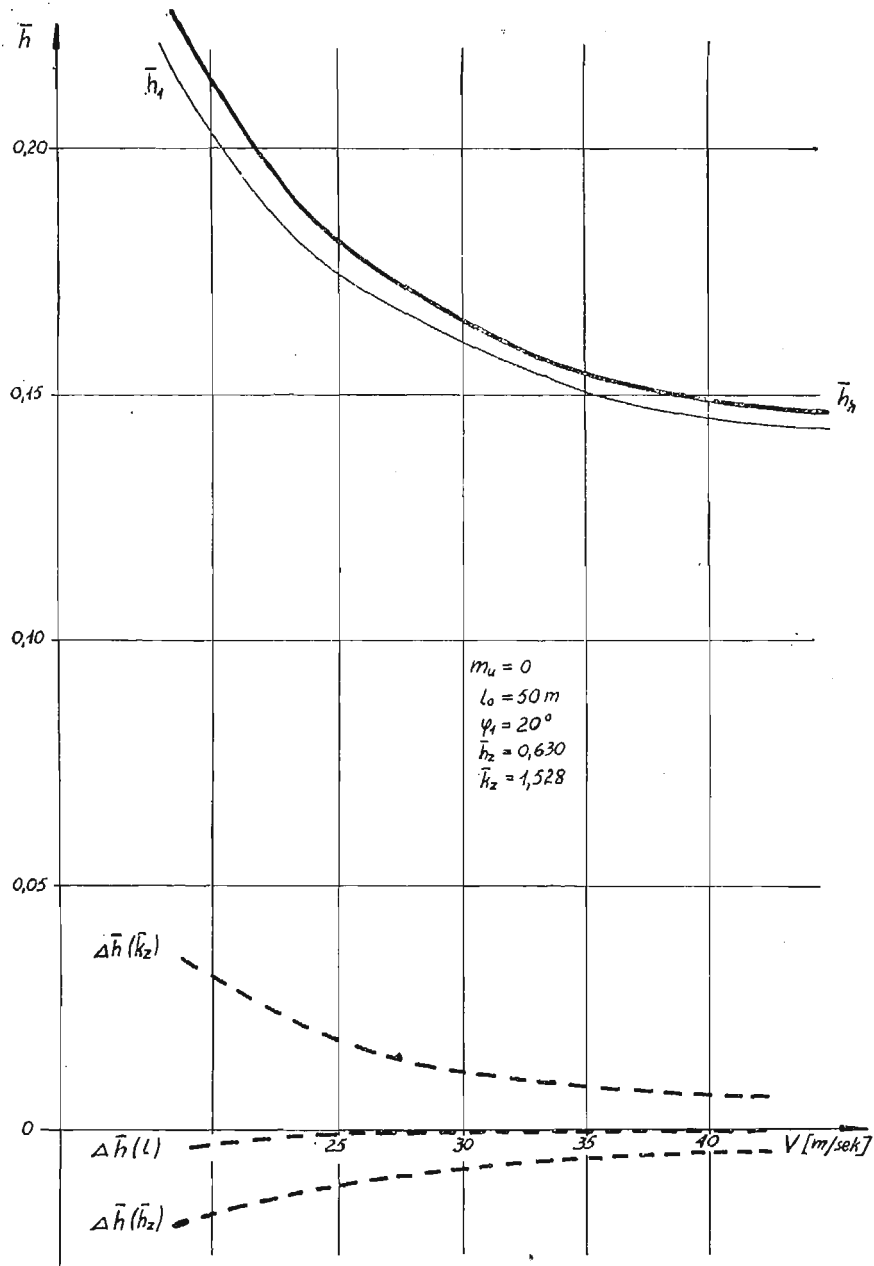
9.2. Wpływ prędkości holu na stateczność szybowca. Szybowiec jest holowany na linii C o długości $l_0 = 50$ m ze zmienną prędkością.



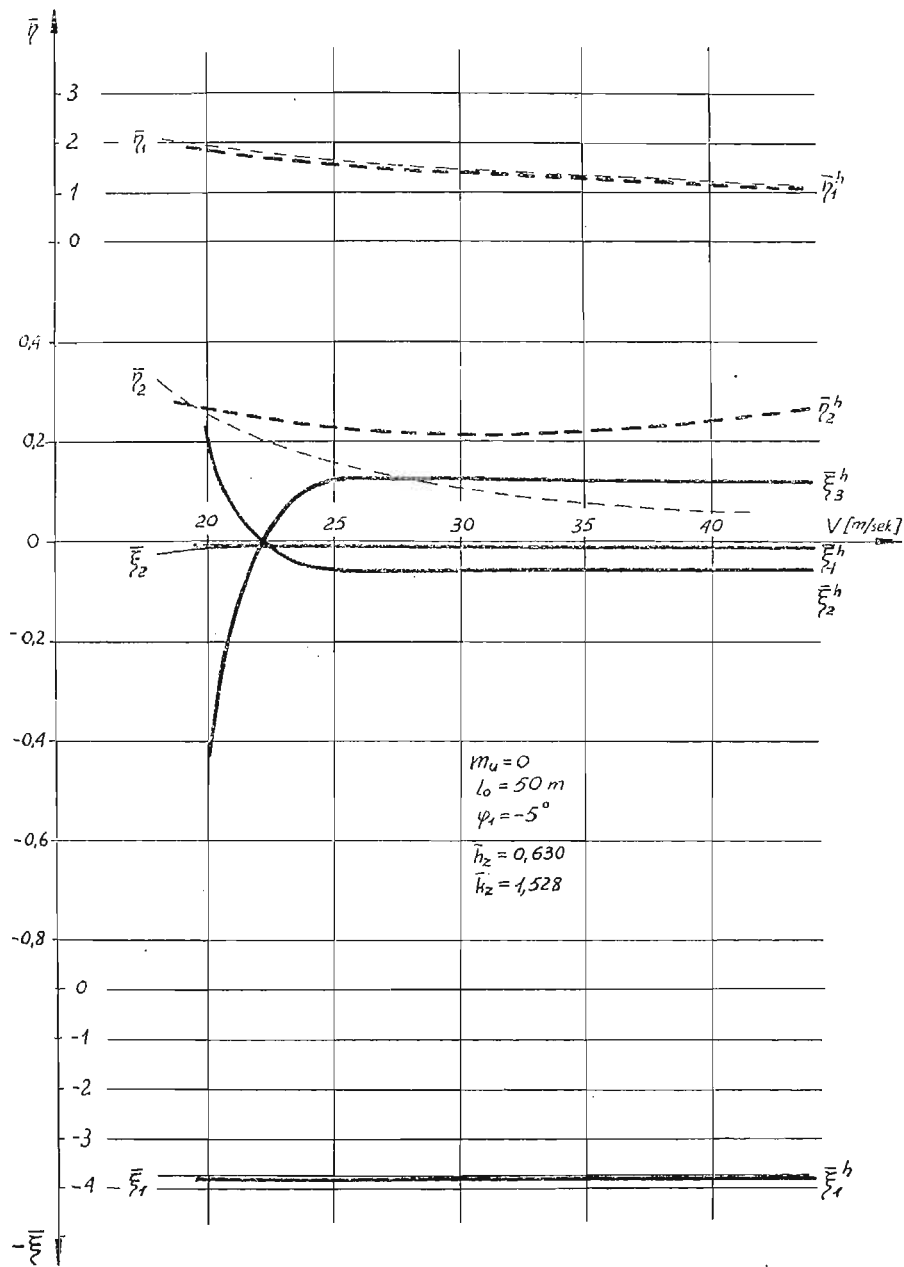
Rys. 11. Krzywe równowagi szybowca zmiany kąta holu φ_1 w funkcji współczynnika siły nośnej C_z dla różnych prędkości holu

Z (6.8) obliczono dla kilku prędkości holu zmianę kąta holu φ_1 w zależności od współczynnika siły nośnej szybowca C_z . Wykresy równowagi naniesiono na rys. 11.

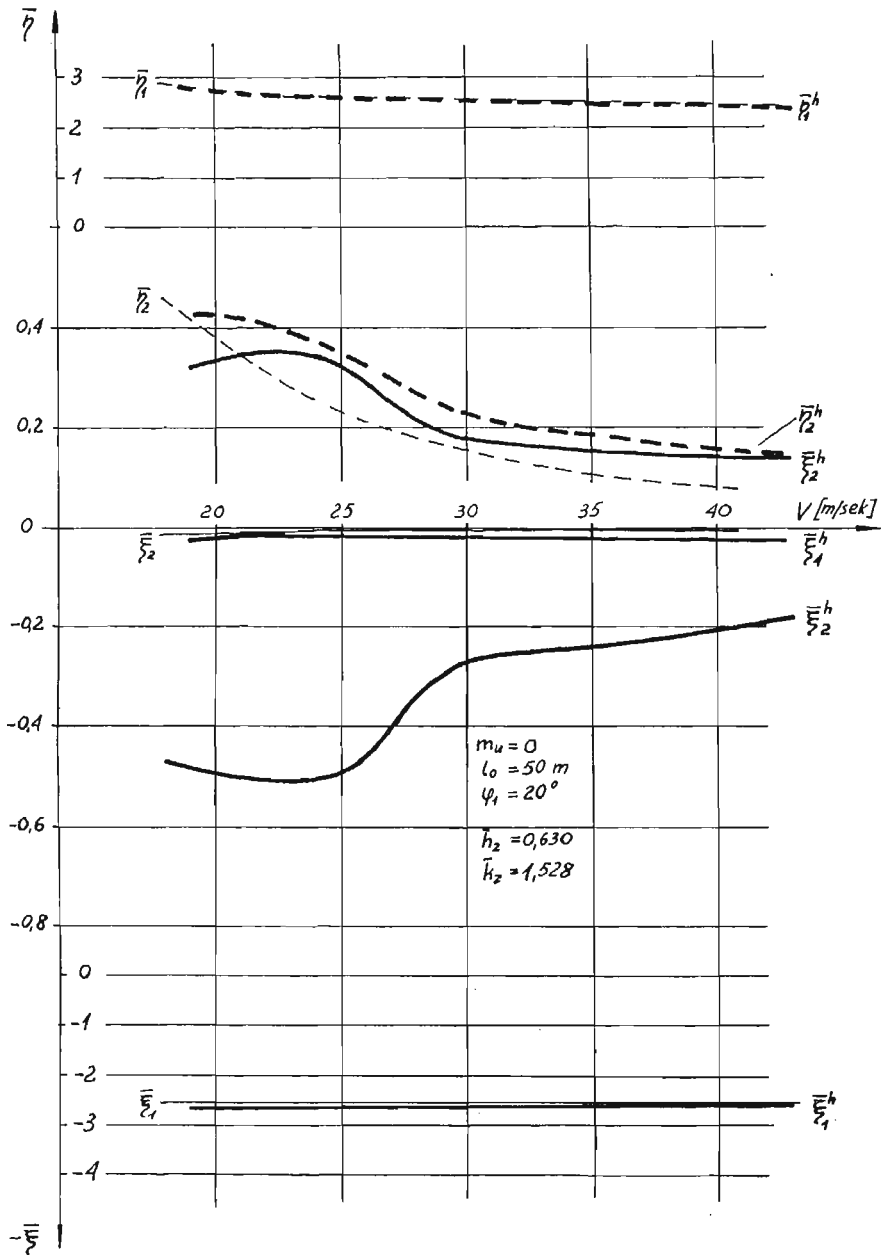
Widzimy z rys. 11, że hol szybowca z określoną prędkością i na określonej pozycji



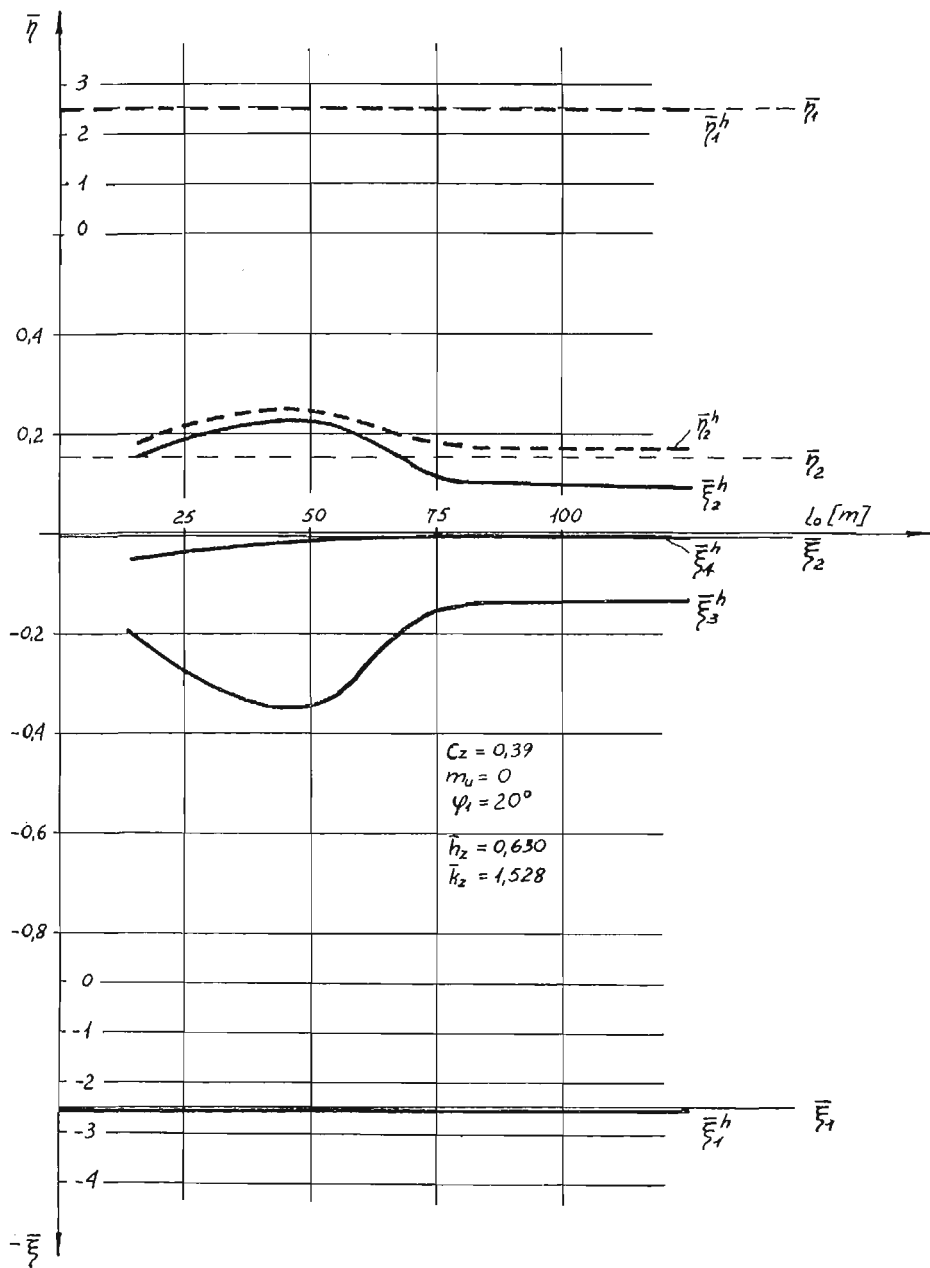
Rys. 12. Zmiana «zapasu stateczności statycznej» szybowca w funkcji prędkości holu dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



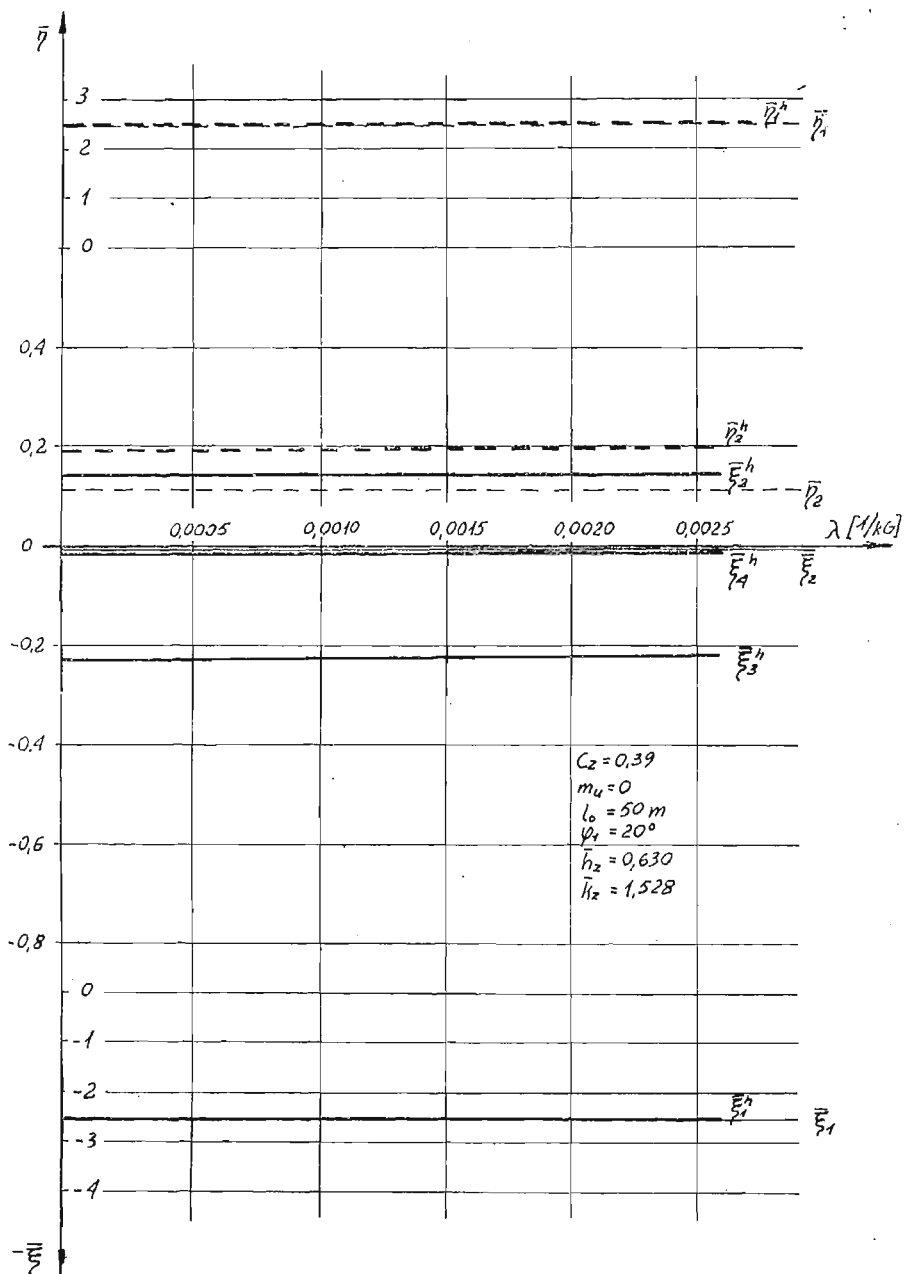
Rys. 13. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji prędkości holu dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 14. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztybowca w funkcji prędkości holu dla kąta holu $\varphi_1 = -5^\circ$



Rys. 15. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji długości liny holowniczej dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 16. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztybowca w funkcji współczynnika wydłużalności liny typu C dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$

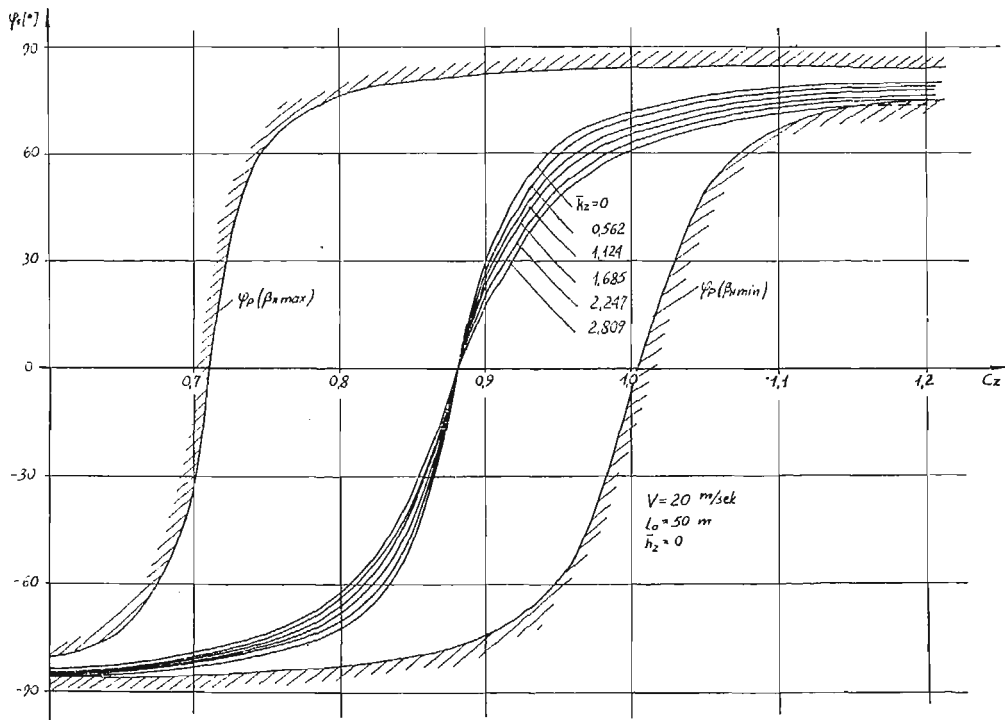
względem samolotu holującego (φ_1) może odbywać się tylko na jednej wartości C_z zapewniającej równowagę.

W locie holowanym osiągnięcie minimalnej prędkości V_{min} szybowca, odpowiadającej lotowi swobodnemu, jest możliwe jedynie w położeniu poniżej linii lotu samolotu holującego. W położeniach górnych *przepadnięcie* szybowca nastąpi na prędkości większej od prędkości minimalnej, $V_{minh} > V_{min}$.

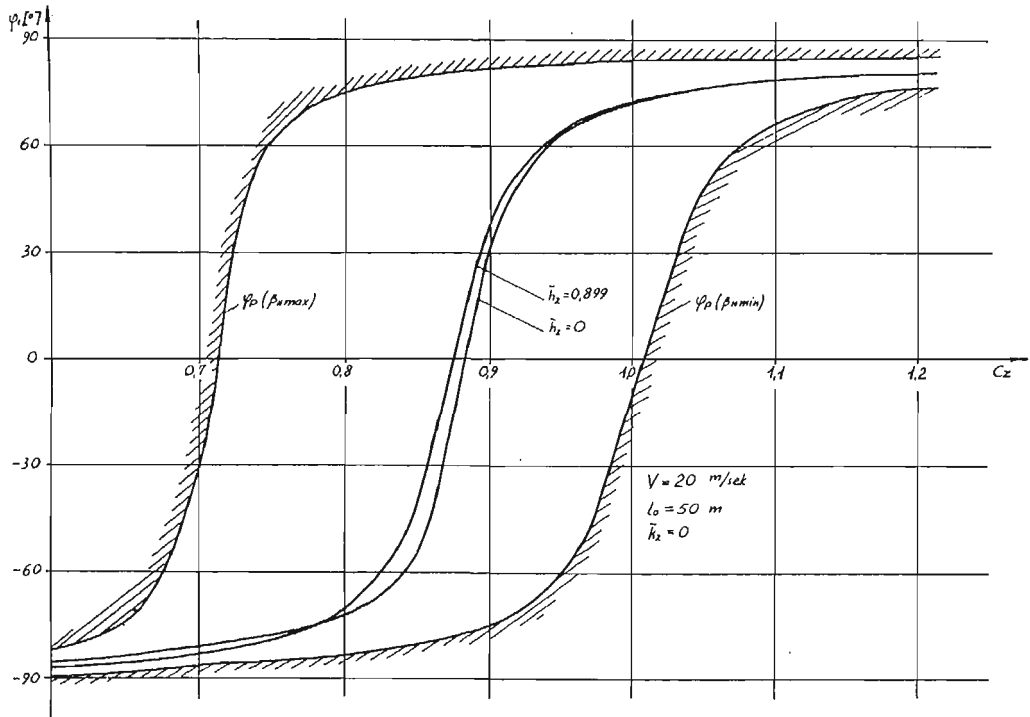
Zachowując stały kąt holu $\varphi_1 = 20^\circ$ obliczono dla różnych prędkości holu zmiany *zapasu stateczności statycznej* (rys. 12) i wartości własnych (rys. 13) oraz dla kąta holu $\varphi_1 = -5^\circ$ (rys. 14) wartości własne.

Widzimy, że zmiana prędkości holu nie wpływa na tłumienie oscylacji szybkich ($\xi_1^h = \bar{\xi}_1$) i niewiele wpływa na zmianę częstości ($\bar{\eta}_1^h \approx \bar{\eta}_1$), nie daje różnic między lotem holowanym i swobodnym, nie wpływa również na aperiodyczne ruchy pionowe ($\bar{\xi}_4^h = \text{const}$) (rys. 13 i 14). Natomiast ze wzrostem prędkości następuje zwiększenie tłumienia wahań fugoidalnych $\bar{\xi}_2^h$ szczególnie dla położenia szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego (rys. 13 i 14). Zmiana zapasu stateczności statycznej (rys. 12) ma taki sam charakter jak dla lotu swobodnego.

9.3. Wpływ długości i wydłużalności linii holowniczej na stateczność szybowca. Obliczenia przeprowadzono dla szybowca holowanego z prędkością $V = 30$ m/sek na kącie holu $\varphi_1 = 20^\circ$.



Rys. 17. Krzywe równowagi szybowca, zmiany kąta holu φ_1 w funkcji współczynnika siły nośnej C_z dla różnych poziomych położenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca



Rys. 18. Krzywe równowagi szybowca dla różnych pionowych położeń zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca

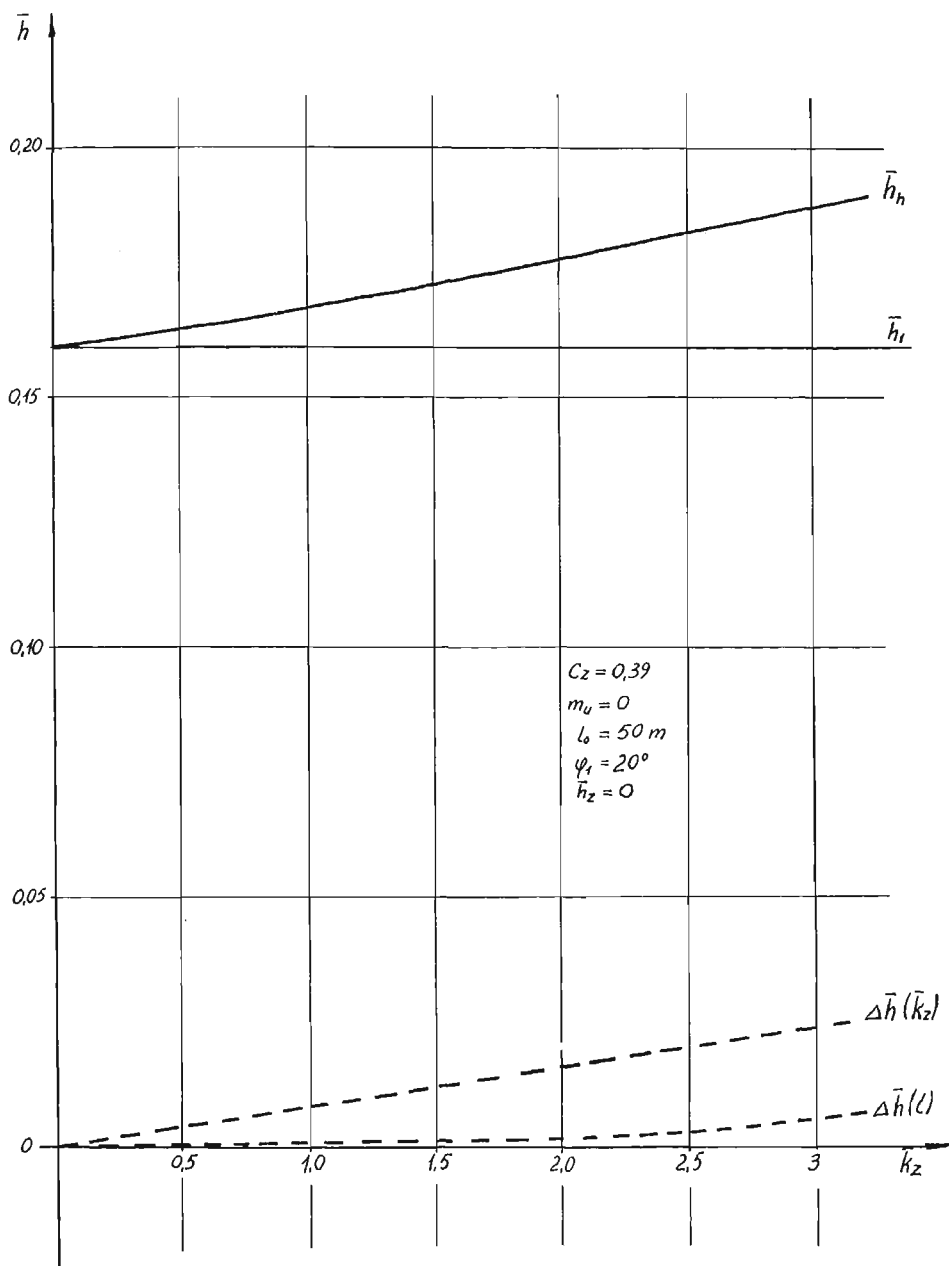
Lina holownicza jest typu C o zmiennej długości (rys. 15). Następnie przyjęto liny C o długości $l_0 = 50$ m i zmieniano dla niej współczynnik wydłużalności λ rys. 16.

Zmiana długości liny holowniczej i jej wydłużalności nie powoduje zmian *zapasu stateczności statycznej* w stosunku do lotu swobodnego (jeżeli lot odbywa się na stałym kącie holu $\varphi_1 = \text{const}$).

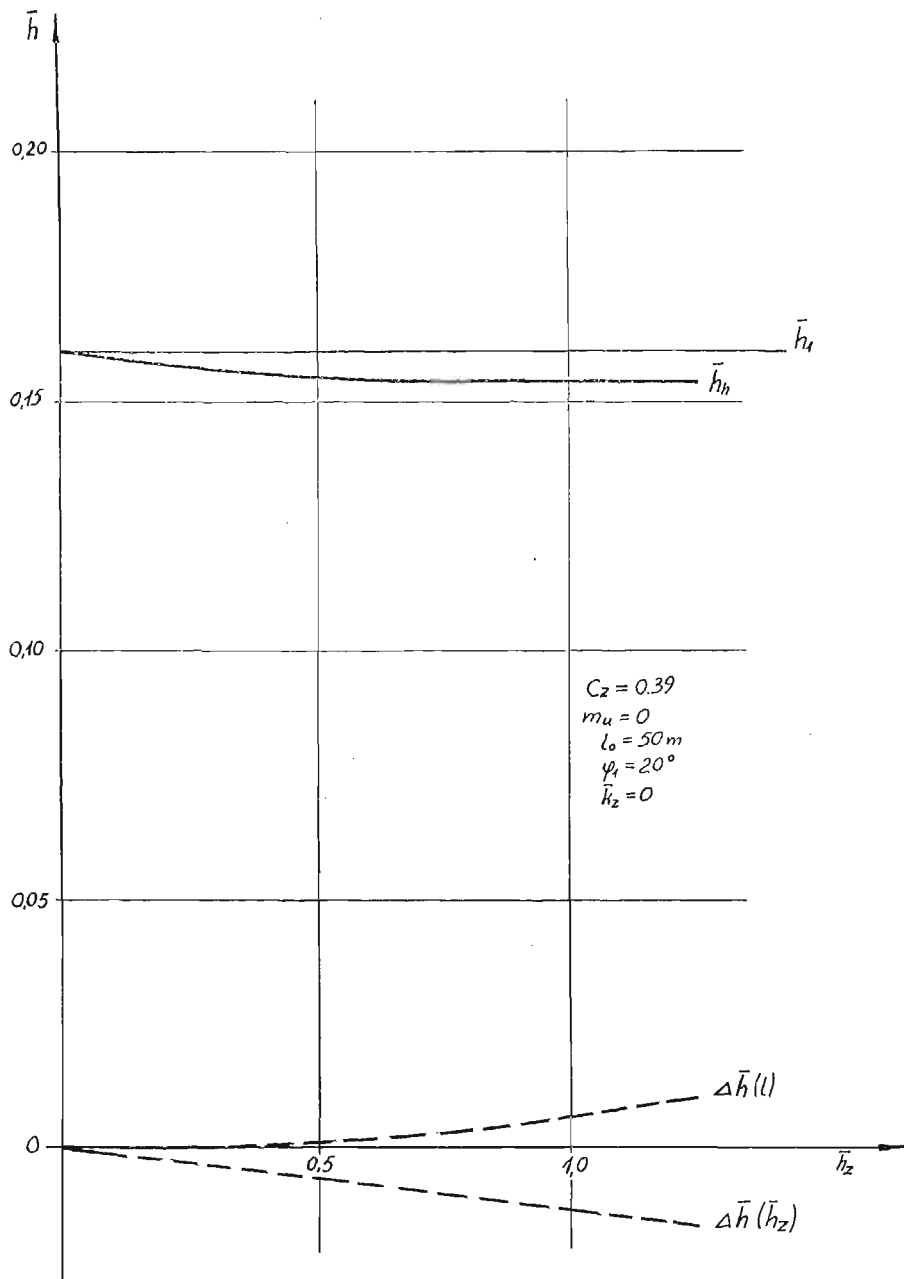
Zmiana długości liny wpływa jedynie na wahania fugoidalne ($\bar{\xi}_2^h, \bar{\eta}_2^h$) i aperiodyczne przemieszczenia podłużne ($\bar{\xi}_3^h$), nie ma natomiast wpływu na oscylacje szybkie (rys. 15). Wydłużalność liny nie wpływa na zmianę wartości własnych (rys. 16).

9.4. Wpływ położenia zaczepu holowniczego względem środka ciężkości szybowca na równowagę i stateczność. Rozpatrzono przypadek lotu holowanego z prędkością $V = 30$ m/sec na linii typu C o długości $l_0 = 50$ m przy stałym kącie holu $\varphi_1 = 20^\circ$. Zmieniano położenie zaczepu holującego względem środka ciężkości przesuwając go od środka ciężkości poziomo do przodu \bar{k}_z przy stałym $\bar{h}_z = 0$ i pionowo w dół \bar{h}_z przy stałym $\bar{k}_z = 0$.

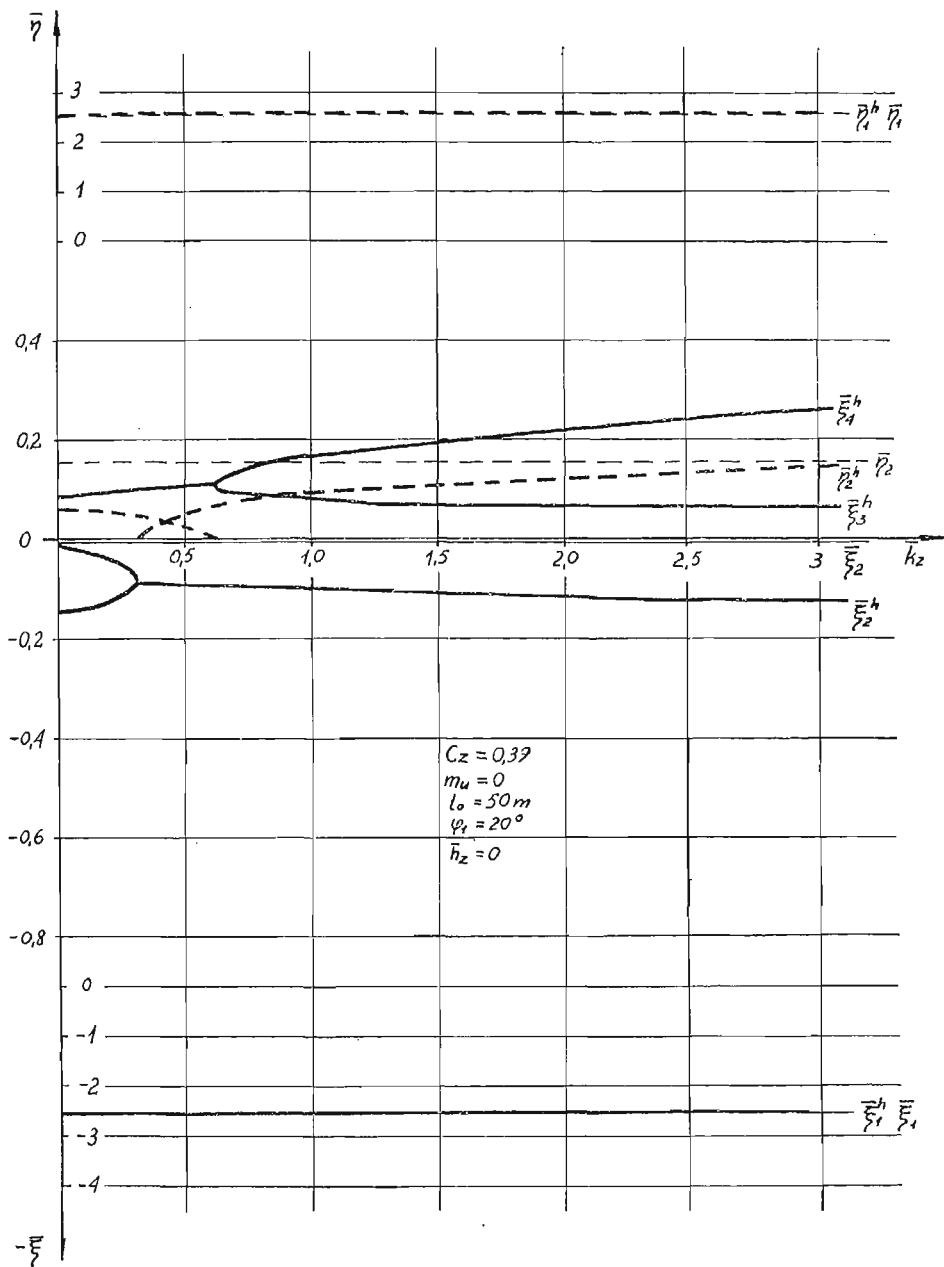
Na rysunku 17 przedstawiono krzywe równowagi obliczone wg (6.8) w zależności od poziomego przesunięcia zaczepu holowniczego. Wpływ przesunięcia pionowego zaczepu przedstawiono na rys. 18. Widzimy, że przesunięcie zaczepu holowniczego do przodu powoduje większe pochylenie krzywych równowagi, co w efekcie pozwala na większe ruchy sterem wysokości w celu uzyskania równowagi. Jest to czynnik ważny dla szybowców szkolnych. Przesunięcie zaczepu holowniczego w pionie niewiele wpływa na równowagę.



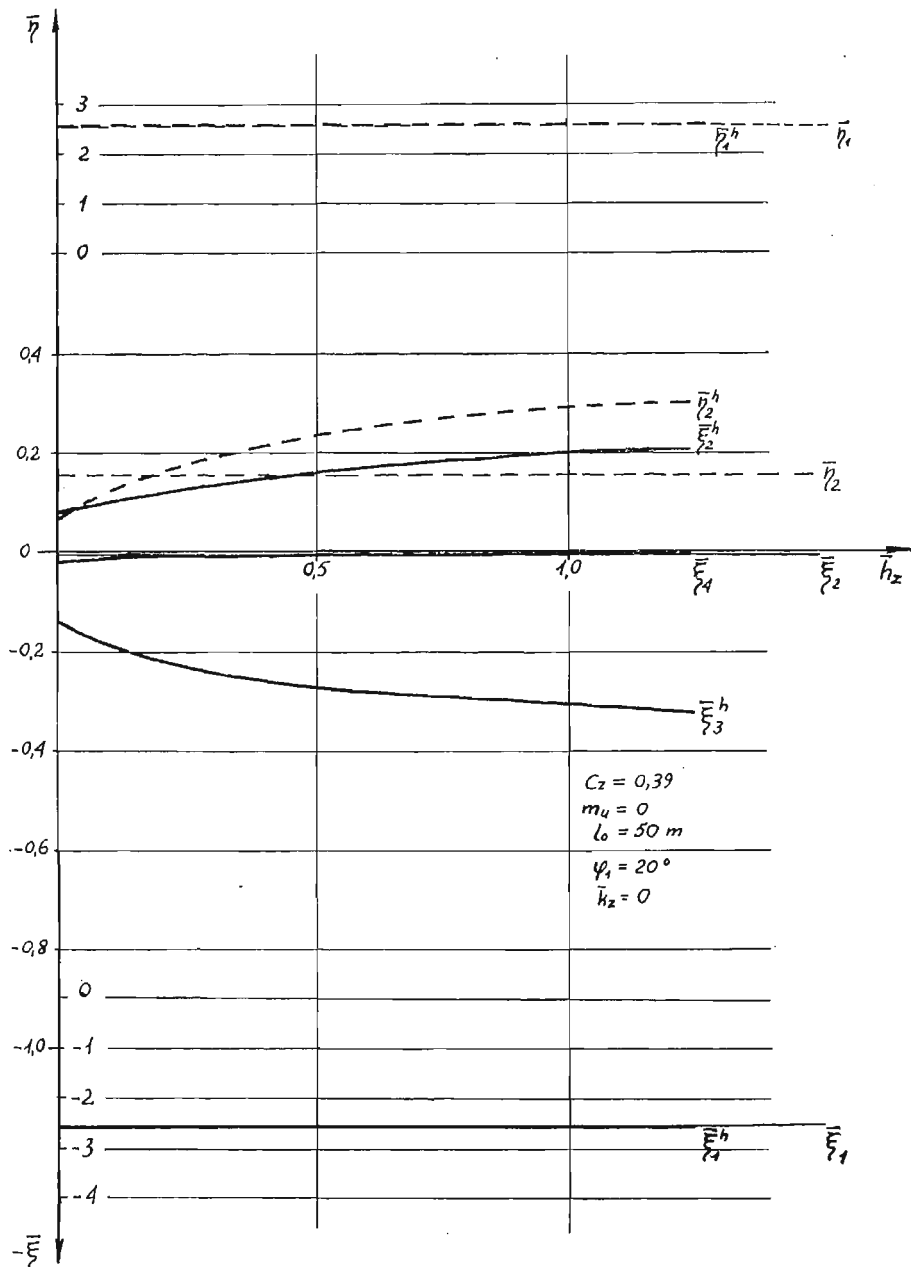
Rys. 19. Zmiana „zapasu stateczności statycznej” w funkcji położenia poziomego zaczepu holowniczego szynowca dla kąta hołu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 20. Zmiana «zapasu stateczności statycznej» w funkcji położenia pionowego zaczepu holowniczego szybowca dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 21. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywca w funkcji położenia poziomego zaczepu holowniczego sztywca dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$



Rys. 22. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywności w funkcji położenia pionowego zaczepu holowniczego sztywności dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$

Przesunięcie zaczepu holowniczego poziomo do przodu powoduje zawsze silny wzrost *zapasu stateczności statycznej* (rys. 19), natomiast przesunięcie zaczepu pionowo w dół zmniejsza zapas stateczności statycznej (rys. 20).

Zmiany położenia zaczepu holowniczego nie mają wpływu na oscylacje szybkie ($\bar{\xi}_1^h, \bar{\eta}_1^h$), natomiast silnie wpływają na wahania fugoidalne ($\bar{\xi}_2^h, \bar{\eta}_2^h$) i przesunięcia aperiodyczne ($\bar{\xi}_3^h$ i $\bar{\xi}_4^h$).

Przesunięcie zaczepu poziomo do przodu wpływa na tłumienie ($\bar{\xi}_2^h < 0$) wahań fugoidalnych i powoduje wzrost rozbieżności ruchów aperiodycznych ($\bar{\xi}_3^h > 0$ i $\bar{\xi}_4^h > 0$). Zmiana położenia zaczepu pionowo w dół od środka ciężkości wywołuje wzrost tłumienia ruchów aperiodycznych i rozbieżność wahań fugoidalnych.

Z powyższych wyników widzimy, że korzystniejsze jest położenie przednie zaczepu holowniczego ze względów na równowagę i stateczność szybowca w locie holowanym.

9.5. Wpływ zmiany zapasu stateczności statycznej na stateczność dynamiczną szybowca. Na zapas stateczności statycznej szybowca mają wpływ parametry konstrukcyjne, charakterystyka aerodynamiczna oraz warunki holu.

Na rysunkach 23 i 24 przedstawiono zmiany wartości własnych $\bar{\lambda}^h$ w przypadku holu z prędkością odpowiadającą współczynnikowi siły nośnej $C_z = 0,75$ dla dwóch położen szybowca: górnego rys. 23 i dolnego rys. 24.

Rysunki 25 i 26 przedstawiają zależność $\bar{\lambda}^h$ dla tych samych położen szybowca, lecz przy współczynniku siły nośnej $C_z = 0,22$, co odpowiada większej prędkości.

Z powyższych wykresów wynika, że zarówno tłumienie jak i częstota oscylacji szybkich w locie holowanym i swobodnym są identyczne (rys. 23–26).

Wzrost zapasu stateczności statycznej wpływa ustateczniająco, gdyż następuje zmniejszenie dodatnich wartości $\bar{\xi}^h$.

Ważnym czynnikiem wpływającym na stateczność jest prędkość holu (lot na mniejszych C_z) oraz położenie szybowca względem samolotu holującego.

Porównując wyniki rys. 26 z wynikami rys. 23–25 widzimy, że najkorzystniejszymi warunkami lotu holowanego jest większa prędkość holu (w przypadku rozpatrywanego szybowca $V_h > 1,4 V_{\min}$) oraz położenie szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego.

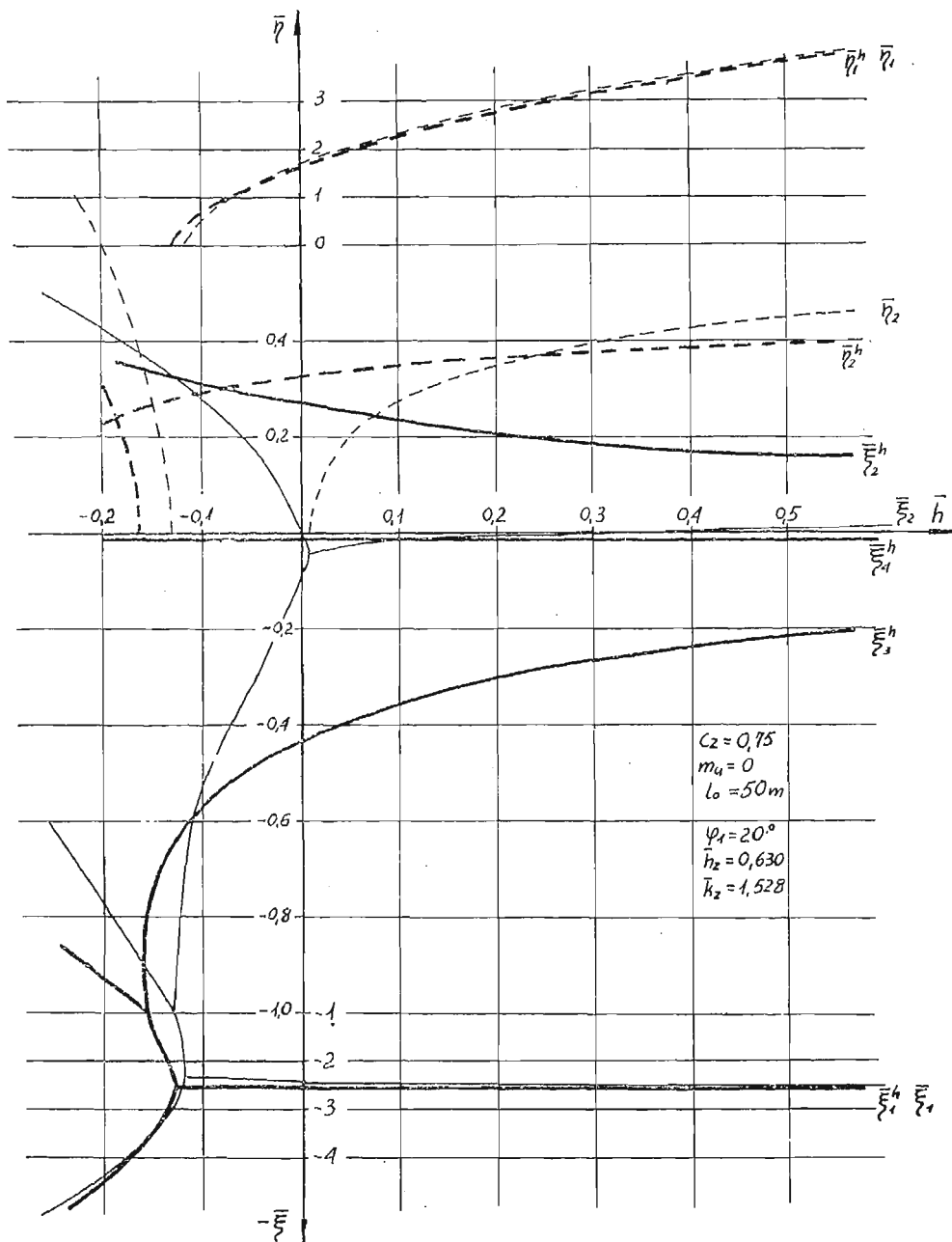
9.6. Wnioski. Na stateczność szybowca w locie holowanym mają wpływ parametry holu jak również rozwiązanie konstrukcyjne i aerodynamiczne szybowca. Z rozważań przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach wypływają następujące wnioski.

a. *Konstrukcyjne.* Zaczep holowniczy szybowca powinien być umieszczony jak najdalej w przodzie przed środkiem ciężkości (o ile jest to możliwe nad środkiem ciężkości szybowca). Powoduje to wzrost zapasu stateczności statycznej, tłumienie wahań fugoidalnych oraz zapobiega gwałtownym zmianom pionowego położenia szybowca przy małych ruchach drążka sterowego.

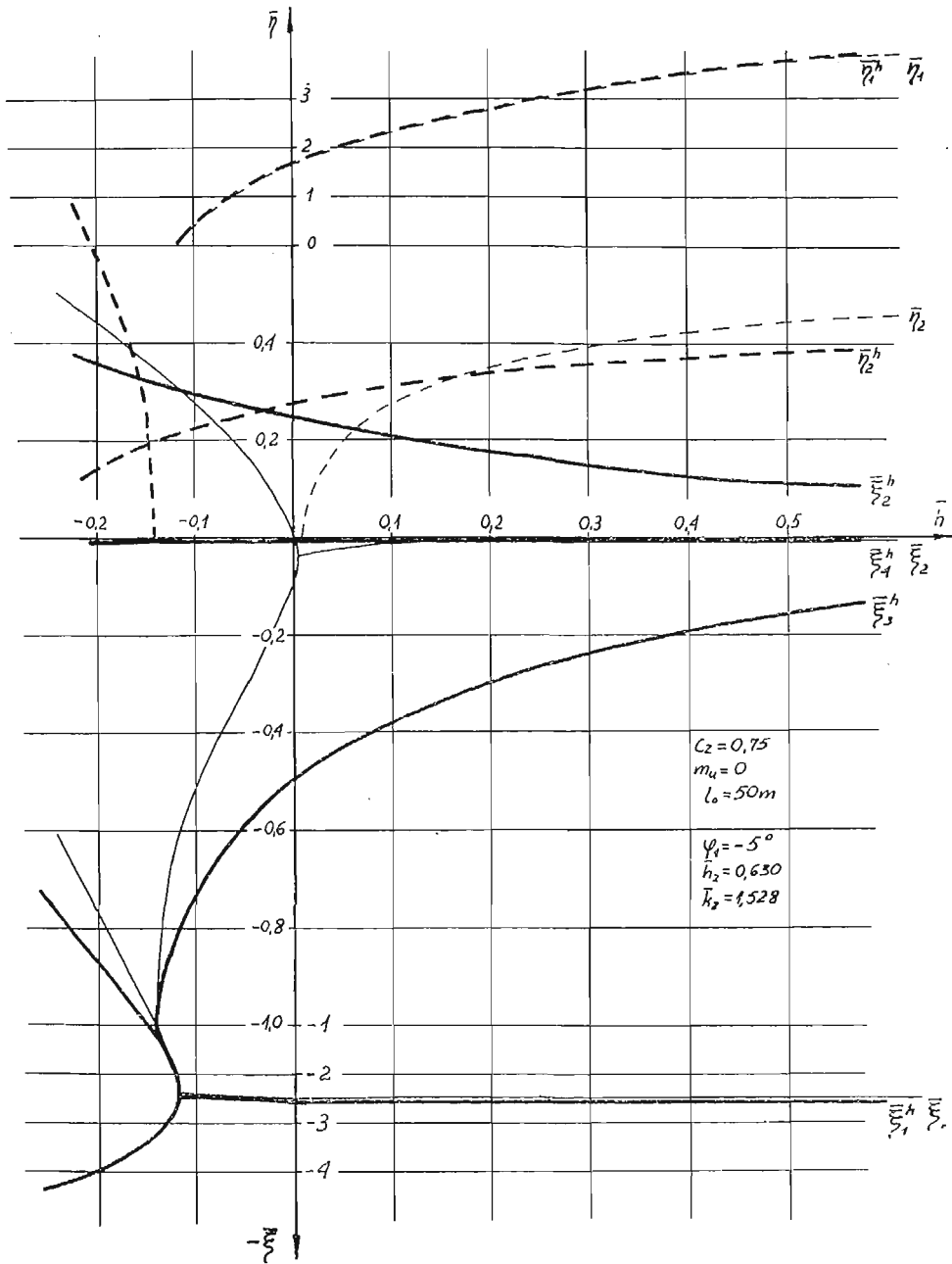
Zapas stateczności statycznej zapewniający właściwy pilotaż szybowca w locie swobodnym jest wystarczający dla lotu holowanego.

b. *Wnioski wynikające ze zmian parametrów holu.* Ze względu na możliwości wcześniejszego *przecignięcia* szybowca w locie holowanym powinna być określona minimalna prędkość holu dla danego szybowca, $V_{h \min} > V_{\min}$.

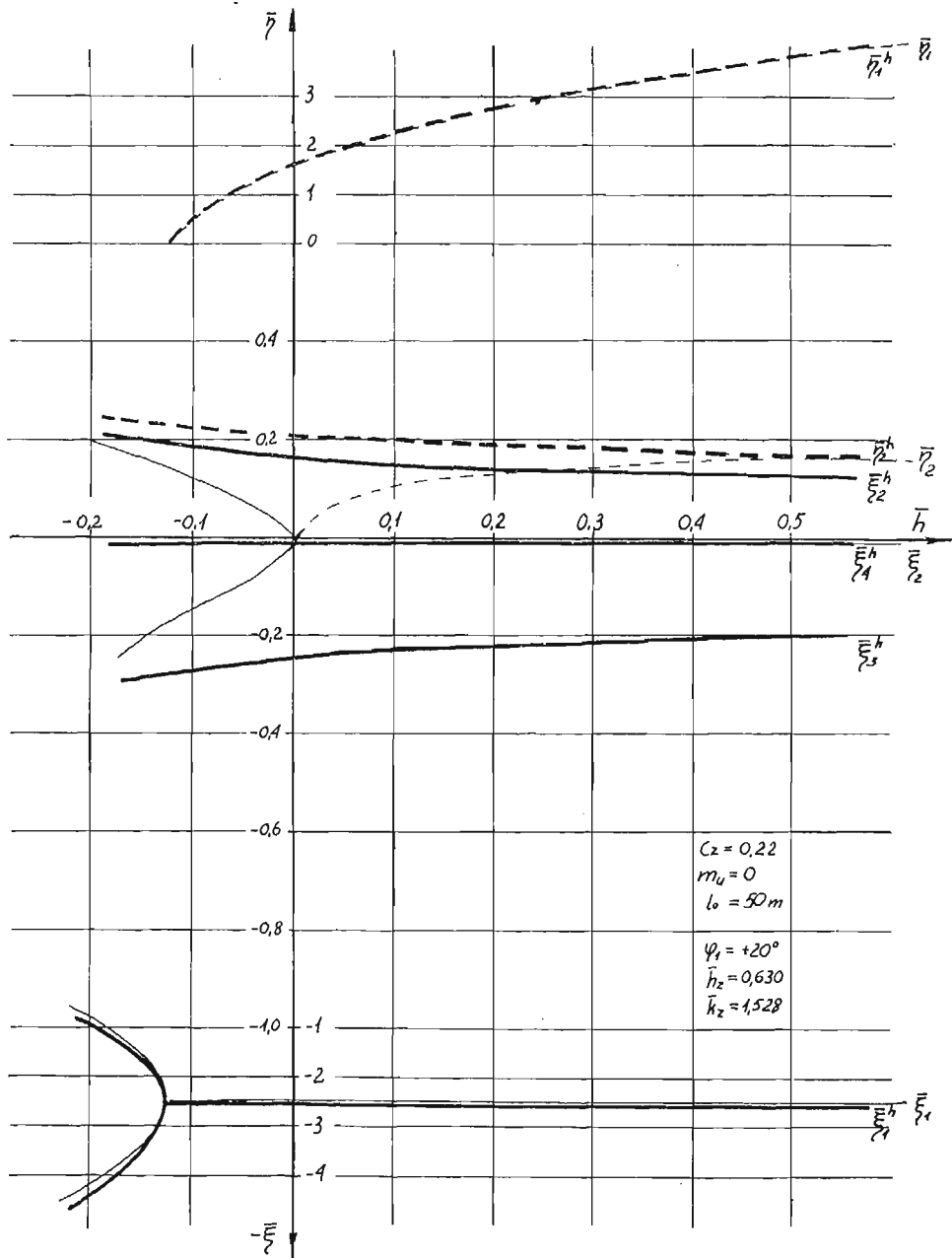
Większe prędkości holu zapewniają zwiększenie stateczności szybowca.



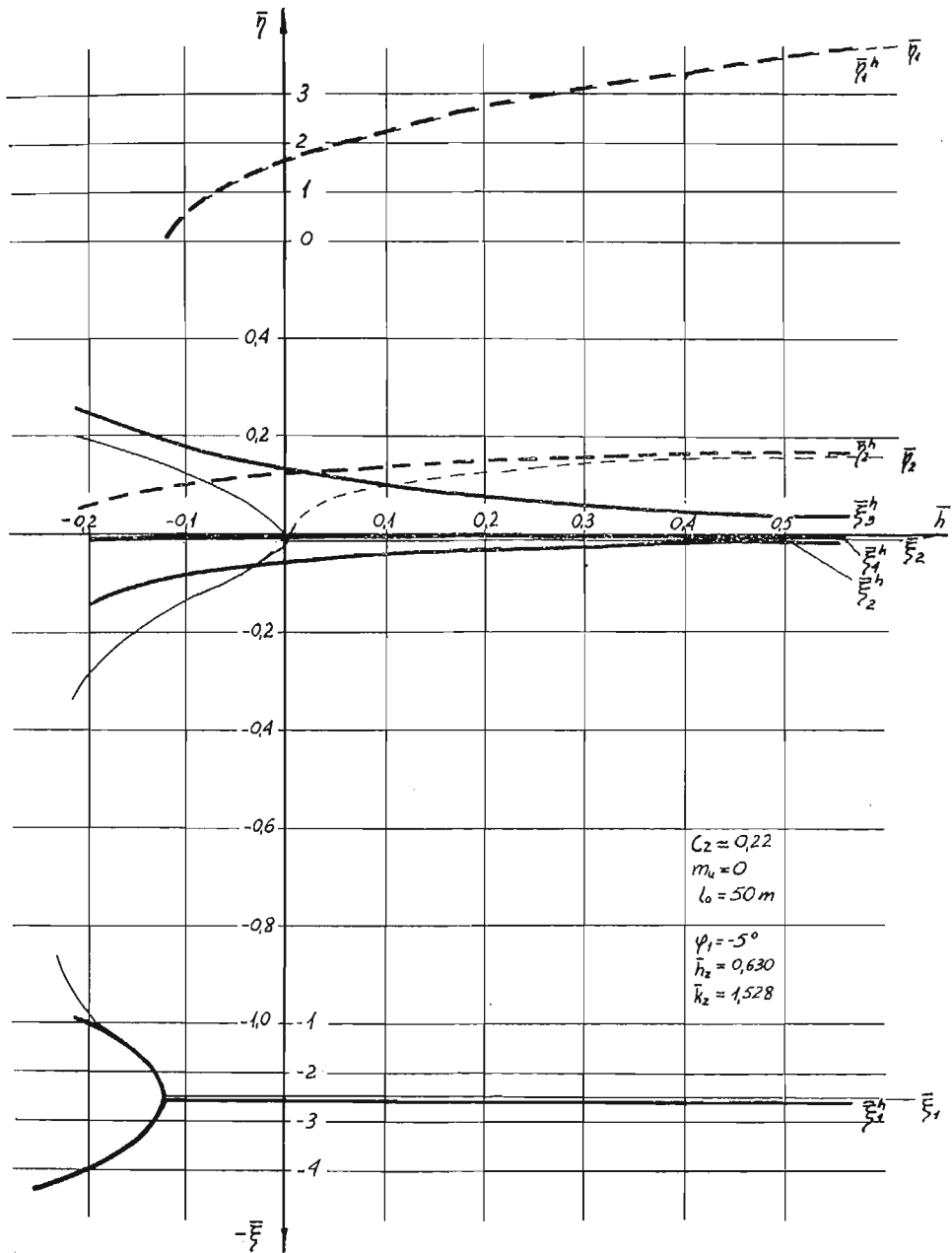
Rys. 23. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywo wca w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$ i $C_z = 0,75$



Rys. 24. Zmiana współczynników tłumienia i częstości sztywności w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta holu $\varphi_1 = -5^\circ$ i $C_z = 0,75$



Rys. 25. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta holu $\varphi_1 = 20^\circ$ i $C_z = 0,22$



Rys. 26. Zmiana współczynników tłumienia i częstości szybowca w funkcji «zapasu stateczności statycznej» dla kąta noli $\varphi_1 = -5^\circ$ i $C_z = 0,22$

Korzystniejsze jest położenie szybowca poniżej linii lotu samolotu holującego, gdyż powoduje to tłumienie wahań fugoidalnych.

W locie holowanym może wystąpić niestateczność wahań fugoidalnych lub słaba rozbieżność ruchów aperiodycznych, zachodzi to jednak bardzo powoli i pilot zawsze zdąży zareagować sterami ustateczniająco.

Literatura cytowana w tekście

1. L. W. BRYANT, W. S. BROWN, N. E. SWEETING, *Collected Researches on the Stability of Kites and Towed Gliders*, Reports and Memoranda Nr 2303-1942.
2. J. BUKOWSKI, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1959.
3. B. ETKIN, *Dynamics of flight*, New York-London 1959.
4. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I i II, PWN, Warszawa 1961.
5. J. HAJDUK, *Wybrane działy transportu linowego*, Warszawa 1961.
6. F. JANIK, *O obciążeniach w locie holowanym*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa Nr 11, Warszawa 1933.
7. В. К. КАЧУРИН, *Гибкие нити с малыми стрелками*, Москва 1956.
8. В. К. КАЧУРИН, *Теория вислчих систем*, Ленинград-Москва 1962.
9. S. NEUMARK, *Działanie wiatru na linę balonu na uwięzi*, Sprawozdanie Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa Nr 1 (19), Warszawa 1936.
10. S. NEUMARK, *Equilibrium Configurations of Flying Cables of Captive Balloons, and Cable Derivatives for Stability Calculations*, Reports and Memoranda Nr 3333-1963.
11. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолета*, Москва 1957.
12. K. PETRIKAT, E. PIERUSCHKA, *Die Stabilitätsbeulungen des Fieseler—Deichselschlepps*, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung.
13. K. D. WOOD *Technical aerodynamics*, Michigan 1955.
14. *Pomiary odkształcalności szybowcowych lin holowniczych*, Sprawozdanie Katedry Mechaniki Wydz MEiL PW.
15. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington, Middlesex, PWN, Warszawa 1965.

Резюме

УПРОЩЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНЕРА ВО ВРЕМЯ ПОЛЕТА НА БУКСИРНОМ ТРОСЕ

В работе рассматривается буксировка жесткого планера самолетом, находящимся в горизонтальном, прямолинейном установившемся полете. На основе работы С. Неймарка [9, 10] определена конфигурация буксирного троса под действием аэродинамических сил. Рассматриваются условия равновесия планера во время буксировки, а также определяются пределы буксира и соответствующих им коэффициентов подъемной силы. На основе результатов Брианта, Брауна и Суитинга, проведен анализ продольной устойчивости планера в буксирном полете с применением метода малых возмущений. Это позволило определить коэффициенты характеристического уравнения, применить критерий устойчивости Рауса-Гурвица и вычислить методом Берстова корни этого характеристического уравнения шестой степени.

Численный расчет выполнен для одного типа планера. Исследовано влияние на устойчивость планера следующих параметров: положения планера относительно самолета-буксировщика, скорости буксировки, положения места прикрепления буксирного замка относительно центра тяжести планера, а также длины и удлинения буксирного троса.

Результаты расчета показывают, что буксировка влияет на фугондные колебания, но не меняет короткопериодических колебаний. Устойчивость планера повышается, если он расположен ниже самолета-буксировщика, так как это вызывает затухающие фугондные колебания. Кроме того полезно поместить буксирный замок впереди, перед центром тяжести планера (и выше центра тяжести, если это возможно).

Summary

SIMPLIFIED LONGITUDINAL STABILITY OF A TOWED SAILPLANE

The paper deals with the case of a rigid sailplane towed by an aircraft in a horizontal, steady flight along a straight line. The tow rope configuration was defined according to the paper by S. Neumark, the aerodynamic forces being taken into account.

The equilibrium of the towed sailplane was considered. The tow angle intervals and the respective lift coefficients were calculated.

The longitudinal stability of a sailplane was analysed by means of the small perturbation method developed by Bryant, Brown and Sweeting. This method leads to a sixth order characteristic equation and allows for the application of the Ruth-Hurwitz stability criterion. The roots of characteristic equation were calculated by means of the Bairstow method.

Numerical analysis was accomplished for a specified high performance sailplane prototype. The influence on the stability of the following parameters was investigated: the relative sailplane-towing aircraft attitude, the flight velocity, the attachment lock position in relation to the sailplane gravity center, the length and elasticity of the tow rope.

As may be concluded from the obtained results the towing does not change the high frequency oscillation but modifies the fugal ones. With respect to the sailplane stability it is advantageous:

- to fly the sailplane below the level of the towing aircraft for the fugal oscillation damping,
- the attachment lock should be built in to the sailplane structure before the gravity center (preferably above its level).

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1966 r.

WPLYW WSTĘPNEGO ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO NA ENERGIĘ UDAROWEGO ZRYWANIA

EWA DRESCHEROVA (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Zagadnienie wpływu wstępnych odkształceń plastycznych na własności mechaniczne stali posiada dość obszerną literaturę w aspekcie ważnego z technicznego punktu widzenia zagadnienia kruchości stali, pracujących pod udarowymi obciążeniami w obniżonych temperaturach. Istnieje wiele prac stwierdzających, że wstępne odkształcenie plastyczne i odpowiednia obróbka cieplna przesuwają krytyczną temperaturę kruchości w kierunku wyższych temperatur i dyskutujących możliwości polepszenia własności mechanicznych stali, przeznaczonych do pracy w opisanych warunkach. Omawia je między innymi monografia WŁADIMIRSKIEGO [2]. Zagadnienie zależności energii udarowego rozrywania od wstępnych odkształceń plastycznych w dostępnej literaturze jest traktowane jako margines szerszych badań kruchego pęknięcia stali. W niniejszej pracy ograniczono się do zbadania wpływu wstępnych odkształceń plastycznych przez rozciąganie na energię zniszczenia udarowego stali MST 4 w stanie nieżarzonej. Analiza tego zagadnienia pozwala ocenić własności elementów konstrukcyjnych wykonanych metodą tłoczenia na zimno, bez późniejszej obróbki cieplnej i pracujących w warunkach obciążeń dynamicznych.

2. Metoda badań

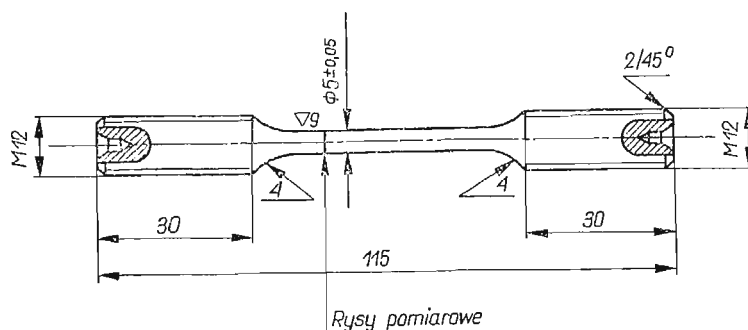
Rozciąganie statyczne powodujące wstępne odkształcenie plastyczne w próbce prowadzono na 10 tonowej zrywance hydraulicznej ze średnią prędkością wydłużenia 0,3 mm/min.

Badania udarnościowe prowadzono na młocie Charpy'ego dostosowanym do udarowego rozrywania o podwójnym zakresie energii od 0–15 KGm i 0–30 KGm ze stałą początkową prędkością uderzenia 5 m/sek. W celu uzyskania miarodajnych wyników stosowano przeciętnie cztery próbki dla każdej badanej wartości odkształcenia. Ze względu na zagadnienie starzenia materiału zachowano stały dla wszystkich próbek przedział czasu wynoszący jedną godzinę pomiędzy próbą statyczną a udarnościową. W rozważaniach pominięto efekty cieplne. Badania wykonano dla 84 próbek.

3. Pomiar odkształceń plastycznych i energii odkształcenia

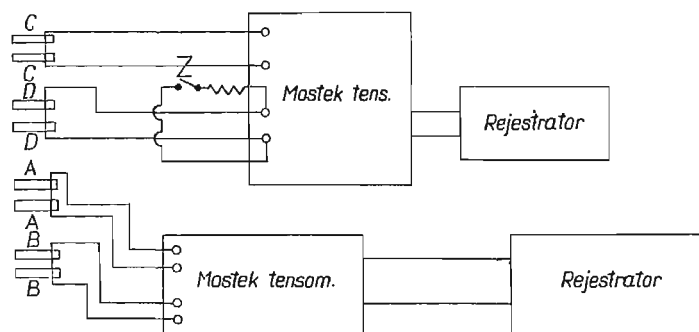
Typową próbkę stosowaną w badaniu udarnościowym na rozrywanie na młocie Charpy'ego (rys. 1) przystosowano do badań statycznych. Do pomiaru wstępnych odkształceń plastycznych używano tensometru mechanicznego firmy «Amsler» na bazie

40 mm i o dokładności odczytu 0,01 mm, zakładanego bezpośrednio na próbkę. W trakcie próby rozciągania odczytywano równocześnie wartości siły i wydłużenia, co pozwalało konstruować dla każdej próbki dokładny wykres $P = P(\Delta l)$. Ponieważ praca miała na celu uzyskanie ilościowej zależności energii udarowego rozrywania od wstępnych odkształceń



Rys. 1

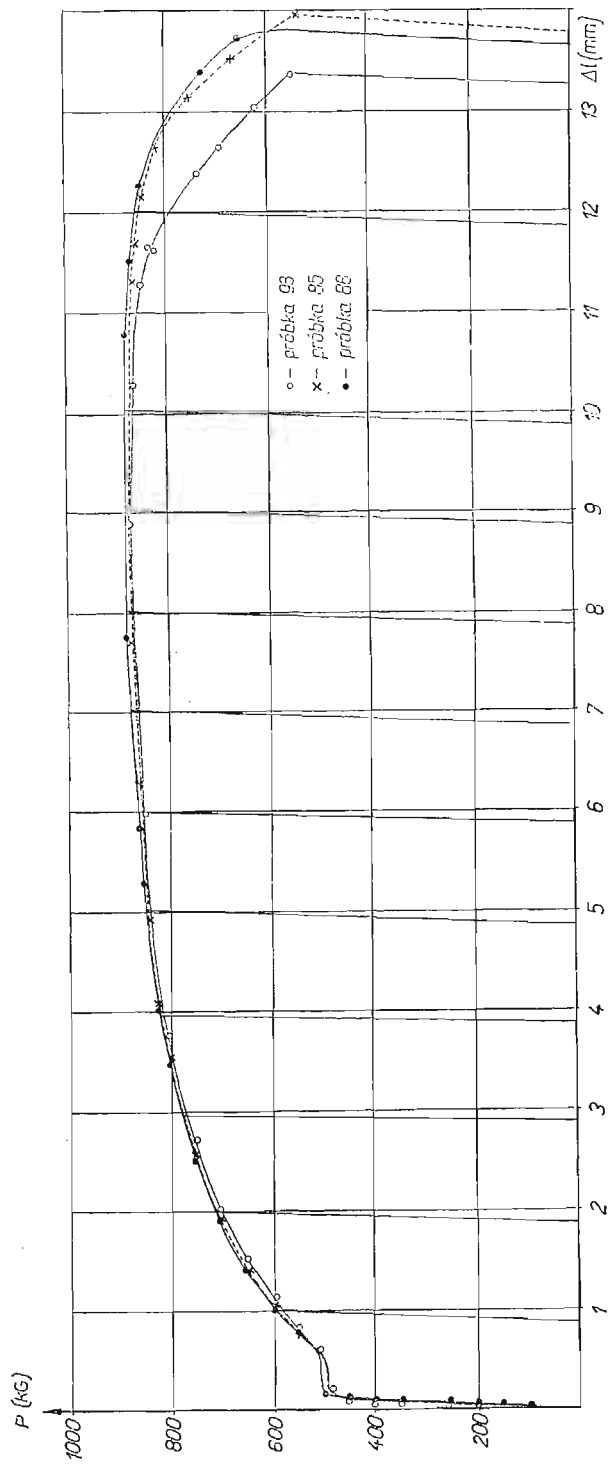
plastycznych, dokładny pomiar wartości zastosowanych odkształceń stanowił istotny problem. Opisany tensometr mechaniczny pozwalał mierzyć odkształcenia jedynie do wartości 10%. Skonstruowano więc przyrząd pozwalający mierzyć wydłużenia próbki aż do momentu zerwania (rys. 2).



Rys. 2

Badaną próbkę otaczały dwie sprężyste obejmy z cienkiej blachy mosiężnej, na których umieszczono po dwa tensometry oporowe *A* rozciągane, *B* ściskane. Po obu stronach próbki umieszczono ponadto w specjalnym uchwycie dwa mechaniczne czujniki o dokładności 0,01 mm.

Do ciągłej rejestracji odkształceń służył zestaw przedstawiony na rys. 2. Zmiany napięcia w obwodzie tensometrów proporcjonalne do wydłużenia próbki przekazywano na wejście mostka tensometrycznego pracującego w układzie z rejestratorem. W celu zwiększenia dokładności rejestracji odkształceń pomimo liniowego zakresu pracy tensometrów



Rys. 3

prowadzono dla każdej próbki odczyty wartości wydłużenia Δl z dokładnością 0,005 mm (średnia obu czujników) równocześnie z odczytami wartości przyrostów siły. Pozwalało to dla różnych zakresów odkształceń dobrać jak najszersze wychylenia pisaka rejestratora. Jednakże w zakresie małych odkształceń wygodniej było posługiwać się czujnikiem mechanicznym ze względu na pewne trudności występujące przy wzmacnianiu małych impulsów prądu stałego. Prędkość przesuwu taśmy rejestratora wynosiła 3600 mm/godz. Na uzyskanym wykresie rejestratora zapisującego wydłużenie w funkcji czasu można wyróżnić poszczególne fazy procesu rozciągania: początkowo krzywa ma przebieg prawie poziomy, widoczny wzrost odkształceń zaczyna się w momencie przekroczenia przystanku plastyczności. Zmiana kąta nachylenia krzywej w obszarze dużych odkształceń świadczy o rozpoczęciu się procesu nieustalonego płynięcia. Wartość wydłużenia w momencie rozerwania jest określona jednoznacznie z dokładnością do 0,1 mm. Podobny odczyt końcowej wartości wydłużenia w momencie zniszczenia próbki przy stosowaniu czujników mechanicznych jest niemożliwy ze względu na zbyt dużą prędkość wydłużenia w momencie tworzenia się szyjki.

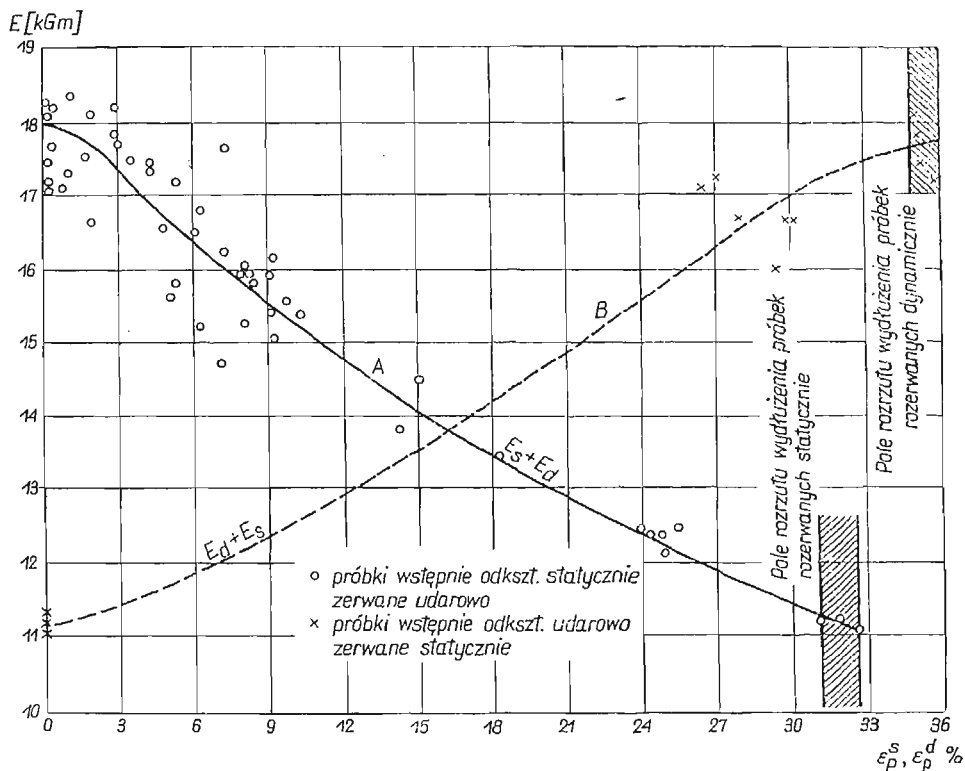
W celu uzyskania ciągłej w czasie rejestracji przyrostów siły obciążającej naklejono cztery tensometry oporowe na pracujący sprężyscie reduktor gwintu między próbką a szczękami zrywarki. Użyto rejestratora pracującego w układzie z mostkiem. W obwodzie rejestratora wbudowano znacznik kreślący pionową kreską na wykresie $P = P(t)$ punkty o przyporządkowanej wartości siły co 50 kg. Zaletą tego typu rejestracji $P = P(t)$ jest dokładny opis odciążania w procesie powstawania i propagowania się szyjki, jak również rejestracja siły maksymalnej i siły zrywającej. Zsynchronizowanie prędkości przesuwu taśm obu rejestratorów pozwoliło wyeliminować czas z wykresów $P = P(t)$, $\Delta l = \Delta l(t)$ i skonstruować wykres $P = P(\Delta l)$ dla każdej badanej próbki. Tak uzyskane wykresy planimetryowano, aby wyznaczyć pracę odkształcenia równoważną energii zaabsorbowanej przez próbkę w procesie rozciągania do danej wartości wstępnego odkształcenia. Otrzymana tą drogą energia odkształcenia statycznego mogła być porównana z energią pochłoniętą przez próbkę w próbie następnego udarowego rozrywania. Odkształcono statycznie aż do zerwania trzy próbki, których wykresy rozciągania przedstawia rys. 3. Pole zawarte pomiędzy osią odkształceń a wykresami rozciągania przedstawia wartość energii pochłoniętej przez próbkę zniszczoną statycznie.

Dzieląc wykres (rys. 3) na odcinki, a tym samym pole na części zależne od wartości umownego wstępnego odkształcenia plastycznego, uzyskano możliwość określenia wpływu wstępnych odkształceń plastycznych na całkowitą energię zrywania statycznego, co przyjęto za podstawę porównania wartości energii dwu różnych programów doświadczenia: wstępnego odkształcenia statycznego i zniszczenia udarowego oraz wstępnego odkształcenia statycznego i zniszczenia statycznego. Wykonano również próby mające na celu zbadanie próbek wstępnie odkształconych dynamicznie, a następnie zniszczonych przez statyczne rozerwanie.

4. Wyniki badań

Krzywa A na rys. 4 przedstawia uzyskaną zależność całkowitej energii, równej sumie energii statycznej i udarowej $E_s + E_d$ od wartości wstępnego odkształcenia plastycznego ϵ_p^s . Przez

energię statyczną należy rozumieć energię zaabsorbowaną przez próbkę w procesie statycznego rozciągania, przez energię udarową energię zaabsorbowaną przy zerwaniu na młocie. Na rysunku oznaczono pole rozrzutu wydłużenia próbek rozerwanych statycznie. Godnym uwagi jest malejący charakter przebiegu krzywej *A* od wartości 18 kGm dla próbek zerwanych dynamicznie do 11 kGm dla próbek zerwanych statycznie. Oczywiście jest, że podobny wykres skonstruowany na podstawie rys. 3 dla próbek wstępnie odkształconych statycznie i zerwanych statycznie będzie linią prostą równoległą do osi wstępnych odkształceń. Zgodnie z wynikami prac [1 i 3] przyczyną dużej różnicy charakteru przebiegu omó-

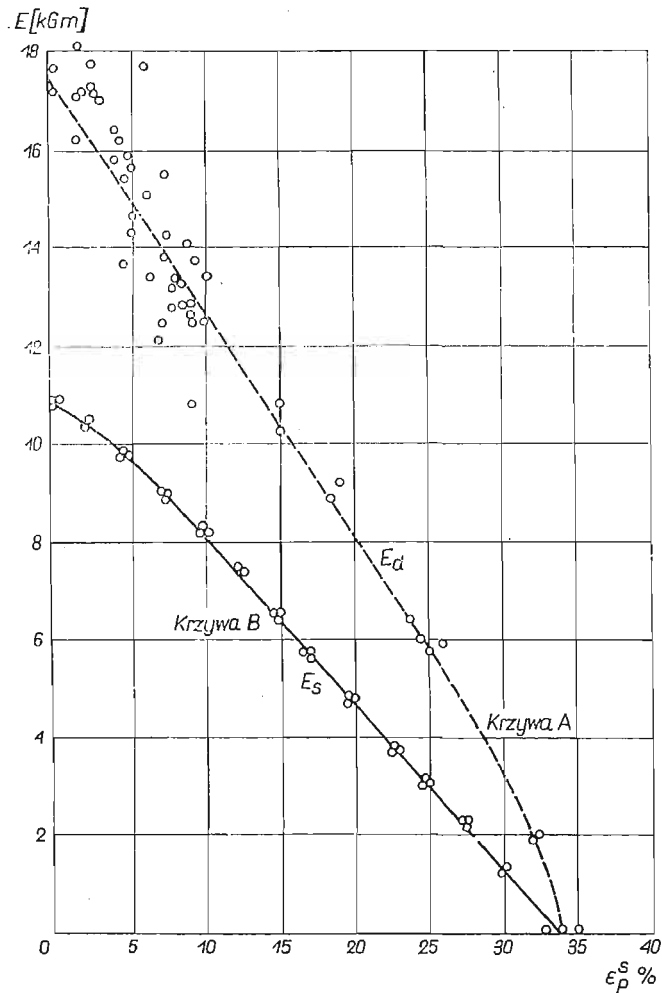


Rys. 4

wionych krzywych jest wrażliwość badanej stali na prędkość odkształcenia, co będzie jeszcze dyskutowane poniżej. Wydaje się być również godnym uwagi zbadanie odwrotnej zależności: wpływu wstępnych dynamicznych odkształceń plastycznych ϵ_p^d na energię późniejszego statycznego rozrywania. W przybliżeniu określono kształt krzywej E całkowitej $= E_d + E_s$, w przypadku odwrotnego obciążenia (linia *B* na rys. 4). Minimalną energią całkowitą będzie jak poprzednio energia próbki zniszczonej statycznie, maksimum przypadnie na próbkę rozerwaną dynamicznie. Przy zachowaniu warunku stałej początkowej prędkości wydłużenia odkształcono wstępnie dynamicznie pięć próbek do wartości $\epsilon_p^d = 26,5-30\%$, a następnie rozerwano je statycznie. Linią przerywaną *B*, rys. 4, przedstawiono

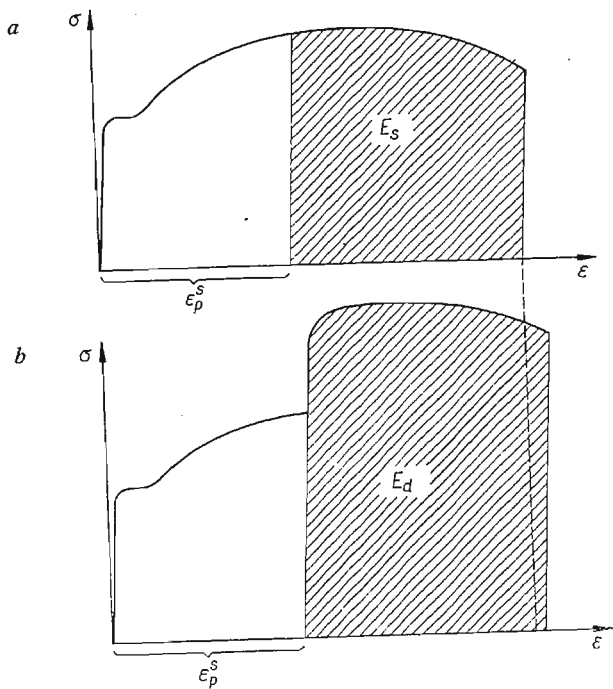
przewidywaną zależność energii całkowitej od wstępnego odkształcenia dynamicznego. Na rysunku 4 oznaczono ponadto pole rozrzutu wydłużenia próbek rozerwanych dynamicznie. Łatwo zauważyć, że wydłużenie próbki rozerwanej dynamicznie jest większe niż wydłużenie próbki zerwanej statycznie.

Krzywa *A* na rys. 5 przedstawia energię udarowego zrywania próbek E_d (por. rys. 6b) w zależności od wielkości wstępnych odkształceń plastycznych uzyskanych przez statyczne

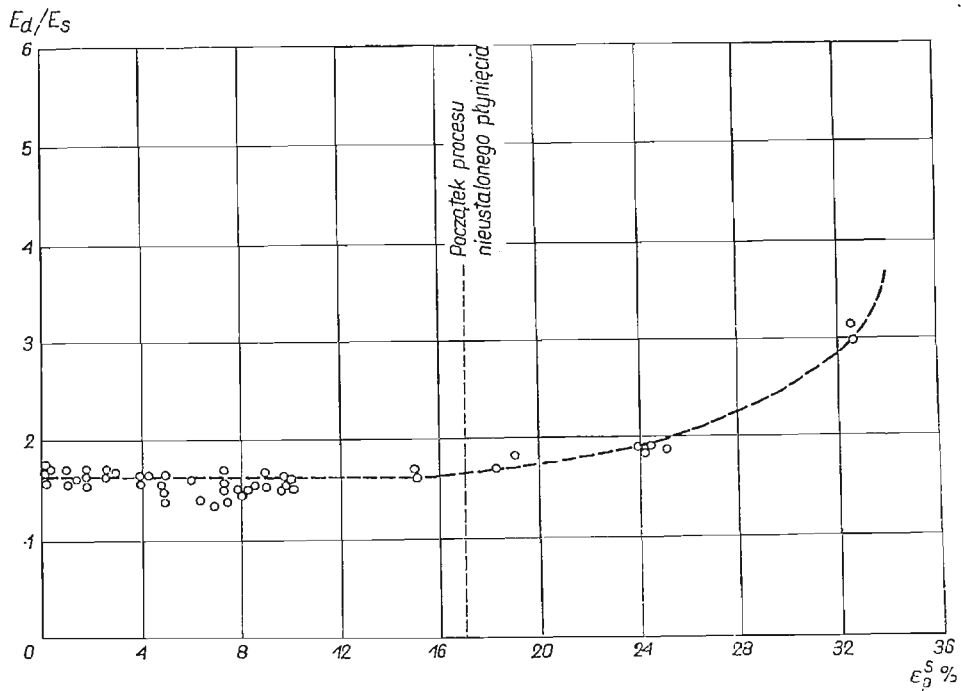


Rys. 5

rozciąganie. Energia dynamiczna, jak tego należało oczekiwać, wyraźnie maleje. Krzywa *B* na rys. 5 przedstawia skonstruowaną na podstawie wykresu 3 zależność energii statycznego zniszczenia E_s (por. rys. 6a) od wstępnych odkształceń plastycznych uzyskanych przez statyczne rozciąganie. Wielkość energii E_s wyznaczano w następujący sposób z rys. 3:



Rys. 6



Rys. 7

Podzielone na 13 części pole równoważne energii statycznej planimetryowano kolejno wycinkami odkładając na rys. 5 wartości energii uzyskanej z odjęcia od całkowitego pola wycinków odpowiadających określonym wartościom wstępnych odkształceń, np.: dla przypadku zerowych wstępnych odkształceń punkty na krzywej B przedstawiają całkowitą energię zniszczenia przez statyczne rozciąganie. Na rysunku 5 wyraźnie widać istotne różnice w energiach oraz w kątach nachylenia obu krzywych.

Rysunek 6a przedstawia uproszczony wykres rozciągania miękkiej stali. Zakreskowane pole rys. 6b przedstawia wartość energii E_d zaabsorbowanej przez próbkę podczas udarowego rozrywania. Uproszczony wykres rozciągania w próbie dynamicznej skonstruowano na podstawie doświadczeń Campbella-Duby'ego [1]. Rozpatrując kolejno różne wartości wstępnych odkształceń statycznych na rys. 6b uzyskano podobną w charakterze przebiegu i kącie nachylenia zależność pomiędzy wstępnym odkształceniem plastycznym a energią rozrywania udarowego.

Na podstawie krzywych A i B z rys. 5 skonstruowano wykres stosunku energii udarowej E_d do energii statycznej E_s dla tych samych wartości wstępnych odkształceń (rys. 7). W zakresie $\varepsilon_p^s \sim 0-17\%$ stosunek ten przyjmuje w przybliżeniu wartość stałą. Począwszy od $\varepsilon_p^s = 20\%$ rozpoczyna się wzrost ilorazu. Punkty o rzędnej $\varepsilon_p^s = 32,5\%$ zostały zdjęte dla próbek odkształconych wstępnie aż do momentu wystąpienia wyraźnej szyjki.

5. Wnioski

1. Krzywa A na rys. 5 przedstawia ilościową zależność pomiędzy wstępnym odkształceniem plastycznym a energią udarowego rozrywania dla stali MSt 4. Przeprowadzone badania doświadczalne są jedyną drogą ilościowego ujęcia omawianego wpływu i jako takie mogą stanowić pomoc przy ocenie własności elementów konstrukcyjnych wykonanych metodą tłoczenia na zimno i pracujących w warunkach dynamicznych obciążeń.

2. Malenie całkowitej pracy odkształcenia plastycznego $E_s + E_d$ w miarę wzrostu wstępnych odkształceń plastycznych przez statyczne rozciąganie świadczy o wrażliwości badanej stali na prędkość odkształcenia.

3. Wzrost ilorazu przedstawionego na rys. 7 dla dużych wstępnych odkształceń plastycznych, przy których pojawia się w próbce i propaguje szyjka, świadczy o tym, że dla złożonego stanu naprężenia, jaki ma miejsce w próbce w momencie utworzenia się szyjki, nie zachowuje się wzajemna relacja pomiędzy próbą statyczną i dynamiczną obowiązująca dla jednoosiowego stanu naprężenia.

Literatura cytowana w tekście

1. J. D. CAMPBELL, J. DUBY, Proc. Royal Soc., London, Vol. 236, VI, 1956.
2. Т. А. ВЛАДИМИРСКИЙ, *Хрупкость сталей*, Машгиз, Москва 1959.
3. Ю. Я. ВОЛОШЕНКО-КЛИМОВИЦКИЙ, *Динамический предел текучести*, Издательство «Наука», Москва 1965.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИИ НА ЭНЕРГИЮ
РАЗРУШЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ РАЗРЫВЕ

В работе представлены результаты экспериментальных исследований влияния предварительных пластических деформаций на энергию разрушения при ударном разрыве образца. Исследовались образцы из мягкой стали МСт 4. Проведено сравнения энергии разрушения при статическом и динамическом разрыве.

Результаты опытов показывают что отношение этих энергии постоянно для малых и средних величин предварительных пластических деформаций. Для больших предварительных пластических деформаций соответствующих появлению шейки, наблюдается отчетливое возрастание отношения энергии динамического разрушения к энергии статического разрушения.

Summary

THE INFLUENCE OF THE INITIAL PLASTIC DEFORMATION ON THE FRACTURE ENERGY
IN TENSION IMPACT TEST

Some results of the experimental investigation of the influence of the initial plastic deformation on the fracture energy in tension impact test are presented. The material tested was the mild steel MSt 4.

The static and dynamic fracture energies were compared. It was found, that the ratio of both energies is constant for small and medium values of the initial plastic deformations. If the initial deformation is so large that necking effect appears, the ratio of both energies displays considerable increase.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 czerwca 1966 r.

ZASTOSOWANIE RACHUNKU ZABURZEŃ W PROBLEMACH STATECZNOŚCI
PŁYT PROSTOKĄTNYCH O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W pracy niniejszej wykorzystano metodę rachunku zaburzeń (metodę perturbacji) w postaci stosowanej głównie w zagadnieniach mechaniki kwantowej do rozwiązania problemu stateczności płyty prostokątnej swobodnie podpartej o zmiennej sztywności, wszechstronnie ściskanej siłami o liniowo zmieniających się natężeniach, działającymi w płaszczyźnie środkowej płyty. Istnieje niewielka liczba rozwiązań przybliżonych, dotyczących stateczności płyt prostokątnych o zmiennej sztywności, natomiast w ogóle nie są znane rozwiązania całkowicie ścisłe. Powodem tego jest nie tylko skomplikowana postać równania powierzchni wyobczonej płyty, ale również konieczność rozwiązania problemu tarczy o zmiennej grubości i określenia rozkładu działających sił w funkcji współrzędnych (nawet w przypadku obciążenia brzegów płyty stałymi siłami). Wśród prac podających rozwiązania przybliżone należy wymienić przede wszystkim: pracę W. H. WITTRICKA i C. H. ELLENA [10], w której zbadano stateczność płyty prostokątnej o liniowo i wykładniczo zmiennej grubości, pracę A. SZ. BOŻENOWA [3], w której metodą różnic skończonych obliczono siłę krytyczną dla płyty kwadratowej o liniowo zmiennej grubości w jednym kierunku, ściskanej stałymi siłami N_x i N_y , o różnych natężeniach, pracę M. BANASIAKA [1], w której podano rozwiązanie zagadnienia dla płyty prostokątnej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej liniowo zmieniającymi się siłami, wreszcie pracę [6], zawierającą ścisłe rozwiązanie równania powierzchni wyobczonej płyty prostokątnej wszechstronnie ściskanej stałymi siłami o liniowo zmiennej sztywności, jednak przy założeniu upraszczającym, że siły podłużne wewnątrz płyty są również stałe.

We wszystkich cytowanych wyżej pracach stosuje się przybliżone metody do rozwiązywania nieścisłego równania powierzchni wyobczonej płyty, otrzymanego przy założeniu, że rozkład sił podłużnych i stycznych wewnątrz płyty jest taki sam jak na brzegach. W niniejszej pracy postaramy się rozwiązać zagadnienie z uwzględnieniem problemu tarczowego. Znacznie więcej rozwiązań ścisłych i przybliżonych jest dla płyt kołowych; obszerny przegląd tych rozwiązań podano w pracy [5].

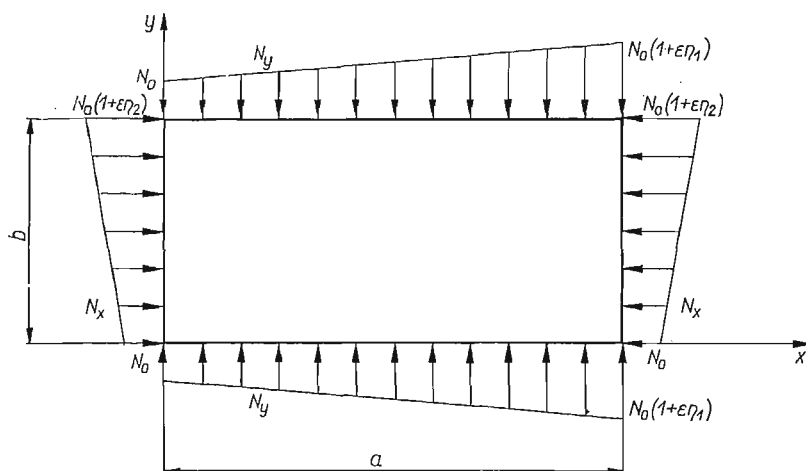
Ponieważ uzyskanie rozwiązania ścisłego danego problemu jest praktycznie niemożliwe, postaramy się więc podać przynajmniej rozwiązanie ważne dla niewielkich zmian sztywności i niewielkich zmian obciążenia. Rozkład naprężeń w płycie określimy rozwiązując odpowiednie równanie na funkcję naprężeń dla tarczy zwykłą metodą małego parametru, a następnie zastosujemy metodę rachunku zaburzeń do równania określającego powierzchnię wyobczoną płyty. Metoda ta zostanie uogólniona w stosunku do metod podanych w podręcznikach [2, 4 i 8] oraz w pracy M. SOKOŁOWSKIEGO [9].

2. Sformułowanie zagadnienia

Celem niniejszej pracy jest obliczenie siły krytycznej powodującej wyboczenie płyty prostokątnej swobodnie podpartej na wszystkich brzegach (rys. 1). Płyta jest wszechstronnie ściskana siłami przyłożonymi na brzegach, o liniowo zmieniających się natężeniach, określonymi za pomocą wzorów:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} N_x &= N_0 \left(1 + \varepsilon \eta_2 \frac{y}{b} \right) & \text{dla } x = 0 \text{ i } x = a, \\ N_y &= N_0 \left(1 + \varepsilon \eta_1 \frac{x}{a} \right) & \text{dla } y = 0 \text{ i } y = b, \\ N_{xy} &= 0 & \text{dla } x = 0, x = a, \\ & & y = 0, y = b, \end{aligned}$$

gdzie N_0 oznacza wielkość siły na jednostkę długości dla $x = 0$ i $y = 0$, ε oznacza mały parametr ($\varepsilon \ll 1$), η_1 i η_2 — pewne dowolne stałe spełniające warunek $|\eta_1| \leq 1$ i $|\eta_2| \leq 1$.



Rys. 1

Założymy ponadto, że grubość płyty nie jest stała i zmienia się według wzoru

$$(2.2) \quad h(x, y) = h_0 \left[1 + \varepsilon \left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \right]^\kappa,$$

gdzie h_0 jest to grubość płyty w początku przyjętego układu współrzędnych, a_1 i a_2 pewne dowolne stałe spełniające warunek $|a_1| + |a_2| \leq 1$, κ dowolna stała.

Równanie opisujące powierzchnię wyboczoną płyty o zmiennej sztywności [10]

$$(2.3) \quad \nabla^2(D\nabla^2 w) + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

zawiera nieznanne na razie wielkości sił N_x, N_y, N_{xy} jako funkcje x i y , które należy wyznaczyć z równania na funkcję naprężeń dla tarczy o zmiennej grubości [7]

$$(2.4) \quad \nabla^2(S\nabla^2 F) + (1+\nu) \left(2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = 0.$$

W równaniach (2.3) i (2.4) wprowadzono oznaczenia:

$$(2.5) \quad D(x, y) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad S(x, y) = \frac{1}{Eh};$$

w jest ugięciem płyty, ν współczynnikiem Poissona oraz

$$(2.6) \quad N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Jak więc widać, należy najpierw z równań (2.4) oraz wzorów (2.6) obliczyć wielkości sił, a więc rozwiązać zagadnienie tarczowe dla danego układu obciążeń brzegowych (2.1).

3. Zagadnienie tarczowe

Rozwiązania równania (2.4) będziemy poszukiwać metodą małego parametru w postaci szeregu:

$$(3.1) \quad F(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(x, y) \varepsilon^i = F_0(x, y) + \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y) + \dots$$

przy danej funkcji S (z równań (2.2) i (2.5)), która po rozwinięciu przybiera postać

$$(3.2) \quad S = S_0 \left[1 - \varepsilon \kappa \left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) + \varepsilon^2 \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} \left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right)^2 + \dots \right].$$

Podstawiając wzory (3.1) i (3.2) do równania (2.4) i przyrównując współczynniki przy wszystkich potęgach ε do zera otrzymamy ciąg równań:

$$(3.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 F_0 = 0,$$

$$(3.4) \quad \nabla^2 \nabla^2 F_1 = \kappa \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 F_0 \right],$$

$$(3.5) \quad \nabla^2 \nabla^2 F_2 = \kappa \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 F_1 \right] - \frac{1}{2} \kappa(\kappa+1) \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right)^2 \nabla^2 F_0 \right] + \\ + \kappa(\kappa+1)(1+\nu) \left(\frac{a_1^2}{a^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} - 2 \frac{a_1 a_2}{ab} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} + \frac{a_2^2}{b^2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \right)$$

Podobnie ze wzorów (2.6) dostajemy ciąg warunków brzegowych dla funkcji $F_i (i = 0, 1, 2, \dots)$:

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = N_0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = N_0 \eta_2 \frac{y}{b}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 0, \dots \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } x = a, \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = N_0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = N_0 \eta_1 \frac{x}{a}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 0, \dots \quad \text{dla } y = 0 \text{ i } y = b$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0, x = a, y = 0, y = b.$$

Rozwiązaniem ścisłym równań (3.3) i (3.4) spełniającymi warunki brzegowe (3.6) są funkcje:

$$(3.7) \quad F_0 = \frac{1}{2} N_0 (x^2 + y^2),$$

$$(3.8) \quad F_1 = \frac{1}{6} N_0 \left(\eta_1 \frac{x^3}{a} + \eta_2 \frac{y^3}{b} \right),$$

natomiast rozwiązanie równania (3.5) przyjmujemy w postaci przybliżonej:

$$(3.9) \quad F_2 = \frac{1}{2} AN_0 x(x-a)y(y-b),$$

gdzie

$$(3.10) \quad A = \kappa \left(\frac{\alpha_1 \eta_1}{a^2} + \frac{\alpha_2 \eta_2}{b^2} \right) - \frac{1}{2} (1-\nu) \kappa (\kappa+1) \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\alpha_2^2}{b^2} \right).$$

Funkcja $F_2(x, y)$ spełnia równanie (3.5) oraz warunki brzegowe $\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = 0$, nie spełnia natomiast lokalnie warunków brzegowych $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, y=0} = 0$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} = 0$, dobrana jest jednak tak, aby były one spełnione całkowo, tzn. aby $\int_s N_{xy} ds = 0$ na każdym brzegu tarczy.

Ostatecznie, korzystając ze wzorów (2.6) obliczymy rozkład sił podłużnych i stycznych na jednostkę długości w funkcji współrzędnych x i y z dokładnością do trzech wyrazów szeregu małego parametru:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} N_x &= N_0 \left[1 + \varepsilon \eta_2 \frac{y}{b} + \varepsilon^2 Ax(x-a) + \dots \right], \\ N_y &= N_0 \left[1 + \varepsilon \eta_1 \frac{x}{a} + \varepsilon^2 Ay(y-b) + \dots \right], \\ N_{xy} &= -\varepsilon^2 \frac{1}{2} AN_0 (2x-a)(2y-b) + \dots \end{aligned}$$

4. Stateczność płyty

Obecnie zadaniem naszym jest przybliżone rozwiązanie równania (2.3), w którym siły N_x , N_y i N_{xy} określone są wzorami (3.11) a sztywność płyty zmienia się według zależności:

$$(4.1) \quad D(xy) = D_0 \left[1 + \varepsilon \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right) \right]^{3\nu},$$

a więc po rozwinięciu na szereg potęgowy względem małego parametru

$$(4.2) \quad D(x, y) = D_0 \left[1 + 3\kappa \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right) \varepsilon + \frac{3}{2} \kappa (3\kappa - 1) \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right)^2 \varepsilon^2 + \dots \right].$$

Wstawiając wyrażenia (3.11) i (4.2) do równania (2.3) otrzymujemy (ograniczając się do wyrazów stojących przy potęgach ε nie większych niż 2):

$$(4.3) \quad \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 \left[3\kappa \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 w \right] \varepsilon + \left\{ \nabla^2 \left[\frac{3}{2} \kappa (3\kappa - 1) \left(\alpha_1 \frac{x}{a} + \alpha_2 \frac{y}{b} \right)^2 \nabla^2 w \right] + \right. \\ \left. + (1 - \nu) \left[6\kappa (3\kappa - 1) \frac{\alpha_1 \alpha_2}{ab} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 3\kappa (3\kappa - 1) \frac{\alpha_1^2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 3\kappa (3\kappa - 1) \frac{\alpha_2^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right\} \varepsilon^2 + \dots = \\ = \lambda \left\{ \nabla^2 w + \left(\eta_2 \frac{y}{b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{x}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \varepsilon + \right. \\ \left. + A \left[x(x-a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y(y-b) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (2x-a)(2y-b) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \varepsilon^2 + \dots \right\},$$

gdzie $\lambda = -N_0 D_0$.

W dalszym ciągu przyjęcie funkcji $w(x, y)$ oraz wartości własnej λ w postaci szeregu potęgowego względem małego parametru prowadzi przy zastosowaniu zwyczajnej metody małego parametru [9] (jak w pkt. 3) do szeregu równań różniczkowych cząstkowych na funkcje w_i oraz wartości własne λ_i , przy czym pierwsze z nich jest jednorodne, a wszystkie następne są równaniami niejednorodnymi. Trudność polega tutaj na rozwiązywaniu równań niejednorodnych; aby tego uniknąć, zastosujemy rachunek zaburzeń oparty na ujęciu używanym w mechanice kwantowej, lecz znacznie ogólniejszym od podanego w podręcznikach [2, 4 i 8].

Do równania (2.3) (lub (4.3)) należy dołączyć warunki brzegowe, które w naszym przypadku dla płyty swobodnie podpartej na wszystkich brzegach są następujące:

$$(4.4) \quad w = 0 \quad \text{i} \quad \nabla^2 w = 0$$

na wszystkich brzegach płyty

Obecnie podamy szkic wyprowadzenia podstawowych wzorów na poprawki do wartości własnej λ w oparciu o rachunek zaburzeń.

4.1. Rachunek zaburzeń. Celem naszym jest rozwiązanie równania różniczkowego liniowego na funkcje i wartości własne:

$$(4.5) \quad \hat{H}w = \lambda \hat{M}w,$$

w którym operatory liniowe \hat{H} i \hat{M} można zapisać w postaci szeregu potęgowego względem małego parametru:

$$(4.6) \quad \hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}\varepsilon + \hat{H}^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

$$(4.7) \quad \hat{M} = \hat{M}^{(0)} + \hat{M}^{(1)}\varepsilon + \hat{M}^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

gdzie \hat{H}^i oraz \hat{M}^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) są również operatorami różniczkowymi liniowymi.

Wyrażając funkcje własne w_n , odpowiadające wartościom własnym λ_n , również przez szeregi potęgowe względem małego parametru

$$(4.8) \quad w_n = w_n^{(0)} + w_n^{(1)}\varepsilon + w_n^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

$$(4.9) \quad \lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)}\varepsilon + \lambda_n^{(2)}\varepsilon^2 + \dots$$

otrzymamy, po wstawieniu (4.8), (4.9) oraz (4.6) i (4.7) do równania (4.5) następujący ciąg równań:

$$(4.10) \quad \hat{H}^{(0)} w_n^{(0)} = \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)},$$

$$(4.11) \quad \hat{H}^{(0)} w_n^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(1)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)} = -(\hat{H}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(1)}) w_n^{(0)},$$

$$(4.12) \quad \hat{H}^{(0)} w_n^{(2)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)} = \\ = -(\hat{H}^{(2)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(2)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(1)}) w_n^{(0)} - (\hat{H}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(1)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(0)}) w_n^{(1)}$$

Założymy, że znamy funkcje własne $w_n^{(0)}$ i wartości własne $\lambda_n^{(0)}$ dyskretnego widma wartości własnych dla niezaburzonych operatorów $\hat{H}^{(0)}$ i $\hat{M}^{(0)}$, tj. znamy ściśle rozwiązanie równania (4.10). W dalszym ciągu przyjmiemy, że żadna z wartości własnych $\lambda_n^{(0)}$ nie jest zwyrodniała (tzn. każdej wartości własnej odpowiada tylko jedna funkcja własna) oraz że funkcje własne $w_n^{(0)}$ spełniają w pewnym obszarze związek

$$(4.13) \quad \int_V w_m^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_n^{(0)} dx = \delta_{mn},$$

a więc są ortogonalne w tym obszarze do funkcji $\hat{M}^{(0)} w_n^{(0)}$ ($m \neq n$) i można je unormować w myśl wzoru (4.13). We wzorze tym w przypadku wielowymiarowym obszar całkowania jest pewną objętością przestrzeni wielowymiarowej, element dx oznacza element objętościowy tej przestrzeni, a symbole m i n oznaczają całe zbiory wskaźników, których liczba jest na ogół równa wymiarowi przestrzeni. Wobec tego że funkcje $w_n^{(0)}$ spełniają warunki brzegowe (4.4), poszukiwane funkcje $w_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) przedstawimy przez szeregi funkcji własnych zerowego przybliżenia

$$(4.14) \quad w_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}^{(i)} w_m^{(0)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $c_{nm}^{(i)}$ są pewnymi stałymi współczynnikami.

Po podstawieniu szeregu (4.14) do równania (4.11) mnożymy je z lewej strony przez $w_n^{(0)}$ i całkujemy po całym obszarze ortogonalności.

Korzystając z warunku (4.13) otrzymujemy

$$(4.15) \quad \lambda_n^{(1)} = N_{nn}^{(1)},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie:

$$(4.16) \quad N_{mn}^{(i)} = \int_V w_m^{(0)} \hat{N}^{(i)} w_n^{(0)} dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

oraz podobnie dla $H_{mn}^{(i)}$ i $M_{mn}^{(i)}$

Mnożąc równanie (4.11) przez $w_m^{(0)}$ i całkując obliczamy współczynniki $c_{nm}^{(1)}$:

$$(4.17) \quad c_{nm}^{(1)} = \frac{N_{nm}^{(1)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}}.$$

Korzystając w dalszym ciągu ze wzorów (4.14), (4.15) i (4.17) oraz równania (4.12) w podobny sposób obliczamy

$$(4.18) \quad \lambda_n^{(2)} = N_{nn}^{(2)} + \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{N_{mn}^{(1)} N_{nm}^{(1)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} = N_{nn}^{(1)} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{N_{mn}^{(1)} M_{nm}^{(1)}}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}}$$

gdzie operatory \hat{N}^i określone są wzorami:

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \hat{N}^{(1)} &= \hat{H}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(1)}, \\ \hat{N}^{(2)} &= \hat{H}^{(2)} - \lambda_n^{(0)} \hat{M}^{(2)} - \lambda_n^{(1)} \hat{M}^{(1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Kreska przy znaku sumy oznacza, że należy sumować po wartościach $m \neq n$.

Ze wzorów (4.15) i (4.18) wynika, że jeżeli znamy układ funkcji podstawowych $w_n^{(0)}$, to obliczenie pierwszej poprawki jest niezwykle proste i zapewne mniej pracochłonne niż w przypadku stosowania zwyczajnej metody małego parametru; również obliczenie drugiej poprawki prowadzi do prostych przekształceń i pozwala uniknąć rozwiązywania zwykle dość skomplikowanego równania różniczkowego na funkcję $w_n^{(2)}$, a także na $w_n^{(1)}$.

Wykorzystamy obecnie wyprowadzone wzory (4.15) i (4.18) do rozwiązania zagadnienia podanego w p. 2.

4.2. Obliczenie siły krytycznej. Porównując wzory (4.5), (4.6) i (4.7) z równaniem (4.3) widzimy, że operatory różniczkowe \hat{H}^i oraz \hat{M}^i w podanym problemie są następujące:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \hat{H}^{(0)} &= \nabla^2 \nabla^2, \\ \hat{H}^{(1)} &= 3\kappa \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right) \nabla^2 \right], \\ \hat{H}^{(2)} &= 3\kappa(3\kappa - 1) \left\{ \frac{1}{2} \nabla^2 \left[\left(a_1 \frac{x}{a} + a_2 \frac{y}{b} \right)^2 \nabla^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \left(2 \frac{a_1 a_2}{ab} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{a_1^2}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{a_2^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \hat{M}^{(0)} &= \nabla^2 \\ \hat{M}^{(1)} &= \eta_2 \frac{y}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{x}{a} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \hat{M}^{(2)} &= A \left[x(x-a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y(y-b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (2x-a)(2y-b) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (4.10), odpowiadające problemowi wszechstronnego ściskania stałymi siłami płyty o stałej grubości, a więc równania

$$(4.22) \quad \nabla^2 \nabla^2 w_{mn}^{(0)} = \lambda_{mn}^{(0)} \nabla^2 w_{mn}^{(0)}$$

jest dobrze znane i wyraża się następująco:

$$(4.23) \quad w_{mn}^{(0)} = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\lambda_{mn}^{(0)} = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Funkcje własne $w_{mn}^{(0)}$ spełniają warunek ortogonalności (4.13)

$$(4.24) \quad \int_0^a \int_0^b w_{mn}^{(0)} \hat{M}^{(0)} w_{\mu\nu}^{(0)} dx dy = \delta_{m\mu} \delta_{n\nu}$$

wówczas, gdy początkowo dowolna stała C_{mn} równa się

$$(4.25) \quad C_{mn} = \frac{2i}{\pi \sqrt{ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

W dalszym ciągu wzory (4.15) i (4.18) należy przystosować do zagadnienia dwuwymiarowego, a więc całki pojedyncze zastąpić podwójnymi oraz sumy po jednym wskaźniku zastąpić sumami po wszystkich wskaźnikach numerujących funkcje własne zerowego przybliżenia. Pierwszą poprawkę do wartości własnej $\lambda_{mn}^{(0)}$ obliczymy bardzo prosto ze wzoru:

$$(4.26) \quad \lambda_{mn}^{(1)} = \int_0^a \int_0^b w_{mn}^{(0)} (\hat{H}^{(1)} - \lambda_{mn}^{(0)} \hat{M}^{(1)}) w_{mn}^{(0)} dx dy$$

ostatecznie po scałkowaniu;

$$(4.27) \quad \lambda_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \lambda_{mn}^{(0)} [3\kappa(a_1 + a_2) - \delta]$$

gdzie

$$\delta = \frac{\eta_1 \beta^2 n^2 + \eta_2 m^2}{m^2 + \beta^2 n^2}, \quad \beta = \frac{a}{b}.$$

Podobnie drugą poprawkę do wartości własnej $\lambda_{mn}^{(0)}$ można obliczyć ze zmodyfikowanego wzoru (4.18)

$$(4.28) \quad \lambda_{mn}^{(2)} = N_{mn, mn}^{(2)} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{N_{mn, \mu\nu}^{(1)} N_{\mu\nu, mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} - N_{mn, mn}^{(1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{N_{\mu\nu, mn}^{(1)} M_{mn, \mu\nu}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}},$$

który po wykorzystaniu (4.19) przybiera postać

$$(4.29) \quad \lambda_{mn}^{(2)} = H_{mn, mn}^{(2)} - \lambda_{mn}^{(0)} M_{mn, mn}^{(2)} - \lambda_{mn}^{(1)} M_{mn, mn}^{(1)} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{mn, \mu\nu}^{(1)} H_{\mu\nu, mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} -$$

$$- \lambda_{mn}^{(0)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{mn, \nu\mu}^{(1)} M_{\mu\nu, mn}^{(1)} + H_{\mu\nu, mn}^{(1)} M_{mn, \mu\nu}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} - \lambda_{mn}^{(1)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_{\mu\nu, mn}^{(1)} M_{mn, \mu\nu}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}} +$$

$$+ \lambda_{mn}^{(0)} (\lambda_{mn}^{(0)} + \lambda_{mn}^{(1)}) \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{M_{mn, \mu\nu}^{(1)} M_{\mu\nu, mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)} - \lambda_{\mu\nu}^{(0)}}.$$

Ostatecznie po wykonaniu żmudnych lecz prostych obliczeń, w których podwójne sumy ze wzoru (4.29) przechodzą w pojedyncze, z uwagi na warunek ortogonalności (4.13) otrzymujemy:

$$(4.30) \quad \lambda_{mn}^{(2)} = \lambda_{mn}^{(0)} \left\{ 3\kappa(3\kappa-1) \left[\frac{1}{6} (a_1^2 + a_2^2) - \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{a_1^2}{m^2} + \frac{a_2^2}{n^2} \right) + \frac{1}{4} a_1 a_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\nu) \frac{\beta^2(a_1^2 n^2 + a_2^2 m^2)}{(m^2 + \beta^2 n^2)^2} \right] + \frac{a^2(m^2 + n^2)A}{6(m^2 + \beta^2 n^2)} - \frac{1}{4} \delta [3\kappa(a_1 + a_2) - \delta] - \right. \\ \left. - \frac{288\kappa^2}{\pi^4} (a_1^2 m^2 S_1 + a_2^2 n^2 \beta^{-2} S_2) - \frac{48\kappa m^2 n^2}{\pi^4} a_1 \eta_1 \beta^2 S_3 + a_2 \eta_2 \beta^{-2} S_4 \right] [4 + 3\kappa(a_1 + a_2) - \delta] - \\ \left. - \frac{32m^2 n^2}{\pi^4} (\eta_1^2 n^2 \beta^4 S_5 + \eta_2^2 m^2 \beta^{-2} S_6) \left[1 + \frac{3}{2} \kappa(a_1 + a_2) - \frac{1}{2} \delta \right] \right\},$$

gdzie

$$(4.31) \quad S_1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\mu+m}] \frac{\mu^2(\mu^2 + \beta^2 n^2)}{(\mu^2 - m^2)^5}, \quad S_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\nu+n}] \frac{\nu^2(m^2 + \beta^2 \nu^2)}{(\nu^2 - n^2)^5}, \\ S_3 = \sum_{\mu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\mu+m}] \frac{\mu^2}{(\mu^2 - m^2)^5}, \quad S_4 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\nu+n}] \frac{\nu^2}{(\nu^2 - n^2)^5}, \\ S_5 = \sum_{\mu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\mu+m}] \frac{\mu^2}{(\mu^2 - \beta^2 n^2)(\mu^2 - m^2)^5}, \quad S_6 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1 - (-1)^{\nu+n}] \frac{\nu^2}{(m^2 + \beta^2 \nu^2)(\nu^2 - n^2)^5},$$

$$A = \frac{1}{a^2} \left[\kappa(a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 \beta^2) - \frac{1}{2} (1-\nu) \kappa(\kappa+1) (a_1^2 + a_2^2 \beta^2) \right].$$

Szeregi S_1, \dots, S_6 są tak szybko zbieżne, że do ich obliczenia wystarczy dla dowolnych niezbyt dużych m i n przyjąć 3 lub 4 wyrazy.

Siłę krytyczną dla dowolnych m i n wyrazimy w końcu przez szereg potęgowy względem małego parametru:

$$(4.32) \quad N_{0, mn} = \frac{D_0}{a^2} \pi^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \left(1 + \frac{\lambda_{mn}^{(1)}}{\lambda_{mn}^{(0)}} \varepsilon + \frac{\lambda_{mn}^{(2)}}{\lambda_{mn}^{(0)}} \varepsilon^2 + \dots \right).$$

5. Przykłady liczbowe

W przypadkach szczególnych wzory (4.27) i (4.30) ulegają znacznemu uproszczeniu; jako pierwszy przykład podamy siłę krytyczną dla płyty wszechstronnie równomiernie

ściskanej stałą siłą N_0 na jednostkę długości brzegu, o zmiennej grubości tylko w kierunku osi x według wzoru

$$(5.1) \quad h = h_0 \left(1 + \varepsilon \frac{x}{a} \right)^\kappa.$$

Wobec tego po przyjęciu $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ otrzymamy

$$(5.2) \quad N_{0,mm} = \frac{D_0}{a^2} \pi^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \kappa \varepsilon + \left[3\kappa(3\kappa-1) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2 m^2} + \frac{(1-\nu)\beta^2 n^2}{(m^2 + \beta^2 n^2)^2} \right) - \frac{1}{12} (1-\nu)\kappa(\kappa+1) \frac{m^2 + n^2}{m^2 + \beta^2 n^2} - \frac{288}{\pi^4} \kappa^2 m^2 S_1 \right] \varepsilon^2 + \dots \right\}.$$

Przechodząc do przykładu liczbowego przyjmijmy ponadto płytę kwadratową o boku a ($\beta = 1$) i liniowo zmiennej sztywności ($\kappa = 1/3$), oraz sposób wybočenja odpowiadający ugięciu płyty w jedną półfałę w kierunku osi x i y ($m = 1$, $n = 1$). Współczynnik Poissona $\nu = 0,3$

$$(5.3) \quad N_{0,11} = 2\pi^2 \frac{D_0}{a^2} (1 + 0,500\varepsilon - 0,080\varepsilon^2 + \dots).$$

W drugim przykładzie przyjmijmy płytę prostokątną o stałej grubości ($\kappa = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$) ściskaną wszechstronnie siłami o liniowo zmieniających się natężeniach. Wzór (4.32) ulega tutaj znacznemu uproszczeniu

$$(5.4) \quad N_{0,mm} = \frac{D_0}{a^2} \pi^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\eta_1 \beta^2 n^2 + \eta_2 m^2}{m^2 + \beta^2 n^2} \varepsilon + \left[\frac{1}{4} \delta^2 - \frac{32m^2 n^2}{\pi^4} \left(1 - \frac{1}{2} \delta \right) (\eta_1^2 n^2 \beta^4 S_5 + \eta_2^2 m^2 \beta^{-2} S_6) \right] \varepsilon^2 + \dots \right\}.$$

W przykładzie liczbowym przyjmijmy płytę kwadratową o boku a ($\beta = 1$) ściskaną w kierunku osi x siłą o stałym natężeniu N_0 ($\eta_2 = 0$) oraz w kierunku osi y o natężeniu liniowo zmiennym ($\eta_1 = 1$). Sposób wybočenja założymy w postaci ugięcia w jedną półfałę w obu kierunkach (uzasadnione dla płyty kwadratowej) tzn. $m = 1$, $n = 1$. Minimalna siła krytyczna określona jest tu wzorem

$$(5.5) \quad N_{0,11} = 2\pi^2 \frac{D_0}{a^2} (1 - 0,250\varepsilon + 0,061\varepsilon^2 + \dots).$$

W końcu postaramy się określić wpływ ścisłego rozkładu naprężeń na siłę krytyczną powodującą wybočenje płyty. Należy w tym celu zauważyć, że jedynie drugi składnik wzoru (4.30) otrzymano wykorzystując współczynniki przy ε^2 we wzorach (3.11). Ponieważ współczynniki te obliczone są w punkcie 3 w sposób nieściśły, więc nasza ocena wpływu rozwiązania zagadnienia tarczowego będzie również przybliżona, niemniej pozwoli na wyciągnięcie pewnych wniosków. Do dalszych rozważań przyjmijmy wzór (5.2) uwzględniający tylko zmianę sztywności płyty w jednym kierunku. Błąd procentowy popełniony bez uwzględnienia rozwiązania zagadnienia tarczowego możemy wyrazić wzorem

$$(5.6) \quad B = \frac{W_1}{W_2} \cdot 100\%.$$

gdzie:

$$(5.7) \quad W_1 = \frac{(1-\nu)\kappa(\kappa+1)(m^2+n^2)}{12(m^2+\beta^2n^2)} \varepsilon^2,$$

$$(5.8) \quad W_2 = 1 + \frac{3}{2} \kappa \varepsilon + \left[3\kappa(3\kappa-1) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\kappa^2 m^2} + \frac{(1-\nu)\beta^2 n^2}{(m^2+\beta^2 n^2)^2} \right) - \frac{288}{\pi^4} \kappa^2 m^2 S_1 - W_1 \right] \varepsilon^2.$$

Należy tutaj wobec stosowania metody małego parametru nałożyć ograniczenie na iloczyn $\kappa\varepsilon$, który powinien zapewniać dobrą zbieżność szeregu (5.2). Orientacyjnie założymy, że $|\kappa\varepsilon| \leq 0,2$. Przykładowo ocenimy wielkość błędu (5.6) dla następujących parametrów: $m = 1$, $n = 1$, $\nu = 0,3$:

$$(5.9) \quad B = \frac{5,83 \kappa (\kappa + 1) \varepsilon^2}{1 + 1,500 \kappa \varepsilon + (2,305 \kappa^2 - 1,009 \kappa) \varepsilon^2} \%.$$

Dla $\varepsilon = -0,5$ i $\kappa = 0,4$ $B = 1,04\%$; dla $\varepsilon = 0,5$ i $\kappa = 0,4$ $B = 0,63\%$, dla $\varepsilon = -0,2$ i $\kappa = 1,0$ $B = 0,62\%$.

Wyniki powyższe pozwalają wnioskować, że w problemach stateczności płyt o zmiennej sztywności, rozwiązywanych metodami przybliżonymi, nie ma potrzeby określać rozkładu sił podłużnych i stycznych w płycie rozwiązując równanie (2.4). Wystarczy przyjąć rozkład tych sił wynikający z rozwiązania zagadnienia tarczowego dla płyty o stałej grubości. W przypadkach szczególnych, gdy obciążenie na brzegach przeciwległych płyty jest taką samą funkcją stałą lub liniową, a obciążenie styczne jest stałe, można przyjąć rozkład sił podłużnych i stycznych w płycie taki sam jak na brzegach. Błąd wynikający ze stosowania metod przybliżonych będzie zapewne większy niż wynikający z uproszczenia zagadnienia tarczowego lub pominięcia go.

6. Uwagi końcowe

W pracach cytowanych we wstępie pomijano zmienny rozkład sił wewnątrz płyty o zmiennej sztywności, istniejący nawet w przypadkach, gdy obciążenie na brzegach jest stałe. W niniejszej pracy podjęto próbę określenia wpływu rozwiązania zagadnienia tarczowego na problem stateczności płyty prostokątnej wszechstronnie ściskanej liniowo zmiennymi siłami. Z uwagi na złożoność problemu zastosowano w zagadnieniu tarczowym metodę małego parametru oraz w zagadnieniu stateczności metodę rachunku zaburzeń (specjalną postać metody małego parametru) uzyskując rozwiązania nadające się do bezpośredniego stosowania praktycznego w przypadkach niewielkich zmian grubości płyty lub niewielkich zmian modułu Younga.

Na zakończenie pragnę wyrazić wdzięczność prof. dr Michałowi ŻYCZKOWSKIEMU za pomoc w wykonaniu tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. M. BANASIAK, *Zagadnienie utraty stateczności płyt prostokątnych o zmiennej liniowo grubości*, praca doktorska Łódź 1964.
2. D. BŁOCHINCEW, *Podstawy mechaniki kwantowej*, PWN W-wa 1954.
3. A. SZ. BOŻENOW, *Stijkiest kwadratnoj plastinki zminnoj tolszcziny stisnutoj w dwoch napriamkach*, Prikl. mech., 6, 10 (1964), 638–631.
4. E. FERMI, *Notes on Quantum Mechanics*, Chicago Press, 1960.

5. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie sprężystej i sprężystoplastycznej stateczności płyt kolowych o zmiennej sztywności metodą odwrotną* Rozpr. Inżyn. 3, **13** (1965), 587–622.
6. A. GAJEWSKI, *Pewne rozwiązania ściśle problemu stateczności płyt o zmiennej sztywności*, Arch. Inżyn. Łądown. 3, **11** (1965), 443–458.
7. Z. KACZKOWSKI, *Statics of non-homogeneous rectangular plates and discs*, Non-homogeneity in elasticity and plasticity, Symposium, Warsaw, 1958, Perg. Press, 1959, 77–82.
8. L. LANDAU, E. LIFSZIC, *Mechanika kwantowa*, PWN, W-wa 1958.
9. M. SOKOŁOWSKI, *Zastosowania metody małych parametrów w zagadnieniach płyt*, Arch. Mech. Stos., 3, **5** (1953), 415–436.
10. W. H. WITTRICK, C. H. ELLEN, *Buckling of tapered rectangular plates in compression*, Aeronaut. Quart. 4, **13** (1962), 308–326.

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Широко применяемый в квантовой механике метод возмущений, используется в настоящей работе для решения устойчивости пластинок переменной жесткости.

После общей постановки вопроса, в третьей части работы представлено решение, по методу малого параметра, задачи о плоском напряженном состоянии свободно опертой, прямоугольной пластинки переменной толщины по формуле (2.2), под действием нагрузки, определенной формулой (2.1).

В четвертой части, даются общие формулы для первой и второй поправок собственного значения λ уравнения (4.5), полученные при использовании метода возмущений. Эти формулы применяются для определения критической силы в рассматриваемой задаче об устойчивости пластинки. Результаты иллюстрируются числовыми примерами. В заключение, на частных примерах, определяется относительная погрешность решений вопроса об устойчивости пластинок с переменной жесткостью, основанных на пренебрежении безмоментным напряженным состоянием.

S u m m a r y

THE APPLICATION OF THE PERTURBATION METHOD IN STABILITY PROBLEMS OF RECTANGULAR PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

The perturbation method widely applied in quantum mechanics is used to solve stability problems of some rectangular plates with variable rigidity.

After the general formulation of the problem, in the third part of the study the case of plane elastostatic problem of a simply supported rectangular plate with variable thickness has been solved by the method of small parameter, according to the formula (2.2.) with loading (2.1).

In the fourth part the general formulas for the first and second correction of eigenvalue λ (critical load) of equation (4.5) obtained by means of perturbation methods are given. They are also used for calculation of critical load of the investigated problem of plate stability. The results are illustrated by the numerical examples. At the end a percentage error which appears in solutions of stability problems of plates with variable rigidity without taking into account the effect of plane elastic problem is described.

KATEDRA FIZYKI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 maja 1966 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

VIII ZJAZD DELEGATÓW PTMETS

Doroczny Zjazd Delegatów odbył się dnia 28 maja 1966 r. w Warszawie w Pałacu Kultury i Nauki. Porządek dzienny obejmował:

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu
2. Przyjęcie protokołu z VII Zjazdu Delegatów PTMETS
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa w okresie kadencji
5. Złożenie sprawozdania finansowego
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem
8. Wybory:
 - a) uzupełniające członków Zarządu Głównego
 - b) Głównej Komisji Rewizyjnej
9. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres z uwzględnieniem przygotowań do jubileuszu X-lecia Towarzystwa
10. Rozpatrzenie wniosków Zarządu Głównego o nadanie godności Członków Honorowych PTMETS
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski

Zjazd otworzył i zebranych Delegatów powitał przewodniczący PTMETS prof. dr. J. MUTERMILCH. Zebrani uczcili minutową ciszą zmarłych w czasie trwania ostatniej kadencji członków Towarzystwa:

doc. dr Mieczysława DOMASIEWICZA (Oddział w Krakowie),
prof. dr Mirosława KRZYŻAŃSKIEGO (Oddział w Krakowie),
prof. dr Konstantego LISOWSKIEGO (Oddział w Szczecinie),
dr Zbigniewa PEŁKĘ (Oddział w Warszawie).

Na przewodniczącego obrad wybrano prof. dr M. ŻYCKOWSKIEGO (Kraków), na zastępców przewodniczącego prof. R. KAZIMIERCZAKA (Gdańsk) i prof. dr I. KISIELA (Wrocław), na sekretarzy obrad — dr H. OSTAPIUKA (Szczecin) i dr W. WALCZAKA (Łódź).

Protokół z poprzedniego Zjazdu przyjęto z jedną poprawką prof. I. KISIELA.

Komisję Matkę i Skrutacyjną wybrano w następującym składzie: prof. dr E. KARAŚKIEWICZ (Poznań), doc. dr T. OPOLSKI (Gliwice), doc. dr R. SOLECKI (Z. G. PTMETS), prof. dr C. STECKIEWICZ (Warszawa), doc. dr M. SUCHAR (Łódź).

Sprawozdanie Zarządu Głównego za okres poprzedniej kadencji złożył Sekretarz Generalny prof. dr Z. OLESIAK.

W okresie sprawozdawczym Towarzystwo rozwijało swą działalność w oparciu o statut i wytyczne działalności uchwalone na VII Zjeździe Delegatów. Realizacja tych wytycznych przebiegała następująco.

I. Rozwijanie działalności naukowej w dziedzinie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych w Oddziałach ilustruje poniżej zamieszczona tablica 1

Tablica 1

Oddział	Liczba zebrań				razem	Liczba referatów	Uczestników		Dyskutantów	
	kwartał						łącz- nie	przeciętnie na 1 zebraniu	łącz- nie	przeciętnie na 1 zebraniu
	I	II	III	IV						
Gdańsk	2	—	—	—	2	2	20	10,0	11	5,5
Gliwice	2	3	—	2	7	8	202	29,0	63	9,0
Kraków	1	3	—	1	5	10	142	28,4	48	9,6
Łódź	2	3	—	3	8	8	123	15,4	57	7,1
Poznań	1	3	—	3	7	7	92	13,0	25	3,6
Szczecin	3	2	—	4	9	9	126	14,0	34	3,8
Warszawa	2	4	1	2	9	9	118	13,1	44	4,9
Wrocław	3	3	—	3	9	16	143	16,0	51	5,7
Razem:	16	21	1	18	56	69	966	17,2	333	6,0

Tematyka referatów wygłoszonych na zebraniach naukowych została podana w nr 1/1966 *MECH. TEORET. I STOS.*

2. *Sympozja naukowe*

W okresie sprawozdawczym odbyły się 4 sympozja naukowe, mianowicie:

a) Oddział w Krakowie zorganizował w dniach 15–17 września 1965 r. IV Konferencję nt. «Dynamika maszyn». Wzięło w niej udział 289 osób, w tym 79 gości zagranicznych. Wygłoszono 83 referaty.

b) Oddział w Poznaniu zorganizował w dniach 8–19 października 1965 r. Konferencję dotyczącą drgań nieliniowych. W imprezie tej wzięło udział 70 osób. Wygłoszono 45 referatów.

c) Oddział w Gdańsku zorganizował w dniach 19–20 listopada 1965 r. II Symposium poświęcone zagadnieniom filtracji.

d) Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach od 7 do 12 lutego 1966 r. konwersatorium pod hasłem «Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice». W konwersatorium wzięło udział 49 osób, liczba głosów w dyskusji wyniosła 97. Wygłoszono ogółem 19 referatów.

Powyższe sympozja zostały omówione w nr 1 i 3 (1966) *MECH. TEORET. I STOS.*

3. *Konkursy naukowe*

W 1965 r. zorganizowano 3 konkursy naukowe.

Zarząd Główny przeprowadził konkurs na prace doświadczalne z dziedziny mechaniki. Wpłynęło ogółem 5 prac. Komunikat o rozstrzygnięciu konkursu zamieściliśmy w nr 2 (1966) *MECH. TEORET. I STOS.*,

Oddział w Łodzi przeprowadził konkurs, na który wpłynęło 14 prac. [*MECH. TEORET. I STOS.*, nr 2 (1966)].

Oddział we Wrocławiu przeprowadził konkurs, na który wpłynęło 6 prac [*MECH. TEORET. I STOS.*, nr 3(1966)].

2. Rozpowszechnianie Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

1. *Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej Towarzystwa. Organ PTMTS MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA*

W 1965 r. złożono do druku trzy numery wydawnictwa o łącznej objętości 27 arkuszy wydawniczych (1 numer 8,25 ark., 2 numer 9,75 ark. i 3 numer 9 ark. wyd.). Tematyka poszczególnych zeszytów zawierała, zgodnie z założeniami programowymi, artykuły przeglądowe z różnych gałęzi mechaniki, prace oryginalne, biuletyn PTMTS, sprawozdania z sympozjów naukowych PTMTS, konferencji itp.

Starania Towarzystwa dotyczące przekształcenia wydawnictwa na kwartalnik zostały załatwione pomyślnie.

W grudniu 1965 r. Główny Urząd Kontroli Prasy, Publikacji i Widowisk wydał zezwolenie na wydawanie czasopisma i wobec tego od 1 stycznia 1967 r. organ PTMTS będzie kwartalnikiem. Obecnie czynione

są starania w celu zabezpieczenia funduszów na wydanie 40 arkuszy wydawniczych rocznie. Opracowano ulotkę reklamową w związku z przejściem na czasopismo.

Ponadto Oddział w Krakowie wydał bogate materiały na IV Konferencję n.t. «Dynamiki maszyn». Zawierały one skróty referatów po polsku i po angielsku (dla gości zagranicznych) oraz pełne teksty referatów (w dwóch częściach). Całość składa się z 7 oddzielnych części o łącznej objętości około 750 stron.

Oddział w Gdańsku wspólnie z Politechniką Gdańską wydał techniką powielaczową, na prawach rękopisu, materiały na sympozjum filtracji.

Oddział w Gliwicach wspólnie z Katedrą Maszyn Górniczych Politechniki Śląskiej wydał streszczenie referatów konwersatorium «Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice».

2. *Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów*

a) *K u r s y*. Oddział w Gdańsku przeprowadził w I i II kwartale 1965 r. kurs n.t. «Dwuwymiarowe zagadnienia skończonych odkształceń i przemieszczeń». Wykładowcami byli dr E. BIELEWICZ i doc. dr P. WILDE. Kurs odbywał się 2 razy w tygodniu po jednej godzinie.

Oddział w Łodzi przeprowadził w okresie od dnia 30.IX do 24.XII. 1965 r. kurs n.t. «Programowanie maszyn cyfrowych». Wykładowcą był dr J. GLUZA. W kursie wzięło udział 12 słuchaczy.

Oddział w Poznaniu zorganizował kurs z teorii drgań. Wykłady odbywały się co tydzień. W I kwartale br. przeprowadzono 4 dwugodzinne wykłady. Liczba obecnych kursantów wyniosła 100 osób, a zabierających głos w dyskusji—20.

b) *S e m i n a r i a*. Oddziały PTMTS w Gdańsku i w Krakowie uczestniczyły w organizacji seminarium n.t. «Technika Wybracyjna», które odbyło się dnia 25 marca 1966 r. przy udziale 32 osób.

3. *Dążenie do zwiększenia liczby członków PTMTS ilustruje*

Tablica 2

Oddział	R o k 1965				Rok 1966	Przybyło lub ubyło w okre- sie sprawozdawczym	
	I	II	III	IV		liczba	%
Gdańsk	39	39	39	42	42	+ 3	+ 7,7
Gliwice	55	55	55	57	58	+ 3	+ 5,5
Kraków	55	55	55	56	57	+ 2	+ 3,6
Łódź	25	25	26	26	26	+ 1	+ 4,0
Poznań	40	46	46	46	47	+ 7	+17,5
Szczecin	25	25	26	25	25	—	—
Warszawa	120	125	130	132	136	+16	+13,3
Wrocław	51	51	50	55	54	+ 3	+ 5,9
	410	421	427	439	445	+35	+ 8,5

4. *Szerszy kontakt z przemysłem i jego problematyką*

Kontakt ten polegał na zapraszaniu na sympozja i zebrania naukowe organizowane przez PTMTS inżynierów z przemysłu. Zainteresowanie tematyką imprez Towarzystwa wśród przedstawicieli przemysłu jest bardzo żywe, o czym świadczy fakt liczego uczestnictwa na sympozjach PTMTS.

3. Różne

1. Zebrania organizacyjne w 1965 r. przedstawiały się następująco:

Zjazd Delegatów	1	Zebrań Zarządów Oddziałów:	
Zebrań Zarządu Głównego	3	Gdańsk	9
Zebrań Prezydium Zarządu Głównego	3	Gliwice	4
Zebrań Głównej Komisji Rewizyjnej	1	Kraków	6
Walnych zgromadzeń Oddziałów	9 (2 w Szczecinie)	Łódź	6
Oddziałowych Komisji Rewizyjnych	8	Poznań	5
		Szczecin	3
		Warszawa	6
		Wrocław	15
		Innych zebrań organizacyjnych	—54
		Razem zebrań organizacyjnych	— 9
			—88

Liczyby te nie obejmują zebrań jury konkursów, zebrań Komitetów Organizacyjnych, Sympozjów, Komitetu Redakcyjnego *MECH. TEORET. I STOS.* i innych

W punkcie 5 Zjazdu Delegatów sprawozdanie finansowe omówił doc. dr W. SZCZEPIŃSKI.

Rok 1965

Pokrycie wydatków Towarzystwa znajduje się głównie w dotacji PAN. Przyznano ją na 1965 r. w wysokości zł. 355.000, o zł. 5.000 więcej niż w roku poprzednim. W oparciu o dotację i inne dochody Towarzystwa został opracowany preliminarz budżetowy, który w ujęciu syntetycznym przedstawia się jak następuje:

D o c h o d y		K o s z t y	
Składki członkowskie (prowizorium)	22 000	Administracja	127 830
Odpłatność za mat. konf.	8 500	Popularyzacja wiedzy	148 800
Sprzedaż wydawnictwa	15 000	Wydawnictwo	180 000
Dotacja PAN	355 000		<u>456 630 —</u>
R a z e m	400 550 —		

Preliminarz został zatwierdzony przez PAN, działającą w charakterze tzw. «instytucji dotującej» i od tej chwili stał się obowiązującym budżetem Towarzystwa. Ponieważ uważaliśmy, iż dotacja PAN jest niedostateczna, przeto Zarząd Główny zdecydował się brakującą kwotę, tj. różnicę pomiędzy wydatkami a wpływami, pokryć z własnej rezerwy.

Zatwierdzony budżet posłużył Zarządowi Głównemu za podstawę do zatwierdzenia preliminarzy Oddziałów. Należy tu nadmienić, iż PAN, przyznając nam dotację, określiła jej części przeznaczone na administrację, popularyzację wiedzy i wydawnictwo, a tym samym ograniczyła swobodę rozdzielania sum budżetowych; z tego względu nie wszystkie postulaty Oddziałów w zakresie potrzeb administracyjnych mogły być uwzględnione, natomiast przyznaliśmy im większe możliwości czynienia wydatków na cele popularyzacji.

Wykonanie preliminarza dochodów i kosztów wykazuje znaczne odchylenia od planu. Jeśli idzie o składki członkowskie, to ich pobór przedstawia się jak następuje:

Oddział	Plan ostateczny	Wykonanie	Zaległości	Przekroczenie	% wykonania
Gdańsk	2 370	2 430	—	60	102,5
Gliwice	3 300	3 375	—	75	102,3
Kraków	3 360	3 300	60	—	98,2
Łódź	1 500	1 020	480	—	68,0
Poznań	2 760	1 810	950	—	65,6
Szczecin	1 500	1 620	—	120	108,0
Warszawa	7 200	6 995	205	—	97,1
Wrocław	3 220	3 285	—	65	102,0
R a z e m	25 210	23 835	1 695	320	94,5

Z powyższego zestawienia wynika, że nie we wszystkich Oddziałach zwraca się należyta uwaga na inkasowanie składek.

Sprzedaż wydawnictwa dała w roku sprawozdawczym 16.563,40, co stanowi 110,4% w porównaniu do preliminarza. Należy mieć na względzie, iż przy ograniczonym zasięgu sprzedaży i przy stosowaniu zniżki ceny dla członków Towarzystwa, nie można liczyć na poważniejsze wpływy z tego tytułu.

Za materiały konferencyjne wpłynęło zł. 20.200, ponadto zł. 2.831,31 jako dochód nadzwyczajny.

Wykonanie planu kosztów rozpatrujemy w 2 przekrojach, mianowicie w podziale na zadania Towarzystwa i na jego jednostki organizacyjne (Oddziały), w obu przypadkach w porównaniu z planem.

Koszty poszczególnych zadań Towarzystwa

	Plan	Wykonanie	% wykonania
Administracja	127 830,—	125 814,40	98,4
Popularyzacja wiedzy	48 100,—	23 755,17	49,4
Sympozja	53 700,—	48 641,32	90,6
Inne imprezy	47 000,—	40 169,90	85,5
Wydawnictwo	180 000,—	207 344,75	115,2
R a z e m	456 630,—	445 725,54	97,6

W 1965 r. wyszły 3 zeszyty *MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ* łącznej objętości 25,5 arkuszy wydawniczych. Wydatkowano na nie zł. 198 711,75, z czego zł 90 030,20 przypada na koszty osobowe i zł 108 681,55 na koszty rzeczowe, taki stosunek wydaje się właściwy. Jeden arkusz wydawniczy kosztował średnio zł 7 792,62.

Bilans roczny Towarzystwa został przyjęty przez właściwy organ PAN bez zastrzeżeń.

Rok 1966

Preliminarz budżetowy na 1966 r. został opracowany, jak i poprzednio, w oparciu o postulaty Oddziałów z jednej strony, a z drugiej — w ramach możliwości ograniczonej wysokością dotacji oraz ustaleniem przez PAN jej części przypadających na administrację, popularyzację wiedzy i wydawnictwo. W rezultacie nie wszystkie postulaty Oddziałów znalazły pokrycie w ich budżetach zatwierdzonych przez Zarząd Główny.

Preliminarz Towarzystwa, który został przez PAN zaakceptowany, przedstawia się, jak następuje:

Dochody		Koszty	
Składki członkowskie	22 000	Administracja	143 270
Odpłatność za mat. konferencyjne	25 000	Popularyzacja wiedzy	105 000
Sprzedaż wydawnictw	15 000	Wydawnictwo	210 000
Dotacja PAN	355 000	R a z e m	458 270
Dotacja na dodatek mieszkaniowy	4 270		
R a z e m	421 270,—		

Z porównania powyższych liczb z liczbami zawartymi w preliminarzu roku poprzedniego wynika, iż w dochodach obniżyliśmy wysokość wpływu ze sprzedaży wydawnictw, natomiast podnieśliśmy kwotę odpłatności za materiały konferencyjne; w rozchodach zwiększyliśmy wydatki na administrację (m.in. o dodatki mieszkaniowe) i na wydawnictwo, przy jednoczesnej redukcji wydatków na popularyzację wiedzy. Należy także zwrócić uwagę na okoliczność, iż preliminarz przewiduje większe wydatki niż wpływy. Różnica zł 37 000 obciąża rezerwę własną Towarzystwa.

Z kolei sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył przewodniczący Komisji prof. dr Z. WASIUTYŃSKI.

W dyskusji nad sprawozdaniem zabierali głos profesorowie: I. KISIEL, S. ZIEMBA, K. KUTARBA, Z. OLESIAK, doc. W. SZCZEPIŃSKI i księgowy PTMTS W. KRZAK.

Po przeprowadzonej dyskusji na wniosek Przewodniczącego udzielono Zarządowi Głównemu absolutorium. W wyniku wyborów do Zarządu Głównego weszli na miejsce ustępujących członków Zarządu Głównego profesorów Z. OLESIAKA, W. OLSZAKA i doc. W. SZCZEPIŃSKIEGO oraz Zastępców Członków Z. G. prof. J. SIELSKIEGO i dr J. KORJANA prof. W. OLSZAK, prof. Cz. EIMER, doc. Z. OSIŃSKI, doc. W. BOGUSZ (Kraków), prof. A. CYBULSKI (Wrocław).

Na członków Głównej Komisji Rewizyjnej wybrano prof. dr Z. WASIUTYŃSKIEGO, doc. dr J. MURZEWSKIEGO (Kraków), dr E. BIELEWICZA (Gdańsk) oraz na zast. członka Komisji doc. dr H. MIKOŁAJCZAKA (Poznań).

Generalne wytyczne działalności Towarzystwa zreferował przewodniczący PTMTS prof. dr J. MUTERMILCH.

Ogólne sformułowania nie różnią się od zatwierdzonych na VI Zjeździe Delegatów (*MECH. TEORET. I STOS.*, 1(1966)).

Plan sympozjów naukowych w najbliższym okresie przedstawia się następująco:

Oddział w Gdańsku «Konstrukcje wiszące», listopad 1966.

Oddział w Gliwicach konwersatorium «Maszyny matematyczne», luty 1967.

Oddział w Krakowie wspólnie z Oddziałem w Gdańsku «Technika wibracyjna».

Oddział w Poznaniu «Drgania liniowe i nieliniowe», 1968 r.

Oddział w Szczecinie «Metody obliczeniowe i doświadczalne w mechanice stosowanej», wrzesień 1967.

Oddział w Warszawie «Metody doświadczalne analizy naprężeń», kwiecień 1967.

Oddział we Wrocławiu «Reologia metali i polimerów, betonów, gruntów i konstrukcji», IV kwartał 1966.

Ponadto w 1968 r. Towarzystwo będzie obchodziło jubileusz X-lecia istnienia. W związku z tym Zarząd Główny proponuje zorganizowanie w Warszawie jesienią 1968 r. Zjazdu wszystkich członków Towarzystwa. Dwudniowy Zjazd byłby połączony z sesją naukową, w czasie której wygłoszono by szereg referatów przeglądowych. W referatach podkreślono by nowoczesne kierunki rozwojowe mechaniki jako dyscypliny nauki oraz osiągnięcia Towarzystwa w okresie 10 lat istnienia. Zarząd Główny zaproponował powołanie Komitetu Organizacyjnego obchodu X-lecia PTMTS.

W dyskusji nad wytycznymi i na temat X-lecia Towarzystwa zabierali głos profesorowie: I. KISIEL (2-krotnie), J. MUTERMILCH, Z. OLESIAK (2-krotnie), S. ZIEMBA, M. ŻYCZKOWSKI. Po dyskusji uchwalono przyjęcie wytycznych działalności PTMTS w najbliższym okresie.

Następnie prof. dr MUTERMILCH zreferował wnioski Oddziałów o nadanie godności Członków Honorowych PTMTS: prof. dr Włodzimierzowi BURZYŃSKIEMU (Oddział Gliwice) oraz prof. dr Bohdanowi STEFANOWSKIEMU (wniosek Oddziałów Warszawskiego i Łódzkiego). Obydwa wnioski zebrani przyjęli przez aklamację.

Na zakończenie obrad prof. dr M. Życzkowski złożył podziękowanie ustępującym z Zarządu Głównego prof. dr Z. OLESIAKOWI (dotychczasowemu sekretarzowi generalnemu) oraz doc. dr W. SZCZEPIŃSKIEMU (skarbnikowi Z. G.).

Z kolei prof. dr J. MUTERMILCH podziękował prof. dr M. ŻYCZKOWSKIEMU za sprawne prowadzenie obrad, a sekretariatowi za przygotowanie Zjazdu Delegatów. Wreszcie prof. dr I. KISIEL złożył podziękowanie prof. dr J. MUTERMILCHOWI wyrażając uznanie za pracę Zarządu Głównego w ostatnim okresie.

ZEBRANIE KONSTYTUCYJNE ZARZĄDU GŁÓWNEGO

Po Zjeździe Delegatów dnia 28 maja 1966 r. odbyło się zebranie konstytucyjne Zarządu Głównego. Skład Zarządu Głównego w obecnej kadencji przedstawia się następująco.

Przewodniczący prof. dr. J. MUTERMILCH, zastępcy przewodniczącego prof. dr W. NOWACKI, prof. dr Z. BRZOSKA, sekretarz generalny prof. dr B. STANISZEWSKI, skarbnik doc. dr Z. OSIŃSKI, zastępca sekretarza generalnego doc. dr R. SOLECKI, zastępca skarbnika prof. dr Cz. EIMER, członek Zarządu Głównego prof. dr W. OLSZAK, zastępcy członków Z. G. prof. dr A. CYBULSKI, doc. dr W. BOGUSZ.

NOWE ZARZĄDY ODDZIAŁÓW PTMTS

W wyniku Walnych Zgromadzeń Oddziałów dokonano wyborów nowych Zarządów Oddziałów, które ukonstytuowały się następująco:

G d a ń s k

Przewodniczący: prof. R. KAZIMIERCZAK, członkowie: doc. dr J. WIĘCKOWSKI, doc. dr P. WILDE, mgr inż. B. DEMBSKI, doc. dr J. NAJDER.

G l i w i c e

Przewodniczący: prof. K. KUTARBA, wice-przewodniczący: doc. dr T. OPOLSKI, skarbnik: dr inż. A. JAKUBOWICZ, sekretarz: doc. dr S. GDULA; członkowie Zarządu: doc. dr R. JANICZEK, doc. dr J. NIEWIADOMSKI, doc. dr B. SKALMIERSKI, prof. dr J. SZARGUT, dr inż. T. ŚWIERZAWSKI.

K r a k ó w

Przewodniczący: prof. dr M. ŻYCZKOWSKI, wice-przewodniczący dr inż. Z. ENGEL, sekretarz: dr inż. Z. WASZCZYŻYŃ, skarbnik: doc. dr J. MURZEWSKI, członkowie: doc. dr W. BOGUSZ, prof. dr R. CIEŚLICKI, doc. dr Z. BYCHAWSKI, doc. dr K. SZPUNAR.

Ł ó d ź

Przewodniczący: prof. dr Z. PARSZEWSKI, sekretarz: dr inż. W. WALCZAK, skarbnik: dr inż. J. LIPIŃSKI.

Poznań

Przewodniczący: prof. dr E. KARAŚKIEWICZ, sekretarz: mgr J. POLLAK, skarbnik mgr inż. A. KĘBŁOWSKI, członkowie doc. dr W. KRĘGLEWSKI, doc. dr H. MIKOŁAJCZAK, mgr inż. S. STANISŁAWSKI.

Szczecin

Przewodniczący: dr inż. J. KORJAN, wice-przewodniczący: dr inż. H. OSTAPIUK, sekretarz: dr inż. H. PRIEBE, skarbnik: dr inż. J. DOROBZYŃSKI.

Warszawa

Przewodniczący: prof. dr Z. KAŹCZKOWSKI, wice-Przewodniczący: prof. dr J. LIPKA, sekretarz: dr P. JASTRZĘBSKI, skarbnik: doc. dr J. SKOWROŃSKI, zastępca sekretarza: dr R. DOROSZKIEWICZ, zastępca skarbnika: doc. dr Z. MRÓZ.

Wrocław

Przewodniczący: doc. mgr inż. R. MROMLIŃSKI, zastępca przewodniczącego: prof. dr M. SAŚIADEK, sekretarz: dr inż. E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI, skarbnik: doc. dr A. NEGRUSZ, członkowie: dr inż. S. FULIŃSKI, dr inż. T. KOLENDOWICZ, zastępca członka: dr inż. R. WYSZYŃSKI.

SYMPOZJA NAUKOWE IUTAM

1. NIEODWRACALNE PROCESY W MECHANICE OŚRODKÓW CIĄGLYCH

W dniach 22–25 oraz 26–27 czerwca 1966 w Wiedniu w gmachu Muzeum Techniki odbyły się dwa sympozja naukowe Międzynarodowego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Pierwsze z nich, którego organizatorem był prof. dr H. PARKUS (Austria), pod hasłem «Nieodwracalne procesy w mechanice ośrodków ciągłych» [Irreversible Aspects of Continuum Mechanics] zgromadziło 65 uczestników z następujących 16 krajów: USA, ZSRR, Polska, W. Brytania, Francja, NRF, Austria, Holandia, Włochy, Szwecja, India, Izrael, Szwajcaria, Japonia, Dania i CSRS. Najwybitniejsi przedstawiciele mechaniki ośrodków ciągłych wygłosili na tym sympozjum 24 referaty, w tym trzy referaty wygłosili uczestnicy z Polski. Po wielu referatach rozwinęła się ożywiona dyskusja, tak że obrady przeciągały się znacznie poza czas ustalony programem. Wszystkie referaty poza jednym zostały wygłoszone w języku angielskim, również dyskusja odbywała się w tym języku. Sympozjum to posiadało jedną cechę charakterystyczną, mianowicie wiele wypowiedzi dyskusyjnych dotyczyło jednej kwestii frapującej wielu uczestników Sympozjum, kwestii definicji temperatury i określenia stanu termodynamicznego. Dyskusja po referatach była na ogół bardzo ożywiona.

Po otwarciu Sympozjum przez Przewodniczącego IUTAM profesora M. ROYA głos zabrał L. I. STEDOW (Moskwa); tematem jego referatu były wariacyjne metody budowania modeli ośrodków ciągłych. Autor podał sposób wyprowadzenia relatywistycznych równań opisujący ośrodek ciągły w przypadku, gdy elementy ośrodka wykazują dodatkowe, wewnętrzne stopnie swobody, w porównaniu z klasycznymi modelami teorii sprężystości i hydrodynamiki. Zastosowano uogólnione pojęcie strumienia energii i tensory naprężeń wyższych rzędów. Przedstawiona metoda pozwala w szczególności otrzymać nowe warunki na silnych lub słabych nieciągłościach w skomplikowanych przypadkach. Podstawowe równanie ma postać całki w przestrzeni czterowymiarowej ograniczonej trójwymiarową powierzchnią, będącą uogólnioną funkcją Lagrange'a.

Referat D. C. DRUCKERA (Providence, USA) dotyczył ośrodka zbudowanego ze skończonej lub nieskończonej liczby jednorodnych elementów. Jako najprostsz przykład autor rozpatruje kombinację równoległych, liniowych elementów sprężystych, lub sprężysto-plastycznych poddanych działaniu rozciągania. Inne przykłady dotyczyły obciążeń cyklicznych, wpływu wzmocnienia i niejednorodności. W dyskusji E. H. LEE poddał w wątpliwość, czy można pominąć przy obciążeniach cyklicznych wpływ ciepła.

H. ZIEGLER (Zurych) mówił o możliwych uogólnieniach teorii Onsagera. Zastosowanie teorii Onsagera w mechanice ośrodków ciągłych jest krytykowane z następujących powodów: po pierwsze, zdaniem autora nie ma kryterium umożliwiającego właściwy dobór tzw. strumieni i sprzężonych z nimi sił. Również zdaniem autora prawie każdą z wielkości można traktować jako strumień lub siłę. Ostatnio wykazano, że związki Onsagera tracą sens w przypadku częściowej wymiany wzajemnej strumieni i siły lub ich mieszanych kombinacji liniowych. Po drugie, teorię Onsagera można stosować tylko do liniowych związków między strumieniami i siłami. Niemniej teoria Onsagera znajduje poważne zastosowania w fizyce, chemii, a nawet w mechanice ośrodków ciągłych (potencjał plastyczności). Autor podaje kryterium doboru strumieni i sił oraz zastępuje związki Onsagera zasadą maksimum. H. ZIEGLER skrytykował założenia

poprzednio wygłoszonej pracy Druckera, ponieważ wprowadzone elementy posiadały jeden stopień swobody zamiast sześciu oraz ponieważ własności jednego elementu nie muszą dotyczyć całości ośrodka.

Wykład C. TRUESDELLA (Baltimore, USA) nosił tytuł «Termodynamika dla początkujących». Autor zastrzegł się, że tytuł ten nie ma na celu obrazić słuchaczy, lecz wyjaśnić kilka spraw, prowadzących zdaniem autora do nieporozumień. W eleganckim ujęciu matematycznym zostały przedstawione postulaty zmodyfikowanej termodynamiki, posiadającej konstrukcję dyscypliny matematycznej. Punktem wyjścia pracy były zasada zachowania energii i nierówność Clausiusa-Plancka. «Procesem» nazwano zbiór funkcji czasu, których wartościami są przyrost energii, moc mechaniczna i niemechaniczna, entropia, temperatura. Termodynamicznymi równaniami konstytutywnymi nazwano regułę, z której pomocą historia temperatury i historia parametrów określa energię swobodną, entropię i moc mechaniczną. Każde równanie konstytutywne spełnia w każdym procesie zasadę zachowania energii i nierówność Clausiusa-Plancka.

Po referacie rozwinęła się obszerna dyskusja (zabierano głos 11 razy), przy czym część wypowiedzi była krytyczna. J. KESTIN uważa, że różnice polegają na koncepcji stanu równowagi, który zwykle zakłada się i w ten sposób otrzymuje węższą klasę funkcji; przedstawione rozszerzenie klasy funkcji nie ma znaczenia fizycznego. Również zastrzeżenia wysunął J. MEIXNER. B. D. COLEMAN wystąpił natomiast z obroną przedstawionej koncepcji. Na pytanie S. KALISKIEGO, co w tej teorii oznacza temperatura, jak ją mierzyć i jakie posiada znaczenie fizyczne, autor stwierdził, że nie ma powodu jej w pierw mierzyć, należy postępować podobnie jak z siłami w mechanice analitycznej.

Sesja popołudniowa rozpoczęła się od wykładu B. D. COLEMANA (Pittsburg, USA). Prelegent oświadczył, że nie będzie referował zgłoszonej pracy (wspólnej z E. GURTINEM, pt. «Termodynamika i rozprzestrzenianie się fal w materiałach nieliniowych z pamięcią», ponieważ praca ta będzie opublikowana i każdy będzie mógł się z nią zapoznać, powtórzył natomiast wykład wygłoszony na konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Augustowie (1965, por. Biuletyn, *MECH. TEORET. I STOS.*, z. 3, str. 111) o termodynamice ośrodków ciągłych z pamięcią. Wykład ten był najdłuższy ze wszystkich referatów Sympozjum.

W pierwszym dniu obrad wygłoszone zostały jeszcze dwa referaty polskich uczestników, mianowicie W. OLSZAKA i P. PERZYNY o termodynamice materiałów typu różniczkowego oraz S. KALISKIEGO o powstawaniu fal cieplnych Czerenkowa w przypadku równań falowych termo-elektro-magneto-sprężystości. Praca W. OLSZAKA i P. PERZYNY była przyczynkiem do teorii rozwijanej przez COLEMANA i NOLLA; wyprowadzenie opiera się na zasadach determinizmu, lokalnego działania, obiektywności materialnej, współobecności i drugiej zasadzie termodynamiki.

Praca S. KALISKIEGO dotyczyła tematyki, którą autor zajmował się w artykułach publikowanych ostatnio w *Proceedings of Vibration Problems* 3, 6 (1965) oraz w Biuletynie PAN, seria nauk techn. 4 i 5, 13 (1965). W szczególności prelegent omówił własność hiperboliczności równań otrzymanych w oparciu o uogólnioną zasadę Onsagera oraz idee związane z doświadczeniami mającymi potwierdzić teorię. Dyskutanci interesowali się sprawą wielkości omawianego efektu w doświadczeniach oraz powodu hiperboliczności lub paraboliczności równań (L. SIĘDOW).

Drugi dzień obrad rozpoczął referat E. T. ONATA (New Haven, USA) o pojęciu historii i stanu w termodynamice. W ostatnich latach przyjmuje się założenie, że wielkości termodynamiczne, takie jak energia swobodna, są funkcjonalami historii odkształcenia i temperatury. Pewni badacze podchodzą sceptycznie do takiego założenia i wolą sformułowanie oparte na pojęciu stanu i funkcji stanu. Praca E. T. Onata łączy w sobie oba podejścia; autor między innymi rozpatruje termodynamikę odkształceń skończonych ciał plastycznych. Po referacie wywiązała się ożywiona dyskusja.

J. MEIXNER (Akvizgran, NRF) tytuł swojego referatu określił jako różne aspekty termodynamiki procesów nieodwracalnych. Prelegent przedstawił zalety i braki podstaw teoretycznych termodynamiki. Ponadto stwierdził, że w stanie, który nie jest stanem równowagi, nie istnieje konsekwentna teoria ośrodka ciągłego. Nie można bowiem zdefiniować jednoznacznie entropii ani obliczyć jej z danych dynamicznych i termodynamicznych. Entropia może posiadać znaczenie poza stanem równowagi tylko wtedy, gdy znane są pewne dane o atomowej strukturze i mechanizmach molekularnych. Dlatego w przedstawionej teorii nie wprowadzono pojęcia entropii i np. druga zasada termodynamiki została wyrażona przez całkę z różnicy temperatury i strumieni ciepła. Ponadto J. MEIXNER przedyskutował granice stosowalności różnych teorii oraz zasadę traconej energii i zasadę stanu lokalnego. Referat ten spotkał się z najbardziej kontrowersyjną

dyskusją. Krytycznie ustosunkowali się B. D. COLEMAN i C. TRUESDELL. COLEMAN przedstawił krytykę zasady Onsagera zawartą w pracach własnych i C. TRUESDELLA oraz skrytykował książkę S. R. DE GROOTA i P. MAZURA (Non-equilibrium Thermodynamics), który reprezentował poglądy podobne do przedstawionych w pracy. W pewnym momencie wystąpiła ogólna wymiana zdań pomiędzy dyskutantami. M. ROY w swojej dłuższej wypowiedzi zajął się sprawami definicji entropii popierając poglądy prelegenta. Na tej wypowiedzi dyskusja została przerwana z powodu spóźnionej pory. Prof. C. TRUESDELL zaprotestował przeciw przerwaniu dyskusji wypowiadając opinię, że dyskusje są najistotniejszym elementem konferencji naukowych i że wtedy nie należy przestrzegać limitów czasowych.

Kolejny referat na temat termodynamicznego podejścia do reologii wygłosił J. F. BESSELING (Delft, Holandia), w którym starał się wykazać, że kontynuualna teoria odkształcenia i płynięcia może być oparta na zasadzie zachowania masy, pierwszej i drugiej zasadzie termodynamiki, koncepcji lokalnego stanu termodynamicznego i lokalnego geometrycznego stanu odniesienia, zasadzie determinizmu i postulacie dotyczącym produkcji entropii. Autor ustosunkował się do pewnych prac Eckarta, Truesdella i Coleman-Nolla. W ożywionej dyskusji zabierali głos profesorowie ONAT, NAGHDI, KESTIN i KLUTENBERG.

Popołudniowe obrady otworzył referat M. REINERA (Izrael) pt. «Wpływ rozproszonej pracy naprężeń na zniszczenie materiału», w którym podany został krótki rys historyczny zagadnienia poczynając od Beltramiego i Hubera. W referacie omówiono również postulat Weissenberga-Reinera, że zniszczenie zależy od maksymalnej wartości wewnętrznej energii swobodnej. W rozważaniach M. REINER posługiwał się modelami reologicznymi z tłumików i sprężyn. W dyskusji W. OLSZAK podał jeszcze inne możliwości uogólnienia z pomocą modeli, których elementami są również regulatory bezwładnościowe.

«O zastosowaniu zasad termodynamiki do odkształcalnych ciał stałych», to tytuł referatu J. KESTINA (Providence, USA), który uważa, że termodynamiki nie należy reformować, tylko przedyskutować pewne wynikające paradoksy. Na przykład w teorii plastyczności konieczne jest rozdzielanie całkowitego odkształcenia na część, która jest, i część, która nie jest parametrem stanu. W przypadku lepkosprężystości podobne rozdzielanie wpływa na naprężenia i konieczne jest wprowadzenie jednej lub więcej dodatkowych zmiennych stanu. Ważność tego wniosku polega na tym, że potencjały termodynamiczne mogą być tylko funkcjami parametrów stanu. W pracy zostały skrytykowane pewne wyniki J. R. Rice'a. Warto może zanotować odpowiedź w dyskusji, że do plastyczności nie należy stosowanie zasady Onsagera ważnej dla małych odchyień od stanu równowagi, ponieważ w tym przypadku występują procesy, dla których zmiany parametrów termodynamicznych są zerowe (natomiast zmieniają się parametry nietermodynamiczne).

R. S. RIVLIN (Providence, USA) mówił o termodynamicznych podstawach mechaniki ośrodków ciągłych w oparciu o zasady termodynamiki i założenia dotyczące niezmienniczości pewnych wielkości.

Trzeci dzień sympozjum rozpoczął referat W. PRAGERA (La Jolla, USA) o złożonych związkach pomiędzy naprężeniem i odkształceniem dla materiałów plastycznych. Przykłady dotyczyły równoczesnego rozciągania i skręcania rur cienkościennych. Zdaniem autora doświadczenia lepiej potwierdzają wyniki przedstawionej teorii od wyników teorii Prandtla-Reussa.

E. H. LEE (Stanford, USA) zreferował pracę wspólną z D. T. LIU, o odkształceniach skończonych modelu sprężysto-plastycznego. Praca dotyczy rozprzestrzeniania się fal płaskich w płytach metalowych, spowodowanego wybuchem przy uwzględnieniu dużych odkształceń wpływów cieplnych, oraz termomechanicznego sprężenia.

P. M. NAGHDI (Berkeley, USA) przedstawił pracę pod tytułem «Termodynamiczne (w sensie uogólnionym) rozwinięcie ośrodka sprężysto-plastycznego», napisaną wspólnie z A. E. GREENEM. Przedmiotem pracy była teoria nieliniowa w oparciu o podstawowe równania termodynamiki. Autorzy uważają przedstawioną teorię za ścisłą z punktu widzenia termodynamiki i mechaniki. Podstawowe tezy pracy zawarte są w dwóch pracach autorów (Arch. Rat. Mech. Anal., 18 (1965), 251 i Mathematica 12 (1965), 21).

G. S. SZAPIRO (Moskwa) mówił o warunkach plastyczności i zniszczenia dla materiałów lepkosprężysto-plastycznych.

A. M. FREUDENTHAL (Nowy Jork) we wspólnej pracy z M. RONAY przedstawił zagadnienia akumulowania się wpływów drugiego rzędu w ciałach z rozpraszaniem. Akumulowanie się tego rodzaju wpływów odkryto doświadczalnie przy skręcaniu próbek aluminiowych w zakresie wzmocnienia. W pracy przedstawiono wyniki doświadczeń.

Referat W. NOWACKIEGO dotyczył naprężeń momentowych w teorii termosprężystości. Rozpatrywany ośrodek Cosseratów był jednorodny i izotropowy. Zagadnienie opisuje układ czterech różniczkowych cząstkowych równań falowych określających fale podłużne i poprzeczne. Równania podstawowe zostały wyprowadzone z zasad termodynamiki procesów nieodwracalnych, równań energii i równania bilansu entropii. Rozpatrzony przykład dotyczył ośrodka nieograniczonego. Poza wyprowadzeniem równań podstawowych autor uogólnił zasadę prac przygotowanych na przypadek dynamicznych zagadnień termosprężystości oraz twierdzenie o wzajemności również na przypadek zagadnień dynamicznych.

G. HERRMANN (Evanston, USA) przedstawił pracę wspólną z J. D. ACHENBACHEM o pewnych dynamicznych zagadnieniach sprzężonej termosprężystości. Autorów pracy interesowało przede wszystkim, co się dzieje na froncie fali oraz występujące nieciągłości. Z dyskusji z C. Truesdellem okazało się, że założenia pracy są wąskie.

W czwartym dniu Sympozjum wyłożono trzy referaty. Pierwszy z nich Ju. N. RABOTNOWA (Moskwa) dotyczył kinetyki pełzania i zniszczenia spowodowanego pełzaniem. Podstawowym założeniem teorii pełzania i zniszczenia metali w podwyższonej temperaturze jest przyjęcie skończonej liczby parametrów stanu charakteryzujących strukturalny stan materiału w rozpatrywanej chwili. Kinetyczne równanie pełzania można podać w stosunkowo prostej postaci w przypadku opisywania dwóch zjawisk: pierwotnego pełzania przy naprężeniach i temperaturze średniej i oraz krótkiego czasu pełzania aż do zniszczenia w wysokiej temperaturze.

W następnym referacie U. UHLHORN (Lund, Szwecja) przedstawił w matematycznie eleganckiej postaci zagadnienia termo-mechaniki układów ciągłych z wewnętrzną strukturą.

W ostatnim wykładzie sympozjum J. HULT (Göteborg, Szwecja) omówił fenomenologiczne aspekty nieodwracalności pełzania.

Z. Olesiak (Warszawa)

2. TRANSPORT FIZYCZNYCH CHARAKTERYSTYK PORUSZAJĄCYCH SIĘ PŁYNÓW

Sympozjum od strony merytorycznej zorganizowane było przez prof. L. SEDOWA, a od strony organizacyjnej przez prof. PARKUSA. Wygłoszono 5 referatów oraz 2 obszerniejsze wypowiedzi. Liczba uczestników z różnych krajów wahała się od 30 do 10 osób.

Wypowiedź L. SEDOWA (ZSRR) wygłoszona na wstępie dotyczyła uprzednio opublikowanego w D.A.N. ogólnego wariacyjnego, a więc całkowego sformułowania problemów ośrodków ciągłych, w którym zawarte są zależności od wyższych pochodnych i warunki brzegowe. Główna dyskusja z RIVLINEM dotyczyła równoważności ujęcia analitycznego w postaci całkowego równania energii, która ma tę niezgodność, że wymaga sformułowania energii elektromagnetycznej powszechnie nieuzgodnionej.

B. R. SETH (India) wygłosił referat o «Nieodwracalnych przejściach w mechanice ośrodków ciągłych». Nieodwracalność, nieliniowość w takich zjawiskach jak elasto-plastyczne odkształcenia, pełzanie, warstwy przysięcienne, fale uderzeniowe są zwykle linearyzowane przez wprowadzenie osobliwych powierzchni, na których dwa stany ośrodka uzgodnione są na styku za pomocą empirycznych zależności. Analitycznie pociąga to za sobą wprowadzenie złożonych równań konstytutywnych. Prof. SETH wykazał, że nieodwracalne przejścia są równoważne asymptotycznym rozwiązaniom równań pola układu w punktach przejścia.

W połączeniu z pojęciem uogólnionej miary $\int_{l_0}^l \left(\frac{l_0}{l}\right)^n \frac{dl}{l_0}$, która uwzględnia wewnętrzną nieliniowość w skondensowanej postaci, unika się użycia pół-empirycznych zależności i równań stanu, będących przejawem naszej ignorancji i wprowadzić następujący konsekwentny ciąg zależności:

1. Koncepcje miary
2. Równania stanu
3. Konstytutywne równanie
4. Koncepcja przejścia

J. P. ŁUNKIN (ZSRR), «Wibracyjna dysocjacja relaksacyjna wieloskładnikowej mieszaniny lepkiego przewodzącego gazu». Uzyskano równania uwzględniające równoczesne występowanie zjawisk relaksacji wibracyjnej i nieodwracalnej dysocjacji. W równaniach tych uwzględniono: wpływ wzbudzenia w stanie braku równowagi oscylujących stopni swobody molekuł na skutek reakcji chemicznych i przepływu ciepła oraz wpływ prędkości reakcji chemicznych na średnią energię oscylacyjną każdego dysocjowanego składnika.

Wykazano, że rozkład temperatur wibracyjnych płaskiej fali uderzeniowej zależy mocno od liczby Macha i dla małych wartości liczby Macha temperatura wibracyjna zmienia się monotonicznie, a przy dużych liczbach Macha temperatura wibracyjna ma wyraźne maksimum. Autor stosuje metodę zależności całkowych dla wyznaczenia przepływu wokół tępych ciał i wykazuje, że wpływ zjawisk relaksacyjnych na kształt i odsunięcie fali uderzeniowej jest niewielki, natomiast zmienia się w dużym stopniu rozkład gazodynamicznych parametrów między falą i ciałem i na samej powierzchni ciała.

Z obliczeń laminarnej warstwy przyściennej na płycie o różnych katalitycznych własnościach wynika, że profile temperatury, energii wibracyjnej i stopnie dysocjacji różnią się od siebie znacznie przy równoczesnym uwzględnieniu relaksacji wibracyjnej i dysocjacji od przypadku, gdy uwzględnia się tylko relaksację dysocjacji.

W. N. NIKOŁAJEWSKI (ZSRR), «Zjawiska transportu w ośrodkach porowatych nasyconych płynem». Zastosowano fenomenologiczne metody do wyznaczania równań zachowania masy energii i pędu dla wieloskładnikowych, wielofazowych ośrodków. Wyznaczono przepływ w ośrodkach porowatych połączony ze zjawiskami zmiany fazy i konwekcyjnej dyfuzji. Wykorzystano metody statystyczne i obliczono zagadnienie odzysku mieszanin paliwowych ze zbiorników gazów z kondensatem.

F. N. FRENKIEL (USA), «Wspólna gęstość prawdopodobieństwa rozkładów w przepływach turbulentnych». Podkreślając ważność doboru modelu zjawisk w oparciu o wyniki badań doświadczalnych autor podał wyniki obszernych pomiarów korelacji turbulencji w dużej odległości za całą siatką, uzyskanych w tunelu niskiej turbulencji National Bureau of Standards. Z pomiarów tych wynika, że turbulencja izotropowa i jednorodna nie występuje. Pomiary były wykonane w zakresie 2–20 000 Hz.

Analiza pomiarów wykonana na maszynach cyfrowych wykazała, że rozkład Gausowski nie daje dobrej zgodności, natomiast zastosowanie wielomianów Hermite'a dla dwu zmiennych (po raz pierwszy) dało bardzo dobre wyniki.

Jak wynika z dalszych rozważań, istnieje potrzeba zastosowania prawdopodobieństw rozkładu wyższego rzędu i większej liczby wyrazów. Z dyskusji wynikało, że omówione badania wskazują na nowe drogi badań turbulencji.

G. J. ZEMANEK (CSSR), «Wpływ dynamiki powierzchni styku między cieczą i parą na intensywność wymiany ciepła». W oparciu o analizę dotychczasowych prac i badań doświadczalnych wskazano praktyczne aspekty wpływu dynamiki powierzchni rozkładu na zjawiska cieplne.

Na zakończenie M. J. LIGHTHILL omówił zagadnienie opracowane przez WHITHAMA o rozszerzeniu metod optyki geometrycznej na nieliniowe zagadnienia, kiedy ośrodek jest dyspersyjny, tj. gdy występujące zmienne zależą od częstotliwości fal.

W. Fiszdon (Warszawa)

SPRAWY ORGANIZACYJNE IUTAM, powołanie Euro-mech.

IUTAM postanowiło w ciągu najbliższych paru lat zorganizować następujące sympozja:

1. Warstwa przyścienna i turbulencja z uwzględnieniem zastosowań geofizycznych, Tokio, 19–24.IX.1966 r.
 2. Uogólniony ośrodek Cosseratów i teoria dyslokacji z zastosowaniami, 28.VIII–2.IX.1967 r., Freudenstadt i Stuttgart.
 3. Ciała stałe pod działaniem bardzo wysokich ciśnień, Paryż, wrzesień 1967 r.
 4. Teoria cienkich powłok, Kopenhaga, 20–27.VIII lub 3–10.IX.1967 r.
 5. Termoniesprężystość, Glasgow, 1968 r.
 6. Metody bardzo szybkich obliczeń cyfrowych w dynamice gazów (USA) tuż przed Kongresem Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w 1968 r.
- Ponadto nie precyzując dokładnie miejsca i czasu proponowano zorganizować następujące sympozja:
1. Przepływy mieszanin płynu z zawiesinami ciał stałych, Anglia 1969 r.
 2. Stateczność niezachowawczych układów i zagadnienia aerosprężystości, Karlsruhe 1968 r. lub 1969 r.
 3. Przepływy gazów zjonizowanych, Polska 1967 lub 1969 r.
 4. Przepływ wody z dużymi prędkościami i nieustalony, ZSRR.
 5. Nieustalone przepływy gazów i cieczy w ośrodkach porowatych, ZSRR.
 6. Elektro-hydrodynamika, Anglia 1967 lub 1968.
 7. Kosmiczna gazodynamika, 1967 lub 1970.

EUROMECH. (REGIONALNY ODPOWIEDNIK IUTAMu)

Ukonstytuował się Komitet złożony z przedstawicieli krajów europejskich pod przewodnictwem prof. G. K. BATCHELORA (Cambridge, Anglia). Na cztery lata powołano prezydium w składzie prof. G. K. BATCHELOR (Anglia), dr KUCHEMANN (Anglia), prof. WILLE (Berlin Zach.), dr BESSELING (Holandia).

Planowane są następujące sympozja ściśle specjalistyczne (najwyżej 50 uczestników).

1. Drgania budynków ze specjalnym uwzględnieniem wzbudzania aerodynamicznego, Southampton, 3-7.IV.1967 r.

2. Trójwymiarowa analiza konstrukcji, Stuttgart, 1967 r.

3. Przepływ płynnego metalu w polu magnetycznym, Berlin Zach., 1967 r.

Ponadto rozważana jest organizacja następujących sympozjów, o ile zbierze się odpowiednia grupa specjalistów i instytucja organizująca.

1. Fale grawitacyjne w uwarstwionych płynach
2. Przepływy konwekcyjne
3. Stateczność hydrodynamiczna warstwy przyściennej i strumieni (Polska)
4. Powstawanie bąbelków powietrznych i ich ruch
5. Tworzenie się kropeł i związane zagadnienia wymiany ciepła
6. Wpływ dodatkowych polimerów na burzliwy przepływ wody
7. Naprężenia termiczne (Polska)
8. Lepkosprężystość i lepkoplastyczność (Polska)
9. Duże odkształcenia i naprężenia powłok
10. Metody pomiaru zmiennych prędkości w wodzie
11. Zagadnienia dyfuzji obciążeń
12. Numeryczne rozwiązania równań Navier-Stokesa
13. Mieszane eliptyczno-hiperboliczne stożkowe przepływy
14. Mieszane eliptyczno-hiperboliczne stożkowe przepływy
15. Mechaniczne właściwości materiałów uzyskanych w wyniku dyspersji jednego ciała stałego w drugim
16. Magneto-termodynamika (Polska)

Przedstawiciele poszczególnych krajów są proszeni o zgłoszenie zainteresowań dotyczących treści sympozjów oraz kandydatów do ich zorganizowania.

W. Fiszdón (Warszawa)

VIII JUGOSŁOWIAŃSKI KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

W dniach 6.6-11.6. 1966 odbył się w Splicie VIII Jugosłowiański Kongres Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej organizowany co dwa lata przez Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki oraz przez Związek Inżynierów i Techników Jugosławii. W Kongresie wzięło udział ok. 150 osób, w tym ok. 30 uczestników zagranicznych (10 osób z Polski).

Obrady toczyły się w dwóch sekcjach. W sekcji A tematyka obrad dotyczyła głównie mechaniki ciała stałego i teorii konstrukcji, w sekcji B natomiast przedstawiono przede wszystkim prace z zakresu mechaniki cieczy i gazów oraz mechaniki teoretycznej i teorii drgań. Z uwagi na dużą liczbę referatów posiedzenia odbywały się przed i popołudniu.

Większość przedstawianych w obu sekcjach prac miała charakter praktyczny. Tematyka ich wynikała z konkretnych zapotrzebowań przemysłu i budownictwa; rozpatrywano więc głównie problemy brzegowe elementów konstrukcji pracujących w zakresie sprężystym, przedstawiając często odpowiednio opracowane wyniki liczbowe w postaci nadającej się do bezpośredniego wykorzystania. Odrębny charakter miały prace przedstawione przez zespół zgrupowany wokół doc. R. STOJANOVIĆA (Belgrad); wygłoszone referaty dotyczyły mechaniki ośrodka z naprężeniami momentowymi i defektami (dyslokacje), przy czym w badaniach rozpatrzono podstawowe związki dla tych ciał. Podobny charakter miała też praca G. GRIOLIEGO (Padwa) omawiająca równania konstytutywne dla materiałów sprężystych w przypadku dużych odkształceń. Zreferowano także jedną pracę przeglądową z zakresu teorii plastyczności rozpatrującą sposoby

rozwiązania problemów brzegowych dla ciał sprężysto-plastycznych — D. Jurišić, Lublana). Duże zainteresowanie wzbudził referat prof. GOLDENWEJZERA (Moskwa) dotyczący zastosowania metod asymptotycznych do badania drgań powłok. Prace polskie obejmowały szeroki zakres tematyczny (teoria plastyczności, teoria łpkosprężystości, teoria dyslokacji, hydrosprężystość, teoria spękania, konsolidacja, zagadnienie oporów przy toczeniu, teoria turbulencji) i zostały życzliwie przyjęte przez słuchaczy.

Z. Mróz, R. Solecki (Warszawa)

SYMPOZJUM IASS DOTYCZĄCE STALOWYCH I BETONOWYCH KONSTRUKCJI WIEŻOWYCH

W dniach od 6 do 8 czerwca 1966 r. odbyło się w Bratysławie sympozjum IASS (International Association of Shell Structures) poświęcone stalowym i betonowym konstrukcjom wieżowym. Głównym celem sympozjum było skoncentrowanie w jednym spotkaniu dość rozległej, a dotychczas bardzo rozrzuconej tematyki dotyczącej projektowania, obliczania oraz badania doświadczalnego szczególnego rodzaju powłok, jakimi są wszelkiego rodzaju wieże. Przez pojęcie wież rozumiano tu bardzo szeroki zakres konstrukcji takich, jak maszty radiotelewizyjne, wieże chłodnicze, kominy itp.

W sympozjum uczestniczyły delegacje z 21 państw przeważnie europejskich. Obrady odbywały się w dużej auli Politechniki w Bratysławie przy placu Gottwalda 50. Wspomniana bardzo duża sala nadała obradom dość oficjalny charakter, co z kolei wpłynęło na niemal całkowity brak dyskusji.

Tematykę obrad podzielono na następujące części referowane kolejno przez głównych referentów (nazwiska referentów w nawiasach).

1. Założenia dotyczące obciążeń (prof. R. KRAPPENBAUER, Wiedeń)
2. Statyka (prof. K. HRUBAN, Brno)
 - 2b. Stateczność (prof. F. LEDERER, Brno)
3. Dynamika (prof. B. KORENJEV, Moskwa)
4. Projektowanie i zagadnienia konstrukcyjne wież stalowych (prof. F. FALTUS, Praga)
 - 5a. Kominy i wieże chłodnicze (prof. R. CIESIELSKI, Kraków)
 - 5b. Wieże ciśnień, silosy (prof. G. K. CHAJDUKOW, Moskwa)
 - 5c. Wieże telewizyjne, fundamenty (dr H. RÜHLE, Drezno)

Wszystkie prace zgłoszone na sympozjum zostały opublikowane we wspólnym wydawnictwie pt. «Symposium on tower-shaped steel and reinforced concrete structures», Preliminary Report, Bratislava, 6–8 June, 1966. Na uwagę zasługuje fakt, że materiały te zostały doręczone uczestnikom przed rozpoczęciem sympozjum.

Poza obradami program przewidywał spotkania i wycieczki w okolice Bratysławy co z niezwykle serdeczną, słowacką gościnnością i dobrą organizacją nadało sympozjum niezwykle przyjemny charakter.

Organizatorami sympozjum były: Czechosłowacka Organizacja Techniczna, Słowacka Politechnika w Bratysławie, i Słowacka Akademia Nauk.

W. Gutkowski (Warszawa)

KONFERENCJE SZKOLENIOWE PAN

TEORIA PLASTYCZNOŚCI

Konferencja została zorganizowana przez Dział Kształcenia Kadr Naukowych PAN z iniejiatywy Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych PAN w Jabłonie w dniach 20–30 kwietnia 1966 r. Jej celem było przedstawienie inżynierskich zastosowań teorii plastyczności do zagadnień nośności granicznej konstrukcji inżynierskich i maszynowych oraz problem racjonalnego projektowania konstrukcji, a tym samym wzbudzenie zainteresowania tą tematyką w innych środowiskach naukowych.

Wykłady odbywały się w trzech grupach tematycznych: a) Ogólne podstawy teorii plastyczności, wykładowca doc. J. RYCHLEWSKI, b) Nośność graniczna elementów osłabionych karami, wykładowca doc. W. SZCZEPIŃSKI i c) Optymalne projektowanie konstrukcji, wykładowca doc. Z. MRÓZ. W pierwszym cyklu wykładów omówiono podstawy teorii ciał idealnie plastycznych i ze wzmocnieniem oraz twierdzenie o nośności granicznej. W drugim cyklu wykładów przedyskutowano problem nośności granicznej płaskich oraz

osiowo-symetrycznych rozciąganych elementów osłabionych karbami oraz zachowanie się tych elementów w zakresie sprężysto-plastycznym, omawiając zarówno wyniki teoretyczne jak i doświadczalne. Trzeci cykl był poświęcony teorii optymalnego projektowania konstrukcji zarówno sprężystych jak i plastycznych; omówiono metody optymalnego projektowania konstrukcji prętowych, tarcz oraz płyt i powłok.

W konferencji wzięli udział pracownicy naukowcy Politechnik oraz Instytutów Naukowych.

Z. Mróz (Warszawa)

TEORIA PLASTYCZNOŚCI I REOLOGIA W MECHANICE GRUNTÓW

W dniach od 23 maja do 2 czerwca 1966 r. odbyła się w Jabłonie Konferencja Szkoleniowa zorganizowana przez Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych PAN pod ogólnym tytułem «Teoria plastyczności i reologia w mechanice gruntów».

Celem konferencji było przedstawienie współczesnych poglądów i osiągnięć, dotyczących teoretycznych i praktycznych zagadnień mechaniki gruntów, teorii plastyczności i reologii.

W ramach konferencji odbyły się cztery cykle wykładów:

- 1) Teoria plastyczności w zastosowaniu do mechaniki gruntów
- 2) Warunki plastyczności i stanu granicznego gruntów
- 3) Model M/V w zastosowaniu do reologii gruntów
- 4) Termodynamiczna teoria materiałów o własnościach reologicznych.

Cykl pierwszy prowadził dr n.t. A. S. STROGANOW z Instytutu Fundamentowania i Mechaniki Gruntów (Moskwa ZSRR). Przedstawił on wyniki szeregu własnych prac poświęconych zagadnieniom zastosowania, deformacyjnej teorii plastyczności uwzględniającej efekty lepkie do problemów mechaniki gruntów. Zastosowana teoria opiera się na wynikach badań doświadczalnych autora przeprowadzonych na różnych rodzajach gruntów ze szczególnym uwzględnieniem własności reologicznych.

Konkretne przykłady zadań brzegowych jak rury grubościennej, pustki walcowej w ośrodku gruntowym i in. zostały rozwiązane przy przyjęciu modelu ciała typu Bingham'a.

Wykłady drugiej grupy tematycznej, prowadzone przez doc. dr Z. SOBOTKĘ z Instytutu Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej CSAN w Pradze, poświęcone były głównie trzem zagadnieniom rozwijanym w paracach własnych referenta:

- 1) Warunki plastyczności dla ciał izotropowych i anizotropowych
- 2) Statyka i kinematyka ośrodka sypkiego w stanie równowagi granicznej przy przyjęciu funkcji wiążącej odchylenie kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia
- 3) Zagadnienia przestrzenne równowagi granicznej.

Na wykładach przedstawiono jedynie ogólną analizę teoretyczną tych zagadnień.

Wykładowcą trzeciego cyklu był prof. dr I. KISIEL z Politechniki Wrocławskiej. Zreferował on wyniki własnych prac dotyczących zastosowania wprowadzonego przez siebie reologicznego modelu M/V gruntu, stanowiącego kombinację elementów Kelvina, Maxwella i St. Venanta jako modelu opisującego podstawowe własności gruntu. Model ten zastosowano do rozwiązania szeregu podstawowych warunków brzegowych jak działanie siły skupionej na półprzestrzeni, zadanie Flamanta i in. Przedstawione rozwiązania mogą służyć jako metody obliczeniowe pewnych zagadnień fundamentowania i mechaniki gruntów. Ponadto prof. I. Kisiel omówił koncepcje badań doświadczalnych, mających na celu określenie własności reologicznych gruntów z punktu widzenia poprawności i przydatności przy budowie związków fizycznych gruntów.

Wykłady czwartego cyklu prowadzone przez doc. dr P. PERZYŃĘ z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN stanowiły syntetyczny przegląd najnowszych osiągnięć w dziedzinie mechaniki nieliniowej ciała odkształcalnego, rozwijanej m.in. przez prelegenta. Obejmowały one ogólną dyskusję związków fizycznych opisujących różne rodzaje materiałów w ujęciu termodynamicznym. Jako szczególne przypadki tzw. materiału z pamięcią przedstawiono materiały proste, materiały z zanikającą pamięcią, materiały lepkosprężyste i lepkoplastyczne. Cykl tych wykładów pozwolił słuchaczom zapoznać się z podejściem niestosowanym do tej pory w klasycznej mechanice gruntów, pozwalającym przypuszczać, że tak skomplikowany materiał, jakim jest grunt, doczeka się właściwego opisu jego cech mechanicznych.

Pomocą w wysłuchaniu wykładów były dwa skrypty obejmujące wykłady doc. Sobotki i doc. Perzyny wydane przez Biuro Kształcenia i Ossolineum. Pozostałe dwa cykle wykładów zostaną wydane w terminie późniejszym, jesienią 1966 r.

W konferencji wzięło udział około 50 uczestników z kraju oraz 6 gości zagranicznych z Czechosłowacji, Bulgarii i NRD.

W dyskusji prowadzonej w ramach poszczególnych tematów brali udział jedynie uczestnicy polscy. Goście zagraniczni poważniejszego wkładu do dyskusji nie wnieśli.

Należy podkreślić celowość organizowania tego typu konferencji, które dają zarówno przegląd najnowszych osiągnięć w danej dziedzinie naukowej, jak również dają konkretny aparat matematyczny do rozwiązania zagadnień podstawowych oraz praktycznych z zakresu sztuki inżynierskiej.

Wykłady były prowadzone w formie komunikatywnej, czego dowodem była dyskusja po wykładach. Należy jednak podkreślić, że nie wszyscy uczestnicy konferencji byli przygotowani do przyswajania wykładów na bieżąco. Z tego ostatniego względu wydaje się konieczne wcześniejsze podawanie do wiadomości zainteresowanym instytucjom nie tylko tematyki konferencji ale i koniecznego poziomu przygotowania przyszłych słuchaczy dla pełnego przyswojenia sobie treści wykładów.

A. Drescher, B. Rossiński (Warszawa, Łódź)

SPIS TREŚCI

TOM I. ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

TOM II. ZESZYT 1/1964

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYŃIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
Biuletyn informacyjny PTMTS:
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem
Sympozja naukowe IUTAM

SPIS TREŚCI

[c. d.]

TOM III. ZESZYT 1/1965

- S. KALIŃSKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego
Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczenia nieliniowych zagadnień przewodnictwa cieplnego
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 2/1965

- WITOLD WIERZBIŃSKI — Wspomnienie pośmiertne
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczaniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń
Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, Pomiary sześciu składowych odkształceń w ściskanym walcu betonowym
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego
Z. WASZCZYŹYŃ, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwanych podporach
J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu
T. AGOPSOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających
J. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 3/1965

- W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości
W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem
W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe
P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się sztywną kulą
S. PYTKO, O możliwościach wykorzystania metody elastooptycznej dla badań wyężenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

TOM IV. ZESZYT 1/1966

- S. OCHEPUSZKO, Zmiany spowodowane w mechanice przez międzynarodowy układ jednostek miar
W. GOGÓŁ, Teoria stanu uporządkowanego i możliwości jej zastosowania
J. RYCHLEWSKI, Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności
K. WILMAŃSKI, C. WOŹNIAK, Układy współrzędnych prostokreślnych w geometrii powierzchni środkowej cienkich powłok

Biuletyn informacyjny

SPIS TREŚCI

[c. d.]

ZESZYT 2/1966

- KONSTANTY LISOWSKI — Wspomnienie pośmiertne
J. MIASTKOWSKI, Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności
J. SOBIESZCZAŃSKI, Doświadczalne badania stateczności płyt trójkątnych
J. KLEPACZKO, Wpływ dynamicznego odkształcenia trwałego na twardość miękkiej stali i aluminium
A. WILCZYŃSKI, Doświadczalne badania własności mechanicznych polichloru winylu
J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYSZYN, Analiza zjawiska przeskoku w zakresie sprężysto-plastycznym na modelu układu kratowego Misesa
B. STACHOWICZ, G. SZEFER, O pewnym zagadnieniu kontaktowym niejednorodnej półpłaszczyzny sprężystej
B. KOWALCZYK, Stabilność układu wibro-uderzeniowego o wymuszeniu kinematycznym
- Biuletyn Informacyjny

ZESZYT 3/1966

- W.A. GROBOW, Drgania układów quasi-liniowych z członami żyroskopowymi z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego
Z. MARCINIAK, Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych
T. WARTANOWICZ, Generatory termoelektryczne
L. DIETRICH, Teoretyczna i doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganego pręta z wycięciami o niesymetrycznie nachylonych krawędziach
R. GANOWICZ, Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych
- Biuletyn Informacyjny PTMTS

TOM V. ZESZYT 1

- I. I. BLECHMAN, Zagadnienie dynamiki i maszyn wibracyjnych
J. HALAUNBRENNER, A. KUBISZ, O oporze przy toczeniu sztywnej kuli po podłożu lepkosprężystym
J. MURZEWSKI, Z. MENDÉRA, Korelacja cech wytrzymałościowych i wyężenie materiału
J. JASIEWICZ, Wymiana masy z powierzchni kul i kropel
J. MARYNIAK, Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym
E. DRESCHEROWA, Wpływ wstępnego odkształcenia plastycznego na energię udarowego zrywania
A. GAJEWSKI, Zastosowanie rachunku zaburzeń w problemach stateczności płyt prostokątnych
- Biuletyn Informacyjny

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
