

7. II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 4 • ZESZYT 5



WARSZAWA 1966
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

SPIS TREŚCI

W. A. GROBOW, Drgania układów quasi-liniowych z członami żyroskopowymi z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego Колебания квазилинейных систем с гироскопическими членами при наличии внутреннего резонанса On the oscillations of quasilinear systems with gyroscopic terms when internal resonance is included	3
Z. MARCINIAK, Utrata stateczności rozciąganych powłok plastycznych Потеря устойчивости пластических оболочек при растяжении The loss of stability of plastic shells under tensile loading	13
T. WARTANOWICZ, Generatory termoelektryczne Термоэлектрические генераторы Thermoelectric generators	27
L. DIETRICH, Teoretyczna i doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganego pręta z wycięciami o niesymetrycznie nachylonych krawędziach Теоретический и экспериментальный анализ несущей способности стержней, подвергаемых растяжению, ослабленных несимметричной выточкой The theoretical and experimental yield point load analysis for non-symmetrically notched bars pulled in tension	41
R. GANOWICZ, Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych Некоторые вопросы теории пластинок Рейснера и теории трехслойных пластинок Some problems of Reissner's theory and of the three-layer plates	55
Biuletyn Informacyjny	97

M 1-37
P O L S K I E . T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 4 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1966

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnemu, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY

EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM

MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH

(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

STANISŁAW OCHEŁDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW

OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK

(GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OLESIAK — R E D A K T O R

JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI

W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

R E D A K C J A

W a r s z a w a, Świątokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 8,25. Arkuszy drukarskich 6,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g.
Oddano do składania 6.VI.66 r., druk ukończono w październiku 1966 r. Cena zł 27.—

Zam. 92/65 M-78 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

DRGANIA UKŁADÓW QUASI-LINIOWYCH Z CZŁONAMI ŻYROSKOPOWYMI
Z UWZGLĘDNIENIEM REZONANSU WEWNĘTRZNEGO

W. A. G R O B O W (KIJÓW)

Układy drgające z członami żyroskopowymi spotyka się w zagadnieniach dynamiki wirników turbinowych, wirówek, separatorów, wrzecion maszyn włókienniczych oraz w innych zagadnieniach dotyczących dynamiki maszyn i przyrządów. Brak symetrii w połączeniach sprężystych, spowodowany niejednakową sztywnością wałów i podpór, jak również zmienność masy wirników u niektórych typów wirówek i wrzecion maszyn włókienniczych warunkują różnorodność i złożoność widma częstości. W wyniku tego w układach drgających z połączeniami żyroskopowymi otrzymuje się bardzo często związki w liczbach całkowitych między drganiami własnymi, to znaczy związki w rodzaju $\frac{p}{r} \lambda_i \approx \lambda_k$, wiadczące o możliwości pojawienia się rezonansu wewnętrznego.

Drgania w układach żyroskopowych są uzależnione zwykle od niewyważenia wirników. Dlatego zagadnienie sprowadza się do badania drgań układu nieautonomicznego z członami żyroskopowymi, znajdującego się w ogólnym przypadku (jak to ma miejsce w wirnikach współosiowych z urządzeniami do automatycznego wyważania) pod działaniem zaburzeń o wielu częstościach $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. Sposób zmiany tych częstości określa się z charakterystyk i rezerwy mocy urządzeń napędowych.

W układach nieautonomicznych oprócz rezonansów wewnętrznych mogą pojawiać się złożone rezonansy w postaci

$$\sum_{i=1}^N p_i \lambda_i + \sum_{j=1}^m r_j \omega_j \approx \lambda_k(\tau),$$

gdzie p_i i r_j oznaczają wzajemnie proste liczby całkowite.

Rozpatrzmy układ dynamiczny, którego położenie określają współrzędne q_1, q_2, \dots, q_N charakteryzujące przemieszczenia liniowe i kątowe wirników podczas drgań, a ruchy obrotowe wirników określone są współrzędnymi kątowymi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

Założmy, że współrzędne kątowe są quasi-okresowe. Wtedy drgania układu opisują równania

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \mu Q_j(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; \varphi_1, \dots, \varphi_m; \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_m),$$

gdzie

$$(2) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [a_{ij}(\tau) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2b_{ij}(\tau) q_i \dot{q}_j + c_{ij}(\tau) q_i q_j]$$

oznacza lagrangian rozpatrywanego układu ($i, j = 1, 2, \dots, N$), μ jest małym parametrem oraz Q_j jest pewną funkcją charakteryzującą zaburzenia zewnętrzne i siły dysypatywne działające na układ konserwatywny.

Częstości i amplitudy zaburzeń, zależne od prędkości kątowej wirników, określają równania

$$(3) \quad \frac{d^2 q_l}{dt^2} = \mu \Phi_l(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_N; \varphi_1, \dots, \dot{\varphi}_1), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Założmy, że wzajemny wpływ drgań na ruch obrotowy jest niewielki. Równania (3) można wtedy scałkować niezależnie. Oznacza to, że zmiana amplitudy i częstości zaburzeń w warunkach niestacjonarnych zależy tylko od charakterystyki napędu [4]. W ten sposób zagadnienie sprowadza się do badania drgań niestacjonarnych, opisanych równaniami (1).

Założmy, że częstości własne λ układu niezaburzonego (1)

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N [a_{ij}(\tau) \ddot{q}_i + b_{ij}(\tau) \dot{q}_i + c_{ij}(\tau) q_i] = 0,$$

określone z równań

$$(5) \quad D(\lambda) = \|-a_{ij}(\tau)\lambda^2 + b_{ij}(\tau)\lambda + c_{ij}(\tau)\| = 0$$

spełniają warunki

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{r_i} \lambda_i = \lambda_k,$$

świadczące o możliwości występowania w układzie rezonansów wewnętrznych.

Zagadnieniu badania drgań w układach żyroskopowych z uwzględnieniem rezonansu wewnętrznego poświęcone są prace JU. A. MITROPOLSKIEGO [3] oraz autora [5].

Rozwijając ideę podaną w pracy [5] pokażemy metodę otrzymania rozwiązań asymptotycznych dla układów drgających z członami żyroskopowymi przy uwzględnieniu rezonansu wewnętrznego. Metoda ta polega na wykorzystaniu idei współrzędnych «quasi-normalnych» [1] i zasady uśrednienia [2, 3] oraz wydzieleniu po prawych stronach równań, sprowadzonych do postaci standardowej, składowych harmonicznych z argumentami zmieniającymi się powoli. Autor ogranicza się do rozpatrzenia tylko pierwszego przybliżenia, dającego dostateczną dokładność w większości zagadnień technicznych.

Przekształćmy równania (1) do współrzędnych quasi-normalnych, stosując metodę B. W. BULGAKOWA [1]. W tym celu napiszmy te równania najpierw w postaci kanonicznej

$$(6) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \mu Q_i^R,$$

gdzie

$$H = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

oznacza funkcję Hamiltona, pozwalającą na rozwinięcie w szereg względem potęg małego parametru

$$(7) \quad H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 \dots,$$

$$(8) \quad H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\alpha_{ij}(\tau) q_i q_j + 2\gamma_{ij}(\tau) q_i p_j + \beta_{ij}(\tau) p_i p_j],$$

H_1 jest funkcją zależną od $q_1, \dots, q_N; p_1, p_2, \dots, p_N; \varphi_1, \dots, \varphi_m$ i ich pochodnych, zawierającą małe nieliniowe dodatki do sił sprężystych oraz zaburzeń, zależne od niewyważenia wirników;

$$Q_i^R = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\mu \sum_{k=1}^N h_{ik} \sum_{j=1}^N \frac{\Delta_{kj}(\alpha_{ik})}{\Delta(\alpha_{ik})} p_j$$

są to siły dysypatywne; R oznacza dysypatywną funkcję Rayleigha; h_{ik} są współczynnikami tłumienia.

Po obliczeniu pochodnych występujących w równaniu (6) otrzymujemy

$$(9) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\tau) q_j + \sum_{j=1}^N \left[\delta_{ij} \frac{dp_j}{dt} + \gamma_{ij}(\tau) p_j \right] &= -\mu \frac{\partial H_1}{\partial q_i} + \mu Q_i^R, \\ \sum_{j=1}^N \left[-\delta_{ij} \frac{dq_j}{dt} + \gamma_{ij}(\tau) q_j \right] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij}(\tau) p_j &= \mu \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera.

Postępując według B. W. BUŁGAKOWA [1] wykonamy kanoniczne przekształcenie zmiennych q_i, p_i na zmienne x_i, y_i za pomocą wzorów

$$(10) \quad \begin{aligned} q_i &= \sum_{k=1}^N [X_i^{(k)}(\tau) x_k + Y_i^{(k)}(\tau) y_k], \\ p_i &= \sum_{k=1}^N [X_{N+i}^{(k)}(\tau) x_k + Y_{N+i}^{(k)}(\tau) y_k]; \end{aligned}$$

$$(11) \quad X_j^{(k)}(\tau) - iY_j^{(k)}(\tau) = \frac{F_{jl}(i\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k} |\Delta_k(i\lambda_k) F_{ll}(i\lambda_k)|}.$$

We wzorze (11) oznaczono

$$i = \sqrt{-1}, \quad \Delta_k(i\lambda_k) = \frac{D(\lambda)}{\lambda^2 + \lambda_k^2}, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, 2N, \\ k = 1, 2, \dots, N, \end{array}$$

$D(\lambda)$ jest wyznacznikiem charakterystycznym układu, $F_{ll}(i\lambda_k)$ oznaczają elementy macierzy dołączonej, odpowiadającej macierzy funkcjonalnej $f(\lambda)$ układu niezaburzonego (9).

Dokonując w równaniu (9) zamiany zmiennych za pomocą wzorów (10) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_k}{dt} - \lambda_k(\tau)y_k &= \mu \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial q_j}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_j} + Q_j^R \right) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial p_j}{\partial y_k} \right) \frac{\partial H_1}{\partial p_j} \right] \right\} + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left(\frac{dX_j^{(l)}}{d\tau} Y_{N+j}^{(k)} - \frac{dX_{N+j}^{(k)}}{d\tau} Y_j^{(k)} \right) x_l + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{dY_j^{(l)}}{d\tau} Y_{N+j}^{(k)} - \frac{dY_{N+j}^{(k)}}{d\tau} Y_j^{(k)} \right) y_l \right\} = \mu F_k(x, y, \varphi, \tau), \\
 (12) \quad \frac{dy_k}{dt} + \lambda_k(\tau)x_k &= \mu \operatorname{Im} \left\{ i \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial q_j}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_j} + Q_j^R \right) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - i \frac{\partial p_j}{\partial y_k} \right) \frac{\partial H_1}{\partial p_j} \right] \right\} + \mu \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left(\frac{dX_j^{(l)}}{d\tau} X_{N+j}^{(k)} - \frac{dX_{N+j}^{(k)}}{d\tau} X_j^{(k)} \right) x_l + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{dY_j^{(l)}}{d\tau} X_{N+j}^{(k)} - \frac{dY_{N+j}^{(k)}}{d\tau} X_j^{(k)} \right) y_l \right\} = \mu G_k(x, y, \varphi, \tau).
 \end{aligned}$$

W funkcjach F i G symbolami x, y i φ oznaczono w skrócie cały zbiór zmiennych $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ i $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$. Związek między współrzędnymi x_1, x_2, \dots, x_N i y_1, y_2, \dots, y_N w równaniach (12) pojawia się tylko w wyrazach proporcjonalnych do małego parametru. Dlatego właśnie nazwano je quasi-normalnymi.

Różniczkując pierwsze z równań (12) względem czasu i podstawiając wielkość dy_k/dt z drugiego, otrzymamy zamiast układu (12) jedno równanie rzędu drugiego

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \lambda_k^2(\tau)x_k = \mu f_k(x, \dot{x}, \varphi, \tau),$$

gdzie

$$f_k = \frac{\dot{\lambda}_k(\tau)}{\lambda_k(\tau)} \dot{x}_k + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \lambda_i^2 x_i \right) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial \varphi_j} \omega_j + G_k.$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy na układ działa zaburzenie o pojedynczej częstotliwości ω . Założmy, że w układzie występuje rezonans wewnętrzny typu $\sum_{i=1}^A \frac{p_i}{r_i} \lambda_i \approx \lambda_k$ oraz rezonans zewnętrzny $\omega = \lambda_k$.

Niech $\mu \Delta_k(\tau)$ oznacza rozstrojenie między zewnętrzną częstotliwością ω i częstotliwością drgań własnych λ_k w sąsiedztwie rezonansu. Wtedy

$$\lambda_k^2(\tau) = \left[\frac{p_k}{r_k} \omega(\tau) \right]^2 + \mu \Delta_k(\tau).$$

W przypadku układu niezaburzonego (12)

$$(13) \quad x_k = A_k \cos \left(\frac{p_k}{r_k} \varphi + \Psi_k \right),$$

$$(14) \quad \dot{x}_k = -A_k \frac{p_k}{r_k} \omega \sin \left(\frac{p_k}{r_k} \varphi + \Psi_k \right).$$

Przyjmując że (13) i (14) są wzorami na przekształcenie zmiennych, przekształcimy równania (12) stosownie do metody wariacji do postaci

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= -\frac{\mu}{s_k \omega} \left[(s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) A_k \cos \theta_k + f_k(A, \theta, \varphi) + A_k s_k \frac{d\omega}{d\tau} \sin \theta_k \right] \sin \theta_k, \\ \frac{d\Psi_k}{dt} &= \frac{\mu}{A_k s_k \omega} \left[(s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) A_k \cos \theta_k + f_k(A, \theta, \varphi) + A_k s_k \frac{d\omega}{d\tau} \sin \theta_k \right] \cos \theta_k, \end{aligned}$$

gdzie

$$s_k = \frac{p_k}{r_k}, \quad \theta_k = \frac{p_k}{r_k} \varphi + \Psi_k.$$

Funkcje $f_k(A, \theta, \varphi)$ okresowe względem θ i φ są funkcjami o okresie 2π , można więc rozłożyć je na $(N+1)$ -krotny szereg Fouriera względem $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ i φ :

$$(16) \quad f_k(A, \theta, \varphi) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \dots \sum_n f_{kmn}(A_1, \dots, A_N, \tau) e^{i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + n\varphi \right)},$$

gdzie $f_{kmn}(A_1, \dots, A_N, \tau)$ oznaczają współczynniki Fouriera określone wzorem

$$(17) \quad f_{kmn} = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_k(A, \theta, \varphi) e^{-i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + n\varphi \right)} d\theta_1, \dots, d\theta_N d\varphi.$$

Podstawiając (16) do równań (15) i zastępując w nich funkcje trygonometryczne przez funkcje wykładnicze, otrzymujemy

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= \frac{\mu}{2is_k \omega} \left\{ (s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) \frac{A_k}{2} e^{2i\theta_k} e^{-2i\theta_k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \sum_n f_{kmn} \left[e^{i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + \theta_k + n\varphi \right)} - e^{-i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r - \theta_k + n\varphi \right)} \right] \right\} = \\ &= \mu \mathcal{F}_1(A_1, \dots, A_N, \Psi_1, \dots, \Psi_N, \varphi), \\ \frac{d\Psi_k}{dt} &= -\frac{\mu}{2is_k \omega A_k} \left\{ (s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) \frac{A_k}{2} (2 + e^{2i\theta_k} - e^{-2i\theta_k}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \sum_n f_{kmn} \left[e^{i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + \theta_k + n\varphi \right)} + e^{-i \left(\sum_{r=1}^N m_r \theta_r - \theta_k + n\varphi \right)} \right] \right\} = \\ &= \mu \mathcal{F}_2(A_1, \dots, A_N, \Psi_1, \dots, \Psi_N, \varphi). \end{aligned}$$

Równania (18) mają postać standardową, dlatego można je rozwiązać metodą zaburzeń (perturbacji). Przedstawiając A_k i Ψ_k jako superpozycję wolno zmieniających się członów a_k i ψ_k oraz sumy małych członów drgających i ograniczając się w zagadnieniach technicznych do pierwszego przybliżenia, otrzymamy

$$(19) \quad \frac{da_k}{dt} = \mu M_t \{ \mathcal{F}_1 \}, \quad \frac{d\psi_k}{dt} = \mu M_t \{ \mathcal{F}_2 \},$$

gdzie $M_t \{ \mathcal{F}_1 \}$ i $M_t \{ \mathcal{F}_2 \}$ są operatorami uśrednienia względem jawnie występującego czasu (lub względem zmiennych kątowych zależnych jawnie od czasu).

Wykonując operację uśrednienia otrzymamy równania dla pierwszego przybliżenia

$$\frac{da_k}{dt} = -\frac{\mu}{2is_k\omega} \left\{ \sum^* f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi + \psi_k)} + \sum^{**} f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi - \psi_k)} \right\},$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} = -\frac{\mu}{2ia_k s_k \omega} \left\{ \sum^* f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi + \psi_k)} + \sum^{**} f_{kmn}(a, \psi) e^{i(m\psi - \psi_k)} + (s_k^2 \omega^2 - \lambda_k^2) \right\},$$

gdzie a , ψ i m oznaczają wskaźniki złożone, określające zbiór $\{a_1, \dots, a_N\}$; $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$; $\{m_1, \dots, m_N\}$. Symbol \sum^* oznacza sumowanie względem wskaźników, dla których

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{p_i}{r_i} + n = -\frac{p_k}{r_k},$$

a symbol \sum^{**} oznacza sumowanie względem wskaźników, dla których

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{p_i}{r_i} + n = \frac{p_k}{r_k}.$$

Oznacza to praktycznie, że po wykonaniu uśrednienia względem szybko zmieniających się zmiennych kątowych, zależnych w sposób jawny od czasu, w równaniach (20) pozostają tylko człony zawierające argumenty zmieniające się powoli. Dlatego przed uśrednieniem równań (18) należy koniecznie wydzielić w nich składową harmoniczną z argumentami zmieniającymi się powoli, wychodząc z fizycznego znaczenia problemu. W przypadku tutaj rozpatrzonym argumentami zmieniającymi się powoli są

$$\sum_{j=1}^N m_j^{(k)} \theta_j(t) + n^{(k)} \varphi(t) - \theta_k(t) = \mu \eta_k(t).$$

Jeżeli w układzie istnieje «prosty» rezonans wewnętrzny $(p_j/r_j) \lambda_j \approx \lambda_k$ oraz rezonans wewnętrzny $\omega = \lambda_k$, to w pobliżu rezonansu argumentami zmieniającymi się powoli są

$$\varphi - \theta_k = \eta_1 \quad \text{i} \quad \frac{p_j}{r_j} \psi_j - \psi_k = \eta_2,$$

gdzie

$$\eta_2 = \frac{p_j}{r_j} \lambda_j - \lambda_k.$$

Przypadek zaburzeń o wielu częstościach jest znacznie bardziej skomplikowany. Również w tym przypadku badanie drgań zależy od związków utworzonych przez częstości zewnętrzne $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. Dla uproszczenia ograniczymy się do przypadku, gdy wśród zaburzeń istnieją dwie częstości ω_i i ω_{i+1} zmienne w czasie, które co do wartości różnią się mało w chwili, gdy jedna z nich, na przykład ω_i , wchodzi w rezonans z częstością własną λ_k . Przypadek ten ma praktyczne znaczenie, gdy rozpatruje się drgania współosiowych wirników turbinowych [4]. W dalszych rozważaniach zakładamy, że wpływ pozostałych składowych harmonicznnych jest nieznaczny i ograniczamy się do rozpatrzenia tylko składowych harmonicznnych ω_i i ω_{i+1} , które dla wygody oznaczymy ω_1 i ω_2 .

Niech przy rezonansie $\omega_1 = \lambda_k$ rozstrojenie częstości zaburzeń ω_1 i ω_2 spełnia warunek

$$\omega_2(\tau) - \omega_1(\tau) = \mu \delta(\tau).$$

Wtedy w układzie możliwy jest złożony rezonans typu

$$\sum_{i=1}^N m_i \lambda_i + p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 \approx \lambda_k.$$

W obszarze rezonansu z powodu małej różnicy częstości ω_1 i ω_2 zachodzą związki

$$(21) \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \mu \bar{\varphi}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \delta(\tau).$$

Równanie (12) można więc zapisać w postaci

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \lambda_k^2(\tau) x_k = \mu f_k(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, \varphi_1, \varphi_1 + \delta \bar{\varphi}).$$

W tym przypadku szczególnym rozwiązanie można zbudować w podany poprzednio sposób. Podamy tu jeszcze jeden sposób pozwalający dość łatwo uzyskać równania pierwszego przybliżenia.

Amplituda i faza w pierwszym przybliżeniu określona jest układem równań

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \mu A_k^{(1)}(\tau, a, \psi, \mu \bar{\varphi}), \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \lambda_k(\tau) - \frac{p_k}{r_k} \omega(\tau) + \mu B_k^{(1)}(\tau, a, \psi, \mu \bar{\varphi}), \end{aligned}$$

gdzie a i ψ oznaczają zbiór (a_1, \dots, a_N) i (ψ_1, \dots, ψ_N) .

Funkcje $A_k^{(1)}$ i $B_k^{(1)}$ można znaleźć wychodząc z zasady uśrednienia pracy wirtualnej wykonanej przez siły uogólnione $f_k(x, \dot{x}, \varphi, \varphi + \mu \bar{\varphi})$ w czasie pełnego okresu drgań.

Pisząc wyrażenie na pracę wirtualną

$$\delta W = f_k(x, \dot{x}, \varphi, \varphi + \mu \bar{\varphi}) (\delta a_k \cos \theta_k - \delta \psi_k a_k \sin \theta_k),$$

gdzie

$$\theta_k = \frac{p_k}{r_k} \lambda_k t + \psi_k$$

i rozwijając to wyrażenie w $(N+1)$ -krotny szereg Fouriera względem $\theta_1, \dots, \theta_N$ i φ_1 otrzymujemy

$$\delta W = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} \sum_n \delta W_{mn} e^{i \left[\sum_{r=1}^N m_r \theta_r + n \varphi_1 \right]},$$

gdzie δW_{mn} oznaczają współczynniki szeregu.

Uśredniając pracę wirtualną w czasie okresu drgań i uwzględniając podane poprzednio uwagi o argumentach zmieniających się powoli, otrzymamy dla $A_k^{(1)}$ i $B_k^{(1)}$ układ równań

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_k^{(1)}}{\partial \psi} \left[\lambda_k - \frac{p}{r} \omega_1(\tau) \right] - 2a_k \lambda_k B_k^{(1)} &= \frac{\delta \tilde{W}}{\delta a_k}, \\ \frac{\partial B_k^{(1)}}{\partial \psi} a_k \left[\lambda_k - \frac{p}{r} \omega_1(\tau) \right] + 2\lambda_k A_k^{(1)} &= -a_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial \tau} - \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \psi_k}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\partial A_k^{(1)}}{\partial \psi} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_k^{(1)}}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial B_k^{(1)}}{\partial \psi} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial B_k^{(1)}}{\partial \psi},$$

$$(23) \quad \frac{\delta \tilde{W}}{\delta a_k} = \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_r \psi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_k(a, \theta, \varphi_1, \varphi_1 + \mu \bar{\varphi}) \cos \theta_k e^{-i\sigma_r \psi} d\theta_1 \dots d\theta_N a \varphi_1,$$

$$\frac{\delta \tilde{W}}{\delta \psi_k} = \frac{2}{(2\pi)^{N+1}} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_r \psi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_k(a, \theta, \varphi_1, \varphi_1 + \mu \bar{\varphi}) \sin \theta_k e^{-i\sigma_r \psi} d\theta_1 \dots d\theta_N d\varphi_1.$$

Tutaj σ oznacza wskaźnik złożony $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$.

Przybliżenia wyższych rzędów można znaleźć korzystając z idei metod asymptotycznych Kryłowa-Bogoliubowa [2, 3], jednak metody te związane są z dużymi trudnościami obliczeniowymi.

Literatura cytowana w tekście

1. Б. В. БУЛГАКОВ, *О нормальных координатах*, Прик. мат. мех., 2, 10 (1946).
2. Н. Н. БОГОЛЮБОВ, Ю. Л. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, 1963.
3. Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, Наука, 1964.
4. В. А. ГРОБОВ, *Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов*, Изд. АН СССР, 1961.
5. В. А. ГРОБОВ, *О построении асимптотических приближений, описывающих нестационарные процессы в нелинейных гироскопических системах, с помощью принципа усреднения*, Украинский математический журнал, 2, 11 (1959).

Резюме

КОЛЕБАНИЯ КВАЗИ-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ ЧЛЕНАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

Исследованию колебаний в гироскопических системах при наличии внутреннего резонанса посвящены работы Ю. А. Митропольского [3] и автора [5].

В развитие идеи, изложенной в работе [5], в докладе рассматривается методика построения асимптотических решений для колебательных систем с гироскопическими членами при наличии внутреннего резонанса, основанная на использовании идеи «квази-нормальных» координат [1] и принципа усреднения [2, 3] с выделением в правых частях уравнений, приведенных к стандартной форме, гармоник с медленно изменяющимися аргументами. При этом автор ограничивается рассмотрением только первого приближения, дающего достаточную точность для большинства технических задач.

S u m m a r y

ON THE OSCILLATIONS OF QUASILINEAR SYSTEMS WITH GYROSCOPIC TERMS
WHEN INTERNAL RESONANCE IS INCLUDED

The problems concerning the oscillations of gyroscopic systems with the internal resonance included were considered by J. A. MITROPOLSKI [3] and by the author [5].

By developing the concept introduced in Ref. [5], the author shows how the asymptotic solutions for oscillating systems with gyroscopic terms can be found when the internal resonance is taken into account. In the method, the concept of the "quasinormal" coordinates [1] and the mean value principle are applied [2, 3]. Then, after reducing the equations to the standard form, harmonic components with the slow varying arguments are separated on the right-hand sides of the equations. The author considers the first approximation only. This gives the sufficient accuracy necessary in most of the technical problems.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1966 r.

UTRATA STATECZNOŚCI ROZCIĄGANYCH POWŁOK PLASTYCZNYCH

ZDZISŁAW MARCINIAK (WARSZAWA)

1. Warunek stateczności

W przypadku jednoosiowego rozciągania prętów i wąskich pasów można wyodrębnić w procesie rozciągania dwie fazy:

1) fazę stateczności, charakteryzującą się równomiernym rozkładem wydłużenia wzdłuż osi próbki;

2) fazę niestateczności, w czasie której następuje koncentracja odkształceń na pewnym obszarze próbki, podczas gdy pozostałe jej części, leżące dostatecznie daleko od miejsca przewężenia, nie tylko nie doznają dalszych odkształceń plastycznych, lecz nawet zostają odciążone.

W celu wyjaśnienia różnicy w zachowaniu się materiału w czasie statecznej i niestatecznej fazy rozciągania założmy, że w dowolnym miejscu rozciąganej próbki nastąpiło nieco większe wydłużenie materiału niż w miejscach sąsiednich. To dodatkowe miejscowe wydłużenie pociąga za sobą odpowiednio większe umocnienie się w tym miejscu materiału, ale jednocześnie zwiększają się tam naprężenia rozciągające, gdyż zmniejszony przekrój poprzeczny przenosić musi tę samą co poprzednio siłę osiową. Jeżeli przyrost naprężenia uplastyczniającego, spowodowany umocnieniem, jest większy od przyrostu naprężenia osiowego, zachodzącego w wyniku zmniejszenia pola przekroju, następuje wyrównanie odkształceń w dalszej fazie procesu, a zatem próbka zachowuje stateczność. W przeciwnym przypadku zapoczątkowana niejednorodność odkształcenia będzie się dalej pogłębiać, co jest oznaką utraty stateczności.

Podobne zjawiska występują w przypadku cienkościennej powłoki plastycznej poddanej rozciąganiu w płaskim stanie naprężenia. W celu zanalizowania warunków stateczności wyodrębnimy w niej prostokątny element, którego krawędzie są skierowane zgodnie z kierunkami głównymi naprężeń. Przyjmijmy, że element ten doznaje odkształcenia proporcjonalnego. W pewnej chwili wydłużenia boków tego elementu wynoszą odpowiednio ε_1 i ε_2 , a więc jego odkształcenie zastępcze jest równe

$$(1.1) \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}.$$

Odpowiada temu określona wartość naprężenia uplastyczniającego, będącego, założmy, znaną dla danego materiału funkcją odkształcenia zastępczego $\sigma_p = \sigma_p(\varepsilon_i)$. Przyjęto, że odkształcenia sprężyste są tu pomijalnie małe.

Na boczne krawędzie rozpatrywanego elementu działają w płaszczyźnie powłoki naprężenia główne σ_1 i σ_2 , wywołane obciążeniem powłoki siłami zewnętrznymi. Naprężenie zastępcze dla płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_3 = 0$) wynosi zatem

$$(1.2) \quad \sigma_z = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

Jeżeli $\sigma_z = \sigma_p$, to następuje plastyczne odkształcenie powłoki, przebiegające zgodnie z prawem płynięcia:

$$(1.3) \quad \frac{\varepsilon_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_3}{-\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_i}{2\sigma_p}.$$

W celu rozstrzygnięcia czy rozpatrywany przez nas element znajduje się w stanie stateczności, czy niestateczności rozważmy możliwość osiągnięcia przez niego nieco innego, lecz również dopuszczalnego kinematycznie stanu odkształcenia, którego nowe składowe różnią się od poprzednich odpowiednio o $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$. Tego rodzaju wariacje składowych stanu odkształcenia powodują odpowiednią zmianę odkształcenia zastępczego

$$(1.4) \quad \delta\varepsilon_i = \frac{2}{3} \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\delta\varepsilon_2}{\varepsilon_i}.$$

Zmiana ta pociąga za sobą dalej zmianę naprężenia uplastyczniającego w myśl wzoru

$$(1.5) \quad \delta\sigma_p = \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \delta\varepsilon_i.$$

Uwzględniając związki (1.4) i (1.5) wyrazić można przyrost naprężenia uplastyczniającego przez przyrosty składowych stanu odkształcenia $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$. Otrzymamy wówczas

$$(1.6) \quad \delta\sigma_p = \frac{2}{3} \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\delta\varepsilon_2}{\varepsilon_i} \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i}.$$

Jednocześnie omawiane odchylenie od początkowego stanu odkształcenia spowoduje pewne zmiany wymiarów powłoki. Przy niezmiennym jej obciążeniu siłami zewnętrznymi pociągnie to za sobą odpowiednie zmiany naprężeń głównych o wielkości $\delta\sigma_1$ i $\delta\sigma_2$. Odpowiada temu zmiana naprężenia zastępczego

$$(1.7) \quad \delta\sigma_z = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2)\delta\sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1)\delta\sigma_2}{\sigma_p},$$

co wynika z różniczkowania wzoru (1.2).

Jeżeli przyrost naprężenia zastępczego $\delta\sigma_z$, spowodowany założoną zmianą wymiarów powłoki, jest mniejszy od przyrostu naprężenia uplastyczniającego $\delta\sigma_p$, związanego z dodatkowym umocnieniem się materiału, to wówczas powłoka przejdzie w tym miejscu w stan sprężysty, a więc proces plastycznego płynięcia zostanie tu zahamowany. Stateczność powłoki jest zatem zachowana.

W przypadku przeciwnym, gdy $\delta\sigma_z > \delta\sigma_p$, możemy oczekiwać, że założona na wstępie niewielka nawet zmiana stanu odkształcenia zapoczątkuje lawinowy proces dalszego plastycznego płynięcia materiału, co będzie oznaką niestateczności powłoki.

Ostatecznie zatem, korzystając ze związków (1.6) i (1.7), ogólny warunek stateczności powłoki można zapisać w postaci nierówności:

$$(1.8) \quad \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2) \delta\sigma_1 + (2\sigma_2 - \sigma_1) \delta\sigma_2}{2\sigma_p} < \frac{2}{3} \frac{(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta\varepsilon_1 + (2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \delta\varepsilon_2}{\varepsilon_i} \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i},$$

będącej uogólnioną formą warunku stateczności podanego przez H. W. SWIFTA [1] (1952).

Aby na podstawie nierówności (1.8) można było wyznaczyć zakres stateczności danego elementu powłoki, należy jeszcze określić jego kinematyczne i statyczne warunki brzegowe oraz sprecyzować zmiany, zachodzące w tych warunkach pod wpływem rozważanych wariacji jego wymiarów.

Te dodatkowe informacje o warunkach, w których przebiega proces plastycznego płynięcia powłoki, wyrażają się w postaci trzech dodatkowych związków zachodzących między przyrostami $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$ i opisujących rodzaj sprzężenia kinematycznych i statycznych warunków brzegowych. Zależnie od postaci, jaką nadamy tym dodatkowym związkom, otrzymamy różne wzory wyrażające zakres stateczności powłoki. Tym tłumaczy się duża różnorodność wyrażen proponowanych przez różnych autorów dla przedstawienia warunku stateczności powłoki. Najważniejsze z tych propozycji będą teraz kolejno omówione.

1.1. Rozciąganie powłoki niezmienną siłą w kierunku 1 przy zachowaniu stałej wartości stosunku σ_1/σ_2
W celu zanalizowania tego przypadku przyjmujemy następujące założenia co do warunków brzegowych.

1. Naprężenia σ_1 wynikają z działania stałej siły P_1 przenoszonej przez rozpatrywany element powłoki. Dodatkowe wydłużenie tego elementu o wielkości $\delta\varepsilon_1$ powoduje zatem wzrost naprężenia o wielkość

$$(1.9) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1 \cdot \delta\varepsilon_1,$$

co wynika z warunku, by $\delta(F \cdot \sigma_1) = 0$, gdzie F oznacza pole przekroju poprzecznego, prostopadłego do kierunku 1.

2. Obciążenie tego elementu w drugim kierunku głównym 2 zmienia się wraz ze zmianą jego wymiarów w ten sposób, że stosunek naprężeń głównych σ_2/σ_1 pozostaje niezmienny, a zatem

$$(1.10) \quad \frac{\delta\sigma_2}{\delta\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

3. Stosunek odkształceń głównych nie ulega zmianie w wyniku ewentualnej zmiany wymiarów elementu, co zresztą wiąże się z poprzednim założeniem. Trzeci związek ma więc postać

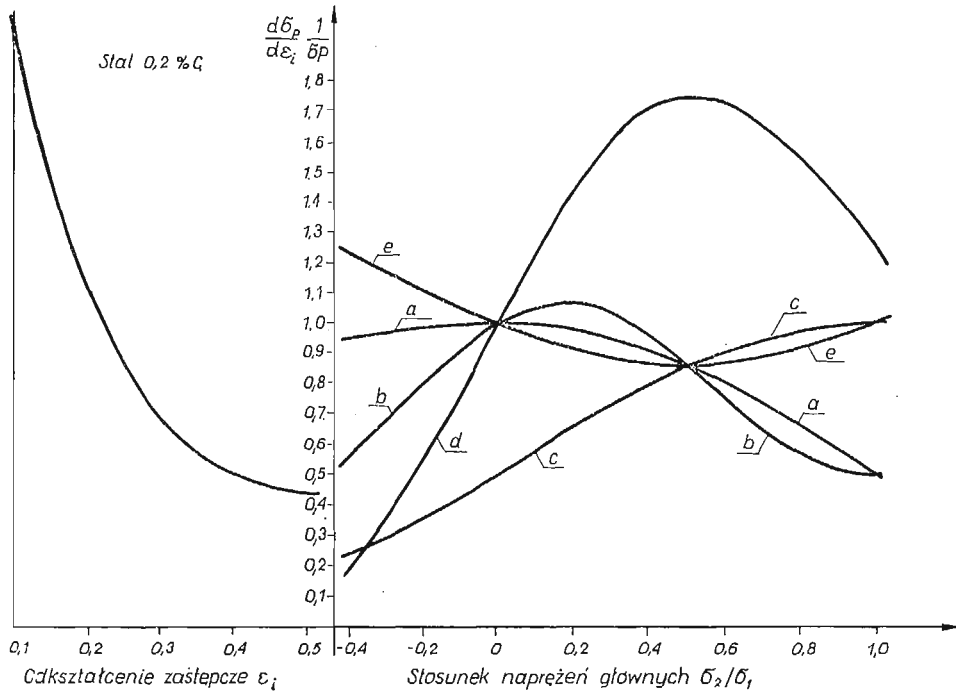
$$(1.11) \quad \frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

W ten sposób zostały sformułowane trzy dodatkowe zależności (1.9), (1.10) i (1.11), wiążące ze sobą wariacje $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$. Po podstawieniu tych związków do nierówności (1.8) i dokonaniu niezbędnych przekształceń wykorzystując przy tym prawa płynięcia (1.3) otrzymamy warunek stateczności w postaci

$$(1.12) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_p}$$

Wielkość prawej strony tej nierówności zależy od stosunku σ_2/σ_1 , co przedstawia linia *a* na rys. 1.

Warunek (1.12), któremu odpowiada ekstremum siły rozciągającej P_1 , został podany przez A. D. TOMLENOWA [2] oraz P. B. MELLORA [3].



Rys. 1

1.2. Rozciąganie powłoki przy zachowaniu niezmiennej wartości obu sił przenoszonych przez element powłoki w dwu kierunkach głównych. W tym przypadku dodatkowe związki zachodzące między przyrostami $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\varepsilon_1$ i $\delta\varepsilon_2$ wynikają z następujących założeń.

1. Ewentualny przyrost odkształcenia elementu powłoki nie ma wpływu na wielkości sił przenoszonych przez ten element w obu kierunkach głównych. Wynikają stąd dwa równania:

$$(1.13) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1 \delta\varepsilon_1,$$

$$(1.14) \quad \delta\sigma_2 = \sigma_2 \delta\varepsilon_2.$$

2. Rozważany przyrost odkształcenia powłoki zachodzi zgodnie z istniejącym tam dotychczas stanem naprężenia, a więc

$$(1.15) \quad \frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_2} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \quad \text{lub} \quad \frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Po uwzględnieniu związków (1.13), (1.14) i (1.15) nierówność (1.8) sprowadzi się do postaci

$$\frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)(4\sigma_1^2 - 7\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_2^2)}{4\sigma_p^3}$$

zaproponowanej przez H. W. SWIFTA [1] (1952) i przedstawionej linią *b* na rys. 1.

1.3. Rozciąganie elementu powłoki przy zachowaniu niezmiennych wartości sił jednostkowych, działających w obu kierunkach głównych. Przypadek ten różni się od poprzednio omówionego tym, że zakłada się niezmiennosc sił jednostkowych, a więc przypadających na jednostkę długości krawędzi elementu. W tym przypadku zmiana naprężenia wynika jedynie ze zmiany grubości powłoki *g*. Z warunków $\delta(\sigma_1 g) = 0$ i $\delta(\sigma_2 g) = 0$ i warunku niezmiennych objętości

$$\frac{\delta g}{g} = \delta\varepsilon_3 = -\delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_2$$

wynikają związki

$$(1.17) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2),$$

$$(1.18) \quad \delta\sigma_2 = \sigma_2(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2).$$

Uwzględniając te związki oraz zależność (1.15), która nie ulega zmianie, warunek stateczności (1.8) przyjmie postać:

$$(1.19) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_p}.$$

Warunek ten, odpowiadający ekstremalnej wartości iloczynu $(\sigma_p g)$ został podany przez autora [5] (1961). Na wykresie 1 przedstawia go linia *c*.

W przykładach 1.1–1.3 rozpatrzono trzy najprostsze przypadki sprzężenia kinematycznych i statycznych warunków brzegowych, prowadzące do stosunkowo prostych wyrażeń na warunek stateczności. Jednakże tego rodzaju najprostsze rodzaje sprzężenia nie odpowiadają na ogół rzeczywistym warunkom, w których przebiegają procesy plastycznego płynięcia. W dalszym ciągu rozpatrzone będą następne dwa przypadki, w których rodzaj sprzężenia warunków brzegowych wynika z analizy rzeczywistych warunków, zachodzących w konkretnym procesie plastycznego płynięcia.

1.4. Stateczność cienkościennej rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia *p* i rozciągającej siły osiowej *P*. W obciążonej w ten sposób rurze, której średnica wynosi *D*, a grubość ścianki *g* panuje naprężenie obwodowe

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2g}$$

i osiowe

$$\sigma_2 = \frac{Dp}{4g} + \frac{P}{\pi Dg}.$$

Ewentualna zmiana średnicy o δD lub grubości o δg , zachodząca przy niezmiennych wartości siły *P* i ciśnienia *p*, powoduje odpowiednie zmiany naprężeń

$$\delta\sigma_1 = \frac{pD}{2g} \frac{\delta D}{D} - \frac{pD}{2g} \frac{\delta g}{g}$$

oraz

$$\delta\sigma_2 = \frac{pD}{4g} \left(\frac{\delta D}{D} - \frac{\delta g}{g} \right) - \frac{P}{\pi Dg} \left(\frac{\delta g}{g} + \frac{\delta D}{D} \right).$$

Oznaczając $\delta D/D = \delta\varepsilon_1$ i $\delta g/g = \delta\varepsilon_3$ oraz biorąc pod uwagę warunek stałej objętości $\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3 = 0$ powyższym związkom nadać można postać

$$(1.20) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1(2\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2),$$

$$(1.21) \quad \delta\sigma_2 = \sigma_1\delta\varepsilon_1 + \sigma_2\delta\varepsilon_2.$$

Trzeci związek wynika z możliwości swobodnego odkształcania się materiału zgodnie z istniejącym tam uprzednio stanem naprężenia, a więc przyjmie postać podaną wzorem (1.15).

Uwzględniając te trzy dodatkowe zależności wyrażone równaniami (1.20), (1.21) i (1.15) w warunkach stateczności (1.8) otrzymamy po przekształceniach

$$(1.22) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{3\sigma_1^2(2\sigma_1 - \sigma_2)}{4\sigma_p^3} + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_p}.$$

Związek ten podał H. W. SWIFT [1] (1952). Dla zakresu $\sigma_2/\sigma_1 < 1$ przedstawia go linia d na wykresie 1. Odmianą propozycję co do sprzężenia warunków brzegowych w tym zagadnieniu przedstawił M. J. HILIER [7].

1.5. Warunek powstawania bruzdy prostopadłej do największego naprężenia. Jak wynika z obserwacji, utrata stateczności blachy poddanej dwuosowemu nierównomiernemu rozciąganiu uwidacznia się powstaniem miejscowego pocienienia w postaci bruzdy biegnącej często prostopadle do kierunku największego naprężenia rozciągającego. Kierunek ten oznaczmy przez 1, a drugi prostopadły do niego kierunek leżący również w płaszczyźnie powłoki — przez 2.

Jeżeli bruzda jest dostatecznie długa w porównaniu z jej szerokością, to proces jej powstawania uwidacznia się miejscowym wzrostem składowej ε_1 odkształcenia, a więc wzrostem wydłużenia materiału w kierunku prostopadłym do bruzdy. Druga składowa odkształcenia ε_2 jest taka sama w bruzdzie, jak i w sąsiadujących z nią częściach powłoki. A zatem dopuszczalne kinematycznie są jedynie wariacje składowych ε_1 i ε_3 . Warunek ten można zapisać w postaci:

$$(1.23) \quad \delta\varepsilon_2 = 0.$$

Drugi związek opisujący sprzężenie warunków brzegowych rozpatrywanego elementu wynika z warunku niezmienności siły przenoszonej przez powłokę w kierunku 1. Warunek $\delta(\sigma_1 g) = 0$ biorąc pod uwagę (1.23) zapisać można w postaci

$$(1.24) \quad \delta\sigma_1 = \sigma_1 \delta\varepsilon_1.$$

Aby przypadkowo zapoczątkowana bruzda nie pogłębiała się dalej, przyrost naprężenia $\delta\sigma_1$, spowodowany miejscowym zmniejszeniem grubości, powinien być proporcjonalny do przyrostu naprężenia uplastyczniającego $\delta\sigma_p$ wywołanego dodatkowym umocnieniem się materiału w tym miejscu. A więc nie powinien powodować zmiany stosunku naprężeń głównych σ_1/σ_2 . Zmiana bowiem tego stosunku pociąga za sobą dalszą zmianę stosunku odkształceń głównych $\delta\varepsilon_1/\delta\varepsilon_2$ i wyzwała lawinowy proces koncentracji odkształceń w bruzdzie. Zatem w zakresie stateczności powłoki podstawowa nierówność (1.8) musi być spełniona

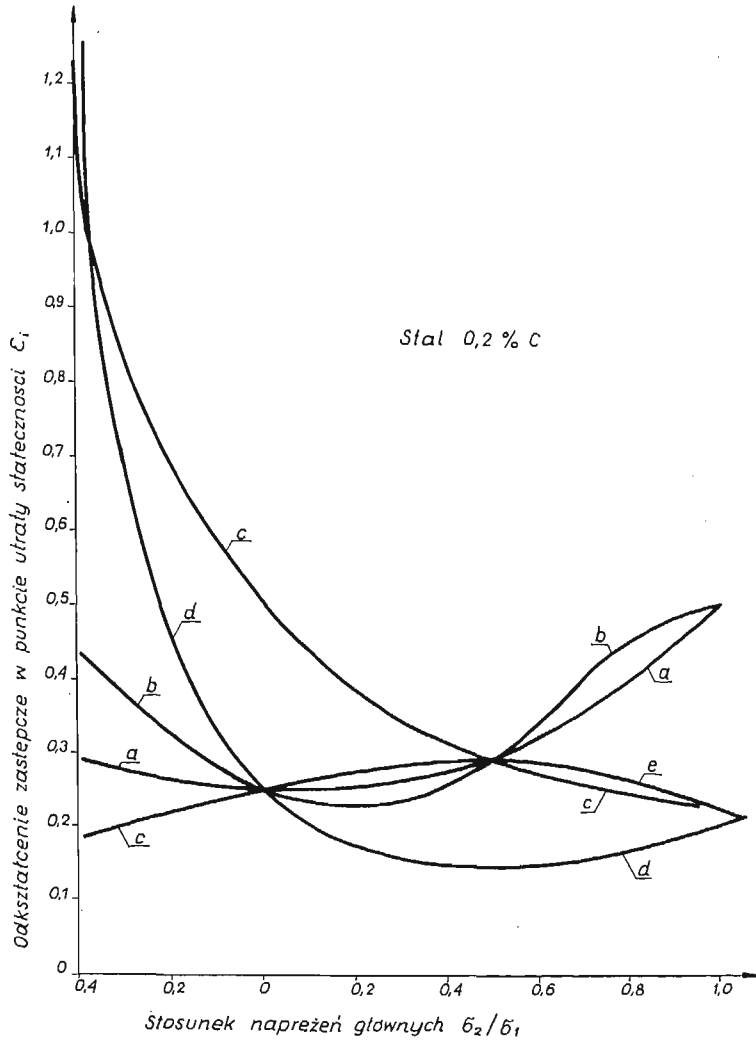
nawet przy założeniu o niezmiennym stosunku naprężeń głównych. Założenie to prowadzi do trzeciego związku

$$(1.25) \quad \frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Po uwzględnieniu warunków (1.24) – (1.26) nierówność (1.8) przyjmie postać

$$(1.26) \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} > \frac{\sigma_p}{\sigma_1}.$$

Zależności tej, podanej przez autora [6] (1965) odpowiada linia *e* na rys. 1.



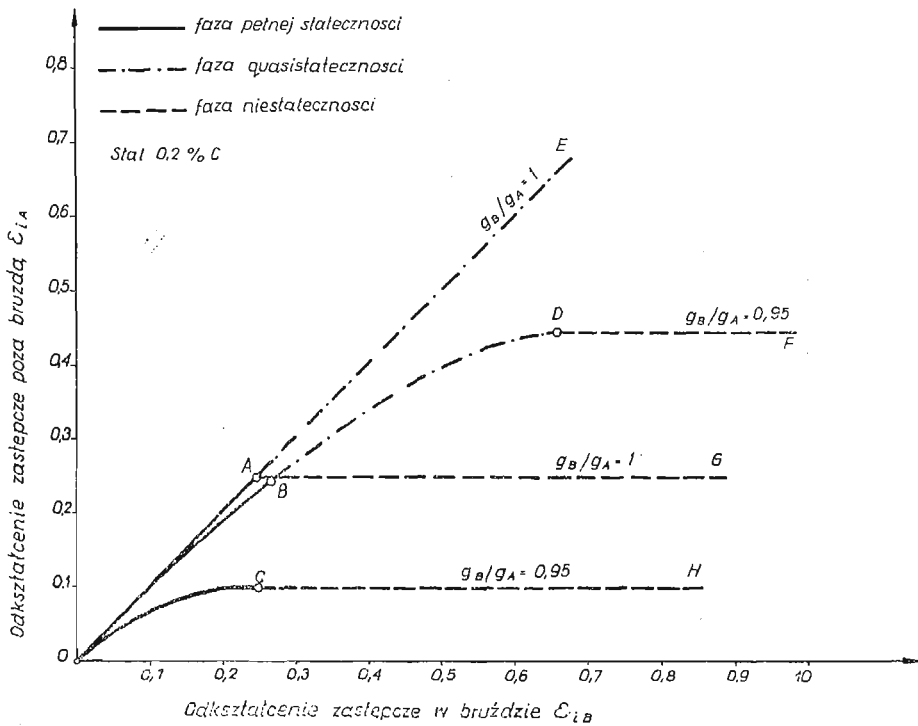
Rys. 2

We wszystkich omówionych dotychczas przypadkach lewa strona warunków stateczności ma postać $(d\sigma_p/d\varepsilon_i) \cdot (1/\sigma_p)$. Wartość tego wyrażenia jest dla danego materiału jednoznaczna funkcją odkształcenia zastępczego ε_i . Związek ten, zachodzący na przykład

dla miękkiej stali, przedstawia wykres zamieszczony po lewej stronie rys. 1. Porównując dla danego stosunku σ_2/σ_1 rzędną odpowiedniej linii wykresu umieszczonego po prawej stronie rys. 1 z wartością wyrażenia $(d\sigma_p/d\varepsilon_i) \cdot (1/\sigma_p)$ po lewej stronie tego rysunku wyznaczyć można wielkość odkształcenia ε_i w punkcie utraty stateczności. Odkształcenie to, którego nie można przekroczyć bez utraty stateczności powłoki, jest funkcją stosunku σ_2/σ_1 , przy czym postać tej funkcji zależy od rodzaju warunków brzegowych, co uwiadczenia rys. 2. Linie *a, b, c, d, e* odpowiadają omówionym uprzednio warunkom brzegowym. Rysunek 2 odnosi się do miękkiej stali, której własności plastyczne podane były na rys. 1.

2. Przebieg odkształcenia po utracie stateczności

Z chwilą przekroczenia zakresu stateczności powłoki powstaje w niej pewien ograniczony obszar, w którym koncentruje się dalszy przyrost jej odkształcenia, podczas gdy na pozostałych obszarach proces odkształcenia plastycznego najczęściej ustaje. Jeżeli przez ε_{iB} oznaczymy odkształcenie zastępcze w miejscu największej koncentracji odkształceń,



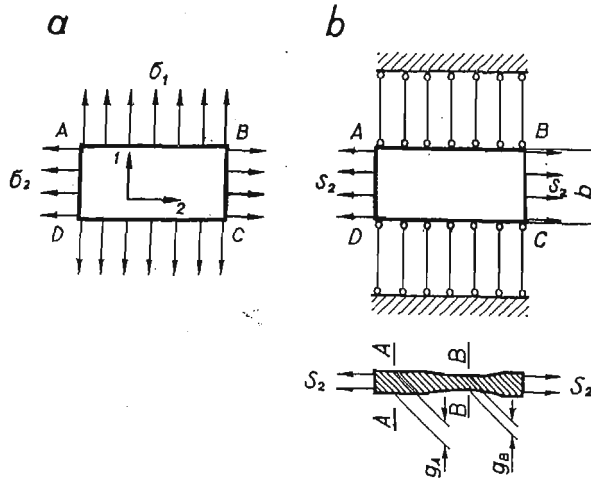
Rys. 3

a przez ε_{iA} — odkształcenie, jakie w tej samej chwili występuje na pozostałym obszarze powłoki, a więc w miejscach leżących poza zasięgiem miejscowego przewężenia, to tego rodzaju przebieg procesu utraty stateczności przedstawia linia łamana *OAG*, pokazana na wykresie we współrzędnych ε_{iA} , ε_{iB} (rys. 3). Punkt załamania *A* jest punktem utraty stateczności, a jego rzędna ε_{iA} stanowi kres możliwości odkształcenia całej powłoki.

Tego rodzaju przebieg odkształcenia zachodzi na przykład przy jednoosiowym rozciąganiu prętów lub wąskich taśm oraz przy rozciąganiu pasów w warunkach zapewniających niezmienną ich szerokość.

W pewnych jednak warunkach obserwuje się odmienny przebieg procesu utraty stateczności. Mianowicie plastyczne płynięcie powłoki poza miejscem przewężenia nie ustaje nagle jak w omówionym poprzednio przypadku, ale trwa przez jakiś czas dalej równoległe z procesem pogłębiania się niejednorodności odkształceń jak to na przykład przedstawia linia $OBDF$ na rys. 3. Zjawisko takie zachodzi właśnie w przypadku tworzenia się bruzdy, omówionym uprzednio w p. 1.5.

Aby zanalizować dalszy przebieg odkształcenia po przekroczeniu punktu stateczności, rozważmy prostokątny element powłoki $ABCD$ (rys. 4), którego krawędzie są zgodne z kierunkami głównymi 1 i 2. Rozpatrzony zostanie przypadek, gdy bruzda jest prostopadła do kierunku 1. Założmy, że proces tworzenia się bruzdy został już rozpoczęty



Rys. 4

i w rozpatrywanej chwili grubość powłoki nie jest jednakowa; w przekroju $A-A$ wynosi ona g_A , natomiast w przekroju $B-B$, biegnącym wzdłuż osi bruzdy, grubość jest mniejsza i wynosi g_B . Warunki brzegowe wzdłuż dwu przeciwległych krawędzi AB i CD są tego rodzaju, że pozwalają na swobodne przemieszczanie się punktów powłoki w kierunku 1 przy zachowaniu równoległości boków AB i CD , których odległość b zmienia się w procesie odkształcenia. Z warunku tego wynika, że przyrosty składowej odkształcenia ε_2 są sobie równe w obu rozpatrywanych przekrojach, a zatem

$$(2.1) \quad \frac{db}{b} = d\varepsilon_{2A} = d\varepsilon_{2B} = d\varepsilon_2.$$

Wzdłuż dwu pozostałych boków rozpatrywanego elementu powłoki dane są statyczne warunki brzegowe w postaci jednostkowych sił S_1 przyłożonych do dwu pozostałych krawędzi AD i BC . Ponieważ oba rozpatrywane przekroje $A-A$ i $B-B$ przenoszą tę samą

się S_1 , przeto panujące w tych przekrojach naprężenia σ_{1A} i σ_{1B} muszą spełniać związek $\sigma_{1A}g_A = \sigma_{1B}g_B$, któremu po wprowadzeniu oznaczenia

$$(2.2) \quad u = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_{1B}}{\sigma_{pB}}$$

nadać można postać

$$(2.3) \quad \sigma_{1A}g_A = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{pB} u g_B.$$

Naprężenia istniejące w obu rozpatrywanych przekrojach muszą ponadto spełniać warunki plastyczności:

$$(2.4) \quad \sigma_{pA}^2 = \sigma_{1A}^2 - \sigma_{1A}\sigma_{2A} + \sigma_{2A}^2,$$

$$(2.5) \quad \sigma_{pB}^2 = \sigma_{1B}^2 - \sigma_{1B}\sigma_{2B} + \sigma_{2B}^2.$$

Założymy, że wartość naprężenia uplastyczniającego w obu przekrojach σ_{pA} i σ_{pB} zależy od istniejącego tam odkształcenia zastępczego ε_{iA} oraz ε_{iB} w myśl związku

$$(2.6) \quad \sigma_p = C\varepsilon_i^m \quad \text{lub} \quad \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{\sigma_p} = \frac{m}{\varepsilon_i}.$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, w którym sprzężenie statycznych i kinematycznych warunków brzegowych jest tego rodzaju, że stosunek naprężeń głównych w przekroju $A-A$, a więc w miejscach leżących poza bruzdą, nie ulega zmianie

$$(2.7) \quad \frac{d\sigma_{1A}}{\sigma_{1A}} = \frac{d\sigma_{2A}}{\sigma_{2A}} = \frac{d\sigma_{pA}}{\sigma_{pA}}.$$

W przekroju $A-A$ zachodzi zatem odkształcenie proporcjonalne, a przeto stosunek n odkształceń głównych $\varepsilon_{3A}/\varepsilon_2$ jest tam stały

$$(2.8) \quad n = \frac{\varepsilon_{3A}}{\varepsilon_2} = \frac{d\varepsilon_{3A}}{d\varepsilon_2}.$$

Natomiast w przekroju $B-B$ stosunek odkształceń głównych zmienia się w czasie procesu zgodnie z prawem płynięcia,

$$(2.9) \quad \frac{d\varepsilon_{3B}}{d\varepsilon_2} = \frac{-\sigma_{1B} - \sigma_{2B}}{2\sigma_{2B} - \sigma_{1B}},$$

które, po uwzględnieniu związku (2.5) i oznaczenia (2.2), napisać można w postaci

$$(2.10) \quad \frac{d\varepsilon_{3B}}{d\varepsilon_2} = -\frac{\sqrt{3}u}{2\sqrt{1-u^2}} \mp \frac{1}{2}.$$

Po zróżniczkowaniu związku (2.3) i podzieleniu stronami otrzymanego wyniku przez to samo równanie (2.3) otrzymamy

$$(2.11) \quad \frac{d\sigma_{1A}}{\sigma_{1A}} + d\varepsilon_{3A} = \frac{d\sigma_{1B}}{\sigma_{1B}} + d\varepsilon_{3B} + \frac{du}{u},$$

przy czym

$$d\varepsilon_{3A} = \frac{dg_A}{g_A} \quad \text{i} \quad d\varepsilon_{3B} = \frac{dg_B}{g_B}.$$

Równanie (2.11) po uwzględnieniu związku (2.7) napisać można również w postaci

$$\frac{du}{u} = \left[\left(\frac{d\sigma_{pA}}{d\varepsilon_{iA}} \cdot \frac{1}{\sigma_{pA}} \right) \frac{d\varepsilon_{iA}}{d\varepsilon_2} - \left(\frac{d\sigma_{pB}}{d\varepsilon_{iB}} \cdot \frac{1}{\sigma_{pB}} \right) \frac{d\varepsilon_{iB}}{d\varepsilon_2} + \frac{d\varepsilon_{3A}}{d\varepsilon_2} + \frac{d\varepsilon_{3B}}{d\varepsilon_2} \right] d\varepsilon_2.$$

Uwzględniając zależności (1.1), (2.2), (2.5), (2.6), (2.8) i (2.10) równaniu powyższemu można nadać jeszcze inną postać

$$(2.12) \quad \frac{du}{u} = \left(\frac{m}{\varepsilon_{iA}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+u+u^2} - \frac{m}{\varepsilon_{iB}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\sqrt{3}u}{2\sqrt{1-u^2}} + n + \frac{1}{2} \right) d\varepsilon_2,$$

przy czym wchodzące do tego wzoru wartości ε_{iA} oraz ε_{iB} związane są dodatkowymi równaniami

$$(2.13) \quad \varepsilon_{iA} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+n+n^2\varepsilon_2},$$

$$(2.14) \quad \varepsilon_{iB} = \int \frac{d\varepsilon_2}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Równania (2.12)–(2.14) stanowią układ, którego rozwiązanie pozwala wyznaczyć szukane funkcje $\varepsilon_{iB} = \varepsilon_{iB}(\varepsilon_2)$ oraz $u = u(\varepsilon_2)$, opisujące przebieg procesu tworzenia się bruzdy. Można więc tą drogą wyznaczyć również związek zachodzący między odkształceniami ε_{iB} oraz ε_{iA} .

Wyniki uzyskane przez przybliżone rozwiązanie tego układu metodą różnic skończonych przedstawia linia *OBDF* na rys. 3. Linia ta odnosi się do przypadku, gdy poza bruzdą występuje stan jednoosiowego rozciągania naprężenia σ_1 . Jak widać z rys. 3 w procesie plastycznego płynięcia powłoki wyodrębnić można trzy fazy.

1. Fazę pełnej stateczności (odcinek *OB*), w czasie której w bruzdzie spełniony jest warunek stateczności (1.26).

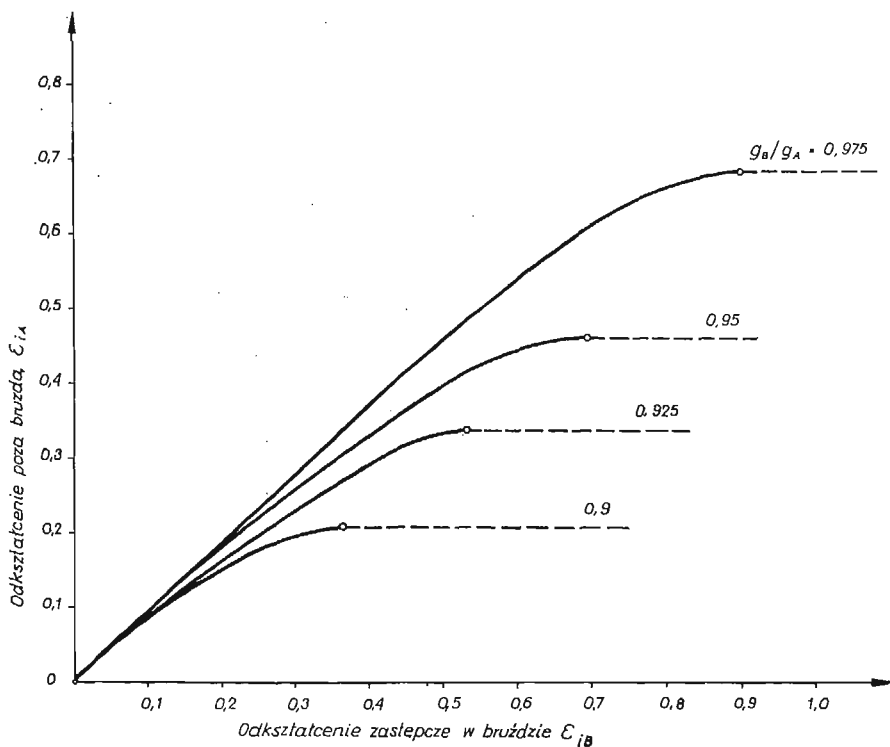
2. Fazę quasi-stateczności odpowiadającą odcinkowi *BD* na rys. 3. W tej fazie zachodzi jednoczesne plastyczne płynięcie powłoki zarówno w samej bruzdzie jak i poza nią, z tym że niejednorodność odkształceń szybko się pogłębia.

3. Fazę niestateczności, której na wykresie 3 odpowiada prosty odcinek *DF* równoległy do osi ε_{iB} . W tej fazie odkształcenie koncentruje się wyłącznie w bruzdzie, podczas gdy pozostałe części powłoki ulegają odciążeniu.

W wyniku istnienia quasi-statecznej fazy procesu największe odkształcenie, jakiego doznać może cała powłoka (poza bruzdą), przekracza, i to często bardzo znacznie, wartość odpowiadającą punktowi *B* wyznaczającemu zakres pełnej stateczności powłoki.

Wartość tego dodatkowego odkształcenia, zachodzącego w quasi-statecznej fazie procesu zależy od dwu czynników: wstępnej niejednorodności powłoki oraz sposobu obciążenia powłoki (stosunku naprężeń głównych).

Należy tu zauważyć, że w celu otrzymania z równań (2.12)–(2.14) skończonej wartości odkształcenia ε_{iA} trzeba, przy wyznaczaniu stałych całkowania, założyć pewną wstępną niejednorodność powłoki, a więc przyjąć pewną, mniejszą od jedności, początkową wartość stosunku g_B/g_A . W rzeczywistości niejednorodność ta może być spowodowana różnymi czynnikami, np. pasmowym rozkładem zanieczyszczeń, miejscowym obniżeniem granicy plastyczności, zadrapaniem powierzchni blachy itd. W każdym jednak przypadku można ją sprowadzić do niejednorodności geometrycznej, wyrażającej się początkowym stosunkiem grubości g_B/g_A . Linia *OBDF* na rys. 3 odnosi się do powłoki o wstępnej niejednorodności $g_B/g_A = 0,95$. Linia *OCH* przedstawia dla porównania przebieg odkształcenia wąskiego pasma o tej samej niejednorodności początkowej $g_B/g_A = 0,95$, zachodzącego w warunkach umożliwiających miejscowe zmniejszanie się jego szerokości.

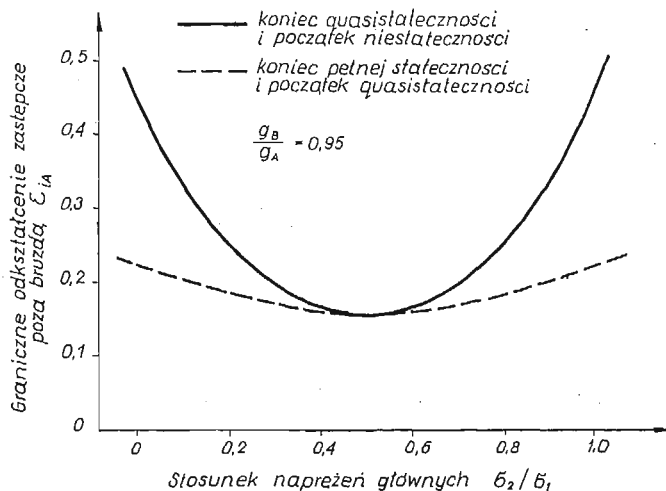


Rys. 5

Wpływ wstępnej niejednorodności jest bardzo znaczny. Widać to z rys. 5, na którym poszczególne krzywe odpowiadają różnym wartościom wstępnej niejednorodności.

Drugim czynnikiem, wpływającym na przebieg quasi-statecznej fazy procesu, a więc i na wielkość granicznego odkształcenia powłoki poza bruzdą ε_{iA} , jest sposób obciążenia powłoki, wyrażający się stosunkiem σ_{2A}/σ_{1B} . Zależność ta jest przedstawiona na rys. 6, przy czym linia przerywana oznacza przejście ze stateczności do quasi-stateczności, a linia ciągła oznacza osiągnięcie stanu pełnej niestateczności. Jak widać z tego wykresu, najbardziej niekorzystne jest rozciąganie powłoki przy zachowaniu niezmienniej szerokości

odkształcanego pasma, a więc gdy $\sigma_2/\sigma_1 = 1/2$. Wówczas to bowiem zanika przejściowa, quasi-stateczna faza procesu, a graniczne odkształcenie powłoki osiąga minimum. Warto również zauważyć, że w przypadku dwuosowego równomiernego rozciągania ($\sigma_1 = \sigma_2$) graniczna wartość odkształcenia jest taka sama jak przy jednoosiowym jej rozciąganiu ($\sigma_2 = 0$).



Rys. 6

Literatura cytowana w tekście

1. H. W. SWIFT, *Plastic instability under plane stress*, J. Mech. Phys. Solids, 1, 1952.
2. А. Д. ТОМЛЕНОВ, *Пластическое напряженное состояние и устойчивость процесса вытяжки деталей сложной формы*, Вопросы обработки металлов давлением, Изд. АН СССР, Москва 1958.
3. P. B. MELLOR, *Plastic instability in tension*, The Engineer, 25, 1960.
4. Z. MARCINIAK, *Analiza stateczności cienkościennej powłoki walcowej poddanej rozciąganiu w stanie plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 4, 6 (1958).
5. Z. MARCINIAK, *Mechanika procesów tłoczenia blach*, P.W.N.T., Warszawa 1961.
6. Z. MARCINIAK, *Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 4, 17 (1965).
7. M. J. HILLIER, *Tensile plastic instability of thin tubes*, Intern. J. Mech. Sci., 8, 7 (1965).

Резюме

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

В работе дается формулировка общего направления устойчивости тонкостенной пластической оболочки, подверженной растяжению, в плоском напряженном состоянии. Рассматривается ряд особых случаев сопряжения кинематических и статических краевых условий и указывается зависимость между условиями, в которых происходит процесс пластического течения и точкой потери устойчивости. Во второй части работы анализируется процесс образования

борозды на поверхности, растягиваемого листового железа после выхода из области устойчивости. Доказывается также, что при некоторых краевых условиях имеет место промежуточная, так наз. квазиустойчивая фаза процесса, во время которой происходит дальнейшая деформация оболочки вне борозды, не смотря на превышение точки устойчивости.

S u m m a r y

THE LOSS OF STABILITY OF PLASTIC SHELLS UNDER TENSILE LOADING

General condition of stability of a thin-walled plastic shell, loaded by tension in plane stress conditions is formulated. A number of particular cases of coupling of kinematic and static boundary conditions is considered. Moreover, a relation between conditions of plastic flow involved and the point of loss of stability is derived.

In the second part of the paper the formation process of a neck beyond of the stability range is analysed. It is shown, moreover, that in certain boundary conditions, an additional, intermediate, so-called quasi-stable stage occurs, connected with plastic deformation of the shell outside the neck in spite of the stability point being exceeded.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1965 r.

GENERATORY TERMoeLEKTRYCZNE

TOMASZ WARTANOWICZ (WARSZAWA)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

I	natężenie prądu elektrycznego,
k	opór cieplny termoelementu,
l	długość łącznika,
$m = R/r$,	
M	optymalna wartość m ,
P	moc uzyskana z termoelementu,
Q_d	ciepło doprowadzone do układu,
Q_o	ciepło oddane otoczeniu przez układ,
Q_p	ciepło przenoszone drogą przewodzenia od gorących do zimnych spójnię,
$Q_{\pi g}$	ciepło Peltiera pochłaniane przez gorące spójnię,
Q_T	ciepło Thomsona wydzielane w obu łącznikach,
r	oporność elektryczna obu łączników,
R	oporność elektryczna obciążenia,
S_n, S_p	pole przekroju poprzecznego łącznika typu N i P ,
T_g	temperatura gorącego spójnięcia termoelementu lub gorącej elektrody termoelementu,
T_z	temperatura zimnych końców termoelementu lub zimnej elektrody termoelementu,
$\bar{T} = (T_g + T_z)/2$,	
$Z = \alpha^2 \sigma / \kappa$	— współczynnik Joffego (dobroci materiału),
α	współczynnik Seebecka,
η	sprawność cieplna generatora,
η_c	sprawność obiegu Carnota,
κ_n, κ_p	przewodność cieplna łącznika typu N i P ,
σ_n, σ_p	przewodność elektryczna łącznika typu N i P .

1. Wstęp

Ponad 140 lat temu odkryto zjawiska termoelektryczne i stwierdzono możliwość wykorzystania ich do bezpośredniego przetwarzania ciepła w energię elektryczną.

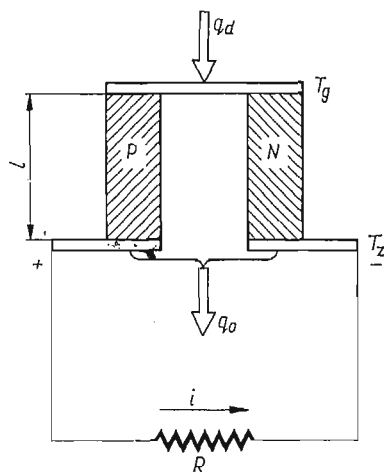
Pierwszym odkrywcą zjawiska powstawania siły termoelektrycznej był T. J. SEEBECK [1], który zaobserwował przepływ prądu elektrycznego w zamkniętym obwodzie złożonym z różnych przewodników, gdy miejsca połączeń mają różne temperatury. Ponadto Seebecka uważa się za konstruktora pierwszego generatora termoelektrycznego; jednakże nie docenił on swego odkrycia, jak również mylnie je interpretował. W 12 lat po odkryciu Seebecka francuski zegarmistrz PELTIER [2] wykrył efekt polegający na wydzielaniu się albo pochłanianiu (zależnie od kierunku prądu) ciepła na granicy dwóch różnych przewodników przy przepływie prądu. Natomiast termodynamiczną analizę zjawisk termo-

elektrycznych podał po raz pierwszy THOMSON [3] w r. 1854. Oprócz tego zasługą Thomsona jest odkrycie następnego zjawiska — tzw. efektu Thomsona. Polega ono na wydzielaniu się albo pochłanianiu ciepła przy przepływie prądu w jednorodnym przewodniku, w którym istnieje gradient temperatury. Dalszym badaczem rozwijającym teorię generatorów termoelektrycznych był ALTENKIRCH [4], który w r. 1909 wykazał, że za pomocą znanych wówczas przewodników nie można było uzyskać większych sprawności niż 0,1%. W związku z tym termoelektryczność znalazła zastosowanie jedynie w technice pomiarowej (głównie pomiar temperatury przy pomocy termoelementów).

Dopiero po drugiej wojnie światowej, szczególnie począwszy od ostatnich kilkunastu lat, nastąpił dynamiczny rozwój materiałów półprzewodnikowych, który umożliwił praktyczne zastosowanie generatorów termoelektrycznych do celów energetycznych. Wyrazem tego jest cały szereg prac opublikowanych w tym czasie, omawiających zarówno podstawy teoretyczne jak i zagadnienia związane z technologią i konstrukcją generatorów termoelektrycznych. Przykładowo można wymienić m. in. prace JOFFE'GO [5-7], KAYE'GA i WELSHA [8], CADOFFA i MILLERA [9] oraz SNYDERA [10].

2. Charakterystyka energetyczna generatorów termoelektrycznych półprzewodnikowych

Najprostszy termoelement składa się z dwóch prętów połączonych mostkiem metalowym. Przewodnictwo jednego z prętów ma charakter dziurowy (typ P), a drugiego



Rys. 1

elektronowy (typ N). Do gorących spójń doprowadzane jest ciepło Q_d , natomiast zimne końce oddają otoczeniu niewykorzystaną część ciepła Q_0 . Schemat elementarnego generatora termoelektrycznego przedstawia rys. 1.

Sprawność cieplną takiego generatora można określić jako stosunek mocy elektrycznej oddawanej w obwodzie zewnętrznym, tj.

$$(2.1) \quad P = I^2 R$$

do ilości ciepła dostarczonego do układu Q_d

$$(2.2.1) \quad \eta = P/Q_d.$$

Ciepło Q_d obejmuje następujące składniki:

- 1) ciepło Peltiera pochłaniane przez gorące spojenie

$$Q_{\pi_g} = aIT_g;$$

2) nieodwracalną stratę ciepła drogą przewodnictwa cieplnego od gorących spojeń do zimnych końców

$$Q_p = k(T_g - T_z),$$

gdzie k jest oporem cieplnym obu gałęzi termoelementu, tzn.

$$k = (\kappa_p S_p + \kappa_n S_n) \frac{1}{l};$$

- 3) połowę ciepła Joule'a zwróconą źródłu zasilającemu, tj.

$$\frac{1}{2} I^2 r,$$

gdzie r jest oporem elektrycznym obu gałęzi termoelementu:

$$r = \left(\frac{1}{\sigma_p S_p} + \frac{1}{\sigma_n S_n} \right) l.$$

Ponadto należałoby uwzględnić ciepło Thomsona wydzielane w każdej gałęzi termoelementu:

$$Q_T = \pm \int_{T_z}^{T_g} T \frac{da}{dT} I dT.$$

W przypadku kiedy przebieg funkcji $a_n(T)$ i $a_p(T)$ jest identyczny, również gdy a nie zależy od temperatury, wówczas

$$Q_T = 0.$$

Jednakże powyższe przypadki prawie nigdy nie występują, a przybliżone uwzględnienie ciepła Thomsona sprowadza się do przyjęcia średniej wartości współczynnika Seebecka tj.

$$a = \frac{a_p + a_n}{2}.$$

Uwzględniając powyższe zależności w równaniu (2.2.1), rugując I i mając na uwadze wzór na siłę elektromotoryczną określoną przez różnicę temperatur można ostatecznie otrzymać wyrażenie na sprawność

$$(2.2.2) \quad \eta = \eta_c \frac{\frac{m}{m+1}}{1 + \frac{1}{ZT_g} (m+1) - \frac{T_g - T_z}{2T_g} \frac{1}{m+1}}$$

lub

$$(2.2.3) \quad \eta = \eta_c \eta$$

gdzie $\eta_c = (T_g - T_z)/T_g$ jest sprawnością obiegu Carnota, $m = R/r$, $Z = \alpha^2 \sigma / \kappa$ oznacza współczynnik charakteryzujący własności fizyczne materiału, z którego wykonany jest termoelement, wprowadzony przez Joffego, η_b sprawność egzergetyczna.

Wartości przekrojów obu gałęzi termoelementu S_p i S_n dobiera się w ten sposób, aby współczynnik Joffego Z był maksymalny dla danego materiału.

Z warunku

$$\frac{dZ}{d\left(\frac{S_p}{S_n}\right)} = 0$$

mamy

$$(2.3) \quad Z_{\max} = \frac{\alpha^2}{\left(\sqrt{\frac{\kappa_p}{\sigma_g}} + \sqrt{\frac{\kappa_n}{\sigma_n}}\right)^2},$$

któremu odpowiada optymalny stosunek przekrojów

$$(2.4) \quad \frac{S_p}{S_n} = \sqrt{\frac{\kappa_n \sigma_n}{\kappa_p \sigma_p}}.$$

Jak wynika z wyrażenia (2.3), współczynnik Z jest jedynie zależny od własności fizycznych materiału, z którego wykonany jest termoelement, niezależny natomiast jest od jego wymiarów geometrycznych.

Oprócz tego można dobrać parametr m z punktu widzenia maksymalnej sprawności cieplnej termoelementu. Wykorzystując warunek $\partial\eta/\partial m = 0$ otrzymamy

$$(2.5) \quad M = (m)_{opt} = \sqrt{1 + Z\bar{T}},$$

gdzie

$$\bar{T} = \frac{1}{2} (T_g + T_z).$$

Podstawiając wartość M do równania (2.2.2) uzyskamy ostatecznie

$$(2.6) \quad \eta_{\max} = \eta_c \frac{M-1}{M + \frac{T_z}{T_g}}.$$

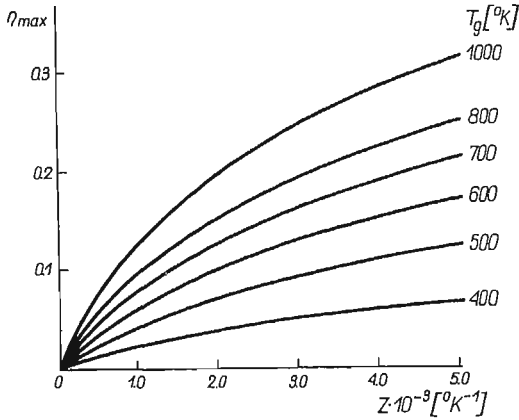
Termoelement osiąga maksymalną moc przy $R = r$ lub $m = 1$, czemu odpowiada sprawność

$$(2.7) \quad \eta_{p \max} = \eta_c \frac{2}{3 + \frac{8}{ZT_g} + \frac{T_z}{T_g}}.$$

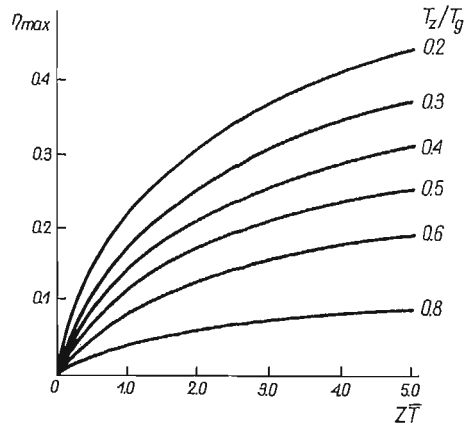
Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono zależność sprawności η_{\max} od Z i od $Z\bar{T}(1)$ dla rozmaitych wartości temperatury T_g (przy czym T_z w obu przypadkach było równe 300°K).

(1) Ostatnio coraz częściej współczynnik dobroci materiału definiuje się jako $Z\bar{T}$, co wydaje się słuszne, gdyż charakteryzuje on jednocześnie jego własności fizyczne i zakres temperatury pracy. Ponadto niektóre ośrodki badawcze (m. in. General Electric Co) określają współczynnik dobroci jako $M = \eta \frac{1}{\eta_c}$; wielkość ta, jak łatwo się zorientować, przedstawia stopień nieodwracalności procesu wymiany ciepła czyli sprawność egzergetyczną η_b .

W celu uzyskania większej sprawności lub większej mocy na jednostkę masy termoelementu należy dążyć do stosowania możliwie wysokiej temperatury T_g i materiałów op użył Z przy jednoczesnej możliwie najniższej temperaturze T_z . Większość materia-

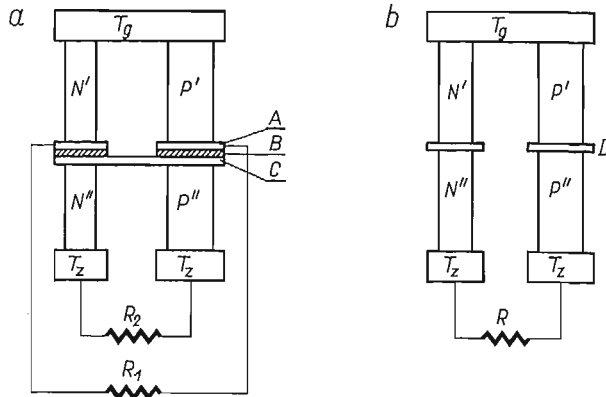


Rys. 2



Rys. 3

łów termoelektrycznych ma stosunkowo wysokie Z jedynie w ograniczonym zakresie temperatur; dlatego też generator pracujący w szerokim zakresie temperatur jest zbudowany z termoelementów o odmiennych materiałach, odpowiednio dobranych. Można to zrealizować dwoma metodami: stosując układ kaskadowy (rys. 4a) lub segmentowy (rys. 4b). Jeśli założy się, że nie ma spadku temperatury na izolatorze w urządzeniu



Rys. 4. A,C,D — materiały o wysokim przewodnictwie elektrycznym i ciepłym, B — izolator o wysokim przewodnictwie ciepłym

kaskadowym, wówczas jest ono bardziej wydajne niż segmentowe i sprawność jego wzrasta wraz z liczbą stopni; a więc najbardziej wydajnym urządzeniem powinien być generator posiadający nieskończoną liczbę stopni. Sprawność takiego generatora kaskadowego wynosi [11]

$$(2.8) \quad \eta_{\infty} = 1 - \exp \left[- \int_{T_z}^{T_g} \epsilon(T) \frac{dT}{T} \right],$$

gdzie

$$\varepsilon(T) = \frac{\sqrt{1+ZT}-1}{\sqrt{1+ZT}+1}$$

3. Aktualny stan rozwoju generatorów termoelektrycznych

Ostatnie lata charakteryzują się niezwykle dynamicznym rozwojem generatorów termoelektrycznych. Fakt ten można uzasadnić tym, że obecnie istnieje bardzo duże zapotrzebowanie na lekkie, małowabarytowe i niezawodne w działaniu źródła energii elektrycznej; tych właśnie cech oczekuje się od generatorów termoelektrycznych. Przykładem różnorodnego zastosowania generatorów termoelektrycznych może być zestawienie zrealizowanych dotychczas i opracowanych izotopowych generatorów typu SNAP⁽²⁾, podane w tablicy 1. Ponadto w tablicy 2 przedstawiono dotychczasowe osiągnięcia oraz

Tablica 1. Pracujące i opracowywane generatory termoelektryczne z izotopowym źródłem ciepła (typu SNAP)

SNAP Nr	Moc (W)	Zastosowanie	Paliwo	Projekto- wany czas życia	Stan rozwoju
3	2,7	Zasilanie satelitów: Transit 4A i 4B	Pu 238	5 lat	na orbicie
3M-1	5	Meteorologia	Sr 90	2 lata	w eksploatacji
7A	10	Nawigacja	Sr 90	10 lat	w eksploatacji
7B	60	Nawigacja	Sr 90	10 lat	w eksploatacji
7C	10	Zasilanie stacji meteorologicznej	Sr 90	10 lat	w eksploatacji
7D	60	Zasilanie stacji meteorologicznej	Sr 90	10 lat	w eksploatacji
7E	6,5	Sygnalizacja	Sr 90	10 lat	w eksploatacji
7F		Nawigacja	Sr 90	10 lat	w eksploatacji
9A	25	Zasilanie satelitów	PU 238	5 lat	na orbicie
11	25	Sonda księżycowa	Cm 242	40 dni	dostarczenie w 1966
15A	0,001	Bronie jądrowe	PU 238	5 lat	w opracowaniu
15B	0,001	Bronie jądrowe	Pu 238	5 lat	w opracowaniu
17	30	Satelita komunikacyjny	Sr 90	3-5 lat	w opracowaniu
19	20	Sonda kosmiczna	Pu 238	5 lat	w opracowaniu
21	10	Zasilanie urządzeń głębinowych	Sr 90	5 lat	w opracowaniu

przewidywania na przyszłość w dziedzinie rozwoju generatorów termoelektrycznych. Oprócz tego w następnej tablicy podano przykładowo szczegółową charakterystykę dla kilku generatorów termoelektrycznych.

Aktualnie znane materiały termoelektryczne umożliwiają osiągnięcie sprawności generatora równej 18,3% [10] — dotyczy to układów kaskadowych o nieskończonej liczbie stopni dla temperatur $t_g = 1030^\circ\text{C}$ i $t_z = 30^\circ\text{C}$. Jak wiadomo, rzeczywiście otrzymanywane

(2) SNAP—System for Nuclear Auxiliary Power—numer nieparzysty dotyczy generatorów z radioizotopowym źródłem ciepła, natomiast numer parzysty dotyczy generatorów opartych na wykorzystaniu reaktora jądrowego jako źródła ciepła.

Tablica 2. Ogólna charakterystyka generatorów termoelektrycznych

Nazwa własności	Wartość liczbową
Maksymalna sprawność teoretyczna	Sprawność Carnota
Sprawność aktualnie osiągnięta	2–10% [12]
Przewidywana sprawność przy uwzględnieniu rozwoju	10% [13], 15% [12]
Moc elektryczna obecnie uzyskiwana	do 5 kW [12], [14]
Przewidywana moc elektryczna jednostki w 1980	do 200 kW [13]
Moc właściwa (uwzględniając tylko układ przetwarzający)	0,016–0,05 W/g [12]
Temperatura gorących spoiń	450–800°C [12]
Temperatura zimnych spoiń	20–200°C [12]
Czas pracy bez przeglądu	Od 100 dni do wielu lat [12]
Aktualny jednostkowy koszt budowy (w dolarach)	2000 dol./kW [13]
Przewidywany jednostkowy koszt budowy w roku 1980	200–500 dol./kW [13]

sprawności są o połowę mniejsze [12–13], a przyczyn tego stanu należy dopatrywać się w nierozwiązaniu w należyтым stopniu kilku zasadniczych problemów, związanych z budową generatorów [15–18]. Spośród tych problemów można wymienić następujące:

3.1. Oporność kontaktowa. Występowanie oporności kontaktowej złącza pogarsza działanie urządzenia powodując spadek sprawności w stosunku do przewidywanej teoretycznie. Wykonanie dobrego złącza jest niezwykle trudne. Obecnie jedną z powszechnie stosowanych metod łączenia materiałów termoelektrycznych jest lutowanie ultradźwiękowe; spoinienie wykonane w ten sposób ma opór kontaktowy rzędu $5 \cdot 10^{-5}$ do $2 \cdot 10^{-4}$ Ω/cm^2 , przy czym dokładne metody laboratoryjne pozwalają na uzyskanie jeszcze mniejszego oporu, tj. $2 \cdot 10^{-7}$ do 10^{-6} Ω/cm^2 [18]. Ponadto złącze powinno się odznaczać odpornością na wysokie temperatury, natomiast lut nie powinien dyfundować do materiałów łączonych oraz charakteryzować się wysoką przewodnością cieplną.

3.2. Wybór układu konstrukcyjnego. Jak już wiadomo z p. 2 generatory termoelektryczne buduje się według dwóch zasadniczych systemów, mianowicie w układzie kaskadowym i segmentowym (segmented device). Urządzenia kaskadowe (rys. 4a) zostały poprzednio scharakteryzowane ogólnie; należy jeszcze wymienić główne wady występujące w tego typu urządzeniach: straty cieplne i elektryczne na spoiniach lutowanych oraz stosunkowo wysokie straty cieplne na izolatorach elektrycznych oddzielających od siebie poszczególne stopnie kaskady. Aby uniknąć tej ostatniej wady, należy budować generatory w układzie segmentowym.

Zwiększenie użytecznego zakresu temperatur dla danego materiału można dokonać przez zmianę koncentracji domieszek. Na rysunku 5 podano wykres współczynnika Z dla danego podstawowego materiału w funkcji temperatury T dla kilku wartości poziomów domieszkowych, względnie ten sam wykres może przedstawiać trzy odmienne materiały o różnych poziomach domieszkowych. Użyteczny współczynnik Z odpowiada punktom znajdującym się na obwiedni tych krzywych. Jak z tego wykresu wynika, dzięki

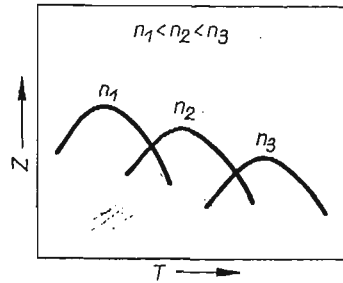
Tablica 3. Charakterystyka szczegółowa niektórych generatorów termoelektrycznych

Własności	Typ generatora		Układ z radioizotopami		Układ z reaktorem jądrowym		Eksperymentalny generator termoelektryczny
	SNAP 3	SNAP 9	SNAP 10	SNAP 10A			
Sprawność ogólna (%)	5,5	5,5	2,7	1,6	4,7		
Moc elektryczna (W, kW)	5,3 W	14,5 W	254 W	0,5 kW	5 kW		
Jednostkowa pojemność energetyczna (Wh/g)	7	1570	brak danych	brak danych	brak danych		
Moc jednostkowa (W/g)	0,0016	0,0027	0,004	0,0011	brak danych		
Temperatura gorących spoeń (°C)	590	480	614	brak danych	600		
Temperatura zimnych spoeń (°C)	200	115	344	brak danych	50		
Czas pracy bez przeglądu	3 miesiące	6 lat	brak danych	1 rok (okres żywotności)	10.000 godzin		
Źródło energii (paliwo)	Po 210	Pu 238	symulator elektryczny	U-ZrH (mieszanka uranu i wodoru cyrkonu)			
Waga (kg)	2,3	5,4	63,5	2,50	brak danych		
Rok budowy	1959	przypuszczalnie 1961 (brak danych)	1962 (układ eksperymentalny)	budowa na ukończeniu	1960		
Konstruktor	Minnesota Mining i Manufacturing Co USA	USA	Westinghouse Electric Co USA	USA	Westinghouse Electric Co USA		
Źródło informacji	[12], [15]	[12]	[16]	[17]	[14]		

odpowiedniej konstrukcji gałęzi termoelementów można znacznie zwiększyć sprawność generatora przez rozszerzenie użytecznego zakresu temperatur. Istnieją dwie zasadnicze metody wykonania takich gałęzi. Pierwsza z nich polega na oddzielnym przygotowaniu odpowiedniej liczby elementów z różnych materiałów lub z tego samego materiału, lecz o różnych koncentracjach domieszkowych, a następnie zlutowanie ich w formie odpowiedniej gałęzi termoelementu (rys. 6a). Jednakże opory kontaktowe złączy występujące w segmentowych gałęziach wpływają na spadek sprawności. Oprócz tego powstaje dość

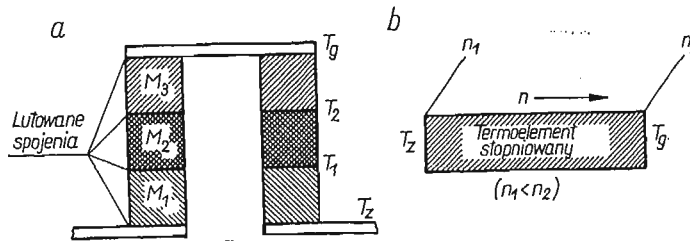
trudny problem mechaniczny spowodowany różnymi wartościami współczynnika rozszerzalności łączonych elementów.

Druga metoda (nie zrealizowana dotychczas praktycznie), polega na wykonaniu jednolitej gałęzi termoelementu z danego materiału, w którym stopniuje się domieszki



Rys. 5

(rys. 6b), w wyniku czego uzyskuje się ciągłą zmianę koncentracji domieszek wzdłuż długości łącznika. Metoda ta, choć eliminuje ujemne cechy poprzedniej, stwarza nowe trudności natury technologicznej, do których należy zaliczyć: 1) trudności w wykonaniu łącznika o żądanym gradiencie składu, gdyż domieszki będą dyfundować w taki sposób, aby wyrównać gradient koncentracji, 2) występowanie dyfuzji w niskich temperaturach.



Rys. 6

3.3. Problem materiału. Materiały termoelektryczne powinny charakteryzować się następującymi właściwościami:

- 1) wysokim współczynnikiem Joffego Z ,
- 2) odpowiednimi własnościami mechanicznymi, tj. wytrzymałością w wysokich temperaturach i minimalnym współczynnikiem rozszerzalności,
- 3) odpowiednimi własnościami chemicznymi,
- 4) odpowiednimi własnościami elektrycznymi,
- 5) odpornością na działanie promieni radioaktywnych.

Problem materiałowy będzie szczegółowo omówiony w następnym punkcie.

3.4. Źródło ciepła. Problem właściwego wyboru rodzaju źródła ciepła i jego konstrukcji ma decydujący wpływ zarówno na niezawodność działania urządzenia, jak i na ogólną sprawność. Ostatnio, z uwagi na rozwój energetyki jądrowej, coraz większe zainteresowanie budzi źródło ciepła jądrowe, a szczególnie — izotopowe (por. tablica 1).

4. Aktualny stan rozwoju materiałów termoelektrycznych

4.1. Ogólna charakterystyka materiałów półprzewodnikowych. W celu zilustrowania obecnego poziomu rozwoju materiałów termoelektrycznych półprzewodnikowych przedstawiono tablicę 4 wg Jaumota [18], obejmującą najciekawsze rodzaje materiałów.

Tablica 4. Zestawienie najbardziej obiecujących materiałów termoelektrycznych półprzewodnikowych

Materiał termoelektryczny półprzewodników	Optymalna temperatura pracy (°C)	Maksymalne wartości $Z \cdot 10^{-3}$ (°K ⁻¹)
Związki grupy I-VI Ag z Te i Se	do 600	Ag ₂ Te-1,3 Ag ₂ Se-2,5 AgSbTe ₂ -1,9
Związki grupy III-V Ga i In z As i Sb	do 700	InGaAs-1 (stop)
Związki grupy IV-VI Ge i Pb z Se i Te	PbTe do 550 GeTe do 650	PbTe-3 GeTe-1,2
Związki grupy V-VI Bi i Sb z Se i Te	Bi ₂ Te ₃ do 350 Sb ₂ T ₃ do 350	Bi ₂ Te ₃ +Sb ₂ Te-4
Związki grupy I-III-VI (budowa chalkopiryty) Ag, Cu-Ga-Se, Te	550	CuGaTe ₂ -3
Związki ziem rzadkich Ce, Sa, Gd, Th z O, S, Se, Te	1000	Ce ₃ S ₄ -1

Z przedstawionej tablicy można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Jak do tej pory nie znaleziono dostatecznie dobrego materiału odpornego na wysoką temperaturę, co jest szczególnie ważne ze względu na tak atrakcyjne źródła ciepła jak energia słoneczna i nuklearna. Co prawda, ostatnio pokłada się dość duże nadzieje w związkach krzemu (tzw. krzemki, nie wymienione w tablicy). Przykładem takiego materiału może być stop BC [19], którego trwałość jest dostatecznie duża do temperatury 980°C, a własności termoelektryczne są również zadowalające.

2. Dziwnym wydaje się fakt, że takie materiały jak Bi₂Te₃ i PbTe są nadal jeszcze do chwili obecnej podstawowymi składnikami związków termoelektrycznych (szczególnie Bi₂Te₃). Jednakże znaczny postęp w dziedzinie półprzewodników termoelektrycznych na pewno je niedługo wyeliminuje. Takim przypuszczalnym «następcą» wymienionych składników podstawowych wydaje się być selenek gadolinu Gd₃Se₃ [18] o niezwykle wysokim $Z = 45 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$. Jak dotąd nikomu nie udało się potwierdzić tych wyników.

3. Wszystkie dobre stopy i związki obejmują VI grupę, szczególnie chodzi tu o tellur, który jest trudno dostępny i drogi. Ostatnie wyniki badań siarczków ziem rzadkich pozwalają przypuszczać, że w przyszłości będą one mogły zastąpić tellur. Ponadto należy podkreślić, że większość powszechnie używanych półprzewodników jest nieodporna na działanie promieni radioaktywnych.

4.2. Ogólna charakterystyka soli stopionych na tle półprzewodników. Efektem poszukiwań nowych rozwiązań urządzeń do bezpośredniego przetwarzania ciepła w energię elektryczną są termoogniwa na stopionych solach. Stopione sole były przedmiotem badań od dawna, lecz jedynie od strony zjawisk elektrochemicznych w nich zachodzących; natomiast dopiero w r. 1960 SUNDHEIM [20] jako pierwszy wskazał na możliwość wykorzystania ich jako materiału termoelektrycznego do budowy generatorów termoelektrochemicznych ⁽³⁾ [21].

Stopione sole wykazują kilka niezwykle korzystnych właściwości w porównaniu z półprzewodnikami, mianowicie:

- 1) stosunkowo wysoki współczynnik Seebecka $\alpha = 0,3-2,0 \text{ mV}/^\circ\text{K}$ (dla półprzewodników $\alpha_{\text{max}} = 0,3 \text{ mV}/^\circ\text{K}$);
- 2) względnie niska przewodność cieplna $\kappa = 0,001-0,01 \text{ W/cm } ^\circ\text{C}$;
- 3) jak wykazały badania eksperymentalne zarówno współczynnik α jak i przewodność κ nie zależą od temperatury, natomiast przewodność elektryczna rośnie monotonicznie z temperaturą;
- 4) niewrażliwość na działanie promieniowania radioaktywnego,
- 5) możliwość pracy w szerokim zakresie temperatur,
- 6) stosunkowo duża liczba związków i kombinacji materiałów wskazuje na słusność przewidywań co do możliwości zbudowania wysokosprawnych urządzeń.

Jak wynika z wyżej wymienionych właściwości, pojedyncze termoogniwo może posiadać stosunkowo wysokie napięcie i w związku z tym wystarczy mniejsza ich ilość dla uzyskania określonego woltażu w przeciwieństwie do termoelementów półprzewodnikowych.

Jednakże termoogniwa charakteryzują się również pewnymi niekorzystnymi cechami, które towarzyszą bezpośredniemu przetwarzaniu energii. Wśród tych cech można wymienić następujące jako najistotniejsze:

1. Stopione sole odznaczają się niską przewodnością elektryczną $\sigma = 1-10 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$, co znacznie wpływa na zmniejszenie współczynnika dobroci Z . Pomimo tego ZITO [22] uważa, że można znaleźć sole, dla których $Z = 10 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$.

2. Każda elektroda metalowa ma ograniczoną żywotność z uwagi na występującą w termoogniwie reakcję elektrodową. Tę cechę można by częściowo zlikwidować przez zastosowanie pomocniczego urządzenia dla zamiany elektrod w ogniwie, tj. zimnej na gorącą i odwrotnie lub w pewnych przypadkach przez dobór odpowiednich kombinacji materiałów i określoną konstrukcję ogniwa, aby nie było potrzeby okresowego odwracania np. przez zastosowanie elektrod gazowych [23-24].

3. Specyfika konstrukcyjna termoogniwa związana ze stopioną solą jako materiałem termoelektrycznym ciekłym.

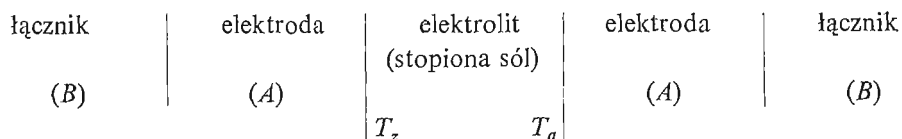
5. Ogólna zasada działania termoogniwa na stopionej soli

Zasada działania termoogniwa polega na wykorzystaniu efektu Peltiera w stopionej soli, tzn. istnienie różnicy temperatur pomiędzy elektrodami chemicznie symetrycznego

⁽³⁾ Generator termoelektrochemiczny oznacza baterię termoogniw; natomiast określenie «elektrochemiczny» podkreśla, że przepływowi prądu towarzyszą zarówno reakcje elektrochemiczne jak i przepływ ciepła.

ogniwa, w którym obie elektrody są wykonane z tego samego materiału, powoduje powstawanie potencjału termogalwanicznego, zwanego krócej termopotencjałem (STEM). Podstawową różnicą w odniesieniu do klasycznego termoelementu półprzewodnikowego jest to, że przepływowi prądu elektrycznego przez termoogniwo towarzyszy transport materiału jednej z elektrod.

Ogólny schemat takiego termoogniwa można przedstawić w sposób następujący:



Elektroda A jest odwracalna względem jednego z jonów stopionej soli. W związku z tym elektroda może być metalowa albo gazowa. Jak wykazało wielu badaczy, m. in. SENDEROFF [23] i ZIRO [22], dzięki stosowaniu elektrod gazowych uzyskuje się wyższe współczynniki Seebecka α .

Opisane ogniwo jest szczególnym przypadkiem bardzo ogólnego zjawiska termoelektrycznego, związanego z kontaktem pomiędzy odmiennymi przewodnikami elektrycznymi w gradience temperatury. Prace WAGNERA [25], LANGEGO [26] i in. wykazały teoretyczną równowagę pomiędzy termoogniwami a termoelementami metalicznymi lub półprzewodnikowymi, co pozwala stosować prawa i zależności matematyczne dotyczące tych ostatnich w odniesieniu do pierwszych.

Szczegółowe omówienie teoretycznej analizy pracy termoogniwa, jak również wyniki badań eksperymentalnych podał autor w pracach [27–30], ostatnio ukazała się również interesująca praca D. C. WHITE'A i innych [24] dotycząca doświadczeń z termoogniwem, w którym zastosowano elektrody gazowe.

Termoogniwa na stopionych solach wydają się być obiecującym źródłem energii elektrycznej. Stosunkowo skąpe wyniki dotychczasowych badań zarówno teoretycznych jak i doświadczalnych nie pozwalają przewidzieć ściśle kierunku przyszłych zastosowań praktycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. T. J. SEEBECK, Reports of the Prussian Academy of Science, 1882.
2. M. PELTIER, *Nouvelles experience sur la caloricit  des courants electriques*, Annales de Chemie et de Phys., **56** (1834), 371–386.
3. W. T. THOMSON (Lord Kelvin), *Collected papers*, J. University Press, Cambridge 1882, 232.
4. E. ALTENKIRCH, *Über den nutzeffekt der Thermosäule*, Phys. Zeit., **10** (1909), 560.
5. A. F. JOFFE, *Półprzewodniki w fizyce współczesnej* (tłum. z ros.), PWN, Warszawa 1956.
6. A. Ф. ИОФФЕ, *Полупроводниковые термоэлементы*, Изд. АН СССР 1960.
7. А. Ф. ИОФФЕ, Л. С. СТИЛЬБАНС, Е. К. ИОРДАНИШВИЛИ, Т. С. СТАВИЦКАЯ, *Термоэлектрическое охлаждение*, Изд. АН СССР, 1956.
8. J. KAY, J. A. WELSH (wyd. zbior. pod ich red.), *Direct conversion of heat to electricity*, rozdz. D. *Semiconductor devices*, N. York 1960.
9. J. B. CADOFF, E. MILLER (wyd. zbior. pod ich red.), *Thermoelectric materials and devices*, N. York 1960.
10. N. W. SNYDER (wyd. zbior. pod jego red.), *Energy conversion for space power*, vol. 3, rozdz. A. *Thermoelectricity*, N. York 1961.

11. P. EGLI, (wyd. zbior. pod jego red.) *Thermoelectricity*, artyk. C. ZENERA, *Theory of cascaded heat engines*, N. York 1960.
12. P. VINGET, *Utilisation de l'énergie nucléaire pour la production d'électricité par conversion électrochimique*, *Energie Nucléaire*, 6, 1 (1964), 3.
13. National Power Survey Advisory Committee, Report No. 7 (1963), USA.
14. M. O. FISHER, J. C. KASTOVICH, W. C. MORELAND, T. M. CARRY, *Experimental 5 kW thermoelectric generator*, *Advanced Energy Conversion*, 2 (1962), 275.
15. R. J. WILSON, *Operational and system testing of a SNAP III thermoelectric generator*, *Advanced Energy Conversion*, 2 (1962), 287.
16. P. S. MERRIL, D. A. FOREJT, P. E. PITYK, G. SPIRA, P. E. KNESSER, *SNAP-10 experimental thermoelectric generator*, *Advanced Energy Conversion*, 2 (1962), 281.
17. *Stan i program jądrowych generatorów mocy SNAP*, *Postępy Techniki Jądrowej*, 7 (1964), 657.
18. L. MARTON (wyd. zbior. pod jego red.), *Advances in electronics and electron physics* — artykuł F. E. JR. JAUMOTA: *Thermoelectricity*, N. York 1962.
19. *New alloy generates more power*, *Iron Age*, 188, 23 (1961), 121.
20. T. B. CADOFF, E. MILLER (wyd. zbior. pod ich red.), *Thermoelectric materials and devices*, rodz. 14, B. SUNDHEIM: *Molten salts as thermoelectric materials*, N. York 1960.
21. T. WARTANOWICZ, *Analiza właściwości energetycznych termoogniwa na stopionych solach jako urządzenia do bezpośredniego przetwarzania ciepła w energię elektryczną*, Warszawa 1965 (praca doktorska), 1.
22. R. JR. ZITO, *Thermogalvanic energy conversion*, *A. J. A. A. Journal* 1, 9 (1963), 2133.
23. S. SENDEROFF i R. J. BRETZ, *Ionic transport entropy in nonisothermal molten silver chloride cells*, *J. Electrochem. Soc.*, 1 (1962), 56.
24. H. P. MEISSNER, D. C. WHITE and G. D. UHLRICH, *Thermocells-effect of pressure on voltage*, *Advanced Energy Conversion*, 5, 3 (1965) 205.
25. C. WAGNER, *Ann. Phys.*, 3 (1929), 629.
26. E. LANGE, *Zeit. Physik Chem.*, 209 (1958), 162.
27. T. WARTANOWICZ, *The theoretical analysis of a molten salt thermocell as a thermoelectric generator*, *Advanced Energy Conversion*, 4, 3 (1964), 149.
28. T. WARTANOWICZ, *The analysis of performance of a molten salt thermogenerator*, *Arch. Budowy Maszyn*, 2, 12 (1965), 179.
29. T. WARTANOWICZ, *The analysis of performance and the experimental investigations of the molten salt thermocell as a thermoelectrochemical energy converter*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech.*, 10, 13 (1965), 547.
30. T. WARTANOWICZ, *The analysis of energy properties of molten salt thermocell as a generator for direct conversion of heat into electric energy*, *Arch. Budowy Maszyn*, 1, 13 (1966), 3.

Р е з ю м е

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ

В настоящей работе представлен обзор достижений в развитии термоэлектрических генераторов. Обсужден уровень развития конструкции термогенераторов и технологии термоэлектрических материалов. Указываются также возможности использования этого рода источников электрической энергии для практических целей.

Кроме того кратко рассматривается специальный тип термоэлектрического генератора, так наз. термоэлектрохимический генератор.

S u m m a r y

THERMOELECTRIC GENERATORS

The paper presents the survey of the development of the thermoelectric generators. The present stage in the development of the design of the thermogenerators and thermoelectric materials is given. The possibilities of practical applications of these electric energy sources are shown. Also, a special kind of thermoelectric generator, called the thermoelectrochemical generator, is briefly described.

KATEDRA TEORII MASZYN CIEPLNYCH
INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

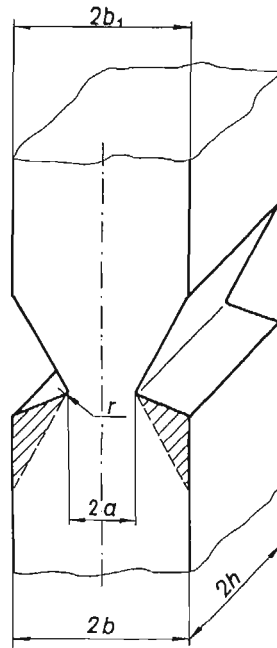
Praca została złożona w Redakcji dnia 18 stycznia 1966 r.

TEORETYCZNA I DOŚWIADCZALNA ANALIZA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ ROZCIĄGANEGO
PRĘTA Z WYCIĘCIAMI O NIESYMETRYCZNIE NACHYLONYCH KRAWĘDZIACH

LECH DIETRICH (WARSZAWA)

1. Wstęp

Analiza naprężeń i odkształceń rozciąganych płaskich prętów z karbem może być przeprowadzona przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia, o ile grubość pręta $2h$ (rys. 1) jest wystarczająca. W. ŻUKOWSKI [1] wykazał, że dla pręta z ostrym karbem kątowym przy stosunku $h/a > 4$ zarówno wielkość siły zrywającej, odniesionej do jednostki powierzchni, jak i wartość naprężeń umownej granicy plastyczności praktycznie nie ulega



Rys. 1

zmianie. W pracy [2] badano pręty z karbem o zaokrąglonych narożach i stwierdzono, że dla stosunku $h/a > 2$ praktycznie realizuje się płaski stan odkształcenia. Wystarczająca wartość stosunku $h/a = 3$ wynika z badań przeprowadzonych w pracy [3], w której zajmowano się prętami z karbem ostrym i o zaokrąglonych narożach. Autorzy zaznaczają jednak, że jeszcze dla $h/a = 6,67$ istnieje wpływ grubości $2h$ pręta.

Przy założeniu materiału idealnie plastycznego odkształcenia dla głębokiego karbu są zlokalizowane w najwęższym przekroju, a ich zakres jest określony polem linii poślizgu.

W niniejszej pracy analizowane są duże odkształcenia, które uzasadniają przyjęcie modelu ciała sztywno-plastycznego. Teoretycznie pręt ulegnie zniszczeniu, gdy jego szerokość w najwyższym miejscu zmaleje do zera ($a \rightarrow 0$).

Jeśli w warunku plastyczności przyjmiemy rzeczywistą granicę plastyczności σ_{p1} dla danego materiału, to nośność graniczną dla pręta z karbem będzie określała siła P_{p1} , której przekroczenie spowoduje powstanie dużych odkształceń. Ze względu na wzmocnienie materiału pręt taki będzie jeszcze mógł przenosić wzrastające siły aż do osiągnięcia P_{max} . Dalsze rozciąganie spowoduje szybko zniszczenie pręta. Nośność graniczną odniesioną do siły P_{max} można określić przez podstawienie do warunku plastyczności naprężeń odpowiadających wytrzymałości na zerwanie R_p .

Mając określone kinematycznie dopuszczalne pole prędkości można analizować odkształcenia powstałe w karbie podczas rozciągania. Zagadnieniem tym dla pręta z symetrycznym półokrągłym głębokim wycięciem zajmował się A. J. WANG [8]. Parametry geometryczne były tak dobrane, że siatka linii poślizgu składała się wyłącznie ze spirali logarytmicznych. Rozwiązanie dla naprężeń i prędkości wykonano analitycznie metodą Riemanna. Aproksymując to rozwiązanie określono kształt brzegu podczas całego procesu odkształcenia. Jak podaje autor, błędy powstałe wskutek przyjęcia upraszczających założeń mieszczą się w granicach błędu stosowanej konstrukcji graficznej.

Podobnie rozważania dla pręta z prostokątnym głębokim wycięciem przeprowadził E. H. LEE [9]. Po zbudowaniu pola linii poślizgu podzielił on cały czas procesu odkształcenia na szereg przyrostów Δt i dla każdego czasu określił kształt brzegu. W pracy [10] ten sam autor badał odkształcanie brzegu i kwadratowej siatki dla pręta osłabionego symetrycznym wycięciem kątowym. Ze względu na ostre zakończenie karbu następuje rozdzielanie materiału na dnie wycięcia. Odkształcenie kwadratowej siatki dla półokrągłego karbu badano w pracy [11]. Mając prędkości w każdym punkcie siatki określano jej przemieszczenia dla odpowiednio małego przyrostu czasu Δt .

Analiza procesu odkształcenia przy założeniu, że uplastycznienie następuje w całym najwęższym przekroju, jest możliwa, gdy stosunek b/a jest większy lub równy pewnej liczbie stałej dla danego typu karbu.

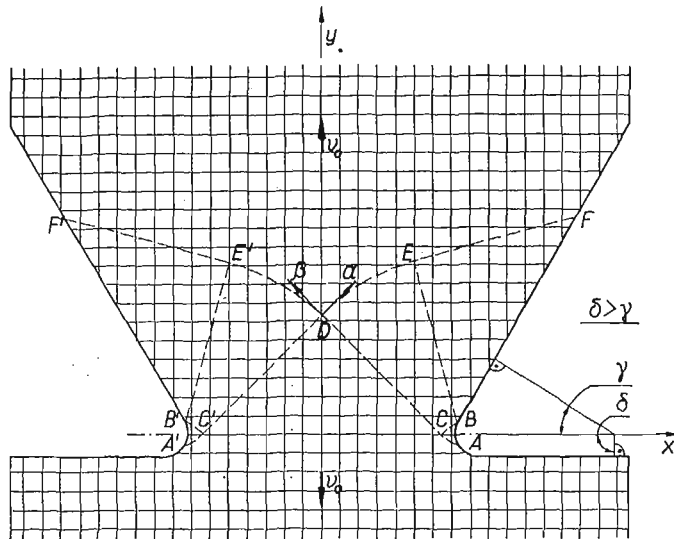
Podstawową teorią rozwiązywania zadań w płaskim stanie odkształcenia jest wyczerpująco podana w pracy [4]. Tu zostaną podane tylko związki, które muszą być spełnione wzdłuż charakterystyk, oraz niektóre ogólne uwagi dotyczące rozwiązania.

2. Rozwiązanie dla naprężeń i prędkości

W zagadnieniach płaskiego stanu odkształcenia mamy pięć niewiadomych, mianowicie trzy składowe naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ oraz dwie składowe wektora prędkości płynięcia v_x, v_y . Równania można rozwiązywać niezależnie dla naprężeń i prędkości, o ile warunki brzegowe są dane w naprężeniach. Przez podstawienie w znany sposób wartości λ i v zamiast naprężeń otrzymujemy układ równań typu hiperbolicznego, który rozwiązujemy metodą charakterystyk. Związki wzdłuż charakterystyk są następujące:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} v, & \quad \lambda - v = \text{const wzdłuż } \alpha, \\ \frac{\tau_y}{dx} = -\operatorname{ctg} v, & \quad \lambda + v = \text{const wzdłuż } \beta. \end{aligned}$$

Wykorzystując własności siatek Hencky'ego-Prandtla można wykreślić i zbudować pole linii poślizgu. Dla niesymetrycznego zaokrąglonego wycięcia pole to jest przedstawione na rys. 2.



Rys. 2

Dla karbów z zaokrąglonym dnem rozwiązanie w postaci zamkniętej zostało podane przez R. HILLA [4]. Naprężenia osiowe wzdłuż najwęższego przekroju wynoszą:

$$\sigma_y = 2k \left\{ 1 + \ln \left[1 + \frac{a}{r} (e^\gamma - 1) \right] \right\}.$$

Graniczną siłę P można obliczyć przez całkowanie wartości σ_y na obszarze całego przekroju. Wzór na współczynnik zwiększenia nośności granicznej w stosunku do pręta bez karbu o wymiarach przekroju $2a \times 2h$ ma postać:

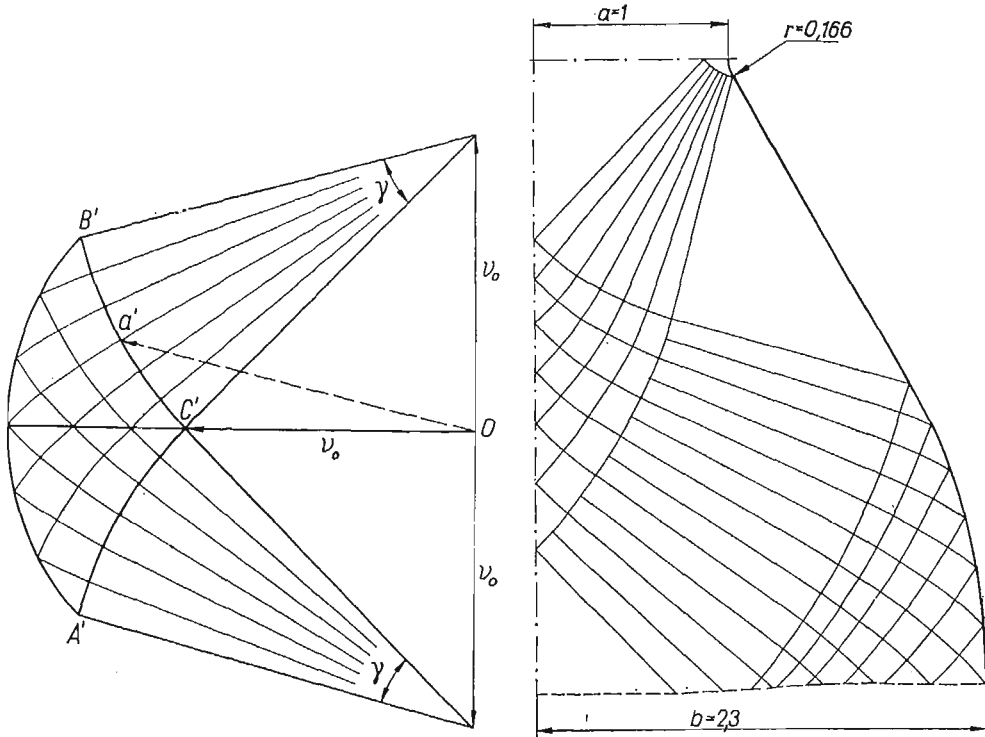
$$(2.1) \quad f_{\text{teor}} = (1 + \gamma) - \frac{r}{a} (e^\gamma - 1 - \gamma).$$

Pole prędkości dla karbu niesymetrycznego jest określone jednoznacznie (rys. 2). Zewnętrzne linie poślizgu $ACDE'F'$ i $A'C'DEF$ są liniami nieciągłości prędkości. Jeśli sztywne części poruszają się z prędkością v_0 , to wzdłuż zewnętrznych linii można wyznaczyć składową normalną prędkości. Pozwala to na określenie prędkości w całym uplastycznym obszarze. Oczywiście wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione równania Geiringer.

Rozkład prędkości w polu linii poślizgu można wyznaczyć również w prosty sposób wykreślony przez zbudowanie hodografu [6]. Na rysunku 3 przedstawiony jest plan prędkości dla pola ograniczonego punktami $ACDEF$. Trójkąt BEF porusza się jako ciało sztywne z prędkością odwzorowaną przez wektor OB' (rys. 3). Prędkości punktów należących do obszaru $BCDE$ są określone wektorami, których końce leżą na łuku $C'B'$. Na-

tomiast łuk $A'B'$ odpowiada zaokrąglonej części brzegu AB . Podczas całego procesu odkształcania hodograf jest ten sam.

Szerokość $2b$ części chwytowej musi być tak dobrana, aby nie został przekroczony warunek plastyczności w żadnym miejscu poza obszarem plastycznym. Dostateczną



Rys. 3

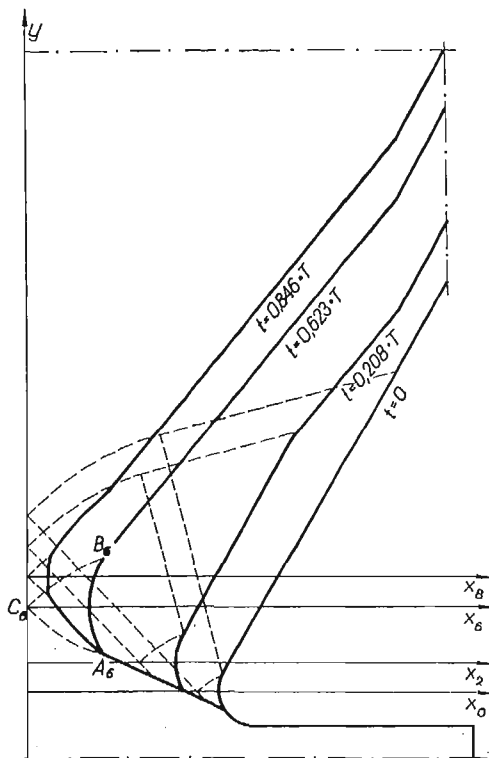
Rys. 4

zserokość $2b$ możemy uzyskać budując przedłużenie siatki linii poślizgu w obszar sztywny (rys. 4). Dla wycięcia o kącie $\gamma = \pi/6$ i wymiarach: $a = 1$, $r = 0,166$ teoretyczny stosunek będzie równy $b/a = 2,3$. Przedłużenie w obszar sztywny zostało wykonane dla pręta o takim samym kształcie wycięcia, jaki miały pręty użyte w doświadczeniu.

3. Proces odkształcenia

Dla teoretycznego określenia odkształceń naniesiono na pręt kwadratową siatkę. Cały czas procesu podzielony został na dziewięć etapów. Analizę odkształceń utrudnia fakt, że wraz z każdą zmianą położenia danego punktu zmienia się jego prędkość. Przyjmując odpowiednio małe przyrosty czasu możemy założyć, że prędkość punktu jest stała w czasie Δt . Dla każdego etapu za prędkość cząsteczki przyjmowano jej prędkość w chwili początkowej. Kołowa część brzegu była aproksymowana jako łuk koła w każdym etapie odkształcenia. Zmienia się zarówno promień tego koła jak i położenie jego środka na osi x . W pracy [8], w której analizowano odkształcenia prętów z karbem symetrycznym, wykazano, że przybliżenie takie dobrze odpowiada rozwiązaniu ścisłemu.

Na rysunku 5 pokazano kształt brzegu w drugim, szóstym i ósmym etapie. Rysunek ten został wykonany przy przyjęciu prędkości dolnej części pręta za zerową. Górna część pręta przesuwała się z prędkością $v = 2v_0$. Cały czas trwania procesu odkształcania aż do uzyskania szerokości $2a = 0$ został oznaczony przez T . Promień zaokrąglenia dna



Rys. 5

karbu powiększa się w miarę postępowania procesu i wzrasta obszar linii poślizgu utworzony przez spirale logarytmiczne. Prostoliniowa część brzegu BF zmniejsza się i przesuwa równolegle. Po czasie $t = 0,623 \cdot T$ obszar uplastyczniony zmniejsza się do trójkąta krzywoliniowego $A_6B_6C_6$. Dalsze prowadzenie procesu powoduje symetryczne odkształcenia względem chwilowej osi x .

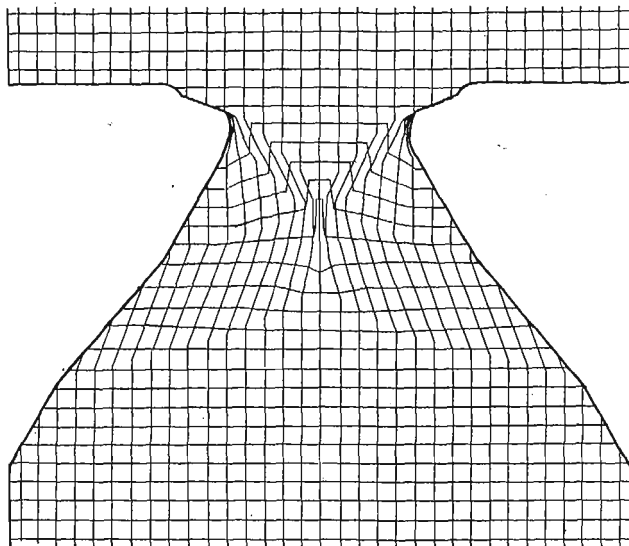
Na rysunkach 6, 7, 8 i 9 pokazano poszczególne etapy odkształcenia kwadratowej siatki. Prędkość górnej i dolnej części pręta wynosiła $v_0 = 1$. Łatwo zauważyć, że materiał w górnej części pręta, który doznał silnych odkształceń, zostaje odciążony i przesuwa się jako ciało sztywne. Natomiast w dolnej części pręta każdy następny obszar plastyczny obejmuje swoim zasięgiem jeszcze nieodkształcony materiał. Jak wynika z rys. 8 i 9 największe odkształcenia występują w pobliżu dna karbu.

Pręt wykonany z rzeczywistego materiału ulegnie zniszczeniu wcześniej, niż to przewiduje teoria ciała idealnie plastycznego. Jednak kształt utworzonej w procesie odkształcania krawędzi dolnej części pręta powinien mieć podobny charakter jak na rys. 9. Obserwacja złomów pozwala sprawdzić słuszność przyjętego pola prędkości.

[46]

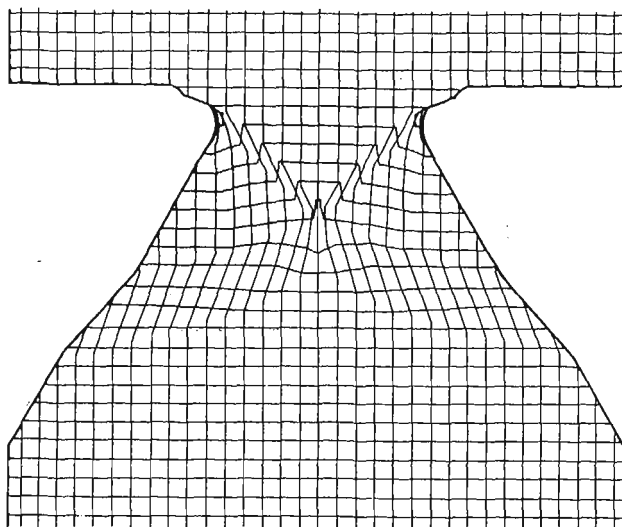
Rys. 7

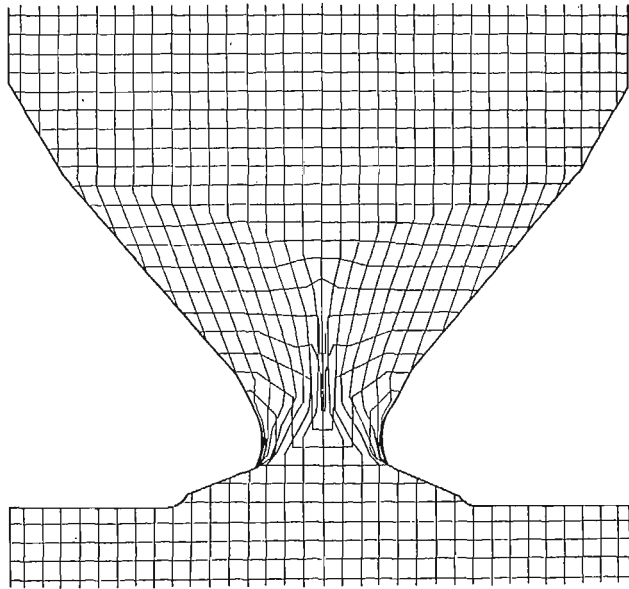
$l=0,32 \cdot T$



Rys. 6

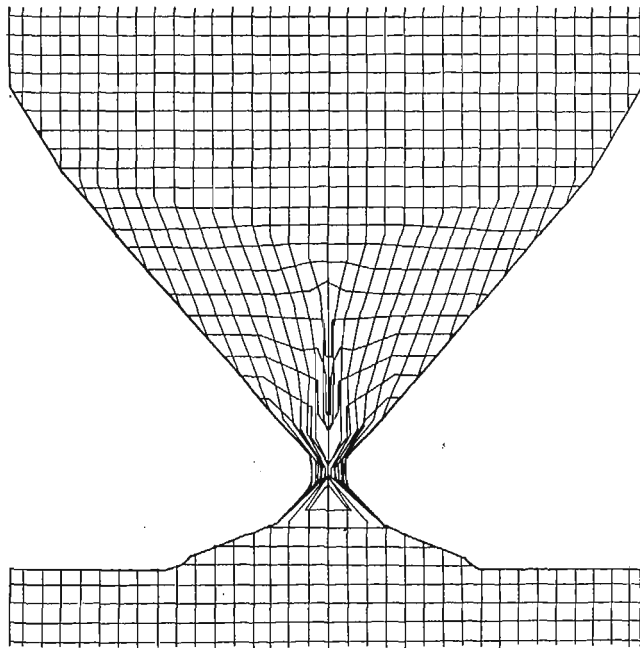
$l=0,208 \cdot T$





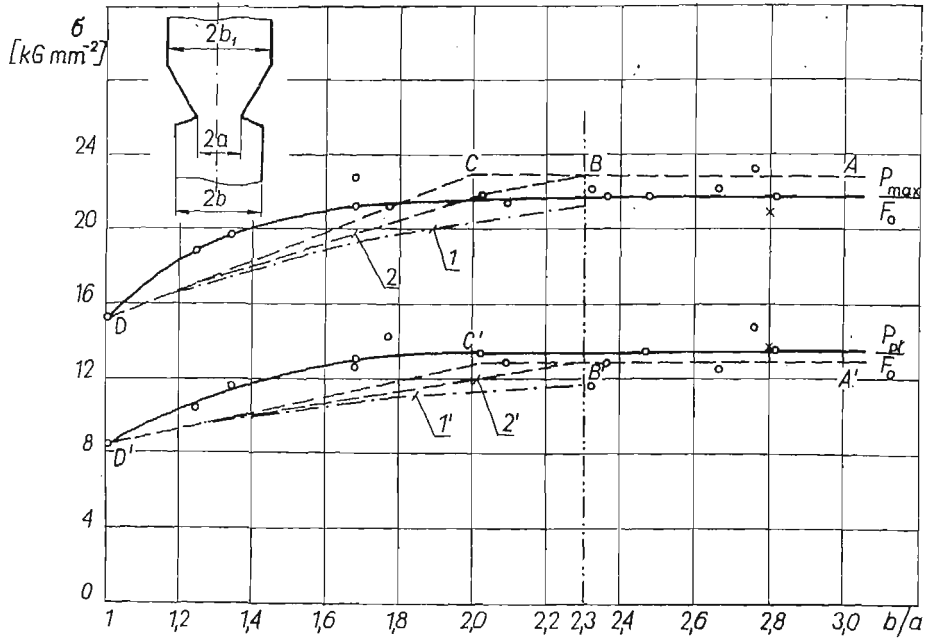
$$t=0,52 \cdot T$$

Rys. 8

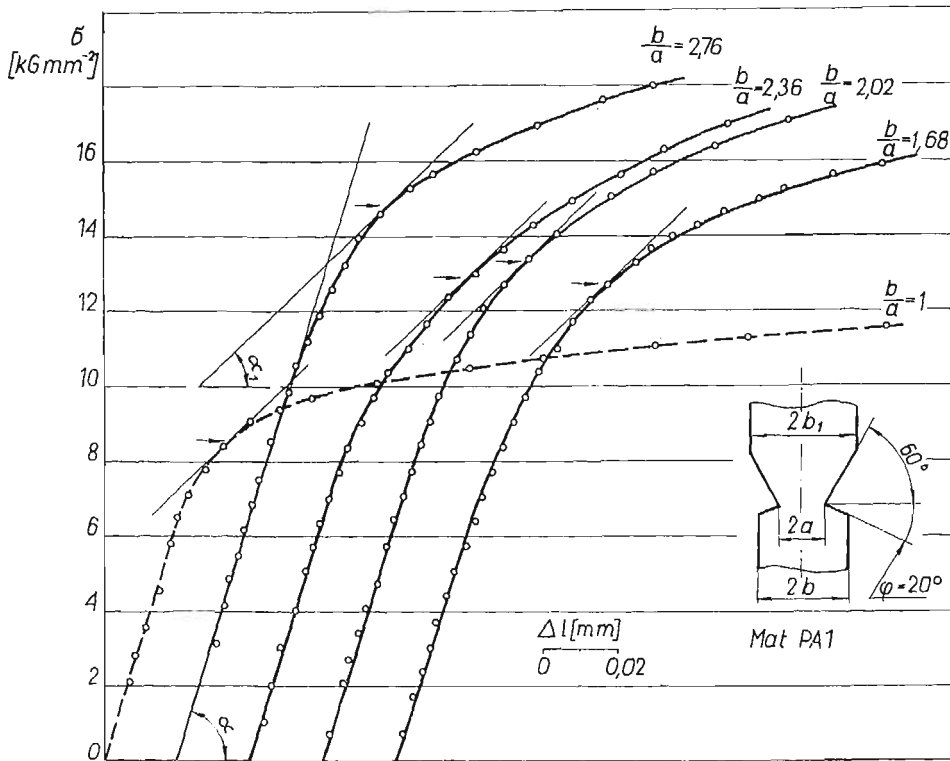


$$t=0,846 \cdot T$$

Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

4. Wyniki doświadczeń

Zbadano 16 próbek wykonanych z miękkiego stopu aluminium o wytrzymałości na rozzerwanie $R_r = 15,3 \text{ kG/mm}^2$. Stałe wymiary wynosiły: $2a = 6 \text{ mm}$, $2h = 20,4 \text{ mm}$, $2b_1 = 16 \text{ mm}$, $r = 0,5 \text{ mm}$, kąt $\gamma = \pi/6$. Wymiary $2b$ i kąt δ były różne. Próbki podzielono na trzy serie w zależności od kąta φ (rys. 11), który wynosił 0° , 20° , 40° . Każda seria składa się z czterech próbek o różnych stosunkach b/a .

Wszystkie próbki były rozciągane na hydraulicznej maszynie wytrzymałościowej, a odkształcenia mierzono za pomocą dwóch tensometrów czujnikowych umieszczonych po obu stronach próbki. Rozciąganie prowadzono aż do zerwania i notowano siłę P_{\max} .

Jako kryterium wyznaczania wartości naprężeń, przy których cały przekrój znajduje się w stanie plastycznym, przyjmowano umownie określoną zmianę modułu stycznego. Granica uplastycznienia jest punktem styczności wykresu z prostą, dla której $\text{tg} \alpha_1 = = 0,3 \text{ tg} \alpha$ (rys. 11).

Na rysunku 10 przedstawiono wyniki doświadczeń. Ciągła krzywa górna reprezentuje punkty odniesione do maksymalnej siły. Krzywa dolna przedstawia zależność $P_{p1}/F_0 = = f(b/a)$. Teoretyczna wartość stosunku $b/a = 2,3$ dobrze odpowiada rzeczywistemu zachowaniu się materiału zarówno w odniesieniu do granicy uplastycznienia, jak i do siły P_{\max} .

Wyniki uzyskane dla tych samych stosunków b/a , ale różnych kątów φ nie wskazują na jakościowy wpływ zmiany tego kąta na nośność graniczną. Niewielkie różnice w wartościach naprężeń mieszczą się w granicach rozrzutu.

5. Ocena nośności granicznej

Dla wystarczającej szerokości $2b$ części chwytowej nośność graniczną określamy za pomocą wzoru (2.1), z którego można obliczyć współczynnik zwiększenia nośności granicznej dla tego typu karbu. Następnie możemy podać teoretyczne obciążenie graniczne zarówno w odniesieniu do granicy uplastycznienia, jak i do granicy wytrzymałości na zerwanie R_r . Linie przerywane AB i $A'B'$ (rys. 10) przedstawiają uzyskane stąd rozwiązanie. Odpowiednie wartości granicy uplastycznienia oraz R_r wzięto z rzeczywistego wykresu rozciągania dla pręta bez karbu (linia przerywana na rys. 11).

Na uwagę zasługuje fakt, że teoretyczny współczynnik zwiększenia nośności granicznej odnosi się w naszym przypadku również i do maksymalnych naprężeń, jakie mogą być przeniesione. Podobny efekt stwierdzono również w pracy [2].

Przy niewystarczającej szerokości $2b$ części chwytowej możemy z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością ocenić nośność graniczną przez podanie jej dolnego i górnego oszacowania. Zakładając dowolny kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia porównujemy pracę wykonaną przez naprężenia z pracą sił zewnętrznych. Otrzymana w ten sposób wartość obciążenia granicznego nie jest mniejsza od ścisłego rozwiązania. Można przyjąć, że zniszczenie nastąpi przez poślizg w płaszczyźnie pod kątem 45° do osi pręta (rys. 12). Dla takiego schematu odkształcenia maksymalna siła określona z warunku równości prac będzie

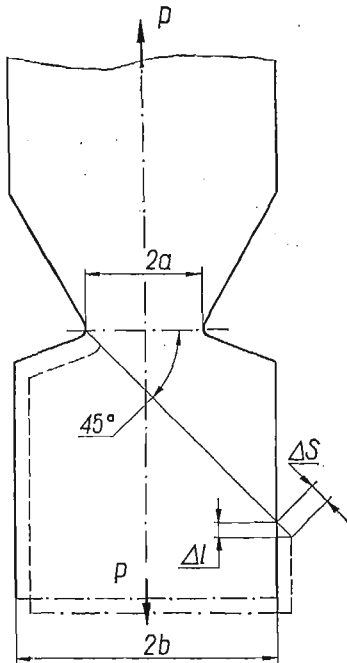
$$P = 2k \cdot 2h(a+b)$$

i stąd naprężenia:

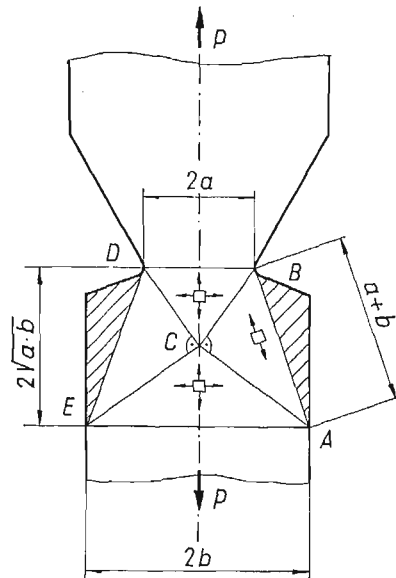
$$\sigma = k \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Dla różnych wartości stosunków b/a otrzymujemy linie CD i $C'D'$ (rys. 10). W zakresie $b/a = 2-3$ lepszą ocenę uzyskujemy ze schematu odkształcenia podanego przez R. HILLA, który jest również kinematycznie dopuszczalny.

Dolną ocenę nośności granicznej otrzymujemy ze statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. Otrzymane obciążenie nie jest większe od rozwiązania ścisłego. Dla pola na-



Rys. 12



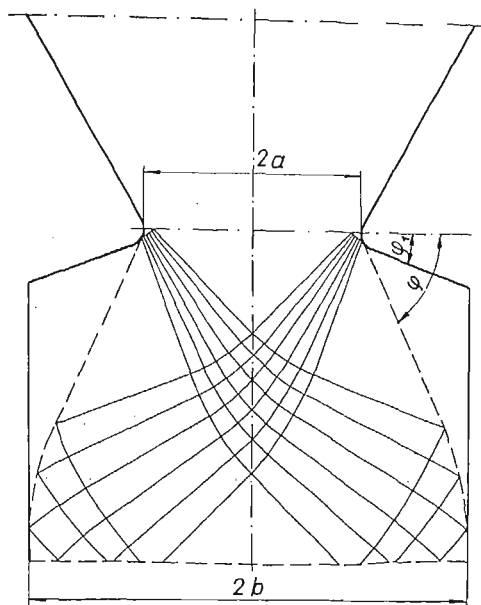
Rys. 13

prężen przedstawionego na rys. 13 uzyskujemy największą wartość obciążenia granicznego w przypadku, jeśli we wszystkich czterech trójkątach będzie osiągnięty stan plastyczny. Z kół Mohra, przy spełnieniu warunków ciągłości, otrzymujemy wzór na maksymalne naprężenia w postaci

$$\sigma = 2k \cdot \frac{2b}{a+b}.$$

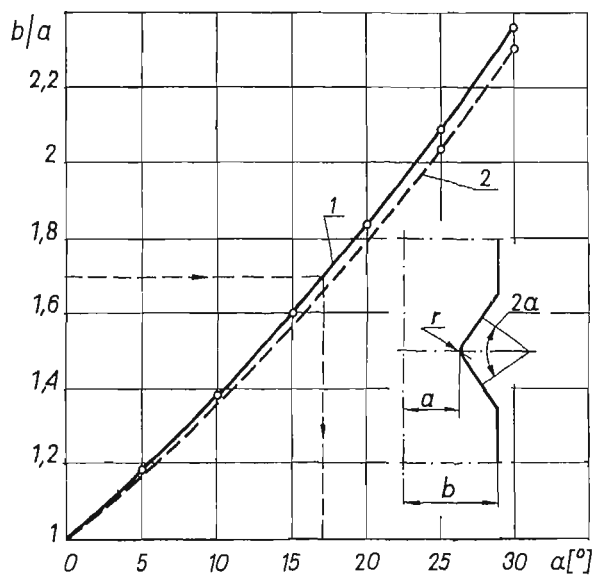
Zależność ta jest przedstawiona liniami 1 i 1' (rys. 10).

Ocenę dolną możemy również określić wykorzystując przedłużenie w obszar sztywny. Jest to bowiem statycznie dopuszczalne pole naprężeń, które spełnia równania równowagi i warunki brzegowe, a warunek plastyczności nie jest nigdzie przekroczony. Z jednego z podstawowych twierdzeń teorii plastyczności wynika, że dodanie materiału nie może



Rys. 14

zmniejszyć nośności granicznej. Na tej podstawie możemy stwierdzić, że nośność graniczna pręta z karbem o kącie φ_1 (rys. 14) nie może być mniejsza od nośności pręta z karbem o kącie φ . Ścisłe rozwiązanie dla pręta z wycięciem o kącie φ można przyjąć jako dolną



Rys. 15

ocenę nośności granicznej pręta o kącie φ_1 . Na podstawie wykonanych przedłużeń w obszar sztywny sporządzono wykres zależności $b/a = b/a(\alpha)$ (rys. 15). Linia ciągła przedstawia

karb ostry, a przerywana karb z zaokrągleniem o promieniu $r = 0,166a_0$. Mając dany stosunek b/a możemy określić z wykresu kąt α , dla którego istnieje ściśle rozwiązanie. Przy małych promieniach zaokrąglenia można korzystać z krzywej 1 bez obawy popełnienia dużego błędu. Wzór na współczynnik zwiększenia nośności granicznej dla karbu ostrego ma postać

$$f = 1 + \alpha.$$

Ocena dolna określona w ten sposób jest bardziej zbliżona do rozwiązania ścisłego. Dla różnych stosunków b/a oszacowanie od dołu będzie teraz określała linia 2 i 2' (rys. 10). Przy wartości $b/a = 2,3$ ocena dolna staje się rozwiązaniem ścisłym.

Maksymalne odchylenie otrzymanej oceny od krzywej uzyskanej na drodze doświadczalnej wynosi:

1) dla nośności granicznej odniesionej do granicy uplastycznienia przy $b/a = 1-2,3$ 14% i przy $b/a > 2,3$ 3,8%;

2) dla nośności granicznej odniesionej do wytrzymałości na zerwanie przy $b/a = 1-2,3$ 9% i przy $b/a > 2,3$ 4,8%.

6. Wnioski

Przeprowadzone doświadczenia potwierdzają słuszność teoretycznego rozwiązania, z którego wynika, że nośność graniczna dla pręta z niesymetrycznym karbem (rys. 1) będzie taka sama jak dla pręta o analogicznym wycięciu symetrycznym. Na rysunku 10 punkty oznaczone gwiazdkami odnoszą się właśnie do symetrycznego karbu. Kąt φ nie wpływa na wartość granicznych naprężeń.

Natomiast dodany materiał (zakreskowane pole na rys. 1) utrudnia plastyczne odkształcenia dolnej części pręta. Wpływa to w istotny sposób na realizowane pole prędkości. W przypadku pręta z niesymetrycznym wycięciem pole to jest określone jednoznacznie. Z obserwacji złomów próbek wynika, że pole prędkości przedstawione na rys. 2 jest słuszne. Wydaje się, że wartość kąta φ będzie miała wpływ na charakter pola prędkości. Doświadczalne określenie tego wpływu nastęrcza jednak duże trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, Вып. 9, Машгиз., Москва 1963, 231-252.
2. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inżyn., **13** (1965), 637-652.
3. W. N. FINDLEY, D. C. DRUCKER, *An experimental study of plane plastic straining of notched bars*, J. Appl. Mech., **32** (1965), 493-503.
4. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1956.
5. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley, New York 1951.
6. W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Basel 1955.
7. W. SZCZEPIŃSKI, *Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych prętów z karbem*, Mech. Teoret. Stos., **3** (1965).
8. A. J. WANG, *Plastic flow in a deeply notched bar with semicircular root*, Quart. Appl. Math., **11** (1954), 427-438.

9. E. H. LEE, *Plastic flow in a rectangularly notched bar subjected to tension*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 140-146.
10. E. H. LEE, *Plastic flow in a V-notched bar pulled in tension*, J. Appl. Mech., **1** (1952), 331-336.
11. L. GARR, E. H. LEE, A. J. WANG, *The pattern of plastic deformation in a deeply notched bar with semicircular roots*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 56-58.

Р е з ю м е

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТЕРЖНЕЙ, ПОДВЕРГАЕМЫХ РАСТЯЖЕНИЮ, ОСЛАБЛЕННЫХ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ВЫТОЧКОЙ

В работе исследуется деформация и несущая способность стержней с несимметричной выточкой (рис. 1). На основе жестко-идеально пластического анализа исследуются деформации первоначально квадратной сети, нанесенной на стержень. На рисунках 6, 7, 8 и 9 показаны отдельные этапы этого процесса.

В экспериментальной части работы стержни с различными отношениями b/a и углами φ подвергались растяжению вплоть до разрыва. Результаты приведены на диаграмме 10. Они сравниваются с теоретической оценкой несущей способности.

Используя продолжение поля напряжений в жесткую область можно получить нижнюю оценку несущей способности. Эта оценка более близка точному значению, чем та, которую можно получить при применении статически допустимого поля напряжений, предложенного В. ПРАГЕРОМ.

Из приведенных результатов вытекает, что несущая способность для стержня с несимметричной выточкой (рис. 1) будет равной несущей способности аналогичного стержня с симметричной выточкой. Добавленный за счет асимметрии материал существенно влияет на характер поля скорости.

S u m m a r y

THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL YIELD POINT LOAD ANALYSIS FOR NONSYMMETRICALLY NOTCHED BARS PULLED IN TENSION

The study on strain and yield point load for non-symmetrically notched bars (Fig. 1) is presented. The deformation of the initially quadratic net drawn on the bar was studied under the assumption that the material is rigid-perfectly plastic. In Figs. 6-9 the stages of this process are shown.

In the experimental part of the study, the non-symmetrically notched bars of different ratio b/a and different angles were pulled in tension until fracture. The results are shown in Fig. 10. The comparison of the results with the theoretical yield point load is given.

By extending stress field into the rigid part, the lower bound of the yield point load may be obtained with a better degree of accuracy to the exact solution than the solution with the application of the statically permissible stress field proposed by W. PRAGER.

It follows from the analysis that the yield point load for non-symmetrically notched (Fig. 1) is the same as for a similar bar with symmetric notch. However, the significant influence on the character of the velocity field is caused by the additional material.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1966 r.

WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII PŁYT REISSNERA I TEORII PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

RYSZARD G A N O W I C Z (POZNAŃ)

1. Wstęp

Problem płyt grubych, postawiony w klasycznej teorii sprężystości [1 i 2], nie został do chwili obecnej rozwiązany w sposób zadowalający. Wynika to ze złożoności problemu, w którym wymagane jest spełnienie warunków brzegowych zarówno na powierzchniach górnej i dolnej jak i bocznych. Jako pewne uproszczenie dopuszcza się w teorii płyt grubych spełnienie warunków brzegowych na powierzchniach bocznych w sensie średnim, to znaczy, żąda się spełnienia ich na krzywej ograniczającej płytę dla wielkości wypadkowych. Uproszczenie to, opierające się na zasadzie Saint-Venanta, pozwoliło na rozwiązanie tylko niewielu przypadków [2].

Najdalsze uproszczenia wprowadza tak zwana klasyczna teoria płyt cienkich ogólnie biorąc anizotropowych. Teoria ta jest rozbudowana niezwykle szeroko i dla wielu technicznie ważnych przypadków daje dobre, w porównaniu z doświadczeniem, przybliżenie. Ma ona jednak szereg niedostatków między innymi dlatego, że nie uwzględnia się w niej odkształceń wywołanych siłami poprzecznymi. Niedokładność tę wielu autorów starało się usunąć na przestrzeni ostatnich lat dwudziestu. Powodem tych starań są potrzeby wynikające z praktyki inżynierskiej, mianowicie w coraz większym stopniu wprowadza się do konstrukcji elementy płytowe, powłokowe i belkowe z tworzyw sztucznych jak i elementy o projektowanej niejednorodnej strukturze wewnętrznej. Należą tutaj elementy wielowarstwowe, które projektuje się w ten sposób, że pewnym warstwom przypisuje się określony charakter pracy. Na przykład pewne warstwy przenoszą, ogólnie biorąc, naprężenia normalne, a inne, zgodnie z ich cechami wytrzymałościowymi, naprężenia styczne. Konstrukcje takie, powszechnie używane w lotnictwie, coraz częściej pojawiają się w budownictwie lądowym, pomijanie więc odkształceń wywołanych siłami poprzecznymi w warstwie, gdzie występują tylko te siły, jest niemożliwe do przyjęcia.

Teoria płyt cienkich nie zdaje też egzaminu w analizie stanu naprężenia płyt jednorodnych o wymiarach spotykanych w konstrukcjach stropów grzybkowych czy płyt fundamentowych, dlatego też ukazało się dużo prac dotyczących płyt grubych na podłożu sprężystym, np. prace [3 i 4].

Doświadczenia wykazują, że w przypadkach omówionych wyżej, analiza stanu naprężenia, przeprowadzona w oparciu o teorię płyt cienkich, daje obraz fałszywy.

W związku z powyższym szereg autorów [5–10] wprowadziło pewne modele płyt, w których uwzględnia się odkształcenia postaciowe. Zamierzeniem tych autorów było podanie teorii opisującej zjawisko zginania płyt przy uwzględnieniu odkształceń wywołanych siłami poprzecznymi, przy czym powinna to być teoria możliwa do wykorzystania praktycznego. W pierwszym rzędzie wymienić należy tutaj prace E. REISSNERA [5], który:

a) zakłada, że naprężenia normalne σ_x, σ_y oraz styczne τ_{xy} mają rozkład prostoliniowy wzdłuż grubości płyty, a styczne τ_{xz}, τ_{yz} mają przebieg paraboliczny,

b) wprowadza średnie wartości odkształceń, które oblicza z porównania pracy wypadkowych sił na średnich (sprowadzonych) przemieszczeniach z pracą odpowiednich naprężeń na rzeczywistych przemieszczeniach,

c) uwzględnia naprężenia normalne σ_z prostopadłe do powierzchni środkowej płyty.

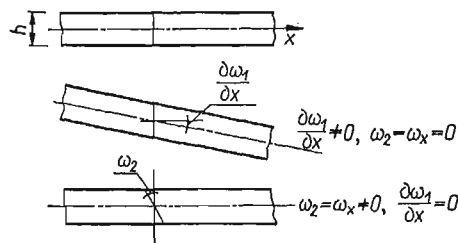
W teorii tej otrzymuje się następujące związki między przemieszczeniami sprowadzonymi i rzeczywistymi [11]:

$$\omega_1 = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dot{w} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \quad \text{sprowadzone ugięcie,}$$

$$\omega_2 = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u \frac{2z}{h} dz \quad \text{sprowadzony kąt obrotu względem osi } x,$$

$$\omega_3 = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v \frac{2z}{h} dz \quad \text{sprowadzony kąt obrotu względem osi } y.$$

Sprowadzone kąty obrotu pokazano schematycznie na rys. 1. W przypadku gdy $\omega_2 = -\partial\omega_1/\partial x$, naprężenia styczne wynoszą zero.



Rys. 1

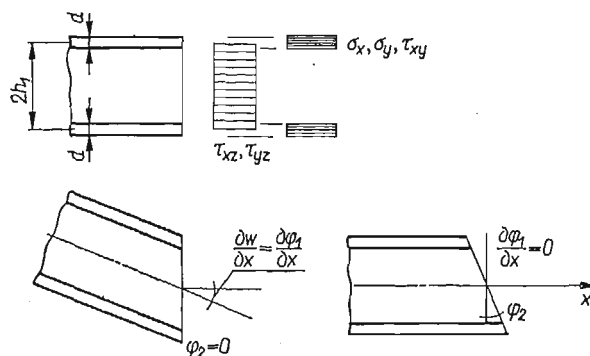
Dalszą grupę prac stanowią te, w których zakłada się, że płyta zbudowana jest z materiału poprzecznie izotropowego, przy czym w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyta jest nieściśliwa. Należy tu wymienić prace A. KROMMA [6]. Poza tym J. L. BOAL i E. REISSNER [7] zajmowali się także takim modelem płyty, rozważając jednak warunki brzegowe na krzywej ograniczającej nie tylko w sensie średnim i dlatego nazwali ten problem «dwi i pół wymiarowym».

Indywidualne podejście do zagadnienia płyt grubych wykazali W. Z. WŁASOW i N. N. LEONTIEW [3]. Wprowadzili oni tzw. teorię bimomentową, której pierwszym przybliżeniem jest teoria płyt cienkich.

Szeroką klasę płyt, w których uwzględnia się odkształcenia wywołane siłami poprzecznymi, stanowią płyty trójwarstwowe. Teoria tych płyt rozwija się w chwili obecnej nie-

zwykle szeroko. W teoriach tych płyt najczęściej zakłada się, że warstwy skrajne są symetryczne i spełniają założenia teorii płyt cienkich, natomiast warstwa środkowa, stałej grubości, jest nieściśliwa i pracuje jedynie na odkształcenia postaciowe. Podstawowe równania takich płyt można znaleźć w pracach N. J. HOFFA [12], ALEKSANDROWA [13] oraz C. LIBOVE'a i S. B. BATDORFA [14]. Opierając się na tych modelach wielu autorów uzyskało konkretne rozwiązania [15 i 16].

Najbardziej technicznie uzasadniony jest trochę uproszczony model płyty trójwarstwowej, mianowicie taki, w którym zakłada się, że warstwy skrajne przenoszą jedynie naprężenia normalne i styczne poziome stałe na grubości warstwy (brak sztywności na zginanie warstw skrajnych), a warstwa środkowa pracuje jedynie na naprężenia styczne τ_{xz} . Na rysunku 2 pokazano schematycznie rozkład naprężeń oraz odkształcenia takiej płyty. Jak widać z tego rysunku, rozkład naprężeń omawianej płyty trójwarstwowej przypomina belkę dwuteową. Co ciekawsze, tak zdefiniowany model płyty trójwarstwowej jest szczególnym przypadkiem płyty reissnerowskiej ze względu na pewną analogię odpowiednich zależności. Wykażemy to w pracy.



Rys. 2

Praca niniejsza poświęcona jest wyprowadzeniu podstawowych rozwiązań dla płyt reissnerowskich i dzięki prostej analogii dla płyt trójwarstwowych o warstwach skrajnych bez sztywności na zginanie. Twierdzenie E. BETTIEGO o wzajemności prac i rozwiązania podstawowe, wyprowadzone w niniejszej pracy, nie są znane (według rozeznania autora) w literaturze omawianych płyt.

Jak wiadomo, twierdzenie E. Bettiego i rozwiązania podstawowe osobliwe znajdują zastosowanie przy konstruowaniu rozwiązań wielu problemów brzegowych teorii sprężystości oraz teorii płyt cienkich.

Celem podania analogicznych zależności dla płyt reissnerowskich i dla płyt trójwarstwowych jest wykazanie, że także w teorii tych płyt wiele problemów brzegowych można rozwiązać w oparciu o twierdzenie o wzajemności przemieszczeń i podstawowe rozwiązania osobliwe. W ten sposób teoria omawianych płyt pomimo bardziej złożonego modelu może być bliższa zagadnieniom technicznym ze względu na wspólny z teorią płyt cienkich sposób rozwiązywania problemów brzegowych.

Punkt 2 podaje podstawowe zależności bez specjalnego uzasadnienia ze względu na możliwość znalezienia ich w literaturze. W punkcie 3 podano wywód podstawowej

dla całej pracy zasady E. Bettiego. Natomiast omówienie problemów poruszanych w dalszym ciągu pracy podano w punkcie 5.

2. Równania podstawowe

Poniżej podamy zasadnicze związki dotyczące zarówno płyt reissnerowskich jak i płyt trójwarstwowych spełniających założenia podane w p. 1. Równania równowagi podamy w różnych postaciach, które mogą być przydatne do uzyskania konkretnych rozwiązań.

Punktem wyjściowym otrzymania równań równowagi będą zależności między siłami wewnętrznymi i omówionymi w punkcie poprzednim przemieszczeniami sprowadzonymi. Dla płyt reissnerowskich otrzymujemy [11]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m_x &= D \left[\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \frac{6\nu}{5h} \frac{\nu(1+\nu)}{E} \right], & q_x &= \frac{5h}{6} G \left(\omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right), \\ m_y &= D \left[\frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{6\nu}{5h} \frac{\nu(1+\nu)}{E} \right], & q_y &= \frac{5h}{6} G \left(\omega_3 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right), \\ m_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

gdzie:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E, G, \nu \text{ — stałe materiałowe.}$$

W dalszym ciągu pracy zajmiemy się płytami reissnerowskimi poddanymi działaniu obciążenia normalnego $p(x, y)$ oraz momentów rozłożonych $X_M(x, y)$ i $Y_M(x, y)$. Dla wyciętego z takiej płyty elementu (rys. 3) otrzymamy następujące równania równowagi:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x + X_M &= 0, \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y + Y_M &= 0, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p &= 0. \end{aligned}$$

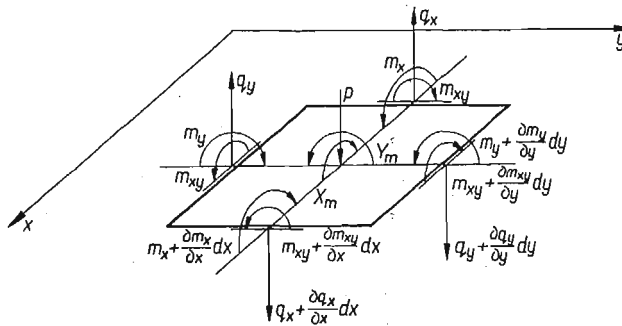
Wstawiając związki (2.1) do (2.2) otrzymamy następujący układ równań ze względu na niewiadome $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \omega_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} &= -\frac{6p}{5hG}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega_2 - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} &= \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{6}{5hG} X_M, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \omega_3 &= \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{6}{5hG} Y_M. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań może być podstawą otrzymania rozwiązań dla konkretnych zadań przy spełnieniu odpowiednich warunków brzegowych.

Układ równań (2.3.) możemy także sprowadzić do trzech oddzielnych równań na trzy funkcje przemieszczeń. W tym celu należy posłużyć się znanym postępowaniem HILBERTA. Ze względu na wielokrotne używanie tego sposobu w literaturze [15, 17, 18] podamy poniżej jedynie końcowe rezultaty w postaci następujących trzech równań:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 &= \frac{p}{D}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2 &= -\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{X_M}{D}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_3 &= -\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{Y_M}{D}. \end{aligned}$$



Rys. 3

Natomiast przemieszczenia sprowadzone $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ wyznaczyć możemy z następujących związków:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) \left(1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{h^2}{5} \nabla^2 \right) F_1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2 - \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_3, \\ \omega_2 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 + \left[\nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) \right] F_2 + \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) F_3, \\ \omega_3 &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) F_2 + \\ &\quad + \left[\nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) \right] F_3. \end{aligned}$$

Układ równań (2.4) wraz ze związkami (2.5) równoważny jest układowi równań (2.3). Sposób wykorzystania układu równań (2.4) zostanie pokazany w dalszym ciągu pracy.

Zanalizujemy teraz przypadek jednorodnych równań układu (2.4)

$$(2.6) \quad \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rozwiązanie takich równań możemy przedstawić w postaci sumy [19]

$$(2.7) \quad F_i = B_i + H_i,$$

gdzie

$$\nabla^2 \nabla^2 B_i = 0, \quad \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) H_i = 0.$$

Łatwo się przekonać, że dla funkcji H_i mamy $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ ze względu na powtarzanie się zależności $\left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) F_i$ w związkach (2.5). Ponadto ze względu na to, że mamy do czynienia z zagadnieniem szóstego rzędu, rozwiązanie możemy skonstruować tylko za pomocą jednej funkcji biharmonicznej i jednej H_i . Stąd po wykonaniu przekształceń otrzymamy dla przypadku (2.6) następującą reprezentację niewiadomych (por. [15 i 20]):

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \left(1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{h^2}{5} \nabla^2\right) B, \\ \omega_2 &= -\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}, & \nabla^2 \nabla^2 B &= 0, \\ \omega_3 &= -\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, & \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) H &= 0. \end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze w przypadku powyższym problem rozwiązań szczególnych układu równań niejednorodnych, który należy rozpatrzyć w rozwiązaniach szczegółowych.

W przypadku płyt trójwarstwowych, spełniających założenia podane w punkcie pierwszym, otrzymuje się zależności zbliżone do podanych powyżej dla płyt reissnerowskich. Poniżej podamy te związki powołując się na wcześniejszą pracę autora [21].

Związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ są następujące:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} m_x &= D_t \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right), & q_x &= 2G_s h_1 \left(\varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right), \\ m_y &= D_t \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), & q_y &= 2G_s h_1 \left(\varphi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right), \\ m_{xy} &= D_t \frac{1-\nu_1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right), & D_t &= \frac{2Edh_1^2}{(1-\nu_1^2)}, \end{aligned}$$

gdzie E, ν_1 oznaczają stałe materiałowe warstw skrajnych, a $G_s = G_{xz} = G_{yz}$ moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej.

Postępując podobnie jak poprzednio, otrzymujemy następujące przemieszczeniowe równania równowagi:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} &= -\frac{p}{2G_s h_1}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \varphi_2 - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} &= \frac{X_M}{2G_s h_1}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \varphi_3 &= \frac{Y_M}{2G_s h_1}, \end{aligned}$$

gdzie $\eta = Edh_1/G_s(1+\nu_1)$.

Po sprowadzeniu powyższego układu równań do równań na funkcje przemieszczeń otrzymujemy:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \nabla^2 \right) \Gamma_1 &= \frac{p}{D_t}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \nabla^2 \right) \Gamma_2 &= -\frac{X_M}{D_t}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \nabla^2 \right) \Gamma_3 &= -\frac{Y_M}{D_t}. \end{aligned}$$

Z porównania wyprowadzonych związków dla płyt Reissnera z podanymi powyżej dla płyt trójwarstwowych widać, że te ostatnie łatwo otrzymać z pierwszych zastępując

$$(2.12) \quad \frac{h^2}{5} \rightarrow \eta, \quad D \rightarrow D_t, \quad F_i \rightarrow \Gamma_i, \quad \omega_i \rightarrow \varphi_i$$

oraz pomijając bezpośredni wpływ obciążenia p na momenty zginające, a także wpływ $\partial p / \partial x$ i $\partial p / \partial y$ w równaniach (2.3) i (2.4).

Na podstawie tych krótkich rozważań widzimy, że płyty trójwarstwowe, spełniające założenia podane w punkcie pierwszym, są szczególnym przypadkiem płyt reissnerowskich. Dlatego w dalszym ciągu pracy będziemy zajmowali się tymi ostatnimi podając ewentualnie rozwiązania dla płyt trójwarstwowych bez dodatkowego ich uzasadnienia.

Omówienie warunków brzegowych zagadnienia zostanie przeprowadzone w punkcie czwartym.

3. Twierdzenie E. Bettiego o wzajemności prac

W punkcie niniejszym zajmiemy się wyprowadzeniem twierdzenia E. Bettiego dla płyt reissnerowskich. Omawiane twierdzenie nie jest znane w literaturze przedmiotu. Twierdzenie to leży u podstaw znanej metody punktów osobliwych («Singularitätenmethode»), którą zresztą do teorii sprężystości pierwszy wprowadził E. BETTI [1]. Zastosowanie tego twierdzenia w teorii sprężystości i mechanice budowli jest niezwykle szerokie. Pozwala ono na skonstruowanie szeregu rozwiązań problemów brzegowych teorii sprężystości. W pracy niniejszej wykorzystamy to twierdzenie do skonstruowania rozwiązania dla dość ogólnego problemu brzegowego płyt Reissnera a także płyt trójwarstwowych.

Twierdzenie E. Bettiego dla omawianych płyt spełnia podobną rolę co znany wzór Greena

$$(3.1) \quad \int_D \int \int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = \int_S \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

w teorii funkcji harmoniczych, czy też wzór [22]

$$(3.2) \quad \begin{aligned} G \int_D \int \int \left[\mathbf{u} \cdot \left(\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \right) \right] d\tau = \\ = - \int_S \int [\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}(v) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(u)] ds \end{aligned}$$

w teorii równań przemieszczeniowych teorii sprężystości

$$(3.3) \quad \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{\mathbf{X}}{G} = 0.$$

Twierdzenie E. Bettiego wyprowadzimy w sposób podobny, jak to uczynili S. BERGMAN i M. SCHIFFER [22] dla otrzymania wzoru (3.2).

Wprowadźmy do rozważań wyrażenie na energię sprężystą nagromadzoną w elemencie zginanej płyty

$$(3.4) \quad dV = \frac{1}{2} \left[m_x \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + m_y \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + m_{xy} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right) + q_x \left(\omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right) + q_y \left(\omega_3 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Jeżeli wykorzystamy związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami spowodowanymi ω_i (2.1), to otrzymamy na energię sprężystą, nagromadzoną w płycie rozpatrywanej wyrażenie następujące:

$$(3.5) \quad V = \frac{D}{2} \iint_B \left\{ \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right)^2 + (1-\nu) \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right)^2 + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \left[\omega_2^2 + 2\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 + \omega_3^2 + 2\omega_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \right\} dx dy.$$

Wprowadźmy teraz do dalszych rozważań pewien funkcjonal zależny od dwóch grup funkcji ω_i i ψ_i

$$(3.6) \quad e\{\omega, \psi\} = \frac{D}{2} \iint_B \left\{ \frac{5(1-\nu)}{h^2} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \omega_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \psi_2 + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_2 \psi_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \psi_3 + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_3 \psi_3 + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right\} dx dy$$

Związek między podanym wyżej funkcjonalem i pierwszą wariacją energii sprężystej zostanie omówiony w punkcie czwartym, na razie zauważymy, że funkcjonal ten związany jest z wyrażeniem na energię sprężystą (3.5) następująco:

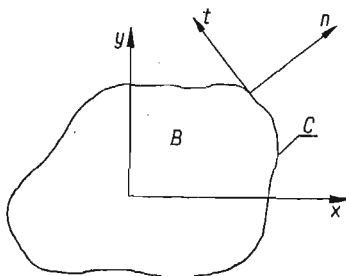
$$(3.7) \quad V = e\{\omega, \omega\}.$$

Załóżmy, że funkcje ω_i, ψ_i są ciągłe wraz z pochodnymi do drugiego rzędu w pewnym płaskim obszarze B oraz ciągłe wraz z pochodnymi pierwszego rzędu na brzegu C (rys. 4). Natomiast o funkcji $p(x, y)$ załóżmy, że jest ona ciągła wraz z pochodną pierwszego rzędu w B i ciągła na brzegu C .

Zastosujemy teraz do wyrażenia (3.6) przekształcenie Greena. Przykładowo zastosujemy to przekształcenie do całek:

$$(3.8) \quad \int_B \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx dy = - \int_B \int \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \psi_1 dx dy + \int_C \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \psi_1 \cos(n, x) ds,$$

$$\int_B \int p \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx dy = - \int_B \int \frac{\partial p}{\partial x} \psi_2 dx dy + \int_C p \psi_2 \cos(n, x) ds.$$



Rys. 4

Jak widać z powyższego, dążymy do takiego przekształcenia funkcjonułu (3.6), żeby uzyskać w wyrażeniach podcałkowych funkcje ψ_i bez występowania ich pochodnych. Okazuje się to możliwe do przeprowadzenia dla całego wyrażenia (3.6). Wten sposób otrzymujemy

$$(3.9) \quad e\{\omega, \psi\} = -\frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_B \int \left(\nabla^2 \omega_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \psi_1 dx dy +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_B \int \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega_2 - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \psi_2 dx dy + \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_B \int \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \omega_3 - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} \right\} \psi_3 dx dy +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_C \left[\left(\omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left(\omega_3 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) \cos(n, y) \right] \psi_1 ds +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_C \left[\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \cos(n, x) + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) \cos(n, y) \right] \psi_2 ds +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_C \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] \psi_3 ds +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_C [p \psi_2 \cos(n, x) + p \psi_3 \cos(n, y)] ds.$$

Przedstawimy teraz funkcje ω_2, ω_3 oraz ψ_2, ψ_3 na brzegu C przez funkcje ω_n, ω_t i ψ_n, ψ_t z pomocą następujących związków:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \omega_2 &= \omega_n \cos(n, x) - \omega_t \cos(n, y), \\ \omega_3 &= \omega_n \cos(n, y) + \omega_t \cos(n, x). \end{aligned}$$

Interpretacja fizyczna tego przedstawienia stanie się jasna w dalszym ciągu wywodu zasady (twierdzenia) E. Bettiego.

Jeżeli ponadto weźmiemy pod uwagę, że (rys. 4)

$$(3.11) \quad \begin{aligned} m_n &= m_x \cos^2(n, x) + m_y \cos^2(n, y) + 2m_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y), \\ m_{nt} &= (m_y - m_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + m_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)], \\ q_n &= q_x \cos(n, x) + q_y \cos(n, y), \end{aligned}$$

to po wykonaniu prostych działań otrzymamy na funkcjonał $e\{\omega, \psi\}$ wyrażenie następujące:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} e\{\omega, \psi\} &= -\frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \iint_B \left(\nabla^2 \omega_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \psi_1 dx dy + \\ &+ \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \iint_B \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega_2 - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \psi_2 dx dy + \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \iint_B \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \omega_3 - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} \right\} \psi_3 dx dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_C [q_n(\omega) \psi_1 + m_n(\omega) \psi_n + m_{nt}(\omega) \psi_t] ds. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz zauważyć na podstawie wyrażenia (3.6), że funkcjonał $e\{\omega, \psi\}$ nie ulega zmianie przy przestawieniu funkcji ω_i z funkcjami ψ_i , a z równości $e\{\omega, \psi\} = e\{\psi, \omega\}$ przy uwzględnieniu (3.12) otrzymamy wzór dla płyt Reissnera analogiczny do tożsamości Rayleigha-Greena dla izotropowych płyt cienkich [22]

$$(3.13) \quad D \iint_B [(\nabla^2 \nabla^2 u)v - u \nabla^2 \nabla^2 v] dx dy = \int_C \left[M_n(u) \frac{\partial v}{\partial n} - V_n(u)v - M_n(v) \frac{\partial u}{\partial n} + V_n(v)u \right] ds.$$

Tożsamości, o której mówiliśmy wyżej dla płyt Reissnera, nie przedstawimy, bowiem widoczna jest ona w sposób dostatecznie wyraźny z równania (3.12) przy $e\{\omega, \psi\} = e\{\psi, \omega\}$.

Wielkości m_n, m_{nt}, q_n oraz $m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y$, określone związkami (3.11), które należy rozumieć zgodnie ze wzorami (2.1), przedstawiają odpowiednie wielkości sił wewnętrznych związanych z polem przemieszczeń $\omega_i (i = 1, 2, 3)$. Ponieważ na razie nie zakładaliśmy, że pole to spełnia równania równowagi, więc interpretacja tych związków jako sił wewnętrznych płyty Reissnera jest niemożliwa. Związki te należy jedynie rozumieć jako pewne określone funkcje pola ω_i .

Przejdziemy teraz do wyznaczenia wyrażenia zasady o wzajemności prac. Założymy, że na płytę działa obciążenie $p(\omega)$ oraz momenty $X_M(\omega)$, $Y_M(\omega)$. Towarzyszyć temu obciążeniu będą przemieszczenia sprowadzone $\omega_i (i = 1, 2, 3)$, które teraz oczywiście spełniają równania równowagi (2.3). Stan ten określimy jako stan $S(\omega)$. Następnie oddzielnie analogicznie określimy stan $S(\psi)$, związany z obciążeniem $p(\psi)$, $X_M(\psi)$, $Y_M(\psi)$ i przemieszczeniami sprowadzonymi $\psi_i (i = 1, 2, 3)$ spełniającymi także równania równowagi (2.3).

Wykorzystując zależności (3.12) i tożsamość $e\{\omega, \psi\} = e\{\psi, \omega\}$ otrzymujemy:

$$(3.14) \quad \iint_B [p(\omega)\psi_1 + X_M(\omega)\psi_2 + Y_M(\omega)\psi_3] dx dy + \int_C [q_n(\omega)\psi_1 + m_n(\omega)\psi_n + m_{nt}(\omega)\psi_t] ds = \\ = \iint_B [p(\psi)\omega_1 + X_M(\psi)\omega_2 + Y_M(\psi)\omega_3] dx dy + \int_C [q_n(\psi)\omega_1 + m_n(\psi)\omega_n + m_{nt}(\psi)\omega_t] ds,$$

co przedstawia poszukiwaną przez nas zasadę o wzajemności prac E. Bettiego dla płyt Reissnera.

Jasne także jest, że wielkości wprowadzone przez nas zależnościami (3.10) i (3.11) przedstawiają kolejno (rys. 4):

- ω_n sprowadzony kąt obrotu względem stycznej do krzywej brzegu C ,
- ω_t sprowadzony kąt obrotu względem normalnej do krzywej brzegu C ,
- m_n, m_{nt} odpowiednie momenty względem osi n i t na brzegu C ,
- q_n siłę poprzeczną na brzegu C .

Na zakończenie tego punktu omówimy jeszcze zasadę E. Bettiego o wzajemności prac dla płyt trójwarstwowych. Wyprowadzenie tej zasady podał autor w pracy [23]. Tok wywodu jest analogiczny do podanego powyżej dla płyt Reissnera. Pewne uproszczenie daje fakt, że w teorii płyt trójwarstwowych momenty zginające nie są bezpośrednio związane z obciążeniem normalnym p [por. (2.9) i (2.1.)].

Poniżej podamy jedynie wyrażenie analogiczne do (3.12), które wystarcza do określenia zasady E. Bettiego dla płyt trójwarstwowych po uwzględnieniu wywodu tej zasady dla płyt Reissnera:

$$(3.15) \quad e_i\{\varphi, \Phi\} = -G_s h_1 \iint_B \left(\nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) \Phi_1 dx dy + \\ + G_s h_1 \iint_B \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi_2 - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} \right] \Phi_2 dx dy + \\ + G_s h_1 \iint_B \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_3 \right] \Phi_3 dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_C [q_n(\varphi)\Phi_1 + m_n(\varphi)\Phi_n + m_{nt}(\varphi)\Phi_t] ds.$$

Samo twierdzenie o wzajemności prac dla płyt trójwarstwowych przedstawia w sposób oczywisty wyrażenie (3.14).

4. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla płyt Reissnera wyprowadzimy w oparciu o znane z rachunku wariacyjnego pojęcie naturalnych warunków granicznych. Dlatego zanim przejdziemy do ich omówienia, zwrócimy uwagę na ścisły związek między wprowadzonym w punkcie

poprzednim funkcjonalem $e\{\omega, \psi\}$ i pierwszą wariacją energii sprężystej nagromadzonej w płycie.

Rozpatrzmy płytę poddaną działaniu obciążenia p , X_M i Y_M . Energię sprężystą nagromadzoną w płycie przedstawia wyrażenie (3.5). Obliczając pierwszą wariację energii sprężystej otrzymamy

$$(4.1) \quad \delta V = D \iint_B \left\{ \frac{5(1-\nu)}{h^2} \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial x} + \omega_3 \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial y} \right] + \right. \\ + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \delta \omega_2 + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_2 \delta \omega_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial y} + \\ + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial y} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \delta \omega_3 + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial x} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_3 \delta \omega_3 + \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial y} \right\} dx dy.$$

Porównując wyrażenie powyższe z funkcjonalem (3.6) widzimy, że

$$(4.2) \quad \delta V = 2e\{\omega, \delta \omega\}.$$

Ponadto na założonych wariacjach przemieszczeń $\delta \omega_i (i = 1, 2, 3)$ otrzymamy pracę obciążenia p , X_M i Y_M

$$(4.3) \quad \delta L = p \delta \omega_1 + X_M \delta \omega_2 + Y_M \delta \omega_3.$$

Na podstawie powyższego i zależności z punktu poprzedniego otrzymamy, że podane w punkcie drugim niniejszej pracy równania równowagi (2.3) przedstawiają układ równań Eulera zagadnienia wariacyjnego znalezienia minimum całkowitej energii płyty:

$$(4.4) \quad \delta U = \delta V - \delta L = 0.$$

Warunek powyższy wymaga zerowania się jeszcze następującego wyrażenia:

$$(4.5) \quad \int_C (q_n \delta \omega_1 + m_n \delta \omega_n + m_{nt} \delta \omega_t) ds,$$

które wynika z zależności (3.12) przy uwzględnieniu (4.2). Otrzymujemy stąd naturalne warunki graniczne, które pozwalają na określenie następujących jednorodnych warunków brzegowych dla płyt Reissnera:

$$(4.6) \quad \begin{array}{ll} 1. q_n = m_n = m_{nt} = 0, & 5. \omega_1 = \omega_n = m_{nt} = 0, \\ 2. q_n = m_n = \omega_t = 0, & 6. \omega_1 = \omega_n = \omega_t = 0, \\ 3. \omega_1 = m_n = m_{nt} = 0, & 7. q_n = \omega_n = m_{nt} = 0, \\ 4. \omega_1 = m_n = \omega_t = 0, & 8. q_n = \omega_n = \omega_t = 0. \end{array}$$

Przez analogię do płyt cienkich, przyjmując za decydujące warunki umieszczone w pierwszych dwóch kolumnach (4.6), można by określić:

warunki 1,2 jako «krawędź swobodną»,
warunki 3,4 jako «swobodne podparcie»,
warunki 5,6 jako «zamocowanie».

Jednak ze względu na fakt występowania dwóch typów warunków brzegowych w każdej z wyżej wymienionych grup określenia powyższe nie mogą być ściśle. Dlatego podając warunki brzegowe dla płyt reissnerowskich nie można posługiwać się wyżej podanymi określeniami przeniesionymi z płyt cienkich. Należy natomiast podać ściśle warunki według (4.6). Wydaje się możliwe natomiast używanie przykładowo takich określeń jak «krawędź wolnopodparta z przeponą» zamiast warunku typu 4.

Powyżej nie podaliśmy określenia («nazwy») warunków brzegowych typu 7 i 8 (4.6) ze względu na to, że takiego prostego określenia nie mają też analogiczne warunki brzegowe dla płyt cienkich

$$(4.7) \quad V_n = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

gdzie V_n jest sprowadzoną siłą poprzeczną.

Wnioski punktu niniejszego bez dodatkowych wyprowadzeń rozszerzamy na płyty trójwarstwowe, w których także wystąpi osiem typów warunków brzegowych identycznych z podanymi wyżej (4.6).

5. Zagadnienia podstawowe

Przedstawimy teraz zagadnienie, którego rozwiązaniem zajmiemy się w dalszym ciągu pracy. Mianowicie będziemy dążyć do wyznaczenia przemieszczeń sprowadzonych ω_i ($i = 1, 2, 3$) w obszarze B za pomocą wielkości brzegowych (wielkości ω_i i ich pochodnych na brzegu C). Zagadnienie omówimy dla płyt Reissnera, co łatwo można rozszerzyć na płyty trójwarstwowe.

Wracając do naszego problemu stwierdzamy, że celem naszym będzie znalezienie wzorów analogicznych do następujących znanych zależności, wynikających ze wzorów Greena, które są podstawą dyskusji nad funkcjami harmonicznymi:

$$(5.1) \quad u(Q_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS$$

dla przestrzeni trójwymiarowej czy

$$(5.2) \quad u(Q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(u \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \frac{\partial u}{\partial n} \ln r \right) ds$$

dla przestrzeni dwuwymiarowej.

Analogiczne zresztą wzory są znane także dla równań teorii płyt cienkich [22],

$$(5.3) \quad w(Q_0) = \frac{1}{8\pi} \int_C \left\{ -M_n \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n} + V_n S(P, Q) + M_n [S(P, Q)] \frac{\partial w}{\partial n} - V_n [S(P, Q)] w \right\} ds,$$

gdzie $S(P, Q) = r^2 \ln r$ (por. też [24]).

We wszystkich tych wzorach występują funkcje osobliwe, jak $u = 1/r$ we wzorze (5.1), $u = \ln r$ we wzorze (5.2) czy $S(P, Q) = r^2 \ln r$ we wzorze (5.3). Funkcje te nazywamy rozwiązaniami osobliwymi danego zagadnienia czy też osobliwościami podstawowymi

[25, 26 i 27]. Spełniają one równania danego zagadnienia w całym rozpatrywanym obszarze z wyjątkiem jednego punktu, w którym wykazują osobliwość decydującą o słuszności wzorów podanych powyżej.

Interpretując pod względem fizycznym rozwiązanie osobliwe teorii sprężystości wiemy, że przedstawiają one rozwiązanie dla danego obszaru przy pewnych obciążeniach skupionych. Przykładowo rozwiązanie $w = r^2 \ln r$ w teorii płyt cienkich jest rozwiązaniem płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną.

Przechodząc do teorii płyt Reissnera, w celu znalezienia wzorów analogicznych do omówionych powyżej, będziemy musieli znaleźć rozwiązania takich płyt przy obciążeniu skupionym oraz udowodnić możliwość wykorzystania tych rozwiązań do określenia przemieszczeń spowodowanych za pomocą wartości brzegowych.

Powołajmy się teraz na wyprowadzoną w punkcie trzecim niniejszej pracy zasadę o wzajemności prac. Spójrzmy na wzór (3.14) wyrażający tę zasadę, biorąc pod uwagę pojęcie zasady prac wirtualnych. Określmy stan $S(\omega)$ jako stan obciążeń rzeczywistych, a stan $S(\psi)$ jako stan obciążeń wirtualnych. Założymy dodatkowo, że stan rzeczywisty $S(\omega)$ związany jest jedynie z obciążeniami brzegowymi. Wtedy rozwiązania $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ będą w obszarze B funkcjami regularnymi. Oznaczając więc zgodnie z tym co powiedziano wyżej $\psi_i = \bar{\omega}_i$ otrzymamy

$$(5.4) \quad \iint_B (\bar{p}\omega_1 + \bar{X}_M\omega_2 + \bar{Y}_M\omega_3) dx dy = \int_C (q_n\bar{\omega}_1 + m_n\bar{\omega}_n + m_m\bar{\omega}_t - \bar{q}_n\omega_1 - \bar{m}_n\omega_n - \bar{m}_m\omega_t) ds.$$

Jeżeli będziemy chcieli znaleźć wielkość przemieszczenia pionowego $\omega_1(Q_0)$, to należy przyjąć $\bar{p} = \delta(Q_0)$, $\bar{X}_M = \bar{Y}_M = 0$. Analogicznie, jeżeli będziemy szukać $\omega_2(Q_0)$, to przyjmujemy $\bar{X}_M = \delta(Q_0)$, $\bar{p} = \bar{Y}_M = 0$. Podobnie postąpimy szukając $\omega_3(Q_0)$.

Przy tak określonym obciążeniu, wykorzystując znane własności funkcji Diraca $\delta(Q_0)$, otrzymamy kolejno po lewej stronie równości (5.4):

$$(5.5) \quad \iint_B \delta(Q_0)\omega_1 dx dy = \omega_1(Q_0).$$

Problemem więc jest znalezienie rozwiązań płyty dla obciążeń skupionych $p = \delta(Q_0)$, $X_M = \delta(Q_0)$, $Y_M = \delta(Q_0)$. Rozwiązania takie wstawione po prawej stronie równości (5.4) pozwolą kolejno na obliczenie $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ za pomocą wielkości brzegowych.

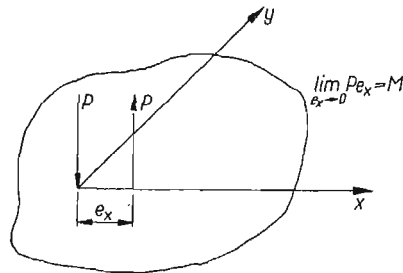
Rozumowanie powyższe pokrywa się z wielokrotnie stosowanym w mechanice budowli. Mianowicie, jeżeli chcemy znaleźć jakieś przemieszczenie danego ustroju, to aby skorzystać z równań zasady prac wirtualnych, powinniśmy znać rozwiązanie dla tego ustroju przy działaniu obciążenia skupionego w kierunku poszukiwanego przemieszczenia.

Cały powyższy wywód nie ma potrzebnej ścisłości, daje jednak wskazówkę, na jakiej drodze należy szukać danego rozwiązania osobliwego. Dlatego po znalezieniu w punkcie następnym zgodnie z podanymi powyżej sugestiami rozwiązań osobliwych, w punkcie siódmym wykazemy prawidłowość uzyskanych wyników przez udowodnienie, że wykazują one odpowiednie osobliwości do zastosowania ich do wzorów wiążących wielkości ω_i z wielkościami brzegowymi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewną różnicę w przypadku obciążenia momentem skupionym w teorii płyt Reissnera w stosunku do teorii płyt cienkich. Mianowicie jeżeli

wprowadzimy analogicznie jak w teorii płyt cienkich definicję momentu skupionego jako granicę $M_x = \lim_{e_x \rightarrow 0} P e_x$ (rys. 5), to w wyniku otrzymamy moment skupiony pracujący na przemieszczeniu $\partial\omega_1/\partial x$ (rys. 6).

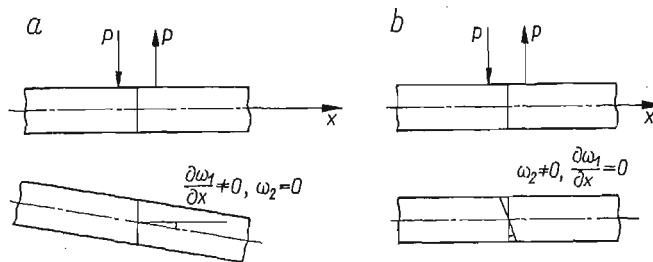
W przypadku pokazanym na rys. 6a praca $L = M \frac{\partial\omega_1}{\partial x} \neq 0$, a w przypadku pokazanym na rys. 6b praca $L = M \frac{\partial\omega_1}{\partial x} = 0$. Jak można zorientować się z powyższego, rozwiązanie zagadnienia płyty obciążonej tak zdefiniowanym momentem, użyte po prawej



Rys. 5

stronie równości (5.4), doprowadzi do wyznaczenia odkształcenia $\partial\omega_1/\partial x$. To oczywiście nie wprowadza nowości w stosunku do obliczenia ugięcia ω_1 , ponieważ po zróżniczkowaniu tego ostatniego z łatwością otrzymamy $\partial\omega_1/\partial x$. Natomiast nadal nie będziemy znali wielkości ω_2 .

Widzimy więc, że interesować nas będzie w pierwszym rzędzie obciążenie momentem skupionym zdefiniowanym w oparciu o obciążenie $X_M \rightarrow \delta(Q_0)$ czy $Y_M \rightarrow \delta(Q_0)$, a nie



Rys. 6

w oparciu o parę sił pionowych. W dalszym ciągu pracy obciążenie $X_M = M\delta(Q_0)$ i $Y_M = M\delta(Q_0)$ będziemy nazywali momentami skupionymi, natomiast obciążenie zdefiniowane jako $\lim_{e \rightarrow 0} P e$ momentem skupionym parą sił pionowych.

Powyższe rozważania nad definicją momentu skupionego są ważne także dla płyt trójwarstwowych. Poza tym moment skupiony $X_M = M\delta(Q_0)$ czy $Y_M = M\delta(Q_0)$ ma w teorii tych płyt prostą interpretację fizyczną jako para sił skupionych, przyłożonych poziomo w warstwach skrajnych.

6. Rozwiązanie podstawowe

Zgodnie z sugestiami podanymi w punkcie poprzednim przystąpimy teraz do rozwiązania zagadnienia nieograniczonej płyty Reissnera obciążonej kolejno siłą skupioną, momentem skupionym pary sił pionowych oraz momentem skupionym.

6.1. Obciążenie siłą skupioną. Rozwiązanie wyprowadzimy w oparciu o układ równań (2.4). Przyjmiemy $X_M = Y_M = 0$, następnie wykonamy podwójną nieskończoną transformację Fouriera [28]:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} N^*(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi, \zeta) e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\xi d\zeta, \\ N(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \end{aligned}$$

układu równań (2.4).

Po wykonaniu działań i wykorzystaniu zależności (2.5) i (6.1) otrzymamy poszukiwane przemieszczenia w postaci następującej:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \omega_i &= \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}, \\ \omega_1^{(1)} &= \frac{1}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \frac{h^2}{5(1-\nu)}(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_2^{(1)} &= \frac{i}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_3^{(1)} &= \frac{i}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_1^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_2^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_3^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Powyżej przyjęto rozłożenie funkcji ω_i na dwie grupy funkcji, z których pierwsza (z indeksem 1) oznacza wpływ funkcji F_1 , a druga (z indeksem 2) wpływ funkcji przemieszczeń F_2 i F_3 . Cel tego rozłożenia znajdzie uzasadnienie poniżej, gdzie przedyskutujemy oddzielnie poszczególne składniki rozwiązania (6.2).

Przejdziemy teraz do obciążenia siłą skupioną P . Przyjmiemy więc, że $p(x, y) = P\delta(x)\delta(y)$ i otrzymamy stąd $p^*(\alpha, \beta) = P/2\pi$. Wstawiając tak określoną transformatę obciążenia do zależności (6.2) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie (funkcje ω_i) w postaci całkowej.

Aby wyznaczyć poszukiwane przemieszczenia w postaci jawnej musimy umieć obliczyć następujące całki:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} R_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{(a^2+\beta^2)^2} da d\beta, & R_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iae^{-i(ax+\beta y)}}{(a^2+\beta^2)^2} da d\beta, \\ R_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{a^2+\beta^2} da d\beta, & R_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iae^{-i(ax+\beta y)}}{a^2+\beta^2} da d\beta. \end{aligned}$$

Całki powyższe nie istnieją jako całki niewłaściwe, nie możemy im także przypisać wartości głównej według Cauchy'ego. Okazuje się jednak, że można przypisać im pewną wartość. Mianowicie można wydzielić z nich tzw. «część skończoną». (p.f.—the finite part).

Określenie to znane jest w literaturze i pierwszy raz pojawiło się dzięki J. HADAMARDOWI [29]. W polskiej literaturze korzystał z tego pojęcia W. NOWACKI [17] i H. ZORSKI [30].

Przypomnimy tu definicję, jakiej użył NOWACKI, który część skończoną całki rozbieżnej

$$(6.4) \quad \int_a^b f(a) da$$

określa następująco:

Niech $\int_{a+\varepsilon}^b f(a) da$ dla $\varepsilon > 0$ będzie całką zbieżną; zakładając $f(a) = g(a) + h(a)$; $G'(a) = g(a)$ i zbieżność całki $\int_a^b h(a) da$, część skończoną całki rozbieżnej (6.4) definiujemy następująco:

$$(6.5) \quad \text{p.f.} \int_a^b f(a) da = G(b) + \int_a^b h(a) da.$$

Okazuje się, że część skończoną całki rozbieżnej można otrzymać przez formalne wielokrotne całkowanie jej przez części. Możliwość uzyskania w ten sposób części skończonej pewnej całki rozbieżnej wykażemy poniżej. Jest to istotne ze względu na fakt, że definicja powyższa (6.5), na której się zresztą oprzemy, nie podaje drogi uzyskania rozłożenia funkcji $f(a)$ na $h(a)$ i $g(a)$.

Zanalizujmy podaną powyżej definicję części skończonej całki rozbieżnej. Zajmiemy się całką rozbieżną w postaci:

$$(6.6) \quad \int_0^b \frac{\varphi(a)}{a^p} da,$$

gdzie $p > 1$ jest całkowite.

Założymy, że funkcja $\varphi(a)$ ma pochodne do rzędu p i jest ograniczona razem ze swoimi pochodnymi w przedziale $\langle 0, b \rangle$. Poza tym założymy, że $\varphi^{(k)}(a) < \frac{A}{a^l}$ przy $a \rightarrow \infty$, $l > 1$.

Zajmiemy się na razie całką zbieżną $\int_{\varepsilon}^b \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha$. Całkując przez części otrzymamy

$$(6.7) \quad \int_{\varepsilon}^b \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha = \frac{1}{1-p} \frac{\varphi(b)}{b^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\varphi'(b)}{b^{p-2}} - \dots \\ - \frac{1}{1-p} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}} + \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - \dots + \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p-1)}(b) \ln b - \\ - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p-1)}(\varepsilon) \ln \varepsilon - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_{\varepsilon}^b \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha d\alpha.$$

Oznaczmy teraz zgodnie z definicją podaną uprzednio

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} = f(\alpha) = g(\alpha) + h(\alpha),$$

$$h(\alpha) = - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha$$

i przejdźmy do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$ biorąc pod uwagę, że zgodnie z (6.5) odrzucamy wartości $G(0)$. Otrzymamy w takim przypadku następujący wzór na obliczenie części skończonej przy $p > 1$:

$$(6.8) \quad \text{f.p.} \int_0^b \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha = \frac{1}{1-p} \frac{\varphi(b)}{b^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\varphi'(b)}{b^{p-2}} + \dots + \\ + \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p-1)}(b) \ln b - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_0^b \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha d\alpha.$$

Całka występująca po prawej stronie powyższego wyrażenia jest zbieżna na mocy uczynionych wyżej założeń dotyczących funkcji $\varphi(\alpha)$.

Jeżeli będziemy stosowali wyżej podany wzór na obliczenie części skończonej całki (6.6) w przypadku $b \rightarrow \infty$, to otrzymamy dla $p > 1$:

$$(6.9) \quad \text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha = - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_0^{\infty} \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha d\alpha.$$

Całka występująca po prawej stronie wyrażenia (6.9) jest całką zbieżną, ponieważ założyliśmy, że $\varphi^{(k)}(\alpha) < A/\alpha^l$ przy $\alpha \rightarrow \infty$, $l > 1$.

Łatwo zauważyć, że zgodnie z (6.5) część skończona całki rozbieżnej zdefiniowana jest z dokładnością do $H(\alpha)|_{\alpha=0} < M$. Niemniej wyniki uzyskane za pomocą tej definicji są prawidłowe, co udowodnimy w p. 7 niniejszej pracy. Wytłumaczyć to można faktem, że dodatkowe ewentualne człony rozwiązania typu $H(\alpha)$ są częściami regularnymi naszego rozwiązania. Na powyższy fakt pewnych niedomagań definicji części skończonej zwrócić już uwagę J. HADAMARD [29].

Zauważymy, że jeżeli chcemy obliczyć część skończoną całki

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a} da,$$

to całkując formalnie przez części otrzymujemy [por. (6.8)]

$$\text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a} da = - \int_0^{\infty} \varphi'(a) \ln a da.$$

Przykładowo otrzymamy:

$$\text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta} d\beta = z \int_0^{\infty} e^{-\beta z} \ln \beta d\beta = -(C + \ln z), \quad \text{re } z > 0;$$

C jest stałą Eulera, co pokrywa się z dokładnością do stałej C z częścią skończoną otrzymaną przez ZORSKIEGO [30].

Przejdźmy teraz do problemu całek R_1, R_2, R_3, R_4 (6.3). Poniżej, wykorzystując poprzednio omówione pojęcie części skończonej całki rozbieżnej, obliczymy przykładowo całkę R_1 :

$$(6.10) \quad R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta y} d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha.$$

Po wzięciu pod uwagę [31], że

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha = \frac{\pi}{4|\beta^3|} (1 + x|\beta|) e^{-x|\beta|},$$

otrzymamy:

$$(6.11) \quad R_1 = \pi \operatorname{re} \int_0^{\infty} \frac{1 + x\beta}{\beta^3} e^{-\beta z} d\beta, \quad z = x + iy.$$

Skorzystamy teraz z zależności (6.9) i otrzymamy:

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta^3} d\beta &= -\frac{1}{2} z^2 (C + \ln z), \\ \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta^2} d\beta &= z(C + \ln z), \end{aligned} \quad \text{re } z > 0,$$

gdzie C jest stałą Eulera. Stąd ostatecznie:

$$\text{p.f.} R_1 = \pi \frac{x^2 + y^2}{2} (C + \ln |z|).$$

Pozostałe całki (6.3) otrzymujemy wykorzystując zależności:

$$R_2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) R_1, \quad R_3 = - \frac{\partial R_1}{\partial x}, \quad R_4 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) R_3 = - \frac{\partial R_2}{\partial x}.$$

Stąd:

$$(6.13) \quad \begin{aligned} R_1 &= \pi \frac{x^2+y^2}{2} (C + \ln \sqrt{x^2+y^2}), & R_2 &= -2\pi(\ln \sqrt{x^2+y^2} + 1 + C), \\ R_3 &= -\pi x \ln \sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2} x(1+2C), & R_4 &= 2\pi \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

W zależnościach powyższych i w dalszym ciągu pracy całki należy rozumieć w sensie «części skończonej» pomimo nie zaznaczenia tego symbolem p.f. Oczywiście całki te jak wspomniano dają rozwiązanie naszego zagadnienia z dokładnością do części regularnej.

Ostatecznie, wstawiając otrzymane powyżej wartości całek do zależności (6.2) przy $p^* = P/2\pi$, otrzymujemy rozwiązanie problemu:

$$(6.14.1) \quad \omega_1^{(1)} = \frac{P}{16\pi D} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) - \frac{Ph^2}{20(1-\nu)\pi D} [\ln(x^2+y^2)+2],$$

$$\omega_2^{(1)} = -\frac{P}{8\pi D} x [\ln(x^2+y^2)+1], \quad \omega_3^{(1)} = -\frac{P}{8\pi D} y [\ln(x^2+y^2)+1];$$

$$(6.14.2) \quad \omega_1^{(2)} = \frac{3P\nu(1+\nu)}{10\pi Eh} [\ln(x^2+y^2)+2],$$

$$\omega_2^{(2)} = -\frac{3P\nu(1+\nu)}{10\pi Eh} \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \omega_3^{(2)} = -\frac{3P\nu(1+\nu)}{10\pi Eh} \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

W rozwiązaniu powyższym pominięto stałą Eulera C , która nie wpływa na rozwiązanie osobliwe.

Łatwo sprawdzić, że otrzymane powyżej rozwiązanie, będące sumą rozwiązań (6.14.1) i (6.14.2), spełnia układ równań (2.4) przy $X_M = Y_M = 0$ z wyjątkiem punktu $(0, 0)$ oraz warunek równoważenia się sił tnących z siłą P dla obszaru zawierającego wewnątrz punkt $(0, 0)$:

$$(6.15) \quad \int_C q_n ds = P.$$

Ponadto okazuje się, że warunki powyższe spełnia samodzielnie także rozwiązanie (6.14.1), podczas gdy rozwiązanie (6.14.2) daje

$$(6.16) \quad \int_C q_n ds = 0.$$

Powstaje więc pytanie, które z tych rozwiązań jest poszukiwanym rozwiązaniem przy działaniu siły skupionej. Mianowicie

$$\omega_i = \omega_i^{(1)} \quad \text{czy} \quad \omega_i = \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Warto tu wspomnieć prace E. STERNBERGA i R. A. EUBANKSA [32,33], którzy zajmowali się problemem siły skupionej w teorii sprężystości i udowodnili, że jeżeli zażądać od rozwiązania od siły skupionej:

- a) spełnienia równań zagadnienia,
- b) spełnienia warunków brzegowych,
- c) regularności, z wyjątkiem punktu przyłożenia siły skupionej oraz równowagi siły skupionej z siłami brzegowymi dla dowolnego obszaru otaczającego punkt osobliwy, to takie postawienie problemu jest niejednoznaczne.

Rozwiązanie jednoznaczne otrzymują oni przez żądanie dodatkowej cechy, jaką ma spełnić. Cechą tą, według wyżej wspomnianych autorów, jest odpowiedni rząd naprężeń w otoczeniu siły skupionej. Zwróćmy uwagę na fakt, że szukamy rozwiązania problemu przy obciążeniu $p(x, y) = \delta(x)\delta(y)P$. W równaniach zagadnienia (2.4) występuje samo obciążenie $p(x, y)$ jak i jego pochodne. Problem polega na tym, czy należy uwzględnić te pochodne, czy nie. Rozstrzygnięcie tego problemu jest trudne. Tradycyjne sformułowanie problemu, tzn. według podanych wyżej punktów a, b, c, nie daje odpowiedzi na powyższe pytanie.

Jak widać z powyższego, nasze pytanie nie może znaleźć odpowiedzi bez dodatkowych rozważań. Rozważania takie przeprowadzimy w dalszym ciągu pracy, a na razie zanalizujemy rozwiązanie (6.14.2) i ustalmy pewne cechy tego rozwiązania na drodze rozumowania natury fizycznej.

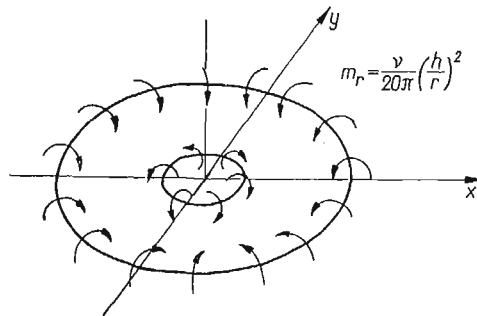
Weźmy pod uwagę związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami sprowadzonymi (2.1). Otrzymamy dla rozwiązania (6.14.2) następujące wyrażenia na siły wewnętrzne ($P = 1$):

$$(6.17) \quad \begin{aligned} m_x^{(2)} &= -\frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & m_{xy}^{(2)} &= \frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ m_y^{(2)} &= -\frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & q_x^{(2)} &= q_y^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

lub przechodząc do współrzędnych biegunowych (rys. 7)

$$(6.18) \quad m_r^{(2)} = \frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{1}{r^2}, \quad m_{r\phi}^{(2)} = 0, \quad q_r^{(2)} = 0.$$

Otrzymaliśmy więc stan, który można zdefiniować jako «centrum zginania» przez analogię do znanego w teorii sprężystości rozwiązania centrum ściskania.



Rys. 7

Jak widać z powyższej analizy, rozwiązanie (6.14.2) $\omega_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3$) przedstawia obciążenie osobliwe samorównoważne, którego dodanie do dowolnego stanu osobliwego, spełniającego żądania typu podanych wyżej dla siły skupionej w teorii sprężystości a, b, c nie zaburza tych ostatnich (str. 74).

Wydaje się, że podane powyżej rozwiązanie jest dobrą ilustracją tez zawartych w wyżej wspomnianej pracy [32].

W przypadku przez nas rozważanym rozwiązanie «centrum zginania» pojawiło się ze względu na specyficzny, przybliżony charakter uwzględniania naprężeń σ_z , prost-

padłych do powierzchni płyty. Naprężenia te pojawiają się w teorii Reissnera tylko na obszarze działania obciążenia p . Ze względu na powyższe rozważania określimy, na razie intuicyjnie, rozwiązania z indeksem 1 (6.14.1) jako rozwiązanie od siły skupionej, a w dalszym ciągu uzasadnimy to założenie.

Natomiast rozwiązanie z indeksem 2 (6.14.2) określimy jako osobliwość dodatkową.

Dla przypadku obciążenia siłą skupioną otrzymujemy, po wykorzystaniu (6.14.1) i (2.1), następujące rozwiązania dla sił wewnętrznych:

$$(6.19) \quad \begin{aligned} m_x &= -\frac{P}{8\pi} \left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1 \right] - \frac{P\nu}{8\pi} \left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + 1 \right], \\ m_y &= -\frac{P}{8\pi} \left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + 1 \right] - \frac{P\nu}{8\pi} \left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1 \right], \\ m_{xy} &= -\frac{P(1-\nu)}{4\pi} \frac{xy}{x^2+y^2}, \\ q_x &= -\frac{P}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}, \quad q_y = -\frac{P}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Analogiczne postępowanie pozwala znaleźć rozwiązania zagadnienia nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej siłą skupioną. Rozwiązania takie uzyskał autor w pracy [21]. Można je otrzymać także ze związków (6.14.1) po wykorzystaniu analogii równań (2.4), (2.11) i (2.12) oraz uwag z punktu drugiego niniejszej pracy. Warto nadmienić, że postępowanie powyżej podane nie doprowadzi w płycie trójwarstwowej do pojawienia się rozwiązania «centrum zginania». Wynika to z faktu, że w płytach tych pomijamy naprężenia normalne σ_z . Rozwiązania dla płyty trójwarstwowej w przypadku obciążenia siłą skupioną mają postać następującą:

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{P}{16\pi D_t} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) - \frac{P}{8\pi G_s h_1} [\ln(x^2+y^2) + 2], \\ \varphi_2 &= -\frac{P}{8\pi D_t} x [\ln(x^2+y^2) + 1], \quad \varphi_3 = -\frac{P}{8\pi D_t} y [\ln(x^2+y^2) + 1]. \end{aligned}$$

Siły wewnętrzne są identyczne z podanymi wyżej dla płyt reissnerowskich (6.19). Ponadto zauważymy, że są one identyczne ze znanymi siłami wewnętrznymi dla płyt izotropowych cienkich. Istotna różnica między rozwiązaniami dla omawianych płyt, a rozwiązaniami znanymi z teorii płyt cienkich tkwi w wyrażeniu na ugięcia ω_1, φ_1 .

6.2. Obciążenie momentem skupionym pary sił pionowych. Obciążenie to definiujemy jako graniczny przypadek działania dwóch sił skupionych przeciwnie skierowanych, gdy odległość ich zmierza do zera. Wobec powyższego rozwiązanie poszukiwane dla przypadku obciążenia płyty nieograniczonej momentem M (rys. 5) otrzymamy przez proste różniczkowanie rozwiązania dla przypadku działania siły skupionej (6.14.1)

$$(6.21) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{M}{8\pi D} x [\ln(x^2+y^2) + 1] - \frac{Mh^2}{10(1-\nu)\pi D} \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \omega_2 &= -\frac{M}{8\pi D} \left[\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1 \right], \\ \omega_3 &= -\frac{M}{8\pi D} \frac{2xy}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Wielkości statyczne w tym przypadku otrzymamy z następujących zależności:

$$(6.22) \quad \begin{aligned} m_x &= -\frac{M}{4\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \left[(1+\nu) + (1-\nu) \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right], & q_x &= -\frac{M}{2\pi} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ m_y &= -\frac{M}{4\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \left[(1+\nu) - (1-\nu) \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right], & q_y &= \frac{M}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ m_{xy} &= -\frac{M(1-\nu)}{4\pi} \frac{y}{(x^2+y^2)^2} (y^2-x^2). \end{aligned}$$

Łatwo przekonać się, że spełnione są warunki równowagi dla wyciętej płyty zawierającej wewnątrz punkt osobliwy (rys. 5):

$$\int_C q_n ds = 0, \quad \int_C \sum_i M_{xi} ds = 0, \quad \int_C \sum_i M_{yi} ds = M.$$

Te same wyniki otrzymać można także i dla płyty trójwarstwowej.

6.3. Obciążenie momentem skupionym. Definicję tego momentu skupionego podano w punkcie piątym niniejszej pracy. Rozwiązania przeprowadzimy dla momentu skupionego $X_M = M\delta(x)\delta(y)$ w oparciu o równania (2.4), które dla przypadku $p = Y_M = 0$ przybierają postać następującą:

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 &= 0, & \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2 &= -\frac{X_M}{D}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wobec tego, że mamy do czynienia z rozwiązaniem płyty nieograniczonej, interesuje nas cała szczególna układu (6.23). Stąd przyjmiemy $F_1 = F_3 = 0$, a poszukiwane przemieszczenia określimy ze związków:

$$(6.24) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2, & \omega_2 &= \left[\nabla^2 \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) \right] F_2, \\ \omega_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) F_2, \end{aligned}$$

które wynikają z zależności (2.5). Przyjmijmy do rozwiązania obciążenie $X_M = M\delta(x)\delta(y)$.

Zastosujmy do równania (6.23.2) i zależności (6.24) podwójną nieskończoną transformację Fouriera (6.1). Otrzymamy w takim przypadku

$$(6.25) \quad F_2^*(\alpha, \beta) = -\frac{M}{2\pi D} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 \left[1 + \frac{h^2}{10} (\alpha^2 + \beta^2) \right]}$$

i transformaty przemieszczeń sprowadzonych

$$\begin{aligned}
 \omega_1^*(a, \beta) &= -\frac{M}{2\pi D} \frac{ia}{(a^2 + \beta^2)^2}, \\
 \omega_2^*(a, \beta) &= \frac{M}{2\pi D} \frac{1}{a^2 + \beta^2} - \frac{M}{2\pi D} \frac{\beta^2}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} + \\
 &\quad + \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\beta^2}{(a^2 + \beta^2) \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]}, \\
 \omega_3^*(a, \beta) &= \frac{M}{2\pi D} \frac{\alpha\beta}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} - \\
 &\quad - \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha\beta}{(a^2 + \beta^2) \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]}.
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

Przemieszczenia wyznaczymy, jeżeli potrafimy obliczyć następujące całki:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta, \quad R_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ia e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta, \\
 R_5 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta, \\
 R_6 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2) \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta, \\
 R_7 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta, \\
 R_8 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2) \left[1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

Część tych całek istnieje jako całki niewłaściwe, mianowicie całki R_6 i R_8 .

Po wykorzystaniu tablic [31] otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (6.28) \quad R_0 &= \frac{10}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i(ax+\beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2) \left[\frac{10}{h^2} + \alpha^2 + \beta^2 \right]} d\alpha d\beta = \\
 &= \frac{40}{h^2} \int_0^{\infty} \beta^2 \cos \beta y d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + \beta^2) \left(\beta^2 + \frac{10}{h^2} + \alpha^2 \right)} d\alpha = 2\pi \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta x} \cos \beta y d\beta - \\
 &- 2\pi \int_0^{\infty} \beta^2 \cos \beta y \frac{\exp \left(-x \sqrt{\beta^2 + \frac{10}{h^2}} \right)}{\sqrt{\beta^2 + \frac{10}{h^2}}} d\beta = 2\pi \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right].
 \end{aligned}$$

Analogicznie obliczając całkę R_8 otrzymamy

$$(6.29) \quad R_8 = 2\pi \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right],$$

gdzie $\gamma = \sqrt{10/h^2}$, $K_\nu(z)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela II rodzaju.

Obliczając pozostałe całki (6.27) wykorzystać musimy pojęcie części skończonej, omówione w 6.1 niniejszego punktu. Wymaga to wykonania szeregu żmudnych przekształceń, przy których uwzględnić trzeba podane poprzednio części skończone całek (6.12).

Poniżej podamy jedynie końcowe wyniki obliczeń:

$$\begin{aligned}
 (6.30) \quad R_2 &= -2\pi (\ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1 + C), \quad R_3 = -\pi x \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\pi}{2} x(1 + 2C), \\
 R_5 &= -\pi \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \pi \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \frac{\pi}{2} (1 + 2C) + \\
 &+ \pi \frac{h^2}{5} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\
 R_7 &= -\pi \frac{xy}{x^2 + y^2} - \pi \frac{h^2}{5} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right].
 \end{aligned}$$

Następnie wykorzystując wzory na transformacje odwrotne oraz pomijając stałą Eulera C otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 (6.31) \quad \omega_1 &= \frac{M}{8\pi D} x [\ln(x^2 + y^2) + 1], \\
 \omega_2 &= -\frac{M}{8\pi D} \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + 1 \right] - \\
 &- \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\
 \omega_3 &= -\frac{M}{4\pi D} \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right].
 \end{aligned}$$

Znając przemieszczenia łatwo wyznaczmy wielkości sił wewnętrznych w płycie nieograniczonej, obciążonej momentem skupionym. Wykorzystując związki (2.1) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 q_x &= \frac{M}{2\pi} \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] + \gamma^2 \sin^2 \varphi K_0(\gamma r) \right\}, \\
 q_y &= \frac{M}{2\pi} \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 2\varphi K_0(\gamma r) \right\}, \\
 m_x &= -\frac{M \cos \varphi}{4\pi} \frac{1}{r} [(1 + \nu) + 2(1 - \nu) \sin^2 \varphi] - \\
 &\quad - \frac{M h^2}{2\pi} \frac{1}{5} \left\{ \frac{\cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)}{r^3} [2 - 2\gamma r K_1(\gamma r) - \gamma^2 r^2 K_0(\gamma r)] + \gamma^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi K_1(\gamma r) \right\}, \\
 (6.32) \quad m_y &= -\frac{M \cos \varphi}{4\pi} \frac{1}{r} [(1 + \nu) - 2(1 - \nu) \sin^2 \varphi] + \\
 &\quad + \frac{M h^2}{2\pi} \frac{1}{5} \left\{ \frac{\cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)}{r^3} [2 - 2\gamma r K_1(\gamma r) - \gamma^2 r^2 K_0(\gamma r)] + \gamma^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi K_1(\gamma r) \right\}, \\
 m_{xy} &= \frac{M(1 - \nu)}{4\pi} \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{r} + \\
 &\quad + \frac{M h^2}{2\pi} \frac{1}{5} \left\{ \frac{\sin \varphi (\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi)}{r^3} [2 - 2\gamma r K_1(\gamma r) - \gamma^2 r^2 K_0(\gamma r)] + \frac{1}{2} \gamma^3 \sin \varphi \cos 2\varphi K_1(\gamma r) \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}.$$

Podamy jeszcze wielkości sprowadzonych przemieszczeń oraz pewne wielkości statyczne dla okręgu o promieniu r . Wielkości te będą potrzebne w dalszym ciągu pracy. Wykorzystując zależności (3.10) i (3.11) oraz to, że dla okręgu $\cos(n, x) = \cos \varphi = x/r$, $\cos(n, y) = \sin \varphi = y/r$ (rys. 8) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= -\omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi = \frac{M \sin \varphi}{8\pi D} (\ln r^2 + 1) + \\
 &\quad + \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1 - \nu)} \sin \varphi \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right], \\
 (6.33) \quad \omega_n &= \omega_2 \cos \varphi + \omega_3 \sin \varphi = -\frac{M \cos \varphi}{8\pi D} (\ln r^2 + 3) + \\
 &\quad + \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1 - \nu)} \cos \varphi \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{r} K_1(\gamma r) \right], \\
 q_n &= \frac{M}{2\pi} \cos \varphi \left[\frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{r} K_1(\gamma r) \right].
 \end{aligned}$$

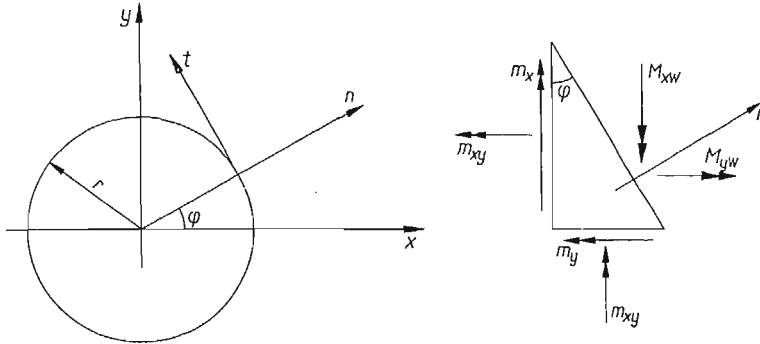
Oznaczając przez M_{xw} i M_{yw} składowe momentów brzegowych:

$$(6.34) \quad M_{xw} = m_x \cos \varphi + m_{xy} \sin \varphi, \quad M_{yw} = m_y \sin \varphi + m_{xy} \cos \varphi$$

otrzymamy na podstawie zależności (6.32)

$$(6.35) \quad M_{xw} = -\frac{M}{4\pi r} (1 + \nu \cos 2\varphi) - \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \cos 2\varphi \left[\frac{2}{r^3} - \frac{2\gamma}{r^2} K_1(\gamma r) - \frac{\gamma^2}{r} K_0(\gamma r) \right] - \frac{M}{2\pi} \gamma \sin^2 \varphi K_1(\gamma r),$$

$$M_{yw} = -\frac{M\nu \sin 2\varphi}{4\pi r} - \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \sin 2\varphi \left[\frac{2}{r^3} - \frac{2\gamma}{r^2} K_1(\gamma r) - \frac{\gamma^2}{r} K_0(\gamma r) - \frac{1}{4} \gamma^3 K_1(\gamma r) \right].$$



Rys. 8

Przejdziemy teraz do sprawdzenia warunku równowagi dla płyty ograniczonej brzegiem C , wyciętej z płyty nieograniczonej w ten sposób, że punkt $(0, 0)$ znajdzie się wewnątrz płyty wyciętej. Nie naruszając ogólności sprawdzimy równowagę dla przypadku, gdy C jest okręgiem o promieniu r .

Sprawdzimy teraz kolejno (rys. 8):

1) warunek równowagi sił pionowych

$$\int_{C_r} q_n ds = \frac{M}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0;$$

2) warunek równowagi momentów względem osi y

$$\begin{aligned} \int_{C_r} (q_n r \cos \varphi - M_{xw}) ds &= \frac{M}{2\pi} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \\ &+ \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{M}{2\pi} r \gamma K_1(\gamma r) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = M; \end{aligned}$$

3) warunek równowagi momentów względem osi x

$$\int_{C_r} (q_n r \sin \varphi - M_{y_w}) ds = \frac{M}{2\pi} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi + \\ + \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) - \frac{\gamma^3}{4} r K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0.$$

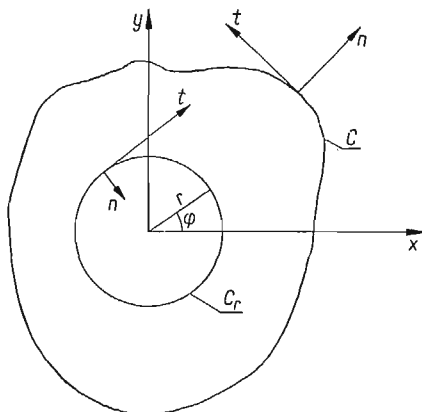
Jak widać z powyższego, rozwiązanie spełnia warunki wymagane tradycyjnie od rozwiązań przy obciążeniu skupionym.

Jak wykazaliśmy poprzednio sformułowanie to nie prowadzi do rozwiązań jednoznacznych.

Udowodnienie, że rozwiązania te przedstawiają poszukiwane przez nas rozwiązania przy obecności obciążeń skupionych przeprowadzimy w punkcie następnym w oparciu o twierdzenie o wzajemności prac.

7. Dowód wzorów podstawowych

Przejdziemy teraz do wykazania, że otrzymane przez nas w punkcie poprzednim rozwiązanie pozwalają na podanie przemieszczeń sprowadzonych danej płyty Reissnera przy danych na jej brzegu wielkościach brzegowych.



Rys. 9

Zajmiemy się płytą o obszarze B ograniczoną krzywą C (rys. 9). Niech na brzegu C tej płyty będą dane następujące wielkości: m_n , m_t , q_n , ω_1 , ω_n , ω_t . Ogólnie biorąc wielkości te nie są niezależne (tylko trzy z nich są dowolne). Pytanie nasze brzmi: jaki jest związek między wielkościami przemieszczeń sprowadzonych ω_i ($i = 1, 2, 3$) w obszarze B , a danymi powyżej wielkościami na brzegu C ?

Odpowiemy na to pytanie obliczając kolejno ω_1 , ω_2 , ω_3 w obszarze B .

7.1. Obliczenie przemieszczenia pionowego ω_1 . Zastosujemy twierdzenie o wzajemności prac do dwóch stanów. Jednym z nich niech będzie stan omówiony powyżej związany z danymi wielkościami brzegowymi. Stan ten symbolicznie oznaczymy jako $S(\omega)$. Jako drugi stan przyjmijmy stan odpowiadający obciążeniu siłą skupioną płyty nieograniczonej (6.14.1), (6.19) $S(\omega_0)$. Rozwiązanie to wykazuje osobliwość w punkcie przyłożenia siły

skupionej $(0, 0)$, nie możemy więc zastosować twierdzenia E. Bettiego dla całego obszaru płyty B . Wytnijmy z niej obszar zawierający wewnątrz punkt $(0,0)$ i ograniczony okręgiem C_r o promieniu r . Zastosujmy teraz twierdzenie o wzajemności prac (3.14) do obszaru ograniczonego brzegiem C i C_r (rys. 9). Uwzględniając to, że w obszarze tym dla obu stanów $p = X_M = Y_M = 0$, otrzymamy:

$$(7.1) \quad \int_{C+C_r} (q_n \omega_{10} + m_n \omega_n + m_{nt} \omega_{t0} - q_{n0} \omega_1 - m_{n0} \omega_n - m_{nt0} \omega_t) ds = 0.$$

Indeksem 0 oznaczono powyżej wielkości związane z obciążeniem siłą skupioną. Zanalizujmy teraz zachowanie się zależności (7.1) przy dążeniu promienia r do zera.

Zanim wykonamy tę analizę, podamy odpowiednie wielkości rozwiązania osobliwego na brzegu C_r :

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \omega_{n0} &= \omega_{20} \cos \varphi + \omega_{30} \sin \varphi = -\frac{Pr}{8\pi D} (\ln r^2 + 1), \\ \omega_{t0} &= -\omega_{20} \sin \varphi + \omega_{30} \cos \varphi = 0, \\ m_{n0} \omega_n + m_{nt0} \omega_t &= (m_{x0} \cos \varphi + m_{xy0} \sin \varphi) \omega_2 + (m_{y0} \sin \varphi + m_{xy0} \cos \varphi) \omega_3 = \\ &= -\frac{P}{8\pi} \cos \varphi [(1+\nu)(\ln r^2 + 1) + 2] \omega_2 - \frac{P}{8\pi} \sin \varphi [(1+\nu)(\ln r^2 + 1) + 2] \omega_3, \\ q_{n0} &= -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Zależności powyższe otrzymano po wykorzystaniu związków (3.10), (3.11), (6.14.1) i (6.19).

Prześledzimy teraz zachowanie się poszczególnych składników wyrażenia (7.1) przy $r \rightarrow 0$. Zauważmy ponadto, że dla brzegu C_r $ds = -rd\varphi$.

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_n \omega_{10} ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{16\pi D} \int_{C_r} q_n r^2 \ln r^2 ds - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Ph^2}{20(1-\nu)\pi D} \int_{C_r} q_n (\ln r^2 + 2) ds = \\ &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{16\pi D} r^3 \ln r^2 \int_0^{2\pi} q_n d\varphi + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Ph^2 r}{20(1-\nu)\pi D} (\ln r^2 + 2) \int_0^{2\pi} q_n d\varphi. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę ciągłość funkcji $q_n(\omega)$ otrzymamy $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_n \omega_{10} ds = 0$.

Analogicznie postępując po uwzględnieniu zależności (7.2) otrzymujemy:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_n \omega_{n0} ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Pr^2}{8\pi D} (\ln r^2 + 1) \int_0^{2\pi} d\varphi = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_{nt} \omega_{t0} ds &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_{n0} \omega_1 ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_1 d\varphi = P\omega_1(0, 0), \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (m_{n0} \omega_n + m_{nt0} \omega_t) ds &= 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc po wykonaniu przejścia granicznego $r \rightarrow 0$ w wyrażeniu (7.1) i po przyjęciu $P = 1$ otrzymujemy wzór podstawowy dla określenia ugięcia $\omega_1(Q_0)$ za pomocą wielkości brzegowych:

$$(7.5) \quad \omega_1(Q_0) = \int_C (q_n \omega_{10} + m_n \omega_{n0} + m_{nt} \omega_{t0} - q_{n0} \omega_1 - m_{n0} \omega_n - m_{nt0} \omega_t) ds.$$

Wykazaliśmy więc, że rozwiązanie (6.14.1) ma wymaganą osobliwość dla wyrażenia wielkości $\omega_1(Q_0)$ w danym obszarze B za pomocą wielkości brzegowych.

Ugięcie w dowolnym punkcie obszaru płyty $Q_0(x, y)$ obliczymy ze związku (7.5), jeżeli dokonamy przesunięcia układu współrzędnych. Wtedy wielkość z indeksem 0 będziemy uważali za funkcje dwóch punktów np.:

$$\omega_{10} = \frac{1}{16\pi D} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \ln [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] - \frac{h^2}{20(1-\nu)\pi D} \{ \ln [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] + 2 \}.$$

Punkt $Q_1(x_1, y_1)$ znajduje się na krzywej C .

Pozostaje jeszcze pytanie, czy jeżeli dodamy do rozwiązania osobliwego przed chwilą diskutowanego rozwiązanie «centrum zginania», wynik ulegnie zmianie i w jaki sposób. Okazuje się, że jeżeli we wzorze (7.1) wstawimy zamiast rozwiązania z indeksem 0 rozwiązanie osobliwe «centrum zginania» (6.14.2), (6.18), to w wyniku przejścia granicznego otrzymamy:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (q_n \omega_{10}^{(2)} + m_n \omega_{n0}^{(2)} + m_{nt} \omega_{t0}^{(2)} - q_{n0}^{(2)} \omega_1 - m_{n0}^{(2)} \omega_n - m_{nt0}^{(2)} \omega_t) ds \rightarrow \infty.$$

Oznacza to, że rozwiązanie «centrum zginania» jest nieprzydatne do zbudowania wzoru (7.5). Porównując wnioski powyższe z zależnościami (5.4) i dalszymi widzimy, że działanie siły skupionej opisuje rozwiązanie (6.14.1).

Dyskusję powyższą warto porównać z przykładem podanym przez E. STERNBERGA i R. A. EUBANKSA [32] dla przypadku centrum ściskania.

7.2. Obliczenie ω_2 . Postępując analogicznie jak poprzednio rozpatrzmy dwa stany obciążeń. Jednym z nich niech będzie stan $S(\omega)$ określony przez wielkości brzegowe. Natomiast jako drugi stan przyjmiemy obciążenie momentem skupionym X_M , przyłożonym w początku układu współrzędnych. Początek układu umieścimy w obszarze B zajętej przez płytę (rys. 9). Stan ten symbolicznie oznaczymy jako $S(\omega_0^M)$. Zastosujmy teraz twierdzenia E. BÉTTIEGO do obszaru ograniczonego brzegiem C i okręgiem współśrodkowym z punktem przyłożenia momentu skupionego. Zagadnienie sprowadza się do zanalizowania wzoru:

$$(7.6) \quad \int_{C+C_r} (q_n \omega_{10}^M + m_n \omega_{n0}^M + m_{nt} \omega_{t0}^M - q_{n0}^M \omega_1 - m_{n0}^M \omega_n - m_{nt0}^M \omega_t) ds = 0$$

przy $r \rightarrow 0$.

Powyżej indeksami 0^M oznaczono wielkości związane z obciążeniem momentem skupionym X_M (6.29).

Musimy więc teraz obliczyć granicę całki (7.6) po krzywej C_r przy $r \rightarrow 0$. Zanim przeprowadzimy to obliczenie, podamy potrzebne do dalszych rozważań związki między zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$. Będzie nas interesowało zachowanie się tych funkcji i ich pewnych kombinacji dla wskaźnika $\nu = 0, 1$ przy $z \rightarrow 0$.

Przedstawimy te funkcje rozkładając je na część regularną i część osobliwą [34]

$$K_0(z) = -I_0(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right),$$

$$K_1(z) = I_1(z) \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{z}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \left[2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k+1} \right] + \frac{1}{z},$$
(7.7)

$$I_0(z) = 1 + \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{2} \right)^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k},$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{z}{2} \right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{z}{2} \right)^5 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)} \left(\frac{z}{2} \right)^{1+2k}.$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności podamy poniżej granice pewnych kombinacji zmodyfikowanych funkcji Bessela przy $z \rightarrow 0$. Wyrażenia te [granice potrzebne będą w dalszym ciągu pracy przy szacowaniu wyżej wspomnianych całek wyrażenia (7.6)] przedstawimy kolejno

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\gamma r} - K_1(\gamma r) \right] = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\gamma r} - K_1(\gamma r) - \gamma r K_0(\gamma r) \right] = 0,$$
(7.8)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\gamma^2 r^2} - \frac{2}{\gamma r} K_1(\gamma r) - K_0(\gamma r) \right] = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r K_1(\gamma r) = \frac{1}{\gamma}.$$

Obliczmy teraz granice poszczególnych składników wyrażenia (7.6) po krzywej C_r przy $r \rightarrow 0$.

Po wzięciu pod uwagę zależności (6.31), (6.33), (7.8) i regularności w obszarze B rozwiązania stanu $S(\omega)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_n \omega_{10}^M ds &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{8\pi D} r^2 (\ln r^2 + 1) \int_0^{2\pi} q_n \cos \varphi d\varphi = 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_n \omega_{n0}^M ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{8\pi D} r (\ln r^2 + 3) \int_0^{2\pi} m_n \cos \varphi d\varphi - \\
 &\quad - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[\frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} m_n \cos \varphi d\varphi = 0, \\
 (7.9) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_{nr} \omega_{n0}^M ds &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{8\pi D} r (\ln r^2 + 1) \int_0^{2\pi} m_{nr} \sin \varphi d\varphi - \\
 &\quad - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[\frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} m_{nr} \sin \varphi d\varphi = 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_{n0}^M \omega_{11} ds &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \omega_1 \cos \varphi d\varphi = 0.
 \end{aligned}$$

Ostatnie dwie całki wyrażenia (7.6) przekształcimy, podobnie zresztą jak w przypadku obliczenia ugięcia v_1 (7.2), następująco:

$$(7.10) \quad \int_{C_r} (m_{n0}^M \omega_n + m_{nr0}^M \omega_r) ds = \int_{C_r} (m_{x0}^M \cos \varphi + m_{xy0}^M \sin \varphi) \omega_2 ds + \int_{C_r} (m_{y0}^M \sin \varphi + m_{xy0}^M \cos \varphi) \omega_3 ds.$$

Wykorzystując teraz zależności (6.34), (6.35) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (m_{x0}^M \cos \varphi + m_{xy0}^M \sin \varphi) \omega_2 ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_2 d\varphi + \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_2 \cos 2\varphi d\varphi + \right. \\
 + \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[\frac{2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right] &\int_0^{2\pi} \omega_2 \cos 2\varphi d\varphi + \gamma r K_1(\gamma r) \int_0^{2\pi} \omega_2 \sin^2 \varphi d\varphi \left. \right\} = M\omega_2(0, 0), \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (m_{y0}^M \sin \varphi + m_{xy0}^M \cos \varphi) \omega_3 ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_3 \sin 2\varphi d\varphi + \right. \\
 + \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[\frac{2}{r^2} - \gamma \frac{2}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) - \gamma^3 \frac{r}{4} K_1(\gamma r) \right] &\int_0^{2\pi} \omega_3 \sin 2\varphi d\varphi \left. \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Wracając teraz do analizy zależności (7.6) możemy stwierdzić, że po wykonaniu przejścia granicznego w tym wyrażeniu $r \rightarrow 0$ i po przyjęciu $M = 1$ otrzymamy:

$$(7.11) \quad \omega_2(Q_0) = \int_C (q_n \omega_{i0}^M + m_n \omega_{n0}^M + m_{ni} \omega_{i0}^M - q_{n0}^M \omega_1 - m_{n0}^M \omega_n - m_{ni0}^M \omega_i) ds.$$

Wielkości z indeksem 0^M przedstawiają rozwiązanie płyty nieograniczonej, obciążonej momentem skupionym $X_m = M\delta(x)\delta(y)$ przy $M = 1$.

Podobnie jak w punkcie poprzednim 7.1, jeżeli dokonamy przesunięcia układu współrzędnych i wielkości z indeksami 0^M będziemy traktowali jako funkcje dwóch punktów $Q_0(x, y)$ i $Q_1(x_1, y_1)$, otrzymamy ze wzoru (7.11) sprowadzony kąt obrotu ω_2 w dowolnym punkcie $Q_0(x, y)$ obszaru B .

Rozszerzenie omówionego zagadnienia na płyty trójwarstwowe jest bardzo proste i nie wymaga dodatkowych wyjaśnień, wystarczy posłużyć się tylko wspomnianą uprzednio analogią między płytami Reissnera i płytami trójwarstwowymi (2.12).

8. Rozwiązanie szczegółowe

Podane w p. 6 rozwiązania podstawowe osobliwe dotyczą płyt nieograniczonych. Łatwo sprawdzić, że wzory podstawowe, podające rozwiązanie układu równań (2.3) za pomocą wielkości brzegowych, będą nadal aktualne, jeżeli zamiast rozwiązań podstawowych osobliwych zastosujemy rozwiązania będące sumą:

$$\omega_i = \omega_{i0} + \omega_{ir}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie rozwiązania z indeksem r przedstawiają funkcje regularne w obszarze zajmowanym przez płytę.

Jak już powiedzieliśmy wyżej, w zagadnieniu płyt Reissnera możemy założyć na brzegu tylko trzy niezależne wielkości, podczas gdy we wzorach (7.5) i (7.11) występuje ich sześć. W związku z powyższym rozwiązanie szczegółowe dla danej płyty przy określonym problemie brzegowym otrzymamy wykorzystując wzory podstawowe przy wykorzystaniu zamiast osobliwych rozwiązań podstawowych rozwiązania będącego sumą tego ostatniego i rozwiązania regularnego tak dobranego, aby były spełnione jednorodne warunki brzegowe danej płyty.

Zagadnienie znalezienia wyżej wspomnianego rozwiązania regularnego nie przedstawia pod względem matematycznym trudności. Możliwe jest tu zastosowanie metod numerycznych. Sposób powyższy jest znany i był wykorzystany przez PUCHERA [35], SUCHARA [36] oraz KRUGA i STEINA [37] przy budowaniu powierzchni wpływowych dla płyt cienkich.

Jeszcze wydatniej potrafimy uprościć rozwiązanie, jeżeli będziemy znali rozwiązanie zamknięte danej płyty obciążonej siłą skupioną i momentem skupionym przy spełnieniu jednorodnych warunków brzegowych danego zagadnienia, tzn. jeżeli będziemy znali funkcje Greena tego zagadnienia.

Sposób wykorzystania wzorów podstawowych (7.5) i (7.11) dla otrzymania rozwiązania pewnego problemu brzegowego omówimy na przykładzie. Niech będzie dana płyta zajmująca obszar B . Szukamy przemieszczeń ω_i ($i = 1, 2, 3$) w obszarze płyty przy danych na brzegu płyty C następujących wielkościach: $m_n(s) = f_1(s)$, $\omega_1(s) = f_2(s)$, $m_{ni}(s) = f_3(s)$.

Założymy, że znamy rozwiązania zagadnienia naszej płyty obciążonej siłą skupioną $P = 1$ oraz momentami skupionymi $M_x = 1$ i $M_y = 1$. Niech rozwiązania te spełniają następujące warunki brzegowe: $m_n(s) = \omega_1(s) = m_{nn}(s) = 0$. Rozwiązanie naszego problemu otrzymamy więc wprost z zależności (7.5) i (7.11) np.

$$\omega_1(Q_0) = \int_C [f_1(s)\omega_{10} + f_3(s)\omega_{10} - f_2(s)q_{n0}] ds,$$

gdzie pod całkami występują tylko znane funkcje.

W punkcie niniejszym pokażemy rozwiązanie pewnego problemu brzegowego płyty Reissnera i trójwarstwowej, które otrzymamy w oparciu o powyższe rozumowanie.

8.1. Półpłaszczyzna. Rozważmy półpłaszczyznę ograniczoną prostą $x = 0$. Założymy następujące dane na brzegu ograniczającym naszą płytę:

$$\omega_1(0, y) = f_1(y), \quad m_x(0, y) = f_2(y), \quad \omega_y(0, y) = -\omega_r(0, y) = f_3(y).$$

Zadaniem naszym jest znalezienie przemieszczeń ω_i ($i = 1, 2, 3$) dla $x > 0$ przy podanych wyżej wartościach brzegowych. Chcąc wykorzystać wzory (7.5) i (7.11), zgodnie z tym co już powiedziano wyżej, powinniśmy znać rozwiązanie osobliwe spełniające jednorodne warunki brzegowe $\omega_{10} = m_{x0} = \omega_{30} = 0$ dla prostej $x = 0$. Rozwiązanie takie nazywamy funkcją Greena. Jeżeli więc potrafimy znaleźć funkcję Greena dla półpłaszczyzny przy danych powyżej warunkach brzegowych, to rozwiązanie problemu przedstawimy następująco:

$$\omega_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(y_1)\omega_{n0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) - f_1(y_1)q_{n0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) + f_3(y_1)m_{n0}^{(P)}(x, y, 0, y_1)] dy_1, \quad (8.1)$$

$$\omega_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(y_1)\omega_{n0}^{(X)}(x, y, 0, y_1) - f_1(y_1)q_{n0}^{(X)}(x, y, 0, y_1) + f_3(y_1)m_{n0}^{(X)}(x, y, 0, y_1)] dy_1$$

i analogicznie dla $\omega_3(x, y)$. Powyżej indeksem P oznaczono rozwiązanie dla siły $P = 1$, a indeksem X rozwiązanie dla momentu skupionego X_M .

Wracając do sposobu znalezienia tych rozwiązań zauważmy, że żądamy spełnienia dla nich warunków antysymetrii na prostej $x = 0$, czyli wolnego podparcia z przeponą [warunek 4 (4.6)]. Rozwiązanie otrzymamy więc obciążając płytę nieograniczoną siłą i momentami skupionymi, antysymetrycznie względem osi $x = 0$. Zauważmy jeszcze, że będą nas interesowały tylko pewne wielkości tych rozwiązań na prostej ograniczającej nasz obszar. Ażeby nie rozszerzać pracy, podamy więc jedynie te ostatnie. Wykorzystując zależności (6.14.1), (6.21), (6.31) i (6.34) oraz (3.10) i (3.11) otrzymamy:

$$\omega_{20}^{(Q)}(x, y, 0, y_1) = -\omega_{n0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1), \quad q_{x0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1) = -q_{n0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1), \quad (8.2.1)$$

$$m_{xy0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1) = m_{n0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1);$$

$$\omega_{20}^{(P)}(x, y, 0, y_1) = \frac{1}{4\pi D} r_1 \cos\theta (\ln r_1^2 + 1),$$

$$q_{x0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\theta}{r_1}, \quad (8.2.2)$$

$$m_{xy0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) = \frac{1-\nu}{4\pi} \sin 2\theta;$$

$$\begin{aligned}
\omega_{20}^{(x)}(x, y, 0, y_1) &= -\frac{1}{4\pi D} (\ln r_1^2 + 2 \cos^2 \theta + 1) + \\
&\quad + \frac{1}{\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left\{ \frac{\cos 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] + \gamma^2 \sin^2 \theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
(8.2.3) \quad q_{x0}^{(x)}(x, y, 0, y_1) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] + \gamma^2 \sin^2 \theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
m_{xy0}^{(x)}(x, y, 0, y_1) &= \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{\sin \theta \cos 2\theta}{r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{h^2}{5} \left\{ \frac{\sin \theta (\sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta)}{r_1^3} \times \right. \\
&\quad \left. \times [2 - 2\gamma r_1 K_1(\gamma r_1) - \gamma^2 r_1^2 K_0(\gamma r_1)] + \frac{1}{2} \gamma^3 \sin \theta \cos 2\theta K_1(\gamma r_1) \right\}, \\
\omega_{20}^{(y)}(x, y, 0, y_1) &= -\frac{1}{4\pi D} \sin 2\theta + \frac{1}{\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 2\theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
(8.2.4) \quad q_{x0}^{(y)}(x, y, 0, y_1) &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 2\theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
m_{xy0}^{(y)}(x, y, 0, y_1) &= \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{\cos \theta \cos 2\theta}{r_1} - \frac{1}{\pi} \frac{h^2}{5} \left\{ \frac{\cos \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)}{r_1^3} \times \right. \\
&\quad \left. \times [2 - 2\gamma r_1 K_1(\gamma r_1) - \gamma^2 r_1^2 K_0(\gamma r_1)] - \frac{1}{2} \gamma^3 \cos \theta \cos 2\theta K_1(\gamma r_1) \right\},
\end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$r_1^2 = x^2 + (y_1 - y)^2, \quad \gamma = \sqrt{10/h^2},$$

(ρ) kolejno (P), (X), (Y),

$$\sin \theta = \frac{y_1 - y}{r_1}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r_1}.$$

Wstawiając powyższe zależności do związków (8.1) otrzymujemy rozwiązanie problemu. Przykładowo podamy rozwiązanie dla przypadku $f_2 = f_3 = 0$, $\omega_1(G, y) = f_1(y)$:

$$\begin{aligned}
\omega_1(x, y) &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(y_1)}{x^2 + (y_1 - y)^2} dy_1, \\
(8.3) \quad \omega_2(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(y_1 - y)^2 - x^2}{[x^2 + (y_1 - y)^2]^2} - \gamma \frac{(y_1 - y)^2 - x^2}{[x^2 + (y_1 - y)^2]^{3/2}} K_1(\gamma r_1) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma^2 \frac{(y_1 - y)^2}{[x^2 + (y_1 - y)^2]} K_0(\gamma r_1) \right\} f_1(y_1) dy_1
\end{aligned}$$

i podobnie dla $\omega_3(x, y)$.

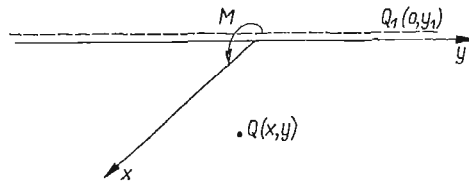
Oczywiście łatwo sprawdzić po wzięciu pod uwagę wyrażenia asymptotycznego dla dużych wartości argumentu [38]

$$(8.4) \quad K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\nu, k)}{(2z)^k} + O(z^{-n-1}) \right],$$

$$(\nu, k) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} + k\right)}{k! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right)}, \quad (\nu, 0) = 1$$

że $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_2 = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$, czego należało się spodziewać.

Podamy jeszcze rozwiązanie dla przypadku, gdy $f_1 = f_3 = 0$, $f_2 = M\delta(y_1)$ co odpowiada działaniu momentu skupionego w początku układu współrzędnych (rys. 10).



Rys. 10

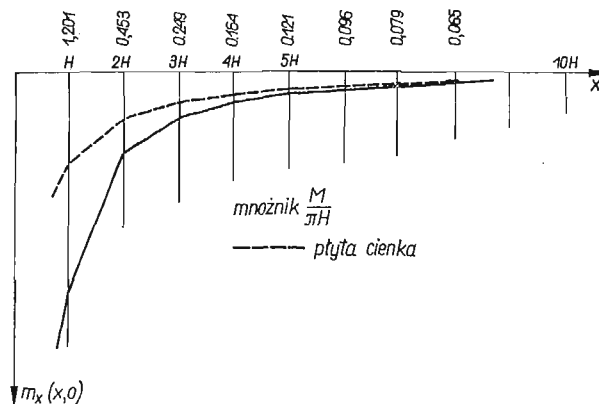
W tym przypadku obciążenia rozwiązanie podamy jedynie dla momentu $m_x(x, y)$:

$$(8.5) \quad m_x = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[(1 + \nu) + (1 - \nu) \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right] +$$

$$+ \frac{M}{\pi} \frac{h^2}{5} \left\{ \frac{x^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3} \left[2 - 2\gamma(x^2 + y^2)^{1/2} K_1(\gamma r) - \gamma^2(x^2 + y^2) K_0(\gamma r) \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma^3 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} K_1(\gamma r) \right\}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Pozostałe wielkości łatwo otrzymamy po wykorzystaniu zależności niniejszego punktu.



Rys. 11

Rozwiązanie podane powyżej (8.5) jest słuszne także dla płyty trójwarstwowej, należy tylko posłużyć się analogią między tymi płytami i płytą Reissnera (2.12).

Na rysunku 11 podano wykres $m_x(x, 0)$ dla płyty trójwarstwowej o następujących charakterystykach: $E = 1,8 \cdot 10^5$ kG/cm², $G_s = 1,0 \cdot 10^4$ kG/cm², $d = 3$ cm, $h_1 = 10$ cm, $\nu_1 = 0$, $\eta = 1,35 H$, $\gamma = 1,217 \frac{1}{H}$, $H = 2h_1$.

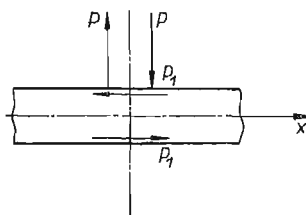
Dla porównania pokazano na tym samym rysunku wykres odpowiadający cienkiej płycie izotropowej.

Dodajmy na koniec, że rozwiązanie od momentu skupionego możemy także otrzymać wprost z rozwiązania (6.31), (6.34) wykorzystując antysymetrię działania momentu.

8.2. O osobliwościach wyższego rzędu w teorii płyt Reissnera i trójwarstwowych. Podamy poniżej rozwiązanie zagadnienia nieograniczonej płyty Reissnera poddanej działaniu obciążenia skupionego, równego różnicy momentu skupionego zdefiniowanego w oparciu o obciążenie $X_m = M(Q_0)$ i momentu skupionego określonego jako granica $M = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} P\epsilon_x$.

Zadanie to ma raczej charakter teoretyczny, niemniej posłuży do zilustrowania tezy, że sformułowanie zagadnienia przy obciążeniach skupionych w teorii płyt nie może być oparte na tak zwanym sformułowaniu tradycyjnym, o którym była już mowa w p. 6 niniejszej pracy.

Zajmiemy się nieograniczoną płytą obciążoną jak pokazano schematycznie na rys. 12.



Rys. 12

Rozwiązanie dla takiego obciążenia otrzymamy odejmując od siebie odpowiednie rozwiązania, podane w p. 6 dla obu rodzajów momentu skupionego. Biorąc pod uwagę związki (6.21) i (6.31) otrzymamy:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \omega_1^{AM} &= \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \omega_2^{AM} &= -\frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2+y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2+y^2}) \right], \\ \omega_3^{AM} &= -\frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2+y^2}) \right]. \end{aligned}$$

Można wykazać, że w przypadku sprowadzenia problemu do szukania jednej funkcji biharmonicznej i jednej spełniającej równanie $\left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) H = 0$, jak pokazano w p. 2 (2.8), otrzymujemy dla omawianego przypadku:

$$(8.7) \quad \begin{aligned} B &= \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2+y^2}, \\ H &= \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

W tym przypadku wielkości sił wewnętrznych łatwo wyznaczyć korzystając ze wzorów (2.1) i zależności (8.6) albo wykorzystując podane w p. 6 wielkości sił wewnętrznych dla obciążenia momentami skupionymi obu rodzajów. Poniżej podamy jedynie przykładowo dla współrzędnych biegunowych:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} q_r &= -\frac{M}{2\pi} \gamma \frac{\cos\varphi}{r} K_1(\gamma r), \\ m_r &= -\frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[\frac{2}{r^3} - \gamma \frac{2}{r^2} K_1(\gamma r) - \gamma^2 \frac{1}{r} K_0(\gamma r) \right] \cos\varphi. \end{aligned}$$

Można się przekonać, że rozwiązanie tego problemu, podane wyżej, spełnia równanie zagadnienia i jest regularne w całej płaszczyźnie z wyjątkiem punktu $(0, 0)$, poza tym wypadkowa wszystkich sił brzegowych, dla dowolnego obszaru zawierającego wewnątrz punkt przyłożenia obciążenia skupionego, jest równa zero. Jest to zrozumiałe ze względu na fakt, że obciążenie jest samorzównoważone. Wobec powyższego w sformułowaniu tradycyjnym stan ten powinien być równy «zeru», czego oczywiście nie można stwierdzić. Wydawać by się mogło, że zgodnie z zasadą Saint-Venanta różnica wynikająca z powyższego rozwiązania może nas nie interesować. Jednak i z tym nie można się zgodzić, ponieważ zasięg wpływu powyższego rozwiązania nie jest mniejszy niż poprzednich rozwiązań dla obciążeń, które nie były samorzównoważone. Poza tym rozwiązanie podane powyżej dla różnicy omawianych dwóch momentów nie jest fizycznie bez znaczenia. Rozwiązanie to w sposób istotny, w sensie twierdzenia o pracy wirtualnej, wpływa na poszukiwane wielkości przemieszczeń. Mianowicie, przy zastosowaniu rozwiązania momentem skupionym pary sił pionowych, we wzorach podstawowych, podanych w pracy, otrzymamy w wyniku wielkość $\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$, natomiast po dodaniu do powyższego rozwiązania, rozwiązania dla obciążeń zrównoważonych, będącego przedmiotem dyskusji, otrzymamy rozwiązanie ω_2 , czyli że sens fizyczny rozwiązania dyskutowanego jest wyraźny.

W zakończeniu pracy podajemy propozycję w sprawie dokładniejszego formułowania problemów z obciążeniami skupionymi w teorii płyt, w których uwzględniamy odkształcenia od sił poprzecznych.

9. Zakończenie

Podane w pracy rozwiązania i wzory mają charakter podstawowy. Mogą one znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu wielu problemów brzegowych teorii płyt Reissnera oraz teorii płyt trójwarstwowych.

W pracy starano się spojrzeć na zagadnienie płyt Reissnera i trójwarstwowych z jednolitego punktu widzenia, który jest kontynuacją znanego podejścia do równania harmonicznego, równań teorii sprężystości czy też równania teorii płyt cienkich. Związki podane w pracy mogą służyć do sporządzenia powierzchni wpływowych płyt Reissnera jak i płyt trójwarstwowych. Przykłady podane w pracy mają charakter ilustracyjny. Poza tym wyprowadzone związki pozwalają na sformułowanie szeregu problemów brzegowych dotyczących nieciągłych warunków brzegowych [24].

Praca ma jeszcze jeden aspekt. Mianowicie wykazano w niej, że tradycyjne sformułowanie problemu znalezienia rozwiązania zagadnienia płyty Reissnera lub trójwarstwowej,

przy obciążeniu siłą skupioną, nie zapewnia jednoznaczności rozwiązania. Pod tradycyjnym sformułowaniem rozumiemy, podobnie jak STERNBERG i EUBANKS [32], sformułowanie podane w niniejszej pracy.

W punkcie 6 otrzymano dwa rozwiązania zagadnienia płyty nieograniczonej, które spełniają tradycyjne żądania wymagane od rozwiązania dla takiej płyty obciążonej siłą skupioną. Rozstrzygnięcie, które z tych rozwiązań odpowiada obciążeniu siłą skupioną, otrzymano w oparciu o twierdzenie o wzajemności prac. Okazuje się, że rozwiązanie odpowiadające obciążeniu siłą skupioną powinno dodatkowo spełniać następującą zależność:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (q_{n0} \omega_{1r} + m_{n0} \omega_{nr} + m_{nr0} \omega_{tr} - q_{nr} \omega_{10} - m_{nr} \omega_{r0} - m_{nr} \omega_{t0}) ds = P \omega_1(0, 0),$$

gdzie indeksem 0 oznaczono rozwiązanie zagadnienia płyty obciążonej siłą skupioną, a indeksem r dowolne regularne rozwiązanie dla rozpatrywanej płyty.

Podobne warunki powinny spełniać rozwiązania zagadnienia płyty obciążonej momentami skupionymi.

W tym sensie praca niniejsza jest kontynuacją problemów poruszanych przez E. STERNBERGA i R. A. EUBANKSA dla siły skupionej w teorii sprężystości na zagadnienia rozwiązań osobliwych płyt Reissnera i płyt trójwarstwowych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, London 1927.
2. А. ЛУРЬЕ, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва 1955.
3. В. З. ВЛАСОВ, И. И. ЛВОНТЬЕВ, *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1960.
4. В. С. ГЛАЗЫРИН, *Применение теории Рейсснера к расчету неограниченных плит лежащих на упругом основании*, Строит. мех. и расчет сооружений, 2, 1964.
5. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech. 12, 1945.
6. А. КРОММ, *Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik*, Ing. Arch. 21 (1953).
7. J. L. BOAL, E. REISSNER, *Three-dimensional Theory of Elastic Plates with Transverse Inextensibility*, University of South Carolina.
8. J. MOSSAKOWSKI, *Równania teorii Reissnera dla płyt ortotropowych*, Księga Jubileuszowa prof. dr W. Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.
9. А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, *О теории изгиба пластинок Райсснера*, Изв. АН СССР, 4, 1958.
10. Z. KAÇZKOWSKI, *Der Einfluss der Schubverzerrungen und des Drehbeharrungsvermögens auf die Schwingungsfrequenz von anisotropen Platten*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Tech., 7, 8 (1960).
11. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, dodatek do wydania polskiego, Arkady, Warszawa 1961.
12. N. J. HOFF, *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, NACA, 1950, No. 2225.
13. АЛЕКСАНДРОВ, БРЮКЕР, КУРШИН, ПРУСАКОВ, *Расчет трехслойных панелей*, Москва 1960.
14. С. ЛИВОВЕ, S. В. ВАТДОРФ, *A General Small Deflection Theory for Flat Sandwich Plates*, NACA, April 1948, No. 899.
15. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte, prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Lądowej, 1, 12 (1966).
16. H. MIKOŁAJCZAK, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, Roczn. WSR, Poznań 1965.
17. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
18. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, 1957.

19. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
20. Z. KAŹCZKOWSKI, *The Influence of Distortion and Rotational Inertia on the Vibration of a Plate having the Form of a Regular Polygon*, Konferencja ZMOC, PAN, Olsztyn 1961.
21. R. GANOWICZ, *O pewnym rozwiązaniu płyty trójwarstwowej*, Rozpr. Inżyn., 1966.
22. S. BERGMAN, M. SCHIFFER, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, A. Press, New York 1953.
23. R. GANOWICZ, *Twierdzenie o wzajemności prac dla pewnego typu płyt trójwarstwowych*, Rozpr. Inżyn., 1966.
24. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Osobliwe równania całkowite termosprężystości*, Rozpr. Inżyn., 4, 13 (1965).
25. W. NOWACKI, *Green functions for a thermoelastic medium*, Bull. Acad. Polon. Scie., Série des Sci. Tech., 6, 12 (1964).
26. J. MOSSAKOWSKI, *Osobliwe rozwiązanie w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. Stos., 3, 6 (1954).
27. J. MOSSAKOWSKI, *Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., 1, 7 (1955).
28. I. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, 1951.
29. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Partial Differential Equations*, Yale Univer. Press, 1923.
30. H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech. Stos., 10 (1958).
31. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1963.
32. E. STERNBERG, R. A. EUBANKS, *On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity*, J. Rat. Mech., 4 (1955).
33. E. STERNBERG, *On Some Recent Developments in the Linear Theory of Elasticity*, Structural Mechanics- Proceedings of the 1-st Symposium on Naval Struct. Mech., Pergamon Press 1960.
34. Д. С. КУЗНЕЦОВ, *Специальные функции*, Изд. Выш. Шк., Москва 1965.
35. A. PUCHER, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing. Archiv., 12, 1941.
36. M. SUCHAR, *Computation by means of Polynomials of Influence Surfaces for Anisotropic Plates with Finite Dimensions*, Arch. Mech. Stos., 5, 10, (1958).
37. S. KRUG, P. STEIN, *Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten*, Springer-Verlag, 1961.
38. N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.

Р е з ю м е

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК РЕЙСНЕРА И ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНОК

Темой работы является теория пластинок, учитывающая деформации, вызванные поперечными силами. Эта теория относится, в частности, к пластинкам, рассчитываемым по теории Рейснера, а также к трехслойным пластинкам.

Предполагается, что внешние слои рассматриваемых трехслойных пластинок являются изотропными, без жесткости на изгиб, тогда как срединный слой воспринимает исключительно поперечные усилия.

Главной целью работы является выведение основных формул, дающих возможность выразить решение для данной пластинки через краевые величины. Аналогичные формулы известны в теории гармонических функций (5.1), (5.2) и в теории тонких пластинок (5.3).

Основные формулы для обсуждаемых в работе пластинок получено на основе принципа взаимности работ, введенного в разделе 3 и на основе сингулярных решений. Сингулярные решения представлены в разделе 6 настоящей работы, в замкнутом виде. При построении сингулярных решений использовано двойное, бесконечное преобразование Фурье. При обращении преобразования использовано, введенное И. А. АДАМАРДОМ [29] понятие конечной части расходящегося интеграла.

Обсуждается однозначность решений для случая действия сосредоточенных сил.

Работа иллюстрируется примерами решений некоторых краевых задач.

S u m m a r y

SOME PROBLEMS OF REISSNER'S THEORY OF PLATES AND OF THE THREE-LAYER PLATES

In the paper the plates theory which includes strains due to shear forces has been considered. The theory concerns as particular cases, the plates calculated according to Reissner's theory, and the three-layer plates.

It has been assumed that in the three-layer plates the exterior layers are isotropic without flexural rigidity, while the shear forces can act on the middle layer only.

The main purpose of the paper is to derive the basic formulae which enable to express the solution for a plate by means of the boundary quantities. Similar formulae are known for the problems of the theory of harmonic functions (5.1), (5.2) and of the theory of thin plates (5.3).

The basic formulae for the considered plates have been obtained from the principle of reciprocity, derived in Chapter 3, and from the singular solutions. The latter have been obtained in the closed form in Chapter 6. In the construction of singular solutions the double infinite Fourier transforms have been applied. In order to find the inverse transforms, the concept of the finite part of a divergent integral has been used, as introduced by J. Hadamard [29].

The problem of the uniqueness of the solution in the case of concentrated loads applied has been also discussed.

The examples of the solutions of some boundary value problems have been included.

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 marca 1966 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

ROZSTRZYGNĘCIE KONKURSÓW NAUKOWYCH

1. ODDZIAŁ WROCŁAWSKI PTMTS

Na ograniczony konkurs naukowy na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki teoretycznej i stosowanej, dostępny dla członków Oddziału Wrocławskiego PTMTS i ogłoszony dnia 29 marca 1965, wpłynęło 6 prac, odpowiadających warunkom konkursu. Zostały one przedstawione na posiedzeniu naukowym w dniu 8 grudnia 1965 r.

Sąd konkursowy w składzie: przewodniczący — prof. Roman MROMLIŃSKI, członkowie: prof. dr Igor KISIEL, prof. dr Adam MTRZEL, prof. dr Mieczysław SĄSIĄDEK, prof. dr Jerzy ZAWADZKI, doc. dr Otton DĄBROWSKI i doc. dr Adam RYBARSKI po zapoznaniu się z pracami, opiniami recenzentów wyznaczonych przez Sąd Konkursowy oraz publicznym zreferowaniu prac konkursowych na zebraniu naukowym przez wszystkich uczestników konkursu postanowił przyznać następujące nagrody i wyróżnienia:

I nagrodę w wysokości 4000 zł dr inż. Janowi LANGEROWI za pracę pt. «Drgania własne równoległobocznej płyty mostowej»,

II nagrodę w wysokości 3500 zł dr inż. Mieczysławowi TEISSEYRE za pracę pt. «Badanie nad zastosowaniem kryz do pomiaru ilości pyłu węglowego i powietrza w transporcie pneumatycznym»,

III nagrodę w wysokości 2500 zł dr inż. Edwardowi GAWRYCH-ŻUKOWSKIEMU za pracę pt. «Momentowy stan napięcia kratownic płaskich w świetle teorii rzędu drugiego».

Wyróżnienia otrzymali: dr inż. Zdzisław BODARSKI za pracę pt. «Wpływ uźebrowania na charakter pola naprężeń w środowisku trójramiennego naroża ramy metalowej», dr inż. Eugeniusz BRZUCHOWSKI za pracę pt. «Wzory strukturalne i liczby znamionowe sprzęgieł jako powiązanie kombinatoryki z konstrukcją».

Odnaczeni i wyróżnieni za prace konkursowe otrzymali na uroczystym Zebraniu naukowym w dniu 17 grudnia 1965 r. nagrody wraz z odpowiednimi dokumentami.

2. ODDZIAŁ GLIWICKI PTMTS

Konkurs naukowy zorganizowano dzięki subwencji 18 000 zł uzyskanej od Ob. mgr inż. Zenona CIEŚLAKA, przewodniczącego PMRN-Gliwice. Na konkurs wpłynęło 11 prac — 2 prace odrzucono, 9 zreferowali autorzy na zebraniu w dniu 28 marca 1966 r., po czym Sąd Konkursowy w wyniku tajnego głosowania przyznał 6 nagród:

I nagrodę w wysokości 5000 zł mgr inż. Tadeuszowi BESIE za pracę pt. «Przepływ ciepła w laminarnym strumieniu cieczy chłodzącej reaktor jądrowy»,

II nagrodę w wysokości 3000 zł mgr inż. Antoniemu GUZIKOWI za pracę pt. «Obliczanie współczynnika przenoszenia ciepła w regeneratorsze o działaniu niesymetrycznym»,

II nagrodę w wysokości 3000 zł mgr inż. Stanisławowi KOPECIOWI za pracę pt. «Sala widowiskowa bez ludzi jako obiekt w procesie regulacji temperatury»,

II nagrodę w wysokości 3000 zł Zdzisławowi SULIMOWSKIEMU za pracę pt. «Zakotwienie na zasadzie przyczepności ciągną sprężającego w betonie»,

III nagrodę w wysokości 2000 zł mgr inż. Edwardowi KOSTOWSKIEMU za pracę pt. «Obliczenia cieplne dwuszczelinowego rekuperatora opromieniowanego»,

III nagrodę (zespołową) w wysokości 2000 zł mgr inż. Stanisławowi LOSCE, dr inż. Oswaldowi MATEI, mgr inż. Eugeniuszowi ŚWITOŃSKIEMU za pracę pt. «Badania modelowe stateczności hiperbolicznych chłodni wieżowych obciążonych statycznie wiatrem przy jednoczesnym uwzględnieniu ciężaru własnego powłoki».

Wyróżnienie otrzymał mgr Jerzy TOMCZEK za pracę pt. «Wyznaczenie optymalnych rozmiarów pionowego pierścieniowego kanału chłodzącego w materiale chłodzonym na drodze konwekcji swobodnej».

IV KONFERENCJA DYNAMIKI MASZYN

Trzy pierwsze Konferencje Dynamiki Maszyn odbyły się w latach 1959, 1961, 1963 w Czechosłowacji i były organizowane przez Czechosłowacką Akademię Nauk. W konferencjach tych uczestniczyli przedstawiciele Polski.

W Polsce pierwsze sympozjum poświęcone dynamice maszyn odbyło się w 1964 r. w Krakowie i zorganizowane zostało przez Katedrę Maszyn Hutniczych AGH, Katedrę Mechaniki Technicznej AGH oraz Krakowski Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Tematyka Sympozjum obejmowała jedynie maszyny hutnicze.

Doceniając rolę dynamiki maszyn w rozwoju konstrukcji maszyn Komitet Budowy Maszyn Polskiej Akademii Nauk podjął uchwałę o organizowaniu wspólnych z Czechosłowacką Akademią Nauk konferencji naukowych poświęconych zagadnieniom dynamiki maszyn. W wyniku tego porozumienia odbyła się w Krakowie w dniach 15–17 września 1965 r. IV Konferencja Dynamiki Maszyn zorganizowana przez Komitet Budowy Maszyn Polskiej Akademii Nauk, Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Oddział w Krakowie, Akademię Górniczo-Hutniczą ze strony polskiej oraz Czechosłowacką Akademię Nauk.

Konferencja wzbudziła duże zainteresowanie w uczelniach technicznych, w instytutach naukowo-badawczych oraz w zakładach przemysłowych. W Konferencji wzięło udział 289 uczestników, w tym 210 z Polski, 63 z Czechosłowacji, 9 z Niemieckiej Republiki Demokratycznej, 2 ze Związku Radzieckiego, 2 z Węgier, 1 ze Szwecji, 1 z Holandii, 1 z Senegalu.

Podczas Konferencji odbywały się posiedzenia plenarne oraz posiedzenia w czterech sekcjach: maszyn roboczych, zastosowania maszyn matematycznych i metod doświadczalnych, stateczności ruchu i teorii drgań oraz ogólnych zagadnień dynamiki maszyn.

Ogółem wygłoszono 83 referaty. Referaty problemowe na tematy: «Rozwój dynamiki maszyn w Czechosłowacji w latach 1963–65», «Zagadnienie dynamiki maszyn w Polsce», wygłosili prof. dr inż. J. KOZEŃNIK, członek Czechosłowackiej Akademii Nauk, i prof. dr inż. Stefan ZIEMBA, członek Polskiej Akademii Nauk. W referatach tych podkreślono następujące aktualne zagadnienia, które należy rozwijać:

- 1) doskonalenie konstrukcji maszyn odnośnie pewności działania i żywotności,
- 2) rozwijanie metod doświadczalnych badania przebiegów dynamicznych w maszynach,
- 3) wykorzystanie maszyn matematycznych do optymalizacji konstrukcji maszyn.

Tematykę wygłoszonych referatów można podzielić na 6 grup:

- 1) zagadnienia ogólne dynamiki maszyn związane z procesami przejściowymi i ustalonymi ze szczególnym uwzględnieniem tarcia,
- 2) stateczność ruchu maszyn wirnikowych,
- 3) dynamika maszyn i urządzeń transportowych,
- 4) dynamika maszyn górniczych, hutniczych, rolniczych i obrabiarek,
- 5) drgania i zastosowania techniki wibracyjnej,
- 6) zastosowanie maszyn matematycznych oraz metody doświadczalne.

Z zagadnień ogólnej dynamiki maszyn na pierwszy plan wysuwały się problemy optymalizacji konstrukcji. Omówiono zagadnienie optymalizacji stanu obciążenia jako zasady konstruowania, problem wyznaczania optymalnych parametrów charakteryzujących maszynę oraz współczesne metody optymalizacji procesów dynamicznych.

Obok zagadnień optymalizacji poruszone zostały zagadnienia obciążeń stochastycznych, sposoby uwzględniania tych obciążeń w równaniach ruchu maszyn i metody rozwiązywania tego typu równań.

Odnośnie do stateczności ruchu zajmowano się w referatach absolutną statecznością szczególnie układów nieliniowych.

Z referatów omawiających stateczność ruchu maszyn wirnikowych należy wysunąć na plan pierwszy referat na temat drgań samowzbudnych wirników wirujących w łożyskach powietrznych. Referat omawiał wyniki prac doświadczalnych.

Inne referaty z tej dziedziny dotyczyły metod doświadczalnych i pomiarów. Omówione zostało zastosowanie metody częstotliwościowej do badania procesów dynamicznych w silnikach, w szczególności w silnikach tłokowych i turbinach, oraz zastosowanie metody macierzowej do obliczania częstości drgań własnych i linii ugięcia łopatek turbinowych o silnie skręconym profilu. Podano również metodę pomiaru naprężeń dynamicznych i technikę zapisu przebiegu na taśmie.

Zagadnienia maszyn i urządzeń transportowych omawiane były w wielu referatach. Ze względu na różnorodność maszyn transportowych tematyka objęła wiele zagadnień. Odnośnie do urządzeń transportowych pracujących w górnictwie głównie poruszono zagadnienie sprzężenia lin stalowych z kołem napędowym oraz problem przebiegów dynamicznych przy rozruchu i pracy długich taśmociągów.

Referaty omawiające urządzenia transportowe pracujące w hutnictwie dotyczyły drgań suwnic. Przytoczono wyniki prac doświadczalnych.

Zagadnienia dynamiki żurawi wieżowych dotyczyły modelowania mechanicznego żurawia, redukcji mas, oceny sztywności elementów itd.

Drgania mechaniczne omawiane były w powiązaniu ze statecznością ruchu lub z techniką wibracyjną.

Omówiono zagadnienie synchronizacji i samosynchronizacji, zagadnienie przenośników wibracyjnych, sil wibracyjnych i wibrobetoniarek.

W referatach przytaczano wyniki prac doświadczalnych.

Na końcowym posiedzeniu uczestnicy IV Konferencji Dynamiki Maszyn uchwalili rezolucję, w której wyrażają celowość organizowania dalszych konferencji podobnego typu przez Akademię Nauk Polski i Czechosłowacji przy współpracy zainteresowanych instytucji i towarzystw naukowych. Następna polsko-czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn odbędzie się w Brnie w 1967 r. Po zakończeniu konferencji uczestnicy zwiedzili Hutę im. Lenina, Instytut Obrabiarek, Instytut Odlewnictwa oraz laboratorium AGH.

*Władysław Bogusz, Zbigniew Engel
(Kraków)*

KONWERSATORIUM «ZAGADNIENIA TERMICZNE I PLASTYCZNE W MECHANICE»

W dniach od 7 do 12 lutego 1966 r. odbyło się w Szczyrku tradycyjne już ogólnokrajowe konwersatorium pod hasłem «Zagadnienia termiczne i plastyczne w mechanice», zorganizowane przez Oddział Gliwicki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. W skład Komitetu Organizacyjnego weszli: prof. dr inż. Oktawian Popowicz, doc. dr inż. Bogdan Skalmierski, dr inż. Tadeusz Świerzawski. Sprawy kwaterunkowe, wyżywienia i rozliczeń załatwiała p. Żemczykowska, sprawy kancelaryjne i korespondencję p. Mnichowska.

Zadanie Konwersatorium było dwojakie: stawiało sobie za cel wymianę poglądów pomiędzy specjalistami różnych dziedzin i ze wszystkich stron kraju, tudzież zbliżenie i wzajemne poznanie się przedstawicieli różnych ośrodków. W ciągu sześciu dni obrad wygłoszono 19 referatów.

A. Wilczyński (Warszawa) wygłosił referat na temat pewnych zagadnień weryfikacji liniowych teorii ciał lepkosprężystych. W niektórych przypadkach, szczególnie w przypadku badania własności reologicznych tworzyw sztucznych—zdaniem autora—teorie liniowe okazują się wystarczająco dokładne i mogą opisywać własności materiałów rzeczywistych z zadowalającą dokładnością. W referacie autor omówił problem doboru i weryfikacji związków liniowych teorii ciał lepkosprężystych w zastosowaniu do tworzyw sztucznych.

Z. Olesiak (Warszawa) zajął się tematem rozkładu naprężeń cieplnych w półprzestrzeni i warstwie sprężystej i omówił kilka aspektów zagadnienia:

1) znikanie składowej normalnej naprężenia prostopadłej do powierzchni warstwy dla dowolnych stacjonarnych źródeł ciepła występujących na powierzchni ograniczającej,

2) charakter normalnej składowej naprężeń prostopadłych do płaszczyzny symetrii i naprężeń stycznych, które nie będą zależne od rozkładu temperatury przyłożonej do powierzchni szczeliny w przestrzeni sprężystej,

3) dwa rodzaje zagadnień kontaktowych teorii naprężeń cieplnych, pojęcie stempla utwierdzonego i swobodnego, oddziaływanie wzajemne dwóch stempli działających na powierzchnię ograniczającą pół-przestrzeń lub warstwę sprężystą.

S. DREWNOWSKI (Warszawa) poruszył problem energii podczas niszczenia konstrukcji. W pracy wysunięto hipotezę, z której wynika, że można utożsamiać pojęcie karbu w znaczeniu geometrycznym z pojęciem karbu w sensie obszaru dużej koncentracji energii. Referat był ilustrowany zdjęciami, wykresami oraz poglądowymi szkicami.

B. SKALMIERSKI i E. CZOGAŁA (Gliwice) przedstawicili pracę na temat lepkosprężystej powłoki walcowej na podłożu lepkosprężystym o jednokierunkowej charakterystyce. Rozważono powłokę zamkniętą, podpartą przegubowo na brzegach. Przy rozwiązywaniu zagadnienia skorzystano z metod transformacji całkowitych oraz analogii sprężysto-lepkosprężystej. Do rozważań szczegółowych przyjęto model reologiczny Voigta z warunkiem nieściśliwości $\nu = 1/2$. Przykład obliczeniowy dotyczył przypadku obciążenia siłą promieniową wędrującą wzdłuż równoleżnika ze stałą prędkością.

B. SKALMIERSKI i A. TYLIKOWSKI (Gliwice) omówili zagadnienie lepkosprężystego pręta kołowego o dwukierunkowej charakterystyce lepkosprężystej. Podłoże w rozważaniach reaguje na przesunięcia promieniowe i styczne (dwie stałe charakterystyczne). Zagadnienie rozpatrzono w dwóch aspektach jako quasi-statyczne i jako dynamiczne. Do rozważań szczegółowych przyjęto model Voigta. Obliczenia numeryczne wykonano dla przypadku quasi-statycznego i wędrującej siły stycznej po obwodzie pręta. Ten przypadek obciążenia jest realizowany w pracy wszelkiego rodzaju kół pędnych.

S. ZIEMBA i W. BABUŁ (Warszawa) zajęli się pewnymi aspektami zderzenia się ciał. W referacie omówiono zjawisko wnikania ciała stałego podczas zderzeń ze stałym opornikiem, przebiecie opornika ciałem stałym i ciekłym, wreszcie zjawiska występujące przy zderzeniu się ciał z dużymi prędkościami (zjawisko towarzyszące wybuchom).

S. ZIEMBA, M. JÓZKO, T. KARPIŃSKI (Warszawa) przedstawili zagadnienie badania udarów cieplnych i zmęczenie cieplne metali. W szczególności rozważono wpływ udaru cieplnego na własności metali, wpływ prędkości nagrzewania na niektóre własności mechaniczne metali, na przebieg procesu relaksacji oraz na przebieg przemian w stanie stałym w czystych metalach i stopach. Dyskutowano obszernie problem zmęczenia cieplnego i cieplno-mechanicznego metali. Autorzy dochodzą do następujących wniosków:

1) udar cieplny, zmęczenie cieplne i zmęczenie cieplno-mechaniczne mimo ich silnego powiązania są problemami same w sobie odrębnymi i złożonymi,

2) istnieje wyraźna potrzeba opracowania metodyki badań każdego z tych problemów, gdyż dotychczasowe wyniki badań z uwagi na odrębność i swoistość stosowanych metod badawczych i samego przedmiotu badań są nieporównywalne i dlatego nie mogą stanowić podstawy do oceny zachowania się metali w określonych warunkach cieplnych i mechanicznych,

3) wyraźnie zarysowują się trzy kierunki badań wspólnych dla rozpatrywanych problemów:

a) badanie rozkładu naprężeń i odkształceń pochodzenia cieplnego,

b) badania własności mechanicznych metali przy określonym schemacie obciążenia cieplnego lub cieplno-mechanicznego,

c) badanie przemian fazowych, strukturalnych zachodzących w metalach, jak również mechanizmu zmęczenia cieplnego i cieplno-mechanicznego.

A. LISOWSKI (Kraków) wygłosił referat na temat próby zastosowania elektrycznego analogu do zagadnień programowania przy uwzględnieniu sprężysto-plastycznego charakteru niektórych współczynników. W pracy przedstawiono metody modelowania pewnych problemów programowania liniowego poprzez układy elektryczne. Wykorzystano tu teorię zbiorów wypukłych, w szczególności metodę iteracyjną simpleksów.

W. ŁUKASZEK (Gliwice) wygłosił komunikat, w którym poruszył wpływ promieniowania na niektóre własności mechaniczne materiałów.

S. GAJDA (Warszawa) przedstawił w komunikacie konstrukcję nowej zrywarki udarowej.

T. KARPIŃSKI (Warszawa) przedyskutował wpływ nagrzania z dużą prędkością na niektóre własności wytrzymałościowe stali 45.

H. OLEŚIAK (Warszawa) przedstawiła problem przybliżonego równania przewodnictwa cieplnego dla grubych powłok cylindrycznych. W przypadku powłok grubych rozkład temperatury wzdłuż grubości znacznie odbiega od liniowego. Dlatego należałoby ten problem potraktować jako trójwymiarowy. W pracy

wprowadzono przybliżone równania różniczkowe przewodnictwa ciepła, które uwzględniają krzywo-liniowy rozkład temperatur wzdłuż grubości powłoki.

J. KLEPACZKO (Warszawa) dyskutował wykładnicze prawo wpływu odkształcenia i temperatury na naprężenie plastyczne płynięcia niektórych metali. Zdaniem autora podane równania wpływu odkształcenia, prędkości i temperatury na krzywą umocnienia są w stanie opisać zachowanie się takich metali jak aluminium, miedź, ołów.

J. KRZEMIŃSKI (Warszawa) przedstawił zagadnienie pola temperatury w nieograniczonej cienkościenniej powłoce walcowej, wywołane działaniem poruszającego się skupionego źródła ciepła wzdłuż tworzącej walca. Założono, że zarówno intensywność źródła, jak i prędkość przesuwania się są stałe. Zagadnienie rozpatrzono jako niesprężone przyjmując całkowitą izolację powłoki. Wykorzystano z jednej strony równania przewodnictwa cieplnego, z drugiej dla wyznaczenia przemieszczeń równania różniczkowe technicznej teorii powłok Własowa.

M. JÓZKO (Warszawa) omówił badania udarowe próbek w podwyższonych temperaturach.

J. MIĄSTKOWSKI (Warszawa) zreferował zagadnienie wpływu historii obciążenia na powierzchnię plastyczności. W pracy przedyskutowano wyniki własnych prac doświadczalnych oraz wyciągnięto z nich wnioski. Między innymi autor stwierdził, że wyniki badań wskazują, że granica proporcjonalności dla materiału wstępnie odkształconego wykazuje silne własności anizotropowe. Anizotropia ta w miarę wzrostu wtórnych odkształceń plastycznych maleje. Wyznaczone wektory przyrostów odkształcenia plastycznego są na ogół prostopadłe do powierzchni plastyczności.

J. RYCHLEWSKI i A. MIODUCHOWSKI (Warszawa) zajęli się problemem nośności granicznej skręcanych prętów o skokowej niejednorodności. Zagadnienie rozpatrzono na gruncie teorii ciał izotropowych, idealnie plastycznych, w oparciu o klasyczne założenia Saint-Venanta odnośnie przemieszczeń. Przedstawiony referat stanowił zwięzłe ujęcie prac publikowanych.

J. STACHURSKI (Kraków) w zastępstwie nieobecnego z powodu choroby A. CZUBAKA omówił pewne zagadnienia związane z ruchem nosiwa na przenośniku wibracyjnym, opierając się na równaniach reologicznych warstwy sypkiego materiału na rynnice przenośnika wibracyjnego. Autorzy twierdzą na podstawie przeprowadzonych doświadczeń, że obiekt badany da się opisać modelem reologicznym Bingham'a.

W. SZUŚCIK (Gliwice) przedstawił pracę pt. «Obciążenie graniczne łuku kołowego upodatnionego, zbudowanego w idealnie sztywnym podłożu».

W Konwersatorium wzięło udział 49 osób. Przewodnictwo zebrań sprawowali profesorowie DIETRICH, LISOWSKI, OLESIAK, POPOWICZ, ZIEMBA. Nad każdym wygłoszonym referatem była dyskusja. Liczba głosów w dyskusjach wyniosła 97. Dyskusje trwały przeważnie dłużej niż referaty i były najczęściej bardzo ożywione. Tematyka referatów, omówiona pokrótce powyżej, streszczona jest w wydawnictwie rozdany uczestnikom przed rozpoczęciem obrad. Spośród 19 referatów większość stanowiła prace o charakterze teoretycznym, tylko jeden referat poświęcony był opisowi urządzenia badawczego własnej konstrukcji, trzy stanowiły rozważania teoretyczne o charakterze użytkowym, 13 referatów miało za treść dociekania teoretyczne w zakresie aktualnych problemów plastycznych i termicznych w mechanice, 2 zawierały wyniki badań laboratoryjnych.

Faktem szczególnie znamionym było ożywienie dyskusji, która częstokroć nie mieściła się w ramach czasu zebrań i była kontynuowana w mniejszych grupach poza zebraniem ogólnym. W dyskusjach można było obserwować dużą erudycję i zasób wiedzy dyskutantów i referentów.

Jako brak Konwersatorium trzeba stwierdzić szczupłość prac opartych na badaniach eksperymentalnych, które pozwoliłyby przedyskutować metody badawcze i zaznajomić uczestników z możliwościami w tym względzie.

Największe korzyści z Konwersatorium — zgodnie z założeniami — mogli wyciągnąć sami referenci. Krytyka niekiedy bardzo ostra, choć zawsze nacechowana umiarem i dobrym tonem, niewątpliwie pozwoliła referentom prawidłowo ocenić własne referaty, poznać ich braki i zachęcić do dalszej pracy.

Abstrahując od wzmiankowanych punktów słabych można wartość naukową imprezy ocenić następująco: zupełnie oczywistym i naturalnym był wysoki poziom referatów i wypowiedzi starszych uczestników Konwersatorium, ale szczególnie bijącym w oczy był dobry poziom młodszej kadry od niedawna dopiero obdarzonej tytułami naukowymi. Warto zauważyć, że źródła i literatura cytowana przez referen-

tów i dyskutantów obejmowała w przeważającej części prace publikowane po 1960 r., co świadczy o kontakcie uczestników z najnowszymi osiągnięciami nauki w danej dziedzinie. W tych właśnie warunkach możliwość przedstawiania i przedyskutowania swych prac była szczególnie atrakcyjna dla młodszej kadry. Nie oznacza to bynajmniej, by udział starszej kadry był mniej ważny. Wprost przeciwnie, bez nich i bez ich referatów i wypowiedzi korzyści dla młodszej kadry zmalałyby. Z tego powodu, mimo pewnych rozbieżności w poziomie prac, organizatorzy sądzą, że Konwersatorium spełniło swoje zadanie.

O. Popowicz (Gliwice)

SRAWOZDANIE Z KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ PT.
TEORIA LEPKOPLASTYCZNOŚCI I TERMODYNAMIKA MATERIAŁÓW Z PAMIĘCIĄ
(JABŁONNA 6-15-VI 1966)

Wykładowcami byli: prof. dr Waław OLSZAK (3 wykłady po 2 godz. i 1 godz. konsultacji) i doc. dr Piotr PERZYNA (12 wykładów po 2 godz. i 8 godz. konsultacji).

Tematyka wykładów prof. dr Waław OLSZAKA obejmowała zagadnienia teorii lepkoplastyczności w ramach założeń materiałów statecznych i infinytezymalnych deformacji. Wykłady doc. dr Piotra PERZYNY dotyczyły zagadnień termodynamicznej teorii materiałów o właściwościach reologicznych (por. skrypt).

Uczestnikami konferencji byli pracownicy naukowcy Instytutów Akademii, Politechnik i Instytutów Resortowych w liczbie 28 osób.

Głównym celem konferencji było zapoznanie słuchaczy z najnowszymi osiągnięciami w termodynamicznej teorii materiałów odkształcalnych. Pokazano szeroką podbudowę fizykalną i możliwość opracowania ogólnej teorii materiałów z pamięcią, tj. takich, dla których aktualny stan zależy od całej historii procesu deformacji i zmian temperatury. Podejście to mieści się w tzw. mechanice racjonalnej, którą cechuje głębokie traktowanie zjawisk fizykalnych, aksjomatyczne stanowisko i dbałość o matematyczną ścisłość formułowanych twierdzeń i ich dowodów. Charakterystyczną cechą termodynamicznej teorii materiałów z pamięcią jest szerokie i jednolite traktowanie wszystkich modeli dla realnych materiałów. Teoria ta pokazuje zupełnie nowe możliwości zarówno dla badań teoretycznych jak również dla badań eksperymentalnych.

Znalazło to również wyraz w ogromnym zainteresowaniu wykładaną tematyką na konferencji. Wyrażało się to w stuprocentowej frekwencji na wykładach i konsultacjach oraz w długich dyskusjach dotyczących podstaw omawianej teorii.

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 1/1964

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYŃIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
Biuletyn informacyjny PTMTS:
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem
Sympozja naukowe IUTAM

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1965

- S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego
Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczenia nieliniowych zagadnień przewodnictwa cieplnego
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

ZESZYT 2/1965

- WITOLD WIERZBICKI — Wspomnienie pośmiertne
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczeniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń
Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, Pomiar sześciu składowych odkształcenia w ścisłym walcu betonowym
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego
Z. WASZCZYŚYŃ, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwnych podporach
J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu
T. AGOŚOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających
I. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych

Biuletynu Informacyjny PTMTS

ZESZYT 3/1965

- W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości
W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem
W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe
P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się szywną kulą
S. PYTKO, O możliwościach wykorzystania metody elastoptycznej dla badań wyteżenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 1/1966

- S. OCHĘDUSZKO, Zmiany spowodowane w mechanice przez międzynarodowy układ jednostek miar
W. GOGÓL, Teoria stanu uporządkowanego i możliwości jej zastosowania
J. RYCHLEWSKI, Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności
K. WILMAŃSKI, C. WOŹNIAK, Układy współrzędnych prostokreślnych w geometrii powierzchni środkowej cienkich powłok

Biuletyn informacyjny

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągle mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 25% w Oddziałach Towarzystwa.

MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Pałac Kultury i Nauki)
