

720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 4 • ZESZYT 2



PW^A

WARSZAWA 1966
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

KONSTANTY LISOWSKI — wspomnienie pośmiertne	3
J. MIASTKOWSKI, Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności Влияние истории нагружения на поверхность текучести The influence of the strain history on the yield surface	5
J. SOBIESZCZAŃSKI, Doświadczalne badania stateczności płyt trójkątnych Экспериментальное испытание трехугольных плит Experiments on triangular plate stability under load in its own plane	17
J. KLEPACZKO, Wpływ dynamicznego odkształcenia trwałego na twardość miękkiej stali i aluminium Влияние динамической деформации на твердость мягкой стали и алюминия The influence of dynamic strain on the hardness of mild steel and aluminium	43
A. WILCZYŃSKI, Doświadczalne badania własności mechanicznych polichlorku winylu Экспериментальные исследования свойств поливинилхлорида Experimental studies on properties of the polyvinyl chloride	59
J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYŹYŃ, Analiza zjawiska «przeskoku» w zakresie sprężysto-plastycznym na modelu układu kratowego Misesa Анализ явления «скачка» в упруго-пластической области на модели решетчатой системы Мизеса Analysis of the "jump" phenomenon in elastic-plastic domain based on the Mises truss model	71
B. STACHOWICZ, G. SZEFER, O pewnym zagadnieniu kontaktowym niejednorodnej półpłaszczyzny sprężystej О некоторой контактной задаче для неоднородной, упругой полуплоскости On a contact problem for nonhomogeneous elastic half-plane	83
B. KOWALCZYK, Stabilność układu wibro-uderzeniowego o wymuszeniu kinematycznym Устойчивость виброударной системы с кинематическим возмущением Stability of a vibratory-impact system with kinematical Excitation	97
Biuletyn informacyjny	109

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 4 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1966

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY

EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM

MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH

(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW

OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK

(GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OLESIĄK — R E D A K T O R

JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI

W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

R E D A K C J A

W a r s z a w a, Świątokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 8,25. Arkuszy drukarskich 7,25. Papier druk. sat. III kl., 80 g.
Oddano do składania 15.IV.66 r., druk ukończono we wrześniu 1966 r. Cena zł 27.—

Zam. 92/65 M-78 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

KONSTANTY LISOWSKI

Szczeciński Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej poniósł niepowetowaną stratę. W dniu 20 listopada 1965 r. zmarł po długiej i ciężkiej chorobie dr Konstanty LISOWSKI, emerytowany profesor nadzwyczajny Politechniki Szczecińskiej, były kierownik Zakładu Hydrauliki i Hydrologii Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodno-Melioracyjnego, wybitny uczony i badacz w zakresie oceanografii i meteorologii Bałtyku, członek założyciel i wielokrotny przewodniczący Szczecińskiego Oddziału PTMTS.

Urodzony w 1892 r. w Koziatynie na ziemi Kijowskiej po ukończeniu gimnazjum klasycznego w Kiszyniowie wstąpił w 1912 r. na Uniwersytet w Petersburgu (obecny Leningrad), na wydział fizyczno-matematyczny, na którym studiował do 1915 r. W 1916 r. przeniósł się na Uniwersytet Warszawski, gdzie studiował fizykę i matematykę. Wkrótce został wydalony z Warszawy za udział w akcji przeciw niemieckim władzom okupacyjnym. W 1920 r. uzyskał absolutorium Uniwersytetu Warszawskiego. Stopień doktora filozofii otrzymał w 1928 r. na Uniwersytecie Wileńskim.

Pracę zawodową rozpoczął w 1920 r. w Państwowym Instytucie Meteorologicznym zajmując kolejno różne stanowiska do chwili faktycznego zlikwidowania Instytutu przez władze hitlerowskie.

Pracę dydaktyczno-wychowawczą rozpoczął w 1933 r. wykładami z meteorologii lotniczej na Wydziale Mechanicznym Politechniki Warszawskiej, które to wykłady prowadził do roku akademickiego 1938/39 włącznie.

Po zakończeniu II wojny światowej pracował w latach 1945–47 w Państwowym Instytucie Hydrologiczno-Meteorologicznym.

Od roku akademickiego 1948/49 poświęcił się całkowicie pracy naukowej i dydaktyczno-wychowawczej.

W 1955 r. otrzymał tytuł docenta, w 1958 r. zaś uzyskał tytuł profesora nadzwyczajnego.

Zmarły jest autorem wielu cennych prac naukowych z dziedziny meteorologii oraz oceanologii.

Krytyczna analiza rozważanego problemu oraz śmiała myśl badawcza cechuje jego spuściznę duchową.

Odszedł od nas na zawsze Człowiek niezwykle szlachetny i prawy, o wyjątkowych cechach charakteru.

Cześć Jego pamięci!

WPLYW HISTORII OBCIĄŻENIA NA POWIERZCHNIĘ PLASTYCZNOŚCI(*)

JÓZEF MIASTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W ciągu ostatniego dwudziestolecia przeprowadzono wiele badań doświadczalnych dotyczących wpływu odkształceń plastycznych na kształt powierzchni płynięcia.

W 1947 r. D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSEN i J. E. DORN [1] przeprowadzili doświadczenia, z których wynika, że powierzchnia plastyczności dla materiału odkształconego ulega równomiernemu rozszerzeniu, co zgodne jest z koncepcją izotropowego wzmocnienia. Badania przeprowadzone przez innych autorów nie potwierdzają jednak tego wniosku.

P. M. NAGHDI, F. ESSENBURG i W. KOFF [2] w 1958 r. próbki rurkowe ze stopów aluminium wstępnie obciążali momentem skręcającym, a następnie po całkowitym odciążeniu ponownie obciążali kombinacją siły osiowej i momentu skręcającego. Stwierdzili oni, że początkowa elipsa pod wpływem odkształceń plastycznych uległa zdeformowaniu oraz przesunięciu. Podobne wyniki o przesuwanie się powierzchni płynięcia w kierunku wstępnego odkształcenia otrzymano również w pracach [3, 4, 5, 6, 8]. Odmienny schemat doświadczenia dla badania zachowania się materiału w zależności od plastycznej deformacji przedstawił W. SZCZEPIŃSKI [7] w 1963 r. Próby przeprowadzone zostały na płaskich próbkach ze stopu aluminium. Otrzymane wyniki wskazują, że hipoteza izotropowego wzmocnienia daje w praktyce lepsze przybliżenie od teorii opartej na koncepcji kinematycznego wzmocnienia uwzględniającej efekt Bauschingera.

W pracy [9] stwierdzono znaczną anizotropię, jaką nabywa materiał pod wpływem odkształcenia na zamkniętym cyklu obciążenie.

W pracach [10, 11, 12] stwierdzono, że pod wpływem odkształceń plastycznych następuje wzrost wymiarów powierzchni oraz jej przesunięcie i skręcenie.

Na podstawie wyników prac doświadczalnych można więc stwierdzić, że powierzchnia płynięcia ulega przemieszczeniu i odkształceniu, ale w dalszym ciągu nie jest wyjaśnione, w jaki sposób powierzchnia ta się przemieszcza i odkształca. Dla rozwiązania tego problemu konieczne są dalsze badania.

Celem doświadczeń przedstawionych w tej pracy było uzyskanie dalszych informacji o zachowaniu się powierzchni płynięcia w miarę wzrostu wstępnych odkształceń plastycznych. Przeprowadzenie badań przy prostych i złożonych sposobach obciążenia pozwoliło otrzymać dane o wpływie historii obciążenia na kształt powierzchni plastyczności.

(*) Praca została wyróżniona w 1965 r. jedną z dwóch równorzędnych drugich nagród na konkursie Zarządu Głównego PTMTS na pracę doświadczalną z mechaniki.

2. Próbkí i aparatura badawcza

Cienkościenne próbki rurkowe zostały wykonane z rury o średnicy wewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 1 mm. Rury wykonane były z mosiądzu M63 (CuZn37) o zawartości 37% cynku. Ze względu na sposób ich wykonania metodą ciągnięcia próbki posiadały własną historię odkształcenia. W związku z tym wszystkie próbki poddane zostały wyżarzeniu w temp. 650°C, a następnie po 2 godz. studzeniu wraz z piecem do temperatury 200°C. Dalsze studzenie odbywało się na wolnym powietrzu. Do badania wybrano drogą selekcji tylko te próbki, które posiadały prawidłowy przekrój kołowy oraz możliwie równomierny rozkład grubości ścianki zarówno wzdłuż próbki, jak i na jej obwodzie. Największa różnica w grubości ścianki nie przekraczała 3 procent jej wartości średniej. Stanowisko badawcze wyposażono w dwa niezależne hydrauliczne układy obciążające. Jeden z nich wywoływał w próbce osiowe naprężenie rozciągające za pomocą trzpienia zakończonego tłokiem. Dolny koniec próbki zamocowany był w obudowie przyrządu, a górny sztywno uchwycony wraz z trzpieniem. Przegub kulisty pomiędzy trzpieniem a tłokiem zapobiegał powstawaniu momentu zginającego w próbce. Drugi układ obciążający doprowadzał olej pod ciśnieniem do wnętrza próbki wywołując w niej naprężenia obwodowe.

Niezależność obydwu układów obciążających pozwalała realizować dowolną drogę obciążenia w pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń σ_t , σ_z , gdzie σ_t oznacza naprężenia obwodowe, σ_z — naprężenia osiowe. Odkształcenia próbek mierzono za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych o długości 15 mm. naklejanych na zewnętrznej powierzchni próbek w ich środkowym przekroju poprzecznym. Dla zwiększenia dokładności odczytów odkształcenia tensometry naklejano symetrycznie po dwa w obu kierunkach obciążenia, osiowym i obwodowym. Pomiaru odkształcenia dokonywane były przy użyciu aparatury tensometrycznej opartej na zasadzie działania mostka Wheatstonea. Podziałka skali pozwalała na odczyty odkształcenia z dokładnością do $0,5 \cdot 10^{-6}$.

3. Sposób obciążania i metoda opracowania wyników

Doświadczenia przeprowadzono na ośmiu seriach liczących po pięć lub sześć próbek. W pierwszej serii próbki nie były wstępnie odkształcane i zostały przeznaczone do zbadania kształtu początkowej powierzchni plastyczności materiału. Pozostałe siedem serii poświęcono zbadaniu zmiany kształtu powierzchni plastyczności wywołanej uprzednim odkształceniem plastycznym. Zarówno zastosowane drogi obciążenia, jak i uzyskane wyniki zostały przedstawione w pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń σ_t , σ_z , gdzie σ_t oznacza naprężenia w kierunku obwodowym, a σ_z naprężenia w kierunku osiowym.

We wszystkich próbach pomiaru odkształcenia próbki dokonywano po upływie pięciu minut od momentu przyłożenia obciążenia, tj. wtedy, kiedy pod działaniem przyłożonego obciążenia, próbka praktycznie nie wykazywała już płynięcia plastycznego.

Każda próbka jednej serii była inaczej obciążana wzdłuż drogi proporcjonalnego obciążenia, odpowiadającej jednej z linii prostych poprowadzonych na płaszczyźnie naprężeń z początku układu O . Z otrzymanych pomiarów obliczano dla każdej próbki intensywności naprężeń i odpowiadające im intensywności odkształceń. Na tej podstawie sporządzono wykresy σ_t , σ_z , σ_i w funkcji ϵ_i .

Z punktów na osi ε_i odpowiadających wartościom $\varepsilon_i^p = 0,01; 0,02; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ i $0,5\%$ prowadzono proste równoległe do początkowego prostoliniowego odcinka krzywej $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Punkty przecięcia tych prostych z krzywą σ_i przenoszono następnie na krzywe σ_1 i σ_2 znajdując w ten sposób naprężenia, które wywoływały w próbce określoną wartość intensywności trwałych odkształceń postaciowych ε_i^p . Tak otrzymane wielkości naprężeń nanoszono na płaszczyznę σ_1, σ_2 w postaci szeregu punktów położonych na wspólnej prostej przedstawiającej drogę obciążenia danej próbki. Przez punkty należące do różnych próbek, ale odpowiadające tym samym wartościom ε_i^p poprowadzono następnie krzywe oznaczając je symbolem σ_{\varkappa} z dolnym indeksem \varkappa , oznaczającym stałą dla niej wartość ε_i^p . Oprócz tego wyznaczono jeszcze na płaszczyźnie naprężeń krzywą σ_{prop} , odpowiadającą początkowi zakrzywienia się prostoliniowych początkowych części wykresów σ_1 i σ_2 w funkcji ε_i . Należy zaznaczyć, że ocena wartości granicy proporcjonalności w dużej mierze zależy od dokładności i czułości urządzenia rejestrującego odkształcenia oraz od subiektywnej oceny prowadzącego doświadczenie.

Wektory przyrostów sprężystych i plastycznych odkształceń określano metodą wykreślną na podstawie wykresów naprężenie osiowe—odkształcenie osiowe i wykresów naprężenie obwodowe—odkształcenie obwodowe. Promieniowe drogi obciążenia dla każdej próbki realizowano przez dodawanie małych przyrostów naprężenia osiowego i obwodowego na przemian w taki sposób, aby promień obciążenia był osią symetrii tych przyrostów. Największe odchylenie od promienia nie przekraczało $0,3 \text{ kG/mm}^2$.

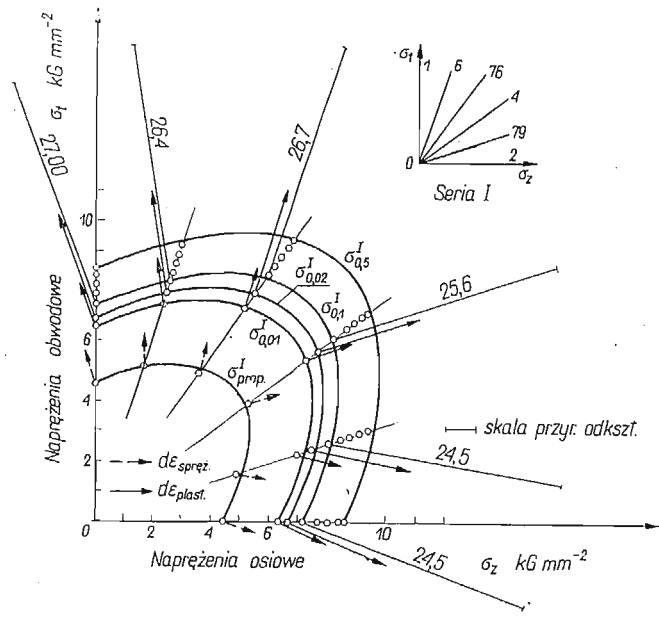
4. Wyniki pomiarów

W pierwszej serii doświadczeń sprawdzono izotropowość badanego materiału oraz kształt początkowej powierzchni plastyczności. Każdą z sześciu próbek bez wstępnego odkształcenia obciążano wzdłuż promieni zaznaczonych na rys. 1. Przez σ_{prop}^I oznaczono krzywą odpowiadającą granicy proporcjonalności, a następnie przez $\sigma_{0,01}^I; \sigma_{0,02}^I; \sigma_{0,1}^I; \sigma_{0,2}^I; \sigma_{0,3}^I; \sigma_{0,4}^I; \sigma_{0,5}^I$ oznaczono krzywe wywołujące w próbce określoną wartość intensywności trwałych odkształceń plastycznych $\varepsilon_i^p = 0,01; 0,02; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ i $0,5\%$. Krzywe te dobrze pokrywają się z teoretycznymi elipsami Hubera-Misesa.

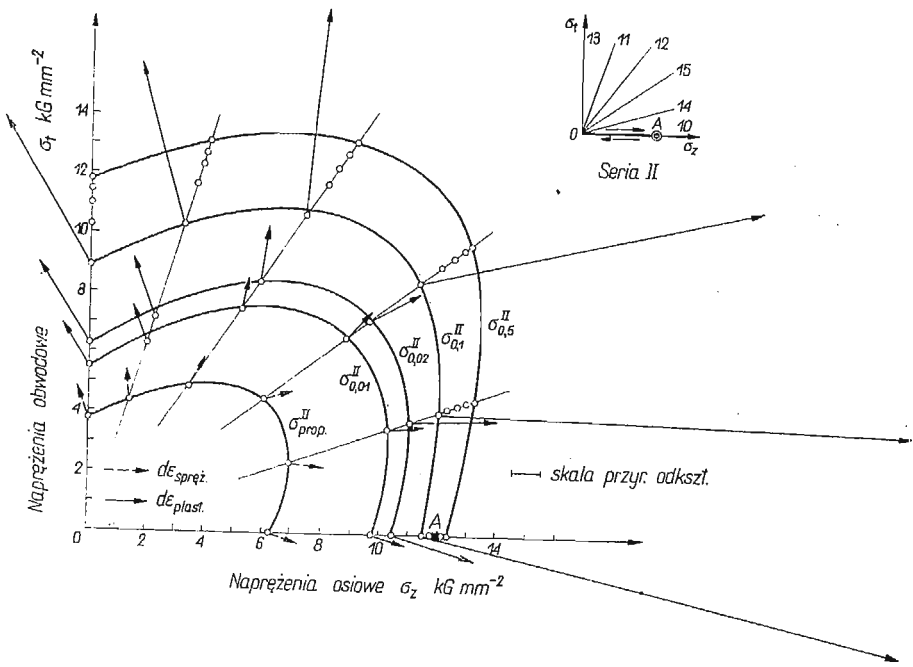
Wszystkie próbki drugiej serii zostały wstępnie jednakowo odkształcone plastycznie wzdłuż drogi OA daleko poza początkowy punkt płynięcia, a następnie odciążone wzdłuż tej samej drogi od punktu A do punktu O (rys. 2). Po naklejeniu tensometrów na próbkach następnego dnia badano kształt powierzchni plastyczności odkształconego materiału.

Na rysunku 3 dokonano porównania otrzymanych krzywych z pierwszej serii dla materiału nieodkształconego wstępnie z krzywymi otrzymanymi w serii drugiej dla materiału wstępnie obciążonego do punktu A . Dla przejrzystości do porównania wzięto tylko krzywe odpowiadające $\sigma_{prop}, \sigma_{0,01}; \sigma_{0,5}$. Z porównania odpowiednich krzywych wynika, że różnią się one od siebie w sposób zasadniczy. Krzywe σ_{prop}^{II} i $\sigma_{0,01}^{II}$ potwierdzają dość dobrze hipotezę wzmocnienia kinematycznego, natomiast krzywa $\sigma_{0,5}^{II}$ niezbyt wiele odbiega od elipsy otrzymanej przez równomierne rozszerzenie elipsy Hubera-Misesa. Wyraźnie widać, że granica proporcjonalności dla materiału wstępnie odkształconego plastycznie wykazuje silne własności anizotropowe.

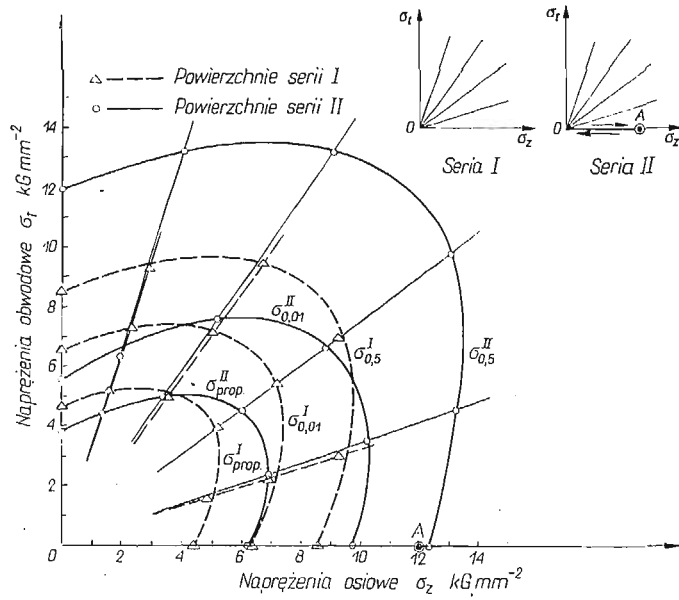
Trzecią serię próbek obciążono wstępnie w bardziej złożony sposób, co pokazano na rys. 4. Próbki obciążone początkowo identycznie jak w serii drugiej na drodze OA



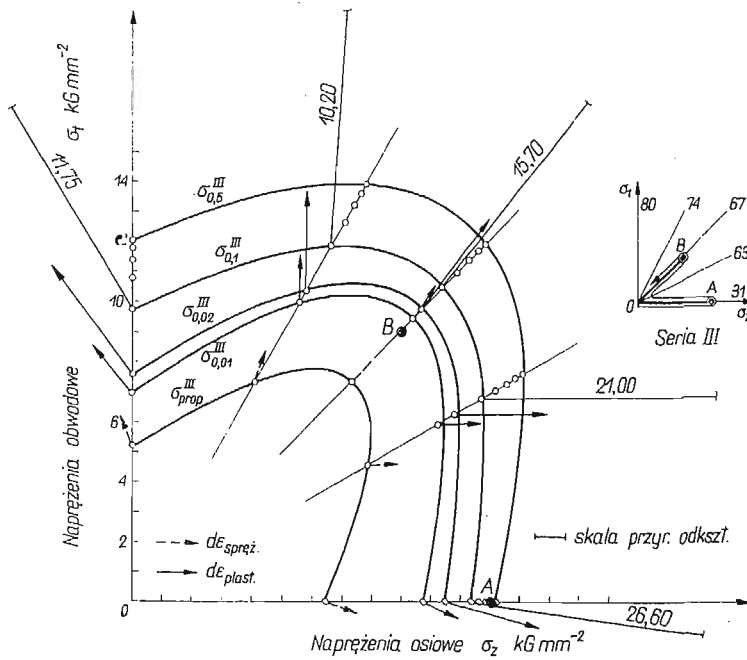
Rys. 1



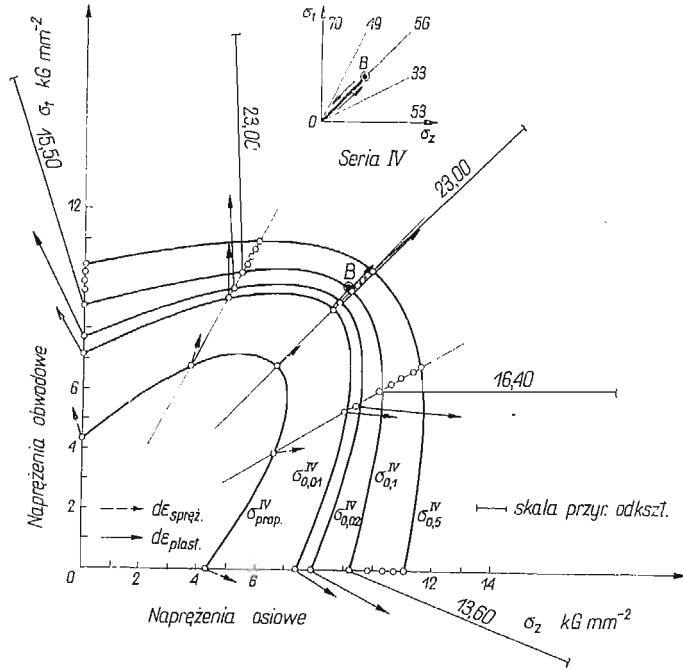
Rys. 2



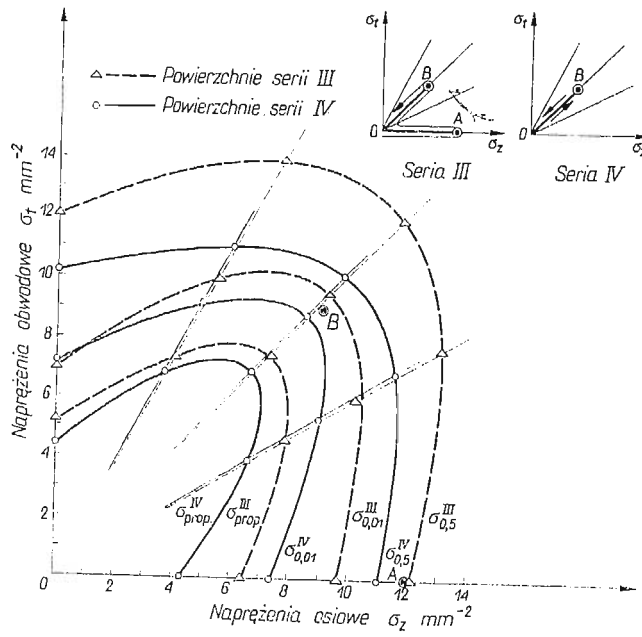
Rys. 3



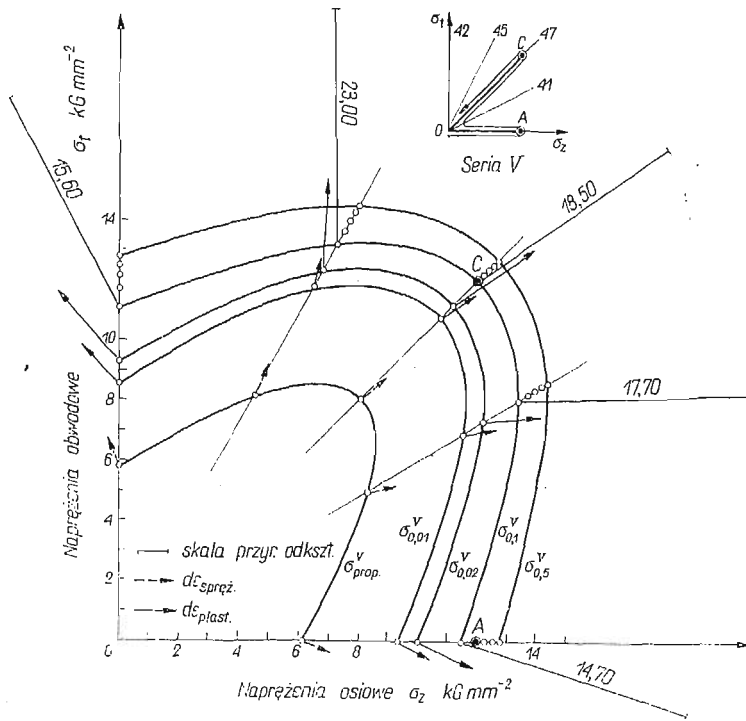
Rys. 4



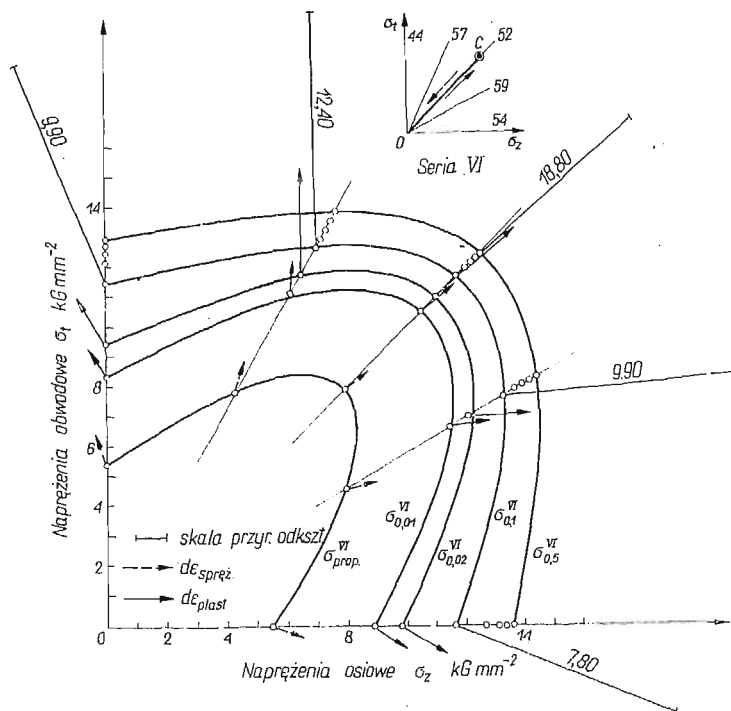
Rys. 5



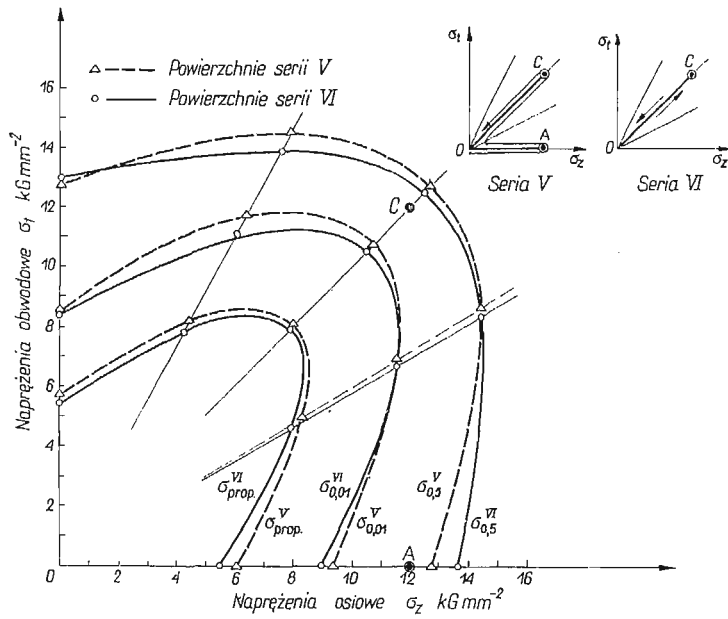
Rys. 6



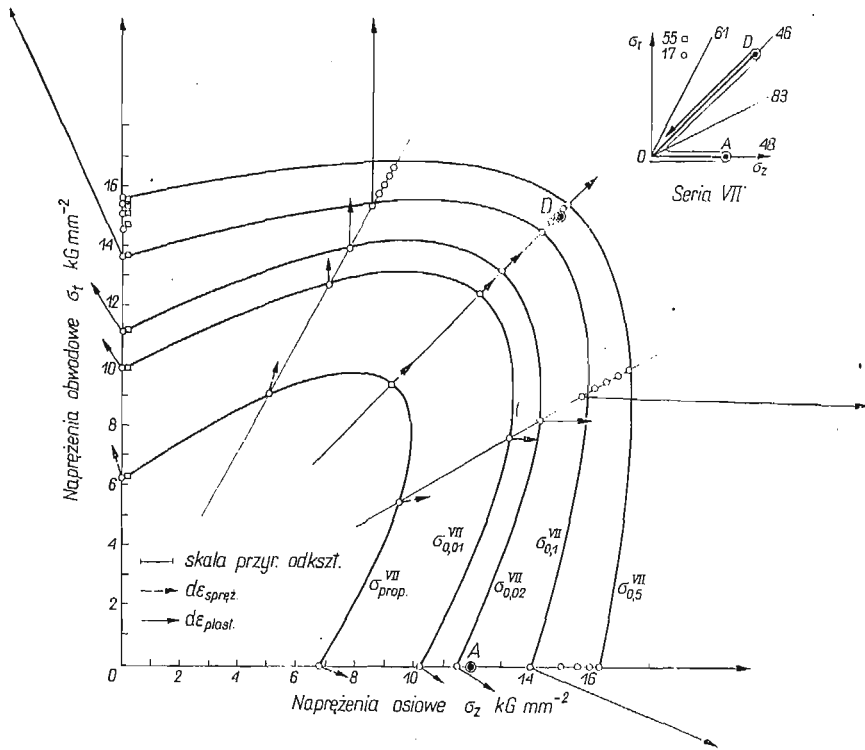
Rys. 7



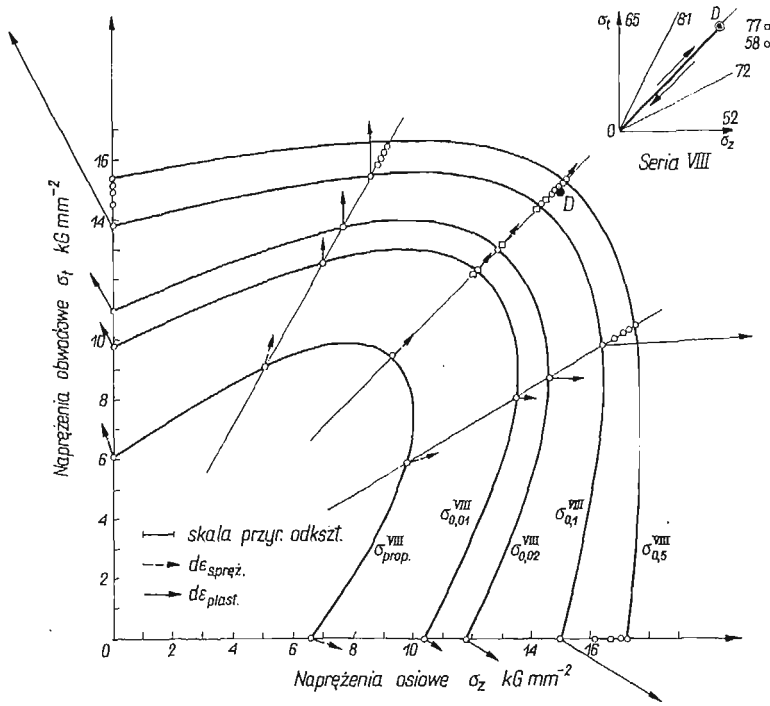
Rys. 8



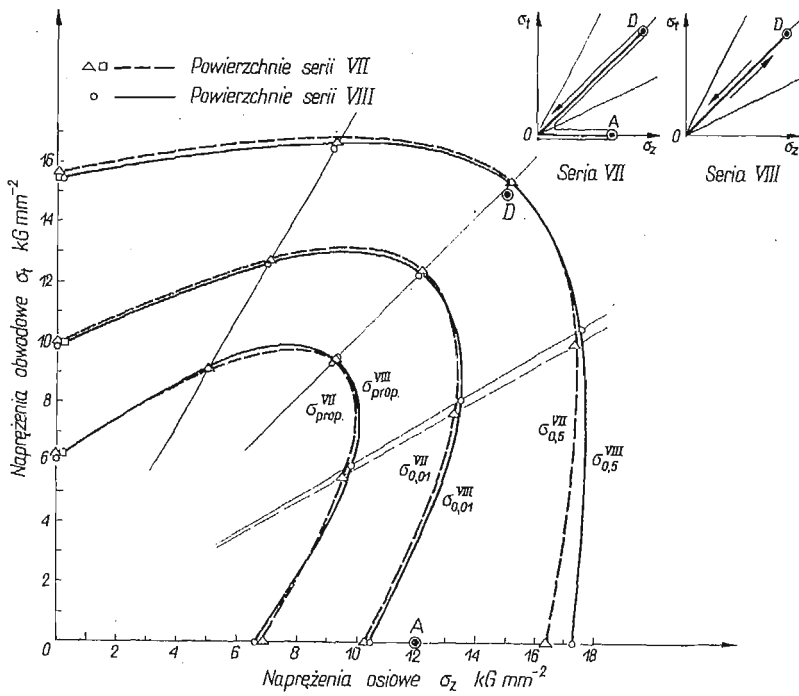
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

i odciążone do punktu O zostały ponownie obciążone, ale wzdłuż innej drogi OB , po czym odciążano je do punktu początkowego O . Następnie obciążając próbki wzdłuż promieni pokazanych na rys. 4 wyznaczono krzywe odpowiadające $\sigma_{prop}^{III}; \sigma_{0,01}^{III}, \dots, \sigma_{0,5}^{III}$. Taki sposób obciążenia wstępnego zastosowano w celu stwierdzenia, czy możliwe jest w drugim etapie obciążenia na drodze OB zlikwidowanie skutków powstałych w materiale na pierwszej drodze wstępnego obciążenia OA .

W serii czwartej wszystkie próbki wstępnie obciążono na drodze OB (rys. 5) pokrywającej się z drugim etapem obciążenia wstępnego zastosowanego dla próbek z serii trzeciej. Po wyznaczeniu krzywych $\sigma_{prop}^{IV}; \sigma_{0,01}^{IV}, \dots, \sigma_{0,5}^{IV}$ przeprowadzono porównanie otrzymanych wyników z serii trzeciej i czwartej na rys. 6. Wyraźnie widać różny przebieg odpowiednich krzywych z obu serii.

Piątą serię próbek poddano wstępnemu obciążeniu w podobny sposób jak serię trzecią zwiększając jedynie długość drugiego odcinka drogi wstępnego obciążenia OC , przy identycznej długości pierwszego odcinka drogi OA . Przebieg krzywych dla tak uprzednio obciążonego materiału pokazano na rys. 7.

Droga wstępnego obciążenia OC dla próbek w serii szóstej (rys. 8) pokrywa się z drugim etapem drogi obciążenia próbek w serii piątej. Porównanie otrzymanych krzywych dla piątej i szóstej serii próbek przedstawiono na rys. 9. Jak widać, odpowiednie krzywe dla tych dwóch serii mają przebieg bardzo zbliżony do siebie. Otrzymana zgodność przebiegów tych krzywych nastąpiła na skutek zwiększenia drugiego odcinka drogi wstępnego obciążenia OC .

W analogiczny sposób zbadano jeszcze dwie serie próbek, siódmą (rys. 10) i ósmą (rys. 11), stosując jeszcze dłuższą drogę wstępnego obciążenia na drugim odcinku OD .

Porównania otrzymanych krzywych z serii siódmej i ósmej dokonano na rys. 12. Bardzo dobra zgodność przebiegu odpowiednich krzywych jeszcze bardziej potwierdza wyniki uzyskane na próbkach w serii piątej i szóstej.

Uzyskane wyniki wskazują, że jeżeli próbki już raz obciążone i odciążone na drodze OAO obciążymy ponownie, ale na innej drodze, to możliwe jest zlikwidowanie skutków, wywołanych w materiale odkształceniem na drodze pierwszej, o ile wielkość tej drugiej drogi jest dostatecznie duża. Dla tego przypadku zgodność przebiegu krzywych nastąpiła już dla serii piątej i szóstej, dla których drogi wstępnego obciążenia przebiegały po linii OAO i OCO . Wielkość intensywności naprężeń wywołanych obciążeniem na drodze OC jest tutaj w przybliżeniu równa intensywności naprężeń wywołanych obciążeniem na pierwszym odcinku drogi OA . Zwiększenie wielkości obciążenia na drugim odcinku drogi, jakie miało miejsce w następnych dwóch seriach przy obciążeniu próbek na drodze $OADO$ i ODO , tylko nieznacznie poprawiło zgodność obydwu grup krzywych. Wynika stąd, że już dla serii piątej materiał podczas obciążenia na drodze OAO zapomina na odcinku drogi OC o skutkach w nim wywołanych odkształceniem wzdłuż drogi OA i zachowuje się tak, jak materiał obciążony wstępnie tylko na drodze OC .

Dla wszystkich serii próbek na krzywe odpowiadające granicy proporcjonalności naniesiono wektory odkształceń sprężystych, a na krzywych odpowiadających intensywności odkształceń $\varepsilon_p^e = 0,01; 0,02; 0,1\%$, pokazano wektory przyrostów odkształceń plastycznych, wyznaczonych drogą różniczkowania wykreślonego odpowiednich krzywych naprężenie-odkształcenie. Jak wynika z rysunków, wektory te są na ogół prostopadłe do po-

wierzchni, dla których zostały wyznaczone. Szczególnie wyraźnie widać to na rys. 2, gdzie przebieg poszczególnych krzywych znacznie się od siebie różni. Dokładny opis sposobu wyznaczenia wektorów podano w pracy [12].

5. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych doświadczeń wykazują, że granica proporcjonalności dla materiału wstępnie odkształconego wykazuje silne własności anizotropowe. Anizotropia ta maleje dla powierzchni plastyczności zdefiniowanych większymi wielkościami odkształceń plastycznych. Wyznaczone wektory przyrostów odkształcenia plastycznego są na ogół prostopadłe do powierzchni plastyczności.

Najbardziej interesujące jest to, że pod wpływem odpowiednio dużego obciążenia wtórny materiał zapomina o swojej pierwotnej historii obciążenia i zachowuje się tak jak materiał obciążony tylko tym późniejszym sposobem obciążenia. W przypadku tym o własnościach materiału decydują tylko ostatnie stany obciążenia, pod których działaniem się znajdował. Wniosek ten oprócz znaczenia teoretycznego posiada również duże znaczenie praktyczne. Wskazuje on, że za pomocą odpowiedniego obciążenia istnieje możliwość usunięcia pewnych własności mechanicznych, które materiał nabył w przeszłości na skutek odkształceń plastycznych.

Literatura

1. D. M. CUNNINGHAM, E. G. THOMSEN, J. E. DORN, *Plastic flow of magnesium alloy under biaxial stresses*, Proc. ASTM, **47** (1947), 546-553.
2. P. M. NAGHDI, F. ESSENBERG, W. KOFF, *An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity*, J. Appl. Mech., **25** (1958), 205-209.
3. Ю. И. ЯГН, О. А. ШИШМАРЕВ, *Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов шпекля*, ДАН СССР, **119**, 1, 1958, 46-48.
4. Г. Б. ТАЛЫПОВ, В. Н. КАМЕНЦЕВ, *Исследование границ текучести и некоторых других эффектов при сложном нагружении*, Механика, Ученые записки ЛГУ. № 280, серия математ. наук, В. 35, 1960.
5. H. J. IVEY, *Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys*, J. Mech. Eng. Sc., **3**, 1961, 15-31.
6. О. А. ШИШМАРЕВ, *Изучение участка границы текучести противоположной точке нагружения*, Изв. АН СССР, отн. мех. и машиностр., № 4, 1962, 159-164.
7. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., **2**, **15** (1963), 275-296.
8. О. А. ШИШМАРЕВ, *Исследование границ текучести пластически деформированных образцов шпекля*, Инженерный Ж., **4**, **3**, (1963), 740-747.
9. Р. А. АРУТЮНЯН, *О циклическом нагружении упруго-пластической среды*, Изв. АН СССР, мех. и машиностр., **4**, 1964, 89-91.
10. W. M. MAIR and H. PUGH, *Effect of prestrain on yield surfaces in copper*, J. Mech. Engng. Sci., **2**; **6** (1964), 150-163.
11. J. PARKER, M. B. BASSET, *Plastic stress-strain relationships — some experiments to derive a subsequent yield surface*, J. Appl. Mech., **4**, **31** (1964).
12. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **2**, **3** (1965).

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЕКУЧЕСТИ

В работе представлены результаты исследования вида поверхности текучести для материала подвергнутого предварительному пластическому деформированию. Опыты проводились на трубчатых образцах из латуни М63 (37% цинка), выполненных из тянутой трубы. Образцы разделялись на серии, по разному предварительно деформированные. Одни серии образцов подвергались следующему предварительному воздействию: нагружение осевой силой-разгрузка-деформирование по другому пути. Для других серий применялось нагружение соответствующее лишь второму этапу описанного. Для каждой серии определялся предел пропорциональности и несколько условных поверхностей текучести, соответствующих определенным значениям интенсивности пластической деформации. Путем сравнения результатов полученных для разных серий исследовано влияние начальных пластических деформаций на вид поверхности текучести, при отличии способа начального деформирования от способа последующего деформирования.

S u m m a r y

THE INFLUENCE OF THE STRAIN HISTORY ON THE YIELD SURFACE

Experimental results for forty four tubular specimens of a M63 brass, subjected to combined biaxial tension, are presented in the study of the influence of the loading history on the shape of the yield surface. Three sets of specimens, each of them containing two groups of six or five specimens were investigated. The initial sectors of loading path for both groups in one set were different, while the final vectors were the same. It was shown that for this final sector being sufficiently long in comparison with the initial one, the shape of the yield surface does not depend on the initial sector of the loading path.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 października 1965 r.

DOŚWIADCZALNE BADANIA STATECZNOŚCI PŁYT TRÓJKĄTNYCH(*)

JAROSŁAW SOBIESZCZAŃSKI (WARSZAWA)

Wstęp

W pracy niniejszej omówione są doświadczenia przeprowadzone nad wyboczeniem płyt trójkątnych. Doświadczenia te zostały wykonane w latach 1964–1965 w laboratorium Instytutu Lotnictwa Politechniki Norweskiej w Trondheim, kierowanym przez prof. Johna Lockwooda TAYLORA.

Program doświadczeń został sfinansowany przez NTNf — organizację rządu norweskiego, powołaną do spraw popierania badań naukowych. Rezultaty doświadczeń zostały porównane z wynikiem teorii opracowanej przez *ing. Per V. PEDERSENA* [6].

Problem określenia obciążeń krytycznych dla płyty trójkątnej był przedmiotem wielu prac teoretycznych, w tym także i autorów polskich [7–10]. Wspólną cechą tych prac jest ograniczenie ich wyników do jednego lub kilku szczególnych przypadków obciążenia i proporcji trójkąta oraz rodzaju warunków brzegowych. Ścisłego rozwiązania obejmującego wszystkie możliwe kombinacje wchodzących w grę parametrów brak w literaturze.

Celem weryfikowanej pracy [6] jest stworzenie metody numerycznej, określającej wartość obciążenia krytycznego dla każdego dowolnego przypadku płyty trójkątnej, określonego zestawem parametrów podawanych na wejściu cyfrowej maszyny elektronicznej, zaprogramowanej według tej metody. Metoda sprowadza się do zastąpienia różniczkowego liniowego równania stateczności płyty równaniem różnic skończonych w trójkątnej siatce punktów węzłowych, co przy zastosowaniu rachunku macierzowego prowadzi do tzw. problemu ogólnego wartości własnych dla macierzy określającej postać ugięcia płyty.

Autor wyraża gorące podziękowanie tym wszystkim, którzy przyczynili się do wykonania programu badań, w szczególności zaś prof. J. L. TAYLOROWI, *ing. P. V. PEDERSENOWI* i organizacji NTNf.

1. Założenia ogólne i cel programu doświadczeń

Głównym celem doświadczeń była weryfikacja teorii określającej siły krytyczne dla płyt trójkątnych. Według tej teorii otrzymano szereg wartości liczbowych obciążeń krytycznych, które miały być porównane z wynikami doświadczeń. Ponieważ doświadczenia miały mieć charakter weryfikacji, uznano za możliwe ograniczyć ich liczbę do najbardziej typowych przypadków zakładając, że dobra zgodność z teorią, otrzymaną w tej ograniczonej liczbie eksperymentów, pozwala z wystarczającym prawdopodobieństwem ocenić

(*) Praca została wyróżniona w r. 1965 jedną z dwóch równorzędnych drugich nagród na konkursie Zarządu Głównego PTMTS za najlepszą pracę doświadczalną.

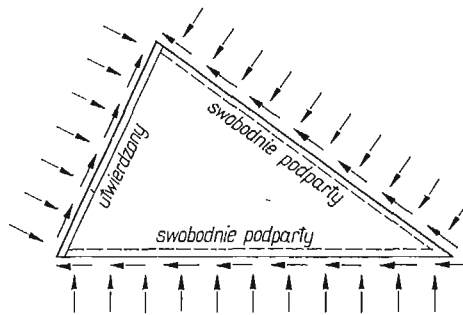
teorię jako dającą dostateczną dokładność również i w innych niezwyfikowanych doświadczalnie przypadkach. Teoria jest ogólna i pokrywa wszystkie możliwe proporcje trójkąta, rodzaje obciążenia i warunków brzegowych, a zatem jej doświadczalna weryfikacja oznacza rozwiązanie zagadnienia stateczności płyty trójkątnej.

Dodatkowym celem było opracowanie techniki doświadczalnej z uwzględnieniem jej ewentualnego szerszego zastosowania do badania podobnych zagadnień dla płyt innych niż płyty trójkątne.

2. Wymagania stawiane urządzeniu badawczemu

Dla przeprowadzenia doświadczeń było rzeczą niezbędną wykonanie specjalnych urządzeń umożliwiających:

- 1) zamocowanie płyty o dowolnym kształcie trójkątnym (w pewnych granicach poddyktowanych względami konstrukcyjnymi);
- 2) podparcie krawędzi płyty w sposób swobodny, swobodnie oparty, zamocowany;



Rys. 1. Dowolna płyta trójkątna obciążona w sposób dowolny na krawędziach z dowolną kombinacją warunków brzegowych

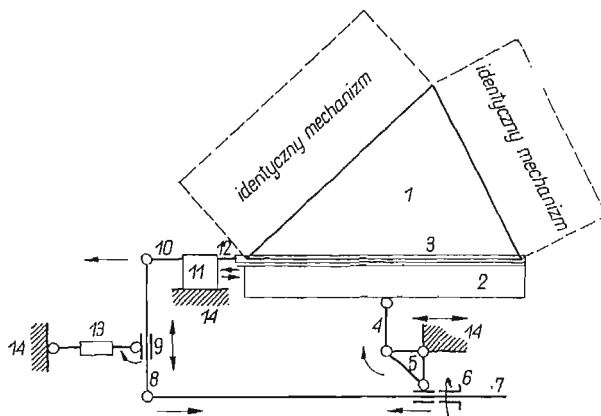
- 3) obciążenie płyty na jej krawędziach siłami normalnymi i stycznymi do krawędzi płyty, leżącymi w jej płaszczyźnie (rys. 1); obciążenie to jest samorzównoważone o zmiennych składowych stycznych i normalnych;
- 4) łatwy dostęp do obu powierzchni płyty dla ewentualnej realizacji obciążeń poprzecznych;
- 5) pomiar naprężeń i odkształceń płyty.

3. Schemat urządzenia

Zgodnie z wymaganiami sformułowanymi w poprzednim rozdziale zaprojektowano i wykonano urządzenie, którego schemat mechaniczny jest przedstawiony na rys. 2.

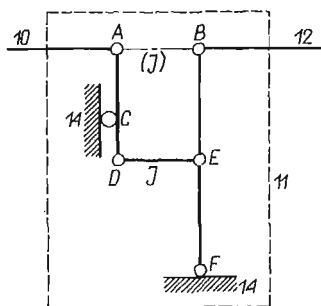
Płyta trójkątna 1 przedstawiona na rys. 2 znajduje się w pozycji poziomej. Każda jej krawędź obciążona jest siłami normalnymi za pośrednictwem elementu 2 i stycznymi przez element 3. Elementy 2 i 3 mogą poruszać się swobodnie w poziomie. Element 2 połączony jest dźwignią 5 ze sztywną ramą urządzenia.

Nakrętka 6 osadzona jest na długiej śrubie 7 przechodzącej przez otwór w ramieniu dźwigni 5 i połączonej z dźwignią 8, która łączy się z ramą urządzenia poprzez element dynamometryczny 13 i z elementu 3 za pośrednictwem prętów 10 i 12.



Rys. 2. Mechaniczny schemat urządzenia

Element 2 naciska krawędź płyty, jeśli nakrętkę 6 przesuwać wzdłuż śruby 7 na lewo, obracając ją w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, ponieważ ruch nakrętki zmusza dźwignię 5 do obrotu. Równowaga śruby 7 jest zapewniona przez dźwignię 8, która obraca się wokół punktu 9 pociągając poprzez 10 i 11 element 3 realizujący styczne obciążenia krawędzi (w lewo).



Rys. 3. Mechanizm odwracający (nr 11 na rys. 2)

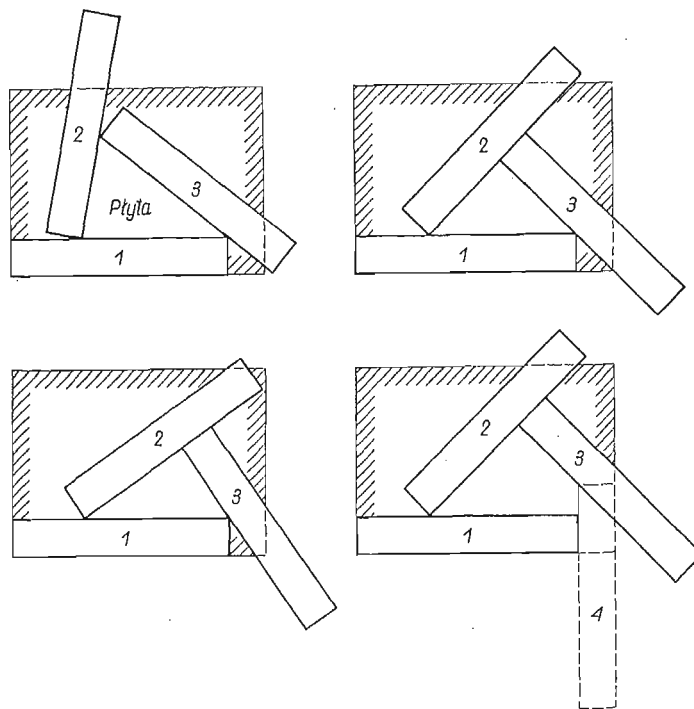
Punkt 9 można przesuwać wzdłuż dźwigni D zmieniając w ten sposób stosunek składowych normalnej i stycznej obciążenia. Pomędzy pręty 10 i 12 wbudowano mechanizm odwracający (rys. 3). Mechanizm ten składa się z dwu dźwigni AD z punktem obrotu w C i BF z punktem obrotu w F . Łącznik J może być założony między AB lub DE . W pozycji AB łącznik J zmusza pręt 12 do postępowania za prętem 10. W pozycji DE łącznika 7 pręt 12 porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu pręta 10 przy zachowaniu wartości przekazywanej siły, ponieważ $AC:CD = BF:EF$. W ten sposób ścinanie może być kierowane

w lewo lub w prawo, co ma zasadnicze znaczenie dla realizacji dowolnego przypadku obciążenia.

Wypadkowe obciążenie (suma ścinania i ściskania) jest mierzone przez element 13 — pręt z naklejonymi tensometrami, cechowany na maszynie wytrzymałościowej. Dźwignię 5 można przesuwac wzdłuż krawędzi płyty dla utrzymania pręta 4 w środku jej długości.

Wszystkie części ruchome ułożyskowano na łożyskach kulkowych dla zredukowania tarcia, którego dalszą eliminację zapewnia elektromagnetyczny wzbudnik drgań, zamocowany do masywnej stalowej ramy urządzenia. Dzięki zastosowaniu wibratora otrzymano znikomą małą pętlę histerezy i wysoki stopień powtarzalności.

Opisany mechanizm obciążający *jedną krawędź* płyty został powtórzony trzykrotnie w trzech oddzielnych jednostkach przymocowanych do wspólnej bardzo sztywnej stalowej podstawy. Omówiony proces obciążenia ma miejsce na jednym z mechanizmów. Obciążenia



Rys. 4. Urządzenie ustawione do różnych kształtów badanej płyty

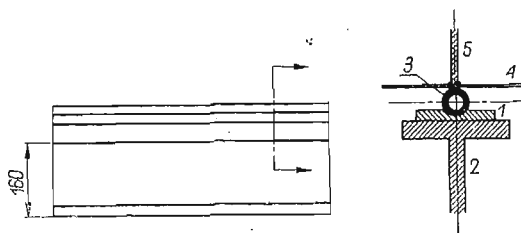
żenia pozostałych krawędzi wywołane są jako reakcje bierne. Wartości biernych reakcji zostały sprowadzone tensometrowaniem i porównane z wartościami wynikającymi z wartości sił czynnych i równań równowagi. Porównanie to wykazało dobrą zgodność, co potwierdza skuteczność drgań jako środka eliminującego straty tarcia. Przez właściwe usytuowanie trzech mechanizmów obciążających na wspólnej podstawie można je dopasować do płyty o dowolnym trójkątnym kształcie (rys. 3). Dodanie podobnego czwartego mechanizmu, który może być uproszczony jako dający tylko reakcje bierne, stwarza możliwość badania płyt czworokątnych o dowolnym nieregularnym kształcie.

4. Opis konstrukcji urządzenia

Rysunki techniczne urządzenia przechowywane są w Instytucie Lotnictwa Politechniki Norweskiej. Niektóre szczegóły konstrukcyjne przedstawiają zdjęcia załączone w dodatku 1.

Niniejszy opis dotyczy niektórych rozwiązań istotnych dla zapewnienia równomierności rozkładu obciążenia wzdłuż krawędzi i właściwych warunków brzegowych.

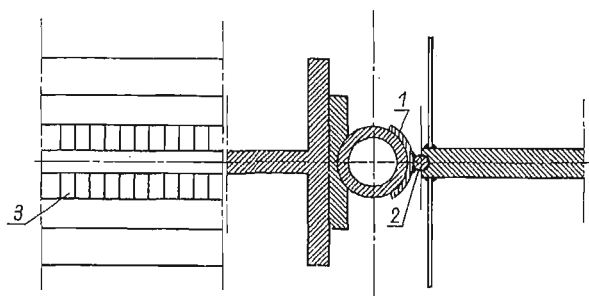
4.1. Obciążenie ściskające. Przypadek krawędzi podpartych swobodnie. Dwa rozwiązania. Siła kierana przez dźwignię 5 (rys. 2), rozkładana jest na równomierne obciążenie wzdłuż krawędzi przez belkę 2 przedstawioną na rys. 5



5. Belka i rura gumowa z wodą zapewniająca równomierność obciążenia

Na płycie znajduje się rura gumowa w specjalnym uchwycie. Rura zamknięta na końcach. Woda zgodnie z prawem Pascala zapewnia równoobciążenie, które powstaje, gdy rura ściskana jest pomiędzy krawędzią

przepon 4 przylutowanych do płyty jest obciążenie krawędzi stycznymi (p. 4.2). Przepony te są dostatecznie wiotkie, aby można było wpływać na warunki brzegowe (jak wykazano w dodatku 2.2), a zatem rozwiązane na rys. 5 zapewnia z dostatecznym przybliżeniem warunki brzegowe swobodnego podparcia.



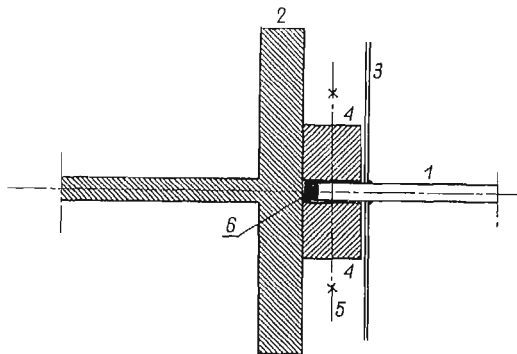
Rys. 6. Alternatywne rozwiązanie swobodnego podparcia

W rozwiązaniu tym istnieje możliwość regulacji mimośrodowość obciążenia ściskającego przez zmianę położenia płyty względem osi rury, co ułatwia zastosowanie metody Southwella (p. 6) do analizy wyników doświadczenia.

Inne rozwiązanie pokazano na rys. 6.

Modyfikacja polega na zastosowaniu zakrzywionego paska stalowego *1* przyklejonego do rury gumowej. Pasek ten pocięty jest poprzecznie na krótkie odcinki, co pozbawia go sztywności giętej w płaszczyźnie płyty. Ta sztywność gięta mogłaby zakłócić równomierność obciążenia. Druk 2 jest przylutowany do paska i wchodzi w rowek wycięty w grubości płyty wzdłuż krawędzi zapewniając jej podparcie pionowe i swobodny obrót. Rozwiązanie to okazało się w praktyce lepsze od poprzedniego.

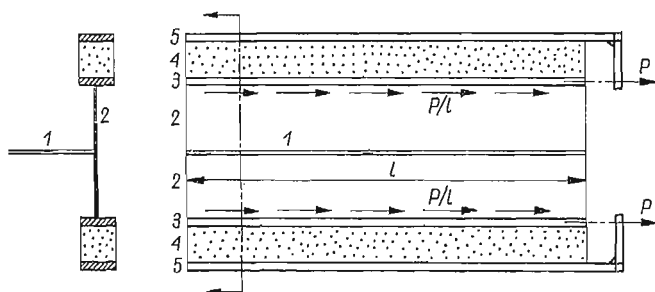
Przypadek krawędzi zamocowanej. Margines płyty *1*, wystający poza przepony *3*, tkwi w szczelinie pomiędzy dwoma obrobionymi listwami stalowymi *4*, lekko dociśniętymi do płyty śrubami *5*. Smarowanie szczeliny redukuje tarcie. Pasek gumy *6* zapewnia równomierność obciążenia. Obrót jest uniemożliwiony, a zatem warunki brzegowe odpowiadają zupełnemu zamocowaniu.



Rys. 7. Przypadek krawędzi zamocowanej

4.2. Obciążenie styczne do krawędzi płyty. Obciążenie styczne realizowane jest w sposób pokazany na rys. 8.

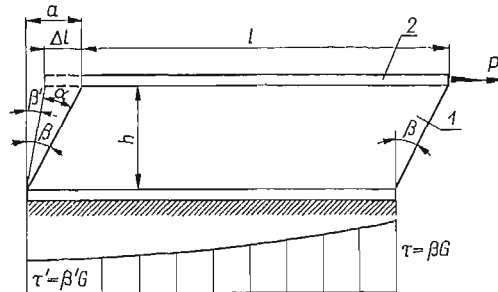
Jak powiedziano poprzednio do płyty przylutowano pionowe przepony 2 wzdłuż każdej krawędzi. Krawędź przepony jest usztywniona podłużnicą stalową 3, do której przyklejony jest pas gumowy 4. Do przeciwległej strony pasa gumowego przyklejona jest sta-



Rys. 8. Obciążenie styczne

lowa podłużnica 5 obciążona siłą P . Pas gumowy pracuje na ścinanie i zamienia siłę skupioną P na wydatek naprężeń stycznych, działających na podłużnicę 3. Równomierność rozkładu ścinania jest zapewniona przez bardzo małą sztywność gumy (rys. 9) w porównaniu ze sztywnością podłużnicy 5.

Ścinanie przekazywane jest dalej na płytę przez przeponę 2. Płytę z przeponami wykonano z brązu z uwagi na jego dobrą lutowalność. Pionowe przepony, jak wykazało doświadczenie, nie tracą stateczności przy największych realizowanych obciążeniach



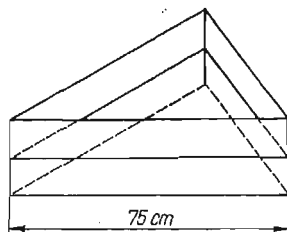
Rys. 9. $\beta' < \beta$, ponieważ $\beta' = \beta - \alpha$; $\alpha \approx \frac{\Delta l}{h}$, a więc $\tau' < \tau$, ponieważ $\tau = \beta G$ i $\tau' = \beta' G$. Jeśli $\omega \gg \Delta l$ ($\alpha = \beta h$)

co ma miejsce, jeśli 1 wykonano z gumy, a 2 ze stali, wtedy względna różnica $\frac{\tau - \tau'}{\tau}$ staje się pomijalnie mała

Trzeba wspomnieć, że utrzymanie równomierności ścinania zależy także od odkształcenia płyty; wpływ tych odkształceń jest jednak nieznaczny, jak wynika z pomiarów (dodatek 2.1).

5. Płyta

Płyty (rys. 10) badane w opisanym urządzeniu zostały wykonane z brązu. Moduł E użytego brązu został zmierzony. Wynosi on: $E = 1,12 \cdot 10^6$ kG/cm². Grubość płyt



Rys. 10. Płyta

z brązu $t = 1,5$ mm. Najdłuższy bok płyty był ograniczony przez konstrukcję urządzenia do 75 cm. Kształty zbadanych płyt są podane w p. 8.

6. Instrumenty pomiarowe

Doświadczenia obejmowały pomiar następujących wielkości:

- 1) naprężenia w wybranych punktach płyty po obu jej stronach (a także w pionowych przeponach dla kontroli równomierności rozkładu ścinania),
- 2) naprężenia w wybranych częściach urządzenia (rys. 2) dla kontroli obciążeń,
- 3) ugięcie środka płyty.

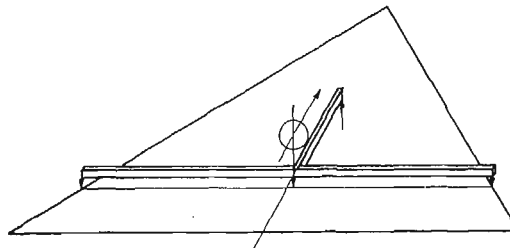
Pomiaru naprężeń dokonano tensometrami elektrooporowymi typu Standard PKL10—120 Ω , stała $k = 2$ oraz rozeta 45° \times 3 PR-50 tych samych danych oporowych.

Tensometry elektrooporowe połączone były z tensometrami kompensacyjnymi w system pół-mostka. W niektórych przypadkach dla pomiaru wyłącznie naprężeń zginających w płycie odpowiednie tensometry z obu stron płyty połączone jak czynny i kompensacyjny w system pół-mostka, co podwaja wskazania.

Zastosowano aparat pomiarowy typu Peekel (holenderski) z odczytem zerowym. Najmniejsza działka skali odpowiadała $10 \mu S$ (mikrostrerinów, $1 \mu S = 10^{-6}$ odkształcenia względnego), co pozwalało (po pewnej praktyce) odczytywać odkształcenia rzędu $2,5 \mu S$. Element dynamometryczny 13 odkształcał się $572 \mu S/1000 \text{ kG}$ a więc $2,5 \mu S$ odpowiadało $4,37 \text{ kG}$, co było najmniejszą mierzalną wartością obciążenia.

Ugięcia mierzono czujnikami warsztatowymi trzech różnych typów a także specjalnym czujnikiem przemieszczenia. Zastosowano czujniki warsztatowe:

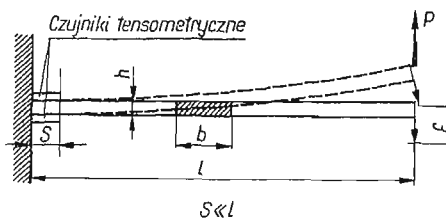
- typ 0 — 10 mm najmniejsza działka $1/100 \text{ mm}$,
- typ 0 — 15 mm najmniejsza działka $1/2000 \text{ mm}$,
- typ 0 — 1,5 mm najmniejsza działka $1/1000 \text{ mm}$.



Rys. 11.

Czujniki zamocowano na specjalnej belce (rys. 11), która eliminowała z ich wskazań ruch płyty jako ciała sztywnego. Do wad czujników warsztatowych należy konieczne użycie znacznej siły, potrzebnej do poruszenia ich mechanizmu (rzędu 70 G) oraz występujące duże siły tarcia.

Jeśli czujniki pozostają w kontakcie z tak podatnym obiektem jak płyta, to siły te stają się dodatkowymi więzami wpływającymi na jej zachowanie (szczególnie na powtarzal-



Rys. 12. Czujnik przemieszczenia

ność wyników). Dla uniknięcia tych trudności zaprojektowano i wykonano specjalny czujnik przemieszczenia. Czujnik wykonany jest jako pasek plexiglasu pracujący jako wysięgnikowa belka zginana (rys. 12). Przesunięcie końca belki jest mierzone tensometrami u jej nasady.

Jak wiadomo, odkształcenie względne u nasady wynosi

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{h}{l^2} f.$$

Jeśli tensometry połączone są w układ czuły wyłącznie na zginanie, to wskazane ε_i wynosi

$$\varepsilon_i = 2\varepsilon = 3 \frac{h}{l^2} f.$$

Dla przyjętego maksymalnego ugięcia f_{\max} otrzymuje się siłę P_{\max} :

$$P_{\max} = \frac{3}{12} \frac{Ebh^3}{l^3} f_{\max}.$$

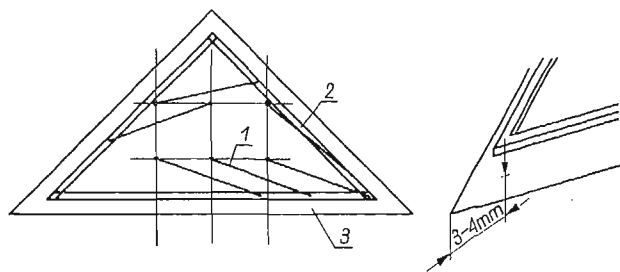
Dane zastosowanego czujnika przemieszczenia są następujące: $l = 20$ cm, $h = 0,1$ cm, $b = 1$ cm, $f_{\max} = 2,5$ cm, $E = 3 \cdot 10^4$ kG/cm². Z danych tych wynika:

$$\varepsilon_{i \max} = 1870 \cdot 10^{-6} = 1870 \mu\text{S},$$

$$P_{\max} = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ kG}.$$

Wartość siły P_{\max} jest zatem tak mała, że jej wpływ na zachowanie się płyty może być pominięty. Najmniejsza działka $10\mu\text{S}$ odpowiada $0,34$ mm, a jest możliwy odczyt $1/4 \cdot 0,34 = 0,085$ mm, co zapewnia rozsądną dokładność dla dużych odkształceń.

Czujnik mierzy także ujemne (skierowane w dół) ugięcia płyty postępując za nią pod wpływem własnego ciężaru, a więc zakres mierzonych ugięć jest równy $\pm 2,5$ cm.



Rys. 13. Wielopunktowy czujnik przemieszczenia

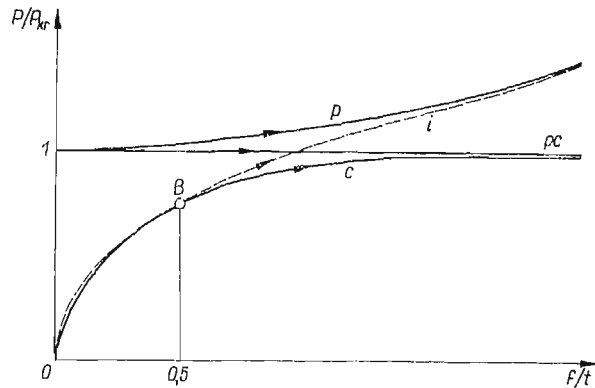
Wielopunktowy czujnik przemieszczeń pokazany jest na rys. 13. Polega on na zgrupowaniu wielu pojedynczych czujników, takich jak przedstawiony na rys. 12 przymocowany do ramy 2, opartej w trzech punktach na płycie 3, tak że czujniki reagują tylko na jej ugięcie, a nie na jej ruch jako ciała sztywnego.

7. Technika pomiarowa

Technikę pomiarów oparto na znanym zachowaniu się płyty ściskanej, posiadającej wstępne ugięcia (pofalowania), wywołane niedokładnościami jej wykonania.

7.1. Ściskanie płyty wstępnie pofalowanej. Zależność ugięcia od obciążenia ściskającego pokazuje rys. 14. Przez obciążenie ściskające rozumie się w tym przypadku obciążenie uogólnione w płaszczyźnie płyty, złożone ze składowych stycznych i normalnych do krawędzi, a określone wspólnym parametrem P .

Płyta doskonale płaska odkształca się wg. linii 0-1- p . Pręt ściskany, idealnie prosty odkształca się wg. linii 0-1- pc (wg. teorii małych ugięć). Pręt wstępnie odkształcony lub



Rys. 14. Rysunek przedstawia uogólnione obciążenie ściskające P w funkcji względnego ugięcia f/t : P — parametr uogólnionego obciążenia ściskającego, f — ugięcie, P_{kr} — krytyczne obciążenie ściskające, t — grubość płyty

mimośrodowo obciążony odkształca się wg. linii 0- c . Podobnie wstępnie pofalowana płyta odkształca się wg. linii 0- i .

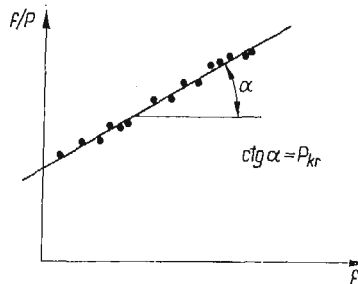
7.2. Wykres Southwella. Jak wiadomo, wykres 0- c wyraża się analitycznie w sposób następujący:

$$\frac{f}{t} = \frac{f_0}{t} \frac{1}{1 - P/P_{kr}},$$

gdzie f_0 jest uogólnionym wstępnym ugięciem. Wychodząc z tego wyrażenia i wprowadzając zmienne f/P i f Southwell wykazał, że:

$$\frac{f}{P} = A + \frac{1}{P_{kr}} f,$$

co można przedstawić jako tzw. wykres Southwella (rys. 15). Ze zmierzonych wartości f i P można łatwo określić wartość $P_{kr} = \operatorname{ctg} \alpha$ unikając w ten sposób konieczności osiągnięcia tej wartości podczas doświadczenia [1, 2].



Rys. 15. Wykres Southwella

MARGUERRE i DONNELL wykazali, że c oraz i pokrywają się z techniczną dokładnością dla dostatecznie małych ugięć pomiędzy punktami O i B na rys. 14.

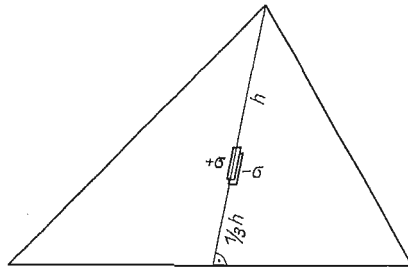
BLEICH podaje odciętą punktu B :

$$(7.1) \quad \left(\frac{f}{l} \right)_{gr} = 0,5.$$

Oznacza to, że zachowanie się niedoskonałej płyty i niedoskonałego pręta jest bardzo podobne dla małych ugięć, a zatem wykres Southwella można zastosować do określenia P_{kr} dla płyty podobnie jak dla pręta, jeśli w doświadczeniu nie przekroczono $(f/P)_{gr}$. Tego rodzaju postępowanie daje zadowalające wyniki, jak wykazuje wieloletnia praktyka [1,2].

Można także udowodnić wychodząc z ogólnego równania wyboczenia płyty, że metodę tę można zastosować do płyty o dowolnym kształcie i obciążeniu oraz o dowolnych warunkach brzegowych (por. dodatek 2.3). Trzeba podkreślić, że zamiast f można użyć każdej innej wielkości fizycznej proporcjonalnej do f takiej jak na przykład moment zginający albo zginające naprężenia w dowolnym punkcie płyty.

7.3. Opis doświadczeń i procesu przetwarzania danych doświadczalnych. Do opracowania wyników doświadczenia zastosowano metodę Southwella. Ugięcia płyty przy ściskaniu wywołane były przez jej wstępne (naturalne) pofalowanie, a także przez mimośrodowość obciążenia, która była regulowana w jednym z rozwiązań swobodnego podparcia krawędzi (rys. 5). W pewnych przypadkach udało się zaobserwować moment wyboczenia i bezpośrednio zanotować P_{kr} , ponieważ nastąpiła przypadkowa wzajemna kompensacja mimośrodowości obciążenia i wstępnego pofalowania (por. p. 8). Celem doświadczeń było określenie obciążenia krytycznego P_{kr} , a także, jako zadanie uboczne, zbadanie poprawności wa-



Rys. 16. Pomiar naprężeń zginających σ w środku płyty

runków brzegowych i równomierności rozkładu obciążenia. To ostatnie zadanie zostało sprawdzone tensometrami we wstępnej fazie cyklu doświadczeń. Wyniki podane w dodatku 2.1 wykazują, że równomierność ściskania jest $100\% \pm 2,7\%$, a ściskania $100\% \pm 4\%$. Dla osiągnięcia celu zasadniczego, mianowicie określenia wartości obciążeń krytycznych, notowano wartości naprężeń zginających w środku płyty jako funkcję stopniowo zwiększonego obciążenia (rys. 16); jednocześnie prowadzono pomiar ugięć środka płyty dla uniknięcia przekroczenia granicznego ugięcia $(f/l)_{gr}$.

Rezultatem każdego cyklu obciążania był zbiór odpowiadających sobie wartości σ i P .

Jedno doświadczenie składało się z 3 do 5 (zależnie od obserwowanej powtarzalności) cykli obciążenia. W jednym cyklu notowano zwykle 8–15 odczytów σ i P (oraz f), a więc

w jednym doświadczeniu otrzymywano zbiór danych obejmujący 24–75 wartości dla σ i P (oraz f), które następnie przetwarzano metodą Southwella.

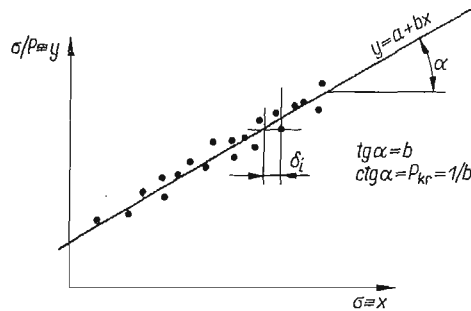
Przetwarzanie danych doświadczalnych. Dane otrzymane z jednego doświadczenia przedstawia zbiór (7.2)

$$(7.2) \quad \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n; \quad P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n,$$

z którego można obliczyć:

$$(7.3) \quad \frac{\sigma_i}{P_i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Z wartości σ_i/P_i i σ_i można zbudować wykres Southwella (rys. 17) dla danego doświadczenia (przypadku obciążenia, kształtu płyty i jej warunków brzegowych).



Rys. 17. Wykres Southwella

Przypadkowe błędy powodują rozrzut punktów doświadczalnych w pasmo, zawierające teoretyczną prostą Southwella. Dla wyznaczenia tej prostej trzeba zastosować metodę przybliżoną; w tym przypadku zastosowano metodę najmniejszych kwadratów.

Oznaczmy $\sigma/P = y$, $\sigma = x$ (rys. 17), a zatem wyniki doświadczeń reprezentowane są zbiorem punktów (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$. Przez punkty te należy przeprowadzić prostą:

$$(7.4) \quad y = a + bx,$$

tak aby zminimalizować:

$$(7.5) \quad \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2.$$

Wyrażenie (7.5) osiąga minimum, jeśli

$$(7.6) \quad a = \bar{y} - b\bar{x},$$

$$(7.7) \quad b = \frac{S_1 - \bar{x}\bar{y}}{S_2 - \bar{x}^2},$$

gdzie

$$(7.8) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

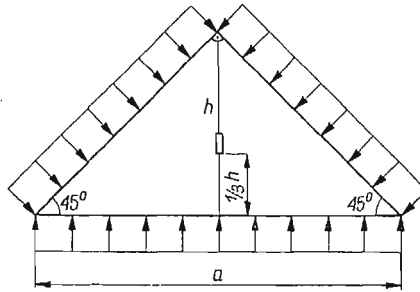
$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

jak podaje [5].

Pamiętając, że $P_{kr} = \text{ctg } \alpha$ (rys. 15) widać, że

$$(7.9) \quad P_{kr} = 1/b$$

W ten sposób z danych doświadczalnych (7.4) otrzymuje się obciążenie krytyczne (7.9) poprzez wykonanie prostych operacji arytmetycznych (7.4)–(7.7) i (7.8).



Rys. 18. Badana płyta

Dla przykładu weźmy jedno z doświadczeń dla przypadku pokazanego na rys. 18. Pierwszą czynnością eksperymentatora było ustawienie trzech zespołów obciążających zgodnie z kształtem płyty (rys. 4), a następnie regulacja dźwigni δ zgodnie z założonym obciążeniem. Po takim dostosowaniu urządzenia do badanego przypadku rozpoczynano pomiary. Pomierzone dane przytoczono w dodatku 2.4.

Obciążenie podane jest bezpośrednio w wartościach ε elementu dynamometrycznego (relacja $572 \mu\text{S}/1000 \text{ kG}$). Naprężenie zginające σ zastąpiono odkształceniem ε (co jest rzeczą możliwą, ponieważ wartość σ była znacznie niższa od granicy proporcjonalności), pokazywanym przez dwa tensometry połączone w system pół-mostka, a naklejane po obu stronach płyty w jej środku. Tensometry pokazywały więc podwójne odkształcenie zginania eliminując odkształcenie błonowe. Z wartości P i ε , podanych w tabelcy 1, otrzymujemy wartości x_i , y_i w tabelcy 2. Z wartości tych obliczamy:

$$\bar{x} = 32,0, \quad \bar{y} = 0,1485, \quad S_1 = 6,94, \quad S_2 = 1625,$$

stąd

$$b = \frac{6,94 - 32 \cdot 0,1485}{16,25 - 32^2} = 0,00364,$$

(7.10)

$$P_{kr} = \frac{1}{0,00364} = 275 \mu\text{S}$$

albo

$$(7.11) \quad P_{kr} = \frac{275}{572} \cdot 1000 \text{ kG} = 480,05 \text{ kG}.$$

Jest to wypadkowa siła P , która przyłożona do krawędzi a wywołuje wyboczenie płyty. Wykres Southwella dla tego przypadku podano w dodatku 2.4. (rys. 34 i 35).

Dla porównania pokazano także odpowiedni wykres Southwella, oparty na pomiarze ugięcia f czujnikiem warsztatowym. Z wykresu tego otrzymuje się $P_{kr} = 278\mu S$ — co zgadza się z wynikiem (7.10).

Z teorii ogólnej wyboczenia wiadomo, że niezależne od kształtu płyty

$$(7.12) \quad P_{kr} = k \frac{D}{A} \text{ kG/cm};$$

gdzie $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ [kGcm] oznacza sztywność płyty, A — pole powierzchni płyty w cm^2 , p_{kr} — intensywność obciążenia krytycznego [kG/cm], $p_{kr} = P_{kr}/a$, a — długość krawędzi płyty [cm].

Dla uogólnienia wyników doświadczenia obliczamy z (7.12) podstawiając otrzymaną wartość P_{kr} (7.11) bezwymiarowy współczynnik k , który nie zależy od sztywności i wielkości płyty.

Dla przykładu dane płyty wynoszą: $E = 1,12 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $t = 1,53 \text{ mm}$, $\nu = 0,3$, $a = 75 \text{ cm}$, $A = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1408 \text{ cm}^2$, $D = 361 \text{ kG cm}$,

$$(7.13) \quad k = \frac{P_{kr}}{a} \frac{A}{D} = 49,9,$$

co odpowiada bardzo dobrze teoretycznie obliczonej wartości

$$(7.14) \quad k_t = 49,34.$$

W podobny sposób ⁽¹⁾ otrzymano inne wartości współczynnika k i zestawiono je w p. 8.

7.4. Ocena dokładności wyników. Dokładność doświadczenia można ocenić na podstawie rozrzutu punktów na rys. 17, na którym też można zmierzyć odchyłkę δ_i .

Metody statystyczne przy znajomości rozrzutu [4,5] pozwalają na ocenę szerokości pasma zawierającego prostą Southwella z pewnym prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo to (poziom ufności) przyjęto 0,9 jak zwykle w doświadczeniach tej klasy. Odchyłki δ_i dla doświadczenia przyjętego jako przykład zestawiono w tablicy 3 (dodatek 2.4)⁽²⁾.

Wskaźnik dokładności $h = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\pi \sum |\delta_i|}} = 0,131\mu S$, gdzie n oznacza liczbę punktów.

⁽¹⁾ Z wyjątkiem paru przypadków, w których moment wyboczenia zaobserwowano bezpośrednio.

⁽²⁾ W niektórych przypadkach zastosowano kryterium Chauveneta [4] dla odrzucenia punktów o największym rozrzucie.

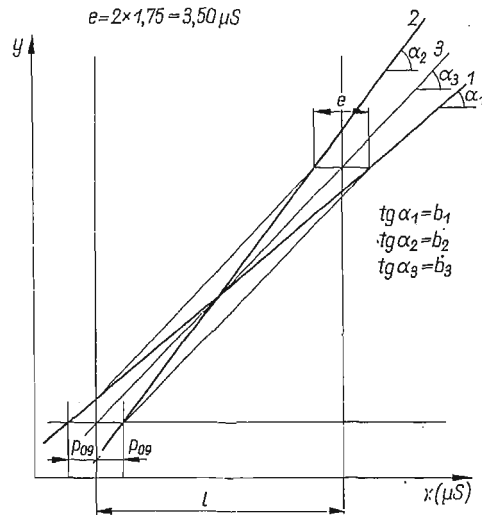
Prawdopodobny błąd wartości średniej wynosi

$$(7.15) \quad p_0 = \frac{0,845 \sum |\delta_i|}{n \sqrt{n-1}} = 0,608.$$

Wartość błędu ograniczająca przedział poziomu ufności 0,9 jest ([4], str. 1049, tablica C-2)

$$(7.16) \quad p_{0g} = 2,88 p_0 = 2,88 \cdot 0,608 = 1,75 \mu\text{S}.$$

Rezultat (7.16) oznacza fizycznie, że prawdziwa pozycja prostej Southwella znajduje się z prawdopodobieństwem 0,9 wewnątrz pasma symetrycznie położonego wokół linii minimum kwadratów (p. 7.3-1a). Szerokość tego pasma w kierunku x jest równa $e = 2xp_{0g} = 2x \cdot 1,75 \mu\text{S} = 3,50 \mu\text{S}$. Prosta Southwella może zatem z prawdopodobieństwem 0,9 przyjmować każde położenie pomiędzy położeniami skrajnymi 1 i 2. Pozycja 3 jest średnią ($b_3 = b_{sr}$).



Rys. 19. Prawdopodobne położenie prostej Southwella

Z geometrii wynika

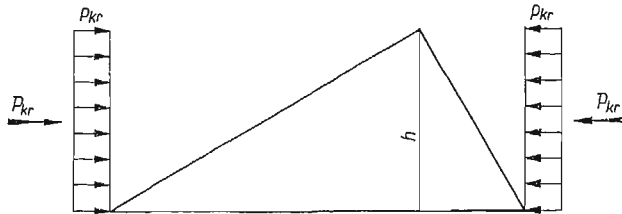
$$b_1 = b_{sr} \frac{l}{l+e} = b_{sr} \frac{1}{1+e/l}, \quad b_2 = b_{sr} \frac{l}{l-e} = \frac{1}{1-e/l},$$

ponieważ $l = 88 \mu\text{S}$, $e/l \approx 0,04$, stąd $b_{0g} = b_{sr} (1 \pm 0,04)$ lub $b = b_{sr} \pm 4\%$.

W ten sposób otrzymuje się krytyczne obciążenia $P_{kr} = 1/b$ dla przytoczonego przykładu z dokładnością $\pm 4\%$ dla poziomu ufności 0,9. Identyczną ocenę dokładności na poziomie ufności 0,9 przeprowadzono dla innych przypadków. Ocenione w ten sposób wartości odchyłek podano w p. 8 przy odpowiednich wartościach k . Odchyłki te są wszystkie tego samego rzędu kilku procent.

8. Wyniki doświadczeń

W tablicach 1 i 2 podano wyznaczone doświadczalnie wartości k występujące we wzorze $p_{kr} = kD/A$. Dla porównania podano także wartości otrzymane teoretycznie. Podano schematycznie kształt płyty, warunki brzegowe i obciążenie.



Rys. 20.

Tablica 1. Wszystkie brzozy swobodnie podparte(*)

Przypadek						
$k_{daśw.}$	$24,95 \pm 4\%$	$28,75 \pm 3\%$	$35,7 \pm 3,5\%$	$43,5 \pm 3\%$	$56,65 \pm 2\%$	$28,1 \pm 1\%$
$k_{teor.}$	24,67	30,0	36,8	46,0	56,9	30,65

Przypadek				
$k_{daśw.}$	$23,5 \pm 3\%$	$41,7 \pm 1\%$	$41,0 \pm 1\%$	$60,2 \pm 1\%$
$k_{teor.}$	22,8	42,2	41,6	61,5

Przypadek				
$k_{daśw.}$	$32,2 \pm 3\%$	$91,9 \pm 6\%$	$90,6 \pm 10\%$	$38,5 \pm 8\%$
$k_{teor.}$	31,45	94,70	81,00	41,30

Przypadek			
$k_{daśw.}$	$22,85 \pm 3\%$	$49,8 \pm 3\%$	$37,5 \pm 3\%$
$k_{teor.}$	23,55	50,95	38,10

U w a g a. W przypadkach 2, 3 i 4 trójkąta $60/60/60^\circ$ wybozczenie zaobserwowano bezpośrednio z dokładnością $p_{kr} \pm 1\%$.

(*) Korekta tablicy: w górnej tablicy na rys. przypadek 2 zamiast 2/4 powinno być 3/4; na rys. poz. 4 przy naprężeniach stycznych należy dodać 3/4, a przy naprężeniach normalnych 1/4.

Tablica 2. Trójkąt prostokątny, równoramienny z zamocowanymi i swobodnie podpartymi krawędziami

Przypadek	$k_{teor.}$	$k_{dośw.}$
	69,0	64,8±5%
	144,4	118,6±10%
	67,31	82,0 ^{x)}
	46,0	40,2±5%
	38,5	39,5±4,6%

————— brzeg utwierdzony
 = = = = = brzeg swobodnie podparty

(*) W tym przypadku płyta została zniszczona (pęknięcie szwu łączącego przepony pionowe z płytą) w drugim cyklu obciążenia. Liczba otrzymanych danych była zbyt mała dla oceny dokładności.

Parametr p_{kr} określa obciążenie krytyczne w sensie uogólnionym na przykład w przypadku pokazanym na rys. 20 $p_{kr} = P_{kr}/h$ i reprezentuje kombinację obciążeń normalnych i stycznych do krawędzi płyty.

9. Wnioski

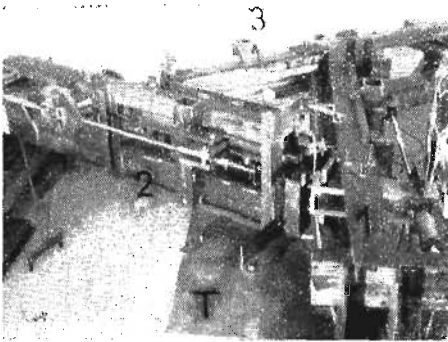
Konfrontacja rezultatów z wynikami teoretycznymi pokazuje ich bardzo dobrą zgodność w przypadku swobodnego oparcia krawędzi. Wartości otrzymane doświadczalnie są, jak można się było spodziewać, nieco mniejsze od teoretycznych. Rozbieżność dla krawędzi zamocowanych jest większa, ale i w tym przypadku można uważać wyniki teoretyczne za dobrze potwierdzone przez doświadczenie. Także i w tym przypadku doświadczalnie określone obciążenia krytyczne są mniejsze od przewidywanych teoretycznie; jak zwykle w tego rodzaju doświadczeniach jest to wynik niedoskonałego zamocowania krawędzi.

10. Streszczenie

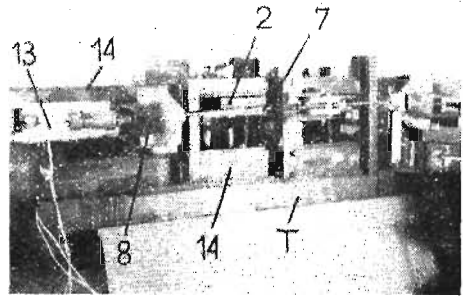
Skonstruowano i wykonano urządzenie do badania stateczności płyty trójkątnej w dowolnym kształcie pod dowolnym obciążeniem krawędzi. Urządzenie zapewnia możliwość zamocowania i swobodnego podparcia brzegów płyty, może być użyte do badania zachowania się płyty po utracie stateczności a także badania jej drgań. Po uzupełnieniu czwartym zespołem obciążającym może być użyte do badania dowolnych płyt czworobocznych.

Przeprowadzono badania stateczności płyt trójkątnych różnych proporcji, o różnych warunkach brzegowych i obciążeniach dla sprowadzenia wyników nowo opracowanej ogólnej numerycznej metody obliczeniowej.

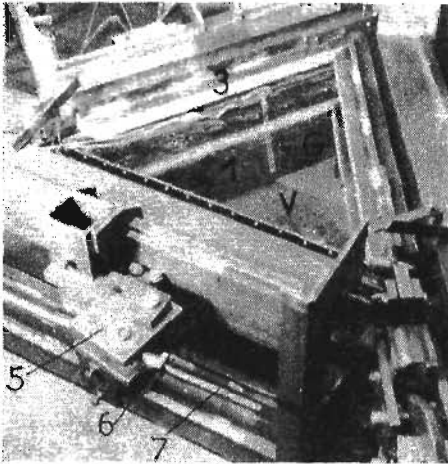
Dodatek 1. Fotografic urządzenia



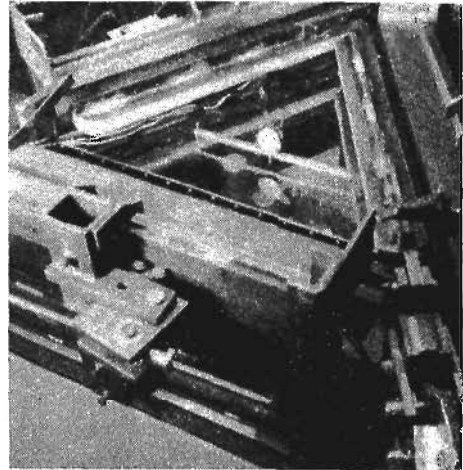
Rys. 21. Trzy zespoły urządzenia (1, 2, 3) i stalowy stół *T* użyty jako wspólna podstawa (tutaj numery odnoszą się do rys. 4)



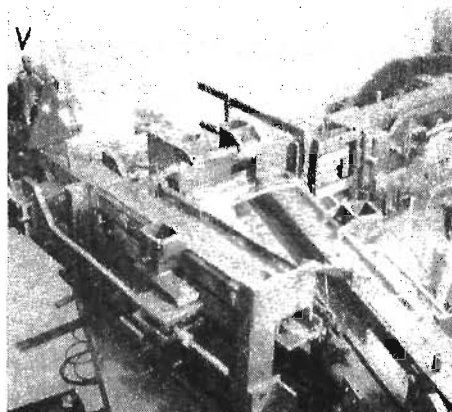
Rys. 22. Widok boczny jednego z trzech zespołów



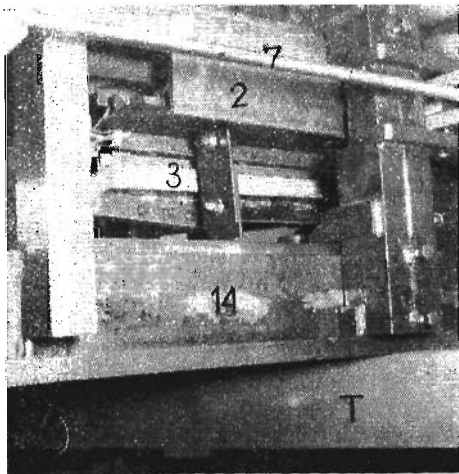
Rys. 23. Zbliżenie płyty *I* (płyta wykonana z plexi użyta tutaj jako makieta)



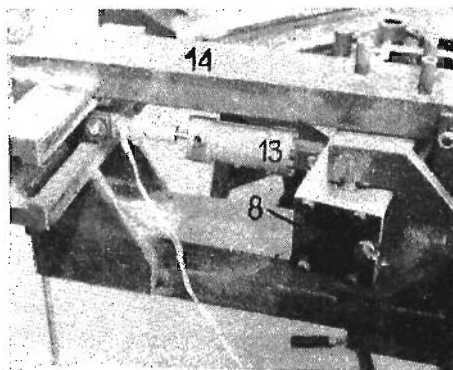
Rys. 24. Czujniki warsztatowe (zegarowe) i czujniki przemieszczeń



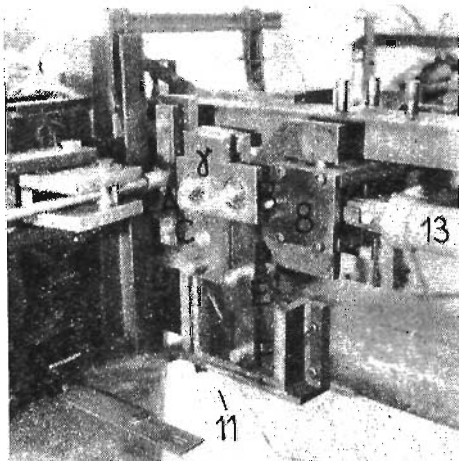
Rys. 25. Urządzenie dostosowane do płyty 90°/20°/70° (brązowej), *V* - wibrator



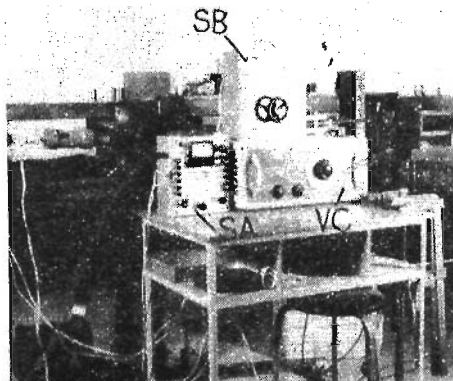
Rys. 26. Podparcie belki 2



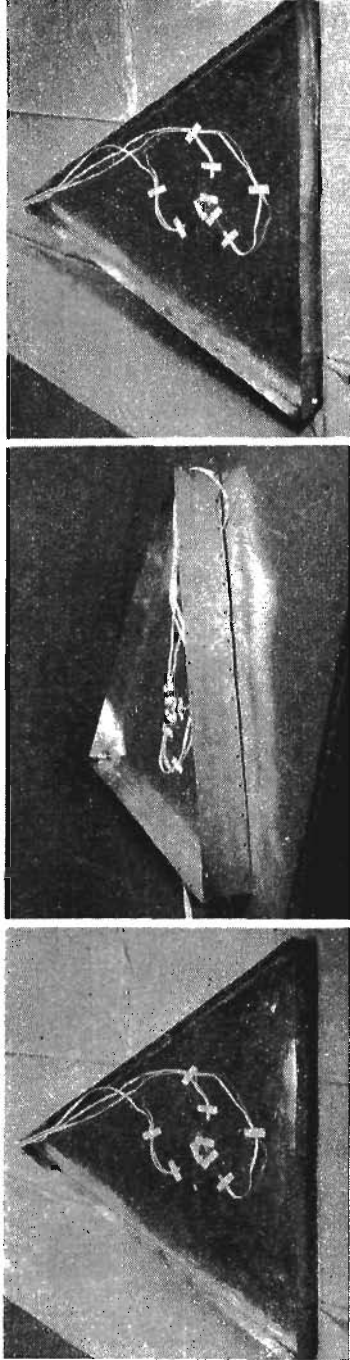
Rys. 27. Element dynamometryczny 13 umieszczony w środku dźwigni 8. Składowe normalne i styczne obciążenia równe sobie



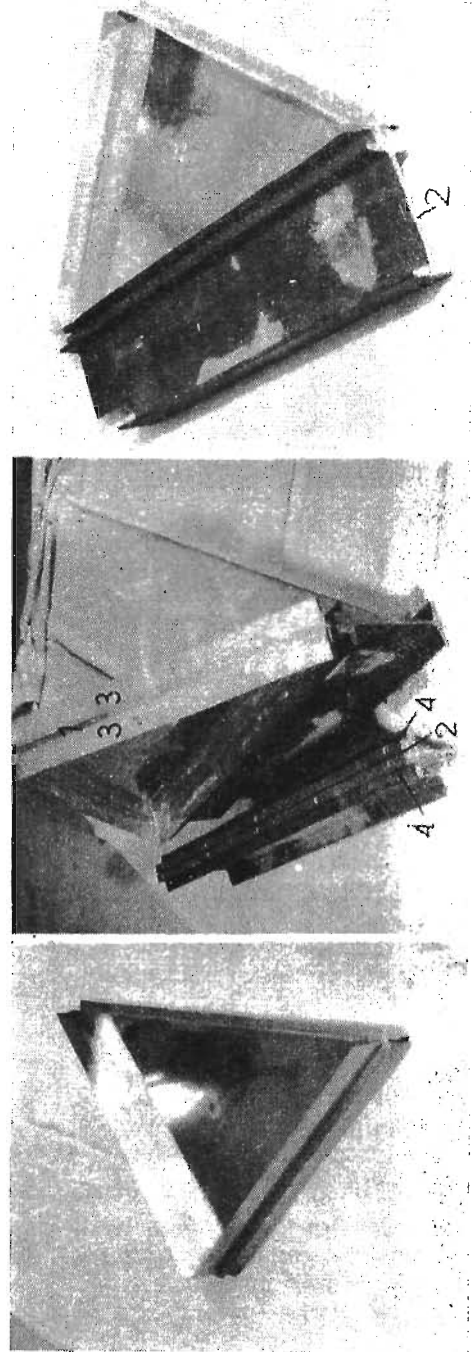
Rys. 28. Urządzenie odwracające 11. Element 13 umieszczony na końcu dźwigni 8. Obciążenie wyłącznie styczne, składowa normalna — zero



Rys. 29. SB - skrzynka przełączająca, SA - aparat tensometryczny VC - sterowanie wibratorem



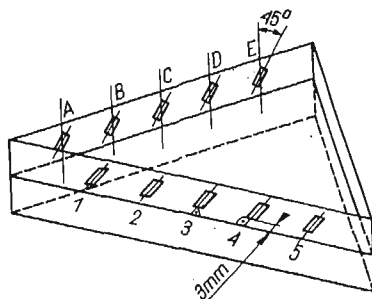
Rys. 30. Płyty używane do doświadczeń w przypadku krawędzi swobodnie opartych jak na rys. 5



Rys. 31. Płyty używane do doświadczeń w przypadku krawędzi swobodnie opartych jak na rys. 5

Dodatek 2. Niektóre szczegóły obliczeń i doświadczeń

2.1. Równomierność obciążenia (do p. 4.1, 4.2, 7.3). Równomierność rozkładu obciążenia skontrolowano specjalnym zestawem tensometrów naklejonych jak na rys. 32. Tensometry

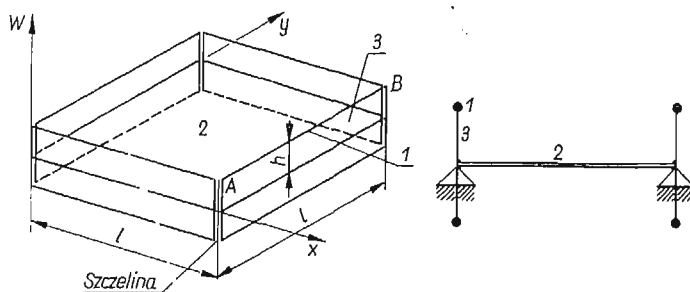


Rys. 32. Przypadek krawędzi zamocowanych. Płyta i belka 2 jak na rys. 7

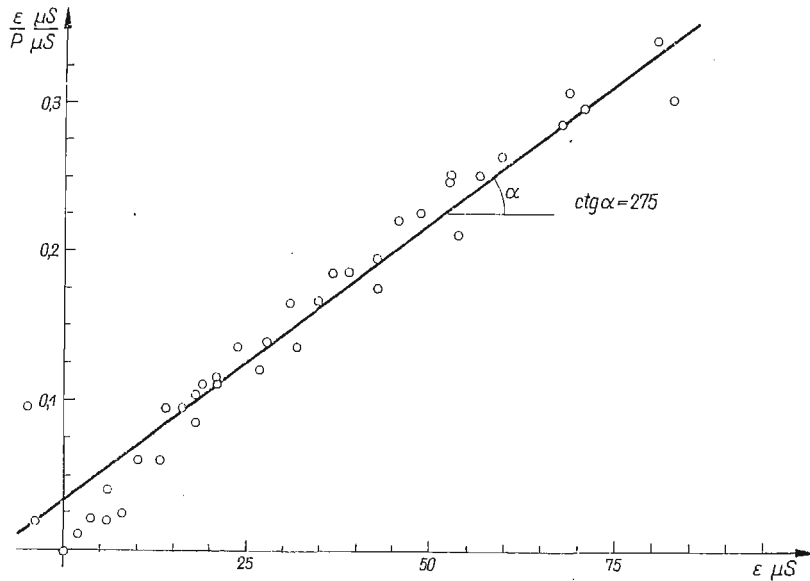
metry naklejono parami po obu stronach płyty i przepony pionowej. Każdy tensometr czynny połączony był z kompensacyjnym w system półmostka; w ten sposób można było wyeliminować wpływ lokalnego zginania. Pomiaru dokonano dla płyty: $90^\circ/45^\circ/45^\circ$ i $90^\circ/70^\circ/20^\circ$. Wyniki podano w tablicy 3.

Tablica 3

$\frac{\text{kG}}{\text{cm}}$ w płaszczyźnie środkowej	Numer tensometru	1	2	3	4	5	$\frac{\text{max} - \text{min}}{\text{max} + \text{min}}$
		plyta 90/45/45	45,7 $\frac{\text{kG}}{\text{cm}}$	48,2	48,1	46,4	47,1
	plyta 90/20/70	50,1	49,2	49,2	52,0	51,5	2,73%
	numer tensometru	A	B	C	D	E	
kG/cm	90/45/45	62,0	58,5	59,8	60,4	62,5	3,30%
	90/20/70	72,0	71,6	70,8	68,2	66,6	3,90%



Rys. 33



Rys. 34 (wg tablicy 5)

2.2. Wpływ sztywności przepony pionowej na stateczność płyty (do p. 4.1). Oceny wpływu przepony dokonano jak następuje. Założono płytę prostokątną (dla uproszczenia obliczeń) jak na rys. 33. Przyjęta postać wybożenia płyty:

$$w = a \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}.$$

Kąt prosty między przeponą a płytą zostaje zachowany (sztywne naroże) a brzeg przepony (np. AB) pozostaje prosty, ponieważ połączony jest ze sztywną podłużnicą. Odskształceniu płyty towarzyszą odskształcenia przepony, która gromadzi pewną ilość energii sprężystej. Stosunek ilości energii zgromadzonej w przeponie do zgromadzonej w płycie jest proporcjonalny do wzrostu wartości obciążenia krytycznego w porównaniu z wartością dla krawędzi idealnie swobodnie opartej, jak wynika z energetycznego równania wybożenia:

$$\Delta V = L,$$

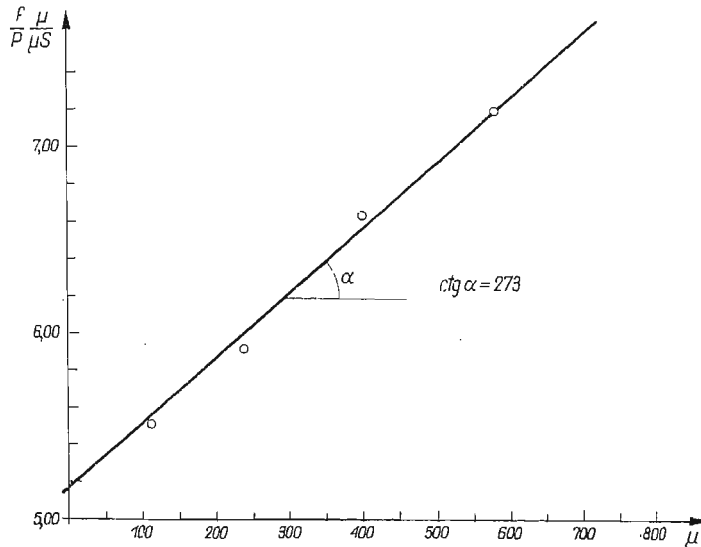
gdzie ΔV jest energią zginania, L pracą obciążeń zewnętrznych. Oczywiście jest, że obecność przepony nie wpływa na wartość L , ale powiększa $\delta \Delta V$ przyrost ΔV .

Ponieważ p_{kr} zawarte jest w L , a zatem wzrasta ono wraz z $\delta \Delta V$.

Postać ugięcia przepony określana jest warunkiem zgodności przemieszczeń na krawędzi płyty i warunkiem równowagi poprzecznej podłużnicy l . Obliczenie przeprowadzono dla następujących wartości:

płyta prostokątna 50×50 cm grubości $t_p = 1,5$ mm,
 przepona $h = 4$ cm $t_m = 0,5$ mm,
 wykazują wzrost p_{kr} o 1,2%.

Wynik ten z dużym prawdopodobieństwem można uważać za określający rząd wielkości wpływu przepony w przypadku płyty trójkątnej o tym samym polu powierzchni. Zauważmy, że wpływ przepony oczywiście zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem pola powierzchni płyty (dla stałych h i t_m).



Rys. 35. Wykres Southwella dla przypadku jak wyżej, ale oparty na bezpośrednim pomiarze ugięcia środka płyty

2.3. Możliwość zastosowania wykresu Southwella dla ogólnego przypadku obciążenia ściskającego
Równanie równowagi (wg Bleicha)

$$\nabla^4 w_1 = \frac{1}{D} \left[N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_0 + w_1) + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_0 + w_1) + 2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_0 + w_1) \right];$$

D oznacza sztywność płytową, w_1 — ugięcie płyty (funkcja xy) mierzone od wartości ugięcia wstępnego, w_0 — parametr wstępnego ugięcia (pofalowania), N_x , N_y — zewnętrzne siły normalne w płaszczyźnie środkowej kG/cm, N_{xy} — zewnętrzne siły styczne w płaszczyźnie środkowej kG/cm, dane: $w_0 = a_{11} f(xy)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r^2 f$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -g^2 f$; r , g — stałe parametry.

Założenie: $w_1 = a f(xy)$.

Z równania (1) otrzymujemy:

$$(2) \quad A(g^4 + g^2 r^2 + r^4) = \frac{1}{D} [N_x a_{11} g^2 + N_y a_{11} r^2 - N_{xy} a_{11} g r] + A(N_x g^2 + N_y r^2 - N_{xy} g r),$$

Jeśli siły N_x , N_y , N_{xy} wzrastają jednocześnie, to można jedną z nich obrać jako wspólny parametr:

$$N_x = N_x, \quad N_y = kN_x, \quad N_{xy} = hN_x.$$

Wtedy równanie (2) przekształca się

$$(3) \quad A(g^4 + g^2r^2 + r^4) = \frac{N_x}{D} [a_{11}(g^2 + kr^2 - hgr) + A(g^2 + kr^2 - hgr)].$$

Jeśli $a_{11} = 0$ (plyta idealnie płaska), to z (3) otrzymamy

$$(3a) \quad N_x = \frac{g^4 + g^2r^2 + r^4}{g^2 + kr^2 - hgr} D = N_{kr},$$

wtedy dla $a_{11} \neq 0$ (plyta wstępnie pofalowana) wynika także na podstawie

$$(4) \quad A = a_{11} \frac{1}{D} \frac{N_x(g^2 + kr^2 - hgr)}{(g^4 + g^2r^2 + r^4) - N_x(g^2 + kr^2 - hgr)} \frac{1}{D}$$

oraz uwzględniając (3a) otrzymujemy

$$(5) \quad w_0 = a_{11} \frac{1}{1 - \frac{N_x}{N_{kr}}}.$$

Wyrażenie (5) jest podstawą metody Southwella i w tym przypadku otrzymaliśmy je dla ogólnego przypadku obciążenia zawierającego trzy składowe N_x , N_y , N_{xy} .

Powyższe rozważania ważne są dla płyty o dowolnym kształcie (nie tylko trójkątnym) i dowolnych warunkach brzegowych, ponieważ teoretycznie zawsze możliwe jest znalezienie funkcji $f(x,y)$ odpowiadającej kształtowi i warunkom brzegowym płyty.

2.4. Dane liczbowe wybranego doświadczenia (do p. 7.3)

Tablica 4. Wypadkowa obciążenia ściskającego (w μS) oraz odkształcenia zginania w środku płyty (por. p. 7.3, rys. 18). Dane bezpośrednio zmierzone w doświadczeniu

P	$\epsilon \mu S$ 1 cykl	$\epsilon \mu S$ 2 cykl	$\epsilon \mu S$ 3 cykl	$\epsilon \mu S$ 4 cykl
53	5			
103	4			
158	-6		-6	-14
168	-8		-10	-19
178	-16	0	-19	-24
188	-21	-2	-21	-31
198	-28	-4	-28	-37
208	-35	-13	-39	-46
218	-43	-18	-49	-53
228	-60	-27	-57	-69
238	-68	-32	-71	-81
248		-43		
258		-54		
268		-65		
278		-83		

Tablica 5. Proces przetwarzania danych

$$y = \frac{\varepsilon}{P} \left[\frac{\mu S}{\mu S} \right], \quad x = \varepsilon[\mu S]$$

	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$
				$\cdot 10^{-2}$
1	0,096	-5	25	-48
2	0,018	-4	16	-7,2
3	0	0	0	0
4	0,01	2	4	2
5	0,02	4	16	8
6	0,02	6	36	12
7	0,04	6	36	24
8	0,023	8	64	18,4
9	0,060	10	100	60
10	0,062	13	169	80,5
11	0,095	14	196	133
12	0,095	16	256	152
13	0,0825	18	324	148,5
14	0,105	18	324	189
15	0,110	19	361	209
16	0,11	21	441	231
17	0,115	21	441	242
18	0,135	24	577	324
19	0,120	27	729	324
20	0,14	28	784	392
21	0,14	28	784	392
22	0,165	31	1081	512
23	0,167	35	1225	584
24	0,185	37	1359	684
25	0,185	39	1521	722
26	0,220	46	2116	1020
	2,5185	462	12985	6408,2
27	0,262	60	3600	15,7
28	0,285	68	4500	19,35
29	0,135	32	1025	4,32
30	0,175	43	1940	7,52
31	0,215	54	2920	11,6
32	0,245	65	4230	15,8
33	0,30	83	6900	24,9
34	0,225	49	2410	11,0
35	0,250	57	3260	14,25
36	0,295	71	5050	20,9
37	0,245	53	2820	13,0
38	0,305	69	4775	21,0
39	0,340	81	6850	27,5
$\sum_{i=1}^{39}$	5.796	1247	63265	270,920

Tablica 6. Odchyłki δ_x punktów x, y od prostej najmniejszych kwadratów

	x
1	0
	21
	8
	7
	8
	10
	10
	4
	2
	5
	5
	1
	3
	2
	3
	1
	0
	2
	4
	2
	2
	4
	0
	3
	8
	4
	3
	3
	2
	6
	5
	4
	5
	3
36	3
	153

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, J. GERE, *Theory of elastic stability*, 1961.
2. F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, 1952.
3. G. GERARD, *Structural Stability Theory*, 1962.
4. M. HETENYI, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, 1950.
5. W. LINNIK, *Metoda najmniejszych kwadratów*, 1962.
6. P. V. PEDERSEN, *Buckling and vibrations of triangular plates* (w przygotowaniu w NTH, Trondheim).
7. Z. KAÇZKOWSKI, *Obliczanie płyt anizotropowych metodą nakładania ugięć faldowych*, Arch. Mech. Stos., 3, 5 (1953), 455-496.
8. Z. KAÇZKOWSKI, *Drgania swobodne i wyboeczenie płyty trójkątnej*, Arch. Mech. Stos., 8 (1956), 13-28.
9. R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty trójkątnej 30°-60°-90° za pomocą transformacji właściwej*, Arch. Inżyn. Lądow., 2, 6 (1960).
10. R. SOLECKI, *Rozwiązanie ogólne płyty o kształcie trójkąta prostokątnego*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИСПЫТАНИЕ ТРЕХУГОЛЬНЫХ ПЛИТ

В работе представлен метод и результаты экспериментов по устойчивости треугольных плит, проведенных в лаборатории норвежского политехнического института.

Результаты экспериментально определенных критических сил составлено со значениями, полученными для этих сил численным методом, специально разработанным в институте. Констатируется, что эти теоретические значения вполне совпадают с экспериментальными.

Summary

EXPERIMENTS ON TRIANGULAR PLATE STABILITY UNDER LOAD
IN ITS OWN PLANE

A rig for arbitrary loading of triangular plate of various geometry was designed and constructed.

The rig provides simply-supported and clamped boundary conditions, and may be used for large-deflection investigations and, possibly, also vibration tests; after adding another unit, it may be used for a four-sided plate.

To check the theoretical results obtained by a newly developed general numerical method, the experiments on various plates and loading cases were carried out.

It was found that the experiments confirmed the theoretical results.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 października 1965 r.

WPLYW DYNAMICZNEGO ODKSZTAŁCENIA TRWAŁEGO
NA TWARDOŚĆ MIĘKKIEJ STALI I ALUMINIUM(*)

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

1. Wstęp

Poznanie własności mechanicznych metali po wstępnym odkształceniu dynamicznym jest zagadnieniem istotnym zarówno z punktu widzenia poznawczego, jak i zastosowań praktycznych. Ilość danych na ten temat jest bardzo niewielka, a dane te są nawet sprzeczne.

W pracach dotyczących zachowania się stali stwierdzono następujące fakty. WARNOCK i POPE [10] stwierdzili, że niewielkie trwałe odkształcenia dynamiczne przy rozciąganiu nie powodują zbyt dużych zmian wartości granicy plastycznego płynięcia przy ponownym statycznym obciążeniu. Ogólnie można stwierdzić, że granica ta jest nieco niższa niż w przypadku prób statycznych. CAMPBELL i DUBY [1] zaobserwowali, że dla stali o zawartości 0,24%C po odkształceniu dynamicznym $\epsilon_p = 4,6\%$ ze średnią prędkością $\dot{\epsilon} = 480 \text{ sek}^{-1}$, statyczna krzywa umocnienia leży niżej niż taka sama krzywa uzyskana od $\epsilon_p = 0$. Obserwacja ta została potwierdzona na drodze badania twardości wg BRINELLA po statycznym i dynamicznym odkształceniu trwałym równym $\epsilon_p = 4,1\%$. Wyniki tych badań przytoczono poniżej dodając odpowiednią twardość wg VICKERSA

stan próbki	twardość HB	twardość HV ₃₀
wyżarzony	102	102
$\epsilon_p = 4,1\%$ dynamicznie	113	113
$\epsilon_p = 4,1\%$ statycznie	126	126

Najobszerniejsze wyniki badań omawianego efektu dla stali podano w pracy CAMPBELLA i MAIDENA [2]. Badania przeprowadzono na stali o zawartości 0,32%C. Z badań tych wynika, że wstępne dynamiczne odkształcenie trwałe powoduje obniżenie ponownej granicy plastycznego płynięcia w stosunku do statycznej krzywej umocnienia. Badania te przeprowadzono dla rosnących odkształceń trwałych do $\epsilon_p = 1,2\%$ oraz dla odkształcenia $\epsilon_p = 4,2\%$. Największy efekt zaobserwowano przy odkształceniach trwałych rzędu 1%. Dla $\epsilon_p = 1,2\%$ obniżenie ponownej granicy plastycznego płynięcia wynosi około 20% w stosunku do krzywej statycznej. HARRIS i WHITE [5] stwierdzili natomiast, że mikro-twardość dynamicznie odkształconych próbek stalowych o zawartości 0,04–0,05%C była wyższa niż próbek odkształconych statycznie do takiej samej wartości odkształcenia trwałego. Prędkość odkształcenia wstępnego wynosiła $\dot{\epsilon} \approx 50 \text{ sek}^{-1}$. Uzyskany wynik przytoczono niżej

stan próbki	μHV	$\epsilon_p = 5,5\%$ statycznie	162,4
wyżarzony	123,7	$\epsilon_p = 5,5\%$ dynamicznie	212,0.

*) Praca została wyróżniona w r. 1965 jedną z dwóch trzecich nagród na konkursie Zarządu Głównego PTMTS za najlepszą pracę doświadczalną z mechaniki.

Stwierdzono więc efekt odwrotny niż w badaniach omówionych poprzednio, należy jednak pamiętać, że badano mikrotwardość.

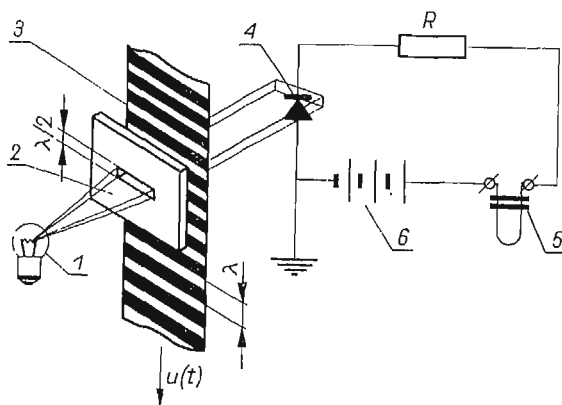
W pracach dotyczących zachowania się aluminium zaobserwowano następujące fakty. WASILIEW [12] stwierdził, że krzywa umocnienia aluminium po zmianie prędkości odkształcenia z większej prędkości na mniejszą leży wyżej od krzywej uzyskanej z mniejszą prędkością od $\epsilon_p = 0$. Obserwacja ta została potwierdzona w pracy [7]. Natomiast LINDHOLM [9] zaobserwował, że statyczna krzywa po wstępnym odkształceniu dynamicznym do $\epsilon_p = 6,5\%$ z prędkością $\dot{\epsilon} \approx 1000 \text{ sek}^{-1}$ pokrywa się z krzywą statyczną uzyskaną od $\epsilon_p = 0$. Obserwacje z dwóch poprzednich prac nie pokrywają się więc z wynikiem podanym przez LINDHOLMA, należy jednak dodać, że we wspomnianych dwóch pracach maksymalna prędkość odkształcenia była znacznie mniejsza (rzędu 1 sek^{-1}).

Dla dalszych badań omawianego efektu wybrano metodę pomiaru twardości wg. Vickersa. Pomiar twardości wykonywano po wstępnym odkształceniu dynamicznym przy rozciąganiu. Należy dodać, że pomiary twardości są proste i szybkie, a równocześnie twardość jest w przybliżeniu proporcjonalna do bieżącej granicy plastycznego płynięcia. Tak więc obranie metody pomiaru twardości wydaje się celowe.

2. Opis techniki eksperymentu

Dynamiczne rozciąganie próbek przeprowadzono na maszynie, w której tłok ciągnący próbkę był napędzany gazami prochowymi. Odpowiednio regulowana ilość prochu pozwalała na uzyskiwanie różnych odkształceń trwałych dla poszczególnych próbek.

Podczas badań dynamicznych dokonywano pomiarów prędkości odkształcenia za pomocą specjalnego ekstensometru. Zasada działania ekstensometru została przedstawiona



Rys. 1. Zasada działania ekstensometru

1-żarówka, 2-płytkę ze szczeliną, 3-raster przemieszczający się w czasie, 4-fotodioda, 5-pętliczka oscylografu, 6-źródło prądu stałego zasilającego fotodiode

na rys. 1. Źródło światła w postaci małej żarówki 1 oświetla płytkę ze szczeliną 2; za płytką umieszczono ruchomy pasek filmu 3 z czarnymi prążkami (raster). Na osi żarówki i szczeliny poza rastrem znajduje się fotodioda 4. Podczas ruchu rastra szczelina w płytce 2 jest przysłaniana i odsłaniana, w ten sposób fotodioda wysyła prąd o przebiegu sinusoi-

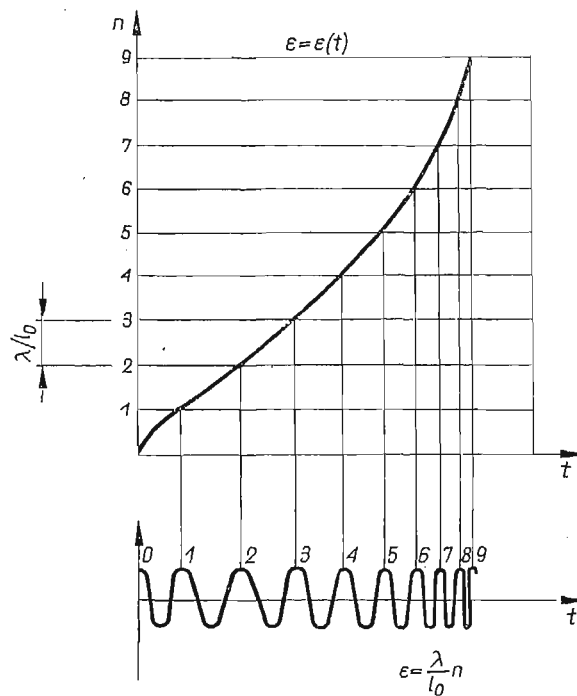
dalnym. W celu rejestracji przebiegu procesu w obwód zasilanej z baterii fotodiody włączono pętlíčkę oscylografu 5. W przypadku małej czułości pętlíčki w obwód fotodiody należy wprowadzić równocześnie wzmacniacz.

Opisany układ umożliwia łatwą rejestrację zachodzącego w czasie przemieszczenia dowolnego elementu, który jest połączony mechanicznie z ruchomym rastrem 3. W obecnym przypadku tym elementem jest jeden z uchwytów próbki.

Gdy znana jest podziałka rastra λ w mm i gdy został zarejestrowany przebieg w postaci sinusoidy przesuwania się rastra w czasie, wówczas można znaleźć przemieszczenie rastra w funkcji czasu. Określa je wzór

$$u = n\lambda,$$

gdzie przez u oznaczono przemieszczenie rastra, a przez n —kolejny numer danego wierzchołka sinusoidy, liczony od początku procesu. Ponieważ każdemu wierzchołkowi



Rys. 2. Wykres roboczy dla znajdowania przemieszczeń u lub odkształceń ε w funkcji czasu

sinusoidy (bierzemy np. pod uwagę wszystkie górne) odpowiada przesunięciu rastra o λ , wobec tego suma wierzchołków stanowi poszukiwane przesunięcie u . Stąd można

$$\varepsilon = \frac{u}{l_0}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{l_0} n;$$

określić bieżące odkształcenie w danej chwili, l_0 jest początkową długością części pomiarowej próbki.

Podczas opracowywania oscylogramów, w celu znalezienia odkształcenia lub przemieszczenia w funkcji czasu $\varepsilon = \varepsilon(t)$ lub $u = u(t)$, najlepiej posługiwać się wykresem pokazanym na rys. 2.

Ekstensometr skonstruowany na omówionej zasadzie nadaje się zarówno do prób statycznych jak i dynamicznych. Szczególnie dodatnią cechą takiej konstrukcji przy pomiarach dynamicznych jest bardzo mała masa rastra, dzięki czemu unika się dodatkowych drgań części ruchomych ekstensometru, a tym samym zakłóceń w rejestracji przebiegu procesu. Oprócz tego ekstensometr rejestruje przebieg odkształcania aż do momentu zerwania próbki.

Wszystkie badania przeprowadzono na próbkach o bazie 100 mm i średnicy 10 mm. Uzyskiwane maksymalne prędkości odkształcania wahały się od $\dot{\epsilon} = 5 \text{ sek}^{-1}$ do $\dot{\epsilon} = 50 \text{ sek}^{-1}$ i były znacznie mniejsze od prędkości krytycznej wg CLARKA i WOODA, która dla stosowanych próbek wynosi $\dot{\epsilon}_{kr} \approx 250 \text{ sek}^{-1}$. Tym samym można było pominąć analizę falową i zagadnienie traktować jako quasi-statyczne.

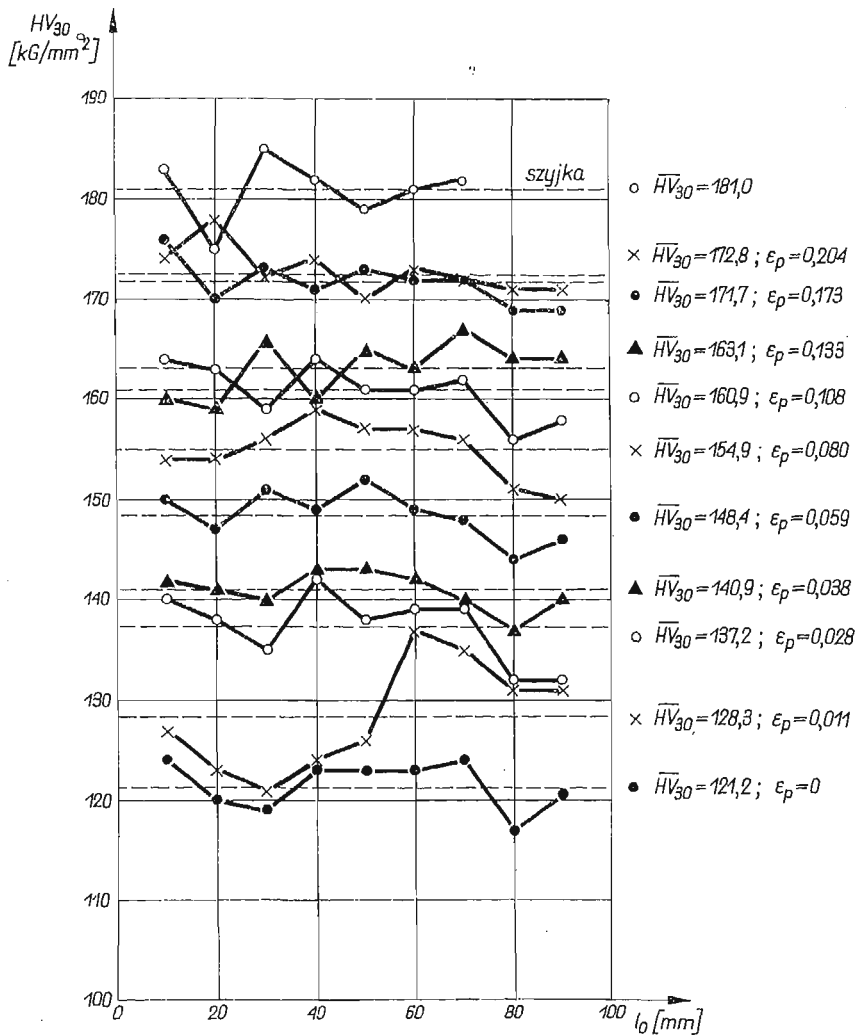
3. Wyniki doświadczeń dla stali

Do badań użyto miękkiej stali w stanie wyżarzonym o zawartości 0,2% C. Po wyżarzeniu dolna granica plastyczności wynosiła średnio $\sigma_{(m)} = 23,0 \text{ kG/mm}^2$, a uśredniona twardość $\overline{HV}_{30}^o = 122,3 \text{ kG/mm}^2$.

Pierwszą serię pomiarów twardości wykonano w celu znalezienia związku pomiędzy wstępnym odkształceniem plastycznym, uzyskanym w warunkach statycznych, a twardością. Kolejne odkształcenia plastyczne uzyskiwano w warunkach statycznych z prędkością odkształcania $\dot{\epsilon}_{stat} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$. Pomiarów twardości dokonywano w dziewięciu punktach wzdłuż tworzącej próbki, punkty pomiarowe były odległe od siebie o 10 mm. Uzyskane w ten sposób rozkłady twardości po kolejnych odkształceniach plastycznych przedstawiono na rys. 3. Liniami przerywanymi zaznaczono średnią twardość uzyskaną po danym odkształceniu plastycznym ϵ_p (oznaczenie \overline{HV}_{30}). Na podstawie otrzymanych wyników można znaleźć zależność pomiędzy wstępnym odkształceniem plastycznym a twardością. Doświadczenia takie przeprowadzono dla trzech próbek uśredniając otrzymane wyniki, a uśredniona zależność pomiędzy odkształceniem plastycznym ϵ_p a twardością \overline{HV}_{30} stanowiła podstawę do analizy następných danych. Doświadczenia wykazały, że dla odkształceń plastycznych do 3% obserwuje się znacznie bardziej nierównomierny rozkład twardości niż dla $\epsilon_p = 0$ lub dla większych wartości ϵ_p . Zjawisko to jest spowodowane niejednorodnym rozkładem odkształceń wzdłuż długości próbki w obszarze przystanku plastycznego. Jednak po uśrednieniu wyników wzrost twardości dla odkształceń $\epsilon_p < 3\%$ jest monotonicznie rosnący i zgodny z dalszym wzrostem twardości dla odkształceń $\epsilon_p > 3\%$.

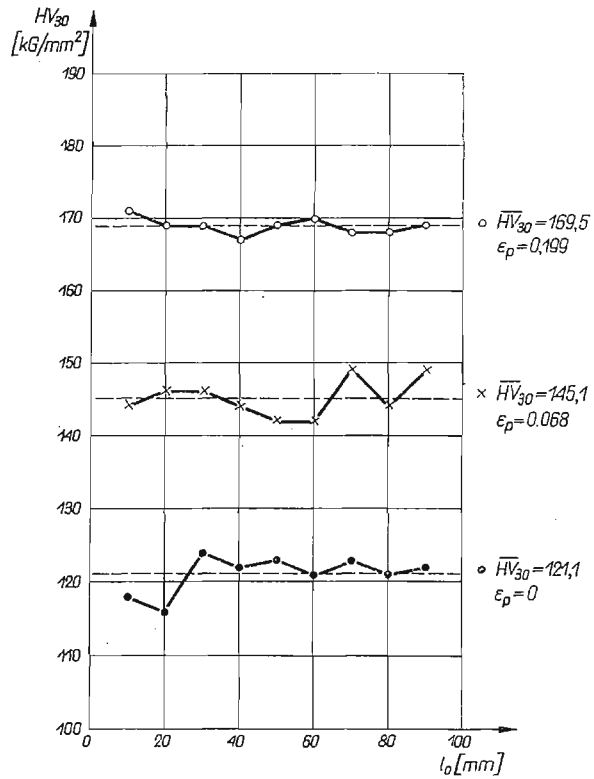
Następne doświadczenia polegały na wstępnym dynamicznym odkształcaniu poszczególnych próbek przy rosnących wartościach ϵ_p i pomiarach twardości. Po odkształceniu dynamicznym i zmierzeniu twardości próbki odkształcano ponownie w warunkach statycznych i ponownie mierzono twardość. Uzyskane w ten sposób rozkłady twardości dla dwóch próbek podano dla przykładu na rys. 4 i rys. 5, średnie wartości twardości \overline{HV}_{30} naniesiono jako linie przerywane.

Dla większości próbek odkształcaných dynamicznie dokonano pomiarów prędkości odkształcania, typowy wykres zmian odkształcania w czasie został przedstawiony na rys. 6.

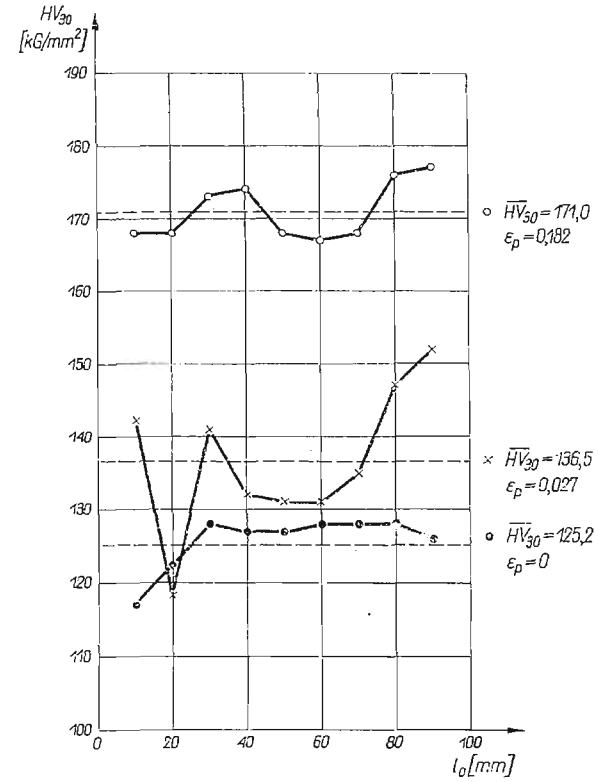


Rys. 3. Uzyskane rozkłady twardości po kolejnych odkształceniach plastycznych z prędkością $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ 1/sek. Liniami kreskowanymi i symbolem HV_{30} oznaczono średnie wartości twardości

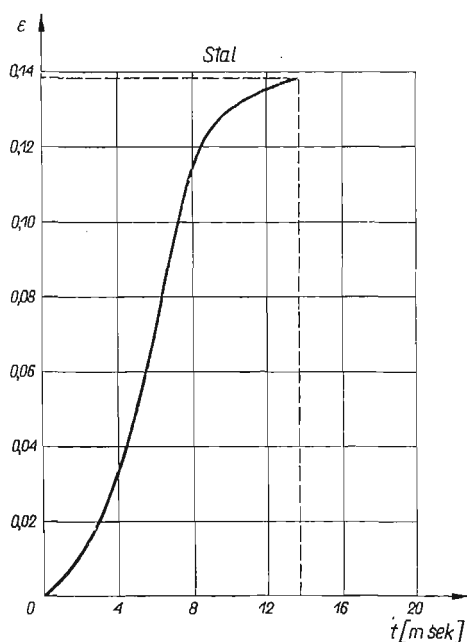
Po wykreślonym zróżniczkowaniu takich przebiegów jak przedstawiony na rys. 6 otrzymano wykresy zmian prędkości odkształcenia w funkcji odkształcenia. Trzy typowe wykresy dla trzech różnych wartości odkształceń trwałych ϵ_p podano na rys. 7. Na podstawie przedstawionych wykresów można stwierdzić, że w warunkach dynamicznych w miarę wzrostu odkształcenia prędkość odkształcenia szybko wzrasta, osiąga łagodne maksimum, a następnie maleje do zera. Maksymalne prędkości odkształcenia nie są niestety jednakowe dla różnych odkształceń trwałych, lecz rosną w przybliżeniu proporcjonalnie do uzyskiwanej wartości ϵ_p . Tym samym należy stwierdzić, że próbki odkształcane do różnych wartości ϵ_p posiadają różne przebiegi prędkości na płaszczyźnie $(\epsilon, \dot{\epsilon})$.



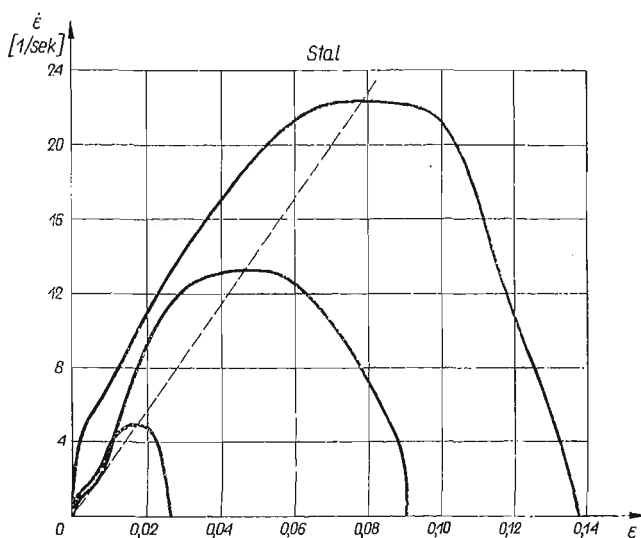
Rys. 4. Rozkłady twardości wzdłuż długości próbki; × po odkształceniu dynamicznym do $\epsilon_p = 0,068$; o po dalszym odkształceniu statycznym do $\epsilon_p = 0,199$



Rys. 5. Rozkłady twardości wzdłuż długości próbki; × po odkształceniu dynamicznym do $\epsilon_p = 0,027$; o po dalszym odkształceniu statycznym do $\epsilon_p = 0,182$



Rys. 6. Typowy wykres zmian odkształcenia w funkcji czasu podczas dynamicznego rozciągania

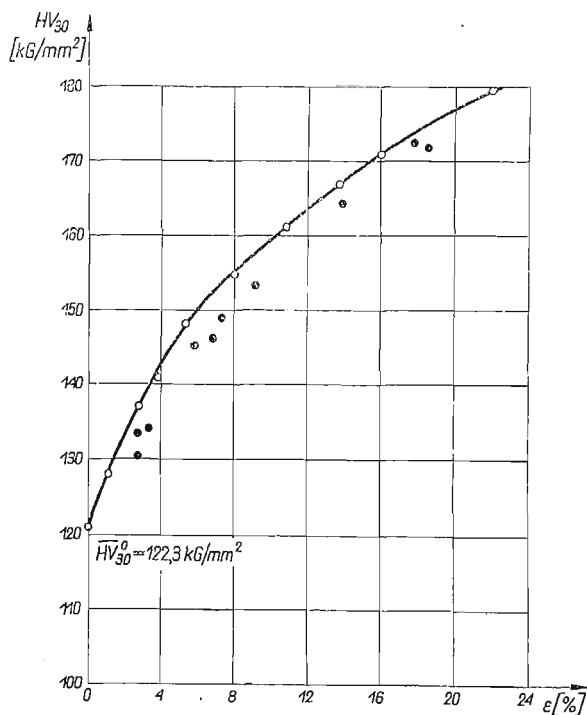


Rys. 7. Typowe wykresy zmian prędkości odkształcenia w funkcji odkształcenia dla stali

Zebrane zasadnicze wyniki doświadczeń nad efektem wpływu wstępnego odkształcenia dynamicznego na twardość stali podano na rys. 8. Linia ciągła przedstawia uśrednioną zależność twardości od odkształcenia plastycznego ϵ_p dla warunków statycznych, czarnymi punktami oznaczono średnie wartości otrzymane z pomiarów wzdłuż tworzącej próbek

po wstępnych rosnących odkształceniach dynamicznych. Wartości te poddano korekcji na rozrzut twardości dla poszczególnych próbek przy $\varepsilon_p = 0$.

Wszystkie punkty otrzymane z pomiarów twardości po odkształceniach dynamicznych leżą poniżej uśrednionej krzywej uzyskanej w warunkach statycznych. Punktów tych nie połączono linią ciągłą ze względu na różne wartości maksymalnych prędkości odkształcenia uzyskiwane przy różnych odkształceniach plastycznych. Pomimo mniejszych maksy-



Rys. 8. Zasadnicze wyniki doświadczeń nad efektem wpływu wstępnego odkształcenia dynamicznego na twardość; ○ uśredniona zależność uzyskana w warunkach statycznych; ● średnie wartości twardości po wstępnych rosnących odkształceniach dynamicznych

malnych prędkości odkształcenia największe zmniejszenie twardości obserwuje się w obszarze odkształceń trwałych od 6% do 8%. Dla większych odkształceń spadek twardości jest stosunkowo mniejszy.

Jak wspomniano poprzednio, próbki po wstępnym odkształceniu dynamicznym dociążano ponownie w warunkach statycznych, a następnie dokonywano powtórnych pomiarów twardości. Stwierdzono, że po odpowiednio dużym odkształceniu dodatkowym (rzędu 10%), średnie wartości twardości pokrywały się w przybliżeniu z uśrednionym przebiegiem twardości w funkcji ε_p dla warunków statycznych, a więc materiał wykazywał zdolność «zapominania» przebytej historii prędkości.

Ponieważ w pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że bieżące naprężenie plastycznego płynięcia jest wprost proporcjonalne do twardości,

$$(1) \quad \sigma = C(\overline{HV}_{30}),$$

to podane uprzednio wnioski będą również słuszne w odniesieniu do tego naprężenia.

4. Dyskusja wyników dla stali

Jak wynika z rys. 8, badana stal wykazuje mniejszą twardość po odkształceniu uzyskanym w warunkach dynamicznych niż twardość zmierzona przy tym samym odkształceniu, otrzymanym w warunkach statycznych, przy czym zmniejszenie twardości nie zależy w prosty sposób od maksymalnej prędkości odkształcenia. Powyższa obserwacja jest zgodna z wynikami doświadczeń zamieszczonymi w pracy CAMPBELLA i MAIDENA [2], w której minimum ponownej granicy plastycznego płynięcia stwierdzono w zakresie odkształceń rzędu 1%. Obecnie nie ulega więc wątpliwości, że własności mechaniczne stali po trwałym odkształceniu dynamicznym zależą od historii prędkości, innymi słowy od postaci funkcji $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\epsilon)$, podobnie jak to stwierdzono dla aluminium w pracy [7]. Na podstawie przytoczonych wyników doświadczalnych można przypuszczać, że zależność ta dla stali jest dosyć skomplikowana i podanie jakichkolwiek związków ilościowych jest obecnie niemożliwe. Analizę zachowania się stali komplikuje dodatkowo fakt, że po bardzo dużych prędkościach deformacji obserwuje się gwałtowny wzrost twardości [4, 6, 11]. W miarę zwiększania prędkości odkształcenia równolegle wzrasta składowa hydrostatyczna tensora naprężenia, gdyż bardzo duże prędkości deformacji można otrzymywać jedynie przy ściskaniu z równoczesnym istnieniem silnego efektu bezwładności poprzecznej. Należy przypuszczać, że przy odkształcaniu metali z bardzo dużymi prędkościami za pomocą ładunków wybuchowych ciśnienie staje się czynnikiem dominującym, a fala uderzeniowa ciśnienia powoduje zmiany własności mechanicznych, które można śledzić za pośrednictwem pomiarów twardości. ZUKAS i FOWLER [11] stwierdzili, że żelazo wykazuje następujący wzrost twardości po odpowiednich impulsach ciśnienia:

stan	twardość HV
wyżarzony	155
po impulsie ciśnienia 164 kbar	225
po impulsie ciśnienia 210 kbar	260.

DIETER [4] zaobserwował następujący wzrost twardości dla stali o zawartości 0,17% C po odpowiednich impulsach ciśnienia

stan	twardość HV ₁ kG/mm ²	σ_{p1} kG/mm ²	R_r kG/mm ²	σ_{p1}/HV_1
wyżarzony	85	24,6	40,8	0,289
impuls ciśnienia 95 kbar	160	43,6	50,6	0,273
impuls ciśnienia 260 kbar	260	80,9	87,9	0,311.

Można tu stwierdzić, że stosunek granicy plastycznego płynięcia po impulsie ciśnienia do zmierzonej twardości jest prawie stały; średnia wartość $C = \sigma_{p1}/HV_1$ wynosi $\bar{C} = 0,291$. Równocześnie zauważono, że znacznie szybszy wzrost twardości obserwuje się dla ciśnień większych od 130 kbar; zjawisko to tłumaczy się zachodzącą przemianą fazową przy tym ciśnieniu. Oprócz DIETERA również HOLTZMAN i COWAN [6] zaobserwowali znaczny wzrost twardości oraz ponownej granicy plastycznego płynięcia w stosunku do tych samych wielkości uzyskanych w warunkach walcowania na zimno przy jednakowym odkształceniu, przy czym w warunkach dynamicznych brano pod uwagę odkształcenie chwilowe, obliczone

ze zmian objętości. W opisanych warunkach dużej prędkości odkształcenia wzrost twardości może być wywołany co najmniej trzema czynnikami, mianowicie:

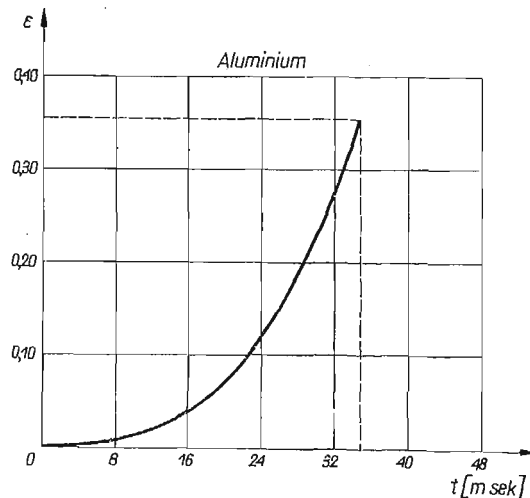
- a) fizycznym umocnieniem na skutek odkształcenia metalu,
- b) intensywnym bliźniakowaniem, które zachodzi w opisanych warunkach,
- c) fazową przemianą, która jest wywołana dużym ciśnieniem i zachodzi dla żelaza oraz stopów na bazie żelaza.

Porównanie wyników obecnej pracy z wynikami otrzymanymi przy bardzo dużych prędkościach deformacji prowadziłyby do wniosku, że dla pewnego zakresu prędkości i odkształceń zachodzi minimum twardości, a tym samym minimum granicy plastycznego płynięcia. Minimum to może zawierać się w przybliżeniu w zakresie prędkości $10 \text{ sek}^{-1} < \dot{\epsilon} < 1000 \text{ sek}^{-1}$; oczywiście podane granice są orientacyjne. Zagadnienie to dotychczas nie zostało zbadane.

5. Wyniki doświadczeń dla aluminium

Badania przeprowadzono na aluminium 99,90% Al w stanie wyżarzonym. Średnia twardość badanego aluminium w stanie wyżarzonym wynosiła $\overline{HV}_5^0 = 18,40 \text{ kG/mm}^2$.

Wpływ wstępnego dynamicznego odkształcenia na twardość badano jedynie po zerwa-

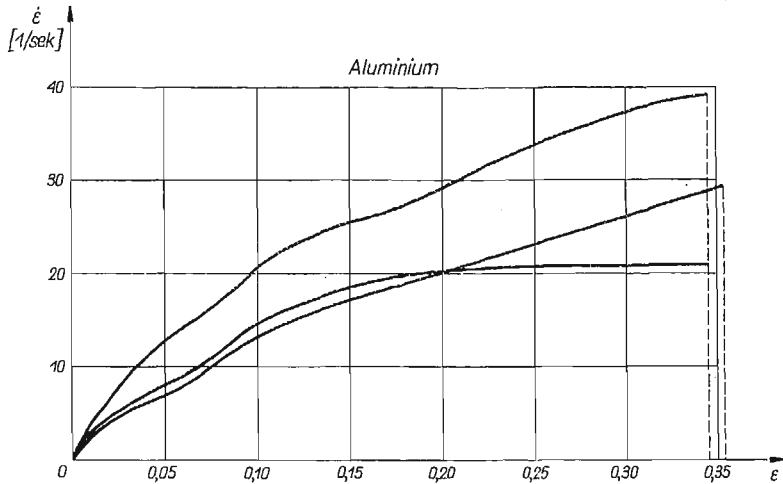


Rys. 9. Typowy wykres zmian odkształcenia w czasie dla zrywanej próbki aluminiowej

niu próbek poprzez pomiar twardości wzdłuż tworzącej próbki na części równomiernego wydłużenia. Prędkość odkształcenia zrywanych dynamicznie próbek mierzono metodą opisaną na wstępie. Na rys. 9 przedstawiono typowy wykres zmian odkształcenia w czasie dla zrywanej próbki. Prędkość odkształcenia wzrasta szybko począwszy od zera i jest największa w momencie zerwania próbki. Po zróżniczkowaniu otrzymanych wykresów znaleziono przebiegi zmian prędkości odkształcenia w funkcji odkształcenia, a więc funkcje $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\epsilon)$. Trzy typowe przebiegi funkcji podano na rys. 10. Z rysunku wynika, że dla badanych próbek aluminiowych obserwuje się w przybliżeniu proporcjonalny wzrost pręd-

kości odkształcenia z odkształceniem, a maksymalna prędkość przy zerwaniu wynosi $\dot{\epsilon} \approx 40 \text{ sek}^{-1}$.

Oddzielną partię próbek zerwano w warunkach statycznych z prędkością $\dot{\epsilon}_{\text{stat}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$ i również zmierzono twardość na częściach próbek o wydłużeniu równo-



Rys. 10. Trzy typowe przebiegi funkcji $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\epsilon)$ dla zrywanych próbek aluminiowych; pionowymi liniami kreskowanymi oznaczono wydłużenia równomierne, $\dot{\epsilon} = 29,87 \text{ sek}^{-1}$

miernym. Równocześnie dokonano pomiarów wydłużenia równomiernego ϵ_r , na próbkach odkształconych statycznie i dynamicznie. Otrzymane wyniki liczbowe podano niżej.

Uśrednione twardości po rozerwaniu statycznym i dynamicznym są następujące:

$$(\overline{HV}_5)_{\text{stat}} = 31,01 \text{ kG/mm}^2; \quad (\overline{HV}_5)_{\text{dyn}} = 33,83 \text{ kG/mm}^2,$$

obserwuje się więc wzrost twardości po odkształceniu dynamicznym. Względny przyrost obliczymy ze wzoru:

$$\alpha = \frac{(\overline{HV}_5)_{\text{dyn}} - (\overline{HV}_5)_{\text{stat}}}{(\overline{HV}_5)_{\text{stat}}} = \frac{\Delta \overline{HV}_5}{(\overline{HV}_5)_{\text{stat}}},$$

$$\alpha = 0,091, \text{ więc } \frac{\Delta \overline{HV}_5}{(\overline{HV}_5)_{\text{stat}}} = 9,1\%; \text{ wzrost ten wynosi } 9,1\%.$$

Zaobserwowano także wzrost wydłużenia równomiernego po odkształceniu dynamicznym

$$(\overline{\epsilon}_r)_{\text{stat}} = 0,2950, \quad (\overline{\epsilon}_r)_{\text{dyn}} = 0,3454,$$

względny przyrost wydłużenia wynosi:

$$\delta = \frac{(\overline{\epsilon}_r)_{\text{dyn}} - (\overline{\epsilon}_r)_{\text{stat}}}{(\overline{\epsilon}_r)_{\text{stat}}},$$

$\delta = 0,1705, \delta \approx 17\%$. W warunkach dynamicznych zachodzi więc wzrost wydłużenia równomiernego o 17%.

6. Dyskusja wyników dla aluminium

Wobec wzrostu wydłużenia równomiernego w warunkach dynamicznych zaobserwowany wzrost twardości może być spowodowany dwoma czynnikami: większym umocnieniem fizycznym, wynikającym ze wzrostu odkształcenia, lub nieco odmiennym mechanizmem deformacji plastycznej w warunkach dynamicznych. Aby zanalizować oddzielnie obydwie wymienione czynniki, wprowadzimy poprawkę na twardość w warunkach statycznych uwzględniającą wzrost odkształcenia do $(\varepsilon_r)_{dyn}$. W tym celu skorzystamy ze wzoru na naprężenie plastycznego płynięcia, który dobrze opisuje krzywą umocnienia aluminium w stanie wyżarzonym dla $\varepsilon > 0,01$ (wg. pracy [8]),

$$(2) \quad \sigma = B\varepsilon^m \dot{\varepsilon}^n,$$

gdzie B jest modułem plastyczności, m wykładnikiem umocnienia, n czułością na prędkość.

Oznaczmy

$$\sigma_1 = B(\varepsilon_r)_{stat}^m \dot{\varepsilon}_{stat}^n, \quad \sigma_2 = B(\varepsilon_r)_{dyn}^m \dot{\varepsilon}_{stat}^n;$$

po podzieleniu stronami

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left[\frac{(\varepsilon_r)_{dyn}}{(\varepsilon_r)_{stat}} \right]^m;$$

korzystając z (1) mamy

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{(\overline{HV}_5)_{stat}'}{(\overline{HV}_5)_{stat}};$$

stąd

$$(3) \quad (\overline{HV}_5)_{stat}' = (\overline{HV}_5)_{stat} \left[\frac{(\varepsilon_r)_{dyn}}{(\varepsilon_r)_{stat}} \right]^m.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych $(\varepsilon_r)_{dyn}$, $(\varepsilon_r)_{stat}$ oraz wykładnika umocnienia m , który dla aluminium wynosi $m \approx 0,25$, otrzymujemy poprawioną wartość twardości

$$(\overline{HV}_5)_{stat}' = 32,25 \text{ kG/mm}^2;$$

stąd $a' = 0,049$, $a' = 4,9\%$.

Pomimo uwzględnienia wzrostu wydłużenia równomiernego otrzymano około 5% wzrostu twardości.

Wynik ten jest zgodny z wynikami podanymi w pracach [12 i 7], gdzie stwierdzono wzrost granicy ponownego uplastycznienia po dużej prędkości odkształcenia. W pracy [7] stwierdzono ponadto, że wspomniany efekt zależy od dwóch czynników w momencie zmiany prędkości: od historii prędkości na płaszczyźnie $(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ (od postaci funkcji $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\varepsilon)$) oraz od wielkości skoku prędkości. Wzór otrzymany w pracy [7] na przyrost naprężenia $\Delta\tau$ w warunkach jednoosiowego ścinania przy zmianie prędkości z dużej na małą w momencie zmiany prędkości ma postać:

$$(4) \quad \Delta\tau = A\lambda(\text{tg}\gamma)_w \left[\frac{(\text{tg}\gamma)_w}{(\text{tg}\gamma)_d} - 1 \right]^q,$$

gdzie A oraz q oznaczają stałe materiałowe, $(\text{tg}\gamma)_w$ tangens kąta odkształcenia postaciowego w momencie zmiany prędkości, $(\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_w$ — prędkość tangensa kąta odkształcenia postaciowego przed zmianą prędkości, $(\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_d$ — ta sama wielkość po zmianie prędkości, przy czym wzór jest słuszny dla $(\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_w \geq (\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_d$ oraz dla $d(\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)/d(\text{tg}\gamma) \geq 0$. Przez λ oznaczono współczynnik wypełnienia zdefiniowany w następujący sposób:

$$\lambda = \frac{\int_0^{(\text{tg}\gamma)_w} \varphi(\text{tg}\gamma) d(\text{tg}\gamma)}{(\text{tg}\gamma)_w (\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_w};$$

funkcja podcałkowa $\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma = \varphi(\text{tg}\gamma)$ określa historię prędkości na płaszczyźnie $(\text{tg}\gamma, \dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)$.

W celu ilościowego oszacowania zaobserwowanego wzrostu twardości dokonamy transformacji zmiennych we wzorze (4) tak, aby był słuszny w warunkach jednoosiowego rozciągania lub ściskania. Podstawiając

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, \quad \text{tg}\gamma = \sqrt{3} \ln(1 + \epsilon),$$

mamy

$$\Delta\sigma = 3A\lambda \ln(1 + \epsilon_w) \left[\frac{\dot{\epsilon}_w}{\dot{\epsilon}_d} - 1 \right]^q, \quad (5)$$

$$\frac{(\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_w}{(\dot{\text{t}}\dot{\text{g}}\gamma)_d} \approx \frac{\dot{\epsilon}_w}{\dot{\epsilon}_d}, \quad \lambda = \frac{\int_0^{\epsilon_w} \dot{\epsilon}(\epsilon) d\epsilon}{\dot{\epsilon}_w \epsilon_w}.$$

Na podstawie zależności (1) mamy

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_r} \approx \frac{\Delta(\text{HV}_{5})'_{\text{stat}}}{(\text{HV}_{5})'_{\text{stat}}} = \alpha'; \quad (6)$$

naprężenie w momencie rozerwania próbki σ_r znajdujemy ze wzoru (2) przy uwzględnieniu $(\epsilon_r)_{\text{dyn}}$

$$\sigma_r = B(\epsilon_r)_{\text{dyn}}^m \dot{\epsilon}_{\text{stat}}^n, \quad \dot{\epsilon}_d = \dot{\epsilon}_{\text{stat}}, \quad (7)$$

po podstawieniu (5) i (7) do (6) mamy

$$\alpha' = \frac{3A\lambda \ln[1 + (\epsilon_r)_{\text{dyn}}]}{B(\epsilon_r)_{\text{dyn}}^m \dot{\epsilon}_{\text{stat}}^n} \left[\frac{\dot{\epsilon}_w}{\dot{\epsilon}_{\text{stat}}} - 1 \right]^q. \quad (8)$$

Otrzymano więc wzór na oszacowanie wzrostu twardości aluminium po wstępnym odkształceniu dynamicznym. Dla uproszczenia rachunku przyjmiemy $\ln[1 + (\epsilon_r)_{\text{dyn}}] \approx (\epsilon_r)_{\text{dyn}}$, wówczas

$$\alpha' = \frac{3A\lambda}{B\dot{\epsilon}_{\text{stat}}^n} (\epsilon_r)_{\text{dyn}}^{1-m} \left[\frac{\dot{\epsilon}_w}{\dot{\epsilon}_{\text{stat}}} - 1 \right]^q;$$

dla zrekompensowania pominięcia $\ln[1 + (\epsilon_r)_{\text{dyn}}]$ przyjmiemy $\epsilon_r = (1/2)/[(\epsilon_r)_{\text{stat}} + (\epsilon_r)_{\text{dyn}}] = 0,32$. Stałe materiałowe A , q , B , m , n dla aluminium przyjmujemy z prac [7 i 8], $A = 0,0106$ kG/mm²; $q = 0,404$; $B = 15,0$ kG/mm²; $m = 0,25$; $n = 0,02$. Średnia wartość $\dot{\epsilon}_w$ obliczona z rys. 10 wynosi $\dot{\epsilon}_w = 29,87$ sek⁻¹, wartość współczynnika wypełnienia λ

przyjęto równą 0,6, $\lambda = 0,6$, $\dot{\epsilon}_{\text{stat}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{sek}^{-1}$. Po podstawieniu wszystkich wielkości i obliczeniu otrzymano następującą wartość a' :

$$a' = 0,054, \text{ a więc } a' = 5,4\%,$$

wobec wartości $a' = 4,9\%$ otrzymanej na drodze doświadczalnej. Należy podkreślić dobrą zgodność oszacowania z wynikiem doświadczalnym.

Stwierdzony w obecnej pracy wzrost twardości jest potwierdzeniem uzyskanych w inny sposób wyników w pracach [7 i 12], jednak nie jest zgodny z wynikiem podanym przez LINDHOLMA [9], gdzie nie stwierdzono wzrostu naprężenia plastycznego płynięcia po prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{\text{dyn}} \approx 1000 \text{ 1/sek}$. Porównanie tych wyników prowadziłoby do wniosku, że dla aluminium w zakresie prędkości $10^{-3} \text{ sek}^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^3 \text{ sek}^{-1}$ może istnieć maksimum wzrostu twardości po wstępnym odkształceniu z dużą prędkością; podane graniczne prędkości są jednak orientacyjne. Wniosek ten dotyczy również naprężenia plastycznego płynięcia po wstępnym odkształceniu dynamicznym. Przypuszczalne maksimum nie zostało dotychczas stwierdzone na drodze doświadczalnej.

6. Wnioski

Spośród ważniejszych wniosków, które wynikają z obecnej pracy, należy wymienić:

1. Dla miękkiej stali obserwuje się zmniejszenie twardości po wstępnym odkształceniu dynamicznym z maksymalnymi prędkościami od 4 sek^{-1} do 50 sek^{-1} , proporcjonalnymi do trwałego odkształcenia. Największe wartości spadku twardości w stosunku do twardości uzyskanej w warunkach statycznych zaobserwowano dla odkształceń od 6% do 8%.

2. Przeprowadzona analiza istniejących prac wykazała, że dla stali należy się spodziewać największego spadku twardości w zakresie prędkości wstępnego odkształcenia od 10 sek^{-1} do 10^3 sek^{-1} . Przy bardzo dużych prędkościach deformacji i towarzyszącej fali uderzeniowej ciśnienia obserwuje się gwałtowny wzrost twardości.

3. Dla aluminium stwierdzono wzrost twardości rzędu 5% po dynamicznym zerwaniu próbek (przy odkształceniu równomiernym $\epsilon_r \approx 0,3$) w stosunku do twardości próbek zerwanych statycznie.

4. W oparciu o wyniki podane tutaj oraz w innych pracach należy przypuszczać, że dla aluminium w przedziale prędkości odkształcenia od 10^{-3} sek^{-1} do 10^3 sek^{-1} zachodzi maksimum wzrostu twardości.

Zaobserwowane efekty są wynikiem nieco odmiennego mechanizmu deformacji plastycznej przy różnych prędkościach odkształcenia. Ogólny wniosek, który wypływa z obecnej pracy i z prac diskutowanych, można zawrzeć w stwierdzeniu, że w granicach prędkości od 10^{-5} sek^{-1} do 10^3 sek^{-1} efekty historii prędkości są drugiego rzędu w stosunku do naprężenia plastycznego płynięcia otrzymywanego w warunkach statycznych, rzadko przekraczając 10% wartości tego naprężenia.

Literatura cytowana w tekście

1. J. D. CAMPBELL, J. DUBY, *The yield behaviour of mild steel in dynamic compression*, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1204, 236 (1956), 24.
2. J. D. CAMPBELL, C. J. MAIDEN, *The effect of impact loading on the static yield strength of a medium-carbon steel*, J. Mech. Phys. of Solids, 1, 6 (1957), 58.

3. D. S. CLARK, D. S. WOOD, *The influence of specimen dimension and shape on the results in tension impact testing*, Proc. ASTM, **50** (1950), 577.
4. G. E. DIETER, *Metallurgical effects of high-intensity shock waves in metals*, «Response of Metals to High Velocity Deformation». Metallurgical Society Conferences, Interscience Publishers, New York 1961.
5. D. B. HARRIS, M. P. WHITE, *Comparison of the hardening produced in a yield-point steel by uniaxial loading under static and under dynamic conditions*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 194.
6. A. H. HOLTZMAN, G. R. COWAN, *The strengthening of austenitic manganese steel by plane shock waves*, «Response of Metals to High Velocity Deformation», Metallurgical Society Conferences, Interscience Publishers, New York 1961.
7. J. KLEPACZKO, *Wpływ zmian prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia aluminium*, Rozprawa doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa 1965.
8. J. KLEPACZKO, *O potęgowej postaci mechanicznego równania stanu z uwzględnieniem temperatury*, Rozpr. Inżyn., **3**, **13** (1965), 561.
9. U. S. LINDHOLM, *Some experiments with the split Hopkinson pressure bar*, J. Mech. Phys. of Solids, **5**, **12** (1964), 317.
10. F. V. WARNOCK, J. A. POPE, *The change in mechanical properties of mild steel under repeated impact*, Proc. Inst. Mech. Engrs., **157** (1947), 33.
11. E. G. ZUKAS, C. M. FOWLER, *The behavior of iron and steel under impulsive loading*, «Response of Metals to High Velocity Deformation», Metallurgical Society Conferences, Interscience Publishers, New York 1961.
12. Л. И. ВАСИЛЬЕВ, Л. И. ЭРЕМИНА, *О некоторых особенностях пластического растяжения с переменной скоростью*, ДАН, **6**, **93** (1953), 1019.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ
НА ТВЕРДОСТЬ МЯГКОЙ СТАЛИ И АЛЮМИНИЯ

В работе дается описание и обсуждение экспериментальных результатов, цель которых состояла в исследовании влияния предварительной динамической деформации на твердость мягкой стали и алюминия. Предварительная динамическая деформация при растяжении достигалась при скоростях от 5 сек^{-1} до 50 сек^{-1} , а влияние такой деформации исследовалось с помощью измерения твердости методом Викерса.

В экспериментах было обнаружено, что для мягкой стали характерно уменьшение твердости после предварительной, остаточной динамической деформации по отношению к твердости, полученной после такой же статической деформации (скорость деформации в статических условиях $\dot{\epsilon}_{\text{stat}} \approx 5 \cdot 10^{-1} \text{ 1/сек}$). Анализ существующих работ показал, что для стали следует ожидать наибольшего уменьшения твердости в диапазоне скоростей предварительного деформирования от 10 сек^{-1} до 10^3 1/сек . Однако при очень больших скоростях деформации (порядка 10^4 – 10^7 сек^{-1}) с сопутствующей ударной волной давления, наблюдается резкое повышение твердости.

Для алюминия наблюдалось повышение твердости порядка 5%, после динамического разрыва образцов (при равномерной деформации $\epsilon_r = 0,3$) по отношению к твердости образцов при статическом разрыве.

Констатируется, что наблюдаемые эффекты являются результатом механизма пластической деформации, несколько разного при разной скорости деформации. Общее заключение, которое вытекает из настоящей работы и из обсуждаемых работ, заключается в том, что в пределах скоростей предварительного деформирования от 10^{-6} 1/сек до 10^3 1/сек эффекты «истории» скоростей являются эффектами второго порядка по отношению к напряжению пластического течения, соответствующего статической кривой упрочнения и редко превышают 10% его значения.

Summary

THE INFLUENCE OF DYNAMIC STRAIN
ON THE HARDNESS OF MILD STEEL AND ALUMINIUM

The author describes experiments concerning the influence of tension impact on the hardness of mild steel and aluminium. The dynamic tensional strains are carried out with the strain rates from 5 to 50 sec⁻¹. The influence of the strains was studied using the Vickers hardness measurement.

The experiments show that in case of mild steel the decrease of hardness is observed in the dynamic conditions after prior permanent strains as compared with the hardness obtained for the strain of the same value but measured in the dynamic conditions (the strain rate in the static conditions was $\dot{\epsilon}_{static} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$). On the basis of the works published by other authors, it has been stated that the highest drop of hardness for steel is to be expected after prior permanent strains with strain rates ranging from 10 to 10³ sec⁻¹. In case of very strain rates however (of the value from 10⁴ to 10⁷ sec⁻¹) with accompanying shock wave of the pressure, the hardness increases rapidly.

The hardness of aluminium after dynamic fracture (for uniform strain $\epsilon_p \approx 0.3$) was approximately 5 percent higher than that of specimens fractures statically.

The observed effects may be caused by slightly different mechanisms of plastic deformation for different rates of deformation. The following general conclusion may be drawn from both the present work and the publications discussed. In case of the prior rate of deformation ranging from 10⁻⁶ to 10³ sec⁻¹ the strain rate history effects are of the second order as compared with the flow stresses of the static strain hardening curve. The values seldom exceed 10 percent of the stresses obtained in the static conditions.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1965 r

DOŚWIADCZALNE BADANIA WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH POLICHLORKU WINYLU(*)

ANDRZEJ WILCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Praca niniejsza miała na celu stwierdzenie pewnych faktów doświadczalnych, sprzecznych z dotychczas przyjmowanymi zależnościami, używanymi zazwyczaj w obliczeniach i opisie zjawisk sprężystego następstwa.

Wymienione zjawiska, występujące w pospolitych materiałach konstrukcyjnych, takich jak stal czy żeliwo, jedynie w podwyższonych temperaturach orientacyjnie powyżej 400°C, w tworzywach sztucznych dają się wyraźnie zauważyć już w temperaturze pokojowej. Z tego względu wzięto do badań mało odporny na temperaturę techniczny polichlorek winylu biorąc jednocześnie pod uwagę celowość zbadania tak popularnego we współczesnej technice tworzywa.

2. Cel badań

W teorii ciał lepkosprężystych, do których można zaliczyć polichlorek winylu, zazwyczaj używa się zależności fizycznych, wiążących naprężenie z odkształceniem, wprowadzając jedno z poniżej wymienionych założeń:

1) odkształcenie objętościowe jest całkowicie sprężyste, natomiast odkształcenie postaciowe wywołuje wszystkie zauważalne zjawiska sprężystego następstwa [1, 2];

2) zjawiska sprężystego następstwa są wywołane zarówno częścią postaciową, jak też i częścią objętościową odkształcenia, jednak istnieje proporcjonalność stosunku stałych materiałowych, wchodzących w skład równań fizycznych [3, 4].

Wprowadzając pojęcia tensorów naprężenia σ_{ik} i odkształcenia ε_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) oraz ich rozkładu na tensory skośnosymetryczne i kuliste, zależności fizyczne pomiędzy tensorami naprężenia i odkształcenia można zapisać w przypadku założeń (1) w postaci

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ik} = \mathcal{L}(\sigma_{ik} - \sigma_m \delta_{ik}) + \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \sigma_m \delta_{ik},$$

gdzie \mathcal{L} oznacza pewien operator całkowy, który można przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu} + \int_0^t \Phi(t-\vartheta) d\vartheta.$$

W związkach (2.1) i (2.2) μ i λ oznaczają stałe Lamégo, natomiast $\Phi(t-\vartheta)$ jest jedną z funkcji sprężystego następstwa materiału.

(*) Praca wyróżniona w r. 1965 jedną z dwóch równorzędnych trzecich nagród na konkursie Zarządu Głównego PTMETS za najlepszą pracę doświadczalną z mechaniki.

Wykorzystując założenie (2) otrzymuje się zależność typu

$$(2.3) \quad \varepsilon_{ik} = \mathcal{L}_1(\sigma_{ik} - \sigma_m \delta_{ik}) + \mathcal{L}_2 \sigma_m \delta_{ik},$$

gdzie \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 oznaczają operatory zbudowane podobnie do (2.2) z dodatkowym założeniem, że istnieje zależność

$$(2.4) \quad \mu/\lambda = \eta/\xi.$$

W zależności (2.4) η i ξ są współczynnikami lepkości, odpowiadającymi stałym sprężystości μ i λ w równaniach fizycznych, wiążących naprężenie i odkształcenie w cieczy lepkiej, nienewtonowskiej, gdyż wykazującej lepkość objętościową [1].

Nie dyskutując chwilowo słuszności założeń i konfrontacji ich ze znanymi badaniami doświadczalnymi autor postawił sobie za cel sprawdzenie, czy w odniesieniu przynajmniej do polichlorku winylu zjawisko pelzania objętościowego nie występuje albo przy najmniej jest pomijalne, jak też czy słuszna jest zależność (2.4), z której wynika stała w czasie odkształcenia wartość współczynnika Poissona.

Niezależnie od tego autor postanowił zbadać możliwość opisywania zależności naprężenie-odkształcenie przy użyciu związku

$$(2.5) \quad \varepsilon_{ik} = L_{11}(\sigma_{ik} - \sigma_m \delta_{ik}) + L_{12} \sigma_m \delta_{ik},$$

gdzie operatory całkowe L_{11} i L_{12} mają postać

$$(2.6) \quad L_{11} = \frac{1}{2\mu} + \int_0^t \psi_1(t-\vartheta) d\vartheta,$$

$$L_{12} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} + \int_0^t \psi_2(t-\vartheta) d\vartheta,$$

a zarówno funkcje $\psi_1(t-\vartheta)$ i $\psi_2(t-\vartheta)$ są od siebie liniowo niezależne, co jest sprzeczne z założeniem (2.4).

Związek (2.5) z operatorami (2.6) można utworzyć wprowadzając założenie o mechanizmie powstawania odkształcenia. Wystarczy tu przyjąć, że zależności pomiędzy częściami zarówno kulistymi jak i skośnosymetrycznymi tensorów naprężenia i odkształcenia są liniowe i opisują sprężystość natychmiastową jak też i zjawiska sprężystego następstwa.

3. Materiał badań

Do badań użyto prętów z technicznego polichlorku winylu (druć spawalniczy) o następujących własnościach fizycznych i materiałowych:

Ciężar właściwy	1,24 ± 0,01 G/cm ³
Zawartość plastyfikatora (ftalanu dwubutylu)	12,0–15,0% średnia ważona z 50 próbek 14,2%
Ciężar cząsteczkowy	60 200–63 600 średnia ważona z 50 próbek 61 320
Średnica drutu	6,0 ± 0,02 mm.

Dodatkowo przeprowadzono próbę zrywania próbek w temperaturze 20°C przy wilgotności względnej 50% z prędkością $\dot{\varepsilon} = 0,74$ mm/mm min. Wyniki pomiarów zestawiono

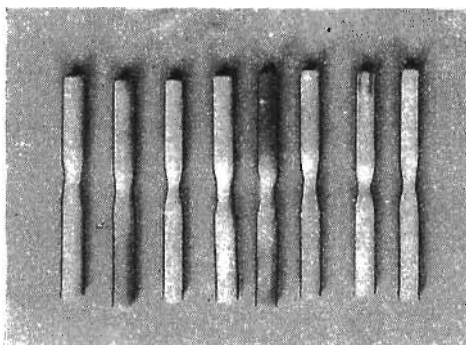
w tablicy 1 uzyskując średnie wartości wytrzymałości na zrywanie i wydłużenia przy zerwaniu:

$$R_r = 511 \text{ kG/cm}^2, \quad a = 10\%.$$

Tablica 1

Próbka	R_r	Próbka	R_r
1	535	9	518
2	498	10	512
3	505	11	493
4	514	12	496
5	524	13	496
6	507	14	493
7	526	15	526
8	524	16	505

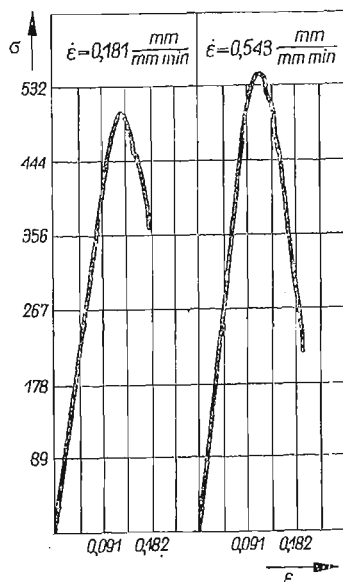
Warto zauważyć, że w trakcie procesu rozciągania na próbkach tworzyły się szyjki przedstawione na rys. 1. Charakter wykresów rozciągania próbek dwiema różnymi prędkościami uwidoczniło na rys. 2.



Rys. 1

Próbki wykonywano podgrzewając drut spawalniczy w wodzie do temperatury $87 \pm 1^\circ\text{C}$, a następnie nadawano im odpowiedni kształt bądź też prostowano. Po tym zabiegu próbki umieszczono na przeciąg 400 godzin w temperaturze 20°C i wilgotności względnej 50%, a następnie, bezpośrednio przed rozpoczęciem pomiarów, wygrzewano je w temperaturze $30 \pm 0,25^\circ\text{C}$ i wilgotności względnej $50 \pm 0,5\%$ przez 6 godzin. Próby były prowadzone w temperaturze $30 \pm 0,25^\circ\text{C}$, czyli $303 \pm 0,25^\circ\text{K}$ i w atmosferze o wilgotności względnej $50 \pm 0,5\%$.

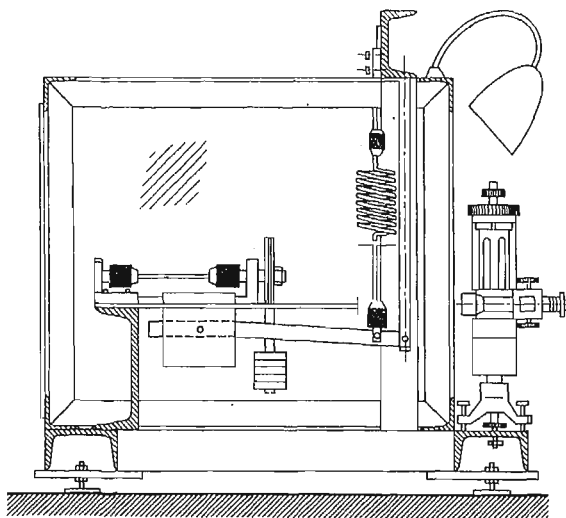
Czas trwania prób wynosił 384 000 minut, czyli około 6400 godzin. Pomiarów prowadzone były w czasach 1, 3, 10, 30, 100, 200, 500, 1500, 3000, 9000, 18 000, 51 000, 65 220, 100 000, 124 500, 180 000, 237 000 i 384 000 minut.



Rys. 2

4. Stanowisko pomiarowe

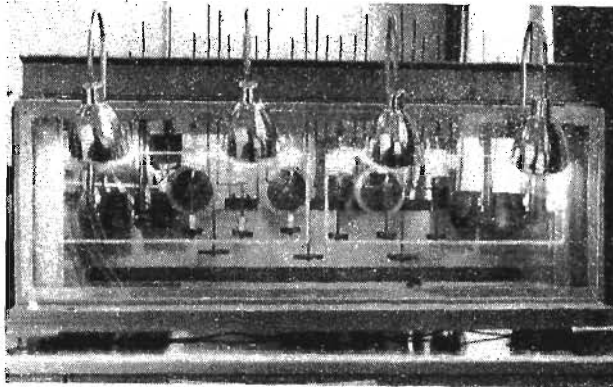
Do badań zjawisk sprężystego następstwa, występujących w tworzywach sztucznych, zaprojektowano i wykonano specjalne stanowisko laboratoryjne, przedstawione w przekroju na rys. 3. Stanowisko składa się ze sztywnej ramy stalowej, wykonanej z ceownika



Rys. 3

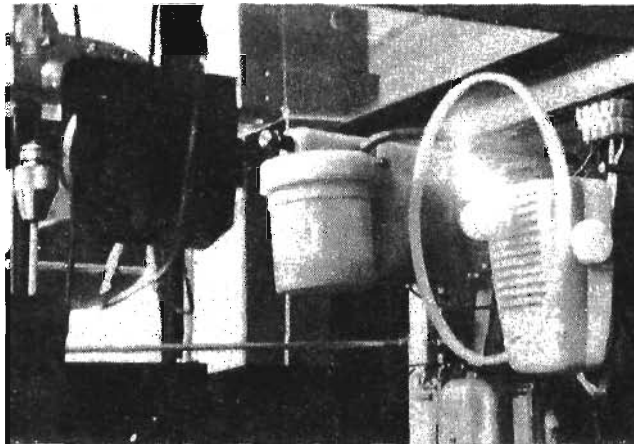
100, praktycznie nieodkształcalnej, na której zamocowano uchwyty do próbek oraz powierzchnię odniesienia dla optycznego urządzenia pomiarowego. Rama stanowiska zam-

knięta jest w szczelnej komorze, w której można utrzymywać stałą temperaturę i wilgotność. Odpowiedni układ automatyczny zapewnia utrzymanie stałej temperatury w zakresie 20–100°C z dokładnością do 0,25 °C oraz wilgotności w zakresie 10–100% wilgotności względnej z dokładnością do 0,5%. Fotografie całego stanowiska oraz układu automatyki



Rys. 4

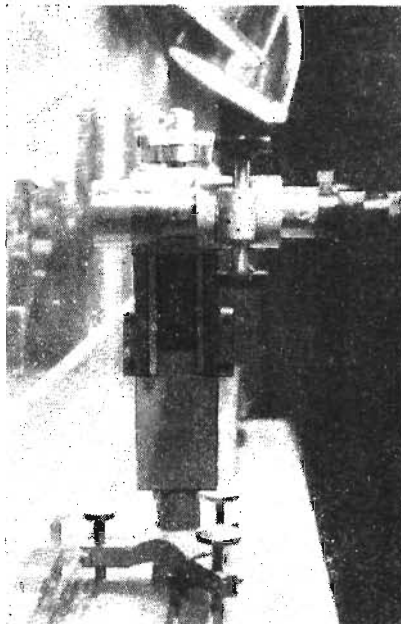
przedstawione są na rys. 4 i rys. 5. Ze względu na duże odkształcenie próbek do pomiaru odkształceń zastosowano specjalnie zaprojektowane urządzenie optyczne, umożliwiające pomiar przemieszczeń z dokładnością 0,01 mm w zakresie pomiarowym 0–80 mm w kierun-



Rys. 5

ku pionowym oraz pomiar w kierunku poziomym w zakresie 0–8 mm z dokładnością do 0,001 mm. Urządzenie to, przedstawione na rys. 6, umieszczone jest na zewnątrz komory termo- i hygrostatu. Pomiarów dokonuje się przez odpowiednie szyby, wykonane ze szkła optycznego, unikając dzięki temu błędów dyfrakcji. Układ dwóch poziomicy zapewnia dokładność poziomowania przyrządu do 1' łuku.

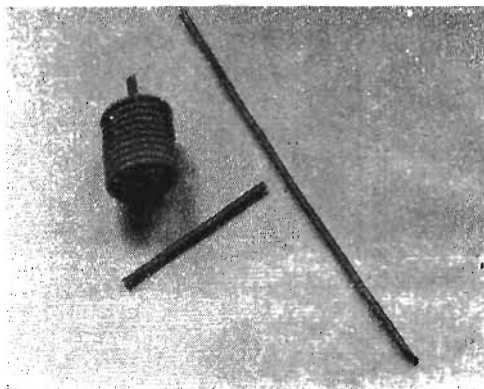
Całe stanowisko badawcze, zaprojektowane przez autora, zostało wykonane w Katedrze Mechaniki Technicznej Politechniki Warszawskiej przy udziale Katedr Przeróbki Plastycznej, Spawalnictwa i Przyrządów Optycznych.



Rys. 6

5. Metodyka badań

Badania przeprowadzono w trzech różnych stanach naprężenia, mianowicie przy prostym rozciąganiu, skręcaniu i zginaniu, mierząc odkształcenia 6 próbek w każdym przypadku.



Rys. 7

Rozciąganie uzyskano w odpowiednim układzie dźwigniowym, widocznym na rys. 3, skręcanie otrzymano w sprężynach spiralnych, a zginanie badano na beleczkach wspor-

nikowych, obciążonych ciężarem własnym. Fotografie wszystkich trzech rodzajów próbek przedstawiono na rys. 7.

Założenie o liniowości związków pomiędzy naprężeniem a odkształceniem oraz założenie małych odkształceń umożliwiło wyprowadzenie wzorów wyznaczających operatory L_{11} i L_{12} w dwóch pierwszych przypadkach obciążenia oraz wzoru na mierzoną strzałkę ugięcia f w przypadku trzecim.

Dotatkowo przyjęto, że obciążenie zostało przyłożone w chwili $t = 0$ w sposób dynamiczny z prędkością $v = 0$. W takim przypadku operatory L_{11} i L_{12} stają się zwykłymi funkcjami czasu.

Wobec powyższego celem tak ustawionych badań było wyznaczenie doświadczalne w dwóch pierwszych rodzajach obciążenia wartości funkcji $L_{11}^*(t)$ i $L_{12}^*(t)$, a w trzecim doświadczeniu — przy badaniu strzałki ugięcia — wyznaczenie jej wartości na drodze teoretycznej w oparciu o wyznaczone doświadczalnie funkcje $L_{11}^*(t)$ i $L_{12}^*(t)$ i porównanie wyników z doświadczeniem.

Badając skręcanie uzyskiwano funkcję $L_{11}^*(t)$ ze wzoru na ugięcie sprężyny śrubowej obciążonej ciężarem własnym i zapisanego w postaci

$$L_{11}^*(t) = \frac{J_0}{\gamma A R^4 (\theta - \sin \theta)^2} \lambda(t),$$

gdzie J_0 oznacza moment bezwładności biegunowy drutu sprężyny, γ jego ciężar właściwy, A pole przekroju, R promień nawinięcia, θ długość drutu sprężyny w mierze kątowej, a $\lambda(t)$ — mierzone ugięcie sprężyny.

Po wyznaczeniu funkcji $L_{11}^*(t)$ możliwe było określenie w stanie prostego rozciągania wartości funkcji $L_{12}^*(t)$, za pomocą wzoru

$$(5.2) \quad L_{12}^*(t) = 3 \frac{\Delta l}{\sigma l_0} - L_{11}^*(t),$$

w którym σ oznacza naprężenie rozciągające w prostym stanie rozciągania, l_0 długość początkową, a Δl mierzone przemieszczenie końca próbki.

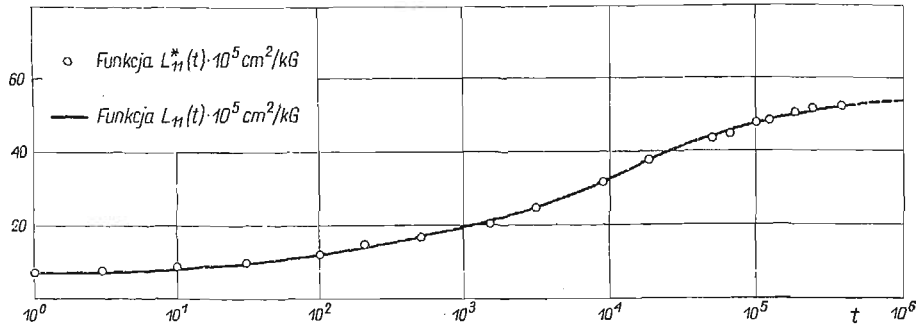
Strzałkę ugięcia f belki wspornikowej, obciążonej jedynie ciężarem własnym, obliczano w oparciu o wzór

$$(5.3) \quad f = \frac{\gamma A l^4}{24 J} [2L_{11}(t) + L_{12}(t)],$$

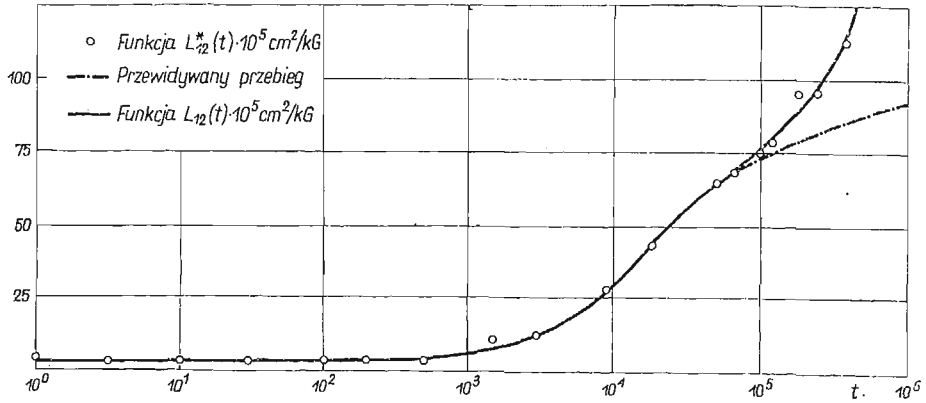
w którym l oznacza długość belki, a J jej moment bezwładności liczony względem osi obojętnej. Wpływ sił poprzecznych na ugięcie pominięto, gdyż stosunek średnicy belki d do jej długości l wynosił

$$\frac{d}{l} = 0,193.$$

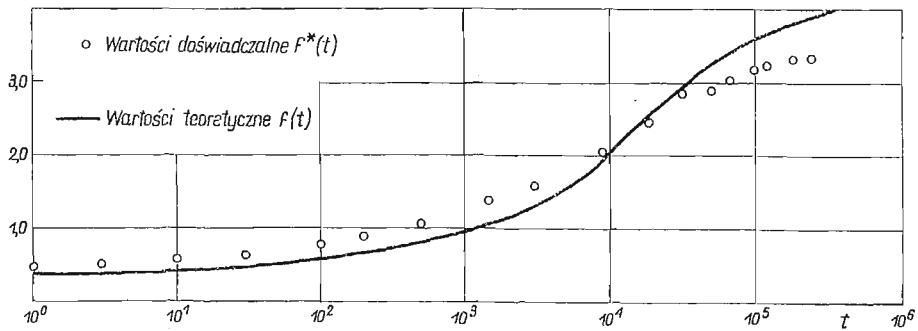
Średnie z 6 próbek wyniki doświadczalne (opatrzone gwiazdką) oraz wyniki poprawione, odczytane z krzywej ciągłej, poprowadzonej przez punkty doświadczalne, zestawiono



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

w tablicy 2 wraz z teoretyczną wartością strzałki ugięcia f , obliczoną w oparciu o wzór (5.3), do którego podstawiono wartości $L_{11}(t)$ i $L_{12}(t)$ z tejże tablicy (1).

Tablica 2

Pomiar	Czas	$10^5 \cdot L_{11}^*$	$10^5 \cdot L_{11}$	$10^5 \cdot L_{12}^*$	$10^5 \cdot L_{12}$	f^*	f
1	1	7,26	7,3	3,99	3,1	0,46	0,37
2	3	7,89	7,5	3,12	3,2	0,51	0,39
3	10	8,74	8,0	3,67	3,7	0,57	0,42
4	30	9,88	9,8	3,89	3,8	0,64	0,50
5	100	12,30	12,0	4,14	3,9	0,77	0,59
6	200	15,04	14,0	4,26	4,1	0,89	0,68
7	500	17,01	17,0	4,36	5,0	1,07	0,83
8	1500	20,61	21,5	11,11	6,6	1,39	1,05
9	3 000	24,86	24,9	13,01	13,0	1,59	1,33
10	9 000	31,86	31,5	28,50	28,0	2,05	1,92
11	18 000	37,63	38,0	43,36	44,0	2,45	2,54
12	51 000	44,39	45,0	65,11	64,0	2,84	3,26
13	62 500	45,22	46,0	68,47	69,5	2,88	3,42
14	100 000	47,51	47,5	74,94	76,2	3,02	3,56
15	124 500	49,21	49,0	84,85	79,0	3,14	3,67
16	180 000	50,59	50,0	95,54	85,0	3,24	3,79
17	237 000	52,11	51,0	101,73	88,2	3,30	3,90
18	384 000	52,28	52,0	119,72	93,6	3,32	4,00

W tablicy czas zapisano w minutach, funkcje L_{11}^* , $L_{12}^*(t)$, $L_{11}(t)$, $L_{12}(t)$ mają miano cm^2/kG , a strzałki ugięcia wyrażone są w centymetrach. W celu uzyskania wartości funkcji $L_{11}(t)$ i $L_{12}(t)$ wartości doświadczalne naniesiono na wykresy przedstawione na rysunkach 8 i 9. Wartości strzałek ugięcia $f^*(t)$ i $f(t)$ pokazano na rys. 10.

6. Statystyczne opracowanie wyników

W celu sprawdzenia czy różnice pomiędzy wartościami uzyskanymi na drodze doświadczalnej i na drodze teoretycznej są istotne, czy też mieszczą się w granicach rozrzutu doświadczalnego, zastosowano ogólną metodę sprawdzania statystycznych hipotez parametrycznych [5]. Przypuszczalny rozrzut doświadczalny, wynikający z niejednorodności próbek i innych czynników, uzyskano w oparciu o tablicę 1 prowadząc obliczenia według tablicy 3. Błędy pomiaru określano korzystając ze wzoru

$$(6.1) \quad x_i = \frac{\overline{R_r} - R_{ri}}{R_r} \cdot 100,$$

co prowadzi do wartości średniej błędności $x = -0,118\%$ oraz średniego odchylenia kwadratowego $= 2,65\%$. W celu określenia parametrów rozkładu błędów wyników obliczenia strzałki ugięcia określono błąd ten wzorem

$$(6.2) \quad y_i = 100 \cdot \frac{f_i^*(t) - f_i(t)}{f_i^*(t)}.$$

(1) Wartości funkcji L_{11} wyznaczono tu przy badaniu skręcania korzystając ze wzoru (5.1), natomiast funkcję L_{12} określano według (5.2), przy użyciu uprzednio wyznaczonej wartości L_{11} oraz wyników próby rozciągania.

Wyniki obliczeń prowadzonych do czasów $t = 62\ 500$ ze względu na różnice wartości, występujące dla większych czasów, pomiędzy oczekiwanym a otrzymanym przebiegiem pływania, pozwalają na określenie wartości średniej błędów $y = 12,5\%$. Wartość ta wskazuje na błędy systematyczne w odczycie. W związku z tym utworzono nową zmienną losową.

$$(6.3) \quad z_i = y_i - y,$$

co pozwala na znalezienie wartości średniej zmiennej z_i : $z = 1,49\%$ oraz średniego odchylenia kwadratowego $\sigma_z = 15,3\%$.

W celu określenia rozkładu błędów można utworzyć zmienną standaryzowaną ξ o rozkładzie Gaussa

$$(6.4) \quad \xi = \frac{z - x}{\sigma(z - x)},$$

gdzie

$$(6.5) \quad \sigma_{(z-x)} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_z^2}{n_z}}.$$

We wzorze (6.5) n_x i n_z oznaczają liczebności prób x i z .

$$(6.6) \quad \sigma_{(z-x)} = 15,33, \quad \xi \approx 0,105.$$

Wyniki (6.6) pozwalają po wykorzystaniu funkcji Laplace'a $\Phi(\xi)$ stwierdzić, że prawdopodobieństwo p otrzymania błędów większych od zauważonych równa się

$$p = 1 - 2\Phi(0,105) = 0,9164.$$

Stwierdzenie to wykazuje, że jeżeli tylko w pomiarach wystąpił błąd systematyczny $12,5\%$, to z prawdopodobieństwem 91% proponowane zależności są słuszne.

7. Dyskusja błędów

Jak się wydaje, uzyskane wyniki zdają się świadczyć o możliwości stosowania i poprawności podanych wzorów. Do tego sformułowania upoważnia fakt testu statystycznego, dającego 91% zgodności, co w warunkach laboratoryjnych można uznać za wynik dobry. Tym niemniej stwierdzenie takie jest słuszne, jeśli przyjąć, że w pomiarach wystąpił rzeczywiście błąd systematyczny rzędu 12% , który odjęto przy opracowywaniu wyników doświadczalnych. Analizując stosowane metody badań wydaje się, że najprawdopodobniej błąd taki mógł powstać przy pomiarach odkształceń beleczek wspornikowych, obciążonych ciężarem własnym. Wynika to z niemożności przyłożenia obciążenia w określonym momencie, gdyż beleczka podparta wprawdzie do chwili rozpoczęcia pomiaru, pęłała jednak także od chwili zamocowania, co mogło właśnie spowodować późniejsze błędy. W przyszłości należałoby raczej zrezygnować z tego względu z takich obciążeń przy badaniu pływania. Wydaje się jednak, że opisane uzasadnienia wystąpienia błędów systematycznego upoważniają do stwierdzenia o dużym prawdopodobieństwie poprawności proponowanej teorii.

8. Wnioski

Przeprowadzone badania wykazały, jak to wynika z rys. 9 i 10, że w polichloroku winylu występuje wyraźnie pełzanie objętościowe. To pierwsze stwierdzenie podważa poważnie słuszność przyjmowanego często założenia o idealnie sprężystym mechanizmie odkształceń objętościowych.

Podobnie negatywny wynik daje sprawdzenie możliwości stosowania niezmienności stosunków stałych sprężystości i lepkości. Można przyjąć, że jedną z możliwych miar czasów sprężystego następstwa jest odcięta na wykresach z rys. 9 i 10, wyznaczona przez styczną do najbardziej nachylonej części wykresu. W takim przypadku zauważa się, że czasy sprężystego następstwa w rozważanym przypadku różnią się o około 2 rzędy, co stwierdza zmienność w czasie współczynnika Poissona i podważa słuszność przyjmowania niezmienności stosunków stałych sprężystości i lepkości.

Przy okazji można zauważyć, że przyjmowanie jednego czasu sprężystego następstwa w badaniach może prowadzić, szczególnie przy zagadnieniach dynamicznych, do poważnych błędów, gdyż przyjęcie takie spowodowałoby tylko jedno maksimum, np. kąta strat mechanicznych, co w niektórych przypadkach jest sprzeczne z doświadczeniem [6].

Pozostaje jeszcze do omówienia kwestia rozbieżności przewidywanej i otrzymanej zmienności objętości w czasie dla czasów powyżej 1000 godzin. Można przypuszczać, że rozbieżność ta spowodowana została przez zmiany strukturalne. Mianowicie polichlorek winylu należy do tworzyw o liniowych łańcuchach cząsteczek, które jedynie w przypadku małych odkształceń, ze względu na splątania łańcuchów, zachowuje się jak tworzywo o łańcuchach cząsteczek rozbudowanych przestrzennie [7].

Narastające odkształcenie może spowodować częściowe rozplątanie tych łańcuchów i narastające w związku z tym niszczenie materiału.

Literatura cytowana w tekście

1. M. REINER, *Reologia teoretyczna*, Warszawa 1958.
2. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Warszawa 1963.
3. H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Oxford 1953.
4. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Warszawa 1957.
5. M. FISZ, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Warszawa 1957.
6. B. MAXWELL, *An investigation of the dynamic mechanical properties of polymethyl metacrylate*, *Journal of Polym. Sci.*, 20, 96 (1956).
7. F. ВУЕСНЕ, *Tensile strength of rubbers*, *J. Polym. Sci.*, 24, 189 (1957).

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ПОЛИВИНИЛА-ХЛОРИДА

Целью настоящей работы являлось экспериментальное исследование некоторых явлений, противоречащих предположениям, обычно принимаемым в реологических расчетах. Испытуемым материалом был технический поливинилхлорид и полученные результаты относятся, строго говоря, к этому материалу. Тем не менее некоторые результаты, приведенные ниже в виде заключений, можно обобщить и на другие материалы.

1. В поливинил-хлориде имеет место отчетливо выраженная объемная ползучесть и, таким образом, предположение о идеально упругом поведении объемной составляющей деформации для любого материала может привести к большим погрешностям.

2. Времена упругого последействия для объемной ползучести и ползучести сдвига отличны, в конкретном случае на два порядка. Поэтому нельзя, вообще говоря, принимать в расчетах предположение о постоянстве коэффициента Пуассона или эквивалентное предположение о пропорциональности реологических коэффициентов исследуемого материала.

Представленные выше заключения следует учитывать при использовании реологии для практических целей.

Summary

EXPERIMENTAL STUDIES ON PROPERTIES OF THE POLYVINYL CHLORIDE

The object of this paper is to show experimental results of certain phenomenon contradicting the assumptions often made in rheological calculations. The material used in the investigation was the technical polyvinyl chloride. Though the results obtained are valid for this material only, some of the results, shown below in the form of conclusions, may be generalized to other materials as well.

(1) In the polyvinyl chloride, the volumetric creep appears very distinctly. Thus, the assumption that the volumetric part of strain is perfectly elastic in case of an arbitrary material may cause significant errors.

(2) The times of elastic sequence for the volumetric creep and the shear creep differ by two orders. Taking this into account one cannot generally assume in calculations the Poisson ratio as a constant number, or, which is equivalent, the rheological coefficients cannot be taken as proportional.

These conclusions should be remembered in practical rheology.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 października 1965 r.

ANALIZA ZJAWISKA «PRZESKOKU» W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM
NA MODELU UKŁADU KRATOWEGO MISESA

J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYSZYN (KRAKÓW)

I. Wstęp

Przy rozpatrywaniu szeregu zagadnień stateczności ustrojów mechanicznych występuje konieczność wyjścia poza teorię Eulera. Już w ramach stateczności statycznej występują zagadnienia wymagające innego podejścia i przyjęcia odpowiedniego modelu nadającego się do matematycznej analizy. Właśnie takim zagadnieniem jest utrata stateczności związana ze zjawiskiem *przeskoku*.

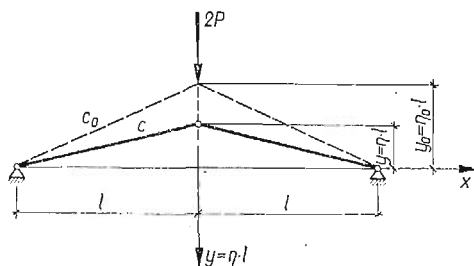
Zjawisko to występuje w ustrojach, w których przy pewnym krytycznym obciążeniu następuje przeskok z jednego stanu równowagi w drugi, przy czym — w odróżnieniu od utraty stateczności w sensie Eulera — ustrój może nie zmieniać postaci (np. w ustroju złożonym z prętów prostoliniowych teoretycznie również po przeskoku mogą nie występować pręty zakrzywione). Przeskok jest związany na ogół z wystąpieniem dużych przemieszczeń i jego badanie jest związane z koniecznością oparcia się na nieliniowej teorii ugięć skończonych. Stosowanie metod opartych na badaniu sąsiednich postaci równowagi (teoria Eulera) jest związane z założeniem małych przemieszczeń i może doprowadzić do całkowicie błędnych wyników; analizę tego zagadnienia można znaleźć w pracy K. A. MICHAJLICZENKI [2]. Z wymienionych przyczyn utrata stateczności związana z powstaniem przeskoku została nazwana w literaturze *utratą stateczności drugiego rodzaju*, w odróżnieniu od *utraty stateczności pierwszego rodzaju*, którą można badać w oparciu o teorię Eulera; klasyfikację taką podaje szereg autorów — por. np. S. D. LEJTES [1], A. A. PIKOWSKI [8].

Przeskok może powstać w często stosowanych ustrojach takich jak kraty i łuki o małej wyniosłości, powłoki cylindryczne i kuliste itp. Matematyczna analiza zagadnienia jest bardzo skomplikowana, gdyż zachodzi tu konieczność odrzucenia zasady zeszywnienia i uwzględnienia geometrycznych nieliniowości. Z tego powodu istnieje bardzo niewiele ścisłych rozwiązań, otrzymanych w dodatku dla liniowo sprężystych materiałów.

W obecnej pracy postaramy się zanalizować zjawisko przeskoku w przypadku materiału o dowolnej charakterystyce $\sigma-\epsilon$. W celu uniknięcia trudności natury matematycznej zajmiemy się szczegółowo tak zwanym *układem kratowym Misesa*. Jest to ustrój złożony z dwóch prętów połączonych między sobą przegubowo (rys. 1), obciążony siłą skupioną w węzle środkowym. Jest to uproszczony model R. Misesa; stateczność drugiego rodzaju badał R. MISES w pracy [3], a następnie wraz z J. RATZERSDORFEREM w pracy [4] rozważając stateczność kratownic i ramownic. Model ten dzięki swej prostocie pozwala poprzez elementarne rachunki ująć analitycznie zjawisko przeskoku i jest przytaczany w większości

prac dotyczących stateczności (por. np. A. PFLÜGER [7], J. G. PANOWKO i J. J. GUBANOWA [6]).

Ten prosty model pozwala na analizę zagadnienia w przypadku nieliniowej charakterystyki $\sigma - \epsilon$. Ponadto daje on możliwość uwzględnienia zjawiska odciążenia i efektu Bauschingera, dzięki czemu otrzymujemy pewne jakościowe wnioski dotyczące możliwości powstania i przebiegu przeskoku w urządzeniach zbudowanych z materiałów sprężysto-plastycznych.



Rys. 1

Zajmiemy się szczegółowo analizą układu kratowego Misesa wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego z wielokrotnym liniowym wzmocnieniem. Model ten umożliwia dobrą aproksymację własności materiałów rzeczywistych.

W pracy oprzemy się na następujących założeniach:

- 1) symetryczny układ kratowy Misesa (rys. 1) posiada stały przekrój F ;
- 2) układ jest nieważki, obciążony jedynie pionową siłą skupioną $2P$ przyłożoną w węzeł środkowym;
- 3) ustrój posiada idealne przegubowe połączenia i jego pręty nie mogą ulec wyboczeniu; w prętach wystąpi tylko jednoosiowy, jednorodny stan naprężenia;
- 4) materiał prętów jest jednorodny, sprężysto-plastyczny i wykazuje efekt Bauschingera.

2. Wyznaczenie zależności między ugięciem i siłą obciążającą dla materiału o dowolnej charakterystyce $\sigma - \epsilon$

Rozważmy symetryczny układ kratowy Misesa o wstępnej strzałce y_0 jak zaznaczono na rys. 1. Po przyłożeniu obciążenia pionowego $2P$ pręty ulegną skróceniu i węzeł środkowy przemieści się wzdłuż osi y . Odształcenie pręta zapiszemy w mierze Cauchy'ego

$$(2.1) \quad \epsilon = \frac{c - c_0}{c_0}.$$

Po uwzględnieniu geometrycznych związków możemy (2.1) zapisać w postaci

$$(2.2) \quad \epsilon = \frac{\sqrt{l^2 + y^2}}{\sqrt{l^2 + y_0^2}} - 1.$$

W dalszym ciągu będziemy posługiwali się bezwymiarową strzałką ugięcia

$$(2.3) \quad \eta = \frac{y}{l}.$$

Wprowadzenie oznaczenia (2.3) pozwala ostatecznie wyrazić odkształcenia prętów jako funkcję ugięcia; ze związku (2.2) otrzymamy mianowicie

$$(2.4) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1+\eta^2}{1+\eta_0^2}} - 1,$$

gdzie przez $\eta_0 = y_0/l$ oznaczono wstępną strzałkę ugięcia.

Z warunku równowagi prętów możemy napisać związek

$$(2.5) \quad P = \frac{y}{c} R = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} R,$$

w którym R oznacza siłę osiową występującą w prętach układu, równą co do wielkości całkowitemu oddziaływaniu. Związek (2.5) możemy podzielić przez wielkość pola powierzchni przekroju F_0 oraz moduł Younga E_0 . Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(2.6) \quad \frac{P}{E_0 F_0} = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\sigma}{E_0},$$

gdzie $\sigma = R/F_0$ odpowiada naprężeniu w prętach, wywołanemu działaniem siły R . Jeśli znamy charakterystykę materiału $\sigma = \sigma(\varepsilon)^{(*)}$, to wobec zależności (2.4) podającej związek między odkształceniem a wstępną strzałką i ugięciem w postaci funkcji $\varepsilon = \varepsilon(\eta; \eta_0)$, możemy otrzymać ogólne równanie

$$(2.7) \quad p = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{1}{E_0} \sigma[\varepsilon(\eta; \eta_0)].$$

W równaniu (2.7) wprowadziliśmy ponadto bezwymiarową siłę obciążającą

$$(2.8) \quad p = \frac{P}{E_0 F_0}.$$

Równanie (2.7) napisane w postaci bezwymiarowej pozwala stwierdzić możliwość wystąpienia przeskoku. Dzięki wprowadzeniu strzałki ugięcia η jako zmiennej niezależnej otrzymujemy (przy znanej charakterystyce materiału $\sigma(\varepsilon)$) funkcję jednoznaczną, dla której warunek przeskoku ma postać

$$(2.9) \quad \frac{dp}{d\eta} = 0.$$

W odniesieniu do równania (2.7) oraz po uwzględnieniu związku (2.4) warunek (2.9) zapiszemy w następującej, ogólnej postaci:

$$(2.10) \quad \sigma[\varepsilon(\eta; \eta_0)] + \frac{\eta^2 \sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{1+\eta_0^2}} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0.$$

Z tak otrzymanego równania (2.10) można wyznaczyć strzałkę ugięcia odpowiadającą ekstremalnej sile $p_m = p_k$, przy której może nastąpić przeskok.

(*) W charakterystyce materiału należy przyjmować naprężenie umowne $\sigma = R/F_0$, gdzie F_0 jest polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta przed odkształceniem.

W przypadku przyjęcia siły obciążającej p jako zmiennej niezależnej nie możemy tak prosto ocenić możliwości powstania przeskoku. Ponadto okazuje się, że w ogólnym przypadku nie możemy w sposób ścisły rozwikłać równania (2.7) ze względu na η . Z tych względów w dalszym ciągu będziemy się posługiwać równaniem (2.7), wyrażającym siłę obciążającą jako funkcję strzałki ugięcia $p = p(\eta; \eta_0)$.

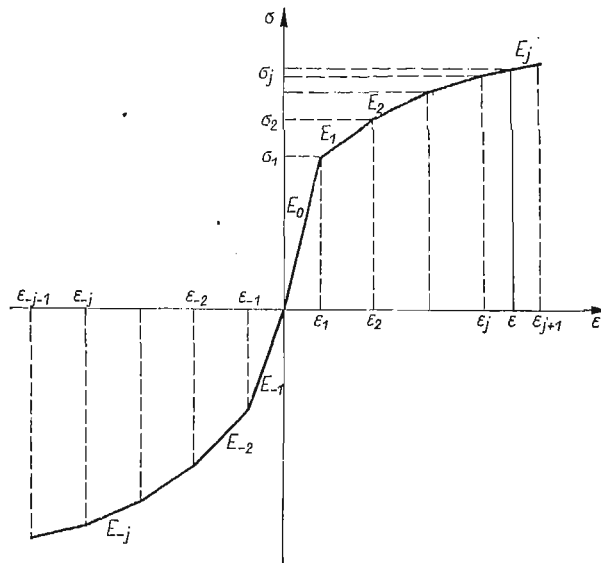
3. Wyznaczenie zależności $p-\eta$ dla materiału sprężysto-plastycznego z wielokrotnym wzmocnieniem liniowym

3.1. Proces obciążenia wewnętrznego. Zanim przejdziemy do określenia materiału, zastanowimy się nieco dokładniej nad charakterem procesu zachodzącego w materiale prętów.

Przy zwiększaniu się ugięcia w pręcie początkowo będą wzrastały również odkształcenia (a właściwie moduł odkształcenia) aż do osiągnięcia wartości

$$(3.1) \quad \varepsilon_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}} - 1,$$

odpowiadającej maksymalnemu skróceniu w położeniu $\eta = 0$ (por. rys. 1). Proces związany ze zwiększaniem się bezwzględnej wartości odkształcenia będziemy nazywali *procesem obciążenia wewnętrznego*. Użyliśmy celowo określenia *proces wewnętrzny* ze względu na



Rys. 2

brak korelacji między wzrostem obciążenia zewnętrznego i wzrostem modułu odkształcenia w pewnych przedziałach η ; np. przy $\eta = 0$ siła obciążająca $p = 0$ pomimo tego, że odkształcenie $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$. Proces ten będzie zachodził w przypadku skracania się prętów układu, co można ująć analitycznie poprzez warunek

$$(3.2) \quad \frac{d\varepsilon}{d\eta} \leq 0.$$

Znak nierówności w (3.2) jest związany z przyjętym zwrotem osi η oraz wartością η_0 : przy zwiększaniu się strzałki η odkształcenie ε będzie malało w sensie algebraicznym. W przypadku $\eta_0 < 0$ proces obciążenia wewnętrznego będzie zachodził dla $\eta \leq 0$.

Zajmiemy się teraz szczególnym materiałem, którego charakterystyka $\sigma-\varepsilon$ została przedstawiona na rys. 2. Rzeczywista krzywa $\sigma(\varepsilon)$ została tutaj aproksymowana linią łamaną. Taki model ⁽²⁾ pozwala otrzymać dobre przybliżenie nawet przy stosunkowo niewielkiej liczbie punktów załamania. Taki odcinkowo-liniowo-sprężysty model znacznie upraszcza obliczenia, pozwala uwzględnić różne właściwości materiału przy ściskaniu i rozciąganiu, a ponadto pozwala uwzględnić zjawisko odciążenia i efekt Bauschingera występujące w materiałach sprężysto-plastycznych.

Naprężenie σ zapiszemy równaniem

$$(3.3) \quad \sigma = \sigma_j + (\varepsilon - \varepsilon_j) E_j \quad \text{dla} \quad \varepsilon_j \leq \varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{j+1}.$$

Równanie to możemy podstawić do (2.7), a po podstawieniu jeszcze ε z równania (2.4) otrzymamy związek

$$(3.4) \quad p = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \left[a_j + \left(\sqrt{\frac{1+\eta^2}{1+\eta_0^2}} - 1 - \varepsilon_j \right) a_j \right],$$

w którym wprowadzono dalsze bezwymiarowe wielkości charakteryzujące materiał

$$(3.5) \quad a_j = \frac{\sigma_j}{E_0}, \quad \alpha_j = \frac{E_j}{E_0}.$$

Równanie (3.4) możemy przedstawić w ogólnej postaci

$$(3.6) \quad p = A_j \eta + B_j \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}},$$

gdzie parametry A_j i B_j będą funkcjami wstępnej strzałki ugięcia η_0 oraz stałych materiałowych a_j , α_j , ε_j

$$(3.7) \quad A_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{1+\eta_0^2}}, \quad B_j = a_j - (1 + \varepsilon_j) \alpha_j.$$

Parametry A_j i B_j są ważne w przedziale $\eta_j \leq \eta \leq \eta_{j+1}$, przy czym granice tego przedziału możemy obliczyć z równania (2.4) rozwiązując je ze względu na η ; otrzymamy

$$(3.8) \quad \eta_j = \mp \sqrt{(1 + \varepsilon_j)^2 (1 + \eta_0^2) - 1}.$$

Znak minus odpowiada $\eta_0 \leq \eta_j \leq 0$ i wiąże się z procesem obciążenia wewnętrznego. Oczywiście należy przyjąć znak plus, gdyby w wyjściowym położeniu $\eta_0 > 0$.

Prosta postać równania (2.13) pozwala łatwo obliczyć wielkość strzałki odpowiadającej sile ekstremalnej, która może spowodować przeskok. Z warunku (2.10) obliczymy

$$(3.9) \quad \eta_m = \mp \sqrt{\left(-\frac{B_j}{A_j} \right)^{2/3} - 1} \quad \text{dla} \quad \eta_j \leq \eta_m \leq \eta_{j+1},$$

⁽²⁾ Model ten przyjęliśmy z pracy J. ORKISZA i M. ŻYCKOWSKIEGO [5].

gdzie znaki należy przyjmować jak w (3.8). Po podstawieniu (3.9) do (3.6) otrzymamy równanie dla siły ekstremalnej

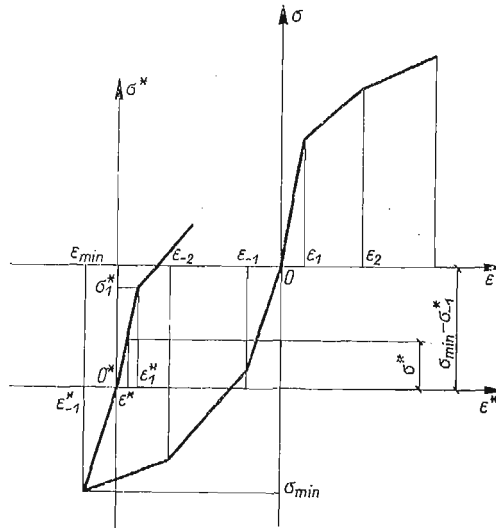
$$(3.10) \quad p_m = \mp \sqrt{\left(\frac{B_j}{A_j}\right)^{2/3} - 1(A_j + \sqrt{-A_j B_j^2})}.$$

3.2. Proces odciążenia wewnętrznego. W przypadku niespełnienia warunku (3.2) w materiale układu będzie zachodził proces odciążenia wewnętrznego. Aby zapisać analitycznie zachodzące przy tym związki, wprowadzimy nowy układ $(\varepsilon^*; \sigma^*)$ związany z pierwotnymi zależnościami (por. rys. 3)

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^* + (\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{-1}^*), \\ \sigma &= \sigma^* + (\sigma_{\min} - \sigma_{-1}^*), \end{aligned}$$

w których σ_{\min} oznacza naprężenia minimalne odpowiadające ε_{\min} obliczonemu według (3.1). W nowym układzie naprężenie σ można zapisać równaniem analogicznym do (3.3),

$$(3.12) \quad \sigma^* = \sigma_j^* + (\varepsilon^* - \varepsilon_j^*) E_j^* \quad \text{dla } \varepsilon_j^* \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_{j+1}^*.$$



Rys. 3

Po podstawieniu (3.12) do (3.11) i uwzględnieniu związków (2.4) i (3.1) otrzymamy równanie dla naprężenia

$$(3.13) \quad \sigma = (\sigma_{\min} - \sigma_{-1}^* + \sigma_j^*) + \left(\varepsilon_{-1}^* - \varepsilon_j^* - \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} \right) E_j^* + \sqrt{\frac{1 + \eta_0^2}{1 + \eta_0^2}} E_j^*,$$

które możemy podstawić do równania (2.7). Otrzymamy równanie dla siły p znowu w postaci (3.6), w której występują parametry A_j^* i B_j^*

$$(3.14) \quad \begin{aligned} A_j^* &= \frac{a_j^*}{\sqrt{1 + \eta_0^2}}, \\ B_j^* &= (a_{\min} - a_{-1}^* + a_j^*) + \left(\varepsilon_{-1}^* - \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} - \varepsilon_j^* \right) a_j^*. \end{aligned}$$

Współczynniki te będą ważne dla η^* spełniających nierówność $\eta_j^* \leq \eta^* \leq \eta_{j+1}^*$. Granice tego przedziału $\langle \eta_j^*, \eta_{j+1}^* \rangle$ wyznaczmy na podstawie równań (3.11) i (2.4); otrzymamy równanie

$$(3.15) \quad \eta_j^* = \pm \sqrt{[(\varepsilon_j^* - \varepsilon_{-1}^*) \sqrt{1 + \eta_0^* + 1}]^2 - 1}.$$

Podobnie jak w (2.15) górny znak odpowiada $\eta_0 < 0$; przy wstępnej strzałce $\eta_0 > 0$ odciążenie wewnętrzne będzie zachodziło dla $\eta_j^* > 0$.

W czasie odciążenia wewnętrznego przy pewnej strzałce η_{j0}^*

$$(3.16) \quad \eta_{j0}^* = \pm \frac{\sqrt{B_j^{*2} - A_j^{*2}}}{A_j^*}$$

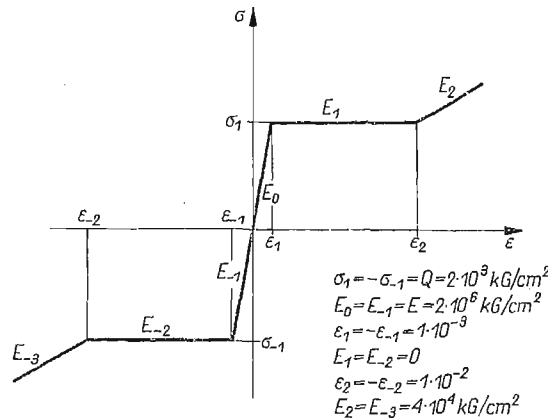
siła obciążająca $p = 0$ [znaki w (3.16) przyjmujemy analogicznie jak w (3.15)].

Rozpatrywaliśmy proces odciążenia wewnętrznego, występujący przy monotonicznym wzroście strzałki ugięcia. Proces odciążenia może wystąpić nie tylko od stanu $\eta = 0$, lecz również przy innych strzałkach. Będzie on wtedy uzależniony od zmiany obciążenia zewnętrznego. W takim przypadku jako a_{\min} i ε_{\min} należy przyjmować wielkości odpowiadające początkowi procesu odciążenia.

Należy ponadto zwrócić uwagę, że można przyjąć w pewnym sensie (wykazują to doświadczenia dla materiałów sprężysto-plastycznych) jednakową charakterystykę materiału przed i w czasie odciążenia — wykres $\sigma - \varepsilon$ o początku w punkcie O doznaje jakby sztywnego przesunięcia do punktu O^* (por. rys. 3). Oznacza to, że w podanych powyżej wyrażeniach $\varepsilon_j^* = \varepsilon_j$, $a_j^* = a_j$, $u_j^* = u_j$ itd.

4. Materiał sprężysto-plastyczny z jednokrotnym wzmocnieniem liniowym

Szczególnym przypadkiem materiału rozważanego w p. 3. jest materiał o charakterystyce pokazanej na rys. 4. Odpowiada on modelowi używanemu często przy badaniu



Rys. 4

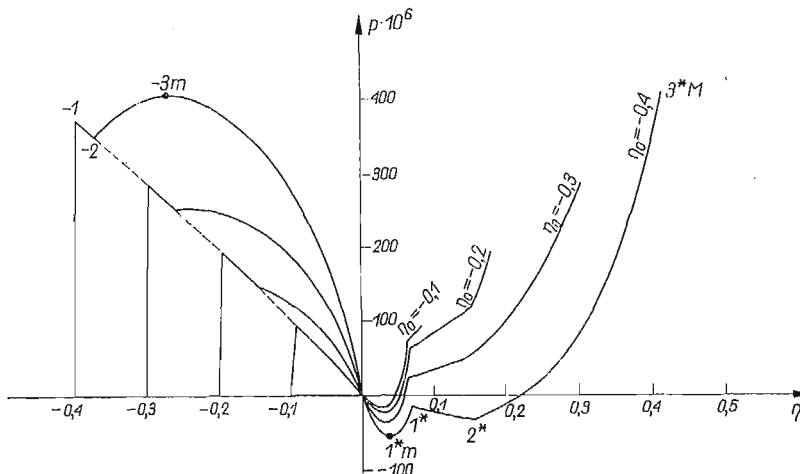
miękkiej stali i z tego powodu zajmiemy się nim nieco dokładniej. Współczynniki A_j i B_j zestawiono w tabelicy 1. Uderza przy tym znaczne uproszczenie współczynników w zakresie sprężystym, a szczególnie w zakresie pełnego uplastycznienia. W tym ostatnim przypadku

Tablica 1

	Zakres					
	sprężysty		plastyczny		wzmocnienie	
	A_{-1}	B_{-1}	A_{-2}	B_{-2}	A_{-3}	B_{-3}
Obciążenie	$\frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	-1	0	ε_{-1}	$\frac{a_3}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	$\frac{\varepsilon_{-1} - (1+\varepsilon_{-2})a_3}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$
	A_1^*	B_1^*	A_2^*	B_2^*	A_3^*	B_3^*
Odciążenie	$\frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	$-\frac{a_{min}}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	0	$a_{min} + 2\varepsilon_1$	$\frac{a_3}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	$\frac{a_{min} + 2\varepsilon_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}})a_3}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$

w procesie obciążenia współczynnik B_{-2} jest niezależny od wstępnej strzałki ugięcia η_0 (odpowiada to modelowi materiału sztywno-plastycznego).

Aby dokładniej zanalizować przyjęty model, wykonano obliczenia numeryczne i na ich podstawie sporządzono wykresy na rys. 5. Obliczenia te wykonano dla różnych wartości wstępnych strzałek η_0 . Proces obciążenia wewnętrznego zachodzi dla $\eta \leq 0$. Monoto-



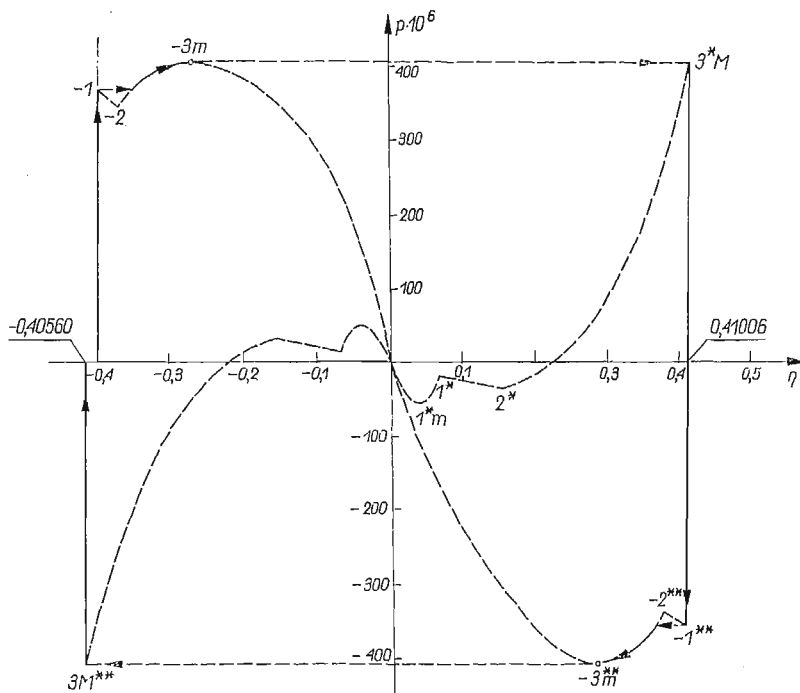
Rys. 5

niczemu zwiększaniu strzałki towarzyszy początkowo wzrost siły aż do wartości p_{-1} (odpowiadającej punktowi -1 na wykresach rys. 5), przy której napężenie w prętach układu osiąga granicę plastyczności Q . Następnie siła maleje, aby przy niektórych wartościach wstępnych strzałek znów wzrastać wskutek wzmocnienia materiału (widać to wyraźnie na wykresie odpowiadającym $\eta_0 = -0,4$). Siłę odpowiadającą początkowi wzmocnienia oznaczyliśmy przez p_{-2} . Następnie siła maleje i przy $\eta = 0$ siła $p = 0$ (trzy przeguby układu Misesa są na jednakowym poziomie). Przy $\eta \geq 0$ mamy już do czynienia

z procesem odciążenia wewnętrznego, któremu towarzyszy początkowo zmniejszanie, a potem wzrost siły p . Na wykresach zaznaczono punkty rozgraniczające poszczególne obszary.

Opisany przez nas proces obciążenia zewnętrznego można nazwać *kinematycznym*, gdyż jako zmienną niezależną przyjmowaliśmy bezwymiarową strzałkę ugięcia η , która wzrastała monotonicznie od wartości $\eta = \eta_0$.

W praktyce jednak o wiele częściej spotykamy się z obciążeniem statycznym. W tym przypadku monotonicznie wzrasta siła zewnętrzna p aż do wartości $p = p_{-1}$. Przy przekroczeniu tej siły następuje *przeskok* — układ przechodzi z jednej postaci równowagi w drugą. Okazuje się przy tym, że teoretycznie możliwe są tutaj dwa przypadki. Przy małych strzałkach siła p_{-1} będzie siłą krytyczną i ustrój przejdzie w skrajne położenie η_{3M}^* . Dla większych wstępnych strzałek (widać to wyraźnie przy $|\eta_0| = 0,4$) mamy do czynienia z podwójnym przeskakiem. Mianowicie po przekroczeniu siły p_{-1} następuje pierwszy przeskok na gałąź odpowiadającą wzmocnieniu i siła może wzrastać aż do wartości maksymalnej p_{-3m}

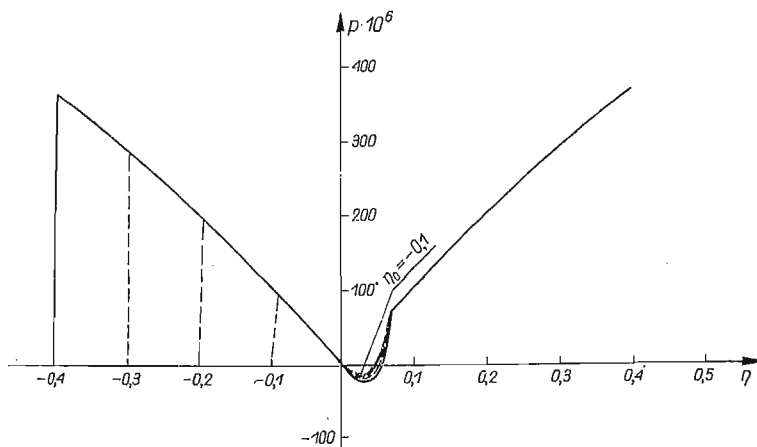


Rys. 6

(por. rys. 6). Przy tej sile może nastąpić drugi przeskok do postaci równowagi dla strzałki η_{3M}^* . Tak więc teoretycznie możemy mieć do czynienia z dwiema siłami krytycznymi p_{-1} i p_{3m} , przy których następują przeskoki.

Należy tu jednak od razu zaznaczyć, że podwójny przeskok jest możliwy tylko teoretycznie, gdyż może on powstać jedynie przy bardzo dużych odkształceniach, na ogół niedopuszczalnych w konstrukcjach inżynierskich. Podwójny przeskok będzie utrudniony również w przypadku wystąpienia dużej różnicy pomiędzy górną i dolną granicą plastycz-

ności. Wtedy siła p_{-1} podwyższy się i może być większa od p_{-3m} nawet przy dużych strzałkach; zaznaczono to na rys. 6. Ze zjawiskiem takim należy się liczyć np. w przypadku bardzo niskich temperatur nawet przy powolnym wzroście obciążenia (por. pracę M. ZAKRZEWSKIEGO [9]).



Rys. 7

Na rysunku 7 pokazano krzywe odpowiadające materiałowi idealnie sprężysto-plastycznemu (model Prandtla). W tym przypadku przeskok następuje z chwilą osiągnięcia granicy plastyczności, a więc tak samo jak w przypadku małych wstępnych strzałek przy materiale ze wzmocnieniem (podobnie będzie przy modelu sztywno-plastycznego materiału). Z powodu braku efektu Bauschingera krzywe dla pełnego uplastycznienia są symetryczne względem osi p .

Na rysunku 6 pokazano przebieg procesu odciążenia zewnętrznego dla $\eta_0 = -0.4$. Linia ciągłą zaznaczono odcinki styczne, a strzałką — kierunek procesu. Po drugim przeskoku i osiągnięciu η_{3M}^* zmniejszono siłę; przy $\bar{\eta}_0$ siła $p = 0$ i od tego momentu możemy rozpatrywać zadanie od nowa. Będziemy mianowicie mieli urząd o wstępnej strzałce $\bar{\eta}_0 = 0.41006$ i zmienionej granicy plastyczności wskutek efektu Bauschingera.

5. Zakończenie

W pracy zajmowaliśmy się bardzo prostym przypadkiem przeskoku układu kratowego Misesa. Analiza była znacznie ułatwiona dzięki wprowadzeniu materiału z wielokrotnym liniowym wzmocnieniem, przez co trudności matematyczne zostały sprowadzone do poziomu trudności obliczenia urządzenia idealnie sprężystego.

Analiza układu zbudowanego z materiału z jednokrotnym liniowym wzmocnieniem wskazuje na możliwość powstania nowych zjawisk, takich jak podwójny przeskok względnie przeskok z chwilą osiągnięcia granicy plastyczności; ten ostatni wniosek jest szczególnie cenny w odniesieniu do często stosowanych modeli materiału idealnie sprężysto-plastycznego względnie sztywno-plastycznego. Ponadto w miarę zmniejszania się wstępnej strzałki rozszerza się przedział odpowiadający pełnemu uplastycznieniu; przy dostatecznie małej

strzałce wstępnej wzmocnienie w ogóle nie wystąpi i właśnie w tym przypadku można z powodzeniem zastosować model materiału idealnie sprężysto-plastycznego; widać to na rys. 5 przy $\eta_0 = -0,1$.

Literatura cytowana w tekście

1. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Издат. Наука, Москва 1964.
2. К. А. МИХАЙЛИЧЕНКО, *О расчете на устойчивость шарнирно-стержневых систем*, Известия АН СССР, Отд. тех. наук, **12** (1958)
3. R. MISES, *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, ZAMM, **3** (1923), 406–462.
4. R. MISES, J. RATZERSDORFER, *Die Knicksicherheit von Fachwerken*, ZAMM, **3**, **5** (1925), 218–231.
5. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Male ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn. **4**, **11** (1963), 677–712.
6. И. Г. ПАНОВКО, И. И. ГУБАНОВА, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Москва 1964.
7. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
8. А. А. ПИКОВСКИЙ, *Статика стержневых систем со связными элементами*, Физматгиз Москва 1961.
9. M. ZAKRZEWSKI, *Granica plastyczności stali*, Przegląd Mechaniczny, **6** (1957), 227–232.

Резюме

АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ «СКАЧКА» В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ НА МОДЕЛИ РЕШЕТЧАТОЙ СИСТЕМЫ МИЗЕСА

Анализируется «скачок», т. е. переход из одного вида равновесия в другой, без изменения формы системы. Анализ проводился на упрощенной решетчатой системе Мизеса, состоящей из двух стержней, шарнирно соединенных и нагруженных, в середине узла, вертикальной сосредоточенной силой. Принята простая модель дает возможность учесть геометрические нелинейности а введение безразмерной стрелки прогиба в качестве независимой переменной, позволило вывести необходимые уравнения для произвольной характеристики материала.

Затем подробно рассматривается случай для материала с многократным линейным упрочнением, так для случая нагрузки как и для разгрузки, с одновременным учетом эффекта Баушингера.

Анализ материала с однократным линейным упрочнением и отчетливым интервалом полного перехода в пластическое состояние указывает на возможность появления скачка в момент достижения предела текучести. Теоретически вычисленный двойной скачок возникает при очень больших предварительных прогибах и на практике вряд ли появится. Численные расчеты позволили выполнить диаграмм, как для материала с однократным упрочнением так и для идеально упруго-пластического материала.

Summary

ANALYSIS OF THE "JUMP" PHENOMENON IN ELASTIC-PLASTIC DOMAIN BASED ON THE MISES TRUSS MODEL

The "jump" phenomenon consisting in passing from one configuration of equilibrium to another without change of the form of the system, has been considered in the present paper. The analysis is based on the simplified truss model of Mises consisting of two hinged rods loaded in the middle joint by a vertical concentrated force. The assumed simple model enables to account for the geometric non-linearities; taking as independent variable the dimensionless deflection of the system, the required equations are derived for arbitrary stress-strain relations.

The case of a material with multiple linear strain-hardening has been studied in detail, the process of loading and unloading and the Bauschinger effect being taken into consideration.

The analysis of materials with single linear strain-hardening and with a distinct plastic range indicates the possibility of arising of the jump phenomenon once the yield limit is reached. The theoretically evaluated double jump should take place in the case of large initial deflections, though this phenomenon does not expect to occur in practice.

Numerical calculations make it possible to draw the graphs for materials with single linear strain-hardening and for perfectly elastic-plastic bodies.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lipca 1965.

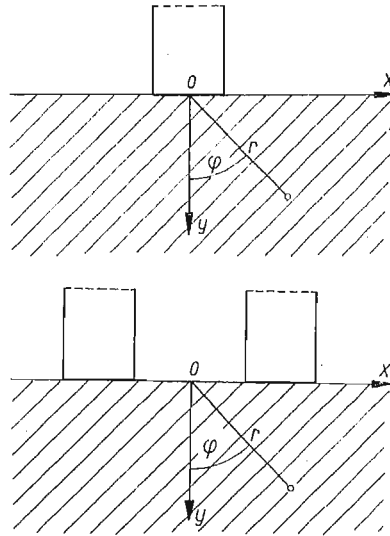
O PEWNYM ZAGADNIENIU KONTAKTOWYM
NIEJEDNORODNEJ PÓŁPŁASZCZYZNY SPRĘŻYSTEJ

BARBARA STACHOWICZ, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

Niejednorodny ośrodek sprężysty był przedmiotem rozważań wielu autorów. Między innymi klasyczny problem Flamanta o rozkładzie naprężeń w półpłaszczyźnie, wywołanych siłą skupioną, działającą na brzegu, dla ośrodka niejednorodnego rozwiązany został przez W. OLSZAKA i J. RYCHLEWSKIEGO [5] oraz S. G. LECHNICKIEGO [4]. Oni też postawili ogólnie problem poszukiwania postaci niejednorodności, określonej zmiennym modułem sprężystości dla danego z góry stanu naprężenia.

Zadanie to zostało następnie uogólnione na przypadek półprzestrzeni przez N. A. ROSTOWCEWA [6]. Niektóre typy niejednorodności dla półprzestrzeni rozważał K. HRUBAN [2], a pewne zagadnienie kontaktowe dla określonego typu niejednorodności omawiał B. G. KORNIENIEW [3].



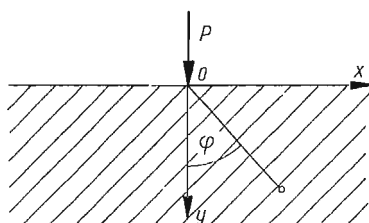
Rys. 1

W pracy niniejszej podamy rozwiązanie płaskiego zagadnienia kontaktowego dla jednego i dwu sztywnych stempli spoczywających bez tarcia na izotropowej, niejednorodnej półpłaszczyźnie sprężystej (rys. 1).

Niejednorodność ośrodka przyjmujemy w postaci dopuszczającej radialny rozkład naprężeń. Jak wiadomo [4] zachodzi to w wypadku, gdy moduł Younga jest typu $E(x, y) = E(r, \varphi) = E_r(r)E_\varphi(\varphi)$. Liczbę Poissona ν przyjmujemy stałą dla całego ośrodka. Wprowadzając zastępczą stałą Poissona μ potraktujemy wspólnie płaski stan naprężenia i odkształcenia. Korzystając z funkcji Greena dla przemieszczeń, sprowadzimy problem do równania całkowego Fredholma I rodzaju z jądrem słabo osobliwym.

2. Konstrukcja funkcji Greena

Jak już wspomnieliśmy wyżej, zagadnienie półpłaszczyzny sprężystej obciążonej siłą normalną na brzegu (rys. 2) dla założonego, radialnego rozkładu naprężeń, prowadzącego do określonego typu niejednorodności, rozwiązane zostało w pracach [4, 5 i 6]. W pracach



Rys. 2

tych nie przytoczono jednak ogólnych wzorów dla przemieszczeń, które dla zadania kontaktowego mają znaczenie podstawowe. Dlatego ograniczając się do zacytowania gotowych wzorów dla naprężeń przytoczymy ponadto związki dla przemieszczeń. Stosując powszechnie stosowane oznaczenia napiszemy składowe radialnego rozkładu naprężeń

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \tau_{r\varphi} = 0, \\ \sigma_z &= \begin{cases} 0 & \text{dla płaskiego stanu naprężenia,} \\ \nu\sigma_r & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,} \end{cases} \\ \sigma_r &= \frac{f(\varphi)}{r}, \end{aligned}$$

które po wykorzystaniu związków nierozdzielności prowadzą do następującego związku dla modułu:

$$(2.2) \quad E(r, \varphi) = E_r(r)E_\varphi(\varphi),$$

gdzie:

$$E_r(r) = \frac{1}{C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha+1-\frac{1}{\mu}}}, \quad \frac{f(\varphi)}{E_\varphi(\varphi)} = A \cos n\varphi,$$

$$n = \sqrt{(1-\alpha)(1+\mu\alpha)}, \quad A = \frac{P}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E_\varphi(\varphi) \cos n\varphi \cos \varphi d\varphi};$$

C_1, C_2, α oznaczają dowolne stałe, $E_\varphi(\varphi)$ dowolną parzystą funkcję φ ,

$$\mu = \begin{cases} \nu & \text{dla płaskiego stanu naprężenia,} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia.} \end{cases}$$

Korzystając ze znanych związków dla odkształceń

$$(2.3) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

i uwzględniając uogólnione prawo Hooke'a oraz (2.1) i (2.2) wyznaczmy przemieszczenia

$$(2.4) \quad u_r = A \cos n\varphi \int \frac{dr}{E_r r} + \Psi(\varphi),$$

$$(2.5) \quad v_\varphi = -\frac{\mu A \sin n\varphi}{E_r} - \frac{A \sin n\varphi}{n} \int \frac{dr}{E_r r} - \int \psi(\varphi) d\varphi + \Phi(r).$$

Tutaj u_r oznacza przemieszczenie w kierunku promieniowym, v_φ przemieszczenie w kierunku obwodowym. Funkcje $\psi(\varphi)$ i $\Phi(r)$ określimy z warunku zgodności odkształceń

$$(2.6) \quad \gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = 0$$

oraz z symetrii zadania. Jak widać, przemieszczenia nie zależą od postaci funkcji $E_\varphi(\varphi)$, a tylko od $E_r(r)$.

W dalszym ciągu ograniczymy się do modułu postaci

$$E = E_0 r^m \cos^m \varphi = E_0 y^m, \quad 0 < m < 1;$$

wtedy mamy:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} E_\varphi &= E_0 \cos^m \varphi, & E_r &= r^m, \\ C_1 &= 1, & C_2 &= 0, & \nu &= -m, & n &= \sqrt{(1+m)(1-m\mu)}, \\ A &= \frac{P}{E_0} \frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} \varphi \cos n\varphi d\varphi}. \end{aligned}$$

Dla przemieszczeń otrzymujemy więc z (2.4) i (2.5)

$$(2.8) \quad u_r = -\frac{A \cos n\varphi}{m r^m} + \psi(\varphi),$$

$$(2.9) \quad v_\varphi = \left(\frac{1}{m} - \mu \right) \frac{A \sin n\varphi}{n r^m} + \Phi(r) - \int \psi(\varphi) d\varphi.$$

Ze związku (2.6) po uwzględnieniu wartości z (2.7) wynika następujący związek dla funkcji ψ i Φ :

$$(2.10) \quad \psi'(\varphi) + \int \psi(\varphi) d\varphi + r\Phi'(r) - \Phi(r) = 0,$$

który przy dodatkowych warunkach

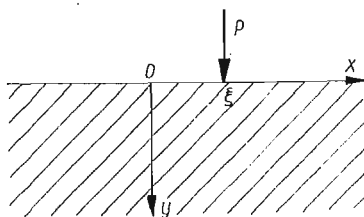
$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r(r, \varphi) = 0, \quad v_\varphi(r, 0) = 0$$

spełniają funkcje $\psi(\varphi) = \Phi(r) = 0$. Na tej podstawie otrzymujemy ostatecznie

$$(2.11) \quad u_r = -\frac{A \cos n\varphi}{mr^m},$$

$$(2.12) \quad v_\varphi = \frac{1-\mu m}{mn} \frac{A \sin n\varphi}{r^m}.$$

Z wyprowadzonych wzorów wynika, że dla ośrodka z niejednorodnością typu $E(x, y) = E_0 y^m$ przemieszczenia są regularne w nieskończoności w przeciwieństwie do ośrodka jednorodnego, dla którego, jak wiadomo, przemieszczenia mają dwa punkty osobliwe (0 i ∞).



Rys. 3

Nadając sile P położenie zmienne (rys. 3) otrzymamy ze związków (2.1), (2.11) i (2.12) funkcje Greena dla naprężeń i przemieszczeń. Wykorzystując znane wzory transformacyjne zapiszemy wielkości te w układzie kartezjańskim:

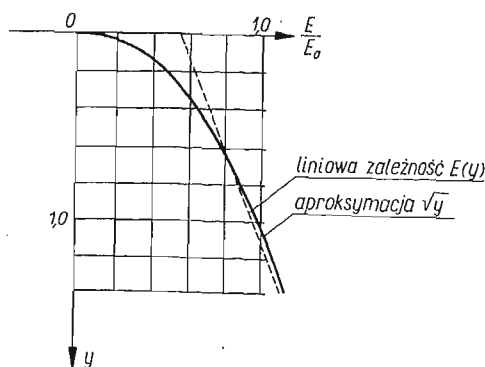
$$(2.13) \quad \begin{aligned} \sigma_x^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \frac{y^{m+2}}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+3}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ \sigma_y^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \frac{(x-\xi)^2 y^m}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+3}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ \tau_{xy}^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \frac{(x-\xi) y^{m+1}}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+3}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ \sigma_z^*(x, y, \xi, 0) &= E_0 A \nu \frac{y^m}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+1}{2}}} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right), \\ u^*(x, y, \xi, 0) &= \frac{A}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+1}{2}}} \left[\frac{1-\mu m}{mn} y \sin n \arcsin \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{m} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right) \right], \\ v^*(x, y, \xi, 0) &= \frac{A}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{\frac{m+1}{2}}} \left[\frac{1-\mu m}{mn} (x-\xi) \sin n \arcsin \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{m} T_n \left(\frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Tutaj naprężenia oznaczono zgodnie z powszechnie stosowanymi oznaczeniami: u i v są przemieszczeniami odpowiednio w kierunku osi x i y , $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ jest wielomianem Czebyszewa I rodzaju.

Podane wyżej rozwiązanie dla siły skupionej stanowi podstawę do rozwiązania problemu kontaktowego.

3. Nacisk jednego stempla na półpłaszczyznę

Przystępując do rozpatrzenia zagadnienia kontaktowego zwrócimy jeszcze raz uwagę na przyjętą postać modułu sprężystości. Jak widać, ośrodek o takim typie niejednorodności jest fizycznie nierealny ($E = 0$ na brzegu). Taka postać modułu ułatwia jednak matematyczną analizę zagadnienia, ponadto zaś można przyjąć ją jako aproksymację całego szeregu niejednorodności z różnym od zera modułem na brzegu (rys. 4).



Rys. 4

Zagadnienie kontaktowe polega na wyznaczeniu nieznanego rozkładu naprężeń pod stemplem, gdy dane jest jego przemieszczenie:

$$(3.1) \quad v = \Delta(x), \quad |x| < a.$$

Prowadzi to do związku

$$(3.2) \quad \int_{-a}^a p(\xi) v^*(x, 0, \xi, 0) d\xi = \Delta(x),$$

gdzie $p(\xi)$ jest poszukiwanym naprężeniem.

Po wykorzystaniu (2.13) lub (2.12) dla $\varphi = \pi/2$ otrzymamy

$$\frac{1-\mu m}{mn} A \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = \Delta(x)$$

lub krócej

$$(3.3) \quad \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = f(x),$$

gdzie

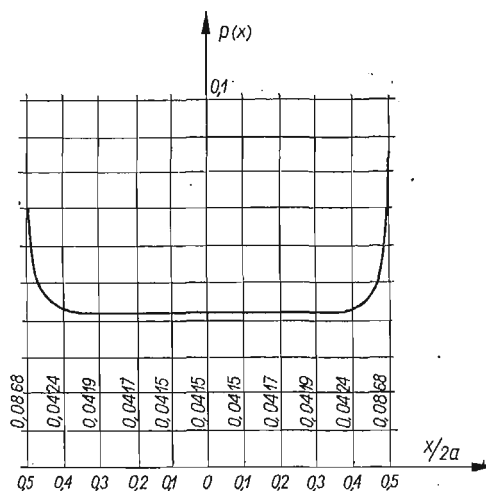
$$f(x) = \frac{nm\Delta x}{A \sin \frac{n\pi}{2} (1-\mu m)}.$$

Jest to równanie całkowe Fredholma I rodzaju z jądrem osobliwym. Całka w (3.3) ma sens jedynie dla $m < 1$, co jest wynikiem przyjętego typu niejednorodności. Równanie (3.3) było badane przez K. D. SAKALIUKA [7]. Stosując przedłużenie na dziedzinę zmiennej zespolonej, rozwiązując pomocniczo zagadnienie brzegowe Hilberta-Riemanna dla funkcji analitycznych oraz sprowadzając następnie zadanie do równania całkowego Abela otrzymuje się rozwiązanie w postaci

$$(3.4) \quad p(\xi) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{-a}^{\xi} \frac{F(x)}{(\xi-x)^{1-m}} dx,$$

gdzie

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} (a^2-x^2)^{\frac{1-m}{2}} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(a^2-t^2)^{\frac{1-m}{2}} (t-x)}.$$



Rzędne wykresu należy pomnożyć przez

$$\frac{nm}{A(1-\mu m)\sqrt{2a}} \sin \frac{n\pi}{2} \Delta$$

Rys. 5

Całka we wzorze (3.4) nie jest elementarna nawet dla prostych postaci funkcji $f(t)$ [a więc $\Delta(t)$]. Można ją obliczyć jedynie numerycznie. Dla $m = 1/2$ i $\Delta(x) = \Delta = \text{const}$ otrzymujemy rozwiązanie, którego wykres przedstawiono na rys. 5. (Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej UMC-1).

W dalszym ciągu rozpatrzmy kilka prostych przypadków zagadnienia odwrotnego, tzn. zakładając znany rozkład naprężeń pod stemplem wyznaczmy odpowiadające mu przemieszczenie, tzn. kształt stempla.

Przypuśćmy, że $p(\xi) = p_0 = \text{const}$. Otrzymujemy wtedy z (3.3)

$$\Delta(x) = \frac{A \sin \frac{n\pi}{2} (1-\mu m)}{nm} \int_{-a}^a \frac{p_0}{|x-\xi|^m} d\xi = \frac{A \sin \frac{n\pi}{2} (1-\mu m)}{nm} p_0 \left[\int_{-a}^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} + \int_x^a \frac{d\xi}{(\xi-x)^m} \right]$$

i po obliczeniu całek

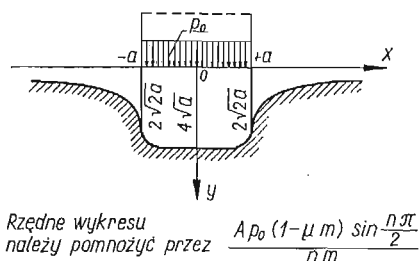
$$(3.5) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+a)^{1-m} + (a-x)^{1-m}], \quad |x| < a.$$

Dla $x > a$ znajdujemy

$$(3.6) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \int_{-a}^a \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} =$$

$$= \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x-a)^{1-m} - (x+a)^{1-m}].$$

Dla $m = 1/2$ wykres przemieszczeń przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6

Weźmy teraz pod uwagę $p(\xi) = p_1 \xi^2$. Wtedy

$$\Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \int_{-a}^a \frac{p_1 \xi^2}{|x-\xi|^m} d\xi = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \left[\int_{-a}^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x-\xi)^m} + \int_x^a \frac{\xi^2 d\xi}{(\xi-x)^m} \right]$$

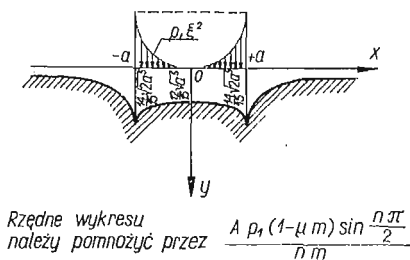
Po obliczeniu całek otrzymujemy

$$(3.7) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \left\{ \frac{a^2}{1-m} [(a+x)^{1-m} + (a-x)^{1-m}] - \right. \\ \left. - \frac{2a}{(1-m)(2-m)} [(a+x)^{2-m} + (a-x)^{2-m}] + \frac{2}{(1-m)(2-m)(3-m)} [(a+x)^{3-m} + \right. \\ \left. + (a-x)^{3-m}] \right\}, \quad |x| < a.$$

Dla $x > a$ mamy

$$(3.8) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \int_{-a}^a \frac{\xi^2}{(x-\xi)^m} d\xi = \\ = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_1 \left\{ \frac{a^2}{1-m} [(a+x)^{1-m} - (x-a)^{1-m}] - \right. \\ \left. - \frac{2a}{(1-m)(2-m)} [(x+a)^{2-m} + (x-a)^{2-m}] + \frac{2}{(1-m)(2-m)(3-m)} [(x+a)^{3-m} - (x-a)^{3-m}] \right\}.$$

Wykres dla $m = 1/2$ zamieszczono na rys. 7.



Rys. 7

Przypuśćmy następnie, że $p(\xi) = p_0 + p_1 \xi^2$. Dodając (3.5) i (3.7) otrzymamy

$$(3.9) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \left\{ \frac{p_0 + p_1 a^2}{1-m} [(a+x)^{1-m} + (a-x)^{1-m}] - \right. \\ \left. - \frac{2ap_1}{(1-m)(2-m)} [(a+x)^{2-m} + (a-x)^{2-m}] + \right. \\ \left. + \frac{2p_1}{(1-m)(2-m)(3-m)} [(a+x)^{3-m} + (a-x)^{3-m}] \right\}, \quad |x| < a.$$

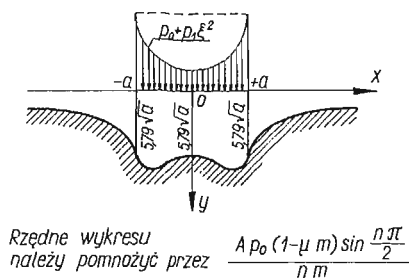
Na przykład dla $m = 1/2$ jest

$$\Delta(x) = \frac{2A \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{2}}{n} \left\{ 2(p_0 + p_1 a^2)(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) - \frac{8a}{3} p_1 (\sqrt{a+x})^3 + \right. \\ \left. + \sqrt{(a-x)^3} + \frac{16p_1}{15} (\sqrt{a+x})^5 + \sqrt{(a-x)^5} \right\}.$$

Można tak dobrać p_1 , by $\Delta(0) = \Delta(a)$. Otrzymujemy wtedy

$$(3.10) \quad p_1 = \frac{15(1-\sqrt{2})}{(3\sqrt{2}-7)} \frac{p_0}{a^2} \approx 2,22 \frac{p_0}{a^2}.$$

Przy tak dobranej kombinacji naprężeń otrzymujemy przemieszczenia, których wykres przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8

4. Nacisk dwóch stempli

Rozpatrzmy jeszcze zagadnienie dwóch stempli. Równanie całkowe problemu ma teraz postać

$$(4.1) \quad \int_a^b p(\xi) \left[\frac{1}{|x+\xi|^m} + \frac{1}{|x-\xi|^m} \right] d\xi = f(x),$$

gdzie funkcja $f(x)$ określona jest przez (3.3).

Równanie (4.1) można sprowadzić do równania Fredholma II rodzaju. Mamy mianowicie:

$$(4.2) \quad \int_a^b \frac{p(\xi)}{|x+\xi|^m} d\xi + \int_a^b \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = f(x).$$

Jądro pierwszej całki jest regularne. Oznaczmy

$$(4.3) \quad \int_a^b \frac{p(\xi)}{(x+\xi)^m} d\xi = w(x).$$

Równanie (4.2) możemy teraz napisać w postaci

$$(4.4) \quad \int_a^b \frac{p(\xi)}{|x-\xi|^m} d\xi = f(x) - w(x),$$

a traktując formalnie prawą stronę jako znaną możemy zastosować rozwiązanie Saka-liuka

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{f(x)-w(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{f(t)-w(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx = \\ &= \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{f(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{f(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx - \\ &\quad - \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{w(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{w(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx \\ R(x) &= [(b-x)(x-a)]^{\frac{1-m}{2}}. \end{aligned}$$

Oznaczmy dalej dla zwięzłości

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{\sin m\pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{f(x)}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{f(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx, \\ (4.5) \quad J_1(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{w(x)}{2(\xi-x)^{1-m}} dx, \end{aligned}$$

$$J_2(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{w(t)}{R(t)(t-x)} dt}{(\xi-x)^{1-m}} dx.$$

Zapiszemy wtedy krótko

$$(4.6) \quad p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} [J_1(\xi) - J_2(\xi)].$$

Funkcja $g(\xi)$ jest znana, wielkości zaś $J_1(\xi)$ i $J_2(\xi)$ zawierające nie znaną funkcję $p(x)$ przekształcimy dalej. Mamy mianowicie

$$J_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \int_a^b \frac{p(t)}{(x+t)^m} dt \frac{dx}{2(\xi-x)^{1-m}} = \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \left[\int_a^b \frac{p(t)}{2(x+t)^m(\xi-x)^{1-m}} dt \right] dx,$$

a po zmianie kolejności całkowania

$$J_1(\xi) = \int_a^\xi p(t) dt \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{dx}{2(x+t)^m(\xi-x)^{1-m}}.$$

Oznaczając dalej

$$(4.7) \quad \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{dx}{2(x+t)^m(\xi-x)^{1-m}} = K(\xi, t)$$

otrzymamy ostatecznie

$$(4.8) \quad J_1(\xi) = \int_a^\xi p(t) K(\xi, t) dt.$$

Analogiczne przekształcenia stosujemy do funkcji $J_2(\xi)$

$$\begin{aligned} J_2(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} R(x) \int_a^b \frac{p(s)}{(t+s)^m} ds \frac{dt}{R(t)(t-x)} \frac{dx}{(\xi-x)^{1-m}} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{R(x)}{(\xi-x)^{1-m}} \int_a^b dt \int_a^b \frac{p(s)}{(t+s)^m R(t)(t-x)} ds dx \end{aligned}$$

i dalej po zmianie kolejności całkowania

$$J_2(\xi) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \int_a^b p(s) ds \int_a^b \frac{dt}{(t+s)^m R(t)} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{R(x)}{(t-x)(\xi-x)^{1-m}} dx.$$

Oznaczając

$$(4.9) \quad \int_a^b \frac{dt}{(t+s)^m R(t)} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{R(x)}{(t-x)(\xi-x)^{1-m}} dx = L(\xi, s)$$

otrzymamy

$$(4.10) \quad J_2(\xi) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \int_a^b p(s) L(\xi, s) ds.$$

Podstawiając (4.8) i (4.10) do (4.6) znajdujemy

$$p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} \left[\int_a^b p(t)K(\xi, t) dt - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} \int_a^b p(t)L(\xi, t) dt \right]$$

i następnie

$$p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_a^b p(t) \left[K(\xi, t) - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} L(\xi, t) \right] dt,$$

a oznaczając

$$(4.11) \quad K(\xi, t) - \frac{\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2}}{2\pi} L(\xi, t) = M(\xi, t)$$

otrzymamy ostatecznie

$$(4.12) \quad p(\xi) = g(\xi) - \frac{\sin m\pi}{\pi} \int_a^b p(t)M(\xi, t) dt,$$

a więc równanie całkowe Fredholma II rodzaju. Z uwagi na złożoną postać jądra można je rozwiązać tylko numerycznie.

Podobnie jak w przypadku jednego stempla rozpatrzmy jeszcze prosty przykład wyznaczenia kształtu stempla dla danego rozkładu naprężeń. Przypuśćmy, że $p(\xi) = p_0 = \text{const}$. Wtedy z (4.1)

$$\Delta(x) = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \left[\int_a^b \frac{d\xi}{(x+\xi)^m} + \int_a^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} + \int_x^b \frac{d\xi}{(\xi-x)^m} \right],$$

a po obliczeniu całek

$$(4.13) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+b)^{1-m} - (x+a)^{1-m} + \\ + (b-x)^{1-m} + (x-a)^{1-m}], \quad x \in [a, b].$$

Dla $0 < x < a$

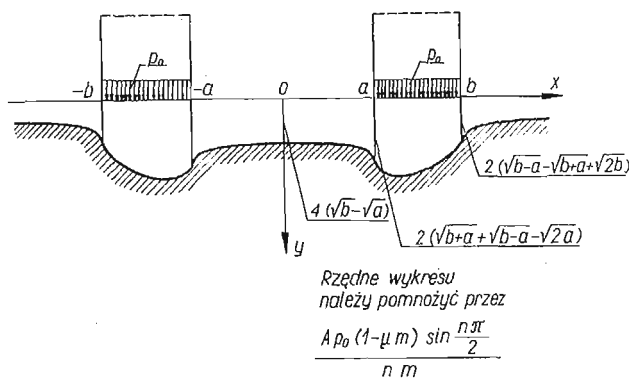
$$(4.14) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \left[\int_a^b \frac{d\xi}{(x+\xi)^m} + \int_a^b \frac{d\xi}{(\xi-x)^m} \right] = \\ = \frac{A(1-\mu m)\sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+b)^{1-m} + (x+a)^{1-m} + (b-x)^{1-m} - (a-x)^{1-m}].$$

Dla $x > b$

$$(4.15) \quad \Delta(x) = \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} p_0 \left[\int_a^b \frac{d\xi}{(x+\xi)^m} + \int_a^b \frac{d\xi}{(x-\xi)^m} \right] =$$

$$= \frac{A(1-\mu m) \sin \frac{n\pi}{2}}{nm} \frac{p_0}{1-m} [(x+b)^{1-m} - (x+a)^{1-m} - (x-b)^{1-m} + (x-a)^{1-m}].$$

Dla $m = 1/2$ wykres przemieszczeń ma postać jak na rys. 9.



Rys. 9

Literatura cytowana w tekście

1. Ф. Д. ГАХОВ, *Краевые задачи*, Ф. М. Москва 1963.
2. K. HRUBAN, *The Basic Problem of a Non-linear Non-homogeneity in Elasticity*, Proceedings of the IUTAM Symposium 1958, Pergamon Press.
3. В. Г. КОРЕНЕВ, *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в Бессельевых функциях*, Ф. М. Москва.
4. С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости*, Прикл. Мат. Мех., 2, 20 (1962), 146-151.
5. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, *Nichthomogenitäts-Probleme im elastischen und vorplastischen Bereich*, Öst. Ing. Archiv, 15 (1961), 130-152.
6. Н. А. РОСТОВЦЕВ, *К теории упругости неоднородной среды*, Прикл. Мат. Мех., 4, 23 (1964), 601-611.
7. К. Д. САКАЛЮК, *Обобщенное интегральное уравнение Абэля*, Докл. АН СССР, 4, 131 (1960), 748-751.
8. W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, Leipzig 1955.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ, УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Дается решение контактной задачи для одного или двух жестких штампов, покоящихся без трения на изотропной, неоднородной упругой полуплоскости. На основе радиального распределения напряжений для сосредоточенной силы, действующей на краю, построена функция Грина

для напряжений и перемещений для неоднородности типа $E(x, y) = E_0 y^m$. Вопрос о контакте штампа сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода со слабо-сингулярным ядром.

Предлагается решение этого уравнения. Кроме того обсуждается несколько примеров обратной задачи, т. е. для по заданному распределению напряжений под штампом определяются перемещения (форма штампа).

Для случая двух штампов показано, что вопрос нажима штампов можно свести к уравнению Фредгольма второго рода.

S u m m a r y

ON A CONTACT PROBLEM FOR NONHOMOGENEOUS ELASTIC HALF-PLANE

A solution to the contact problem for one and two rigid punches lying without friction on the isotropic nonhomogeneous elastic half-plane is presented. Starting from the radial stress distribution for concentrated force applied on the edge, the Green function for stresses and displacements is built in case of nonhomogeneity of the type $E(x, y) = E_0 y^m$. The contact problem for a punch is reduced to the Fredholm integral equation of the first kind with the kernel of weak singularity. The solution of this equation is given. Also, some examples of the inverse problem are investigated, i. e. the determination of the displacements or the shape of the punch when the stresses under the punch are assumed.

It is shown that the problem of the pressure of two punches can be reduced to the Fredholm integral equation of the second kind.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1965 r.

STABILNOŚĆ UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO O WYMUSZENIU KINEMATYCZNYM

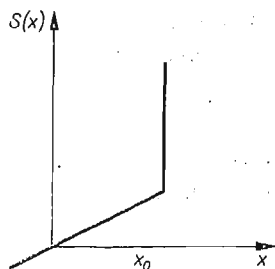
BOHDAN KOWALCZYK (GDAŃSK)

W ciągu ostatnich lat coraz częściej stosowane są mechanizmy, które możemy objąć wspólną nazwą mechanizmów wibro-uderzeniowych. Przykładami tego rodzaju mechanizmów są wibromłoty, używane do pogrążania w grunt pali i rur, zagęszczarki, ubijaki pewne typy młotów sprężynowych itp. W mechanizmach tych drgania wibracyjne znalazły zastosowanie ze względu na możliwość uzyskania dużych wartości sił, energii kinetycznej i przyspieszeń części roboczej.

Pierwszymi badaczami, którzy wnieśli istotny wkład do teorii maszyn wibracyjno-uderzeniowych, byli RUSAKOW i CHARKIEWICZ [5]. Przeprowadzili oni badanie drgań wymuszonych układu o jednym stopniu swobody, w którym to układzie drgania masy zostały ograniczone jednostronnie. Przy wyznaczaniu parametrów pracy układu autorzy zastosowali tzw. «metodę warunków brzegowych».

Praca niniejsza jest próbą analizy ruchu i stabilności strukturalnej mechanizmu wibracyjno-uderzeniowego, w którym siła wymuszająca drgania powstała nie na skutek ruchu wibratora (tak jak to zachodzi np. w wibromłotach lub zagęszczarkach), ale w wyniku wymuszenia kinematycznego, spowodowanego ruchem wodzika mechanizmu sinusoidalnego. Układ wibracyjny omawiany w niniejszej pracy jest układem nieliniowym ze względu na występowanie uderzeń w czasie każdego cyklu pracy.

W każdym układzie wibro-uderzeniowym o charakterystyce liniowej, charakterystyka sprężysta pozostaje liniową do wielkości x_0 , odpowiadającej współrzędnej uderzenia (rys. 1), następnie charakterystyka ta załamuje się, naruszona jest więc liniowość układu.



Rys. 1

W chwili uderzenia prędkość masy uderzającej zmienia się skokowo. Stosunek prędkości po i przed uderzeniem charakteryzować będziemy tzw. współczynnikiem restytucji.

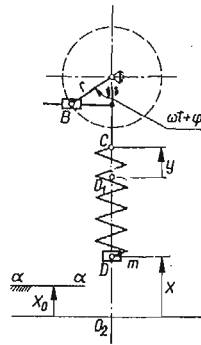
Przy określaniu współczynnika restytucji R posługujemy się hipotezą Newtona, zgodnie z którą stosunek prędkości ciał po uderzeniu v_2 i przed uderzeniem v_1 jest stały i nie zależy od prędkości zderzenia ani od wymiarów ciał, a tylko od stałych materiałowych zderzających się ciał, to jest

$$|v_2| : |v_1| = R.$$

W przypadku uderzenia doskonale sprężystego, to znaczy uderzenia, przy którym w miejscu zetknięcia się ciał zachodzą wyłącznie odkształcenia sprężyste, współczynnik restytucji $R = 1$. W przypadku uderzenia doskonale plastycznego, to znaczy uderzenia, przy którym w miejscu zetknięcia się ciał zachodzą wyłącznie odkształcenia plastyczne, $R = 0$.

Dla realnych ciał fizycznych mamy zawsze $0 \leq R < 1$. (Np. przy uderzeniu kulki stalowej o płytę stalową wartość współczynnika restytucji podawana jest w literaturze w granicach od 0,5 do 0,6).

Rozważmy obecnie układ podany na rys. 2, gdzie przyjęto następujące oznaczenia: r jest długością korby; ω prędkością kątową korby, φ oznacza kąt fazowy określający



Rys. 2

położenie korby w chwili uderzenia masy m o zderzak, O_1 punkt dolnego położenia zwrotnego; O_2 położenie punktu D , gdy masa m znajduje się w spoczynku.

Równanie ruchu punktu C jest następujące:

$$(1) \quad y = r[1 - \cos(\omega t + \varphi)].$$

W przedziale czasu między uderzeniami o przegrodę ruch środka masy ciała m (punktu D) przedstawia równanie różniczkowe w postaci:

$$(2) \quad \ddot{X} + k^2 X = k^2 r [1 - \cos(\omega t + \varphi)], \quad k^2 = \frac{c}{m},$$

gdzie c jest współczynnikiem sztywności sprężyny, k częstością drgań własnych masy.

W celu uproszczenia analizy ruchu układu wprowadzamy współrzędne bezwymiarowe:

$$(3) \quad X = rx, \quad \omega t = \tau, \quad \varrho = \frac{k}{\omega}, \quad V = r\omega v, \quad X_0 = rx_0.$$

Równanie różniczkowe (2) przyjmie po podstawieniach (3) postać następującą:

$$(4) \quad \ddot{x} + \varrho^2 x = \varrho^2 - \varrho^2 \cos(\tau + \varphi).$$

Całkując równanie (4) znajdziemy bezwymiarowe przemieszczenie i prędkość punktu D w przedziale między dwoma uderzeniami:

$$(5) \quad x = A \cos \varrho \tau + B \sin \varrho \tau + 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos(\tau + \varphi).$$

$$(6) \quad \dot{x} = -A\varrho \sin \varrho \tau + B\varrho \cos \varrho \tau + \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \sin(\tau + \varphi).$$

Stałe całkowania A i B wyznaczmy z warunku okresowości. Dobieramy mianowicie parametry układu wibro-uderzeniowego tak, aby ustalił się ruch okresowy o okresie równym wielokrotności okresu wymuszenia kinematycznego. Przy tego rodzaju postępowaniu wystarczy więc rozpatrzyć ruch układu w przedziale jednego okresu.

Warunki okresowości dla rozpatrywanego układu mają postać:

$$(7) \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0, & \dot{x}(0) &= Rv, \\ x(2\pi n) &= x_0, & \dot{x}(2\pi n) &= -v, \end{aligned}$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ stosunek okresu drgań masy m do okresu obrotu korby r .

Podstawiając warunki (7) do związków (5) i (6) otrzymujemy następujące równania:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_0 &= A + 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos \varphi, \\ Rv &= B\varrho + \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \sin \varphi, \\ x_0 &= A \cos 2\pi n \varrho + B \sin 2\pi n \varrho + 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos \varphi, \\ v &= A\varrho \sin 2\pi n \varrho - B\varrho \cos 2\pi n \varrho - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (8) otrzymujemy:

$$(9) \quad \begin{aligned} A &= \frac{v(1+R)}{2\varrho} \operatorname{ctg} \pi n \varrho, \\ B &= \frac{v(1+R)}{2\varrho}, \\ \sin \varphi &= \frac{v(1-R)}{2\gamma}, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\gamma} \left[x_0 - 1 - \frac{v(1+R)}{2} \frac{\operatorname{ctg} \sin \varrho}{\varrho} \right]. \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1}.$$

Wszystkie występujące w związkach (9) parametry układu wyrażone zostały jako funkcje bezwymiarowej prędkości przedstawionej wzorem:

$$(10) \quad v = \frac{2}{1-R} \frac{(x_0-1)f \pm \sqrt{\gamma^2(1+f^2) - (x_0-1)^2}}{1+f^2},$$

gdzie

$$(11) \quad f = \frac{1+R}{1-R} \frac{\operatorname{ctg} \pi n \varrho}{\varrho}.$$

Masa m nie zawsze uderza o przegrodę $a-a$. Styk jest możliwy tylko przy pewnych określonych wartościach x_0 i ϱ .

Jeżeli $x_0 = 0$, to aby możliwe były uderzenia masy m o przegrodę $a-a$ musi być spełniony warunek

$$|\gamma| > 1,$$

lub

$$\left| \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \right| > 1,$$

a więc

$$\varrho > \frac{1}{2}, \quad \varrho \neq 1.$$

Jeżeli $0 < x_0 < 1$, to znaczy, gdy przegroda przesunięta jest w stronę punktu O_1 , to warunek styku masy z przegrodą ma postać:

$$|\gamma| > 1 - x_0,$$

a więc

$$\varrho > \sqrt{\frac{1-x_0}{2-x_0}}, \quad \varrho \neq 1.$$

Jeżeli $x_0 < 0$, to znaczy, gdy przegroda odsunięta jest od punktu O_1 , to warunek styku masy z przegrodą ma postać:

$$|\gamma| > 1 + |x_0|,$$

a więc

$$\sqrt{\frac{1+|x_0|}{2+|x_0|}} < \varrho < \sqrt{\frac{1+|x_0|}{|x_0|}}, \quad \varrho \neq 1.$$

Oczywiście v , bezwymiarowa prędkość, musi być wielkością rzeczywistą. Warunek ten jest równoważny nierówności

$$\gamma^2(1+f^2) - (x_0-1)^2 \geq 0$$

lub

$$(12) \quad 1 - \frac{\varrho^2}{|\varrho^2 - 1|} \sqrt{1+f^2} \leq x_0 \leq 1 + \frac{\varrho^2}{|\varrho^2 - 1|} \sqrt{1+f^2}.$$

Dla zbadania stabilności rozpatrywanego układu wibracyjno-uderzeniowego posłużymy się pojęciem stabilności strukturalnej [1, 3] oraz zastosujemy metodę «dopasowania» [2, 4] kolejnych ruchów zaburzonych rozpatrywanego układu.

Jak widzimy z (9), współczynniki równań wyznaczających przemieszczenie i prędkość punktu D układu są funkcjami parametrów pracy układu ϱ , x_0 , R . Wartości tych współczynników przy rozpatrywaniu konkretnie pracującego układu nie są znane dokładnie i są zawsze obarczone pewnym błędem. Stabilność strukturalna charakteryzuje układ drgający w ten sposób, że charakter pracy układu nie ulega zmianie, gdy parametry układu doznają pewnych małych zmian. Jeżeli przy małych zaburzeniach wprowadzonych do parametrów układu drgania przestaną być okresowe, układ będzie strukturalnie niestabilny.

Rozważać będziemy ruch badanego układu podczas ν -tego okresu, to znaczy pomiędzy ν -tym, a $\nu+1$ -szym uderzeniem.

Równanie ruchu zaburzonego podczas ν -tego okresu ma postać:

$$(13) \quad x^{(\nu)} = (A + \alpha_\nu) \cos \varrho \tau + (B + \beta_\nu) \sin \varrho \tau + 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos(\tau + \varphi + \Delta_{\nu-1}),$$

gdzie efekt zaburzeń podczas $\nu-1$ okresów ruchu został uwzględniony przez wprowadzenie do stałych A , B i φ odpowiednio przyrostów α_ν , β_ν i $\Delta_{\nu-1} = \sum_{j=0}^{\nu-1} \delta_j$, zaś czas τ jest liczony od ν -tego uderzenia masy o przegrodę.

Podstawiając $\tau = 2\pi n + \delta_\nu$ znajdziemy $x_k^{(\nu)}$ —przemieszczenie masy w momencie przed $\nu+1$ -uderzeniem:

$$(14) \quad x_k^{(\nu)} = (A + \alpha_\nu) \cos(2\pi n \varrho + \varrho \delta_\nu) + (B + \beta_\nu) \sin(2\pi n \varrho + \varrho \delta_\nu) + 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos(\varphi + \Delta_\nu)$$

gdzie

$$\Delta_\nu = \delta_\nu + \Delta_{\nu-1}.$$

Wyrażenie

$$\Delta x_k^{(\nu)} = x_k^{(\nu)} - x_k,$$

przedstawia przemieszczenie w końcu ν okresu pod wpływem wprowadzonych zaburzeń

Analogicznie postępujemy w przypadku bezwymiarowej prędkości punktu D

$$(16) \quad \dot{x}^{(\nu)} = -\varrho(A + \alpha_\nu) \sin \varrho \tau + \varrho(B + \beta_\nu) \cos \varrho \tau + \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \sin(\tau + \varphi + \Delta_{\nu-1}),$$

$$(17) \quad \dot{x}_k^{(\nu)} = -\varrho(A + \alpha_\nu) \sin(2\pi n \varrho + \varrho \delta_\nu) + \varrho(B + \beta_\nu) \cos(2\pi n \varrho + \varrho \delta_\nu) + \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \sin(\varphi + \Delta_\nu),$$

$$(18) \quad \Delta \dot{x}_k^{(\nu)} = \dot{x}_k^{(\nu)} - \dot{x}_k.$$

Po zatrzymaniu wyrazów rzędu pierwszego otrzymujemy

$$(19) \quad \Delta x_k^{(\nu)} = (\cos 2\pi n \varrho) \alpha_\nu + (\sin 2\pi n \varrho) \beta_\nu - \nu \Delta_\nu + \frac{\nu(1+R)}{2} \Delta_{\nu-1},$$

oraz

$$(20) \quad \Delta \dot{x}_k^{(v)} = (-\varrho \sin 2\pi n \varrho) \alpha_v + (\varrho \cos 2\pi n \varrho) \beta_v + \\ + \left[\frac{v(1+R)}{2} \frac{1-\varrho^2}{\varrho} \operatorname{ctg} \pi n \varrho + 1 - x_0 \right] \Delta_v + \left[\frac{v(1+R)}{2} \varrho \operatorname{ctg} \pi n \varrho \right] \Delta_{v-1}.$$

Przemieszczenie i prędkość w ruchu zaburzonym podczas $v+1$ -ego okresu przedstawiają równania:

$$(21) \quad x^{(v+1)} = (A + \alpha_{v+1}) \cos \varrho \tau + (B + \beta_{v+1}) \sin \varrho \tau + 1 - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos(\tau + \varphi + \Delta_v),$$

$$(22) \quad \dot{x}^{(v+1)} = -\varrho(A + \alpha_{v+1}) \sin \varrho \tau + \varrho(B + \beta_{v+1}) \cos \varrho \tau + \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \sin(\tau + \varphi + \Delta_v).$$

Podczas $v+1$ przedziału ruchu bezwymiarowy czas możemy liczyć od $v+1$ uderzenia masy o przegrodę.

Podstawiając do (21) i (22) $\tau = 0$ znajdziemy $x_p^{(v+1)}$ i $\dot{x}_p^{(v+1)}$ — przemieszczenie i prędkość ruchu zaburzonego w momencie po $v+1$ uderzeniu, a stąd wyznaczamy przyrosty przemieszczeń i prędkości na początku $v+1$ okresu:

$$(23) \quad \Delta x_p^{(v+1)} = \alpha_{v+1} - \frac{v(1-R)}{2} \Delta_v, \\ \Delta \dot{x}_p^{(v+1)} = \varrho \beta_{v+1} + \left(\frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cos \varphi \right) \Delta_v.$$

Warunki «dopasowania» dwóch sąsiednich ruchów mają postać:

$$(24) \quad \Delta x_k^{(v)} = \Delta x_p^{(v+1)} = 0, \quad \Delta \dot{x}_k^{(v)} = -R \Delta \dot{x}_p^{(v+1)}.$$

Podstawiając do (24) związki (19), (20) i (23) otrzymamy:

$$(25) \quad (\cos 2\pi n \varrho) \alpha_v + (\sin 2\pi n \varrho) \beta_v + \frac{v(1+R)}{2} \Delta_{v-1} - v \Delta_v = 0, \\ \alpha_{v+1} - \frac{v(1-R)}{2} \Delta_v = 0, \\ (-R \varrho \sin 2\pi n \varrho) \alpha_v + (R \varrho \cos 2\pi n \varrho) \beta_v + \varrho \beta_{v+1} + \\ + \left[\frac{v(1+R)}{2} \frac{\operatorname{ctg} \pi n \varrho}{\varrho} + 1 - x_0 + R \left(\frac{v(1+R)}{2} \frac{1-\varrho^2}{\varrho} \operatorname{ctg} \pi n \varrho + 1 - x_0 \right) \right] \Delta_v + \\ + R \left[\frac{v(1+R)}{2} \varrho \operatorname{ctg} \pi n \varrho \right] \Delta_{v-1} = 0.$$

Układ (25) jest układem jednorodnych równań różnicowych liniowych. Rozwiązanie tego układu szukać będziemy w postaci:

$$(26) \quad \alpha_v = a \varepsilon^v, \quad \beta_v = b \varepsilon^v, \quad \Delta_v = c \varepsilon^v,$$

gdzie a , b , c , ε są pewnymi stałymi.

Po podstawieniu (26) układ (25) przyjmie postać:

$$(27) \quad \begin{aligned} & (\cos 2\pi n\varrho) a\varepsilon + (\sin 2\pi n\varrho) b\varepsilon + \left[\frac{v(1+R)}{2} - v\varepsilon \right] c = 0, \\ & a\varepsilon - \frac{v(1-R)}{2} c = 0, \\ & (-R\varrho \sin 2\pi n\varrho) a\varepsilon + [(R\varrho \cos 2\pi n\varrho)\varepsilon + \varrho\varepsilon^2] b + \\ & + \left\{ \frac{v(1+R)R}{2} \varrho \operatorname{ctg} \pi n\varrho + \left[\frac{v(1+R)}{2} \frac{\operatorname{ctg} \pi n\varrho}{\varrho} + 1 - x_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + R \left(\frac{v(1+R)}{2} \frac{1-\varrho^2}{\varrho} \operatorname{ctg} \pi n\varrho + 1 - x_0 \right) \right] \varepsilon \right\} c = 0. \end{aligned}$$

Układ (27) jest jednorodnym układem równań liniowych o niewiadomych a , b i c .

Jak wiadomo, warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia niezerowych rozwiązań tego układu jest, aby jego wyznacznik główny był równy zeru, a więc:

$$(28) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{v(1-R)}{2} \\ \cos 2\pi n\varrho & \sin 2\pi n\varrho & \frac{v(1+R)}{2} - v\varepsilon \\ -R\varrho \sin 2\pi n\varrho & R\varrho \cos 2\pi n\varrho + \varrho\varepsilon & \frac{v(1+R)}{2} R\varrho \operatorname{ctg} \pi n\varrho + E\varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie

$$E = (1+R) \left[\frac{v(1+R)}{2} \frac{\operatorname{ctg} \pi n\varrho}{\varrho} + 1 - x_0 \right] - \frac{v(1+R)}{2} R\varrho \operatorname{ctg} \pi n\varrho.$$

Z (28) otrzymujemy

$$(29) \quad \varrho v \varepsilon^2 + \left\{ (1+R)(1-x_0) \sin 2\pi n\varrho + \frac{v}{2\varrho} [(1+R)^2 - \varrho^2(1-R)^2] (1 + \cos 2\pi n\varrho) - 2R\varrho v \right\} \varepsilon + \varrho v R^2 = 0.$$

Aby rozpatrywany układ był stabilny, moduły pierwiastków równania (29) muszą być mniejsze od jedności, gdyż wtedy przy $v \rightarrow \infty$ mamy: $a_v \rightarrow 0$, $\beta_v \rightarrow 0$, $\Delta_v \rightarrow 0$.

W przypadku gdy $|\varepsilon| > 1$, to zgodnie z (26), przy dowolnych stałych a , b i c , moduły wielkości a_v , β_v i Δ_v nieograniczenie rosną, a wtedy ruch zaburzony coraz bardziej różni się od niezaburzonego, co oznacza, że ruch jest niestabilny.

Jak wiadomo, warunkiem koniecznym i dostatecznym aby pierwiastki równania

$$d_2 \varepsilon^2 + d_1 \varepsilon + d_0 = 0,$$

spełniały warunek $|\varepsilon_{1,2}| < 1$ jest

$$(30) \quad \left| \frac{d_0}{d_2} \right| < 1, \quad \left| \frac{d_1}{d_0 + d_2} \right| < 1.$$

W przypadku równania (29) mamy

$$d_0 = \varrho v R^2,$$

$$d_1 = (1+R)(1-x_0) \sin 2\pi n \varrho + \frac{v}{2\varrho} [(1+R)^2 - \varrho^2(1-R)^2](1 + \cos 2\pi n \varrho) - 2R\varrho v,$$

$$d_2 = \varrho v.$$

Pierwsza z nierówności (30) jest zawsze spełniona, gdyż

$$\frac{d_0}{d_2} = R^2,$$

a w rzeczywistych układach wibracyjno-uderzeniowych $0 \leq R < 1$.

Z drugiej nierówności (30) w przypadku

$$\frac{d_1}{d_0 + d_2} < 0$$

otrzymujemy

$$(1+R)(1-x_0) \sin 2\pi n \varrho + \frac{v}{2\varrho} [(1+R)^2 - \varrho^2(1-R)^2](1 + \cos 2\pi n \varrho) - 2R\varrho v > -\varrho v(1+R^2),$$

a stąd po łatwych przekształceniach

$$-2(x_0-1)f + v(1-R)(1+f^2) > 0,$$

ale z (10)

$$v(1-R)(1+f^2) = 2(x_0-1)f \pm \sqrt{\gamma^2(1+f^2) - (x_0-1)^2}.$$

Stąd widzimy, że ruch będzie stabilny jedynie w przypadku, gdy w związku (10) przed pierwiastkiem przyjmiemy znak plus.

Jeżeli

$$\frac{d_1}{d_0 + d_2} > 0,$$

to

$$(1+R)(1-x_0) \sin 2\pi n \varrho + \frac{v}{2\varrho} [(1+R)^2 - \varrho^2(1-R)^2](1 + \cos 2\pi n \varrho) - 2R\varrho v < \varrho v(1+R^2)$$

lub po przekształceniach:

$$(33) \quad 1 - \frac{\varrho^2}{|\varrho^2-1|} \frac{|(1-R^2)f^2 + C|}{\sqrt{(1-R^2)^4 f^2 + C^2}} < x_0 < 1 + \frac{\varrho^2}{|\varrho^2-1|} \frac{|(1-R^2)f^2 + C|}{\sqrt{(1-R^2)^4 f^2 + C^2}}.$$

gdzie

$$(34) \quad C = (1-R^2)^2 - 2(1+R^2)[(1+R)^2 + (1-R)^2 f^2 \varrho^2].$$

Jak już wspomniano bezwymiarowa prędkość przedstawiona związkiem

$$v = \frac{2}{1-R} \frac{(x_0-1)f + \sqrt{\gamma^2(1+f^2) - (x_0-1)^2}}{1+f^2}$$

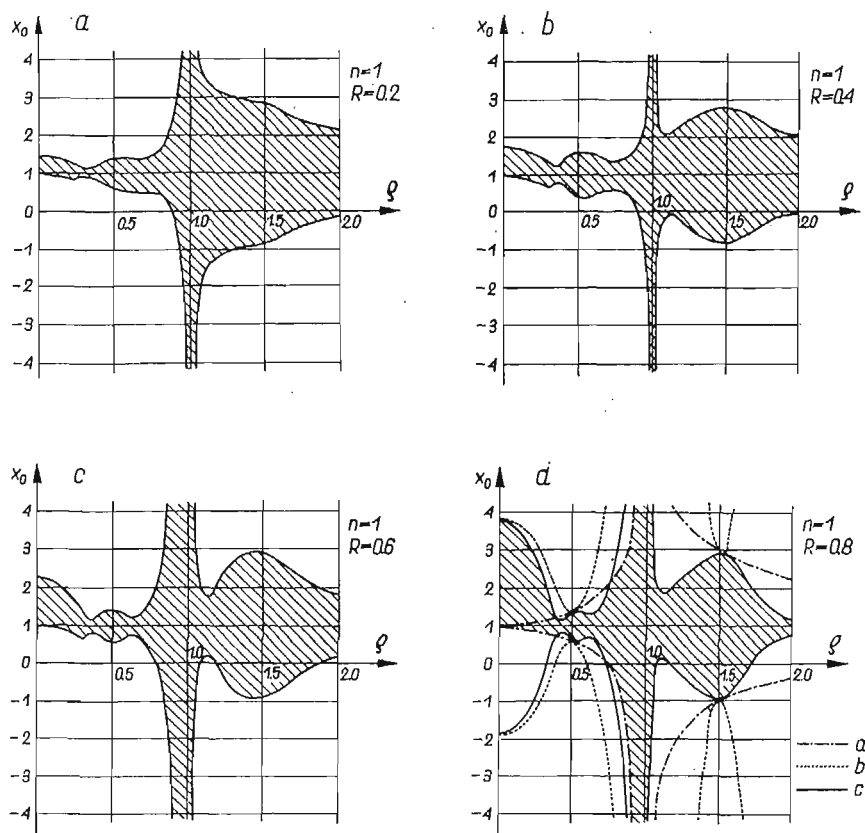
musi być zawsze dodatnia.

Oczywiście gdy $(x_0-1)f > 0$, warunek ten jest spełniony zawsze; gdy $(x_0-1)f < 0$, prędkość v jest dodatnia dla

$$(35) \quad 1 - \frac{\varrho^2}{|\varrho^2 - 1|} < x_0 < 1 + \frac{\varrho^2}{|\varrho^2 - 1|}.$$

Warunek $(x_0-1)f > 0$ gdy $n=1$ zachodzi przy $x_0 > 1$ dla $0 < \varrho < \frac{1}{2}$; $1 < \varrho < \frac{3}{2}$; ... zaś przy $x_0 < 1$ dla $\frac{1}{2} < \varrho < 1$; $\frac{3}{2} < \varrho < 2$; ... , gdy $n=2$, to $(x_0-1)f > 0$ dla $0 < \varrho < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{2} < \varrho < \frac{3}{4}$; ..., zaś przy $x_0 < 1$ dla $\frac{1}{4} < \varrho < \frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} < \varrho < 1$; ...

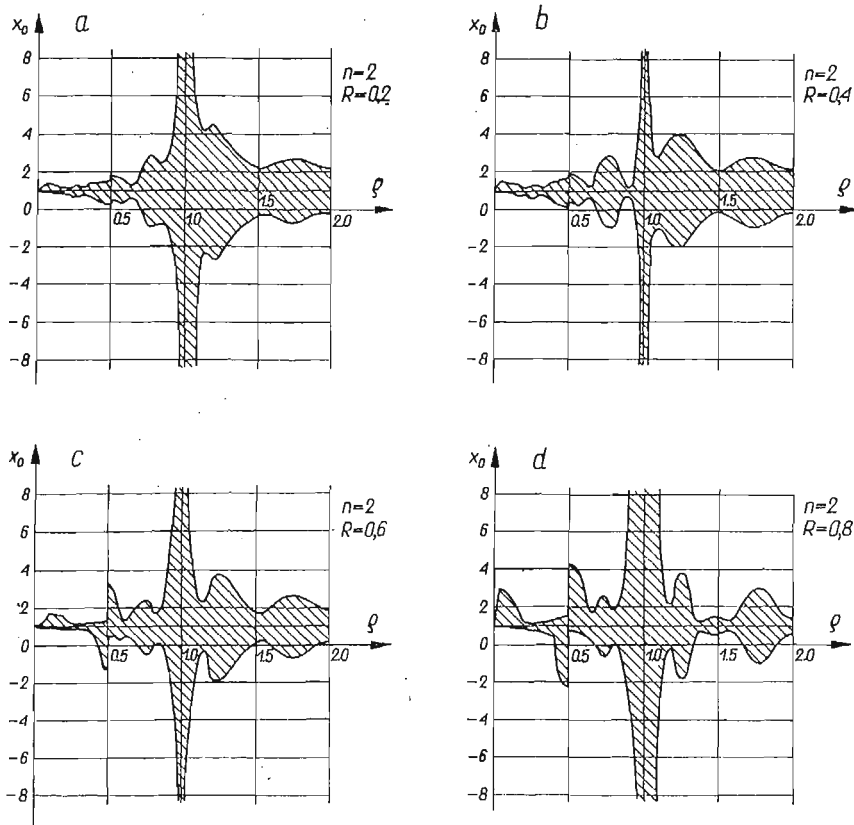
Na rys. 3a-d podano obszary stabilności strukturalnej przy $n=1$, na rys. 4 zaś podano obszary stabilności strukturalnej przy $n=2$ dla różnych współczynników restytucji R .



Rys. 3

Krzywa a ogranicza obszar, w którym jest spełniona nierówność (35), krzywa b ogranicza obszar, w którym jest spełniona nierówność (12), krzywa c ogranicza obszar, w którym spełniona jest nierówność (33).

Brzeży wszystkich obszarów, w których spełnione są te nierówności, są symetryczne względem prostej o równaniu $x_0 = 1$.



Rys. 4

Zależnie od znaku wyrażenia $(x_0 - 1)f$ obszar ruchu stabilnego strukturalnie dla danego układu jest wspólną częścią obszaru zawartego pomiędzy prostą o równaniu $x_0 = 1$ i krzywymi a i c , względnie b i c .

Literatura cytowana w tekście

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Москва 1959.
2. Р. Э. Брунштейн, А. Э. Кобрынски, *Об устойчивости периодических движений виброударных систем*, Изд. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 5, 1960.
3. W. J. CUNNINGHAM, *Analiza układów nieliniowych*, WNT, 1962.
4. А. Э. Кобрынски, *Механизмы с упругими связями*, Москва 1964.
5. И. Г. Русаков, А. А. Харкевич, *Вынужденные колебания систем ударяющих об ограничитель*, Журнал Техн. Физ., 12 (1942).

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В работе даны постановка и решение дифференциального уравнения массы ударяющей о не подвижную преграду. Вынужденные колебания массы получаются путем кинематического возмущения при помощи синус-механизма.

В работе рассматриваются условия обеспечивающие возможность ударов о преграду.

Путем исследования структурной устойчивости (в смысле Андронова) находятся области параметров системы, для которых ее движение является периодическим.

Summary

STABILITY OF A VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH KINEMATICAL EXCITATION

The paper concerns the vibratory-impact system consisting of a vibrating mass which strikes the motionless baffle during the vibration period.

The forced vibration of the mass is obtained by means of sine-mechanism connected kinematically with the mass.

The differential equation of motion of the considered system is derived and solved and then a certain conditions assuring the impact are formulated.

Using Andronov's definition of structural stability the range of the parameters of the system is obtained within which the motion is periodical.

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1965 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

II SYMPOZJUM FILTRACJI

W dniach 19 i 20 listopada 1965 r. odbyło się w Gdańsku staraniem Gdańskiego Oddziału PTMTS drugie sympozjum poświęcone filtracji. W obradach wzięło udział 120 osób, w tej liczbie 5 gości zagranicznych. Obrady zagał Przewodniczący Oddziału prof. inż. R. KAZIMIERCZAK. Przewodnictwo obrad przedpołudniowych objął członek PAN prof. dr R. CEBERTOWICZ. Wygłoszone zostały następujące referaty:

1. Prof. dr J. LITWINISZYN, «Zjawisko kolmatacji i jego pewne szczególne przypadki».
2. Dr inż. A. TRZASKA, «Wyniki pewnych doświadczeń nad zjawiskiem kolmatacji».
3. Dr R. SKAWIŃSKI, «Badania nad zmianami współczynnika filtracji w piaskach».
4. Dr inż. K. PODGÓRSKI, «Przepływ przez ścianki rury grubościennej».
5. Dr inż. J. MAKOWSKI, «Radiometryczna metoda kontroli filtracji w zaporach wodnych i ich otoczeniu».

W dyskusji nad wygłoszonymi referatami zabrało głos 7 osób.

Przewodnictwo obrad popołudniowych objął członek PAN — prof. dr J. LITWINISZYN. Referaty wygłosili:

1. Prof. dr M. BORELLI (Jugosławia), «Wybrane zagadnienia filtracji w ośrodku nienasyconym, prowadzone przez Instytut J. Cernego w Belgradzie».
2. Dr MISZUR (CSSR) «Ogólne kierunki badań filtracji prowadzone przez Instytut w Bratysławie».
3. Mgr inż. M. MIODUSZEWSKI, «Wyznaczanie siatki hydrodynamicznej w rdzeniu zapory ziemnej przy zastosowaniu papieru elektroprzewodzącego».
4. Dr T. MACIOSZCZYK, «Niekóre problemy dopływu do studzien w warunkach filtracji laminarnej, mieszanej i turbulენტnej».
5. Dr inż. B. BOCZAR-KARAKIEWICZ, «Wybrane zagadnienia falowania rozprzestrzeniającego się w niejednorodnym ośrodku».
6. Dr inż. E. MIELCARZEWICZ, «Przyczynę stosowalności prawa Darcy przy filtracji przez złoża żwirowe».

W dyskusji nad wygłoszonymi referatami zabrały głos 3 osoby.

Obradom w dniu 20 listopada 1965 r. przewodniczył prodziekan Wydziału Budownictwa Wodnego Politechniki Gdańskiej doc. inż. W. WĘDZIŃSKI. Wygłoszono następujące referaty:

1. Mgr inż. B. IWANOWSKA, «Badania filtracji przez zaporę ziemną».
2. Dr inż. B. JACENKOW, «Zastosowanie hydrointegratora szczelinowego do badań filtracji nieustalanej».
3. Dr inż. B. JACENKOW, «Badania modelowe dopływu wód gruntowych do kopalni odkrywkowej».
4. Dr inż. B. JACENKOW, «Obliczanie filtracji nieustalanej metodą układów zastępczych».
5. Dr inż. B. JACENKOW, «Zastosowanie analogii membranowej do badania filtracji».

W dyskusji głos zabrało 6 osób.

Obradom popołudniowym w dniu 20 listopada przewodniczył dziekan Wydziału Budownictwa Wodnego Politechniki Gdańskiej prof. dr inż. J. KARWOWSKI. Referaty wygłosili:

1. Dr inż. J. CHRUSCIELOWA, «Kolmatacja chemiczna w badaniach nad metodyką uszczelniania zbiorników wodnych i gruntów».

2. Dr inż. J. CHRUSCIELOWA, «Jednoroztworowe krzemianowanie gruntów dla potrzeb głębokiego uszczelniania».

3. Inż. BABACZ (Jugosławia), «Studnie Ranneya zastosowane w Belgradzie».

4. Mgr inż. B. DEMBSKI, «Analiza dopływu do bariery podwieszonych studni depresyjnych w artezyjskiej warstwie wodonośnej».

5. Mgr inż. B. DEMBSKI, «Badania modelowe wielkości uszoku hydraulicznego na konturze studni zupełnej».

6. Dr inż. T. PIWECKI, «Numeryczne rozwiązywanie zagadnień filtracji ustalonej».

W dyskusji zabralo głos 7 osób.

Łącznie w dniach 19 i 20 listopada wygłoszono 22 referaty, zanotowano 23 wypowiedzi w dyskusji nad referatami.

ZEBRANIA NAUKOWE W ODDZIAŁACH PTMTS

W roku 1965 odbyły się w Oddziałach Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej następujące zebrania naukowe

Data	Prelegent	Tytuł referatu	Liczba	
			uczest-	dysku-
ników tantów				
Oddział w Gdańsku				
12.III	J. WACHOWIAK	Porównanie metod rozwiązywania opartych na transformacji i równaniach całkowych w teorii płyt	10	6
17.III	E. BIELEWICZ	W sprawie podstaw teorii powłok	10	5
Oddział w Gliwicach				
25.II	M. PUCHALIK	Rozwój poglądów na natury sił międzycząsteczkowych	25	3
25.III	T. KOCHMAŃSKI	Teoria wektora deformacyjnego	35	9
6.V	T. KOCHMAŃSKI referował L. Müller	Teoria wektora deformacyjnego a teoria względności	20	15
20.V	J. SZARGUT	Wpływ podgrzania powietrza na wskaźniki energetyczne procesu wielkopieczowego	24	8
23.VI	J. ZIELIŃSKI	O zastosowaniu metody Schwesingera przy wyznaczaniu charakterystyki tłumienia łącznika gumowego	24	8
23.VI	Cz. WOŹNIAK	Naprężenia momentowe w ośrodkach ciągłych	24	8
28.X	O. POPOWICZ	Zastosowanie analogii elektrycznych do szczególnego przypadku obliczeń wytrzymałości powłok	38	6
24.XI	J. SZPILECKI	Mechanika raket fotonowych	12	6
Oddział w Krakowie				
24.II	J. GIERGIEL	Wpływ tłumienia na ruch oscylacyjny	15	8
7.IV	Z. ENGEL	Problematyka dynamiki maszyn w świetle referatów zgłoszonych na konferencję wrześnieową organizowaną przez PAN i PTMTS	16	6
26.IV	S. ZIEMBA, W. BOGUSZ Z. ENGEL	Technika wibracyjna, jej rola i perspektywy	52	16
14.VI	A. CZUBAK	Analiza ruchu warstwy sypkiego nosiwa na rynnice przenośnika wibracyjnego	30	9

Data	Prelegent	Tyt ul referatu	Liczba	
			uczesz-dysku- ników tantów	
24.XI	Zebranie poświęcone informacjom z konferencji naukowych:			
	R. CIESIELSKI	Aktualne problemy naukowo-badawcze w budownictwie (Krynica)		
	G. SZEFER	Zastosowanie metod numerycznych w technice (Weimar)		
	Z. ENGEL	Dynamika maszyn (Kraków)		
	W. BOGUSZ	Mechanika (Bukareszt)		
	M. ZABAWA	Symposium drgań nieliniowych (Poznań)		
	M. ŻYCZKOWSKI	Konferencja Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych (Augustów)		
	Oddział w Łodzi			
26.I	Cz. WOŹNIAK	Podstawy teorii ośrodków włóknistych	15	7
11.III	K. WILMAŃSKI	Pewne zagadnienia płaskich ośrodków włóknistych	22	6
24.IV	T. ŚRÓDKA	Przekształcenie Mellina w zagadnieniach probabilistycznych	13	5
6.V	L. BRZESKI	Wykorzystanie maxwellowskiej funkcji rozkładu do wyznaczania tensora naprężeń w ośrodku gazowym	22	8
20.V	S. KONIECZNY	Zastosowanie teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych	9	5
28.V	M. KORYCIŃSKI	Wpływ konstrukcji elementów i czynników technicznych na drgania szlifierek	8	8
10.VI	M. ŁUKOWIAK	Drgania ustalone przestrzennych tras prętowych	17	8
11.XI	H. ZORSKI (Warszawa)	O ruchu defektów	17	10
	Oddział w Poznaniu			
7.I	WIECZOROWSKI	Zużycie noży Fellowsa	14	3
12.IV	Z. OLESIAK	Dualne i potrójne równania całkowite w teorii sprężystości	18	4
13.V	P. P. TEODORESCU (Bukareszt)	Badania z dziedziny teorii sprężystości w Rumunii	10	3
22.V	A. PETRU (Bukareszt)	Zagadnienia związane z wytrzymałością materiałów	12	3
11.XI	J. STEFANIAK	Wybrane zagadnienia z termosprężystości	10	3
18.XI	J. STEFANIAK	jw.	15	3
15.XII	A. LITWKA	Elastoptyczna metoda analizy naprężeń	13	6
	Oddział w Szczecinie			
21.I	K. HAPEK	Łożyska hydrostatyczne	14	4
26.II	K. GRUDZIŃSKI	Wyznaczanie stanu naprężenia w tarczy kołowej obciążonej dowolną skończoną ilością wewnętrznych sił skupionych	12	4
30.III	A. MIELNIK	Wpływ zbrojenia podłużnego na nośność skręcanych belek	8	3
30.IV	J. MIERZEJEWSKI	Analiza dynamiczna stałości połączenia ciernego przy nieustalonym ruchu układu	14	4
20.V	A. LEWICKI	Tory niżów barycznych na Bałtyku	9	1

Data	Prelegent	Tytuł referatu	Liczba	
			uczest- ników	dysku- tantów
22.X	M. KOSECKI i H. PRIEBE	Doświadczenia nad zastosowaniem łupin dwukrzywiznowych do konstrukcji fundamentowych	20	4
17.XI	J. SULECKI	O przestrzennej pracy układów konstrukcyjnych słupowotarczowych ze sztywnymi przeponami	25	6
1.XII	L. MARTINI	Stateczność dynamiczna przewodów i lin w strumieniu powietrza	14	4
17.XII	A. MIELNIK	Badania naprężeń, mikrorys i innych parametrów belek żelbetowych za pomocą czynnika akustycznego	10	4
Oddział w Warszawie				
1.II	Z. OSIŃSKI	Wpływ tarcia wewnętrznego metali na wytrzymałość elementów konstrukcyjnych w warunkach dynamicznych	34	8
12.III	J. MIKLOWITZ	Dyfrakcja impulsu sprężystego na pustce walcowej		
12.IV	W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA	Analiza postaci własnych belki z nieliniowym warunkiem brzegowym	8	3
31.V	A. KOLAR	Nośność graniczna belki ciągłej w przypadku ruchomego obciążenia	13	4
2.VI	W. PRAGER (zebranie wspólne z IPPT)	The Method of Optimal Plastic Design		
14.VI	G. JOSSELING JONG z Delft w Holandii (zebranie wspólne z IPPT)	O kinematyce ośrodków sypkich		
27.X	P. SEIBERT (USA) prelekcję wygłosił J. Skowroński	Pewne aspekty drugiej metody Liapunowa z zakresu mechaniki nieliniowej	10	2
8.XI	M. ŻYSZKO	Pewne zagadnienia dynamiki belki mostowej	7	10
6.XII	A. MORECKI	Statyka i dynamika współdziałania mięśni w organizmie żywym	16	7
Oddział we Wrocławiu				
10.I	E. GAWRYCH ŻUKOWSKI	Sztywność siatki prętów jako podstawa do analizy sztywności kratownicy	15	6
22.II	A. BORCZ	Zastosowanie rachunku dystrybucyjnego w mechanice budowli, cz. I.	18	5
29.III	A. BORCZ	Zastosowanie rachunku dystrybucyjnego w mechanice budowli, cz. II.	29	8
26.IV	A. NEGRUSZ	Pomiary współczynnika wynikania ciepła przy wewnętrznym chłodzeniu wirników turbogeneratorów dużej mocy	15	5
7.VI	I. KISIEL, E. DORNFELD B. LYSIK	Siła skupiona na płaszczyźnie M/V z uwzględnieniem filtracji	15	5
28.VI	L. KAMIŃSKI	Mostowa belka wspornikowa obciążona ruchomą masą pojazdu	17	6
25.X	Z. GRODECKI i W. PASZKE	Uwagi o zastosowaniu metod energetycznych w zagadnieniu pręta o sprężystych więzach podporowych	16	9

Data	Prelegent	Tytuł referatu	Liczba	
			uczest-	dysku-
			ników	tantów
25.X	R. ŻUCHOWSKI	Wpływ naprężeń wywołanych przez rozciąganie na pochłanianie i rozpraszanie promieni gamma w metalach		
8.XII	Zebranie naukowe poświęcone wygłoszeniu prac konkursowych: Z. BODARSKI	Wpływ uźebrowienia na charakter pola naprężeń w śródniku trójramiennego naroża rany metalowej	22	17
	E. BRZUCHOWSKI	Wzory strukturalne liczby znamionowe sprzęgieł jako powiązanie kombinatoryki z konstrukcją		
	E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI	Momentowy stan napięcia kratownic płaskich w świetle rzędu drugiego		
	J. LANGER	Uwagi o strukturze macierzy propagacji w metodzie funkcji początkujących		
	J. LANGER	Drgania własne równoległobocznej płyty mostowej		
	M. TEISSEYERE	Badania nad zastosowaniem kryz do pomiaru ilości pyłu węglowego i powietrza w transporcie pneumatycznym		
17.XII	B. GABRYSZEWSKA	Krzywe nośności graniczne dla tworzyw sztucznych	18	7
17.XII	J. ORŁOWSKI	Quasi-statyczne charakterystyki taśmociągu zbrojonego przekładkami steelonowymi		
18.V	S. ZIEMBA	Podstawy zagadnień nieliniowych	21	
22.II	S. ZIEMBA	Podstawy zagadnień nieliniowych	13	
29.III	S. ZIEMBA	Własności tworzyw konstrukcyjnych stosowanych w budowie maszyn	17	2
4.II	E. KARAŚKIEWICZ	Zastosowanie rachunku tensorowego do teorii sprężystości	52	

ROZSTRZYGNIĘCIE KONKURSÓW NAUKOWYCH W R. 1965

Konkurs Zarządu Głównego PTMTS

Na ogłoszony przez Zarząd Główny Towarzystwa konkurs naukowy na najlepszą pracę doświadczalną z dziedziny mechaniki wpłynęło 5 prac.

Zarząd Główny PTMTS na posiedzeniu w dniu 15 grudnia 1965 r. zatwierdził postanowienia Sądu Konkursowego w składzie: przewodniczący — prof. dr Z. BRZOSKA, członkowie — doc. dr Z. MARCINIAK, doc. dr B. STANISZEWSKI, doc. dr W. SZCZEPIŃSKI.

Postanowiono

- a) nie przyznać pierwszej nagrody,
- b) dwie równorzędne drugie nagrody po 4500 zł. każda przyznać mgr Józefowi MIASTKOWSKIEMU za pracę «Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności», oraz dr Jarosławowi SOBIESZCZAŃSKIEMU za pracę «Doświadczalne badania stateczności płyt trójkątnych»;
- c) dwie równorzędne trzecie nagrody po 2500 zł. każda przyznać mgr Januszowi KLEPACZKO za pracę «Wpływ dynamicznego odkształcenia na twardość miękkiej stali i aluminium» i dr Andrzejowi WILCZYŃSKIEMU za pracę «Doświadczalne badania własności polichloru winylu».

Konkurs Oddziału Łódzkiego PTMTS

Sąd konkursowy w składzie: prof. dr Zdzisław PARSZEWSKI, prof. dr Władysław KUCZYŃSKI, prof. dr Jerzy LEYKO, doc. dr Zdzisław ORZECHOWSKI, prof. dr Jan SZMELTER, dr inż. Kazimierz GROSSMAN na posiedzeniu w dniu 20 grudnia 1965 po przedstawieniu przez recenzentów opinii o każdej ze zgłoszonych prac i ich szczegółowej analizie postanowił przyznać 2 nagrody i jedno wyróżnienie:

Nagrodę Oddziału Łódzkiego PTMTS w wysokości 5.000 zł. dr inż. Tadeuszowi GALKIEWICZOWI za pracę pt. «Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej poddanej skręcaniu».

Nagrodę J. M. Rektora P. Ł. w wysokości 3.000 zł. dr inż. Sylwestrowi KONIECZNEMU za pracę pt. «O zastosowaniu teorii ośrodków włóknistych do obliczania rusztów pierścieniowych».

Wyróżnienie w postaci dyplomu dr inż. Zbyszkowi KAZIMIERSKIEMU za pracę pt. «Płaski przepływ przez stopień osiowy maszyny przepływowej o dowolnych parametrach geometrycznych».

Konkurs spotkał się z dużym zainteresowaniem pracowników nauki.

Na konkurs wpłynęło 13 prac 12 autorów.

KOMITET REDAKCYJNY zawiadamia, że poczynając od 1 stycznia 1967 r. *MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* będzie wychodziła jako kwartalnik cztery razy do roku w ogólnej objętości 40 arkuszy wydawniczych. Wydane poprzednio 4 tomy wydawnictwa można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w Warszawie, Pałac Kultury i Nauki, pokój 205. Prenumerata: rocznie — 120 zł., półrocznie — 60 zł.; pojedynczy zeszyt — 30 zł.

Tylko prenumerata zapewnia regularne i terminowe otrzymywanie czasopisma

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 1/1964

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYŃIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
Biuletyn informacyjny PTMTS:
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem
Sympozja naukowe IUTAM

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1965

- S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego
Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczenia nieliniowych zagadnień przewodnictwa cieplnego
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

ZESZYT 2/1965

- WITOLD WIERZBICKI — Wspomnienie pośmiertne
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczaniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń
Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, Pomiar sześciu składowych odkształcenia w ściskanym walcu betonowym
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego
Z. WASZCZYŹYN, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwnych podporach
J. MIĄSKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu
T. AGORSOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających
J. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 3/1965

- W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości
W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem
W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe
P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się sztynną kulą
S. PYTKO, O możliwościach wykorzystania metody elastooptycznej dla badań wyężenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

ZESZYT 1/1966

- S. OCHĘDUSZKO, Zmiany spowodowane w mechanice przez międzynarodowy układ jednostek miar
W. GOGÓL, Teoria stanu uporządkowanego i możliwości jej zastosowania
J. RYCHLEWSKI, Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności
K. WILMAŃSKI, C. WOŹNIAK, Układy współrzędnych prostokreślnych w geometrii powierzchni środkowej cienkich powłok

Biuletyn informacyjny

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągle mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 25% w Oddziałach Towarzystwa.

MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Pałac Kultury i Nauki)
