

J. II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

TOM 4 • ZESZYT 1



PW<sup>A</sup>

WARSZAWA 1966

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

S. OSIEDUSZKO, Zmiany spowodowane w mechanice przez międzynarodowy układ jednostek miar Изменения, вызванные в механике международной системой единиц мер Changes in the Mechanics caused by the International Measuring Units System	3
W. GOGÓL, Teoria stanu uporządkowanego i możliwości jej zastosowania Теория регулярного теплового режима и возможностей её применения The theory of thermal regular regime and its application to the heat transfer problems	21
J. RUCHLEWSKI, Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności Пластичность тел с разрывной неоднородностью Plasticity of the bodies with jump nonhomogeneity	45
K. WILMAŃSKI, CZ. WOŹNIAK, Układy współrzędnych prostokreślnych w geometrii powierzchni środkowej cienkich powłok Координатные линейчатые системы в геометрии срединных поверхностей тонких оболочек Ruled coordinate systems in the geometry of middle surfaces of thin shells	127
Biuletyn informacyjny	135

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 4 • Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1966

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A  
JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY  
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM  
MITZEL (WROCLAW) · JERZY MUTERMILCH  
(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)  
STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW  
OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK  
(GDAŃSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y  
ZBIGNIEW OLESIAK — R E D A K T O R  
JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI  
W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

## REDAKCJA

Warszawa, Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 11,5. Arkuszy drukarskich 9,0. Papier druk. sat. III kl., 65 g.  
Oddano do składania 13.1.66 r., druk ukończono w czwartku 1966 r. Cena zł 36.—

---

Zam. 92/65 M-73 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## ZMIANY SPOWODOWANE W MECHANICE PRZEZ MIĘDZYNARODOWY UKŁAD JEDNOSTEK MIAR

STANISŁAW OCHĘDUSZKO (GLIWICE)

Dotąd niedobrze się dzieje w dziedzinie wymiarowania wielkości fizycznych. Przyczyny niewątpliwego chaosu przy ustalaniu jednostek miar sięgają dawnych lat.

Z powodu niewłaściwej oceny istoty ciepła, które przed 1842 r. było uważane za pewien rodzaj nieważkiej materii (calorium), wprowadzono odrębną jednostkę — kilokalorię, kcal. Niemalże zamieszanie powstało wskutek tego, że technicy wbrew zatwierdzonej w 1889 r. przez Pierwszą Generalną Konferencję Miar definicji kilograma jako jednostki kg masy (substancji), pozostali przy interpretacji kilograma jako jednostki siły  $kG = kp$ .

Ostateczne uporządkowanie jednostek i pojęć fizycznych nastąpiło po zatwierdzeniu w 1960 r. przez XI Generalną Konferencję Miar i Wag układu SI («Système International») jako międzynarodowego układu jednostek miar. Ponieważ układ SI jest układem koherentnym, przeto można było w termodynamice technicznej zarzucić równania przystosowane i zastąpić je równaniami wielkościami. Dzięki temu można było zmienić oznaczenia niektórych wielkości termodynamicznych i zbliżyć się do oznaczeń stosowanych w mechanice.

Korzyści nowego układu zostaną uwypuklone na tle obecnie stosowanego zbioru tradycyjnych jednostek miar.

### 1. Zbiór jednostek tradycyjnych. Równania przystosowane

**1.1. Jednostki tzw. układu technicznego.** Wskutek odmiennej interpretacji kilograma przez techników zostało na wiele lat zaprzepaszczone ścisłe rozgraniczenie ciężaru i masy (substancji) w naukach technicznych. Praktycznie zarówno jedna jak i druga wielkość oznaczana bywa za pomocą kg (kilograma-masy) lub kG (kilograma-siły). Kto chce być bardziej ścisły, używa jako jednostki ilości masy nie kG, a tzw. *normalnego kilograma-siły*, nkG. Jest to jeden z przykładów tzw. *jednostki pośredniej*. W celu wyznaczenia ilości kg masy należałoby z badanym ciałem udać się tam, gdzie przyspieszenie siły ciężkości jest normalne,  $g = g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ . Dynamometr (waga sprężynowa) obciążony tym ciałem wskaże jego ciężar w kG. Bowiem *jednostką siły* w technice jest ciężar 1 kg-masy

---

Przypisek Redakcji. Zgodnie ze stwierdzeniem Autora propozycje dotyczące jednostek znamionowych w mechanice i wytrzymałości materiałów mają charakter dyskusyjny.

w próżni tam, gdzie  $g = g_n$ . W ten sposób wyznaczony ciężar jest miarą ilości masy ciała wyrażonej w kg. Tylko tam, gdzie  $g = g_n$ , wartości liczbowe ciężaru i masy są takie same.

Od dawna OCHĘDUSZKO [1] ściśle odróżnia siłę od masy i substancji. W celu unikania nieporozumień stosuje on lansowaną również w Polsce nazwę kilopond kp w miejsce kilograma-siły kG. Główną koherentną jednostkę masy stanowi masa <sup>(1)</sup>, której siła 1 kp nadaje przyspieszenie 1 m/s<sup>2</sup>. Z równania *Newtona*

$$(1) \quad F = ma$$

wynika jednostka masy

$$(2) \quad [m] = \frac{[F]}{[a]}$$

Należy przypomnieć, że:  $[m]$  oznacza jednostkę masy,  $[F]$  — jednostkę siły,  $[a]$  — jednostkę przyspieszenia liniowego. Po podstawieniu jednostek głównych otrzymuje się

$$(3) \quad [m] = \frac{\text{kp s}^2}{\text{m}}$$

Jest to tzw. *jednostka wymiarowa* masy, gdyż zawiera w sobie podstawowe jednostki technicznego zbioru tradycyjnego, który w zakresie mechaniki i termodynamiki składa się z

jednostki długości  $[d] = \text{m}$ , metra,

jednostki siły  $[F] = \text{kp}$ , kiloponda,

jednostki czasu  $[\tau] = \text{s}$ , sekundy,

jednostki ciepła  $[Q] = \text{kcal}$ , kilokalorii i

jednostki temperatury  $[T] = [t] = \text{grd}$ , (gradus) stopnia (bez względu na rodzaj skali 100-stopniowej<sup>(2)</sup>).

Dla uproszczenia zapisów wprowadza się tzw. *jednostki znamionowe*<sup>(3)</sup>, przeważnie wywodzące się od nazwiska uczonych. Ale jednostka masy określona równaniem (3) nosi nazwę

$$(3a) \quad \text{inert} = \frac{\text{kp s}^2}{\text{m}}$$

od wyrazu łacińskiego *inertia* lub stosowaną przez Niemców nazwę hyl.

Natomiast ilość substancji OCHĘDUSZKO określa za pomocą kg, tj. jednostki masy<sup>(4)</sup> (substancji) układu SI (dawnego MKS). W praktyce bowiem ilość substancji ustala się przez ważenie na wagach dźwigniowych, co jest jednoznaczne z podaniem ilości kg, a nie kG. Związek między inertem i kg można wyznaczyć za pomocą równania (1) w oparciu o definicję kiloponda

$$1 \text{ kg } g_n \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ inert } 1 \text{ m/s}^2,$$

<sup>(1)</sup> Masa (bezwładna) jest to właściwość materii objawiająca się przy zmianie ruchu, zależna od prędkości  $w$  ciała. Przy  $w = c$  (pr. światła)  $m = \infty$ .

<sup>(2)</sup> Jednostka znamionowa na skali Kelvina  $[T] = 1^\circ\text{K}$ , na skali zaś Celsjusza  $[t] = 1^\circ\text{C}$ , ale  $1^\circ\text{K} = 1^\circ\text{C} = 1 \text{ grd}$ .

<sup>(3)</sup> Nazwa ta pochodzi od *S. Fryzego*, który ma duże zasługi w metrologii elektrycznej.

<sup>(4)</sup> Jest tu mowa o tzw. masie spoczynkowej  $m_0$  przy  $w = 0$ .

czyli

$$(4) \quad 1 \text{ inert} = 9,80665 \text{ kg.}$$

Stąd równoważnik jednostek masy i substancji

$$(4a) \quad \mu = 9,8066 \frac{\text{kg}}{\text{inert}} \equiv 1.$$

Inert jest  $\mu = 9,80665$  razy większą jednostką ilości substancji od kg.

Wśród jednostek tradycyjnych znajdują się dwie jednostki dla określenia energii i tego, co z energii powstaje, mianowicie kcal dla ciepła, energii wewnętrznej i entalpii oraz kGm = kpm jako jednostka dla mechanicznych rodzajów energii (pracy, energii kinetycznej i potencjalnej). Dlatego w równaniach *pierwszej zasady termodynamiki* musi być stosowany równoważnik wspomnianych jednostek

$$(5) \quad 1 \text{ kcal} = 427 \text{ kp m} \quad \text{czyli} \quad A = \frac{1}{427} \frac{\text{kcal}}{\text{kp m}} \equiv 1.$$

W silnikach cieplnych powstaje praca 427 kpm w miejsce każdej kcal, która uległa zamianie na pracę.

**2.2. Równania przystosowane.** Jeżeli przez  $m$  oznaczy się ilość substancji ciała w kg, to ciężar tego ciała wynosi

$$(6) \quad G = \frac{m}{\mu} g$$

w kp. Po podzieleniu ostatniego równania przez objętość  $V$  ciała otrzymuje się

$$(7) \quad \frac{G}{V} = \frac{m}{V} \frac{g}{\mu},$$

czyli

$$(7a) \quad \gamma = \rho \frac{g}{\mu}.$$

Ostatnie równanie podaje związek między ciężarem właściwym  $\gamma$  i gęstością  $\rho$ . Z równania tego wynika, że wartości liczbowe  $\{\gamma\} = \{\rho\}$  jedynie wówczas, gdy przyspieszenie siły ciężkości  $\{g\} = \{\mu\} = 9,80665$ .

Jeżeli  $m$  kg materii ma prędkość  $w$  m/s, to jej *energia kinetyczna* ma wartość

$$(8) \quad E_k = \frac{m}{\mu} \frac{w^2}{2}$$

w  $\left(\text{inert} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)$ . Po zastosowaniu równania (3a) otrzymuje się jednostkę wymiarową  $[E_k] = \text{kpm}$ , tj. jednostkę główną pracy w zbiorze tradycyjnym.

Podobnie otrzymuje się wzór na energię potencjalną

$$(9) \quad E_p = \frac{m}{\mu} gH$$

gdzie  $H$  jest wysokością położenia środka  $m$  kg masy nad poziomem odniesienia.

Dla przemian zachodzących w układach zamkniętych słuszne jest równanie pierwszej zasady termodynamiki

$$(10) \quad Q_{1-2} = U_2 - U_1 + AL_{1-2}$$

gdzie  $Q_{1-2}$  oznacza ciepło dostarczone przez źródła zewnętrzne w kcal,  $U_2$  i  $U_1$  — energię wewnętrzną układu bilansowanego na początku i przy końcu przemiany w kcal,  $L_{1-2}$  — pracę bezwzględną wykonaną przez czynniki w układzie w kpm.

Ostatnie równanie jest również równaniem przystosowanym. Tylko dzięki zastosowaniu równoważnika  $A$  osiągnęło się zgodność wartości liczbowych

$$\{Q_{1-2}\} = \{U_2\} - \{U_1\} + \{A\}\{L\}$$

oraz jednostek

$$[Q] = [U] = [A][L]$$

po obu stronach równania (10). Bowiem dla każdej wielkości np.  $X$  można napisać iloczyn

$$(11) \quad X = \{X\}[X]$$

wartości liczbowej  $\{X\}$  przez jej jednostkę  $[X]$ .

Gdyby chodziło o wyrażenie energii  $E_k$  i  $E_p$  w jednostkach ciepła, to należałoby równanie (8) i (9) pomnożyć przez  $A$  [równanie (5)]

$$(8a) \quad AE_k = A \frac{m}{\mu} \frac{w^2}{2}$$

i

$$(9a) \quad AE_p = A \frac{m}{\mu} g H.$$

Oczywiście  $[AE_k] = [AE_p] = \text{kcal}$ .

Dzięki zastosowaniu odpowiednich równoważników można każdą wielkość przystosować do dowolnego układu jednostek.

Należy podkreślić, że występujący w podanych równaniach równoważnik  $\mu$  ma wartość stałą [równ. (4a)]. Natomiast w licznych publikacjach technicznych równoważnik ten jest zastąpiony przez przyśpieszenie  $g$  siły ciężkości, co prowadzi do nieściśłych wyników.

Jedynie odróżnienie ciężaru od masy prowadzi do poprawnych *jednostek wielkości pochodnych*. Np. energia właściwa  $e$  lub praca jednostkowa  $l$  przy użyciu rozszerzonego zbioru jednostek tradycyjnych mają jednostkę

$$[e] = \frac{[E]}{[m]} = \frac{\text{kp m}}{\text{kg}} \quad \text{i} \quad [l] = \frac{[L]}{[m]} = \frac{\text{kp m}}{\text{kg}}.$$

Gdyby dla oznaczenia siły i masy została wzięta ta sama jednostka kG, to dla obu wspomnianych wielkości otrzymałoby się wynik błędny  $[e] = [l] = \text{m}$ .

Opisany zbiór jednostek stosowanych jeszcze w termodynamice, a praktykowany w gliwickim ośrodku termodynamicznym od 1948 r. [2], znalazł zastosowanie w NRF [3] w czasie przejściowym przed ostatecznym przejściem do międzynarodowego układu SI.

Zbiór jednostek tradycyjnych nie jest koherentny, gdyż zawiera jednostki, które nie są spójne. Te jednostki są koherentne, które w równaniach definicyjnych występują w ilości 1.



I tak z równania (3a) wynika, że kpm, inert, m i s są koherentne, gdyż w równaniu (1) występują pojedynczo. Natomiast z równania

$$(12) \quad Q_f = AL_f,$$

podającego związek między pracą tarcia  $L_f$  kpm i ciepłem  $Q_f$  kcal, które z tej pracy powstało, wynika, że kpm i kcal nie są jednostkami koherentnymi.

Tych wad nie ma układ ciężarowy MkPS (metr-kilopond-sekunda) oraz międzynarodowy SI.

## 2. Równania wielkościowe. Koherentne układy jednostek

**2.1. Równanie wielkościowe.** W przypadku stosowania układów koherentnych równania przystosowane mogą być zastąpione przez równania wielkościowe, tj. takie równania, w których występują tylko wielkości fizyczne i liczby bezwymiarowe.

Równania przystosowane występujące w «Teorii maszyn cieplnych» [4] stają się wielkościowe, jeżeli opuści się w nich równoważniki, jak  $\mu$ ,  $A$  i inne. Zatem równania (6) i dalsze przedstawiają się następująco:

$$(6a) \quad G = mg$$

$$(7b) \quad \gamma = \rho g$$

$$(8b) \quad E_k = m \frac{w^2}{2}$$

$$(9b) \quad E_p = mgH$$

$$(10a) \quad Q_{1-2} = U_2 - U_1 + L_{1-2}$$

$$(12a) \quad Q_f = L_f$$

Wzór na grubość filmu kondensatu spływającego pod własnym ciężarem po pionowe ścianie płaskiej ma postać równania przystosowanego [5]

$$(13) \quad y = \sqrt[4]{\frac{4\mu\lambda\eta(t_s - \vartheta)x}{gr\rho^2}}$$

gdzie  $x$  jest odległością od początku filmu,  $\zeta$  i  $\eta$  oznaczają współczynniki przewodzenia i lepkości kondensatu,  $\rho$  i  $r$  — gęstość kondensatu i jego ciepło parowania,  $(t_s - \vartheta)$  — spadek temperatury w filmie. Równaniu (13) odpowiada równanie wielkościowe

$$(13a) \quad y = \sqrt[4]{\frac{4\lambda\eta(t_s - \vartheta)x}{gr\rho^2}}$$

w którym odpadł równoważnik  $\mu = 9,80665 \text{ kg/inert}$  (równ. (4a)).

A oto jeszcze jeden przykład. Prędkość dźwięku w gazie wyraża się za pomocą równania przystosowanego

$$(14) \quad a = \sqrt{\mu\kappa RT}$$

oraz wielkościowego

$$(14a) \quad a = \sqrt{\kappa RT}$$

Tablica 1. Główne jednostki międzynarodowego układu SI  
wg uchwały XI Generalnej Konferencji Miar i Wag (1960 r.)

Rodzaj jednostki	Lp.	Wielkość fizyczna	Nazwa jednostki miar	Skrót oznaczenia jednostki
1	2	3	4	5
Jednostki podstawowe	1	długość	metr	m
	2	masa	kilogram	kg
	3	czas	sekunda	s
	4	nateżenie prądu elektrycznego	amper	A
	5	temperatura termodynamiczna	stopień Kelvina	grd K
	6	światłość	kandela	cd
Jednostki uzupełniające	1	kąt płaski	radian	rad
	2	kąt bryłowy	steradian	sr
Jednostki pochodne	1	pole powierzchni	metr kwadratowy	m <sup>2</sup>
	2	objętość	metr sześcienny	m <sup>3</sup>
	3	częstość	herc	Hz = $\frac{1}{s}$
	4	gęstość	kilogram na metr sześcienny	kg/m <sup>3</sup>
	5	prędkość	metr na sekundę	m/s
	6	prędkość kątowna	radian na sekundę	rad/s
	7	przyśpieszenie	metr na sekundę do kwadratu	m/s <sup>2</sup>
	8	przyśpieszenie kątowe	radian na sekundę do kwadratu	rad/s <sup>2</sup>
	9	siła	niuton	N
	10	ciśnienie (naprężenie mechaniczne)	niuton na metr kwadratowy	N/m <sup>2</sup>
	11	dynamiczny współczynnik lepkości	niutonosekunda na metr kwadratowy	Ns/m <sup>2</sup>
	12	kinematyczny współczynnik lepkości	metr kwadratowy na sekundę	m <sup>2</sup> /s
	13	praca, energia, ilość ciepła	dżul	J
	14	moc	wat	W = AV
	15	ilość elektryczności (ładunek)	kulomb	C = As
	16	napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna	wolt	$V = \frac{kg\ m^2}{A\ s^3}$
	17	nateżenie pola elektrycznego	wolt na metr	$V/m = \frac{kg\ m}{A\ s^3}$
	18	opór elektryczny	om	$\Omega = \frac{kg\ m^2}{A^2\ s^3}$
	19	pojemność elektryczna	farad	$F = \frac{A^2\ s^4}{kg\ m^2}$
	20	strumień indukcji magnetycznej	weber	$Wb = \frac{kg\ m^2}{A\ s^2}$

c.d. tablicy 1

1	2	3	4	5
Jednostki pochodne	21	indukcyjność	henr	$H = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A}^2 \text{s}^2}$
	22	indukcja magnetyczna	tesla	$T = \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2}$
	23	natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m
	24	siła magnetoelektryczna	amper	A
	25	strumień świetlny	lumen	$\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$
	26	luminancja (gęstość światłości)	kandela na metr kwadratowy	$\text{cd}/\text{m}^2$
	27	natężenie oświetlenia	luks	$\text{lx} = \frac{\text{cd} \cdot \text{sr}}{\text{m}^2}$

z wyłączeniem  $\mu$ . W końcowych równaniach oznaczają:  $\kappa = c_p/c_v$  — wykładnik izentropy,  $R$  — stałą gazową środowiska,  $T$  — jego temperaturę.

Jak widać, równania wielkościowe są proste w swej postaci, a przez to bardziej przejrzyste i zrozumiałe.

**2.2. Układ ciężarowy MkPS.** Jeżeli ze zbioru jednostek tradycyjnych stosowanych w technice usunie się kcal oraz kg, to otrzyma się koherentny układ ciężarowy. Ma on następujące, główne jednostki podstawowe w dziedzinie mechaniki i termodynamiki

długość  $[d] = \text{m}$ , siła  $[F] = \text{kp}$ , czas  $[\tau] = \text{s}$ , temperatura  $[T] = [t] = \text{grad}$ .

Główne jednostki pochodne:

$$[A] = \text{m}^2, [V] = \text{m}^3, [w] = \text{m/s}, [a] = [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, [m] = \text{inert}, [L] = [Q] = \text{kp m}.$$

Jednostki tego układu są zebrane w tablicy 2.

**2.3. Międzynarodowy układ SI.** Układ SI liczy 6 jednostek podstawowych, 2 jednostki uzupełniające oraz 27 jednostek pochodnych (tablica 1). Układ ten należy do tzw. *układów masowych* dlatego, że jedną z jednostek podstawowych jest jednostka masy.

Jednostki podstawowe są niezależne od siebie i opierają się na wzorcach. Jest cechą znamioną, że z dawnych wzorców pozostał tylko kilogram jako wzorzec masy, inne jednostki mają wzorce, które pozwalają na znacznie większą dokładność pomiarów aniżeli wzorce dotychczasowe. Opis wzorców można znaleźć w nowszych publikacjach np. [7].

Do najważniejszych jednostek pochodnych należy jednostka siły, *niuton* N, która zgodnie z równaniem (1) masie 1 kg nadaje przyśpieszenie  $1 \text{ m/s}^2$ , zatem

$$(15) \quad [F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2}.$$

Ponieważ kilopond masie 1 kg nadaje przyśpieszenie  $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ , przeto między kp i N istnieje związek

$$(16) \quad 1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N} = \mu \text{N},$$

Tablica 2. Międzynarodowy układ jednostek SI  
Jednostki główne używane w mechanice i technice cieplnej

Lp.	Wielkość		Jednostki główne w układach			
	Nazwa	Oznaczenie	SI	MkPS	CGS	
1	I Wielkości geometryczne	kąt płaski	$\alpha, \beta, \gamma$	rad	rad	rad
2		kąt bryłowy	$\omega, \Omega$	sr	sr	sr
3		długość	$d, l, r$	m	m	cm
4		pole powierzchni	$A$	$m^2$	$m^2$	$cm^2$
5		objętość pomieszczenia	$V$	$m^3$	$m^3$	$cm^3$
6	II Wielkości kinematyczne	czas	$\tau$	s	s	s
7		częstotliwość	$\nu$	$\frac{1}{s} = \text{Hz}$	$\frac{1}{s} = \text{Hz}$	$\frac{1}{s} = \text{Hz}$
8		prędkość kątowa	$\omega, \dot{n}_o$	$\frac{1}{s} = \frac{\text{rad}}{s}$	$\frac{1}{s} = \frac{\text{rad}}{s}$	$\frac{1}{s} = \frac{\text{rad}}{s}$
9		przyśpieszenie kątowe	$\epsilon$	$\frac{1}{s^2} = \frac{\text{rad}}{s^2}$	$\frac{1}{s^2} = \frac{\text{rad}}{s^2}$	$\frac{1}{s^2} = \frac{\text{rad}}{s^2}$
10		prędkość liniowa	$\left\{ \begin{array}{l} \text{bezwzględna} \\ \text{unoszenia} \\ \text{względna} \end{array} \right.$ $c$ $u$ $w$	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s}$	$\frac{cm}{s}$
11		objętość strumienia	$\dot{V}$	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{cm^3}{s}$
12		przyśpieszenie liniowe	$a$	$\frac{m}{s^2}$	$\frac{m}{s^2}$	$\text{Gl}^{(1)} = \frac{cm}{s^2}$
13		kinematyczny współczynnik lepkości	$\nu$	$\frac{m^2}{s}$	$\frac{m^2}{s}$	$\text{St}^{(2)} = \frac{cm^2}{s}$
14	masa (ilość substancji)	$m$	kg	$\text{inert} = \frac{kp \cdot s^2}{m}$	g	
15	gęstość	$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{\text{inert}}{m^3} = \frac{kp \cdot s^2}{m^4}$	$\frac{g}{cm^3}$	

16	objętość właściwa	$v$	$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{inert}} = \frac{\text{m}^4}{\text{kp s}^2}$	$\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}$
17	strumień substancji	$\dot{m}$	$\frac{\text{kg}}{\text{s}}$	$\frac{\text{inert}}{\text{s}} = \frac{\text{kp s}}{\text{m}}$	$\frac{\text{g}}{\text{s}}$
18	gęstość strumienia substancji	$\frac{\dot{m}}{A}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$	$\frac{\text{inert}}{\text{s m}^2} = \frac{\text{kp s}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{g}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$
19	siła, strumień pędu	$F, K$	$N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$	$\text{kp}$	$\text{dyna} = \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2}$
20	pęd	$m w$	$Ns = \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$	$\text{kps}$	$\text{dyna s} = \frac{\text{g cm}}{\text{s}}$
21	obciążenie liniowe napiecie powierzchniowe	$F/l$	$\frac{N}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{kp}}{\text{m}}$	$\frac{\text{dyna}}{\text{cm}} = \frac{\text{g}}{\text{s}^2}$
22	ciśnienie, naprężenie	$p, \sigma$	$\frac{N}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$	$\frac{\text{kp}}{\text{m}^2}$	$\mu\text{bar} = \frac{\text{dyna}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{g}}{\text{cm s}^2}$
23	ciężar właściwy	$\gamma$	$\frac{N}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}^2}$	$\frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{dyna}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{g}}{\text{cm}^2 \text{ s}^2}$
24	moment statyczny	$M$	$Nm = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$	$\text{kpm}$	$\frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2}$
25	moment bezwładności (masowy)	$I$	$\text{kg m}^2$	$\text{inert m}^2 = \text{kp m s}^2$	$\text{g cm}^2$
26	praca energia egzergia ciepło entalpia	$L$ $E, U$ $B$ $Q$ $I$	$J = Nm = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$	$\text{kpm}$	$\text{erg} = \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2}$
27	energia jednostkowa ciepło spalania wartość opałowa	$e$ $W'_g$ $W_d$	$\frac{J}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{kp m}}{\text{inert}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$\frac{\text{erg}}{\text{g}} = \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2}$

III Wielkości statyczne i dynamiczne

VI Wielkości cieplne

Lp.	Wielkość		Jednostki główne w układach			
	Nazwa	Oznaczenie	SI	MkPS	CGS	
28	IV Wielkości cieplne	moc, strumień energii	$\dot{L}, N, \dot{E}$	$\frac{W}{s} = \frac{kg\ m^2}{s^3}$	$\frac{kp\ m}{s}$	$\frac{erg}{s} = \frac{g\ cm^2}{s^3}$
29		gęstość strumienia energii	$\dot{q}, \dot{e}$	$\frac{W}{m^2} = \frac{kg}{s^3}$	$\frac{kp}{m\ s}$	$\frac{erg}{s\ cm^2} = \frac{g}{s^3}$
30		dynamiczny współczynnik lepkości	$\eta$	$\frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{m\ s}$	$\frac{kp\ s}{m^2}$	$P^{(3)} = \frac{g}{cm\ s}$
31		temperatura $\left\{ \begin{array}{l} \text{względna} \\ \text{bezwzględna} \\ \text{przyrost} \end{array} \right.$	$t$ $T$ $\Delta t = \Delta t$	$^{\circ}C$ $^{\circ}K$ grd, (deg)	$^{\circ}C$ $^{\circ}K$ grd, (deg)	$^{\circ}C$ $^{\circ}K$ grd, (deg)
32		termiczny współczynnik rozszerzalności	$\beta$	$\frac{1}{grd}$	$\frac{1}{grd}$	$\frac{1}{grd}$
33		pojemność cieplna entropia	$W$ $S$	$\frac{J}{grd} = \frac{kg\ m^2}{s^2\ grd}$	$\frac{kp\ m}{grd}$	$\frac{erg}{grd} = \frac{g\ cm^2}{s^2\ grd}$
34		ciepło właściwe entropia właściwa stała gazowa	$c$ $s$ $R$	$\frac{J}{kg\ grd} = \frac{m^2}{s^2\ grd}$	$\frac{m^2}{s^2\ grd}$	$\frac{erg}{g\ grd} = \frac{cm^2}{s^2\ grd}$
35		współczynnik przewodzenia ciepła	$\lambda$	$\frac{W}{m\ grd} = \frac{kg\ m}{s^3\ grd}$	$\frac{kp}{s\ grd}$	$\frac{g\ cm}{s^3\ grd}$
36		współczynnik wnikania ciepła współczynnik przenikania ciepła	$\alpha$ $k$	$\frac{W}{m^2\ grd} = \frac{kg}{s^3\ grd}$	$\frac{kp}{m\ s\ grd}$	$\frac{g}{s^3\ grd}$

(1) G1 = gal. (2) St = stouks. (3) P = puaz.

czyli

$$(16a) \quad 1 \text{ N} = 0,101972 \text{ kp}.$$

Nowa jednostka siły jest ok. 1/10 częścią kiloponda.

Główną jednostką energii, egzergii, anergii <sup>(6)</sup>, pracy mechanicznej i ciepła jest

$$(17) \quad [E] = [B] = [A] = [L] = [Q] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Jednostka wymiarowa ( $\text{kgm}^2/\text{s}^2$ ) ma aż 3 nazwy: *niutonometr* Nm, *dżul* J, *watosekunda* Ws. Wymienione jednostki są znamionowe. Oczywiście

$$(18) \quad 1 \text{ Nm} = \frac{1}{\mu} \text{ kp m}.$$

Warto nadmienić, że ten sam równoważnik  $\mu$  odgrywa rolę również w jednostkach ciśnienia i naprężenia. Główna jednostka

$$(19) \quad 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pc} = \frac{1}{\mu} \frac{\text{kp}}{\text{m}^2}.$$

Jednostkę znamionową *paskal* oznacza się przez Pc lub Ps.

W praktyce stosowane będą jednostki większe. Np. jednostka wtórna

$$(20) \quad 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

jest nieco większa od atmosfery technicznej, gdyż  $1 \text{ bar} = 1,01972 \text{ at} = 1,01972 \text{ kp/cm}^2$ . Przy pomiarze małych ciśnień używana jest (w meteorologii) jednostka mbar =  $10^2 \text{ Pc}$ .

Dużym wstrząsem w termodynamice jest wyeliminowanie z użycia tradycyjnej kilokalorii. Jej miejsce zajmuje uniwersalna jednostka energii dżul. Nie trudno ustalić równoważnik dla międzynarodowej kilokalorii

$$(21) \quad \begin{aligned} 1 \text{ kcal}_{\text{IT}} &= 426,935 \text{ kp m} = 427,935 \cdot 9,80665 \text{ Nm}, \\ 1 \text{ kcal}_{\text{IT}} &= 4186,80 \text{ J} = 4,1868 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Nowa jednostka ciepła kilodżul kJ jest 4,187 razy mniejszą jednostką od kilokalorii. Jest rzeczą znamienną, że 1 kJ przedstawia tę ilość ciepła, jaką musi pochłonąć 1 kg powietrza, aby jego temperatura wzrosła o 1 grd pod stałym ciśnieniem.

Ze zmianą jednostki ciepła wiąże się zmiana jednostki strumienia (natężenia przepływu) ciepła. Wiadomo, że

$$1 \text{ kWh} = 860 \text{ kcal}, \quad \text{czyli} \quad 1000 \text{ Wh} = 860 \text{ kcal},$$

zatem

$$(22) \quad 1 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} = \frac{1000}{860} \text{ W} = 1,1630 \text{ W}.$$

Dotąd używana jednostka strumienia ciepła jest większą od głównej jednostki mocy w układzie IS o około 16%.

<sup>(6)</sup> Istnieje zależność: energia = egzergia + anergia. Egzergię stanowi ta część energii, która przy współdziałaniu otoczenia w doskonałej maszynie mogłaby być zamieniona w pracę użyteczną.

W tablicy 2 zebrano wielkości najczęściej używane w mechanice i termodynamice. Uwzględniono tam jednostki trzech koherentnych układów jednostek miar: SI, MkpS i CGS.

W drugiej kolumnie tablicy 2 figurują nowe oznaczenia. Wśród nich znajdują się litery z kropką u góry. Wielkości te oznaczają pochodne względem czasu. Zatem:

$$\dot{n}_o = \frac{dn}{d\tau}, \quad \dot{m} = \frac{dm}{d\tau}, \quad \dot{V} = \frac{dV}{d\tau}, \quad \dot{L} = \frac{dL}{d\tau},$$

$$\dot{E} = \frac{dE}{d\tau}, \quad \dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau}$$

oznaczają: częstość obrotów, strumień materii, objętość strumienia, moc mechaniczną, strumień energii i strumień ciepła.

### 3. Przeliczanie wartości liczbowych wielkości fizycznych

W czasie przejściowym, który poprzedzi wyłączenie stosowanie międzynarodowego układu SI, będzie zachodziła potrzeba przeliczania wartości liczbowych wielkości fizycznych, bowiem równania przystosowane należałoby bezwarunkowo natychmiast zarzucić na rzecz równań wielkościowych.

Przy przeliczeniach musi być znany równoważnik jednostki starej i nowej dla tej samej wielkości. Równoważnik może dotyczyć jednostek z dwu różnych układów (zbiorów) jednostek lub jednostek tego samego układu jednostek.

Przykłady równoważników pierwszego rodzaju są ujęte za pomocą równań (4a) i (5).

Natomiast drugi rodzaj równoważników dotyczy jednostek wtórnych, które otrzymuje się z jednostek głównych za pomocą odpowiednich przedrostków (tablica 3).

Tablica 3. Nazwy przedrostków do tworzenia nazw jednostek wtórnych <sup>(1)</sup>

Jednostki ułamkowe			Jednostki wielokrotne		
Przedrostek	skrót	10 <sup>n</sup>	Przedrostek	skrót	10 <sup>n</sup>
Decy	d <sup>(2)</sup>	10 <sup>-1</sup>	deka	da <sup>(2)</sup>	10
Centy (cent)	c	10 <sup>-2</sup>	hekto (hekt)	h	10 <sup>2</sup>
Mili	m	10 <sup>-3</sup>	kilo	k	10 <sup>3</sup>
Mikro	μ	10 <sup>-6</sup>	mega	M	10 <sup>6</sup>
Nano	n	10 <sup>-9</sup>	giga	G	10 <sup>9</sup>
Piko	p	10 <sup>-12</sup>	tera	T	10 <sup>12</sup>

<sup>(1)</sup> Zgodnie z uchwałą nr 12 XI Generalnej Konferencji Miar i Wag, ustanawiającą międzynarodowy układ jednostek miar.

<sup>(2)</sup> Według Dziennika Urzędowego Głównego Urzędu Miar (Dziennik Ustaw z dnia 17 lipca 1953 r., nr 35, poz. 148) dla przedrostka decy przewidziany jest skrót dc, a dla przedrostka deka przewidziano skrót dk.

Równoważniki są wielkościami mianowanymi, których wartość liczbową jest równoważna jedności. Dlatego pomnożenie wielkości przez równoważnik nie zmienia jej, chociaż wartość liczbową jest inna, bowiem zgodnie z równaniem (11) zmniejszenie jednostki powoduje wzrost wartości liczbowej i na odwrót.



Tablica 4. Równoważniki jednostek naprężenia mechanicznego  $\sigma$  i  $\tau$  (oraz ciśnienia  $p$ )

Jednostka	Układ jednostek miar						Inne jednostki	
	SI			ciężarowy			atmosfera fizyczna	torr
	jedn. główna	wtórne jednostki praktyczne		jedn. główna	wtórne jednostki praktyczne		atm	Tr
	N/m <sup>2</sup>	bar	hbar = Hr	kp/m <sup>2</sup> = = kG/m <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup> = at	kp/mm <sup>2</sup>		
1 N/m <sup>2</sup>	1	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-7</sup>	0,101972	1,01972 · 10 <sup>-5</sup>	1,01972 · 10 <sup>-7</sup>	9,86923 · 10 <sup>-6</sup>	7,50062 · 10 <sup>-3</sup>
1 bar	10 <sup>5</sup>	1	10 <sup>-2</sup>	10197,2	1,01972	0,0101972	0,986923	750,062
1 hbar = 1 Hr	10 <sup>7</sup>	10 <sup>2</sup>	1	1 019 720	101,972	1,01972	98,6923	75006,2
1 $\frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kG}}{\text{m}^2}$	9,80665	9,80665 · 10 <sup>-5</sup>	9,80665 · 10 <sup>-7</sup>	1	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-6</sup>	9,67841 · 10 <sup>-5</sup>	0,0735559
1 $\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 1 \text{ at}$	98 066,5	0,980665	9,80665 · 10 <sup>-3</sup>	10 <sup>4</sup>	1	10 <sup>-2</sup>	0,967841	735,559
1 $\frac{\text{kp}}{\text{mm}^2} = 1 \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2}$	9 806 650	98,0665	0,980665	10 <sup>6</sup>	10 <sup>2</sup>	1	96,7841	73555,9
1 atm	101 325	1,01325	0,0101325	10 332,27	1,033227	0,01033227	1	760
1 Tr	133,3224	1,333224 · 10 <sup>-3</sup>	1,333224 · 10 <sup>-5</sup>	13,59510	13,59510 · 10 <sup>-6</sup>	13,59510 · 10 <sup>-6</sup>	1,315789 · 10 <sup>-3</sup>	1

151

Tablica 5. Równoważniki jednostek energii  $E$ , pracy  $L$  i ciepła  $Q$

Jednostka	Układ jednostek miar			Inne jednostki stosowane w technice		
	SI		ciężarowy			
	J = Ws = Nm	kJ	kp m	kcal <sub>IT</sub>	kWh	KMh
1 J = 1 Nm = 1 Ws	1	10 <sup>-3</sup>	0,101972	2,38846 · 10 <sup>-4</sup>	2,77778 · 10 <sup>-7</sup>	3,77673 · 10 <sup>-7</sup>
1 kJ	10 <sup>3</sup>	1	101,972	0,238846	2,77778 · 10 <sup>-4</sup>	3,77673 · 10 <sup>-4</sup>
1 kp m	9,80665	9,80665 · 10 <sup>-3</sup>	1	2,34228 · 10 <sup>-3</sup>	2,72407 · 10 <sup>-6</sup>	3,70370 · 10 <sup>-6</sup>
1 kcal <sub>IT</sub>	4186,80	4,18680	426,9347	1	1,16300 · 10 <sup>-3</sup>	1,58124 · 10 <sup>-3</sup>
1 kWh	3,6 · 10 <sup>6</sup>	3600	367 097,8	859,8452	1	1,35962
1 KMh	2 647 796	2647,796	2,7 · 10 <sup>5</sup>	632,416	0,73549875	1

Operację przeliczania najlepiej pokazać na *przykładzie*. Siłę  $F = 545$  kp wyrazić za pomocą jednostek układu SI i CGS. Przy użyciu równoważnika (16)

$$F = 545 \text{ kp} \frac{\text{N} \mu}{\text{kp l}} = 545 \cdot 9,80665 \text{ N} = 5340 \text{ N},$$

$$F = 5340 \text{ N} \frac{\text{daN l}}{\text{N 10}} = 534 \text{ daN}.$$

Jeżeli chodzi o obliczenie ilości dyn, to

$$F = 5340 \text{ N} = 5340 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{cm } 10^2}{\text{m l}} \frac{\text{g } 1000}{\text{kg l}},$$

$$F = 5340 \cdot 10^5 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 534 \cdot 10^8 \text{ dyn}.$$

W tablicy 4 podano równoważniki jednostek ciśnienia i naprężenia mechanicznego. Natomiast tablica 5 zawiera równoważniki jednostek energii, pracy, ciepła. W obszerniejszych publikacjach [7] znajdują się przeliczniki ułatwiające operacje liczbowe.

#### 4. Jednostki znamionowe w mechanice i wytrzymałości materiałów

Wprowadzenie układu SI do mechaniki nie spowoduje wielkich zmian. Żadne zmiany nie zajdą w dziedzinie wielkości geometrycznych i kinematycznych (tablica 2) bowiem jednostki tych wielkości są takie same, zarówno w zbiorze tradycyjnym, jak też w układach MkpS i SI.

Dopiero w dziedzinie statyki i dynamiki wystąpią zasadnicze zmiany, gdyż tradycyjna jednostka siły kilopond zostanie zastąpiona przez niuton. W związku z tym jednostki główne tych wielkości, które w układzie SI zawierają kg lub N są  $\mu$  razy mniejsze od odpowiednich jednostek głównych układu ciężarowego, zawierających inert lub kp. Dlatego wartości liczbowe po zastosowaniu układu SI są  $\mu$  razy większe.

Z równoważnika

$$(23) \quad 1 \text{ daN} = 10 \text{ N} = 1,01972 \text{ kp}$$

wynika, że wartość liczbową siły po zastosowaniu układu SI niewiele się zmieni, jeżeli zastosuje się jednostkę wtórną, dekaniuton. Wszędzie, gdzie dopuszczalny jest błąd 2% można używać dawnych wartości liczbowych stosując nową jednostkę daN.

Obciążenie mostów (i dźwigów) wyraża się za pomocą *tony-siły*

$$1 \text{ T} = 10^3 \text{ kG} = 1 \text{ MG} = 1 \text{ Mp}.$$

Jednostka ta jest około  $10^4$  razy większa od niutona. Po zastosowaniu układu SI wartości liczbowe wspomnianego obciążenia zmniejszą się o niecałe 2%, jeżeli wyrazi się je za pomocą mirianiuтона

$$(24) \quad 1 \text{ mrN} = 10^4 \text{ N} = 1,01972 \text{ T}.$$

Ponieważ przedrostek miria został wycofany na Generalnej Konferencji Miar i Wag (1960 r.), przeto proponowaną jednostkę możnaby nazwać np.

$$(25) \quad 1 \text{ ban} = 1 \text{ B} = 1,01972 \text{ T}$$

od nazwiska wybitnego uczonego BANACHA. Tabliczki znamionowe na mostach i dźwignicach przy niezmienniej wartości liczbowej zamiast litery T otrzymałyby znak B.

W nauce o wytrzymałości materiałów naprężenie styczne  $\tau$  i normalne  $\sigma$  wyraża się za pomocą kilograma-siły (kiloponda) i  $\text{mm}^2$  jako jednostki pola przekroju

$$(26) \quad [\tau] = [\sigma] = \frac{\text{kG}}{\text{mm}^2} = \frac{\text{kp}}{\text{mm}^2}.$$

Jak wynika z tablicy 4 jednostka tradycyjna  $\text{kG/mm}^2$  jest około  $10^7$  razy większa od jednostki głównej ciśnienia  $\text{N/m}^2$  w układzie SI. Mimo to w obliczeniach wytrzymałościowych będzie można korzystać z dotychczasowych wartości liczbowych naprężeń, podanych w katalogach i tablicach, jeżeli użyje się jednostki wtórnej

$$(27) \quad 1 \text{ hbar} = 10^2 \text{ bar} = 10^7 \text{ N/m}^2 = 1,01972 \text{ kG/mm}^2.$$

Tę nową jednostkę możnaby nazwać np. *huberem* dla uczczenia zasług M. HUBERA

$$(27a) \quad 1 \text{ huber} = \text{Hr} = 10^7 \text{ N/m}^2 = 1,01972 \text{ kG/mm}^2.$$

Ta sama różnica wystąpi między barem i  $\text{kp/cm}^2 = \text{kG/cm}^2$

$$(20a) \quad 1 \text{ bar} = 1,01972 \text{ kG/cm}^2$$

używanymi przy wyznaczaniu wielkości modułu Younga.

Przy wyznaczaniu momentu statycznego sił należałoby — po przyjęciu układu SI — dotąd stosowaną jednostkę  $\text{kGcm} = \text{kpcm}$  zastąpić decyniutonometrem, gdyż

$$(28) \quad 1 \text{ dNm} = \frac{1}{10} \text{ Nm} = \frac{\text{kp} \cdot 1}{\text{N} \cdot 9,80665} \frac{\text{cm} \cdot 100}{\text{m} \cdot 1} = 1,01972 \text{ kp cm}.$$

Tu również można by zastosować odpowiednią jednostkę znamionową, np. Tim ze względu na zasługi TIMOSZENKI.

Z tych ostatnich równań wynika, że jednostki układu SI, zastosowane w nauce o wytrzymałości materiałów, są o około 2% większe od jednostek tradycyjnych. W związku z tym wartości liczbowe wielkości używanych w tej nauce będą nieco mniejsze. W praktycznych obliczeniach dopuszczalne jest stosowanie dotychczasowych wartości liczbowych.

Po przejściu do układu SI będzie potrzebna nieznaczna przeróbka maszyn wytrzymałościowych, jeżeli na istniejącej skali zastąpi się  $\text{kG} = \text{kp}$  przez  $\text{daN}$  (dekaniuton) [równ. 23)].

## 5. Zalety układu międzynarodowego SI

Układ SI jest układem spójnym, tzn. jego jednostki główne mogą być wprost używane w równaniach wielkościowych.

Dzięki wprowadzeniu w układzie SI niutona niezależnie od kilograma-masy unika się pomieszania takich pojęć, jak gęstość i ciężar właściwy.

Zastosowanie jednej jednostki dżuła dla energii oraz pracy i ciepła pozwala na wyrugowanie kilokalorii, która jest jednostką wieloznaczną ( $\text{kcal}_{15}$ ,  $\text{kcal}_{20}$ ,  $\text{kcal}_{IT}$  i in.).

Układ SI ma odpowiednio wielkie jednostki główne i wtórne (kg, bar, kJ, kW) do praktycznego zastosowania.

Duże pokrewieństwo układów masowych SI i CGS ułatwia szybkie porozumienie między technikami i fizykami.

Układ SI jest układem uniwersalnym dotyczącym wszystkich dziedzin życia naukowego i gospodarczego. Uniwersalność ta ułatwia współpracę naukowców i techników z różnych dziedzin wiedzy (elektrotechnika, magnetyzm, fotometria, mechanika, energetyka cieplna i jądrowa i in.). Pomost ten jest bardzo korzystny w wieku reaktorów jądrowych i podróży kosmicznych.

Wymienione zalety są tak duże, że wiele krajów i instytucji wypowiedziało się za przyjęciem układu SI.

Sprawa legalizacji układu SI najdalej posunięta jest w ZSRR, gdzie komitet norm, miar i przyrządów mierniczych przy Radzie Ministrów zatwierdził normę GOST 9867-61, którą wprowadzono układ SI do powszechnego użytku z dniem 1.I.1963 r.

Układ SI został zalegalizowany również we Francji, w Niemieckiej i Węgierskiej Republice Demokratycznej. Kraje anglosaskie żywo interesują się nowym układem jednostek; w Anglii zapadła uchwała przejścia do systemu metrycznego. Powodem tego jest korzystna relacja dla jednostki ciepła

$$(29) \quad 1 \text{ BTU} = 1,05506 \text{ kJ}.$$

W tym samym kierunku podążają Unia Południowo-Afrykańska, Australia i Nowa Zelandia.

Za przyjęciem i stosowaniem układu SI wypowiedziały się: Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO), Międzynarodowy Związek Fizyki Teoretycznej i Stosowanej (IUPAP), Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna (IEC), Międzynarodowy Komitet Metrologii, nadto Rada Naukowa VDI i kolegia redakcyjne wielu czasopism technicznych.

W Polsce na mocy rozporządzenia Rady Ministrów z dnia 1.VII.1953 r. (Dz.U.P.R.L. Nr 35, poz. 148) niektóre jednostki układu międzynarodowego (N, Pc, bar, J, W) zostały wysunięte na pierwsze miejsce. Ale rozporządzenie to dopuszcza stosowanie jeszcze jednostek układu tradycyjnego (kG zwanego kP,  $\text{kcal}_{15}$ , at, Tr i tp.). Dopóki rozporządzenie to nie zostanie zmienione, dopóty układ międzynarodowy SI nie osiągnie pełnych praw obywatelskich.

Moim zdaniem zwlekanie z zatwierdzeniem projektu nowego Rozporządzenia Rady Ministrów, w którym za legalne uważa się jednostki układu SI, nie przynosi korzyści ani szkołom ani przemysłowi. Polska dzisiaj stanowi wyspę, w której niewiele zrobiło się w kierunku legalizacji układu SI. Nowe publikacje zagraniczne i niektóre w kraju opierają się na układzie SI i są zrozumiałe tylko dla ludzi odpowiednio przeszkolonych. Obawa przemysłu przed układem SI nie jest uzasadniona, gdyż chwila wyłącznego stosowania go musi być poprzedzona odpowiednimi przygotowaniem. Czas przejściowy będzie tym krótszy, im więcej będzie zwolenników nowego układu. Dlatego nauka układu SI jest niezbędna zarówno w szkołach, jak też na kursach doszkalających.

## Literatura cytowana w tekście

1. W. NUSSELT, *Termodynamika techniczna*, Bratnia Pomoc Pol. Śl., tłum. S. Ochęduszek, Gliwice 1948.
2. S. OCHĘDUSZKO, *Termodynamika stosowana*, WNT, 1964.
3. E. SCHMIDT, *Einführung in die technische Thermodynamik*, w. 8, Springer Verlag, 1960.
4. S. OCHĘDUSZKO, *Teoria maszyn cieplnych*, cz. I, II i III, PWT.
5. S. OCHĘDUSZKO, *Teoria maszyn cieplnych*, cz. III, 1955, równ. L, 83.
6. S. OCHĘDUSZKO, *Teoria maszyn cieplnych*, cz. I, w. 2, PWT, równ. XXX, 15c.
7. H. GÓRNIK, W. GUNDLACH, S. OCHĘDUSZKO, *Zastosowanie międzynarodowego układu jednostek miar w energetyce cieplnej*, PWN, 1965.

## Резюме

### ИЗМЕНЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ В МЕХАНИКЕ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМОЙ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

На фоне применяемых до сих пор формул и единиц так наз. технической (традиционной) системы, показаны выгоды международной системы единиц измерения СИ. Новая система основывается на шести основных единицах, двух дополнительных и 27 производных единицах (таблица 1). Главным ее достоинством является когерентность главных единиц, что дает возможность применения физических уравнений. Кроме того эта система универсальна в любой области знания.

Для облегчения технических расчетов, в 2 табл. приводятся физические величины, употребляемые в технике и термодинамике, с учетом трех когерентных систем единиц (СИ, Мк ГС, ЦГС).

Дальнейшие таблицы 4 и 5 содержат эквиваленты облегчающие вычисление числовых значений величин из области механических напряжений и энергии.

Автор выступил с некоторыми предложениями, касающимися названий номинальных единиц, применяемых в механике и в сопротивлении материалов.

В переходной период, перед окончательным введением системы в экономическую жизнь страны — следовало бы применять физические уравнения и традиционные единицы, основанные на эквиваленте единиц массы

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{m}} \text{ s}^2 = 1 \text{ инерт} = \mu \text{ kg} = 9,80665 \text{ kg}.$$

Единица инерт, когерентна с килопондом, составляющим главную единицу обсуждаемого множества.

## Summary

### CHANGES IN THE MECHANICS CAUSED BY THE INTERNATIONAL MEASURING UNITS SYSTEM

The advantages of the international measuring units system SI are shown on the basis of adapted equations, now in use, and of the so-called technical (traditional) units system. The new system consists of six basic units, two complementary units, and twenty seven derived units (Table 1). The main advantage of the system is the coherence of basic units. This enables to use the quantitative equations. Also, the new system is universal, i.e. it may be applied in any branch of science.

Table 2 presents the physical quantities, used in mechanics and thermodynamics, in three units systems (SI, MkPS, and CGS). This may help to carry out the technical computations.

Tables 4 and 5 contain the equivalents for calculating the numerical values of mechanical stresses and energy.

The author advances some suggestions concerning the names of nominal units used in mechanics and strength of materials.

The quantitative equations and traditional units based on the equivalent of mass units

$$1 \frac{\text{kp}}{\text{m}} \text{ s}^2 = 1 \text{ inert} = \mu \text{ kg} = 9.80665 \text{ kg}$$

should be used before the system SI is universally introduced in the country.

The unit inert and kilopond, the basic unit in the discussed system, are coherent.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1965 r.*

---

TEORIA STANU UPORZĄDKOWANEGO  
I MOŻLIWOŚCI JEJ ZASTOSOWANIA

WIESŁAW GOGÓŁ (WARSZAWA)

1. Oznaczenia

- $a$  dyfuzyjność cieplna,  
 $A_n$  stałe określone z warunku początkowego,  
 $b$  stosunek temperatur dwu dowolnych punktów ciała w stanie uporządkowanym,  
 $Bi = al/\lambda$  liczba Biota,  
 $c$  ciepło właściwe,  
 $C = c\varrho V$  pojemność cieplna,  
 $f_0(x, y, z)$  pole temperatury w chwili początkowej,  
 $F$  powierzchnia wewnętrzna termostatu,  
 $Fo = a\tau/l^2$  liczba Fouriera,  
 $H = (a/\lambda)(KS/V)$  zmodyfikowana liczba Biota,  
 $K$  współczynnik kształtu,  
 $l$  wymiar (wymiar określający ciało),  
 $m$  tempo chłodzenia,  
 $M = mK/a$  liczba podobieństwa,  
 $n$  liczba porządkowa; kierunek normalnej,  
 $P = l\sqrt{m/a}$  liczba podobieństwa,  
 $q$  tempo chłodzenia (pozorne),  
 $r$  promień,  
 $R$  promień walca lub kuli,  
 $S$  powierzchnia ciała,  
 $t$  temperatura,  
 $t_f$  temperatura ośrodka,  
 $t_0$  temperatura początkowa ciała (wyrównana),  
 $t_s$  temperatura powierzchni ciała,  
 $T_s$  temperatura bezwzględna powierzchni ciała,  
 $T_p$  temperatura bezwzględna powierzchni otaczających ciało ochładzane,  
 $U_n$  funkcje współrzędnych,  
 $V$  objętość ciała,  
 $x$  współrzędna liniowa,  
 $y$  współrzędna liniowa,  
 $z$  współrzędna liniowa,  
 $Z$  wysokość walca,  
 $\alpha$  współczynnik przejmowania ciepła,  
 $\alpha_k$  współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję,  
 $\alpha_r$  współczynnik przejmowania ciepła przez promieniowanie,  
 $\delta$  połowa grubości płyty,

$\varepsilon$	emisyjność
$\varepsilon$	błąd względny,
$\vartheta = t - t_f$	różnica temperatury dowolnego punktu ciała i temperatury ośrodka (temperatura odniesiona do temperatury ośrodka),
$\theta = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f}$	temperatura bezwymiarowa,
$\lambda$	przewodność cieplna,
$\mu_n$	pierwiastki równania charakterystycznego,
$\rho$	gęstość,
$\tau$	czas,
$\psi$	liczba podobieństwa charakteryzująca nierównomierność pola temperatury;
indeks $f$	wskazuje na wielkość odnoszącą się do ośrodka,
indeks $p$	wskazuje na wielkość odnoszącą się do powierzchni otaczających ciało badane,
indeks $s$	wskazuje na wielkość odnoszącą się do powierzchni ciała.

## 2. Wstęp

Teoria stanu uporządkowanego dotyczy zagadnienia ochładzania lub ogrzewania ciał stałych. Zagadnienie to, często występujące i ważne w technice oraz stanowiące istotną część teorii wymiany ciepła, w szczególności przewodzenia ciepła w stanie nieustalonym, było i jest przedmiotem intensywnych badań. Kierunki tych badań są rozmaite — ich podstawą są analityczne rozwiązania równania przewodzenia ciepła Fouriera dla ciał najprostszego kształtu [4, 43, 22], opisujące nieustalone pole temperatury. Jednakże trudności zarówno matematyczne jak i obliczeniowe, wynikające z konieczności posługiwania się zawiłymi zależnościami w przypadku bardziej skomplikowanych kształtów ciał lub warunków brzegowych, spowodowały próby zastosowania odmiennych i bardziej efektywnych metod, mianowicie metod przybliżonych [22, 53], metod opartych na specjalnych wykresach [54], metod analogowych [22, 53, 29] bądź też wreszcie dla określonych warunków brzegowych i przy rezygnacji ze znajomości wszystkich cech pola temperatury metod opartych na specjalnej teorii, na przykład teorii stanu uporządkowanego.

Przedmiotem badań teorii stanu uporządkowanego jest ochładzanie lub ogrzewanie ciał stałych w ciekłym lub gazowym ośrodku o stałej temperaturze i przy stałej wartości współczynnika przejmowania ciepła na powierzchni ciała. Prostym przypadkiem ochładzania ciała zajmował się już Izaak NEWTON.

Prace związane z tym zagadnieniem prowadzone były najpierw we Francji [3] i w Niemczech [19], jednakże teoria stanu uporządkowanego w dzisiejszym tego słowa znaczeniu została opracowana w latach 1928–1954 przez G. M. KONDRATJEWĄ i jego współpracowników, a wyniki tych prac zostały podane w podstawowej monografii «*Riegljarnyj tieplowoj rieżim*».

Kondratjew powiązał teorię stanu uporządkowanego z teorią podobieństwa, wprowadził szereg nowych pojęć, opracował kilka metod wyznaczania własności cieplnych ciał stałych i cieczy oraz zastosował tę teorię do innych zagadnień wymiany ciepła, wreszcie zebrał bardzo obfity materiał dotyczący techniki wykonywania doświadczeń. Późniejsze jego prace (1954–1959) w tej dziedzinie dotyczą głównie poszukiwania pewnych uniwer-



salnych związków między liczbami podobieństwa [11] oraz możliwości zastosowania tej teorii do ciał z wewnętrznymi źródłami ciepła [12].

Teoria stanu uporządkowanego znalazła cały szereg zastosowań w technice i przemyśle, przy czym w dalszym ciągu prowadzone były w tej dziedzinie liczne prace badawcze, zwłaszcza w ZSRR. Szerokie zastosowanie w różnych gałęziach techniki cieplnej i konieczność przedyskutowania pewnych podstawowych zagadnień tej teorii doprowadziła do zwołania w 1962 r. przez Akademię Nauk w Kijowie specjalnej konferencji, poświęconej tematyce stanu uporządkowanego.

Teoria stanu uporządkowanego stała się obecnie obszernym działem wymiany ciepła, lecz wiele problemów związanych z nią w zasadniczy sposób pozostaje nadal niewyjaśnionych.

Celem pracy jest podanie przeglądu badań w dziedzinie teorii stanu uporządkowanego wraz ze zwięzłym przedstawieniem podstaw tej teorii i omówieniem granic jej stosowności; jednocześnie podane zostaną możliwości zastosowania stanu uporządkowanego w zagadnieniach naukowych i technicznych wymiany ciepła.

### 3. Teoria stanu uporządkowanego

**3.1. Definicja stanu uporządkowanego.** Teoria stanu uporządkowanego oparta jest na rozwiązaniu równania przewodzenia ciepła Fouriera

$$(3.1) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t$$

dla ciała o stałych własnościach cieplnych, jednorodnego i izotropowego, przy warunku brzegowym

$$(3.2) \quad \lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s + a(\tau) [t_s(\tau) - t_f(\tau)] = 0,$$

jeśli temperatura ośrodka i współczynnik przyjmowania ciepła są stałe w czasie:

$$(3.3) \quad t_f(\tau) = \text{const}; \quad a(\tau) = \text{const}.$$

Współczynnik przyjmowania ciepła  $\alpha$  określony jest jako wartość średnia na powierzchni ciała [35]

$$(3.4) \quad \bar{\alpha} = \frac{\iint_S a(t_s - t_f) dS}{\iint_S (t_s - t_f) dS}.$$

Przy wyrównanej temperaturze  $t_0$  w chwili początkowej rozwiązanie równania (3.1) dla ciał prostego kształtu, jak na przykład dla płyty nieograniczonej, walca nieograniczonego lub kuli, można przedstawić w postaci

$$(3.5) \quad \theta = \frac{t - t_f}{t_0 - t_f} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}).$$

Należy podkreślić, że przy dowolnym innym warunku początkowym (dowolny rozkład temperatury) przedstawione rozważania nie ulegną istotnej zmianie [44]; również pozostaną one słuszne [3, 35, 44, 47] dla bardziej złożonych kształtów, chociaż ten problem będzie wymagał specjalnego omówienia.

W tablicy 1 podano [43, 47] wartości stałych  $A_n$ ,  $U_n$  i  $\mu_n$  dla trzech najprostszych kształtów.

Tablica 1. Funkcje  $A_n$ ,  $U_n$  i  $\mu_n$  dla różnych kształtów

Kształt ciała	$A_n$	$U_n$	$\mu_n = f(\text{Bi})$
Płyta nieograniczona	$\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n}$	$\cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right)$	$\text{ctg}\mu_n = \frac{1}{\text{Bi}} \mu_n$
Walec nieograniczony	$\frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]}$	$J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)$	$\frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} = \frac{1}{\text{Bi}} \mu_n$
Kula	$\frac{2(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n}$	$\frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n \frac{r}{R}}$	$\text{tg}\mu_n = \frac{1}{1 - \text{Bi}} \mu_n$

Szereg (3.5) jest zbieżny; uwzględniając zależność

$$(3.6) \quad \mu_n^2 \text{Fo} = \frac{\mu_n^2 a}{l^2} \tau = m_n \tau,$$

można wykazać dla dowolnego ciała [3; 35], że wykładniki  $m_n$  przedstawiają ciąg dodatnich wzrastających liczb

$$m_1 < m_2 < m_3 \dots$$

Zatem wpływ warunków początkowych na pole temperatury będzie zmniejszał się z upływem czasu i po pewnym okresie czasu (określanym zwykle w przybliżeniu jako  $\text{Fo} > 0,55$ ) suma wszystkich pozostałych wyrazów szeregu (3.5), poczynając od drugiego, stanie się bardzo mała w porównaniu z pierwszym wyrazem.

Temperatura w ciele będzie określona wtedy jednym (pierwszym) wyrazem szeregu

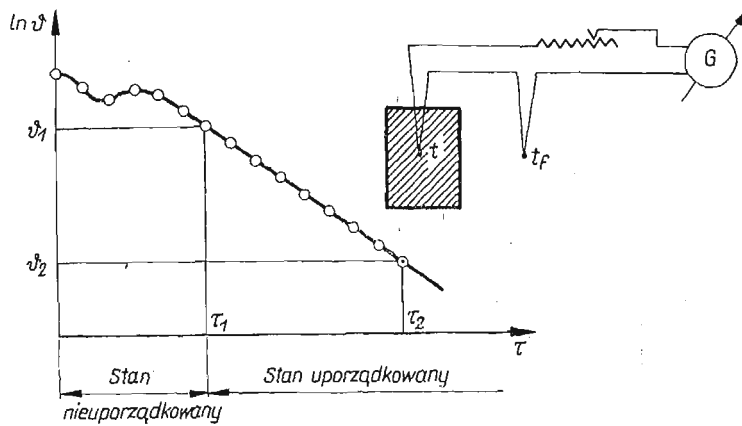
$$(3.7) \quad \vartheta = AU \exp(-m\tau).$$

Proces ochładzania (lub ogrzewania) ciała ze stadium nieuporządkowanego (wpływ warunków początkowych) przechodzi w stan uporządkowany (rys. 1), charakteryzujący się prostą zależnością wykładniczą dla wszystkich punktów ciała; podstawową wielkością określającą stan uporządkowany jest tempo chłodzenia

$$(3.8) \quad m = - \frac{\partial\vartheta/\partial\tau}{\vartheta}.$$

Wartość  $m$  można łatwo wyznaczyć doświadczalnie z wykresu  $\ln \vartheta = f(\tau)$  umieszczając w ciele badanym termoelement i odczytując wskazania galwanometru oraz sekundomierza w czasie ochładzania ciała (rys. 1)

$$(3.9) \quad m = \frac{\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2}{\tau_2 - \tau_1}$$



Rys. 1. Zmiany temperatury w czasie ochładzania ciała

Tempo chłodzenia jest takie samo dla wszystkich punktów ciała, nie zależy ono bowiem od współrzędnych

$$(3.10) \quad m = f(\lambda, a, l, K, a).$$

3.2. Podstawowe zależności teorii stanu uporządkowanego. Tempo chłodzenia  $m$  można rozpatrywać jako reakcję ciała na działanie cieplne ośrodka, charakteryzujące się wartością współczynnika przejmowania ciepła  $a$  na powierzchni  $S$  o określonych rozmiarach i kształcie. Istotna cecha zależności między reakcją ciała i działaniem ośrodka polega na istnieniu granicznej (asymptotycznej) wartości reakcji przy nieograniczonym wzroście działania ośrodka [17, 36]. Zależność tę dla określonego ciała można przedstawić następująco [35]

$$(3.11) \quad m = a\psi \frac{S}{C}.$$

Liczba podobieństwa  $\psi$  charakteryzuje nierównomierność pola temperatury w ciele i przedstawia stosunek średniej temperatury powierzchni ciała do średniej temperatury ciała [35]

$$(3.12) \quad \psi = \frac{\int_S \vartheta_S dS}{\int_V \vartheta dV} \frac{V}{S}.$$

Zależność (3.11) odnosi się do przypadku ciała o jednoznacznie określonym kształcie, wymiarach i własnościach cieplnych ( $a, \lambda, C$ ); zależność tę przedstawiono na rys. 2.

Jeśli współczynnik  $\alpha$  wzrasta nieograniczenie, to tempo chłodzenia osiąga skończoną wartość określoną wzorem

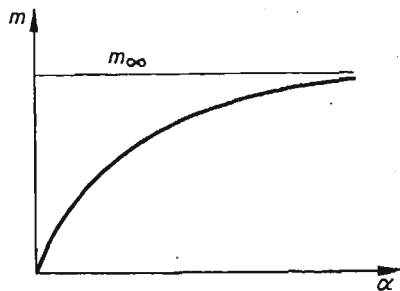
$$(3.13) \quad m_{\infty} = \frac{a}{K}.$$

Współczynnik kształtu  $K$  może być obliczony teoretycznie; na przykład dla najprostszych kształtów z równania (3.6) i rozwiązania odpowiedniego równania charakterystycznego podanego w tabelcy 1 przy  $Bi = \infty$ . Wartości współczynnika  $K$  dla kilku najczęściej występujących form geometrycznych podano w tabelcy 2. W przypadku konieczności określenia współczynnika  $K$  ciała o skomplikowanym kształcie, można go obliczyć z równania (3.13) mierząc doświadczalnie tempo chłodzenia  $m_{\infty}$  odpowiedniego modelu [35], wykonanego z materiału o znanych własnościach cieplnych (na przykład wosku).

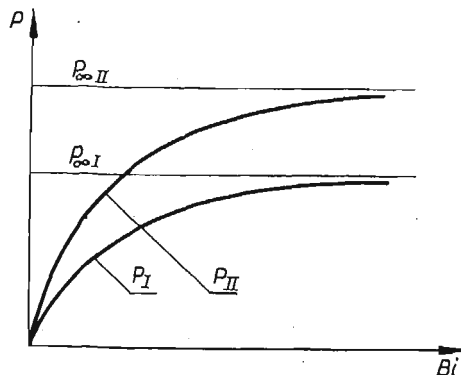
Tabela 2. Współczynnik kształtu  $K$  różnych ciał

Kształt ciała	Płyta nieograniczona	Walec nieograniczony	Kula	Prostopadłościan o krawędziach $2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3$	Walec o długości $Z$
$K [m^2]$	$\left(\frac{2\delta}{\pi}\right)^2$	$\left(\frac{R}{2,4048}\right)^2$	$\left(\frac{R}{\pi}\right)^2$	$\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2}\right]}$	$\frac{1}{\left(\frac{2,4048}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2}$

W celu otrzymania bardziej ogólnej zależności od podanej równaniem (3.11) można zgrupować odpowiednie wielkości tak, aby reakcja ciała i działanie ośrodka przedstawiały



Rys. 2. Zależność  $m = f(\alpha)$



Rys. 3. Zależność  $P = f(Bi)$  dla ciał I i II o różnych kształtach

pewne liczby podobieństwa. Jeżeli działanie ośrodka charakteryzować będzie liczba Biota,  $Bi = a/l/\lambda$ , a reakcję ciała liczba [35],  $P = l\sqrt{m/a}$ , to zależność (rys. 3)

$$(3.14) \quad l\sqrt{m/a} = \varphi(al/\lambda)$$

jest słuszna dla wszystkich ciał o tym samym kształcie (lecz ich wymiary i własności cieplne mogą być różne). Postać funkcji  $\varphi$  jest określona tylko dla danego kształtu; na przykład dla walca nieograniczonego jest ona następująca

$$(3.15) \quad \text{Bi} = PJ_1(P)/J_0(P).$$

Analitycznie równanie (3.14) udało się ustalić tylko dla niewielu konkretnych przypadków względnie prostych kształtów.

Próby odnalezienia ogólnego związku między działaniem ośrodka a reakcją ciała obowiązującego dla wszystkich kształtów były podejmowane przez KONDRATIEWA [35]; DULNIEW i KONDRATIEW [11] podali taki uniwersalny związek w postaci

$$(3.16) \quad M = \psi \cdot H,$$

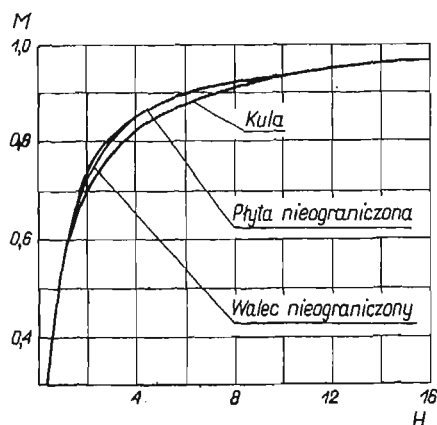
gdzie

$$(3.17) \quad M = m/m_\infty \Leftarrow mK/a,$$

a zmodyfikowana liczba Biota

$$(3.18) \quad H = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{KS}{V}.$$

Związek (3.16) nie jest zupełnie ścisły we wszystkich zakresach liczby  $M$  mogącej przybierać wartości od 0 do 1; krzywe  $M = f(H)$  dla rozmaitych kształtów leżą jednak



Rys. 4. Wykres uniwersalnej zależności  $M = f(H)$  dla ogrzewania lub ochładzania ciała w stanie uporządkowanym

tak blisko siebie (rys. 4), że możliwe jest zastąpienie z dużą dokładnością całej rodziny krzywych jedną uśrednioną krzywą; równanie tej uniwersalnej krzywej podał JARYSZEW [36]

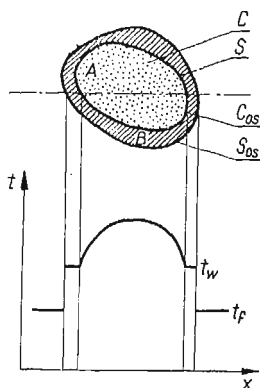
$$(3.19) \quad M = \frac{H}{\sqrt{H^2 + 1,437H + 1}}.$$

Zależność  $M = \psi H$  podana jest również w specjalnych tablicach [11, 36].

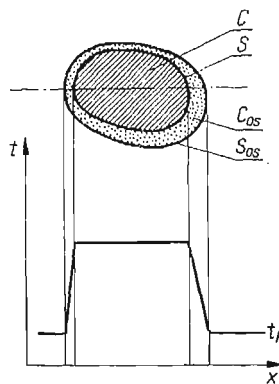
Z podstawowego równania (3.7) wynika jeszcze jedna charakterystyczna własność pola temperatury w stanie uporządkowanym, mianowicie stosunek temperatur dwu dowolnych punktów ciała  $A$  i  $B$  ma stałą wartość  $b$  niezależną od czasu

$$(3.20) \quad \frac{\vartheta_A}{\vartheta_B} = b \neq f(\tau), \quad 0 \leq b \leq 1.$$

Powyższe rozważania odnosiły się do pojedynczego ciała; jednakże mogą one być również częściowo zastosowane [35, 36] i do układu kilku ciał stykających się ze sobą (ciało wieloskładnikowe). Szczególnie ważne zastosowanie ma układ dwu ciał, z których jedno całkowicie otacza drugie (rys. 5, 6 i 7), przy czym ich własności cieplne są krańcowo różne. Przykładem takiego układu może być rdzeń metalowy o wyrównanej temperaturze otoczony osłoną z izolatora cieplnego, rdzeń z izolatora w osłonie metalowej albo ciało wydrążone.



Rys. 5. Układ dwu ciał:  $A$  – rdzeń (izolator),  $B$  – osłona (metal);  $C_{os}$  – pojemność cieplna osłony,  $S_{os}$  – powierzchnia zewnętrzna osłony



Rys. 6. Pole temperatury w układzie rdzeń metalowy – osłona z izolatora w przypadku  $\alpha \rightarrow \infty$

Rozkład temperatury w układzie składającym się z izolatora cieplnego (na przykład ciało porowate, włókniste lub proszek) w osłonie metalowej pokazano na rys. 5. Stan uporządkowany takiego układu opisywany jest zależnością [36]

$$(3.21) \quad \frac{m}{\alpha S} \left( \frac{C}{\psi} + C_{os} \right) = 1,$$

lub [14]

$$(3.22) \quad M = \frac{Km}{\lambda} \frac{\psi S}{V} \left( \frac{\alpha}{m} - \frac{C_{os}}{S} \right).$$

Stan uporządkowany układu złożonego z rdzenia metalowego w cienkiej osłonie z izolatora opisany jest zależnością [35, 14]

$$(3.23) \quad m \frac{C}{S} \left( \frac{1}{\alpha} + \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right) = 1.$$

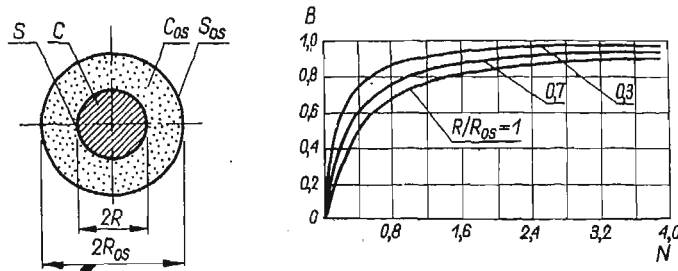
W ogólnym przypadku izolator może składać się z kilku warstw, których grubości i przewodności oznaczono odpowiednio  $\delta_i$  i  $\lambda_i$ . Powyższa zależność została ustalona przy założeniach, z których najistotniejsze są [35, 36]:

grubość osłony izolatora jest mała w porównaniu z wymiarami rdzenia,

gradienty temperatury w rdzeniu metalowym są bardzo małe w porównaniu z gradientami temperatury w osłonie, to znaczy  $\psi \simeq 1$  (rys. 6),

pojemność cieplna osłony jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z pojemnością rdzenia ( $C \gg C_{os} \simeq 0$ ).

Przedmiotem szczególnych badań był stan uporządkowany układu składającego się z rdzenia metalowego i osłony z izolatora o stosunkowo dużej pojemności cieplnej (tak zwany bikalorymetr), przy czym rozpatrywane były kształty proste (płyta, kula) przy



Rys. 7. Bikalorymetr kulisty i zależność  $B = f(N, R/R_{os})$  przy  $a \rightarrow \infty$

stałej grubości warstwy izolacyjnej [14, 35, 36]. Opis matematyczny ochładzania lub ogrzewania takiego układu znacznie się upraszcza w przypadku, gdy temperatura powierzchni zewnętrznej izolatora jest równa temperaturze otaczającego ośrodka  $t_f$ , co odpowiada warunkowi  $a \rightarrow \infty$ .

Stan uporządkowany bikalorymetru kulistego (rys. 7) może być wtedy przedstawiony przy użyciu liczb [36, 14]

$$(3.24) \quad B = \frac{R}{R_{os}} \frac{C}{S} \frac{\delta_{os}}{\lambda_{os}} m,$$

oraz

$$(3.25) \quad N = \frac{1 + (R/R_{os}) + (R/R_{os})^2}{3R/R_{os}} \frac{C}{C_{os}}.$$

Związek między liczbami  $B$  i  $N$  podano w postaci wykresu na rys. 7.

Dotychczasowe rozważania odnosiły się do ciał lub układów ciał pozbawionych wewnętrznych źródeł ciepła. Próby rozszerzenia zakresu teorii stanu uporządkowanego również i dla ciał z wewnętrznymi źródłami ciepła były przeprowadzone przez DULNIEWA i KONDRATIEWA [14, 12]; uogólnienie teorii było oparte na założeniu stałości w czasie mocy źródeł lub upustów, niezmienności własności cieplnych z temperaturą oraz zachowania warunków (3.3).

**3.3. Warunki brzegowe.** Podstawowe zależności teorii stanu uporządkowanego pozostają słuszne przy ścisłym zachowaniu warunków brzegowych (3.3).

W rzeczywistości temperatura ośrodka  $t_f$  i współczynnik przejmowania ciepła  $a$  będą zawsze — choćby nawet nieznacznie — zmieniały się z czasem  $\tau$ ; odstępstwa od ścisłego

zachowania warunków (3.3) występują nie tylko w technicznych zagadnieniach w przemyśle, ale często są nie do uniknięcia również w warunkach laboratoryjnych w specjalnych układach służących do doświadczeń w stanie uporządkowanym (na przykład termostaty do badania własności cieplnych ciał).

Zmienność temperatury ośrodka i współczynnika  $\alpha$  może wywołać pewien błąd w określaniu tempa chłodzenia  $m$  i w związku z tym powstaje konieczność ustalania kryterium dopuszczalnych odchyłeń od warunków brzegowych (3.3) lub oceny wpływu ich zmienności.

Należy zaznaczyć, że tempo chłodzenia jest wyznaczane doświadczalnie zwykle z dokładnością 2–4% przy pojedynczym pomiarze [36], natomiast przy bardziej starannych pomiarach można osiągnąć dokładność rzędu 0,5–1,0% [17].

*Wpływ zmienności temperatury ośrodka.* G. KONDRATIEW uważał za dopuszczalne w doświadczeniach w stanie uporządkowanym zmiany temperatury w granicach 0,1–0,2°C [17]; takie wahania temperatury nie miały powodować dostrzegalnego wpływu na wartość tempa chłodzenia. Szczegółowe badania doświadczalne przeprowadzone przez M. KAZAŃSKIEGO i M. WIENIEDIKTOWĄ [27, 28] w specjalnym termostacie o temperaturze regulowanej z dokładnością do 0,006°C wykazały przy ochładzaniu kalorymetrów, że wahania temperatury w zakresie 0,1–0,2°C mogą spowodować błąd w określaniu tempa chłodzenia, dochodzący nawet do kilkunastu procent. KAZAŃSKI ustalił również empiryczny wzór uwzględniający wpływ zmienności temperatury  $t_f$  na wartość tempa chłodzenia.

Ośrodek może zmieniać swoją temperaturę na skutek dopływu ciepła z otoczenia, istnienia ewentualnych źródeł ciepła w ośrodku (na przykład miesadło) i wreszcie doprowadzania ciepła od ciała ochładzanego do ośrodka. Teoretyczne przewidywanie ilości ciepła przenikającego z otoczenia lub wydzielanego w ośrodku jest możliwe tylko w konkretnych przypadkach; natomiast zmiana temperatury ośrodka wywołana tylko przejściem ciepła od ciała badanego należy do samej istoty wymiany ciepła w stanie uporządkowanym. Zagadnienie to badał teoretycznie W. GOGÓŁ rozpatrując ciało ochładzane i ośrodek jako izolowany układ składający się z dwu wzajemnie oddziaływujących na siebie części [17]. Przy założeniu, że ośrodek płynny jest dobrze mieszany, rzeczywiste tempo chłodzenia  $q$  (uwzględniające zmienność temperatury  $t_f$ ) jest większe od tempa chłodzenia  $m$ , jakie miałyby miejsce przy ścisłym spełnieniu warunku  $t_f = \text{const}$ . Zależność między tymi wielkościami jest liniowa

$$(3.26) \quad q = m(1 + C/C_f),$$

gdzie  $C_f$  oznacza pojemność cieplną ośrodka.

Powyzsza zależność jest ścisła w odniesieniu do metali, natomiast dla izolatorów ma charakter przybliżony; budowa wzoru (3.26) potwierdza empiryczne zależności otrzymane przez M. KAZAŃSKIEGO [27].

*Wpływ zmienności współczynnika przejmowania ciepła.* Współczynnik  $\alpha$  można uważać za prawie stały w czasie w przypadku ochładzania ciała w warunkach konwekcji wymuszonej (zmieniają się tylko parametry fizyczne płynu w warstwie granicznej), natomiast założenie niezmienności  $\alpha$  może nasuwać poważne zastrzeżenia w przypadku konwekcji swobodnej, ponieważ powinna istnieć wtedy wyraźna zależność między współczynnikiem przejmowania ciepła, a zmieniającą się w czasie różnicą temperatur  $\vartheta_s$  powierzchni ciała

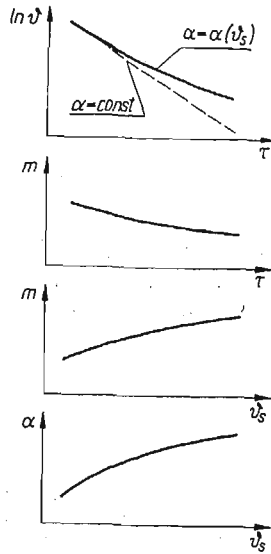


i ośrodka. Wysłunięta przez KONDRATIEWA hipoteza [35], wyjaśniająca stałość współczynnika  $\alpha$  przy konwekcji swobodnej odmienniecia zjawisk fizycznych w warstwie granicznej w stanie ustalonym i nieustalonym, nie została uzasadniona ani teoretycznie, ani potwierdzona doświadczalnie i została później wycofana przez samego autora [36, 17].

Przy zmienności współczynnika  $\alpha$  wykres  $\ln \vartheta = f(\tau)$  przestaje być linią prostą (rys. 8), a tempo chłodzenia będzie zmieniać się, przy czym jego chwilowa wartość może być obliczona ze wzoru [36]

$$(3.27) \quad m = \frac{d}{d\tau} (\ln \vartheta).$$

Wzór powyższy jest ścisły dla ciał metalowych, natomiast dla izolatorów, z punktu widzenia teoretycznego, jest przybliżony [17].



Rys. 8. Zmiany temperatury ciała w przypadku ochładzania w warunkach konwekcji swobodnej i sposób obliczania za pomocą kolejnych wykresów zależności współczynnika  $\alpha$  od różnicy temperatur  $\vartheta_s$  między powierzchnią ciała i ośrodkiem

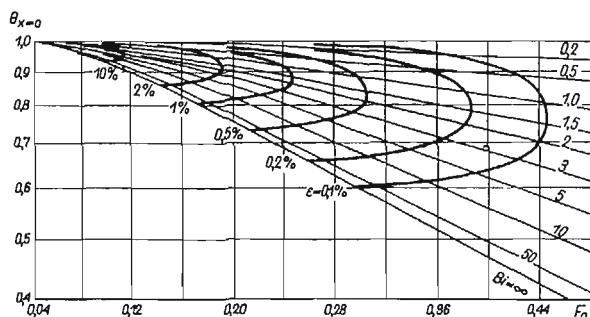
Wykres  $\ln \vartheta = f(\tau)$  może stanowić podstawę eksperymentalnej metody wyznaczania zależności współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha$  od różnicy temperatur  $\vartheta_s$  w warunkach konwekcji swobodnej [36, 16, 57]. Obliczanie zależności  $\alpha = f(\vartheta_s)$  może być dokonane za pomocą kolejnych wykresów jak na rys. 8 i wykorzystaniu zależności (3.11) przy  $\psi = 1$  (ciało ochładzane, wykonane z metalu).

Wszystkie obliczenia i pomiary w stanie uporządkowanym odnoszą się do średniej wartości  $\alpha$  na powierzchni ciała. Wydaje się, że brak jest kryterium stosowalności wzoru (3.4) w stanie uporządkowanym w przypadku silnej zależności  $\alpha$  od współrzędnych punktów na powierzchni ciała.

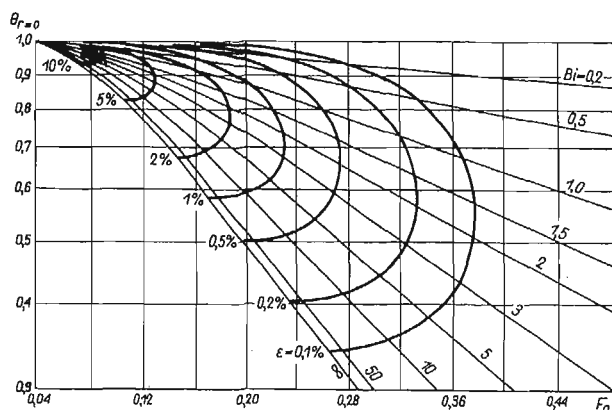
**3.4. Wejście ciała w stan uporządkowany.** Pole temperatury w stanie uporządkowanym opisane jest pierwszym wyrazem szeregu Fouriera (3.7) tylko z pewnym przybliżeniem, ponieważ suma wszystkich pozostałych wyrazów szeregu — chociaż szybko zmniejszająca

się z upływem czasu — zawsze będzie miała określoną wartość. Okres czasu od początku ochładzania ciała do chwili wejścia ciała w stan uznany przez obserwatora za uporządkowany określony jest zwykle wartością liczby Fouriera i zależy przede wszystkim od dopuszczalnego błędu obliczeń lub pomiarów. W wielu przypadkach jednak stan uporządkowany rozpatrywany jest przy tak dużych liczbach Fouriera, że zagadnienie dopuszczalnego błędu przestaje być istotne.

Wejście ciała w stan uporządkowany zależy od wielu czynników jak na przykład kształtu ciała, działania ośrodka i początkowego rozkładu temperatury.



Rys. 9. Zależność początku stanu uporządkowanego (wykładniczej zmiany temperatury) w płaszczyźnie symetrii płyty nieograniczonej od temperatury bezwymiarowej, liczb podobieństwa  $Fo$  i  $Bi$  oraz dopuszczalnego błędu  $\varepsilon$  [41]



Rys. 10. Zależność początku stanu uporządkowanego (wykładniczej zmiany temperatury) w osi walca nieograniczonego od temperatury bezwymiarowej, liczb podobieństwa  $Fo$  i  $Bi$  oraz dopuszczalnego błędu  $\varepsilon$  [41]

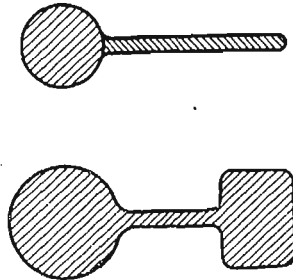
Początek wykładniczej zależności temperatury od czasu dla środka płyty nieograniczonej i środka walca nieograniczonego w zależności od liczb  $Fo$ ,  $Bi$ , temperatury bezwymiarowej i dopuszczalnego błędu  $\varepsilon$  może być przedstawiony na specjalnych wykresach (rys. 9 i 10), opracowanych przez D. BUDRINA i E. SUCHANOWA [44].

Należy tu podkreślić, że początek wykładniczej zależności zmian temperatury nie występuje równocześnie we wszystkich punktach lub obszarach ciała, lecz zwykle następuje

kolejno. Przez wejście ciała w stan uporządkowany należałoby rozumieć chwilę, gdy we wszystkich punktach wystąpi ta sama wartość tempa chłodzenia  $m$ .

W przypadku ochładzania ciała w warunkach konwekcji swobodnej — ze względu na zmianę w czasie współczynnika  $\alpha$  — będzie występował dla złych przewodników ciepła, ściśle mówiąc, stan tylko znacznie zbliżony do stanu uporządkowanego; pole temperatury będzie wykazywało pewne opóźnienie w stosunku do zmian współczynnika przejmowania ciepła [17]. Dla ciał metalowych natomiast, które «reagują» prawie natychmiast na zmiany  $\alpha$  wzór (3.27) można uważać za zupełnie poprawny. Zagadnienie to nie jest dotychczas całkowicie opracowane i ma ono znaczenie tylko przy dokładnych pomiarach.

Wpływ kształtu ciała na wejście w stan uporządkowany posiada natomiast zasadnicze znaczenie i problem ten często nastęrcza duże trudności. KONDRATIEW zwrócił uwagę [36, 57] na takie kształty ciał lub układy ciał (rys. 11), które przez bardzo długi okres czasu nie wchodzi w całości w stan uporządkowany, chociaż stan ten może być przy tym obserwowany w oddzielnych częściach ciała, związanych ze sobą niewielkimi przekrojami; przykładem takiego ciała może być rura z żebrami pierścieniowymi i inne typy radiatorów. KONDRATIEW nie podał kryterium pozwalającego ocenić możliwość wystąpienia stanu uporządkowanego w ciałach o dowolnym kształcie; jednocześnie w swoich doświadczeniach używał ciał lub układów o kształcie dość złożonym [35, 11].



Rys. 11. Przykłady ciał lub układów, które praktycznie nie wejdą w stan uporządkowany; ich części ochładzają się prawie niezależnie od siebie

Zagadnienie występowania stanu uporządkowanego w ciałach o kształcie złożonym stało się punktem wyjścia do interesujących badań doświadczalnych i teoretycznych G. TRIETIACZENKI i L. KRAWCZUKA [59, 60, 62], którzy zwrócili uwagę na brak pełnego opracowania pewnych podstawowych problemów stanu uporządkowanego, związanych z wpływem funkcji  $U_n$  oraz stałych [58]

$$(3.28) \quad A_n = \frac{\int_V f_0(x, y, z) U_n dV}{\int_V U_n^2 dV}$$

na wartości poszczególnych wyrazów szeregu stanowiącego rozwiązanie równania przewodzenia ciepła Fouriera.

TRIETIACZENKO przeprowadził doświadczenia z wyznaczaniem tempa chłodzenia w różnych punktach klina (kształt ten ma znaczenie przy badaniu łopatek turbin), przy czym

wartości tempa chłodzenia okazały się różne [59]; obliczenia na drodze teoretycznej oraz badania na hydraulicznym analogu ŁUKJANOWA [59, 60, 43] potwierdziły to spostrzeżenie.

TRIETIACZENKO wysunął tezę, że w czasie ochładzania ciała o złożonym kształcie istnieje taki okres [po ustaniu wpływu oddziaływania początkowego rozkładu temperatury  $f_0(x, y, z)$  a przed wystąpieniem właściwego stanu uporządkowanego], w którym w poszczególnych punktach lub obszarach ciała mogą występować wykładnicze zmiany temperatury, lecz wartości tych wykładników (mierzone jako tempa chłodzenia) mogą być funkcją współrzędnych. Jest to spowodowane tym, że dla ciał o złożonym kształcie wyrazem określającym (o największej wartości) przez długi okres czasu nie jest pierwszy wyraz szeregu stanowiącego rozwiązanie równania Fouriera, ale dalszy (na przykład czwarty) wyraz lub grupa wyrazów; zależy to od wartości wyrażenia  $A_n U_n$  dla danego kształtu. W tym stadium ochładzania ciała cały szereg podstawowych zależności stanu uporządkowanego, a zwłaszcza (3.20) i (3.16), przestaje obowiązywać, a wnioskowanie o wejściu ciała w stan uporządkowany na podstawie stałości tempa chłodzenia w jednym punkcie jest niesłuszne. Właściwy stan uporządkowany może rozpocząć się dla ciała o złożonym kształcie przy tak małej różnicy temperatur  $\vartheta$ , że nie ma on już praktycznego znaczenia.

Tezy Trietiaczki wywołały liczne kontrowersje [48, 58] i stały się głównym tematem, dyskusji wspomnianej już konferencji, poświęconej teorii stanu uporządkowanego [58]

Poruszone przez TRIETIACZENKĘ zagadnienia pozwoliły uściślić pojęcie stanu uporządkowanego do okresu, gdy:

we wszystkich punktach ciała występuje *ta sama* wartość tempa chłodzenia, temperatura  $\vartheta$  we wszystkich punktach ciała ma ten sam znak [58].

Jednakże problem wejścia ciała o złożonym kształcie w stan uporządkowany nie jest dotychczas całkowicie rozwiązany; prace nad tym prowadzone były przez W. KOCZUROWĄ i N. JARYSZEWA [58]. Wpływ funkcji  $U_n$  na wejście ciała w stan uporządkowany badał P. CZERPAKOW [8], według którego następuje to przy wartości liczby  $Fo$  proporcjonalnej do wyrażenia  $A_1^2 U_1^2$ .

Również pole temperatury  $f_0(x, y, z)$  w chwili początkowej może mieć wpływ na czas wejścia w stan uporządkowany. Stan ten może długo nie występować lub nie wystąpić w ogóle nawet w ciałach o kształcie prostym (na przykład w płycie), jeśli początkowy rozkład temperatury  $f_0(x, y, z)$  opisywany jest funkcją  $U_2$  (tablica 1). Na odwrót, stan uporządkowany może wystąpić prawie natychmiast po rozpoczęciu ochładzania ciała nawet o bardzo złożonym kształcie, jeśli początkowy rozkład temperatury jest podobny do funkcji  $U_1$  [47, 58].

Nieuwzględnienie poruszonych powyżej zagadnień — zresztą nieopracowanych dotychczas w sposób zadawalający — może prowadzić w pewnych przypadkach do poważnych błędów przy posługiwaniu się teorią stanu uporządkowanego.

#### 4. Zastosowanie teorii stanu uporządkowanego

**4.1. Wyznaczanie własności cieplnych.** Teorię stanu uporządkowanego zastosowano początkowo do wyznaczania własności cieplnych ciał i właśnie w tym kierunku były prowadzone pierwsze prace Kondratiewa [32, 35]. Obecnie istnieje wiele metod wyznaczania własności

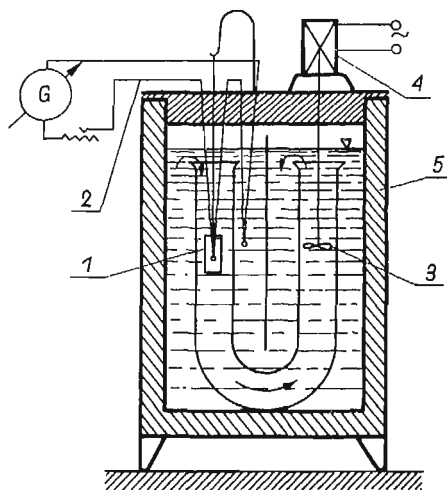
cieplnych, opartych na stanie uporządkowanym; za ich pomocą można mierzyć przewodność cieplną  $\lambda$ , dyfuzyjność cieplną  $a$  i ciepło właściwe  $c$  różnorodnych ciał stałych (metali, izolatorów, ciał sproszkowanych i włóknistych), a częściowo także cieczy i gazów.

Własności cieplne mogą być — zależnie od metody — wyznaczone oddzielnie albo zespołowo; w tym ostatnim przypadku z dwu pomiarów wykonanych w różnych warunkach cieplnych na tej samej próbce materiału wyznacza się dwie własności (na przykład  $a$  i  $\lambda$ ), a trzecią oblicza się ze związku  $\lambda = ac\rho$  (określenie gęstości  $\rho$  na ogół nie przedstawia trudności).

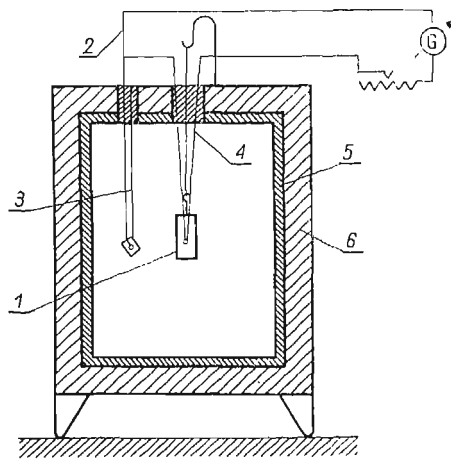
Wielkościami mierzonymi w doświadczeniach jest tylko tempo chłodzenia i wymiary próbki. Cechowanie termoelementów w większości przypadków nie jest konieczne. Główną trudnością jest zachowanie odpowiedniej stałości warunków brzegowych.

Bibliografia dotycząca tego zagadnienia jest bardzo obszerna [35, 36, 50, 55, 9, 2]; poniżej podano tylko krótki przegląd metod pomiarowych opartych na teorii stanu uporządkowanego.

*Metoda kalorymetru — a.* W metodzie tej można wyznaczyć dyfuzyjność cieplną  $a$  próbki ze wzoru (3.13), mierząc tempo chłodzenia  $m_\infty$  w warunkach intensywnego ochładzania; współczynnik kształtu  $K$  może być obliczony z wymiarów próbki (tablica 2) albo wyznaczony eksperymentalnie.



Rys. 12. Schemat termostatu wodnego:  
1 — ciało badane, 2 — termoelement do mierzenia tempa chłodzenia, 3 — mieszadło, 4 — silnik, 5 — izolacja cieplna



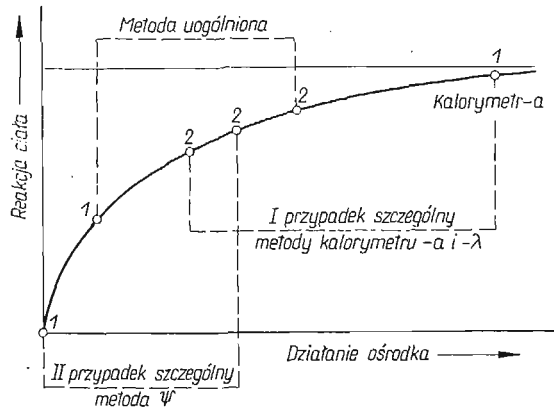
Rys. 13. Schemat termostatu powietrznego:  
1 — ciało badane, 2 — termoelement do mierzenia tempa chłodzenia, 3 — pręt z małym ekranem chroniącym wolny koniec termoelementu 2 od promieniowania, 4 — warstwa gąbki tłumiącej ewentualne wahaniami ciała, 5 — zbiornik spawany z alupolu, 6 — izolacja cieplna

Pomiar powinien być przeprowadzony przy bardzo dużej wartości współczynnika przejmowania ciepła, na przykład  $Bi > 100$  [35] albo  $a > 25\lambda V/KS$  [14]. Używane są termostaty wypełnione wodą z lodem, wodą silnie mieszaną (rys. 12) lub płynnym metalem. Próbkę badaną mają najczęściej kształt walców, prostopadłościanów lub kul o wymiarze charakterystycznym  $l \approx 1,5-3$  cm. W ten sposób można wyznaczać dyfuzyjność cieplną

izolatorów cieplnych; osiągnięcie dostatecznie dużych liczb Biota dla metali nie jest możliwe.

*Metoda kalorymetru* —  $\lambda$ . Jeżeli dyfuzyjność cieplna materiału została już uprzednio wyznaczona, to ochładzając badaną próbkę przy niewielkich wartościach współczynnika przejmowania ciepła można wyznaczyć przewodność cieplną, opierając się na wzorach (3.14) lub (3.16) i (3.18). Ciało ochładzane jest w powietrzu w warunkach konwekcji swobodnej (rys. 13) lub wymuszonej.

Wartość współczynnika  $a$ , której znajomość jest tu konieczna, określana jest w oparciu o te same wzory lub wzór (3.11) przez osobny pomiar tempa chłodzenia ciała (kalorymetru —  $a$ , zwykle wykonanego z metalu) o znanych własnościach cieplnych i tych samych wymiarach, kształcie i stanie powierzchni zewnętrznej, co ciało badane. Metodą kalory-



Rys. 14. Graficzne przedstawienie warunków przeprowadzania doświadczeń w zespolonych metodach opartych na stanie uporządkowanym

metru —  $\lambda$  można również przeprowadzać pomiary przewodności cieplnej materiałów sproszkowanych, uwzględniając we wzorach obliczeniowych wpływ osłony metalowej [32, 35, 50, 55].

*Metoda uogólniona* (metoda 2a, metoda 2Bi). Metody kalorymetru —  $a$  i —  $\lambda$  mogą być zastosowane tylko do dobrych izolatorów cieplnych ze względu na konieczność przeprowadzenia jednego z pomiarów przy  $Bi = \infty$ . W metodzie uogólnionej [15, 17, 18, 36, 61] przeprowadzane są również dwa pomiary (1 i 2), ale przy dowolnych liczbach Biota. W każdym z doświadczeń mierzone są wartości tempa chłodzenia  $m_1$  i  $m_2$  (i ewentualnie wymiary charakterystyczne ciała  $l_1$  i  $l_2$ ) oraz wyznaczane kalorymetrem —  $a$  odpowiednie wartości współczynników przejmowania ciepła  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ; własności cieplne otrzymuje się rozwiązując układ dwu równań (3.14) albo (3.16) [15, 17, 18].

Metoda ta najbardziej nadaje się do wyznaczania własności ciał o przewodności cieplnej w granicach 0,3–10 kcal/mh°C.

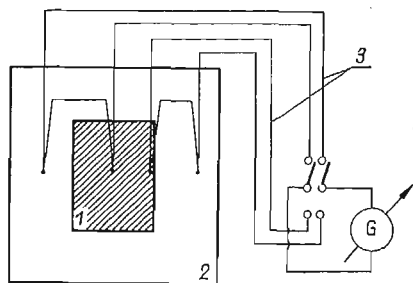
Metody kalorymetru —  $a$  i —  $\lambda$  są więc szczególnym przypadkiem granicznym metody uogólnionej (rys. 14).

*Metoda  $\psi$* , stanowiąca drugi przypadek graniczny, może mieć zastosowanie do wyznaczania własności cieplnych metali ( $\lambda > 10$  kcal/mh°C). Podstawą tej metody jest możliwość

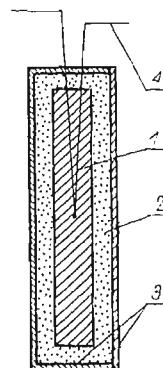
zrealizowania warunku  $\psi_1 = 1$  przy ochładzaniu metalu w powietrzu w warunkach konwekcji swobodnej [17].

*Mikrokalorymetr* służy do wyznaczania ciepła właściwego izolatorów cieplnych (zwykle proszków). Wymiary ciała badanego są małe. Ochładzanie przeprowadza się w powietrzu w warunkach konwekcji swobodnej i porównuje z ochładzaniem wzorcowego ciała o tych samych wymiarach i kształcie. Dyfuzyjność cieplna nie musi być uprzednio wyznaczona, wystarczy w przybliżeniu oszacować wartość  $a$  [35, 9, 55].

*Metoda 2 punktów* może być zastosowana do wyznaczania dyfuzyjności cieplnej dobrych przewodników ciepła (materiałów ceramicznych i metali); metoda oparta jest na równaniu (3.20). Schemat urządzenia pokazano na rys. 15. Z określonego w doświadczeniu tempa chłodzenia  $m$  i stosunku  $b$  temperatur w dwu punktach można obliczyć wartość  $a$ . Badane ciała mają prosty kształt. Pomiary przeprowadzane są w powietrzu w warunkach konwekcji swobodnej lub wymuszonej [35, 31].



Rys. 15. Schemat urządzenia do wyznaczania dyfuzyjności cieplnej metodą 2 punktów;  
1 – ciało badane, 2 – termostat, 3 – termoelementy różnicowe



Rys. 16. Schemat bikalorymetru płaskiego;  
1 – rdzeń metalowy, 2 – ciało badane, 3 – korpus zewnętrzny, 4 – termoelement

RAUSZ badał tą metodą własności materiałów ceramicznych w piecach silitowych do temperatury 1200°C [35, 47]; dyfuzyjność cieplna metali w wysokich temperaturach może być wyznaczana przez ochładzanie ich w roztopionych solach [47].

*Bikalorymetr* jest używany do wyznaczania przewodności cieplnej stałych materiałów izolacyjnych, cieczy i gazów. W metodzie tej mierzone jest tempo chłodzenia układu składającego się z rdzenia metalowego i osłony izolacyjnej, utworzonej z badanego materiału (rys. 7). Wzory obliczeniowe oparte są na zależnościach analogicznych do równań (3.24) i (3.25). Ochładzanie przeprowadzane jest najczęściej w warunkach  $a \rightarrow \infty$  [36, 55, 9], chociaż stosowane są również typy bikalorymetrów przy skończonej wartości  $a$  [1, 35]. Bikalorymetry mogą mieć kształt kuli, walca lub płyty, przy czym zwykle materiał badany umieszczony jest w szczelinie między dużym rdzeniem metalowym i cienką zewnętrzną powłoką metalową (rys. 16).

Za pomocą bikalorymetru o kształcie dysku LEWIN badał przewodność cieplną różnych gazów przy grubości szczeliny 0,238–1,57 mm [41]. GELLER wyznaczał własności toluenu bikalorymetrem kulistym [5]. GOŁUBIEW badał przewodność cieplną gazowych węglowodorów w zakresie temperatur 0–360°C i ciśnień 1–500 ata bikalorymetrem walcowym

o grubości warstwy gazu od 0,23 do 0,69 mm [5]. Grubość warstwy badanych ciał stałych wynosi zwykle kilka milimetrów.

Metoda bikalorymetru, po pewnej modyfikacji, była również stosowana do badania własności tkanin [35] oraz cienkich (0,006–0,1 mm) warstw lakierów i farb [47]; w tym ostatnim przypadku można także używać kalorymetrów o bardziej złożonych kształtach i wyznaczać całkowity opór cieplny warstwy  $1/\alpha + \delta/\lambda$  w oparciu o zależność (3.23).

Przedstawione powyżej metody wykazują pewne zalety w stosunku do metod stanu ustalonego, mianowicie znacznie krótszy czas pomiaru, możliwość uniknięcia wymiany masy związanej z przewodzeniem ciepła przy badaniu materiałów wilgotnych, możliwość zespołowego wyznaczania własności cieplnych i wreszcie konieczna jest bardziej prosta aparatura pomiarowa [2]. Metody stanu uporządkowanego mogą być również w pewnych przypadkach używane do pomiarów własności cieplnych materiałów wyraźnie anizotropowych, jak na przykład drewno [34] lub układy złożone z izolowanych przewodników elektrycznych [10].

Natomiast w porównaniu z innymi metodami nieustalonymi [9, 55] metody stanu uporządkowanego nie pozwalają zespołowo wyznaczyć własności cieplnych w jednym pomiarze, a umieszczanie termoelementu w badanej próbce może powodować zakłócenia obserwowanego pola temperatury [58].

**4.2. Określanie wartości współczynnika przejmowania ciepła.** Metodą stanu uporządkowanego można określać średnią wartość współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha$  na danej powierzchni, zdefiniowaną wzorem (3.4), przy czym współczynnik ten uwzględnia zarówno ciepło wymieniane drogą konwekcji jak i wymieniane przez promieniowanie.

W tym celu używany jest przyrząd nazywany kalorymetrem  $-\alpha$  składający się z ciała lub układu ciał o znanych własnościach cieplnych, termoelementu różnicowego i galwanometru. Po zmierzeniu tempa chłodzenia  $m$  kalorymetru  $-\alpha$  wartość współczynnika przejmowania ciepła określana jest najczęściej ze wzoru (3.11) lub wzorów (3.18) i (3.17). Budowa kalorymetru  $-\alpha$  powinna być tak dostosowana do mierzonej wartości  $\alpha$ , aby uniknąć zakresu tempa chłodzenia bliskiego  $m_\infty$  (rys. 2), ponieważ maleje wtedy dokładność pomiaru, to znaczy powinien być spełniony co najmniej warunek [47]

$$\alpha \leq \frac{15\lambda V}{KS}.$$

Najczęściej używane są kalorymetry metalowe, dla których łatwo jest utrzymać warunek  $\psi = 1$  i wtedy współczynnik przejmowania ciepła można wyznaczać z prostej zależności

$$(4.1) \quad \alpha = \frac{C}{S} m.$$

Pomiar kalorymetrem  $-\alpha$  jest szybki i wygodny, można bowiem uniknąć kłopotliwego pomiaru temperatury powierzchni; ponadto pozwala on wyznaczać wartości  $\alpha$  nawet na powierzchniach dość złożonych geometrycznie. Może być stosowany zarówno w warunkach konwekcji wymuszonej, jak i konwekcji swobodnej [16, 36], gdy wartość  $\alpha$  zależy od  $\vartheta_s$  (rys. 8).

Metoda kalorymetru  $-\alpha$  była szeroko stosowana [33, 35, 36, 47] i często używana w tych przypadkach, gdy inne sposoby pomiaru  $\alpha$  okazywały się zawodne lub trudne.



KONDRATIEW używał kalorymetru z szamoty w tulei stalowej do pomiarów  $\alpha$  na powierzchniach walcowych w kotłach [35]. Metodę stanu uporządkowanego do wyznaczania średniej wartości  $\alpha$  na powierzchni płyty przy burzliwym ruchu powietrza stosowała CZAPLINA [7]. Odpowiednio zmodyfikowanym kalorymetrem  $-\alpha$ , w którym uwzględnia się przewodzenie ciepła przez powierzchnie jego zetknięcia z innymi ciałami [25], można również wyznaczać współczynnik  $\alpha$  przy poprzecznym opływie rur lub pęczków rur [46]. Współczynnik przejmowania ciepła przy przepływie płynnych metali przez kanał wyznaczał tą metodą IWANOWSKI [21]. Mierzono także lokalne wartości współczynnika  $\alpha$ , na przykład na ściankach obudowy turbin gazowych i sprężarek [20] oraz w płaskich naddźwiękowych dyszach przy przepływie rozrzedzonego gazu [38]. Kalorymetrem  $-\alpha$ , zanurzonym w warstwie fluidalnej, wyznaczone były wartości współczynnika przejmowania ciepła na powierzchni kuli w temperaturach do 1050°C [6].

**4.3. Wyznaczanie emisyjności powierzchni.** Wyznaczenie całkowitej emisyjności  $\varepsilon$  badanej powierzchni może być przeprowadzone metodą porównawczą przez pomiar tempa chłodzenia dwu ciał, z których jedno ma znany współczynnik emisyjności [35]. Oba ciała powinny mieć ten sam kształt i wymiary oraz znane własności cieplne; pomiar przeprowadzany jest zwykle w termostacie powietrznym (rys. 13) w warunkach konwekcji swobodnej.

Obliczony jak dla kalorymetru  $-\alpha$  współczynnik przejmowania ciepła

$$(4.2) \quad \alpha = \alpha_k + \alpha_r,$$

przy czym współczynnik przejmowania ciepła drogą promieniowania

$$(4.3) \quad \alpha_r = 4,885 \varepsilon_{s-p} \cdot \frac{T_s^4 - T_p^4}{T_s - T_p} \cdot 10^{-8} = \varepsilon_{s-p} \cdot \alpha_p.$$

Emisyjność zastępcza w przypadku ochładzania w termostacie o powierzchni  $F$  ma wartość

$$(4.4) \quad \varepsilon_{s-p} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_s} + \frac{S}{F} \left( \frac{1}{\varepsilon_p} - 1 \right)},$$

a ze względu na  $F \gg S$  (rys. 13) można przyjąć

$$(4.5) \quad \varepsilon_{s-p} = \varepsilon_s.$$

Mierząc przy tej samej różnicy temperatur  $\vartheta_s$  i tej samej temperaturze otoczenia  $t_f$  tempa chłodzenia  $m_1$  i  $m_2$  dwu ciał (1 i 2), z których jedno ma znaną emisyjność, można emisyjność powierzchni drugiego ciała wyznaczyć z zależności

$$(4.6) \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_p}.$$

Opisana metoda używana jest najczęściej do wyznaczania emisyjności emalii, lakierów i farb w temperaturach pokojowych [35, 16].

Były również przeprowadzane doświadczenia przy zmniejszonych ciśnieniach powietrza w celu uniknięcia wymiany ciepła przez konwekcję [47].

**4.4. Badanie bezwładności cieplnej termometrów i pirometrów.** Możliwość zastosowania teorii stanu uporządkowanego do określania bezwładności cieplnej wskazań różnego typu termometrów i pirometrów wynika z bezpośredniego związku łączącego stałą czasową (lub stałą bezwładności cieplnej) termometru [30] z tempem chłodzenia jego czujnika. Można wykazać, że stała bezwładności cieplnej jest równa odwrotności tempa chłodzenia [35, 36, 14].

Zależności stanu uporządkowanego mogą być wykorzystane do określania krzywej bezwładności cieplnej różnego typu mierników temperatury [36, 42], cechowania kataltermometrów [36], badania wzorcowych termometrów oporowych i pirometrów [35] oraz dynamicznej charakterystyki czujników przeznaczonych do pomiaru wysokich temperatur [51], a także do ustalenia najbardziej właściwej konstrukcji czujników termicznych [35], co ma istotne znaczenie w zagadnieniach automatyki cieplnej.

**4.5. Badanie procesów nagrzewania i ochładzania ciał.** Obliczenia i badania doświadczalne procesów nagrzewania i ochładzania ciał mogą być dokonywane na podstawie stanu uporządkowanego w wielu przypadkach tylko w sposób przybliżony ze względu na występującą najczęściej złożoność warunków brzegowych.

Możliwości zastosowania teorii stanu uporządkowanego są w tym zakresie bardzo różnorodne. Może ona być użyta do przybliżonych obliczeń izolacji cieplnej niektórych urządzeń pracujących w stanie nieustalonym [14, 35], na przykład w oparciu o wzór (3.23). Wpływ kształtu i wymiarów ciała na prędkość ogrzewania i ochładzania ciał przy ich obróbce cieplnej badał KONDRATIEW [35, 14]; w szczególności badany był proces hartowania stali i określane były wartości współczynników przejmowania ciepła przy różnych sposobach hartowania od temperatury 900°C [35].

Próbowano również zastosować stan uporządkowany do doświadczalnego badania procesów ochładzania wodą wibrujących przedmiotów metalowych o temperaturach powyżej 600°C przy ich walcowaniu [45]. KAPINOS badał wymianę ciepła w niektórych częściach (dysk) turbin gazowych i parowych w warunkach przemysłowych [26], a PAWŁOWSKI w oparciu o stan uporządkowany rozpatrywał proces nagrzewania turbin parowych przy ich uruchamianiu [49]. Przybliżoną metodę regulacji mocy prądu zasilającego piec przy nagrzewaniu według z góry ustalonego programu opracował PSARIEW [52].

Teorię stanu uporządkowanego próbowano również zastosować do ciał z wewnętrznymi źródłami ciepła, na przykład w radioelektronice [14]; DULNIEW zajmował się stanem cieplnym okresowo pracujących układów przewodów elektrycznych (pęczków kabli) na okrętach i rozpatrywał założenia ich racjonalnego projektowania [13], a DENISOW przeprowadził doświadczenia nad stanem uporządkowanym takich układów [10].

**4.6. Zastosowanie stanu uporządkowanego do badań teoretycznych w wymianie ciepła.** Teoria stanu uporządkowanego stała się punktem wyjścia do dalszych badań w wymianie ciepła, zwłaszcza w procesach nieustalonych.

Wiele pojęć i wielkości występujących w tej teorii może znaleźć zastosowanie przy opisie pola temperatury ciała lub układów ciał poddanych działaniu ośrodka, którego temperatura zmienia się liniowo [37] lub okresowo z czasem (stan uporządkowany drugiego i trzeciego rodzaju [36]). Zagadnieniem tym zajmował się również JARYSZEW, który w pracy [23] przedstawił przybliżone równania do obliczania średniej temperatury objętościowej ciała w stanie uporządkowanym 1 i 2 rodzaju.

KUDRIASZEW i ŻEMKOW próbowali rozwinąć dalej teorię stanu uporządkowanego tworząc uogólnioną teorię, która mogłaby być zastosowana do ciał o własnościach cieplnych zmiennych z temperaturą [60, 40]. KUDRIASZEW zajmował się również za pomocą stanu uporządkowanego badaniami stabilizacji procesów ochładzania i wysunął hipotezę o nieliniowości warunku granicznego 3 rodzaju w tych procesach [40].

IWANOWSKI zastosował teorię stanu uporządkowanego do badania nieustalanej wymiany ciepła między rurą a płynącą przez nią cieczą o temperaturze zmiennej w czasie i wzdłuż długości rury [21].

Ważne w miernictwie cieplnym zagadnienie pomiaru termoelementami temperatury ciała w stanie nieustalonym analizował KAGANOW, posługując się stanem uporządkowanym w odniesieniu do układu, składającego się z ciała o ograniczonej objętości i przewodów doprowadzających [24]. Próbowano również zastosować pewne pojęcia stanu uporządkowanego przy badaniu wymiany ciepła w warstwie fluidalnej [56]. W celu zbadania wpływu pulsacji prędkości na okres formowania się warstwy granicznej KUDRIASZEW i GUSIEW określali współczynnik  $\alpha$  na powierzchni kuli w strumieniu powietrza o okresowo zmiennej prędkości [39].

Z przytoczonych tutaj wybranych przykładów ilustrujących możliwości zastosowania teorii stanu uporządkowanego oraz z przedstawionych poprzednio podstaw tej teorii wynika, że posiada ona w pewnym stopniu formalny charakter matematyczny [59] i nie należałoby jej przypisywać jakiegoś określonego sensu fizycznego, a raczej uważać tę teorię za metodę badań doświadczalnych i teoretycznych w wymianie ciepła.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. Ф. БЕГУНКОВА, *Плоский бикалориметр для определения коэффициента теплопроводности изоляционных материалов*, Исследования в области тепловых измерений Л И Т М О, Машгиз, Москва, 1954.
2. А. Ф. БЕГУНКОВА, Г. Н. ДУЛЬНЕВ Е. С. ПЛАТУНОВ, *Приборы для теплофизических измерений разработанные в Л И Т М О*, Тепло-и массоперенос Т.1, Издат. АН БССР, Минск, 1962.
3. T. BOUSSINESQ, *Théorie analytique de la chaleur*, 1901.
4. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Press, 1959.
5. Н. В. ЦЕДЕРБЕРГ, *Теплопроводность газов и жидкостей*, Госэнергоиздат, Москва, 1963.
6. Н. В. ХАРЧЕНКО, К. Е. МАХОРИН, *К вопросу об интенсивности теплообмена между кипящим слоем и нагруженным телом при высоких температурах*, ИФЖ, 1964, 5.
7. А. И. ЧАПЛИНА, *Применение метода регулярного режима для исследования теплообмена пластины при вынужденном турбулентном обтекании*, ИФЖ, 1962, 6.
8. П. В. ЧЕРПАКОВ, *Метод собственных функций в теории регулярного теплового режима*, ИФЖ 1963, 9.
9. А. Ф. ЧУДНОВСКИЙ, *Теплофизические характеристики дисперсных материалов*, Г И Ф М Л, Москва 1962.
10. П. П. ДЕНИСОВ, *Экспериментальное исследование теплового режима корабельных кабельных пучков*, Теплопередача и тепловое моделирование, Издат. АН СССР, Москва 1959.
11. Г. Н. ДУЛЬНЕВ, Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Универсальная связь между тепловой инерцией тела и воздействием на него внешней среды*, Изв. АН СССР, 1955, 3.
12. Г. Н. ДУЛЬНЕВ, Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Обобщенная теория теплового регулярного режима*, Изв. АН СССР, 1956, 7.

13. Г. Д. ДУЛЬНЕВ, *Теоретические основы проектирования кабельных пучков корабля*, Теплопередача и тепловое моделирование, Издат. АН СССР, Москва, 1959.
14. G. N. DULNEV, *The theory of thermal regular regime and its application to the determination of thermal characteristics*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1960, Vol. 1.
15. W. GOGÓŁ, *Metoda 2a*, Zjazd Katedr Termodynamiki, Warszawa, 1957.
16. W. GOGÓŁ, *Określanie współczynnika przejmowania ciepła w zależności od różnicy temperatur na podstawie pomiarów w stanie uporządkowanym*, Zjazd Katedr Termodynamiki, Kraków 1959.
17. W. GOGÓŁ, *Uogólniona metoda wyznaczania własności cieplnych ciał stałych na podstawie teorii stanu uporządkowanego*, Arch. Bud. Maszyn, 1961, 2.
18. W. GOGÓŁ, *An unsteady state method for the measurement of thermal conductivity, Thermal diffusivity and specific heat of solids*, International Institute of Refrigeration, Cambridge, 1961.
19. R. HASE, Arch. für Wärmewirtschaft und Dampfkesselwesen, 1932.
20. И. В. ИЛЬИНСКИЙ, И. Д. ГАРКУША, *Экспериментальное определение локальных значений коэффициентов теплообмена в турбомашинах*, ИФЖ, 1963, 11.
21. М. Н. ИВАНОВСКИЙ, *Скоростный метод измерения среднего коэффициента теплоотдачи в трубе*, Вопросы теплообмена, Издат. АН СССР, Москва, 1959.
22. L. M. JAKOV, *Heat transfer*, J. Wiley, New York, 1958.
23. Н. А. ЯРЫШЕВ, *Определение среднеобъемной температуры в переходных режимах теплообмена*, ИФЖ, 1963, 10.
24. М. А. КАГАНОВ, И. С. ЛИСКЕР, *О влиянии компактных измерителей температуры на точность определения теплофизических характеристик*, ИФЖ, 1963, 9.
25. V. M. KARINOS, N. J. NIKITENKO, *Heat transfer in a channel with an unheated length*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 1963, Vol. 6.
26. В. М. КАПИНОС, *К определению граничных условий теплообмена в турбомашинах*, ИФЖ, 1963, 8.
27. М. Ф. КАЗАНСКИЙ, *О граничных условиях методов регулярного режима*, ЖТФ, 1949.
28. М. Ф. КАЗАНСКИЙ, М. В. ВЕНЕДИКТОВ *О погрешностях определения тепловых коэффициентов плохих проводников тепла вторым методом регулярного режима*, ЖТФ, 1953, 7.
29. W. KARPLUS, *Analog simulation*, McGraw-Hill, New York 1958.
30. F. KONTRAUSCH, *Fizyka laboratoryjna*, PWN, Warszawa 1959.
31. Л. А. КОМКОВА, *Усовершенствованная теория метода двух точек*, Исследования в области тепловых измерений, Л И Т М О, Машгиз, Москва 1954.
32. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, М. П. СТАЦЕНКО, *Опыты по определению коэффициента теплопроводности изоляционных материалов при помощи ламбдакалориметра* Изв. В.Т.И., 1932, 7-8.
33. Г. М. КОНДРАТЬЕВ *Общая теория алфакалориметров основанных на регулярном режиме* Изв. АН СССР, 1948, 7.
34. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, А. Ф. БЕГУНКОВА, *Термические константы древесины и их измерение по методам регулярного режима*, Исследования в области тепловых измерений, Л И Т М О, Машгиз, Москва, 1954.
35. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Регулярный тепловой режим*, Г И Т Т Л, Москва 1954.
36. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Тепловые измерения*, Машгиз, Москва 1957.
37. Г. М. КОНДРАТЬЕВ, *Критериальные величины теории регулярного теплового режима второго рода*, Теплопередача и тепловое моделирование, Издат. АН СССР, Москва, 1959.
38. С. И. КОСТЕРИН, Ю. А. КОШМАРОВ, Ю. В. ОСИПОВ, *Исследование течения и теплообмена разреженного газа в плоском сверхзвуковом сопле*, Тепло-и массоперенос, Т.3., Госэнергоиздат, Москва, 1963.
39. Л. И. КУДРЯШЕВ, И. А. ГУСЕВ, *Влияние скоростной нестационарности неограниченного потока на коэффициент сопротивления и теплоотдачи при обтекании тел*, Тепло-и массоперенос, Т.3, Госэнергоиздат, Москва 1963.
40. Л. И. КУДРЯШЕВ, Л. И. ЖЕМКОВ, *Применение обобщенной теории тепловой регулярности к изучению связи между внутренним и внешним теплообменом*, Тепло-и массоперенос, Т.3, Госэнергоиздат, Москва, 1963.

41. Г. М. ЛЕВИН *Определение коэффициента теплопроводности газов универсальным плоским би-калориметром*, Приборы и Техника Эксперимента, 1958.
42. Г. М. ЛЕВИН; *Анализ характеристических кривых тепловой инерции и некоторых зависимостей теории регулярного теплового режима*, ИФЖ, 1960, 1.
43. А. В. ЛЫКОВ, *Теория теплопроводности*, Г И Т Т Л, Москва 1952.
44. А. В. ЛЫКОВ, Ю. А. МИХАЙЛОВ, *Теория тепло-и массопереноса*, Госэнергоиздат, Москва 1963.
45. Н. А. МОРОЗОВ, *Некоторые закономерности процесса охлаждения в условиях высоких температур и движения изделий с вибрацией*, Тепло-и массоперенос, Т.3 Госэнергоиздат, Москва, 1963.
46. Н. И. НИКИТЕНКО, Л. И. НИКИТЕНКО, *К определению теплообмена при поперечном обтекании потоком труб и трубных пучков*, Теплофизика высоких температур, 1964, 5.
47. В. А. ОСИПОВА, *Экспериментальное исследование процессов теплообмена*, Издат, Энергия, Москва, 1964.
48. И. А. ПАРХОМЕНКО, Г. П. БУЙНЯЧЕНКО, *Замечания по статье Г. Н. Третьяченко и Л. В. Кравчука „О регулярном тепловом режиме тел сложной формы“* ИФЖ, 1962, 4.
49. Г. И. ПАВЛОВСКИЙ, *Тепловые процессы в паровых турбинах при пусковых режимах*, Тепло-и массоперенос, Т.5, Издат. АН СССР, Минск, 1963.
50. Б. С. ПЕТУХОВ *Опытное изучение процессов теплопередачи*, Госэнергоиздат, Москва, 1952.
51. А. Д. ПИНЧЕВСКИЙ, *К анализу переходных характеристик термодетекторов*, Теплофизика высоких температур, 1965, 1.
52. В. И. ПСАРЕВ, *О методе нагрева и охлаждения поперед заданному закону*, ИФЖ, 1960, 1.
53. P. J. SCHNEIDER, *Conduction heat transfer*, Addison-Weseley, Cambridge, Mass., 1955.
54. P. J. SCHNEIDER, *Temperature response charts*, J. Wiley, New York 1963.
55. В. Л. ШЕВЕЛЬКОВ, *Теплофизические характеристики изоляционных материалов* Госэнерго издат, Москва 1958.
56. Ю. Н. ШИМАНСКИЙ, Н. И. СЫРОМЯТНИКОВ, *О применении метода регулярного режима для исследования теплообмена в кипящем слое*, ИФЖ, 1964, 3.
57. И. Т. ШВЕЦ, В. И. ФЕДОРОВ, *Вопросы нестационарного теплообмена в роторах турбин*, Издат. Киевского Университета, 1960.
58. Тематическая конференция посвященная теории теплового регулярного режима ИФЖ, 1963, 3.
59. Г. Н. ТРЕТЬЯЧЕНКО Л. В. КРАВЧУК, *О регулярном тепловом режиме тел сложной формы*, ИФЖ 1961, 8.
60. Г. Н. ТРЕТЬЯЧЕНКО, *О теориях регулярного теплового режима*, ИФЖ, 1962, 4.
61. Г. Н. ТРЕТЬЯЧЕНКО, Л. В. КРАВЧУК, *Методика определения теплофизических характеристик материалов при высоких температурах*, Тепло-и массоперенос, Т.1, Издат. АН БССР, Минск, 1962.
62. Г. Н. ТРЕТЬЯЧЕНКО, Л. В. КРАВЧУК, *Методика приближенного вычисления „опасных“ температурных полей и оценка термостойкости деталей изготовленных из хрупких материалов*, Тепло-и массоперенос, Т.5., Издат. АН БССР, Минск, 1963.

## Р е з ю м е

### ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНОГО ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА И ВОЗМОЖНОСТИ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Работа является обзором современного состояния исследований в области теории регулярного теплового режима.

Представлены основные закономерности этой теории и рассмотрены границы её использования. Показаны возможности применения теории регулярного режима к изучению теоретических и технических вопросов теплообмена.

## S u m m a r y

THE THEORY OF THERMAL REGULAR REGIME AND ITS APPLICATION  
TO THE HEAT TRANSFER PROBLEMS

A survey is given of the recent investigations concerned with the theory of thermal regular regime. The basic regularities of this theory and the problem of limit of its application are discussed. The application of thermal regular regime in theoretical and technical problems of heat transfer is considered.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
INSTYTUT TECHNIKI CIEPLNEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 maja 1965 r.*

---

## PLASTYCZNOŚĆ CIAŁ O SKOKOWEJ NIEJEDNORODNOŚCI

JAN RYCHLEWSKI (WARSZAWA)

### I. Wprowadzenie

1. Temat pracy	45
2. Model złącza dwu materiałów	46
3. Pewne dane doświadczalne	50

### II. Płaski stan odkształcenia

4. Podstawowe równania	53
5. Analiza stanu naprężenia i prędkości ruchu w otoczeniu powierzchni kontaktu	56
6. Początkowe płynięcie plastyczne klina o skokowej niejednorodności	61
7. Działanie gładkiego sztywnego stempla na półprzestrzeń	83
8. Przeciąganie warstwowego pasma przez gładką matrycę	88

### III. Skręcanie

9. Podstawowe równania w pewnym układzie krzywoliniowym	92
10. Skokowa niejednorodność; warunki dla naprężeń na powierzchniach kontaktu	94
11. Analogie Nádai'a dla prętów o skokowej niejednorodności	96
12. Rozwiązania lokalne	98
13. Nośność graniczna pręta kołowego	99
14. Nośność graniczna pręta prostokątnego	106

### IV. Nośność graniczna płyt

15. Sformułowanie problemu	113
16. Płyta izotropowa ze słabszym środkiem	116
17. Płyta izotropowa o mocniejszym środku	121
Literatura	123

### I. Wprowadzenie

#### 1. Temat pracy

Ośrodek sprężysto-plastyczny o wybranym prawie konstytutywnym nazywamy *niejednorodnym*, gdy parametry (moduły) występujące w tym prawie zależą od współrzędnych materialnych rozpatrywanej cząstki. Gdy zmienne są moduły opisujące własności plastyczne, ośrodek nazywamy *plastycznie niejednorodnym*.

Badania w dziedzinie teorii ciał plastycznie niejednorodnych, zapoczątkowane pracami [1 i 2], dotyczyły przypadku ciągłej zależności modułów od współrzędnych, spowodowanej takimi przyczynami, jak niejednorodność składu, obróbka powierzchniowa, temperatura, bombardowanie strumieniami cząstek elementarnych i innymi. Przeglądu osiągnięć i problemów nierozwiązanych dokonano w pracach [3 i 4].

Istnieje jednak obszerna klasa problemów praktycznych, przy których analizie występuje konieczność rozważenia odkształceń plastycznych ciał z powierzchniami, na których własności plastyczne doznają skoku (niejednorodność skokowa).

Pierwszą grupę stanowią tu problemy wytrzymałości konstrukcji złożonych z części wykonanych z różnych materiałów, w szczególności konstrukcji metalowych klejonych.

Drugą bardzo obszerną grupę stanowią problemy wspólnej obróbki plastycznej różnych metali. Szczególnie aktualne są zagadnienia obróbki wyrobów bimetalicznych (ciągnięcie drutu z wkładkami, walcowanie warstwowych blach itp), głównie dla potrzeb przemysłu chemicznego, przemysłu elektrotechnicznego, budowy reaktorów itp. W tej dziedzinie istnieje bogate piśmiennictwo techniczne, natomiast opracowanie mechaniki tych procesów nie wyszło poza ramy przybliżonych ujęć inżynierskich (por. np. [5–8]). Ten stan rzeczy znalazł odbicie w pracy [9].

Próbę ujęcia niektórych aspektów mechaniki procesów deformacji plastycznej ciał o skokowym rozkładzie własności stanowią prace [10–16]. Niniejsze opracowanie poświęcone jest przedstawieniu podstawowych wyników tych prac<sup>(1)</sup>. Poniżej podany zostanie sposób włączenia zagadnień skokowej niejednorodności do teorii ciał idealnie plastycznych, dokonana zostanie analiza pola naprężenia i prędkości ruchu w otoczeniu powierzchni kontaktu części o różnych granicach plastyczności oraz przedstawiony będzie sposób rozwiązania szeregu problemów brzegowych dla płaskiego stanu odkształcenia i dla skręcania.

Przyjmujemy model ciała sztywno idealnie-plastycznego, izotropowego i nieściśliwego. Praca należy zatem do dziedziny nazywanej zazwyczaj *matematyczną teorią idealnej plastyczności*. W związku z tym nie są w niej analizowane liczne aspekty natury *par excellence* fizycznej rozpatrywanych procesów, np. istota zjawisk powierzchniowych na styku dwu odmiennych części ciała.

Z drugiej strony, problemy skokowej niejednorodności prowadzą do wielu nierozwiązanych problemów matematycznych, np. w teorii równań quasi-liniowych o nieciągłych współczynnikach. Celem naszym jest podanie opisu mechaniki badanych zjawisk, a nie czysto matematycznych aspektów otrzymany układów równań.

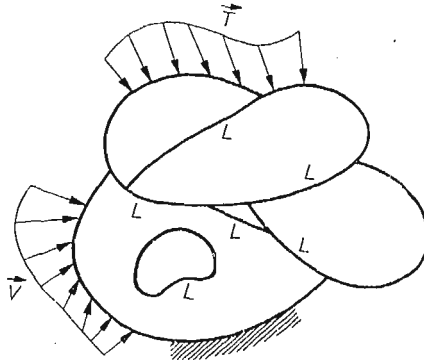
## 2. Model złącza dwu materiałów

W ramach przyjętej koncepcji jedyną stałą fizyczną, opisującą własności ośrodka, jest granica plastyczności  $K$ . Jest jednak rzeczą zupełnie oczywistą, że podanie granicy plastyczności po obu stronach powierzchni kontaktu nie daje informacji wystarczającej do opisu zachowywania się ciała jako całości. Co więcej, trudności poprawnego sformułowania problemu i istotne własności ciał o skokowej niejednorodności kryją się właśnie we własności styków.

<sup>(1)</sup> Współautorem pracy [15] jest J. A. KÖNIG, współautorem pracy [16] jest M. ARCISZ.



Zadaniem praktycznym ze skokową niejednorodnością plastyczną, które nas będą interesowały z punktu widzenia możliwości zastosowań teorii idealnej plastyczności, można na ogół nadać postać następującego problemu brzegowego: rozpatrujemy ciało, podzielone skończoną liczbą powierzchni kontaktu na części o różnych granicach plastyczności (rys. 1.1); na części  $S_T$  powierzchni ciała dany jest rozkład sił powierzchniowych  $\nu T_i$  z dokładnością do mnożnika  $\nu$ , na części  $S_v$  dane są prędkości przemieszczeń  $V_i$ ; należy znaleźć stan naprężenia i prędkości przemieszczeń ciała przy jego ruchu plastycznym oraz odpowiednie wartości mnożnika  $\nu$  dla sił powierzchniowych. Terminem «ruch plastycz-



Rys. 1.1

ny» obejmujemy umownie również przypadek, gdy części ciała poruszają się jak bryły sztywne, a na powierzchniach kontaktu występują skoki prędkości i deformacje skupione.

Sformułowany powyżej cel badania narzuca sposób opisu własności złąc: brakującą informacją jest opis warunków na powierzchni kontaktu, umożliwiających wzajemny ruch stykających się części.

Skokowa niejednorodność plastyczna może być użyta jako matematyczny model następujących realnych warunków:

1) dwa materiały przedzielone są cienką (idealizowaną jako nieskończenie cienką) warstwą trzeciego materiału, którym może być klej do metalu, smar, warstwa izolacji termicznej lub elektrycznej itp.,

2) dwa materiały połączone są za pomocą odpowiedniego zabiegu technologicznego, np. zgrzewania, spawania na zimno, spawania wybuchowego lub też stykają się wykazując znaczną przyczepność adhezyjną [17],

3) dwa materiały stykają się nie będąc złączonymi, przy czym styk charakteryzuje pewien współczynnik tarcia,

4) wewnątrz tego samego materiału mamy wąską strefę silnej zmiany granicy plastyczności.

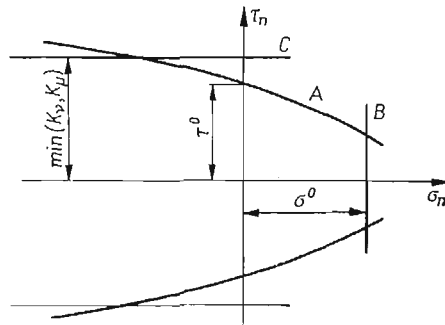
Rozpatrzmy więc złącze dwóch materiałów o granicach plastyczności  $K_v$  i  $K_\mu$ , przedzielonych powierzchnią  $L_{v\mu}$  o równaniu  $F(x_i) = 0$ . Stykające się materiały mogą wykazywać ponadto ciągłą niejednorodność.

Przyjmijmy, że dla wszystkich omówionych sytuacji o zniszczeniu złącza (o możliwości powstania nieciągłości prędkości na  $L_{v\mu}$ ) decyduje naprężenie normalne  $\sigma_n$  oraz styczne  $\tau_n$ , przy czym normalne naprężenie ściskające może osiągnąć dowolnie duże wartości.

Zależność graniczną między  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  przyjmiemy w postaci przedstawionej na rys. 1.2 (krzywa  $A$  i prosta  $B$ ), gdzie  $\tau_0$  oznacza maksymalną wartość naprężenia stycznego, które może być przekazane przez powierzchnię kontaktu przy  $\sigma_n = 0$ ,  $\sigma_0$  zaś jest wytrzymałością rozdzielczą złącza na rozciąganie. Naprężenie styczne nie może być oczywiście większe od mniejszej z liczb  $K_v$ ,  $K_\mu$  (prosta  $C$ ). Reasumując można stwierdzić, że złącze pozostaje «niezniszczone», gdy naprężenia  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  spełniają nierówności

$$(2.1) \quad \tau_n < \min(K_v, K_\mu), \quad \tau_n < f(\sigma_n), \quad \sigma_n < \sigma_0.$$

Gdy naprężenie styczne osiąga wartość  $\tau_n = \min(K_v, K_\mu)$ , pojawia się możliwość nieciągłości składowej stycznej prędkości przemieszczenia wskutek poślizgu w słabszym materiale, gdy  $\tau_n = f(\sigma_n)$ , poślizg może nastąpić na granicy materiałów, gdy  $\sigma_n = \sigma_0$ .



Rys. 1.2

możliwa jest nieciągłość składowej normalnej prędkości (kruche zniszczenie spoiny materiałów). Gdy złącze nie jest «zniszczone», ruch plastyczny obu materiałów jest możliwy, jednakże musi on spełniać warunki ciągłości wektora prędkości na powierzchni kontaktu  $L_{v\mu}$ . Wzajemne położenie krzywej  $A$  i prostych  $B$ ,  $C$  zależy od konkretnych wartości liczbowych i może być zmienne nawet wzdłuż tej samej powierzchni kontaktu.

Złącze o opisanych powyżej własnościach nazwiemy modelem I.

Dla niektórych złącz wpływ naprężenia normalnego na wartość graniczną naprężenia stycznego jest nieznaczny i wówczas można przyjąć uproszczony «warunek zniszczenia», w którym  $A$  jest linią prostą równoległą do osi  $\sigma_n$ . Złącze o tych własnościach nazwiemy modelem II.

Model II odpowiada przypadkowi czwartemu. Może on być przyjęty jako uproszczenie dla niektórych sytuacji w przypadkach pierwszym i drugim, nie jest natomiast do przyjęcia np. dla niesmarowanego kontaktu z tarcem (przypadek trzeci).

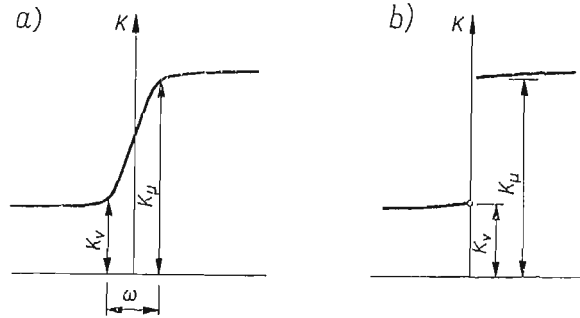
Wykażemy obecnie, że model II, w przypadku gdy wytrzymałość rozdzielczą  $\sigma_0$  jest dostatecznie duża lub gdy  $\sigma_n$  jest dostatecznie małe (dla  $\sigma_n < 0$  zawsze), można w zupełności zinterpretować w ramach teorii ośrodka idealnie plastycznego.

Stwierdzamy najpierw, że gdy niejednorodność skokowa jest zdefiniowana jako sytuacja graniczna dla ciągłej monotonicznej niejednorodności w cienkiej warstwie (przy-

padek czwarty, rys. 1.3a), to wykres zmiany granicy plastyczności w kierunku normalnym do powierzchni kontaktu ma charakter przedstawiony na rys. 1.3b. Tak zdefiniowany styk, mieszczący się całkowicie w ramach teorii ciała idealnie plastycznego, nazwiemy *kontaktem z idealną przyczepnością*. Na płaszczyźnie  $\sigma_n, \tau_n$  odpowiadają mu dwie proste

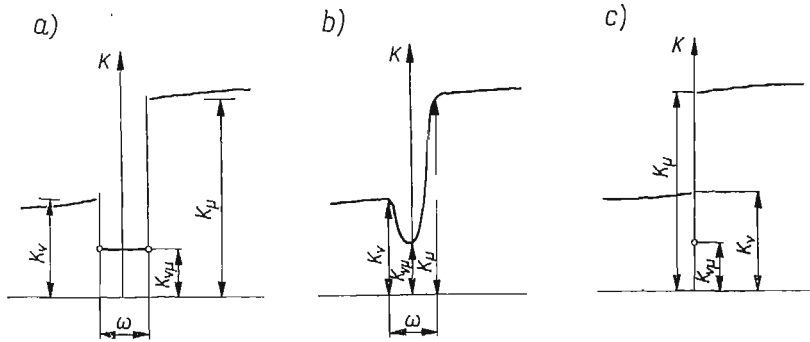
$$(2.2) \quad \tau_n = \pm \min(K_\mu, K_\nu).$$

Rozważmy teraz sytuację, gdy materiały o granicach plastyczności  $K_\nu, K_\mu$  są rozdzielone warstwą o grubości  $\omega$  trzeciego materiału również idealnie plastycznego, o granicy plastyczności  $K_{\nu\mu}$ <sup>(2)</sup>, rys. 1.4a. O powierzchniach  $L_{0\nu}, L_{0\mu}$  zakładamy, że są one



Rys. 1.3

powierzchniami kontaktu z idealną przyczepnością. Przejdźmy do granicy z grubością warstwy pośredniej,  $\omega \rightarrow 0$ . Łatwo stwierdzić, że otrzymujemy w granicy kontakt odpowiadający dokładnie modelowi II, przy czym  $\tau_0 = K_{\mu\nu}$ . Analogicznego przejścia granicznego można dokonać z sytuacji przedstawionej na rys. 1.4b, gdy przy  $\omega \rightarrow 0$   $K_\mu, K_\nu, K_{\nu\mu}$  są ustalone.



Rys. 1.4

Styk idealnie gładki (bez tarcia) odpowiada w tym sensie przypadkowi przejścia granicznego  $\omega \rightarrow 0$  dla  $K_{\nu\mu} = 0$ , tzn. gdy warstwa pośrednia jest cieczą idealną.

<sup>(2)</sup> W pracy tej nie ma potrzeby użycia gdziekolwiek w istotny sposób oznaczeń tensorowych, dlatego będziemy używać wskaźników tak, jak to będzie wygodne w każdym przypadku.

Złącze opisywane modelem II jest zatem równoważne ośrodkowi plastycznemu o następującym rozkładzie granicy plastyczności w otoczeniu powierzchni kontaktu  $L_{v\mu}$  opisanym równaniem  $F(x_i) = 0$ :

$$(2.3) \quad K = \begin{cases} K_v(P), & F < 0, \\ K_{v\mu}, & F = 0, \\ K_\mu(P), & F > 0. \end{cases}$$

Rozkład ten przedstawiony jest na rys. 1.4c.

Interesujący jest tu m.in. czysto matematyczny aspekt sprawy, przypisujemy mianowicie pewną granicę plastyczności powierzchni, a więc zbiorowi miary zera.

Gdy spełniony jest warunek

$$(2.4) \quad K_{v\mu} \geq \min(K_v, K_\mu),$$

to wartość  $K_{v\mu}$  jest bez znaczenia, ponieważ o możliwości «zniszczenia styku» decyduje słabszy materiał. Jedyne wyjątek można by zrobić dla przypadku, gdy  $K_{v\mu} = a \delta(F)$ , gdzie  $\delta(x)$  oznacza funkcję Diraca. Odpowiadałoby to modelowi takiej sytuacji, w której warstwa pośrednia z przejścia granicznego przedstawionego na rys. 1.4a jest wielokrotnie silniejsza od stykających się materiałów (bardzo cienka wkładka zbrojeniowa itp.). W przejściu granicznym warstwę tę należałoby traktować jako sztywną idealnie wiotką błonę, nakładającą odpowiednie więzy na sposób ruchu plastycznego otaczającego ośrodka.

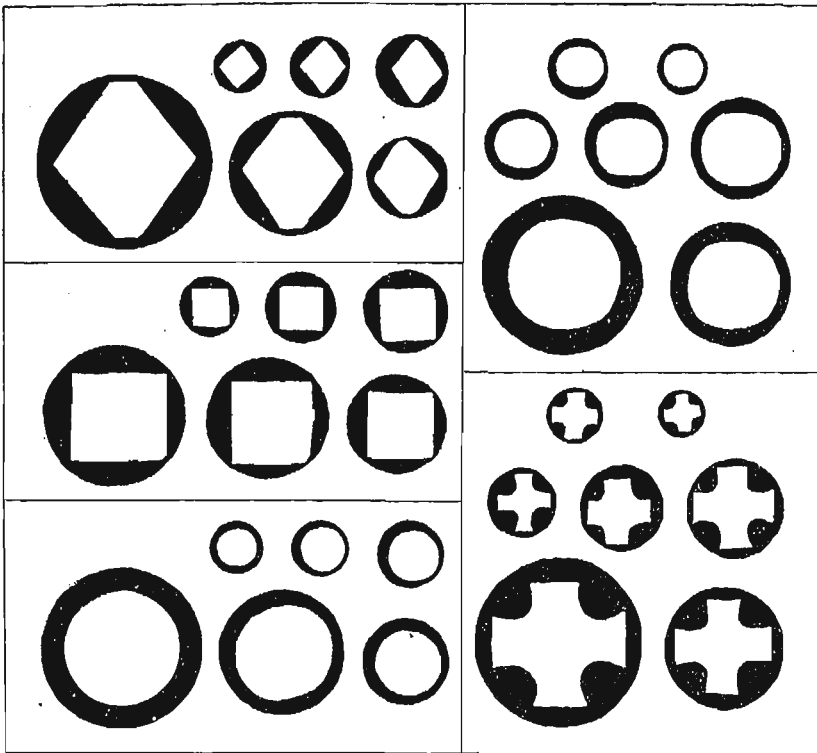
### 3. Pewne dane doświadczalne

Przedstawiony w pracy sposób ujęcia zagadnień skokowej niejednorodności plastycznej, opierający się na wykorzystaniu modelu sztywno-plastycznego ciała bez wzmocnienia i użyciu wprowadzonego modelu złącza, jest niewątpliwie daleko posuniętym uproszczeniem sytuacji rzeczywistych. Uproszczenie to jest dokonane świadomie, bowiem na obecnym etapie rozwoju teorii plastyczności nie mamy jeszcze dostatecznie wiarogodnych i zadowalających z teoretycznego punktu widzenia opisów ciał ze wzmocnieniem; opisy takie dopiero powstają. Autor ma jednak nadzieję, że w obu grupach zadań, wymienionych w p. 1, można znaleźć zastosowanie dla zależności wyprowadzonych w pracy.

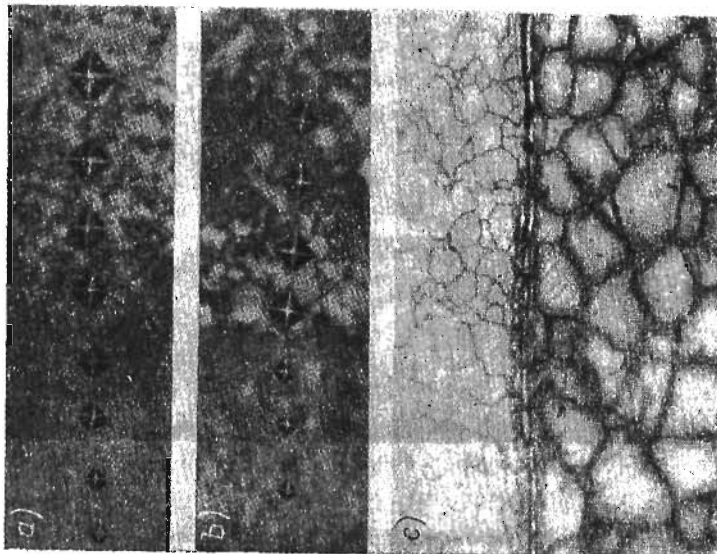
Dla zilustrowania powyższych wywodów przytoczymy kilka zdjęć złączy, uzyskanych na drodze «zimnego spawania» metali poprzez ich wspólną deformację plastyczną [18]. Na rysunku 1.5a przedstawiono w 400-krotnym powiększeniu strefę połączenia w procesie deformacji na gorąco stali 60 i stali St2kp. Widzimy tu silną zmianę twardości, a więc i granicy plastyczności, w wąskiej strefie. Inna sytuacja, dla stali 6XS i St2kp, przedstawiona jest na rys. 1.5b (powiększenie 400-krotne). Mamy tu do czynienia z wyraźnym skokiem granicy plastyczności. Na rysunku 1.5c (powiększenie 300-krotne) obserwujemy sytuację odmienną od obu poprzednich: na granicy łączonych metali, stali X23N18 i stopu EI437, powstała nowa bardzo wąska strefa.

Na rysunku 1.6. przedstawiono wg [9] przekroje wielokrotnie przeciąganych prętów ze stalowym rdzeniem w miedzianej otoczce. Zwróćmy uwagę na zachowane podobieństwo kolejnych przekrojów i zjawisko «pływania» sztywnego rdzenia w miękkiej otoczce.

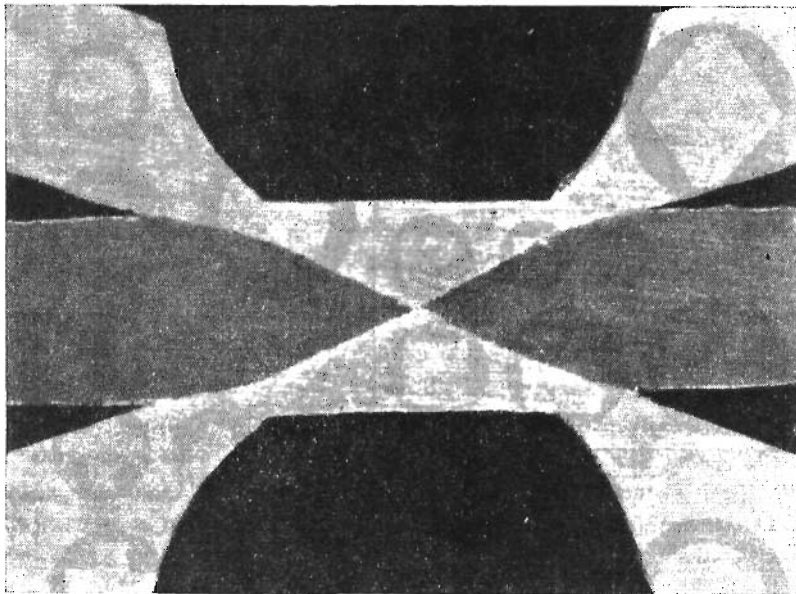
Na rysunkach 1.7 i 1.8a,b przedstawiono przekroje trzech pierwotnie równoległych warstw odkształconych przez dwa stemple [19]. Warstwy zewnętrzne są z aluminium,



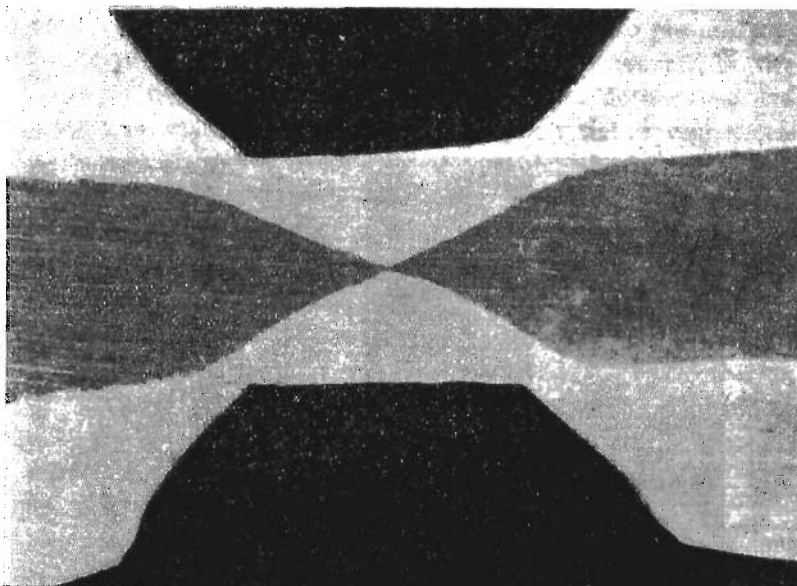
Rys. 1.6



Rys. 1.5

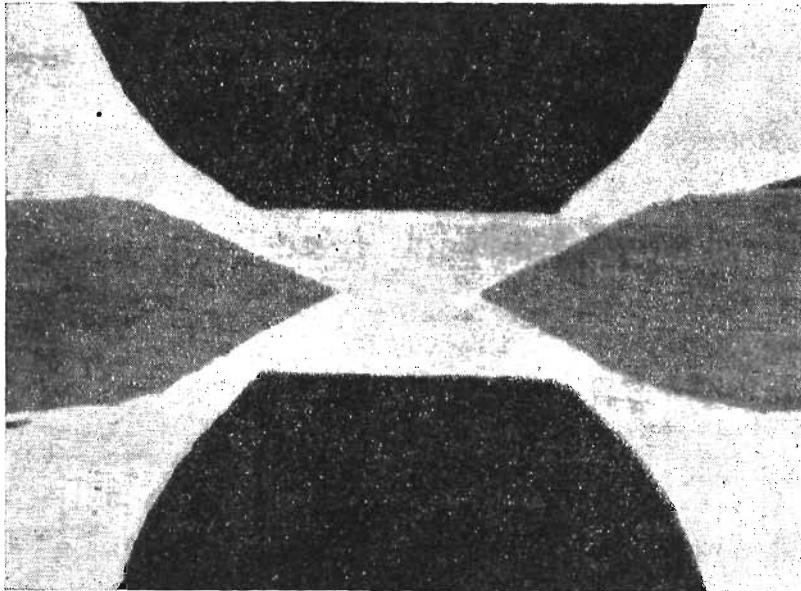


Rys. 1.7



Rys. 1.8a

warstwę środkową stanowi żelazo-armco (rys. 1.7) lub miedź (rys. 1.8a,b). Powstające trójkątne strefy miękkiego aluminium, w których ma miejsce przestrzenny stan ściskania, zbliżony do hydrostatycznego, z łatwością przecinają i następnie rozsuwają warstwę środkową o znacznie wyższej granicy plastyczności.



Rys. 1.8b

## II. Płaski stan odkształcenia

### 4. Podstawowe równania

Stan ruchu, przy którym wektory prędkości przemieszczeń są równoległe do pewnej płaszczyzny i nie zależą od odległości od niej, tradycyjnie nazywamy płaskim stanem odkształcenia<sup>(3)</sup>. Przyjmijmy w płaszczyźnie płynięcia dowolny ortogonalny krzywoliniowy układ współrzędnych Eulera  $\gamma, \delta$  oznaczając przez  $\varphi$  kąt nachylenia linii  $\gamma$  ( $\delta = \text{const}$ ) do osi  $x$  kartezjańskiego układu odniesienia.

W płaskim stanie odkształcenia niejednorodnego ośrodka sztywno-plastycznego bez wzmocnienia i nieściśliwego poszukujemy pięciu nieznanymi funkcji: dwóch składowych fizycznych wektora prędkości

$$(4.1) \quad V_\gamma = V_\gamma(\gamma, \delta), \quad V_\delta = V_\delta(\gamma, \delta)$$

i trzech składowych fizycznych tensora naprężeń:

$$(4.2) \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma}(\gamma, \delta), \quad \sigma_{\delta\delta} = \sigma_{\delta\delta}(\gamma, \delta), \quad \sigma_{\gamma\delta} = \sigma_{\gamma\delta}(\gamma, \delta).$$

<sup>(3)</sup> Dla użytego modelu ciała słuszniejszą nazwą jest «przepływ płaski».

Wielkości te muszą spełniać układ równań złożony z warunków równowagi<sup>(4)</sup>

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial s_\gamma} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}}{\partial s_\delta} + \frac{\sigma_{\delta\delta} - \sigma_{\gamma\gamma}}{R_\delta} + \frac{\sigma_{\gamma\delta}}{R_\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}}{\partial s_\gamma} + \frac{\partial \sigma_{\delta\delta}}{\partial s_\delta} + \frac{\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta}}{R_\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma\delta}}{R_\delta} &= 0; \end{aligned}$$

warunku plastyczności

$$(4.4) \quad (\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta})^2 + 4\sigma_{\gamma\delta}^2 = 4K^2(\gamma, \delta);$$

warunku nieściśliwości

$$(4.5) \quad \epsilon_{\gamma\gamma} + \epsilon_{\delta\delta} = 0$$

i wynikającego z prawa płynięcia Misesa związku

$$(4.6) \quad \frac{\epsilon_{\gamma\gamma} - \epsilon_{\delta\delta}}{\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta}} = \frac{\epsilon_{\gamma\delta}}{\sigma_{\gamma\delta}} = \lambda > 0,$$

gdzie

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \epsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial V_\gamma}{\partial s_\gamma} - \frac{V_\delta}{R_\gamma}, & \epsilon_{\delta\delta} &= \frac{\partial V_\delta}{\partial s_\delta} - \frac{V_\gamma}{R_\delta}, \\ 2\epsilon_{\gamma\delta} &= \frac{\partial V_\gamma}{\partial s_\delta} + \frac{\partial V_\delta}{\partial s_\gamma} + \frac{V_\delta}{R_\delta} + \frac{V_\gamma}{R_\gamma}. \end{aligned}$$

Dla pochodnych w kierunkach  $\gamma, \delta$  wprowadzono tu oznaczenia<sup>(5)</sup>

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial s_\gamma} \equiv \frac{\partial}{h_\gamma \partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\delta} \equiv \frac{\partial}{h_\delta \partial \delta},$$

gdzie  $h_\gamma, h_\delta$  są parametrami Lamégo układu  $\gamma, \delta$  (por. [20]), zaś  $R_\gamma, R_\delta$  są promieniami krzywizn linii  $\gamma, \delta$ , związanymi z kątem  $\varphi$  związkami

$$(4.9) \quad \frac{1}{R_\delta} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\delta}, \quad \frac{1}{R_\gamma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_\gamma}.$$

Układ (4.3)–(4.6) jest quasi-liniowym układem hiperbolicznym, a jego charakterystykami są tzw. linie poślizgu, będące trajektoriami maksymalnych naprężeń stycznych. Siatkę linii poślizgu oznaczamy przez  $\alpha, \beta$ ; umowę o jej kierunkach dodatnich pokazuje rysunek 2.1; kąt między kierunkiem linii  $\alpha$  a osią  $x$  oznaczamy przez  $\theta$ . Gdy układ  $\gamma, \delta$  pokrywa się z układem kartezjańskim  $x, y$ , należy przyjąć

$$\frac{\partial}{\partial s_\gamma} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\delta} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{1}{R_\delta} \equiv \frac{1}{R_\gamma} \equiv 0.$$

<sup>(4)</sup> Sposób ujęcia równań płaskiego stanu odkształcenia pokrywa się z przyjętym w podręczniku [20]. Zakładamy, że Czytelnik zapoznał się z treścią rozdziału VIII tej książki.

<sup>(5)</sup> Dla symboli (4.8) mamy

$$\frac{\partial^2}{\partial s_\delta \partial s_\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial s_\gamma \partial s_\delta} + \frac{1}{R_\gamma} \frac{\partial}{\partial s_\gamma} - \frac{1}{R_\delta} \frac{\partial}{\partial s_\delta},$$

równania w [20] podane są bez użycia tych symboli.



Korzystając z klasycznego podstawienia Lévy'ego

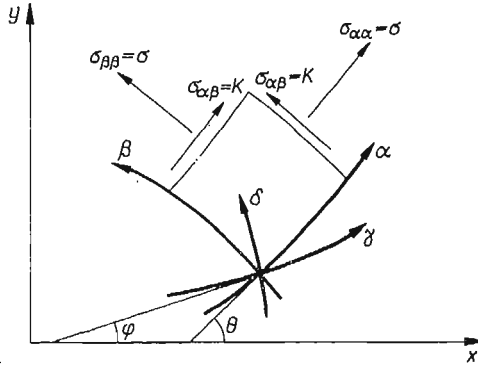
$$(4.10) \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma - K \sin 2\psi, \quad \sigma_{\delta\delta} = \sigma + K \cos 2\psi, \quad \sigma_{\gamma\delta} = K \cos 2\psi,$$

gdzie, jak widać,  $\sigma$  jest naprężeniem średnim, zaś  $\psi$  jest kątem między kierunkami  $\alpha$ ,  $\gamma$  (por. rys. 2.1)

$$(4.11) \quad \psi = \theta - \varphi$$

i korzystając z (4.9) zamiast trzech pierwszych równań układu otrzymujemy dwa równania względem  $\sigma$ ,  $\theta$ :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s_\gamma} - 2K \left[ \cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\gamma} + \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\delta} \right] &= \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\gamma} - \cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\delta}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_\delta} - 2K \left[ \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\gamma} - \cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\delta} \right] &= -\cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\gamma} - \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\delta}. \end{aligned}$$



Rys. 2.1

Przyjmując w charakterze układu współrzędnych siatkę linii poślizgu, tzn. przyjmując  $\gamma \equiv \alpha$ ,  $\delta \equiv \beta$ ,  $\psi \equiv 0$ ,  $\varphi \equiv \theta$  otrzymujemy nasz układ równań (4.12), (4.5), (4.6) w postaci

$$(4.13) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha} - 2K \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial s_\beta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s_\beta} + 2K \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial K}{\partial s_\alpha} = 0;$$

$$(4.14) \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial s_\alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} V_\beta = 0, \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} V_\alpha = 0.$$

Są to tzw. związki wzdłuż charakterystyk.

Rozpatrywane ciało jest podzielone w płaszczyźnie ruchu liniami kontaktu  $L_{\nu\mu}$  na  $n$  części  $G_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) o ciągłym rozkładzie granicy plastyczności. Zakładamy, że złącza mają własności opisywane przez model II, a  $\sigma_n < \sigma_0$ .

Matematyczny aspekt problemu polega zatem na konieczności całkowania quasi-liniowego układu (4.12), (4.5), (4.6) o współczynnikach nieciągłych na liniach  $L_{\mu\nu}$  zgodnie z (2.3). Autorowi nie udało się znaleźć opracowania ogólnej teorii takich układów, w szczególności dowodów twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań podstawowych problemów brzegowych. Pewne zbliżone problemy matematyczne powstają w teorii dyfrakcji i magneto hydrodynamice (por. [21 i 22]).

W niniejszym opracowaniu ograniczymy się do podania przykładów, w których obszary  $G_\nu$  są jednorodnie ( $K_\nu = \text{const}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ). W każdym z takich niedomkniętych obszarów równania (4.13) mogą być scałkowane, co prowadzi do związków Köttera-Hencky'ego

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \sigma - 2K\theta &= g_\nu(\beta) \\ \sigma + 2K\theta &= f_\nu(\alpha) \end{aligned} \quad \text{w } G_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

##### 5. Analiza stanu naprężenia i prędkości ruchu w otoczeniu powierzchni kontaktu

W każdym z niedomkniętych obszarów  $G_\nu$  współczynniki układu (4.12) są ciągłe. Obecnie skupimy uwagę na zbadaniu zachowania się rozwiązań  $\sigma$ ,  $\theta$ ,  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  w otoczeniu powierzchni kontaktu ustalając warunki i ograniczenia dla naprężeń i prędkości, które powinny być na nich spełnione [11].

A. *Warunki dla naprężeń.* Przyjmujemy, że linia kontaktu  $L_{\nu\mu}$  jest linią  $\delta$  (t.zn.  $\gamma = \gamma_0$ ) pewnego układu współrzędnych krzywoliniowych.

Jeżeli siły masowe i siły bezwładności nie mają na  $L_{\mu\nu}$  osobliwości typu funkcji Diraca, to wektor naprężenia przekazywanego przez  $L_{\mu\nu}$  nie doznaje skoku, zatem

$$(5.1) \quad \sigma_{\gamma\gamma}^\nu = \sigma_{\gamma\gamma}^\mu = \sigma_{\gamma\gamma}, \quad \sigma_{\gamma\delta}^\nu = \sigma_{\gamma\delta}^\mu = \sigma_{\gamma\delta}.$$

Dla przypadku gdy zachodzi nierówność  $K_{\mu\nu} < \min(K_\nu, K_\mu)$ , otrzymujemy pierwsze ograniczenie określające największą wartość składowej stycznej wektora naprężenia, która może być przekazana przez linię kontaktu:

$$(5.2) \quad |\sigma_{\gamma\delta}| \leq K_{\mu\nu}.$$

Jeżeli z obu stron  $L_{\nu\mu}$  ma być spełniony warunek plastyczności (1.2), to składowa «wewnętrzna» tensora naprężenia po dwóch stronach  $L_{\nu\mu}$  wynosi<sup>(6)</sup>

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \gamma < \gamma_0: \quad \sigma_{\delta\delta}^\nu &= \sigma_{\gamma\gamma} \pm 2(K_\nu^2 - \sigma_{\gamma\delta}^2)^{1/2}, \\ \gamma > \gamma_0: \quad \sigma_{\delta\delta}^\mu &= \sigma_{\gamma\gamma} \pm 2(K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Linia kontaktu  $L_{\nu\mu}$  dwu ciał uplastycznionych jest więc linią nieciągłości pola naprężenia; nieciągłości doznaje składowa normalna tensora naprężenia działająca równoległe do  $L_{\nu\mu}$ , zaś wielkość skoku wynosi<sup>(7)</sup>*

$$(5.4) \quad \sigma_{\delta\delta} = \frac{2|(K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2} - (K_\nu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2}|}{2|(K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2} + (K_\nu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2}|}.$$

Inaczej mówiąc, pole naprężeń można przedłużyć z obszaru  $G_\nu$  w obszar  $G_\mu$  jako ciągłe tylko w przypadku, gdy jeden z obszarów jest w otoczeniu  $L_{\nu\mu}$  nieuplastyczniony.

Na powstanie skoku naprężeń składają się dwa efekty: 1) skok granicy plastyczności, 2) niejednoznaczność, z jaką warunek plastyczności określa  $\sigma_{\delta\delta}$  dla danych  $\sigma_{\gamma\gamma}$ ,  $\sigma_{\delta\gamma}$ . Sytuację odpowiadającą przyjęciu jednakowych znaków we wzorach (5.3) i zatem znaku minus we wzorze (5.4) nazwiemy *nieciągłością pierwszego rodzaju*; sytuację odpowiadającą przyjęciu przeciwnych znaków we wzorach (5.3) i znaku plus w (5.4) określamy jako *nieciągłość drugiego rodzaju*. Gdy skoku granicy plastyczności nie ma,  $K_\nu = K_\mu$ , nieciągłość

<sup>(6)</sup> Wartości  $\sigma_{\delta\delta}^\nu$ ,  $\sigma_{\delta\delta}^\mu$  (i podobne wielkości dalej) rozumiemy jako lewo- i prawostronne granice.

<sup>(7)</sup> Wzory (5.4) i (5.6) łatwo zinterpretować za pomocą kół Mohra o promieniach  $K_\nu$ ,  $K_\mu$ .

pierwszego rodzaju znika, drugiego zaś rodzaju pozostaje. Wynika stąd, że linia kontaktu będzie z reguły linią nieciągłości pierwszego rodzaju.

Przejdźmy do wyznaczenia warunków na ciśnienie średnie  $\sigma$  i kąt  $\psi$  nachylenia linii poślizgu  $\alpha$  do normalnej do linii kontaktu. Korzystając z (4.10) i (5.1) otrzymujemy dla skoku ciśnienia średniego zależność

$$(5.5) \quad \sigma^v - \sigma^\mu = K_v \sin 2\psi^v - K_\mu \sin 2\psi^\mu = K_v \sin 2\psi^v - [K_\mu^2 - (K_v \cos 2\psi^v)^2]^{1/2},$$

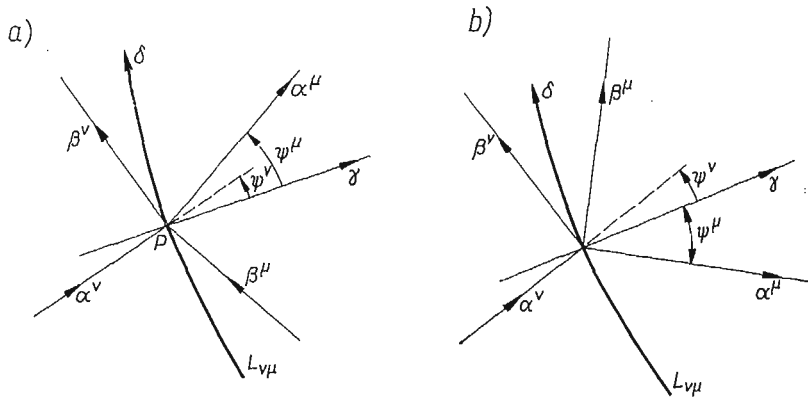
a dla skoku kąta  $\psi$  związek

$$(5.6) \quad \psi^\mu = \pm \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{K_v}{K_\mu} \cos 2\psi^v \right) + n\pi, \quad \psi = \theta - \varphi,$$

gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą,  $\arccos x$  jest rozumiane jako wartość główna funkcji  $\text{Arccos } x$ .

a. Zajmiemy się analizą wzoru (5.6) pomijając na razie ograniczenia wynikające z (4.4), tzn. przyjmując, że zachodzi warunek (2.4) z rozdziału I.

Położenie linii poślizgu przecinających linię kontaktu w punkcie  $P$  przedstawione jest na rys. 2.2: znakowi plus we wzorze (5.6) odpowiada nieciągłość pierwszego rodzaju (rys. 2.2a), znakowi zaś minus nieciągłość drugiego rodzaju (rys. 2.2b). Zauważmy, że znana reguła W. PRAGERA [20] o symetrii linii poślizgu względem linii nieciągłości nie jest spełniona dla  $K_v \neq K_\mu$ .



Rys. 2.2

Przyjmijmy dla uporządkowania dalszych rozważań, że  $K_v < K_\mu$  i wprowadzimy wielkości pomocnicze  $\eta, \kappa$

$$(5.7) \quad \eta \equiv \frac{K_v}{K_\mu}, \quad \kappa \equiv \frac{1}{2} \arccos \eta,$$

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{\pi}{4}.$$

Przyjmijmy ponadto, że kąty  $\psi^v, \psi^\mu$  są tak określone, że spełniają nierówności

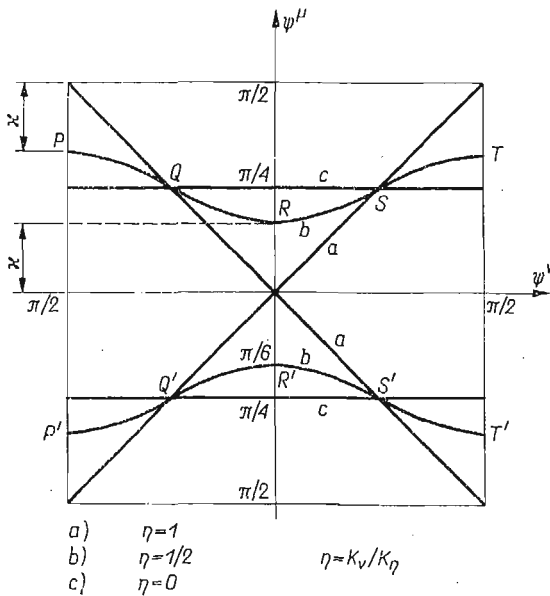
$$(5.8) \quad -\frac{\pi}{2} \stackrel{\text{df}}{\leq} \psi \stackrel{\text{df}}{\leq} +\frac{\pi}{2}.$$

Można zawsze do tego doprowadzić dodając do  $\psi^v(\psi^\mu)$  kąt  $\pm\pi$  [tzn. zmieniając jednocześnie zwroty linii  $\alpha, \beta$  w obszarze  $G_v(G_\mu)$ ] co nie zmienia, jak widać z (4.10), stanu naprężenia.

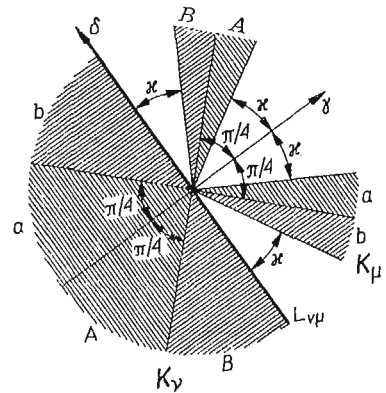
Zależność (5.6) przedstawiona została na rys. 2.3. Dla danego  $\eta$  kąt  $\psi^\mu$  (tzn. kąt między normalną do linii kontaktu a linią poślizgu  $\alpha^\mu$ , biegnącą z punktu  $P$  w materiale mocniejszym) ograniczony jest przez nierówności

$$(5.9) \quad \kappa \leq |\psi^\mu| \leq \frac{\pi}{2} - \kappa.$$

Oznacza to, że charakterystyki  $\alpha^\mu, \beta^\mu$  w obszarze mocniejszym nie mogą tworzyć z normalną do linii kontaktu  $L_{v\mu}$  oraz z samą linią kontaktu kątów ostrych mniejszych od  $\kappa$ .



Rys. 2.3



Rys. 2.4

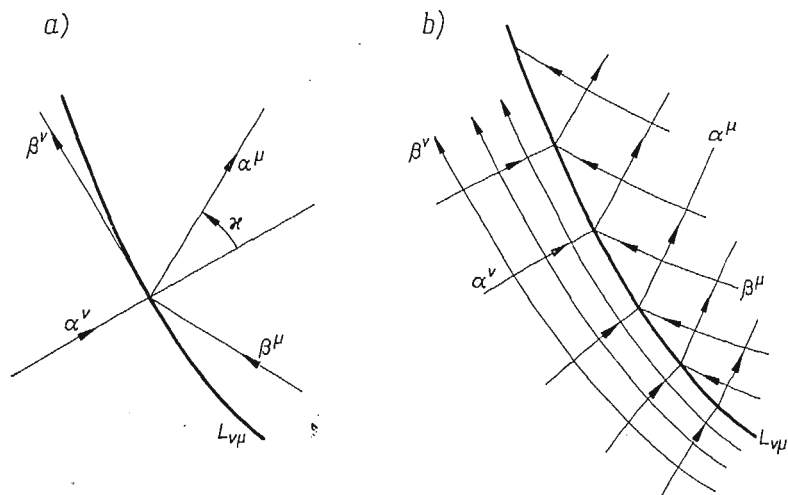
Na rysunku 2.4 obszary, w których mogą być położone charakterystyki przechodzące przez punkt  $P$ , zostały zakreskowane. Charakterystyka  $\alpha^v$  biegnąca np. w obszarze  $A^v$  doznaje przy przejściu przez linię kontaktu załamania trafiając do obszaru  $A^\mu$ , jeżeli nieciągłość naprężeń jest pierwszego rodzaju, lub do obszaru  $a^\mu$ , jeżeli nieciągłość jest rodzaju drugiego.

Wskazemy jeszcze na następujący aspekt zbadanego zjawiska: w obszarze słabszym może istnieć każdy statycznie dopuszczalny (tzn. spełniający równania równowagi i warunek plastyczności) stan naprężenia, natomiast w obszarze silniejszym mogą istnieć tylko stany spełniające ograniczenie (5.9). Inaczej mówiąc, każdy stan naprężenia można przedłużyć z obszaru słabszego w obszar mocniejszy, ale nie każdy z mocniejszego do słabszego.

Zwłaszcza interesująco przedstawia się przypadek szczególny, gdy charakterystyka  $\alpha^\mu$  zajmuje jedno ze skrajnych położeń, co odpowiada znakom równości w (5.9) oraz punktom

$P, R, T, P', R', T'$  na rys. 2.3. Linia kontaktu ma w punkcie  $P$  kierunek charakterystyczny dla obszaru słabszego. Dochodzimy w ten sposób do ważnego wniosku: *linia kontaktu może stanowić charakterystykę lub obwiednię charakterystyk dla obszaru słabszego*<sup>(8)</sup>

Sytuację odpowiadającą punktowi  $R$  z rys. 2.3  $\psi^v = 0, \psi^\mu = \kappa$  przedstawiono na rys. 2.5.



Rys. 2.5

Siatka linii poślizgu jest gładka w otoczeniu linii kontaktu  $L_{v\mu}$ , tzn.  $\psi] = 0$ , tylko wtedy, gdy  $L_{v\mu}$  jest jednocześnie trajektorią naprężenia głównego i linią nieciągłości pierwszego rodzaju.

b. Jeżeli maksymalne naprężenie styczne, które może być przekazane przez linię kontaktu, jest mniejsze od  $K_v$ , to należy uwzględnić dodatkowo warunek (5.2). Wprowadzimy wielkości pomocnicze:

$$(5.10) \quad \eta_v \equiv \frac{K_{v\mu}}{K_v}, \quad \kappa_v \equiv \frac{1}{2} \arccos \eta_v,$$

$$\eta_\mu \equiv \frac{K_{v\mu}}{K_\mu}, \quad \kappa_\mu \equiv \frac{1}{2} \arccos \eta_\mu.$$

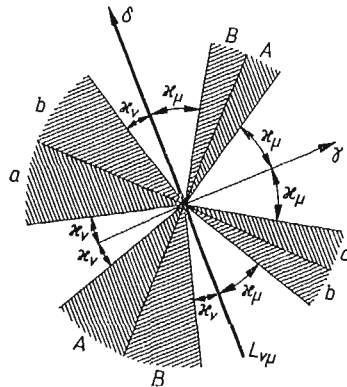
Korzystając z (5.6) i przyjmując nadal umowę (5.8) otrzymujemy następujące dodatkowe ograniczenia dla kątów  $\psi^v, \psi^\mu$ :

$$(5.11) \quad \kappa_v \leq |\psi^v| \leq \frac{\pi}{2} - \kappa_v, \quad \kappa_\mu \leq |\psi^\mu| \leq \frac{\pi}{2} - \kappa_\mu.$$

<sup>(8)</sup> Wydaje się, że wykryta silna osobliwość w przebiegu siatki charakterystyk powinna mieć miejsce w ogólnym przypadku quasi-liniowego hiperbolicznego układu równań o współczynnikach typu (4.4). Można sobie wyobrazić, jak trudno byłoby ją wykryć nie biorąc pod uwagę sensu mechanicznego problemu.

Ograniczenia te pokazano na rys. 2.6 analogicznym do rys. 2.4.

Warunki dla kąta  $\theta$  otrzymujemy z wyżej podanych przez podstawienie (4.11), gdzie  $\varphi$  jest kątem między normalną do  $L_{\nu\mu}$  a osią  $x$ .



Rys. 2.6

B. *Analiza prędkości przemieszczeń.* Własności pola prędkości przemieszczeń i odkształceń w otoczeniu linii kontaktu są prostym skutkiem własności stanu naprężenia.

a. Jeżeli  $|\sigma_{\delta\gamma}| < \min(K_\nu, K_{\nu\mu})$ , to w myśl analizy przeprowadzonej w p. 1 skok składowej stycznej  $V_\delta$  wektora prędkości przemieszczeń jest niemożliwy, a ponieważ wykluczaliśmy również możliwość skoku składowej normalnej  $V_\gamma$ , to pole wektora prędkości jest ciągłe na  $L_{\nu\mu}$ , tzn.

$$(5.12) \quad \mathbf{V}^\nu = \mathbf{V}^\mu \quad \text{dla} \quad \kappa < |\psi^\mu| < \frac{\pi}{2} - \kappa \quad \text{lub} \quad \kappa_\nu < |\psi^\nu| < \frac{\pi}{2} - \kappa_\nu.$$

Składowe w kierunku poślizgu ulegają zmianie wskutek obrotu linii poślizgu i związane są ze sobą zależnościami

$$(5.13) \quad \begin{aligned} V_\alpha^\mu &= V_\alpha^\nu \cos \Delta\psi - V_\beta^\nu \sin \Delta\psi, \\ V_\beta^\mu &= V_\alpha^\nu \sin \Delta\psi + V_\beta^\nu \cos \Delta\psi, \end{aligned} \quad \Delta\psi \equiv \psi^\mu - \psi^\nu.$$

Ze związków  $V_\delta^\nu = V_\delta^\mu$  i  $V_\gamma^\nu = V_\gamma^\mu$ , z których wynika  $\epsilon_{\delta\delta}^\nu = \epsilon_{\delta\delta}^\mu$ , przy wykorzystaniu prawa płynięcia (4.6) otrzymujemy

$$(5.14) \quad \lambda^\nu (\sigma_{\delta\delta}^\nu - \sigma_{\gamma\gamma}) = \lambda^\mu (\sigma_{\delta\delta}^\mu - \sigma_{\gamma\gamma}).$$

Jeżeli nieciągłość naprężeń na linii kontaktu jest nieciągłością pierwszego rodzaju (tak jest prawie zawsze), to wyrażenia w nawiasach mają ten sam znak, zatem na  $L_{\nu\mu}$  doznaje przeskoku współczynnik funkcyjny w prawie płynięcia, przy czym

$$(5.15) \quad \frac{\lambda^\nu}{\lambda^\mu} = \left( \frac{K_\nu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2}{K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2} \right)^{1/2} < 1.$$

Jeżeli nieciągłość naprężeń jest nieciągłością drugiego rodzaju, to sytuacja nie różni się od dobrze znanej w przypadku jednorodności (por. np. [20]); wyrażenia w nawiasach we wzorze (5.14) mają różne znaki, a ponieważ z definicji  $\lambda \geq 0$ , to

$$(5.16) \quad \lambda^\nu = \lambda^\mu = 0, \quad \epsilon_{ij}^\nu = \epsilon_{ij}^\mu = 0, \quad i, j = \gamma, \delta,$$

co oznacza, że linię kontaktu należy interpretować jako nierozciągliwą, idealnie wiotką nić.

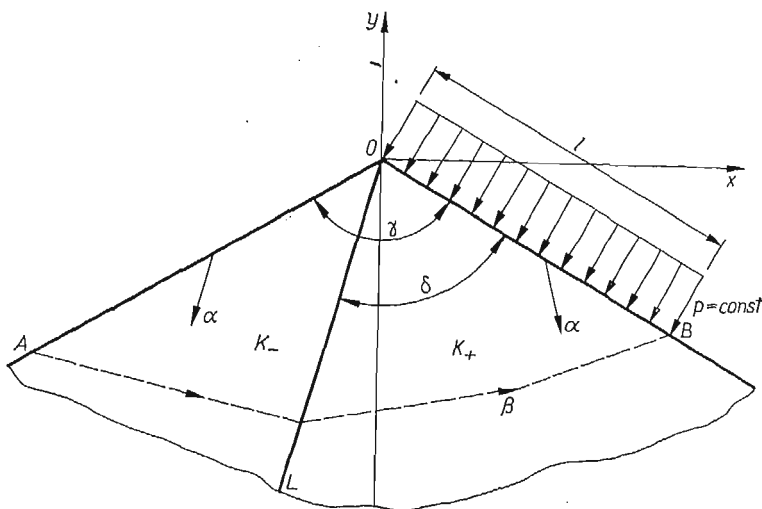
b. Gdy  $|\sigma_{\gamma\delta}| = K_v < K_{v\mu}$ , to przebieg charakterystyk w otoczeniu  $L_{v\mu}$  ma charakter przedstawiony na rys. 2.6 i powstaje możliwość nieciągłości składowej  $V_\delta$ , przy czym z równań (4.14) nie wynika stałość wartości skoku.

Nieciągłość składowej  $V_\delta$  może powstać również w przypadku, gdy

$$|\sigma_{\gamma\delta}| = K_{\mu\nu} < K_v.$$

### 6. Początkowe płynięcie plastyczne klina o skokowej niejednorodności

A. *Sformułowanie problemu.* Rozważmy problem nośności granicznej klina obciążonego na jednej z krawędzi stałym obciążeniem normalnym. Kłін składa się z dwóch materiałów o granicach plastyczności  $K_+$ ,  $K_-$ ,  $K_+ \geq K_-$ , przedzielonych prostą linią kontaktu, przechodzącą przez wierzchołek. Obciążenie działa na część mocniejszą.



Rys. 2.7

Zadanie charakteryzują trzy niezależne parametry:  $\eta = K_-/K_+$ , kąt rozwarcia klina  $\gamma$  i kąt rozwarcia strefy mocniejszej  $\delta$ . W przestrzeni parametrów  $C_3$  interesuje nas wnętrze obszaru

$$(6.1) \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad 0 \leq \delta \leq \gamma.$$

Przyjmijmy kartezjański układ współrzędnych, kierując oś wzdłuż dwusiecznej kąta  $\gamma$  (rys. 2.7). Korzystając ze związków (4.10) warunki brzegowe możemy zapisać w sposób następujący<sup>(9)</sup>:

$$(6.2) \quad OB: \quad \sigma = -p + K_+, \quad \theta = -\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right), \quad \dots$$

<sup>(9)</sup> Założone kierunki linii  $\alpha$ ,  $\beta$  odpowiadają ścisaniu w otoczeniu brzegu  $OA$  i przyjętym umowom co do kierunku linii poślizgu  $\alpha$ ,  $\beta$  (por. rys. 2.1 a także [20]).

$$(6.3) \quad OA: \quad \sigma = -K_-, \quad \theta = -\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \dots$$

$$(6.4) \quad AB: \quad \dots, \quad \dots, \quad V_\alpha = 0,$$

gdzie przez  $p$  oznaczono nieznaną wartość nacisku normalnego na  $OB$ ,  $AB$  jest nieznaną charakterystyką  $\beta$ , dzielącą obszar sztywny i obszar ruchu plastycznego.

Łatwo stwierdzić, że warunek brzegowy dla prędkości przemieszczeń (6.4) nie daje informacji wystarczającej do wyznaczenia sposobu plastycznego ruchu klina w chwili odpowiadającej początkowi niewstrzymanego płynięcia plastycznego (z dokładnością tylko do skali czasu). W ramach rozpatrywanego modelu początkowe pole prędkości przemieszczeń będzie znane zatem z dokładnością do jednej funkcji jednej zmiennej, która musi spełniać słabe ograniczenia wynikające z postulatu nieujemności mocy dysypacji w każdym punkcie obszaru uplastycznienia.

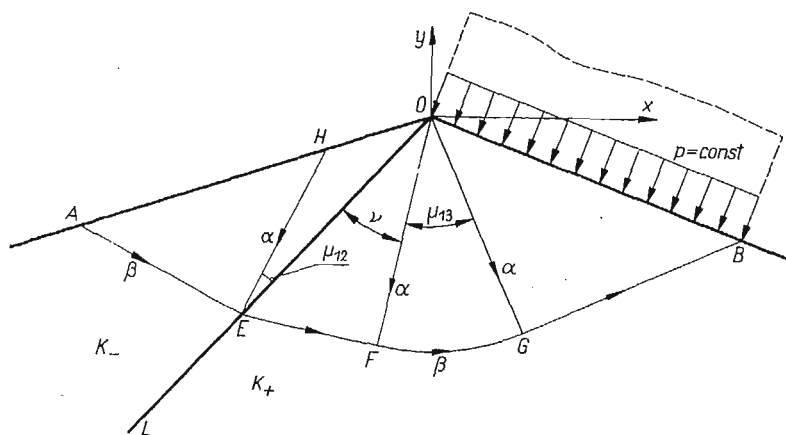
Pozwala to, jak się przekonamy, traktować otrzymane pola naprężeń jako rozwiązania słuszne dla bardzo obszernej klasy kinematycznych warunków brzegowych.

Rozwiązanie postawionego problemu dla klina jednorodnego ( $K_+ = K_-$ ) podał E. H. LEE [21] (por. także [20]).

B. *Rozwiązania dla naprężeń.* W obu obszarach niedomkniętych  $G_+$ ,  $G_-$  mamy  $K = \text{const}$ , toteż z obu stron linii kontaktu obowiązują całki Köttera-Hencky'ego dla równań (4.13)

$$(6.5) \quad \sigma - 2K\theta = f(\beta), \quad \sigma + 2K\theta = g(\alpha).$$

Całkowanie równań (4.12) polegać będzie na doborze funkcji  $f$ ,  $g$  spełniających warunki brzegowe (6.2), (6.3) oraz warunki na linii kontaktu (5.5), (5.6).



Rys. 2.8

Rozwiązanie 1, rys. 2.8<sup>(10)</sup>. Na odcinku  $OA$  o nieznannej długości warunki (6.3)

<sup>(10)</sup> Wszystkie rysunki są wykonane dla  $\eta = 1/2$ .



formułują problem Cauchy'ego, którego rozwiązaniem jest jednorodny stan  $f = \text{const}$ ,  $g = \text{const}$ , co daje

$$(6.6) \quad \sigma = -K_-, \quad \theta = -\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{w } AOE.$$

Dla  $\gamma - \delta < \pi/4$  stan ten sięga do linii kontaktu  $L$ .

Nieciągłość naprężeń na  $L$  jest oczywiście nieciągłością pierwszego rodzaju. Korzystamy z warunków (5.5), (5.6) i (4.11), w których należy przyjąć  $\varphi = -\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right)$ ,  $n = 0$ , przyjąc znak plus oraz zamienić indeksy  $\mu$ ,  $\nu$  odpowiednio na  $+$ ,  $-$ . Obliczając  $\sigma^+$ ,  $\theta^+$  otrzymujemy na  $OE$  problem Cauchy'ego. Rozwiązaniem jest stan jednorodny:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \sigma &= -K_- - [1 - \cos 2(\gamma - \delta)] - K_+ [1 - \eta^2 \sin^2 2(\gamma - \delta)]^{1/2}, \\ \theta &= -\frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \arccos[\eta \sin 2(\gamma - \delta)], \end{aligned} \quad \text{w } EOF,$$

gdzie  $OF$  jest charakterystyką  $\alpha$  przechodzącą przez punkt  $O$ . Zasięg tej strefy określa kąt  $EOF$  równy  $\nu$ ,

$$(6.8) \quad \nu \equiv \frac{1}{2} \arccos[\eta \sin 2(\gamma - \delta)].$$

Znana charakterystyka  $OF$  oraz warunek (6.2) w punkcie  $O$  formułują zwyrodniały problem Riemanna (por. np. [20]). Charakterystyki  $\alpha$  tworzą wachlarz biegunowy ( $g = \text{const}$ ), zatem

$$(6.9) \quad \sigma = \sigma_{FO} - 2K_+(\theta - \theta_{FO}), \quad \theta_{FO} \leq \theta \leq -\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{w } FOG.$$

Dzięki przyjęciu  $p = \text{const}$  problem Cauchy'ego (6.2) ma rozwiązanie niesprzeczne z (6.9). Otrzymujemy

$$(6.10) \quad \sigma = -p + K_+, \quad \theta = -\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{w } GOB.$$

Porównując  $\sigma$  z  $FOG$  i  $GOB$  na  $OG$  otrzymujemy wartość obciążenia granicznego

$$(6.11) \quad p_1 = K_+ \left\{ (1 + \eta) - \eta \cos 2(\gamma - \delta) + [1 - \eta^2 \sin^2 2(\gamma - \delta)]^{1/2} + \left[ 2\delta - \frac{\pi}{2} - \arccos(\eta \sin 2(\gamma - \delta)) \right] \right\}.$$

Przedstawione rozwiązanie jest słuszne, gdy zachodzą nierówności (por. rys. 2.8)

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \mu_{12} &= \frac{\pi}{4} - (\gamma - \delta) \geq 0 \\ \mu_{13} &= \delta - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos[\eta \sin 2(\gamma - \delta)] \geq 0. \end{aligned}$$



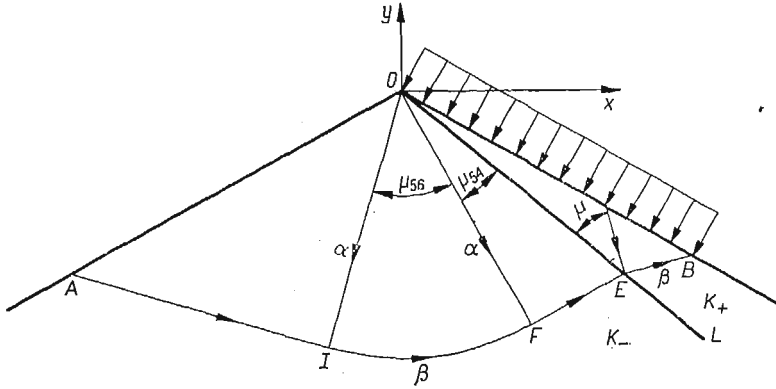




Gdy  $\mu_{45} = 0$  linia nieciągłości naprężeń  $FO$  pokrywa się z linią kontaktu. Otrzymujemy wyjątkową sytuację, gdy linia kontaktu jest linią nieciągłości drugiego rodzaju.

Rozwiązanie 5, rys. 2.12. Gdy  $\mu_{45} < 0$  otrzymujemy możliwość zbudowania rozwiązania, w którym pole naprężeń jest znów ciągłe po obu stronach linii kontaktu.

Rozprężenia w obszarach  $AIO$ ,  $IFO$ ,  $EBO$  określone są odpowiednio przez wzory (6.6), (6.14) i (6.10).



Rys. 2.12

Z warunku określającego wielkość skoku kąta  $\theta$  na linii kontaktu (5.6) wyznaczamy  $\theta_{FEO}$ . W tym celu należy we wzorze (5.6) z uwzględnieniem (4.11) przyjąć  $\theta^\mu = \theta_{EBO} + \pi$ ,  $\theta^\nu = \theta_{FEO} + \pi$ ,  $\varphi = \frac{\gamma}{2} - \delta$ . Jednocześnie z warunku

$$(6.24) \quad \sigma_{AIO} + 2K - \theta_{AIO} = \sigma_{FEO} + 2K - \theta_{FEO}$$

wyznaczamy ciśnienie średnie w strefie  $FEO$ . Po wykonaniu rachunków otrzymujemy

$$(6.25) \quad \begin{aligned} \sigma &= -K - 2K \left[ (\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right], \\ \theta &= \frac{\gamma}{2} - \delta - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \end{aligned} \quad \text{w } FEO.$$

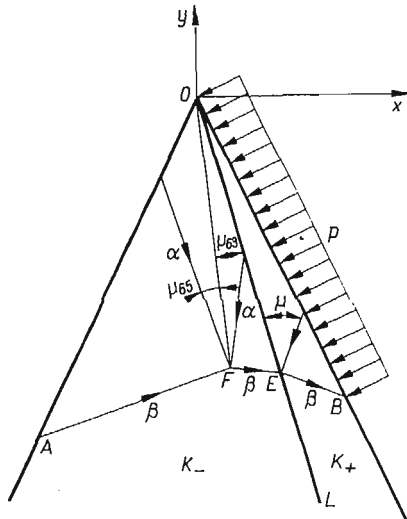
Z drugiego warunku na linii kontaktu (5.5) określamy wielkość obciążenia granicznego:

$$(6.26) \quad p_5 = K_+ \left\{ (1 + \eta) - \cos 2\delta + (\eta^2 - \sin^2 2\delta)^{1/2} + 2\eta \left[ (\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \right\}.$$

Zakres słuszności rozwiązania określają nierówności

$$(6.27) \quad \mu_{54} = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \geq 0, \quad \mu_{56} = (\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \geq 0.$$

Rozwiązanie 6 (rys. 2.13). Gdy w rozwiązaniu 3 mamy  $\mu_{30} = 0$ , to podobnie jak dla  $\mu_{45} = 0$  linia kontaktu jest linią nieciągłości drugiego rodzaju. Dla  $\mu_{30} < 0$  linia nieciągłości naprężeń przebiega wewnątrz obszaru słabszego. To samo ma miejsce w rozwiązaniu 5 dla  $\mu_{50} < 0$ . Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie przedstawione na rys. 2.13.



Rys. 2.13

Naprężenia w obszarach  $AFO$  i  $EBO$  określone są przez zależności (6.6), (6.10). Z warunków na linii kontaktu (5.5) i (5.6) otrzymujemy

$$(6.28) \quad \sigma = -p + K_+ - K_+ \cos 2\delta + K_- \left(1 - \frac{\sin^2 2\delta}{\eta^2}\right)^{1/2},$$

$$\theta = \frac{\gamma}{2} - \delta - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \quad \text{w } EFO.$$

Korzystając ze związków (5.5) i (5.6), w których należy przyjąć  $K_v = K_\mu = K_-$ ,  $\theta^v = \theta_{AFO}$ ,  $\theta^\mu = \theta_{EFO}$ ,  $n = 1$ , obliczamy kąt  $\bar{\varphi}$ , określający położenie linii nieciągłości:

$$(6.29) \quad \bar{\varphi} = -\frac{1}{2} \left( \delta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right)$$

oraz wielkość obciążenia granicznego

$$(6.30) \quad p_0 = K_+ \left\{ (1 + \eta) - \cos 2\delta + (\eta^2 - \sin^2 2\delta)^{1/2} - 2\eta \cos \left[ (\gamma - \delta) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \right\}.$$

Rozwiązanie jest słuszne, gdy zachodzą nierówności:

$$(6.31) \quad \mu_{03} = \frac{1}{2} \left[ (\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \geq 0,$$

$$\mu_{55} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{4} - (\gamma - \delta) + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \geq 0.$$

Posługując się wzorami (5.6) można bez trudu dla wszystkich rozwiązań 1, ..., 6 znaleźć naprężenia w układzie biegunowym.

C. *Rozwiązania dla prędkości.* Aby wykazać, że znalezione rozwiązania 1, ..., 6 są kinematycznie dopuszczalne, wystarczy dla każdego z nich wskazać jedno rozwiązanie równań H. GEIRINGER (4.14) spełniające warunek brzegowy (6.4) oraz postulat nieujemności mocy dyssypacji w każdym punkcie obszaru uplastycznienia (tzn. postulat  $\lambda \geq 0$ ).

W poniższych wywodach chcemy osiągnąć ogólniejszy cel, mianowicie *chcemy dla każdego z rozwiązań 1, ..., 6 wskazać wszystkie dopuszczalne rozkłady prędkości przemieszczeń.* Przy tej sposobności ujawniona zostanie zasadnicza różnica między grupą rozwiązań 1, 2 a grupą rozwiązań 3, 4, 5, 6.

Otrzymane rozwiązania zawierają obszary o różnych siatkach charakterystyk. Przy rozwiązywaniu równań H. GEIRINGER (4.14) oraz obliczaniu prędkości odkształceń umówimy się przyjmować układy współrzędnych w poszczególnych obszarach w następujący jednolity sposób. W obszarach, w których  $\theta = \text{const}$ , przyjmujemy układy współrzędnych kartezjańskich o kierunkach pokrywających się z kierunkami charakterystyk  $\alpha, \beta$  i o wspólnym początku w punkcie  $O$ . W obszarach wachlarzy biegunowych przyjmujemy układy współrzędnych biegunowych o wspólnym biegunie  $O$ , przy czym  $\alpha$  jest współrzędną radialną, zaś  $\beta$  współrzędną kątową.

Gdy charakterystyki  $\alpha, \beta$  tworzą siatkę kartezjańską, to, jak wiadomo (por. np. [20]), wobec  $\theta = \text{const}$  równania (4.14) mają rozwiązania w postaci

$$(6.32) \quad V_{\alpha}^{\#} = B(\beta), \quad V_{\beta} = A(\alpha).$$

Dla siatek biegunowych, przyjmując  $\beta$  jako współrzędną kątową, otrzymujemy rozwiązania równań (4.14) w postaci

$$(6.33) \quad V_{\alpha} = -B'(\beta), \quad V_{\beta} = B(\beta) + A(\alpha).$$

Rozwiązywanie problemów brzegowych dla równań (4.14) będzie polegać w naszym przypadku na wyznaczeniu funkcji  $A(\alpha), B(\beta)$ .

Prawo płynięcia Misesa (4.6) odniesione do siatki charakterystyk ( $\theta \equiv \varphi$ ) ma postać  $\epsilon_{\alpha\beta} = \lambda\sigma_{\alpha\beta}$ , ( $\epsilon_{\alpha\alpha} = \epsilon_{\beta\beta} = 0$ ). Wobec przyjętych umów o kierunkach linii  $\alpha, \beta$  i o układach współrzędnych mamy  $\sigma_{\alpha\beta} = +K$ . Zatem *postulat nieujemności mocy dyssypacji,  $\lambda \geq 0$ , jest równoważny postulatowi  $\epsilon_{\alpha\beta} \geq 0$ .*

Od dawna wiadomo, że w płaskim stanie odkształcenia ośrodka idealnie plastycznego pole wektorowe prędkości przemieszczeń może być nieciągłe na charakterystykach. Z formalnego punktu widzenia oznacza to, że w takich przypadkach rozwiązania równań (4.5)–(4.7) mają charakter rozwiązań uogólnionych. W związku z tym z wielu stron padały głosy o konieczności zastosowania w tych przypadkach teorii funkcji uogólnionych (teorii dystrybucji), jednakże, jak się wydaje, prób realizacji tego projektu dotychczas nie robiono. W niniejszej części pracy zostaną użyte najprostsze i dobrze znane dystrybucje: jednostkowa funkcja Heaviside'a  $H(x)$  oraz funkcja Diraca  $\delta(x)$ . Są one bardzo przydatne ujawniając sens mechaniczny rozwiązań i przyczyniając się do zawartości i przejrzystości wywodów.

Dla kompletności wywodów przytoczymy wszystkie własności dystrybucji  $H(x)$ ,  $\delta(x)$ , które będą przez nas wykorzystane<sup>(12)</sup> (por. np. [24]):

$$(6.34) \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad H(ax) = H(x),$$

$$\delta(x) = H'(x), \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad \delta(-x) = \delta(x),$$

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad \int_a^b f(x)\delta(x) dx = f(0), \quad (a < 0, b > 0),$$

gdzie  $f(x)$  jest funkcją ciągłą i różniczkowalną.

Rozpatrzmy dowolną funkcję  $F(\xi)$  określoną dla  $\xi \geq 0$ , przy czym  $F(\xi) = 0$  dla  $\xi > l$ , o skończonej ilości punktów nieciągłości i skończonej ilości punktów nieciągłości pochodnej  $F'(\xi)$  w przedziale  $(0, l)$ . Skoki funkcji  $F(\xi)$  w punktach  $\xi^v$  ( $v = 1, \dots, n$ ,  $\xi^v < \xi^{v+1}$ ,  $\xi^n < l$ ) oznaczmy przez  $\Delta_v$ , zaś skoki pochodnej  $F'(\xi)$  w punktach  $\bar{\xi}^\mu$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) oznaczmy przez  $h_\mu$ . Umowa o znakach tych wielkości wynika z definicji

$$(6.35) \quad \Delta_v \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} [F(\xi^v + \varepsilon) - F(\xi^v - \varepsilon)], \quad h_\mu \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} [F'(\bar{\xi}^\mu + \varepsilon) - F'(\bar{\xi}^\mu - \varepsilon)].$$

Funkcja  $F(x)$  może być przedstawiona w postaci (por. np. [24])

$$(6.36) \quad F(\xi) = f(\xi)H(l-\xi) - \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\xi^v - \xi),$$

gdzie  $f(\xi)$  jest funkcją ciągłą, zdefiniowaną przez tę zależność. Wzór ten ma prostą interpretację geometryczną, przedstawioną na rys. 2.14; pierwszy człon jest częścią ciągłą funkcji  $F(x)$ , drugi zaś człon stanowi część schodkową tej funkcji. Zwracamy uwagę na to, że ze względu na późniejsze zastosowania funkcja  $f(\xi)$  została tak dobrana, że

$$(6.37) \quad F(l) = f(l), \quad F(0) = f(0) - \sum_{v=1}^n \Delta_v,$$

jak również na fakt, że nie interesuje nas półoś  $\xi < 0$ .

Pochodna funkcji  $F(\xi)$  zgodnie z (6.34) jest równa

$$(6.38) \quad F'(\xi) = f'(\xi)H(l-\xi) - f(l)\delta(l-\xi) + \sum_{v=1}^n \Delta_v \delta(\xi^v - \xi).$$

<sup>(12)</sup> Według niedokładnego określenia przyjętego w fizyce « $\delta(x)$  jest funkcją równą zeru wszędzie z wyjątkiem punktu  $x = 0$ , gdzie ma ona wartość  $\infty$ , przy czym całka  $\int_a^b \delta(x) dx$ ,  $a < 0$ ,  $b > 0$ , jest równa 1».

Określenie to pozwala na łatwe intuicyjne uchwycenie sensu mechanicznego dalszych rachunków.

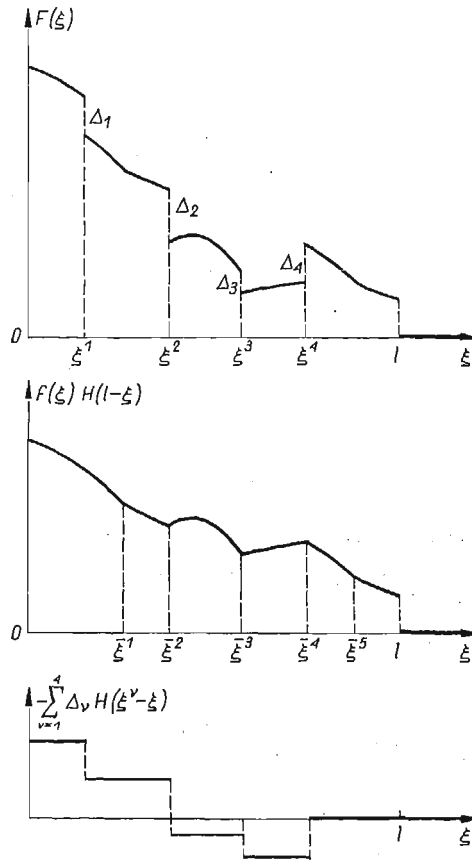
We wzorach na prędkość symbol  $\delta$  oznaczać będzie zawsze  $\delta$ -funkcję Diraca (a nie kąt rozwarcia strefy mocniejszej!).



Pochodna  $f'(\xi)$  jest nieciągła w punktach  $\bar{\xi}^\mu$ . Używając rozkładu analogicznego do (6.36) można napisać

$$(6.39) \quad f'(\xi) = \bar{\varphi}'(\xi)H(l-\xi) - \sum_{\mu=1}^m h_\mu H(\bar{\xi}^\mu - \xi),$$

gdzie  $\varphi'(\xi)$  jest funkcją ciągłą.



Rys. 2.14

Rozwiązanie 1 (rys. 2.15). Klasę dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń uzależnimy od rozkładu składowej normalnej wektora prędkości na brzegu obciążonym, tzn. od

$$(6.40) \quad V_{\alpha} |_{OB} = F(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq l,$$

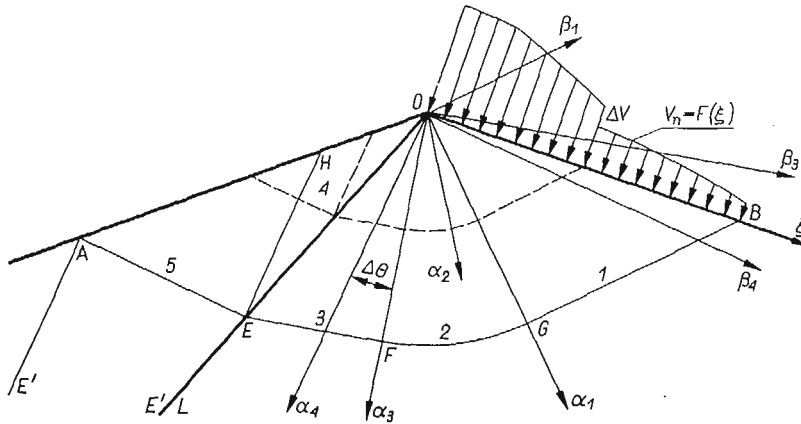
gdzie  $\xi$  jest długością na  $OB$  mierzoną od punktu  $O$ .

W poszczególnych obszarach przyjmujemy układy współrzędnych pokazane na rys. 2.15.

Zakładamy, że  $f(\xi)$  jest funkcją odcinkowo-ciągłą o odcinkowo-ciągłej pochodnej<sup>(13)</sup> i zastosujemy jej reprezentację (6.36).

Warunki brzegowe

$$(6.41) \quad \begin{aligned} V_{\alpha}^i|_{OB} - V_{\beta}^i|_{OB} &= \sqrt{2} \left\{ f(\xi) H(l - \xi) - \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\xi^v - \xi) \right\}, \\ V_{\alpha}^i|_{8GFE} &= 0 \end{aligned}$$



Rys. 2.15

formułują mieszany problem brzegowy dla równań (4.14) w obszarze składającym się ze stref 1, 2, 3. Korzystając z (6.32) oraz z równości  $\xi = \sqrt{2} a_1|_{OB}$  otrzymujemy jego rozwiązanie w postaci

$$(6.42) \quad \begin{aligned} V_{\alpha}^i &= 0, \\ V_{\beta}^i &= -\sqrt{2} f(\sqrt{2} a_i) H(a - a_i) + \sqrt{2} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(a_i^v - a_i), \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie  $a_1, a_2$  mają sens współrzędnych w układach kartezjańskich, a  $a_3$  jest współrzędną w układzie biegunowym,  $a = \frac{\sqrt{2}}{2} l$ ,  $a^v = \sqrt{2} \xi^v$ .

Ponieważ linia kontaktu  $L$  nie ma w żadnym punkcie kierunku charakterystycznego, wektor prędkości jest na niej ciągły (złączenie nie jest «zniszczone»). Otrzymujemy poprawnie postawiony na  $OE$  problem brzegowy Cauchy'ego dla obszaru 4 i następnie problem Riemanna dla obszaru 5.

Zastosujemy w tym przypadku oraz w dalszych rozwiązaniach następujący sposób formalny. Rozszerzamy obszar  $AEO$  przez dołączenie strefy sztywnej  $AEE'$ , gdzie  $E'$  jest punktem przecięcia linii kontaktu z prostą poprowadzoną z punktu  $A$  i mającą kierunek charakterystyki  $\alpha$ . Rozwiązanie (6.42) zostało tak napisane, że obowiązuje w całej części

<sup>(13)</sup> Wydaje się, że z punktu widzenia mechaniki rozpatrywanie jeszcze ogólniejszych rozkładów prędkości na  $OB$  nie ma sensu.

silniejszej klina, dając (ze względu na użyte funkcje Heaviside'a) w obszarze sztywnym  $V_\alpha = V_\beta = 0$ . Możemy zatem dla całego obszaru rozszerzonego  $AOE'$  sformułować problem Cauchy'ego [por. związki (5.13)]

$$(6.43) \quad V_{\alpha'}^{\alpha} = -V_{\beta'}^{\beta} \sin \Delta\theta, \quad V_{\beta'}^{\beta} = V_{\alpha'}^{\alpha} \cos \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \nu - \mu_{12}.$$

Uwzględniając związki

$$(6.44) \quad \alpha_3^{\alpha} = \alpha_4^{\alpha} \cos \Delta\theta + \beta_4^{\alpha} \sin \Delta\theta = \frac{a}{\alpha_4^E} \alpha_4^{\alpha} = \frac{a}{\beta_4^E} \beta_4^{\alpha}$$

$$\alpha_4^{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\cos \mu_{12}}{\cos \nu}, \quad \beta_4^{\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\sin \mu_{12}}{\cos \nu},$$

oraz (6.32), otrzymujemy rozkład prędkości w części słabszej w postaci

$$(6.45) \quad V_\alpha = \sqrt{2} f \left( l \frac{\beta_4^{\alpha}}{\beta_4^E} \right) \sin \Delta\theta H(\beta_4 - \beta_4^E) - \sqrt{2} \sin \Delta\theta \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\beta_4 - \beta_4^v),$$

$$V_\beta = -\sqrt{2} f \left( l \frac{\alpha_4^{\alpha}}{\alpha_4^E} \right) \cos \Delta\theta H(\alpha_4^E - \alpha_4) + \sqrt{2} \cos \Delta\theta \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_4^v - \alpha_4).$$

W strefie 5 wobec  $\beta_4 - \beta_4^E < 0$  pierwszy wzór daje  $V_\alpha = 0$ , a w strefie dołączonej  $AEE'$  wobec  $\beta_4 - \beta_4^E < 0$ ,  $\alpha_4^E - \alpha_4 < 0$  otrzymujemy  $V_\alpha = V_\beta = 0$ .

Otrzymane pole wektorowe prędkości jest nieciągłe. Jak widać z (6.42), (6.45) prędkość  $V_n^B = f(l) \neq 0$  powoduje powstanie nieciągłości składowej  $V_\beta$  na liniach  $\alpha_i = a$ ,  $i = 1, 2, 3$  ( $BGFE$ ),  $\alpha_4 = a_4^E$  ( $EA$ ) oraz nieciągłości składowej  $V_\alpha$  na linii  $\beta_4 = \beta_4^E$  ( $EH$ ). Analogiczne linie nieciągłości  $\alpha_i = \sqrt{2} \xi^v$ ,  $\alpha_4 = \alpha_4^v$ ,  $\beta_4 = \beta_4^v$  są spowodowane przez każdy skok  $\Delta_v$  prędkości normalnej  $V_n^{\alpha}$  (rys. 2.15).

Prędkości odkształceń postaciowych w poszczególnych obszarach wynoszą

$$(6.46) \quad 2\epsilon_{\alpha\beta}^1 = V_{\beta,\alpha}^1 = -2f'(\sqrt{2}\alpha_i)H(a-a_i) + \sqrt{2}f(l)\delta(a-a_i) - \sqrt{2} \sum_{v=1}^h \Delta_v \delta(\alpha_i^v - \alpha_i) \equiv \psi(\alpha_i), \quad i = 1, 3,$$

$$2\epsilon_{\alpha\beta}^2 = V_{\beta,\alpha_2}^2 - \frac{V_\beta^2}{\alpha_2} = \psi(\alpha_2) + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \sqrt{2}f(\sqrt{2}\alpha_2)H(a-\alpha_2) - \sqrt{2} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_2^v - \alpha_2) \right\},$$

$$2\epsilon_{\alpha\beta}^{4,3} = V_{\alpha,\beta_4} + V_{\beta,\alpha_4} = \left[ \sqrt{2} \frac{l}{\beta_4^E} \sin \Delta\theta f' \left( l \frac{\beta_4^{\alpha}}{\beta_4^E} \right) H(\beta_4 - \beta_4^E) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{2} \frac{l}{\alpha_4^E} \cos \Delta\theta f' \left( l \frac{\alpha_4^{\alpha}}{\alpha_4^E} \right) H(\alpha_4^E - \alpha_4) \right] + \sqrt{2}f(l) [\delta(\beta_4 - \beta_4^E) + \delta(\alpha_4^E - \alpha_4)] -$$

$$- \sqrt{2} \sum_{v=1}^n \Delta_v [\sin \Delta\theta \delta(\beta_4 - \beta_4^v) + \cos \Delta\theta \delta(\alpha_4^v - \alpha_4)].$$

Wzory te mają proste i wygodne interpretacje mechaniczne. Wyrazy zawierające pochodną «ciągłej części» rozkładu prędkości  $V_n|_{OB} = F(\xi)$  (por. rys. 2.14), tzn. funkcję  $f'(\xi)$ , przedstawiają rozkład prędkości odkształceń w odpowiednich obszarach, wyrazy zawierające  $\delta$ -funkcje przedstawiają nieskończenie wielkie prędkości ścinania na liniach nieciągłości wektora prędkości.

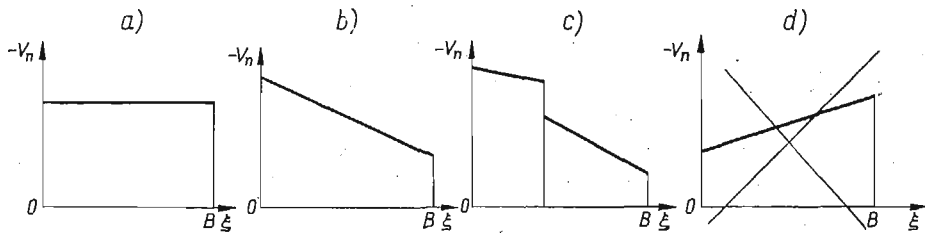
Wzory (6.46) pozwalają również na poprawne sformułowanie ograniczeń, które nakłada na funkcję  $F(\xi)$  warunek nieujemności mocy dyspozycji  $a_{\alpha\beta} \geq 0$ . Istotnie, będzie on spełniony w obszarach i na liniach nieciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy<sup>(14)</sup>

$$(6.47) \quad f(l) \geq 0, \quad \prod_{\xi} f'(\xi) \leq 0, \quad \prod_{\nu} \Delta_{\nu} \leq 0,$$

przy czym znak równości nie może mieć miejsca jednocześnie we wszystkich związkach.

Warunki te oznaczają, że rozkład prędkości normalnej na  $OB$  musi być dodatnią nierosnącą funkcją  $\xi$ .

Klasa dopuszczalnych rozkładów prędkości dla rozwiązania 1 została więc w pełni określona przez wzory (6.42), (6.45) i (6.47). Klasa ta jest bardzo obszerna. Wskażemy następujące przypadki szczególnie (rys. 2.16): a) gładki stempel wciskany ruchem postę-



Rys. 2.16

powym, b) gładki stempel wciskany ruchem postępowym z jednoczesnym obrotem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, c) kilka gładkich stempli oddziałujących jak w p. b), przy  $\Delta_{\nu} \leq 0$ . Zatem rozwiązanie 1, zbudowane dla klina obciążonego ciśnieniem bocznym, stanowi jednocześnie rozwiązanie wszystkich powyższych i wielu innych zadań. Łatwo wskazać jednocześnie zadania pokrewne, dla których rozwiązanie 1 nie jest poprawne ze względu na ujemność dysypacji mocy (mimo spełnienia wszystkich warunków kinematycznych i statycznych), np. zadanie o gładkim stemplu obracającym się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 2.16d).

Zauważmy jeszcze, że dla  $f(l) = \Delta_{\nu} = 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) wzory na prędkość odkształceń nie zawierają  $\delta$ -funkcji, co odpowiada ciągłości pola prędkości przemieszczeń. Dla  $f'(\xi) \equiv 0$  wzory na odkształcenia w obszarach 1, 3, 4, 5 zawierają same  $\delta$ -funkcje; w chwili odpowiadającej początkowi ruchu plastycznego obszary te zostają podzielone liniami nieciągłości prędkości na części zaczynające się poruszać jak ciała sztywne; gdy jest

<sup>(14)</sup> Symbol  $\prod_x$  oznacza kwantyfikator ogólny i powinien być czytany «dla każdego  $x$ ».

dotatkowo  $\prod_v \Delta_v = 0$ , mamy przykład z rys. 2.16, a ruch plastyczny jest taki jak w zadaniu omówionym w p. 7.

Rozwiązanie 2 (rys. 2.17). Rozwiązanie w obszarach 1, 2, 3 pokrywa się z rozwiązaniem określonym poprzednio (6.42).

Linia kontaktu jest charakterystyką dla słabszej części, a więc wektor prędkości może być dla niej nieciągły. Warunki brzegowe

$$(6.48) \quad V_{\beta}^- |_{OE} = V_{\beta}^3 |_{OE} \cos \kappa, \quad V_{\alpha} |_{EIA} = 0$$

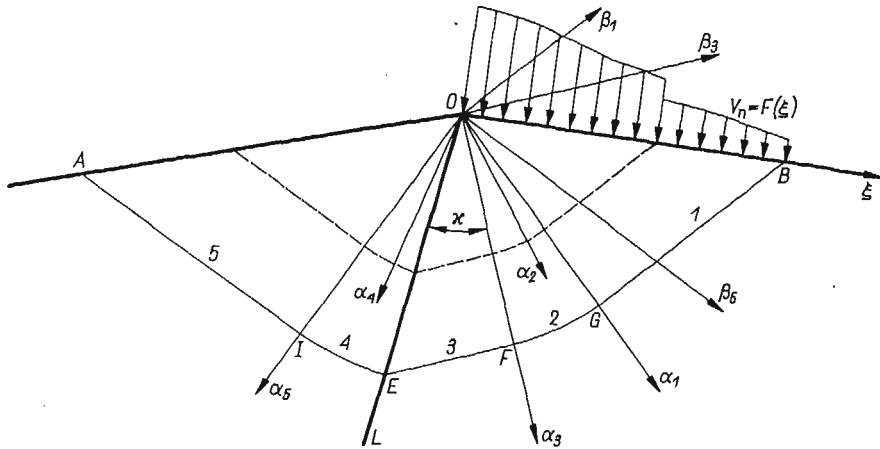
formułują problem charakterystyczny w obszarze składającym się ze stref 4, 5. Korzystając

z (6.33), (6.32), (6.42) oraz związku  $\alpha_4 |_{OE} = \frac{1}{\cos \kappa} \alpha_3 |_{OE}$  otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$(6.49) \quad V_{\alpha}^i = 0, \quad V_{\beta}^i = -\sqrt{2}f \left( l \frac{\alpha_i}{\alpha_4^E} \right) \cos \kappa H(\alpha_4^E - \alpha_i) + \sqrt{2} \cos \kappa \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_4^v - \alpha_i),$$

$i = 4, 5.$

Każdemu skokowi  $\Delta_v$ , odpowiada skok składowej  $V_{\beta}$  wzdłuż odpowiedniej załamanej charakterystyki  $\beta$  (rys.2.17.)



Rys. 2.17

Istotnym jakościowym zjawiskiem w podanym rozwiązaniu jest nieciągłość prędkości na linii kontaktu L («zniszczenie» złącza). Wielkość skoku wynosi

$$(6.50) \quad |\Delta V| = -V_{\beta}^3 |_{OE} \sin \kappa = \sqrt{2}f \left( l \frac{\alpha_1}{\alpha_4^E} \right) \sin \kappa H(\alpha_4^E - \alpha_4) - \sqrt{2} \sin \kappa \sum \Delta_v H(\alpha_4^v - \alpha_4),$$

jest więc zmienna i nie znika dla żadnej funkcji  $F(\xi)$ , jeżeli  $\sin \kappa \neq 0$ . Aby móc formalnie włączyć ten skok do pola prędkości przemieszczeń, a następnie w postaci  $\delta$  funkcji do  $\epsilon_{\alpha\beta}^4$ , należy napisać

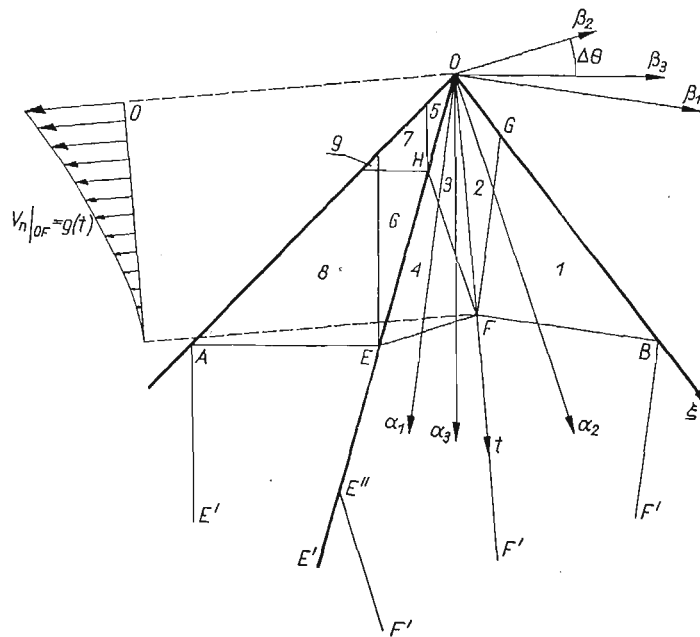
$$(6.51) \quad V_{\alpha}^4 = |\Delta V|_{OE} H(\beta_4),$$

gdzie  $\beta_4$  jest kątem w wachlarzu 4 liczonym od  $OE$  w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara. Wtedy mamy

$$(6.52) \quad 2\epsilon_{\alpha\beta}^4 = \frac{1}{\alpha_4} V_{\alpha,\beta_4}^4 + V_{\beta,\alpha_4}^4 - \frac{1}{\alpha_4} V_{\beta}^4 = \Delta \mathbf{V} |_{OE} \delta(\beta_4) + \dots$$

Łatwo stwierdzić, że dla  $F(\xi)$  spełniającej warunki (4.47)  $\epsilon_{\alpha\beta}^4 > 0$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta}^5 > 0$ . Uwagi poczynione w odniesieniu do rozwiązania 1 obowiązują i dla rozwiązania 2.

**Rozwiązanie 3** (rys. 2.18). Rozwiązanie 3 zawiera linię nieciągłości naprężeń w obszarze silniejszym. Nakłada to dodatkowe ograniczenia na możliwą kinematykę ruchu. Istotnie, do warunku brzegowego (6.4) dołączyć musimy warunek znikania skła-



Rys. 2.18

dowej stycznej wektora prędkości na linii nieciągłości naprężeń (por. np. [20]). Ze względu na to należy spodziewać się *a priori*, że klasa dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń będzie węższa od klasy określonej przez warunki (6.47).

W charakterze funkcji, od której uzależnimy prędkości  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$ , wygodniej będzie przyjąć rozkład składowej normalnej wektora prędkości na linii nieciągłości naprężeń  $FO$ , a nie na brzegu  $OB$ . Wtedy dla dziewięciu obszarów zaznaczonych na rys. 2.18 otrzymujemy kolejno: 2, 3 — problemy Cauchy'ego, 1, 4 — problemy charakterystyczne, 5, 6 — problem Cauchy'ego, 7, 8, 9 — problemy charakterystyczne, przy czym w każdym z obszarów 1, ..., 9 prędkości będą wyrażone różnymi wzorami. W celu uproszczenia rachunku stosujemy sposób formalny, polegający na dołączeniu do obszarów plastycznych części sztywnych  $BFF'$ ,  $E''EFF'$ ,  $AEE'$  gdzie  $BF'$ ,  $F'E''$ ,  $AE'$  są prostymi o kierunku odpowied-

nich charakterystyk,  $FF'$  jest przedłużeniem linii nieciągłości, a  $EE'$  przedłużeniem linii kontaktu.

Na przedłużonej linii nieciągłości  $OF'$  mamy dane

$$(6.53) \quad \begin{aligned} V_t \Big|_{OF'} &= 0, \\ V_n \Big|_{OF'} &= G(t) = g(t)H(h-t) - \sum_{v=1}^n \Delta_v H(t^v - t), \end{aligned}$$

gdzie  $t$  jest odległością na  $FO$  mierzoną od punktu  $O$ , a  $V_n$  jest skierowane jak na rys. 2.18,  $h = \overline{OF} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \mu_{31}} l$ .

Dla rozszerzonych obszarów  $OBF'$  (indeks  $r$ ) i  $OE'F'$  (indeks  $l$ ) mamy sformułowane problemy Cauchy'ego

$$(6.54) \quad \begin{aligned} V_{\alpha}^r \Big|_{F'O} &= V_n \Big|_{F'O} \sin \mu_{31}, & V_{\beta}^r \Big|_{F'O} &= -V_n \Big|_{F'O} \cos \mu_{31}, \\ V_{\alpha}^l \Big|_{F'O} &= -V_n \Big|_{F'O} \sin \mu_{31}, & V_{\beta}^l \Big|_{F'O} &= -V_n \Big|_{F'O} \cos \mu_{31}. \end{aligned}$$

Korzystając z zależności (6.32) oraz ze związków

$$(6.55) \quad t = h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} = h \frac{\beta_1}{\beta_1^F}, \quad \alpha_1^F = h \cos \mu_{31}, \quad \beta_1^F = h \sin \mu_{31}$$

otrzymujemy rozwiązanie dla obszarów 1, 2 w postaci

$$(6.56) \quad \begin{aligned} V_{\alpha} &= g \left( h \frac{\beta_1}{\beta_1^F} \right) \sin \mu_{31} H(\beta_1^F - \beta_1) - \sin \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\beta_1^v - \beta_1), \\ V_{\beta} &= -g \left( h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} \right) \cos \mu_{31} H(\alpha_1^F - \alpha_1) + \cos \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_1^v - \alpha_1). \end{aligned}$$

Prędkości odkształceń w obszarach 1, 2 wyrażają się wzorem

$$(6.57) \quad \begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha\beta} &= g' \left( h \frac{\beta_1}{\beta_1^F} \right) H(\beta_1^F - \beta_1) - g' \left( h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} \right) H(\alpha_1^F - \alpha_1) - g(h) \sin \mu_{31} \delta(\beta_1^F - \beta_1) + \\ &+ g(h) \cos \mu_{31} \delta(\alpha_1^F - \alpha_1) - \sin \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v \delta(\beta_1^v - \beta_1) + \cos \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v \delta(\alpha_1^v - \alpha_1). \end{aligned}$$

Analiza tego wzoru pozwala na proste znalezienie warunków, które musi spełniać rozkład prędkości normalnej na  $OF$ , aby w całym obszarze klina zachodziła nierówność  $\epsilon_{\alpha\beta} \geq 0$ .

Dla  $G(h) = g(h) \neq 0$  wyrazy trzeci i czwarty, reprezentujące nieskończenie wielkie odkształcenie postaciowe na liniach nieciągłości prędkości  $\beta_1 = \beta_1^F$  ( $FG$ ) i  $\alpha_1 = \alpha_1^F$  ( $FB$ ), nie mogą być na raz dodatnie, zatem na jednej z tych linii dyssypacja jest ujemna. Inaczej mówiąc, skok składowej  $V_{\alpha}$  na  $FG$  (dla  $g(h) > 0$ ) lub skok składowej  $V_{\beta}$  na  $FB$  (dla  $g(h) < 0$ ) jest niezgodny z kierunkiem działania naprężenia stycznego  $\sigma_{\alpha\beta} = +K$ . Zatem  $V_n(h) = g(h) = 0$ .

Do analogicznej sprzeczności w odniesieniu do odpowiednich linii nieciągłości  $\beta_1 = \beta_1^y$ ,  $\alpha_1 = \alpha_1^y$  dochodzimy analizując wyrazy piąty i szósty we wzorze (6.57) dla  $\Delta_\nu \neq 0$ . Zatem  $\Delta_\nu = 0$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ .

Dalej, w obszarze 1 pozostaje tylko drugi wyraz (bowiem  $\beta_1^F - \beta_1 < 0$ ), skąd wnioskujemy, że powinien być spełniony warunek  $g' < 0$ .

Wreszcie w obszarze 2 suma wyrazów pierwszego i drugiego musi być dodatnia, a ponieważ  $\beta_1/\beta_1^F \geq \alpha_1/\alpha_1^F$ , to funkcja  $g'(t)$  musi być funkcją niemalejącą swego argumentu.

Reasumując stwierdzamy, że warunek nieujemności mocy dyssypacji w każdym punkcie obszaru uplastycznienia jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład prędkości normalnej na  $OF$  (4.53) spełnia warunki

$$(6.58) \quad g(h) = 0, \quad \prod_\nu \Delta_\nu = 0, \quad \prod_l g'(t) \leq 0, \quad \prod_{t, \varepsilon > 0} g'(t + \varepsilon) \geq g'(t).$$

E. H. LEE w pracy [23] wykazał dla podobnego zadania, że muszą zachodzić dwa ostatnie warunki (6.58) zakładając ciągłość funkcji  $G(t)$  ze względów intuicyjnych, raczej nie budzących wątpliwości. Powyższy dowód formalny ciągłości [dwie równości (6.58)] ilustruje zastosowanie dystrybucji  $H(x)$ ,  $\delta(x)$ , odsłaniając jednocześnie pewne interesujące własności badanych rozwiązań.

Rozwiązanie problemu Cauchy'ego (6.54) dla obszarów 3, 4 i sprawdzenie warunku  $\varepsilon_{\alpha\beta} \geq 0$  przebiega podobnie. W rezultacie otrzymamy

$$(6.59) \quad V_\alpha = g \left( h \frac{\beta_1}{\beta_1^F} \right) \sin \mu_{31} H(\beta_1^F - \beta_1), \quad \text{w strefach 1, 2;}$$

$$V_\beta = -g \left( h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} \right) \cos \mu_{31} H(\alpha_1^F - \alpha_1),$$

$$(6.60) \quad V_\alpha = -g \left( h \frac{\beta_2}{\beta_2^F} \right) \sin \mu_{31} H(\beta_2 - \beta_2^F), \quad \text{w strefach 3, 4.}$$

$$V_\beta = -g \left( h \frac{\alpha_2}{\alpha_2^F} \right) \cos \mu_{31} H(\alpha_2^F - \alpha_2),$$

Dla obszaru rozszerzonego składającego się ze stref 5, 6, 7, 8, 9,  $AEE'$  mamy problem brzegowy Cauchy'ego:

$$(6.61) \quad V_\alpha^- \Big|_{OE'} = V_\alpha^+ \Big|_{OE'} \cos \Delta\theta - V_\beta^+ \Big|_{OE'} \sin \Delta\theta, \quad V_\beta^- \Big|_{E'O} = V_\alpha^+ \Big|_{OE'} \sin \Delta\theta + V_\beta^+ \Big|_{OE'} \cos \Delta\theta, \\ \Delta\theta = \nu - \mu_{34}.$$

Korzystając z rozwiązań (6.60) oraz ze związków

$$(6.62) \quad \alpha_2 \Big|_{OE'} = \frac{\alpha_2^F}{\alpha_3^F} \alpha_3 \Big|_{OE'} = \frac{\alpha_2^F}{\beta_3^F} \beta_3 \Big|_{OE'}, \quad \alpha_3^E = \frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\cos \mu_{34}}{\cos \nu}, \\ \beta_3^E = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\sin \mu_{34}}{\cos \nu}, \quad \beta_2 \Big|_{OE'} = \frac{\beta_2^F}{\alpha_3^H} \alpha_3 \Big|_{OE'} = \frac{\beta_2^F}{\beta_3^H} \beta_3 \Big|_{OE'}, \\ \alpha_3^H = \frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\cos \mu_{34} \operatorname{tg} \mu_{31}}{\sin \nu}, \quad \beta_3^H = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\sin \mu_{34} \operatorname{tg} \mu_{31}}{\sin \nu},$$



łatwo otrzymać

$$(6.63) \quad \begin{aligned} V_\alpha &= -g \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) \sin \mu_{31} \cos \Delta \theta H(\beta_3 - \beta_3^H) + g \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) \cos \mu_{31} \sin \Delta \theta H(\beta_3 - \beta_3^E), \\ V_\beta &= g \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) \sin \mu_{31} \sin \Delta \theta H(\alpha_3^H - \alpha_3) - g \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) \cos \mu_{31} \cos \Delta \theta H(\alpha_3^E - \alpha_3). \end{aligned}$$

w strefach 5, ..., 9.

Wykażemy, że warunki (6.58) zapewniają nieujemność dyssypacji mocy w obszarach 5, ..., 9. Na podstawie (6.63) i (6.62) mamy

$$(6.64) \quad \begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\sin \nu \cos \Delta \theta}{\sin \mu_{34}} g' \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) H(\beta_3 - \beta_3^H) - \frac{\cos \nu \sin \Delta \theta}{\sin \mu_{34}} g' \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) H(\beta_3^E - \beta_3) - \\ &- \frac{\sin \nu \sin \Delta \theta}{\cos \mu_{34}} g' \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) H(\alpha_3^H - \alpha_3) - \frac{\cos \nu \cos \Delta \theta}{\cos \mu_{34}} g' \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) H(\alpha_3^E - \alpha_3). \end{aligned}$$

W wyrażeniu tym nie występuje  $\delta$ -funkcja, ponieważ  $g(h) = 0$  [por. (6.34)], co jest odzwierciedleniem formalnym ciągłości pola prędkości przemieszczeń (6.63). Korzystając ze związku  $\Delta \theta = \nu - \mu_{34}$  otrzymujemy

$$(6.65) \quad \begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha\beta} &= \sin^2 \nu \left\{ g' \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) H(\beta_3 - \beta_3^H) - g' \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) H(\alpha_3^H - \alpha_3) \right\} + \\ &+ \cos^2 \nu \left\{ g' \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) H(\beta_3 - \beta_3^E) - g' \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) H(\alpha_3^E - \alpha_3) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\nu \operatorname{ctg} \mu_{34} \left\{ g' \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) H(\beta_3 - \beta_3^H) - g' \left( h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) H(\beta_3 - \beta_3^E) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\nu \operatorname{tg} \mu_{34} \left\{ g' \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) H(\alpha_3^H - \alpha_3) - g' \left( h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) H(\alpha_3^E - \alpha_3) \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

ze względu na (6.58) oraz z uwagi na to, że 1) dla każdego dwumianu ujętego w nawias pierwszy człon jest «wygaszony» przez funkcję Heaviside'a wcześniej niż drugi, 2) argument pierwszego członu jest większy od argumentu drugiego członu.

Rozkład składowej normalnej prędkości na brzegu obciążonym otrzymujemy ze związków

$$(6.66) \quad V_n \Big|_{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} (V_\alpha \Big|_{OB} - V_\beta \Big|_{OB}), \quad \alpha_1 \Big|_{OB} = \beta_1 \Big|_{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \xi$$

korzystając z rozwiązania (4.59). W ten sposób otrzymujemy

$$(6.67) \quad V_n \Big|_{OB} = f(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ g \left( h \frac{\xi}{\xi^G} \right) \sin \mu_{31} H(\xi^G - \xi) + g \left( h \frac{\xi}{l} \right) \cos \mu_{31} H(l - \xi) \right\},$$

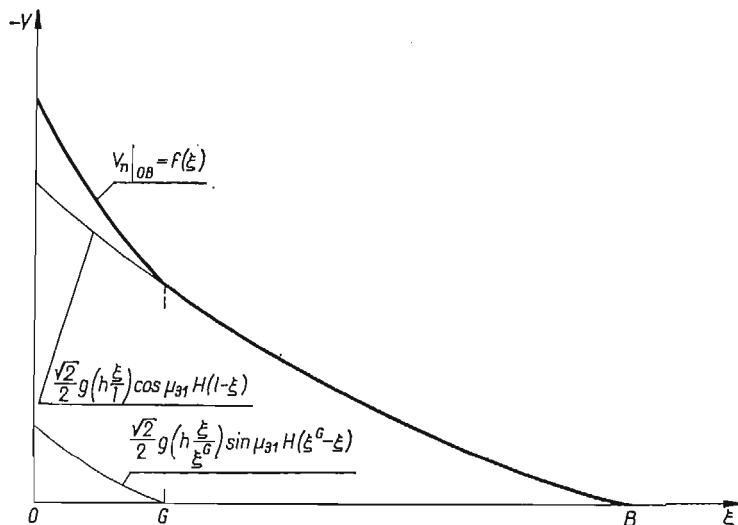
gdzie  $\xi^G = l \operatorname{tg} \mu_{31}$ . Rozkład ten pokazany jest na rys. 2.19.

Rozwiązania 4, 5, 6. Podobnie można budować pola prędkości dla rozwiązań 4, 5, 6. Odpowiednie zależności podane są w pracy [12]. Ograniczenia na dopuszczalne rozkłady prędkości będą podobne do (6.58).

D. *Omówienie wyników.* Znalezione rozwiązania dla prędkości przemieszczeń wskazują na zasadniczą różnicę między grupą rozwiązań 1, 2 a grupą rozwiązań 3, 4, 5, 6.

Rozwiązaniom z pierwszej grupy odpowiada obszerna klasa dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń, zawierająca pola nieciągłe [por. warunki (4.47)]. W szczególności rozwiązania 1, 2 są słuszne dla przypadku wciskania gładkiego stempla przy  $V^0 \geq V^B$ .

Rozwiązaniom z drugiej grupy odpowiada znacznie węższa klasa dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń, składająca się z pól ciągłych [por. warunki (6.58)]. W szczególności rozwiązania 3, 4, 5, 6 nie mogą być poprawne dla zadania o wciskaniu stempla. Wynika to ze wzorów typu (6.68) (por. także rys. 2.19).



Rys. 2.19

Na podkreślenie zasługuje specjalna rola, jaką odgrywają rozwiązania odpowiadające punktom  $A_1$ ,  $A_2$  na płaszczyźnie  $\eta = K_-/K_+ = \text{const.}$  (por. rys. 2.20). Rozwiązania te nazywamy podstawowymi.

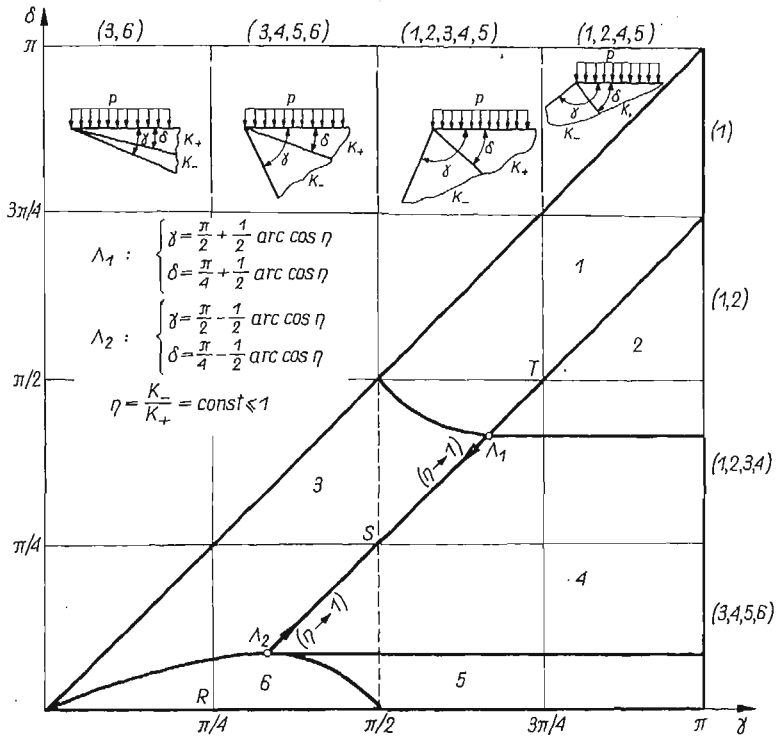
Podstawowe rozwiązanie  $A_1$  otrzymujemy z rozwiązań 1, 2, 3, 4, gdy zachodzą równości  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0$ , czyli dla następujących kątów  $\delta$ ,  $\gamma$ :

$$(6.68) \quad \gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \eta, \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta,$$

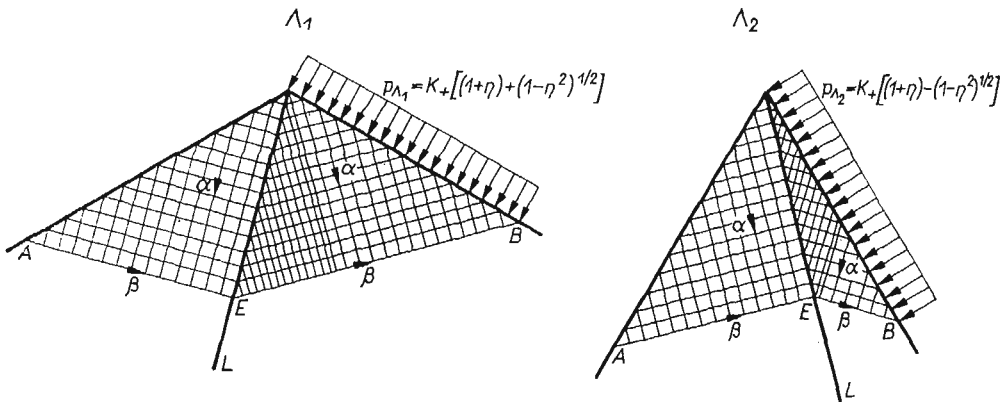
podstawowe zaś rozwiązanie  $A_2$  odpowiada sytuacji, gdy w rozwiązaniach 3, 4, 5, 6 odpowiednio  $\mu_{34} = \mu_{36} = \mu_{43} = \mu_{45} = \mu_{54} = \mu_{56} = \mu_{63} = \mu_{65} = 0$ , czyli gdy

$$(6.69) \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \eta, \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta.$$

W obu przypadkach w części słabszej i części mocniejszej klina mamy jednorodny stan naprężenia  $\sigma = \text{const.}$ ,  $\theta = \text{const.}$  (rys. 2.21). Składowa styczna wektora naprężenia na linii kontaktu  $L$  ma największą dopuszczalną wartość  $K_-$  (linia kontaktu jest charakte-



Rys. 2.20



Rys. 2.21

rystyką dla części słabszej). Dla rozwiązania  $\Lambda_1$ , na linii kontaktu otrzymujemy nieciągłość naprężeń pierwszego rodzaju, natomiast dla rozwiązania  $\Lambda_2$  – nieciągłość drugiego rodzaju (por. p. 2). W rozwiązaniu  $\Lambda_1$  występuje skok prędkości przemieszczeń na linii kontaktu («zniszczenie» złącza), w rozwiązaniu  $\Lambda_2$  pole prędkości jest ciągłe. Wielkość obciążenia granicznego określają wzory

$$(6.70) \quad p_{\Lambda_1} = K_+ [(1+\eta) + (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}], \quad p_{\Lambda_2} = K_+ [(1+\eta) - (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Rozwiązania podstawowe mają następującą interesującą własność: przez zmiany parametrów  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  można z nich otrzymać wszystkie 6 znalezionych rozwiązań (rys. 2.21).

Z podobną sytuacją spotkamy się w p. 14 przy analizie nośności granicznej skręcanego pręta o skokowej niejednorodności. Nasuwa to następującą koncepcję rozwiązywania zadań tej klasy: należy znaleźć rozwiązania podstawowe i następnie badać ich zachowanie się przy zmianie parametrów. Koncepcja ta wymaga jednak dokładniejszego sprecyzowania i zbadania.

Powierzchnie

$$(6.71) \quad \mu_{ij}(\gamma, \delta, \eta) = 0$$

dzielą obszar (4.1) przestrzeni  $C_3$  na 6 podobszarów odpowiadających sześciu znalezionym rozwiązaniom. Charakter tego podziału przestrzennego można uprzytomnić sobie bez trudności operując przecięciami  $\eta = \text{const}$ . Ponieważ

$$(6.72) \quad \mu_{13}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \eta\right) = 0, \quad \mu_{36}(0, 0, \eta) = 0, \quad \mu_{56}\left(\frac{\pi}{2}, 0, \eta\right) = 0,$$

to kolejne przekroje  $\eta = \text{const}$  będą podobne do przekroju  $\eta = 1/2$  przedstawionego na rys. 2.20, a różnice będą wynikać z innego usytuowania punktów  $A_1$ ,  $A_2$ .

Przy wzroście  $\eta$  od 0 do 1 punkt  $A_1$  wędruje od położenia  $T\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  do położenia  $S\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ , punkt zaś  $A_2$  wędruje od  $R\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$  do  $S$ , przy czym oba punkty leżą stale na prostej  $\gamma - \delta = \frac{\pi}{4}$ .

Dla  $\eta = 0$  i  $\eta = 1$  otrzymane rozwiązania przechodzą w znane rozwiązania dla klina jednorodnego o rozwartości odpowiednio  $\delta$  i  $\gamma$ . Istotnie, przy  $\eta = 0$  obszary 5, 6 redukują się do linii, rozwiązania 3, 4 przechodzą w rozwiązanie klasyczne z linią nieciągłości ( $\delta \leq \pi/2$ ), rozwiązania zaś 1, 2 pokrywają się z klasycznym rozwiązaniem ciągłym ( $\delta \geq \pi/2$ ). Analogicznie dla  $\eta = 1$  znika obszar 4, rozwiązania 3, 6 pokrywają się z klasycznym rozwiązaniem nieciągłym  $\gamma \leq \pi/2$ , a rozwiązania 1, 2, 5 — z klasycznym rozwiązaniem ciągłym ( $\gamma \geq \pi/2$ ).

Rozpatrzone kliny niejednorodne mogą być podzielone na grupy o mniejszej ilości możliwych rozwiązań. Np. dla  $0 \leq \gamma \leq \pi/4$  niezależnie od wartości  $\eta$  będziemy mieli do czynienia jedynie z rozwiązaniami 3, 6. Analogicznie dla  $\pi/2 \leq \delta \leq 3\pi/4$  wystąpią jedynie rozwiązania 1, 2 itd. (por. odpowiednie oznaczenia przedziałów zmienności  $\delta$ ,  $\gamma$  na rys. 2.20).

Należy podkreślić, że nie sprawdziliśmy jednego z warunków poprawności rozwiązań dla ciała sztywno-plastycznego bez wzmocnienia, mianowicie nie wykazaliśmy, że obszar poniżej charakterystyki  $AB$  może być istotnie obszarem sztywnym. W tym celu należałoby znaleźć w tym obszarze stan naprężenia spełniający równania równowagi, warunki  $\sigma_n = \tau_n = 0$  na krawędziach bocznych, warunki  $\sigma_n = \sigma$ ,  $\tau_n = K_{\pm}$  na  $AB$  oraz warunek  $(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \leq 4K_{\pm}^2$ . Nie ma powodu, aby wątpić, że takie przedłużenie stanu na-

prężenia istnieje, tym niemniej z formalnego punktu widzenia podane rozwiązania należy zaklasyfikować jako rozwiązania kinematycznie dopuszczalne.

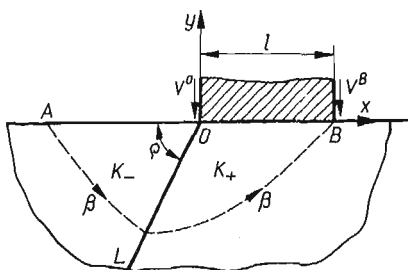
Powyzsza okoliczność nabiera istotnego znaczenia dla przypadku, gdy obciążona jest krawędź słabszej części klina (por. [12]).

Chcielibyśmy stwierdzić, że rozważony przykład wskazuje, jak się zdaje, na celowość użycia najprostszyc dystrybucji  $H(x)$ ,  $\delta(x)$  do opisu pól prędkości przemieszczenia i odkształcenia w płaskim stanie odkształcenia ośrodka idealnie plastycznego. Linie nieciągłości prędkości przemieszczenia znajdują naturalny wyraz we wzorach na  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  [człony typu  $AH(x)$ ,  $A \neq 0$  por. np. wzór (6.45)] oraz we wzorach na  $\epsilon_{\alpha\beta}$  [człony typu  $A\delta(x)$ ,  $A \neq 0$ , por. np. wzór (6.46)], co formalizuje orientację w przebiegu linii nieciągłości i sprowadza sprawdzenie warunku  $\lambda \geq 0$  na liniach nieciągłości do formalnego stwierdzenia znaku odpowiednich współczynników. Odpada również konieczność oddzielnego uwzględnienia członów odpowiadającym liniom nieciągłości we wzorach na moc dyssypacji, bowiem zawiera je całka  $\int \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dS$ . Na uwagę zasługuje także zwarty i przejrzysty charakter wzorów na  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta}$  w obszarach składających się ze stref o różnych rozkładach prędkości [por. np. wzory (6.63) wspólne dla pięciu stref]. W podobny sposób można użyć dystrybucji  $H(x)$ ,  $\delta(x)$  w innych działach teorii plastyczności.

Na zakończenie należy dodać, że rozpatrywane rozwiązania można próbować uzyskać z przejść granicznych od rozwiązań sprężysto-plastycznych dla klina obciążonego na brzegu nieskończonym. Odpowiednie rachunki dla klina jednorodnego zawarte są w pracach [25–27]. Dokładniejsza analiza wskazuje jednak, że wyniki prac [25 i 26] nie są poprawne dla  $\gamma > \pi/2$ , ponieważ w pobliżu osi dyssypacja energii jest ujemna. Dyskusja tego problemu zawarta jest w pracy [28].

## 7. Działanie gładkiego sztywnego stempla na półprzestrzeń [1]

Rozważymy zadanie o działaniu gładkiego sztywnego stempla na prostoliniową krawędź ciała złożonego z dwu materiałów o stałych, ale różnych granicach plastyczności (rys. 2.22). Przyjmujemy, że linia podziału  $L$  jest prostą przecinającą brzeg w punkcie  $O$ ,



Rys. 2.22

zaś stempeł działa na materiał mocniejszy, przy czym jego krawędź pokrywa się z punktem  $O$ . Zakładamy ponadto, że ciało jest na tyle duże, że płyńnięcie plastyczne zlokalizowane jest w obszarze stykającym się ze stemplem. Przyjmujemy wreszcie, że złącze  $L$  ma własności opisywane przez model II, przy czym spełniony jest warunek (2.4).

Należy wyznaczyć stan naprężenia i prędkości przemieszczeń oraz wartość graniczną siły nacisku w chwili odpowiadającej początkowi niepowstrzymywanego płynięcia plastycznego.

Zadanie charakteryzują dwa niezależne parametry

$$(7.1) \quad \eta = \frac{K_-}{K_+}, \quad \varrho,$$

gdzie  $K_-$ ,  $K_+$  oznaczają odpowiednio granice plastyczności strefy słabszej i mocniejszej,  $\varrho$  jest kątem rozwarcia strefy słabszej.

Na brzegu  $OB$  warunki brzegowe dla prędkości należy zapisać w postaci

$$(7.2) \quad -V_y|_{OB} = V^0 + (V^B - V^0) \frac{x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

gdzie  $V^0$ ,  $V^B$  oznaczają prędkości pionowe krawędzi stempla w chwili początku ruchu,  $AB$  oznacza nieznaną granicę części sztywnej i plastycznej, która jest charakterystyką  $\beta$ .

Warunek dla składowej normalnej wektora prędkości pod stemplem uwzględnia w charakterze przypadków szczególnych następujące możliwości:

1) stempel jest zagłębiany w materiał ruchem postępowym,

$$V^0 = V^B > 0,$$

2) stempel jest zagłębiany w materiał z jednoczesnym obrotem; prędkości  $V^0 > 0$ ,  $V^B > 0$  są dane, przy czym  $V^0 \neq V^B$ ,

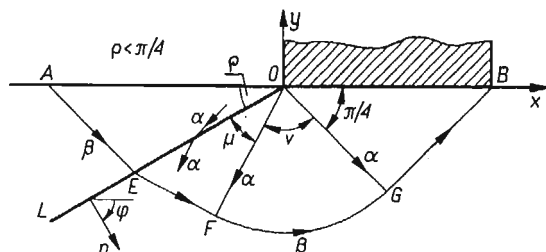
3) dana jest prędkość pionowa pewnego punktu pośredniego  $V^x$ ,  $0 < x < 1$  (przegubowe obciążenie stempla),

4) ciężki stempel spoczywa na krawędzi  $OB$ ; wielkości  $V^0$ ,  $V^B$  nie są dane.

Traktując półprzestrzeń jako klin o kącie rozwarcia  $\gamma = \pi$  przy czym  $\varrho = \pi - \delta$  widzimy, że poprzednia szczegółowa analiza dopuszczalnych rozkładów prędkości dla klina pozwala użyć otrzymane w p. 6 rozwiązanie dla zadania o stemple. Istotnie, rozkład prędkości (7.2) jest szczególnym przypadkiem rozkładu (6.41). Specyfikując odpowiednio poprzednie wzory uzyskujemy dwa rozwiązania, przy czym rozkład nacisku pod stemplem jest równomierny<sup>(15)</sup>

R o z w i ą z a n i e 1 (rys. 2.23, 2.24). Nacisk w chwili odpowiadającej początkowi niepowstrzymywanego płynięcia wynosi zgodnie z (6.11)

$$(7.3) \quad p_1 = K_+ \left\{ 1 + \eta(1 - \cos 2\varrho) + (1 - \eta^2 \sin^2 2\varrho)^{1/2} + \left[ \frac{3\pi}{2} - 2\varrho - \arccos(\eta \sin 2\varrho) \right] \right\}.$$



Rys. 2.23

<sup>(15)</sup> W pracy [11], wykonanej przed pracą [12], został przyjęty inny tok postępowania, niezależny od rozwiązania dla klina.

Rozkłady prędkości na podstawie (6.42) i (6.45) są określone następująco

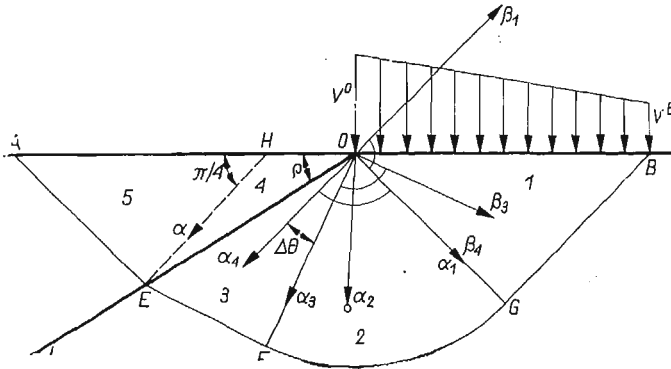
$$(7.4) \quad V_{\alpha}^i = 0, \quad V_{\beta}^i = -\sqrt{2}V^0 + 2(V^0 - V^B) \frac{\alpha_i}{l}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(7.5) \quad V_{\alpha}^4 = \sqrt{2}V^0 \sin \Delta\theta + 2(V^0 - V^B) \frac{\cos \mu \sin \Delta\theta}{\sin(\mu - \Delta\theta)} \frac{\beta_4}{l},$$

$$V_{\beta}^4 = -\sqrt{2}V^0 \cos \Delta\theta + 2(V^0 - V^B) \frac{\cos \mu \cos \Delta\theta}{\cos(\mu - \Delta\theta)} \frac{\alpha_4}{l},$$

$$(7.6) \quad V_{\alpha}^5 = 0, \quad V_{\beta}^5 = V_{\beta}^4,$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  są współrzędnymi w układach kartezjańskich, zaś  $\alpha_2$  jest współrzędną radialną w układzie biegunowym (rys. 2.24).



Rys. 2.24

Podane pole prędkości jest nieciągłe wzdłuż linii podziału strefy sztywnej i strefy ruchu plastycznego, tzn. linii  $AE$  i  $EFG$  oraz wzdłuż charakterystyki  $EH$ . Wielkość skoku wynosi

$$(7.7) \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EFG} = \sqrt{2}V^B, \quad |\Delta \mathbf{V}|_{AE} = \sqrt{2}V^B \cos \Delta\theta, \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EH} = \sqrt{2}V^B \sin \Delta\theta.$$

Na uwagę zasługuje wykryte zjawisko jakościowe: w chwili odpowiadającej początkowi niepowstrzymanego płynięcia plastycznego obszar słabszy zostaje podzielony linią nieciągłości wektora prędkości przemieszczeń na dwie strefy o różnej kinematyce ruchu.

Gdy granice plastyczności wyrównują się,  $\eta \rightarrow 1$ , lub strefa słabsza maleje do zera,  $\varrho \rightarrow 0$ , otrzymane rozwiązanie przechodzi w sposób ciągły w rozwiązanie dla jednorodnej półprzestrzeni; wzór (3.12) określa znaną wartość  $p = K(2 + \pi)$ .

Gdy  $\eta \rightarrow 0$ , otrzymujemy rozwiązanie dla jednorodnego klina o kącie rozwarcia  $\pi - \varrho \geq 3\pi/4$ .

Otrzymane rozwiązanie obowiązuje wobec (6.12) i  $\gamma = \pi$ ,  $\varrho = \pi - \delta$  dla

$$(7.8) \quad \varrho \leq \frac{\pi}{4}.$$

Gdy  $\varrho \rightarrow \pi/4$  strefa 4 redukuje się ze zera, przy czym można pokazać, że jednocześnie zachodzi  $\epsilon_{\alpha\beta}^4 \rightarrow \infty$  (por. [11]), w pozostałych zaś obszarach  $\epsilon_{\alpha\beta}$  są ograniczone.

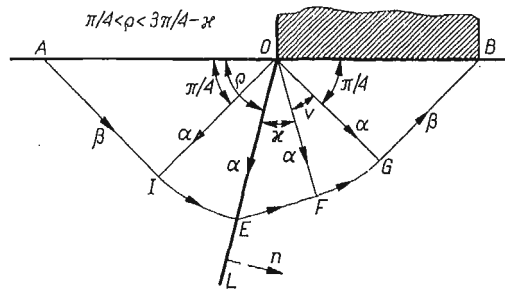
Rozwiązanie 2 (rys. 2.25, 2.26). Nacisk w chwili osiągnięcia nośności podłoża wynosi zgodnie z (6.16)

$$(7.9) \quad p_2 = K_+ \left[ 1 + \eta \left( 1 + 2\rho - \frac{\pi}{2} \right) + (1 - \eta^2)^{1/2} + \left( \frac{3\pi}{2} - 2\rho - \arccos \eta \right) \right].$$

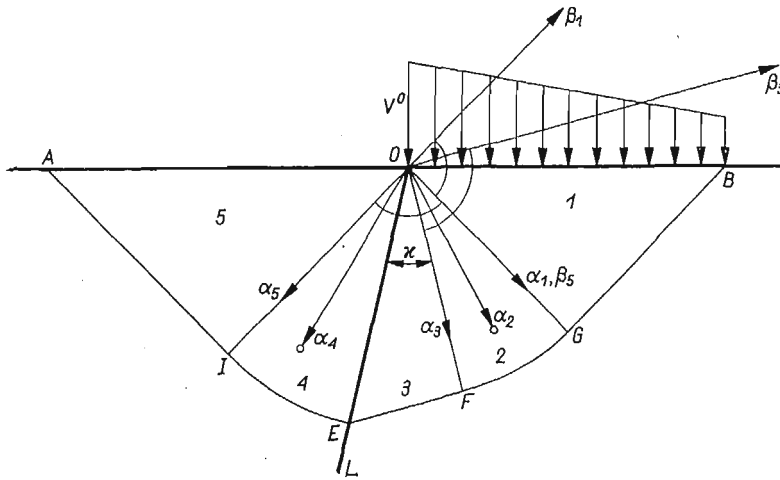
Rozkład prędkości w obszarach 1, 2, 3 określają wzory poprzednie, zaś w obszarach 4, 5 na podstawie (6.49) mamy

$$(7.10) \quad V_\alpha^i = 0, \quad V_\beta^i = -V^0(1 + \eta)^{1/2} + (V^0 - V^B)(1 + \eta) \frac{\alpha_i}{l}, \quad i = 4, 5,$$

gdzie  $\alpha_4$  ma sens współrzędnej w układzie biegunowym, zaś  $\alpha_5$  w układzie kartezjańskim.



Rys. 2.25



Rys. 2.26

Podane pole prędkości jest nieciągłe wzdłuż AIE, EFG, EO. Wielkości skoków wynoszą

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \Delta V|_{EFG} &= \sqrt{2} V^B, & \Delta V|_{AIE} &= (1 + \eta)^{1/2} V^B, \\ \Delta V|_{EO} &= -V_\beta^3|_{EO} \sin \varkappa = V^0(1 - \eta)^{1/2} - (V^0 - V^B)(1 - \eta^2)^{1/2} \frac{\alpha_4|_{EO}}{l}. \end{aligned}$$



Należy podkreślić, że wielkość skoku prędkości na linii kontaktu jest zmienna. Zgodnie z (6.17) rozwiązanie obowiązuje, gdy

$$(7.12) \quad \frac{\pi}{4} \leq \varrho \leq \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta.$$

Gdy  $\eta \rightarrow 1$ , to  $\kappa \rightarrow 0$  i otrzymujemy w granicy rozwiązanie dla jednorodnej półpłaszczyzny, przy czym  $|\Delta \mathbf{V}|_{OE} \rightarrow 0$ , zaś  $p \rightarrow K(2+\pi)$ .

Gdy  $\eta \rightarrow 0$ , to  $\kappa \rightarrow \pi/4$  i w granicy otrzymujemy rozwiązanie dla jednorodnego klina o kącie rozwarcia  $\pi - \varrho \geq \pi/2$ .

Na podstawie (6.47) stwierdzamy, że warunki konieczne i dostateczne na to, by dysypacja mocy we wszystkich obszarach i na wszystkich liniach nieciągłości była nieujemna, mają dla obu rozwiązań postać:

$$(7.13) \quad V^B > 0, \quad V^0 \geq V^B$$

lub

$$(7.14) \quad V^B = 0, \quad V^0 > 0.$$

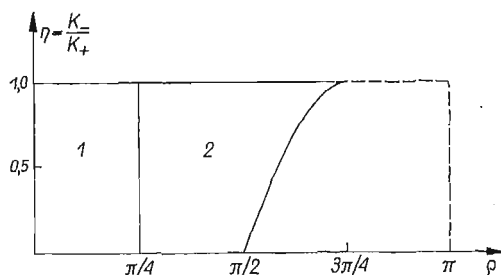
Gdy  $V^B = 0$  stempel zaczyna obracać się wokół punktu  $B$  w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara, przy czym:

w rozwiązaniu 1 pole prędkości jest ciągłe z wyjątkiem punktu osobliwego  $O$ ,

w rozwiązaniu 2

$$(7.15) \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EFG B} = 0, \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EA} = 0,$$

natomiast skok prędkości na linii kontaktu  $EO$  maleje liniowo od wartości  $V^0(1-\eta)^{1/2}$  w punkcie  $O$  do zera w punkcie  $E$ .



Rys. 2.27

Gdy  $V^0 = V^B$  stempel zaczyna zagłębiać się ruchem postępowym, przy czym:

w rozwiązaniu 1 obszary 1, 3, 4, 5 zaczynają poruszać się jak bryły sztywne, a dysypacja energii ma miejsce jedynie w obszarze 2 i na liniach nieciągłości prędkości  $AE$ ,  $EFG B$ ,  $EH$ ;

w rozwiązaniu 2

$$(7.16) \quad V^0 = V^B, \quad \epsilon_{\alpha\beta}^1 = \epsilon_{\alpha\beta}^3 = \epsilon_{\alpha\beta}^5 = 0, \quad |\Delta \mathbf{V}|_L = V^0(1-\eta)^{1/2} = \text{const}$$

i dysypacja energii następuje tylko w obszarach wachlarzy biegunowych 2, 4 oraz na liniach nieciągłości prędkości.

Jeżeli sposób zagłębiania stempla jest narzucony i niezgodny z (3.21), (3.22), to przedstawione rozwiązania przestają obowiązywać.

Obszary słuszności znalezionych rozwiązań w płaszczyźnie parametrów  $\eta$ ,  $\varrho$  przedstawione są na rys. 2.27.

Dla większych kątów  $\varrho$  nie udało się znaleźć rozwiązań, które spełniałyby warunki brzegowe w naprężeniach i prędkościach (3.2), (3.3), (3.4) i spełniały warunek nieujemności dysypacji energii. Rozwiązania 3, 4, 5, 6 z p. 6 nie mogą być tu użyte ze względu na (6.58); aby się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na rys. 2.19 niezgodny z (7.2).

Wartości  $p$  określone wzorami (6.19), (6.22), (6.26), (6.30) przy  $\gamma = \pi$   $\delta = \pi - \varrho$  można uznać jednak zgodnie z twierdzeniami ekstremalnymi teorii plastyczności za ocenę dolną nośności podłoża w odpowiednich przedziałach  $\varrho, \eta$ .

Należy sądzić, że dla dużych kątów rozwarcia strefy słabszej początkowo niepowstrzymany ruch plastyczny nastąpi przy odmiennej konfiguracji stref plastycznych, a rozwiązania zawierać będą izolowane linie poślizgu<sup>(16)</sup>.

Przytoczone rozwiązania 1, 2 mogą być uogólnione w rozmaity sposób oraz użyte w wielu innych zadaniach.

Gdy wytrzymałość złącza, którą dla modelu II charakteryzuje liczba  $K_0$  (oznaczenie w p. 2, rozdz. I —  $K_{vu}$ ), jest mniejszą od  $K_-$ , rozwiązanie 1 nadal obowiązuje, jednakże dla węższego zakresu  $\varrho$ , mianowicie dla

$$(7.17) \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{K_0}{K_-}.$$

Dla większych  $\varrho$  rozwiązanie ciągłe nie jest możliwe.

Wskazemy jeszcze, że uogólnienie przytoczonych rozwiązań na odpowiednie zadania o nośności granicznej podłoża sypkiego lub betonowego jest w pewnych przypadkach tylko kwestią rachunków.

### 8. Przeciąganie warstwowego pasma przez gładką matrycę

Rozpatrzone powyżej zadania dotyczyły zagadnień wytrzymałości układów stanowiących kompozycję kilku materiałów. Wyprowadzone wzory (6.11), (6.16), (6.19), (6.22), (6.26), (6.30), (7.3) i (7.9) mogą mieć bezpośrednie zastosowanie do oceny nośności granicznej. Wyniki otrzymane zostały w zasadzie przy użyciu środków elementarnych.

Zagadnienia przeróbki plastycznej metali, w których mamy do czynienia z jednoczesnym przepływem kilku metali oraz deformacją rzędu dziesiątków procentów są z reguły trudniejsze do analizy.

Naszukujemy jako przykład opis ustalonego procesu przeciągania dwuwarstwowego pasma przez gładką nieodkształcalną matrycę o prostoliniowych brzegach<sup>(17)</sup> (rys. 2.28). Zadanie charakteryzują cztery niezależne parametry bezwymiarowe

$$(8.1) \quad \varepsilon = 1 - \frac{h}{H}, \quad e = \frac{K_-}{K_+}, \quad \varphi, \quad f = \frac{H_-}{H_+} = \frac{h_-}{h_+},$$

gdzie  $2H, 2H_+, H_-$  oznacza grubość początkową pasma jako całości, warstwy środkowej, warstwy zewnętrznej,  $2h, 2h_+, h_-$  odpowiednie grubości na wyjściu z matrycy,  $2\varphi$  kąt

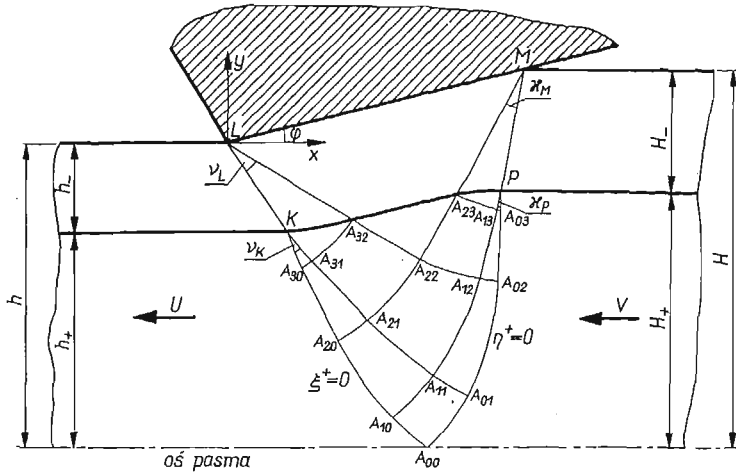
<sup>(16)</sup> Jak stąd wynika, problem wciskania gładkiego sztywnego stempla w krawędź boczną jednorodnego klina o kącie rozwarcia mniejszym od  $\pi/2$  (przypadek szczególny naszego zadania dla  $\varrho > \pi/2$   $\eta = 0$ ) należy uznać za otwarty.

<sup>(17)</sup> Poniżej referujemy wyniki uzyskane wspólnie z M. ARCISZ; szczegóły rachunków znajdzie Czytelnik w publikacji [16].

rozwarcia szczeliny,  $K_+$ ,  $K_-$  — granice plastyczności warstwy środkowej i warstwy zewnętrznej<sup>(18)</sup>

Z warunku nieściśliwości otrzymujemy związek pomiędzy prędkościami ruchu pasma przed i za matrycą w postaci  $VH = Uh$ .

Ograniczymy się do takiego zakresu parametrów (8.1), w którym strefy plastyczne zlokalizowane w pobliżu brzegów matrycy stykają się z sobą w jednym punkcie  $A_{00}$  na osi pasma. Założymy ponadto, że rozpatrywany jest przypadek, gdy na kontakcie warstw mogą powstać znaczne naprężenia styczne; jest to słuszne np. wtedy, gdy rozważamy kolejny proces przeciągania bez smarowania powierzchni kontaktu.



Rys. 2.28

Nieznane charakterystyki  $A_{00}L$ ,  $A_{00}M$  ograniczają obszar odkształceń plastycznych. Częstki materiału znajdujące się w danej chwili czasu poza tym obszarem pozostają sztywne.

Analizując rozkład prędkości ruchu można udowodnić, że rozkład nacisku na matrycę jest równomierny. Oznacza to, że podobnie jak w przypadku klasycznym [20] siatka linii przślizgu w warstwie zewnętrznej składa się z części  $LA_{32}A_{23}M$ , w której linie  $\alpha$ ,  $\beta$  są prostymi nachylonymi pod kątem  $\pm\pi/4$  do brzegu, wachlarza  $LKA_{32}$  z prostoliniowymi charakterystykami  $\alpha$  oraz wachlarza  $MPA_{23}$  z prostoliniowymi charakterystykami  $\beta$ . Kąty rozwarcia wachlarzy  $\nu_L$ ,  $\nu_M$  są nieznanne.

Rozkłady prędkości ruchu będą miały postać [16]

$$(8.2) \quad V_{\alpha}^{-} = \text{const}, \quad V_{\beta}^{-} = \text{const} \quad \text{w} \quad LA_{32}A_{23}M,$$

$$(8.3) \quad V_{\alpha}^{-} = -f_1'(\theta^-), \quad V_{\beta}^{-} = f_1(\theta^-) \quad \text{w} \quad LKA_{32},$$

$$(8.4) \quad V_{\alpha}^{-} = f_2(\theta^-), \quad V_{\beta}^{-} = f_2'(\theta^-) \quad \text{w} \quad MPA_{23},$$

gdzie  $f_1, f_2$  są nieznanymi funkcjami kąta nachylenia linii  $\alpha$  do osi  $x$  w warstwie zewnętrznej.

<sup>(18)</sup> Zmieniliśmy oznaczenie dla  $K-/K_+$ , ponieważ symbol  $\eta$  będzie w tym punkcie miał inne znaczenie (por. (8.5)).

Można wykazać następnie, że część  $A_{23}A_{32}$  linii kontaktu materiałów, będącej torem cząstek, jest odcinkiem prostym równoległym do brzegu matrycy. Wynika stąd, że jest to trajektoria naprężeń głównych i zgodnie z wnioskami p. 5 charakterystyki przechodzą z obszaru górnego do dolnego bez załamania. Stąd w obszarze  $A_{32}A_{23}A_{22}$  mamy do czynienia z prostoliniowymi charakterystykami  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Analiza rozkładu prędkości na granicach części sztywnych i obszaru plastycznego prowadzi do wniosku, że wspólna deformacja plastyczna warstw jest możliwa tylko wtedy, gdy w punktach  $P$ ,  $K$  charakterystyki  $A_{00}L$ ,  $A_{00}M$  są załamane, przy czym przez punkty te przechodzą wachlarze charakterystyk o nieznanym kącie rozwarcia  $\nu_k$ ,  $\nu_p$ .

W tej sytuacji jest rzeczą widoczną, że rozwiązanie można będzie otrzymać na drodze numerycznej, jeżeli tylko znane będą kształty części  $PA_{23}$ ,  $A_{32}K$  linii kontaktu. Istotnie, z warunków (5.5) i (5.6) określimy wtedy  $\sigma^+$ ,  $\theta^+$  na  $A_{32}K$ ,  $A_{23}P$ , co pozwoli zbudować siatkę  $\alpha$ ,  $\beta$  w obszarach  $A_{03}A_{23}P$ ,  $A_{30}A_{32}K$  (por. [20]). Na podstawie twierdzenia Hencky'ego o własnościach linii poślizgu stwierdzamy, że w obszarze  $A_{30}A_{32}A_{22}A_{20}$  charakterystyki  $\alpha$ , są prostoliniowe, zaś w obszarze  $A_{03}A_{23}A_{22}A_{02}$  charakterystyki  $\beta$  są prostoliniowe. W oparciu o wyznaczone w ten sposób łuki  $A_{02}A_{22}$ ,  $A_{22}A_{20}$  określamy siatkę  $\alpha$ ,  $\beta$  w obszarze ostatnim  $A_{02}A_{22}A_{20}A_{00}$ .

Udowodnimy poniżej, że analiza prędkości ruchu w warstwie środkowej pozwala na znalezienie kształtu łuków  $PA_{23}$ ,  $A_{32}K$ . W tym celu użyjemy zmiennych charakterystycznych  $\eta$ ,  $\xi$  zdefiniowanych następująco:

$$(8.5) \quad \left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2K_+} (\sigma - \sigma_0) + (\theta - \theta_0) \\ \xi &= \frac{1}{2K_+} (\sigma - \sigma_0) - (\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad \text{w } A_{00}PK,$$

gdzie  $\sigma_0$  jest nieznaną wartością ciśnienia średniego w punkcie  $A_{00}$ , zaś  $\theta_0 \equiv \theta(A_{00}) = -\pi/4$ . Uznając  $\eta$ ,  $\xi$  za zmienne niezależne równania Geiringer (4.14) można doprowadzić do postaci równań

$$(8.6) \quad V_{\alpha, \eta} - \frac{1}{2} V_{\beta} = 0, \quad V_{\beta, \xi} - \frac{1}{2} V_{\alpha} = 0$$

równoważnych dwom równaniom telegraficznym

$$(8.7) \quad V_{\alpha, \eta \xi} - \frac{1}{4} V_{\alpha} = 0, \quad V_{\beta, \eta \xi} - \frac{1}{4} V_{\beta} = 0.$$

Charakterystyki  $A_{00}K$ ,  $A_{00}P$  zgodnie z (8.5) odwzorowują się na płaszczyznę zmiennych  $\eta$ ,  $\xi$  w proste  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ .

Zapisując warunki brzegowe dla prędkości na  $A_{00}P$  i  $A_{00}K$  otrzymujemy

$$(8.8) \quad \xi = 0 (A_{00}K): \quad V_{\beta} = -U \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right),$$

$$(8.9) \quad \eta = 0 (A_{00}L): \quad V_{\alpha} = -V \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right), \quad V \equiv U(1 - \varepsilon),$$

co wraz z (8.6) stanowi poprawne sformułowanie problemu brzegowego charakterystycznego dla równań telegraficznych (8.7) (por. [29]).

Rozwiązanie otrzymujemy opierając się na znanych z teorii równań różniczkowych cząstkowych wzorach [29]. Stosując te wzory otrzymujemy

$$(8.10) \quad \frac{1}{U} V_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon J_0(\sqrt{-\eta\xi}) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta-\xi}{2}\right) - \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^\xi J_0(\sqrt{-\eta(\xi-t)}) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) dt,$$

$$\frac{1}{U} V_\beta = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta-\xi}{2}\right) + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^\xi J_0(\sqrt{-\eta(\xi-t)}) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) dt,$$

gdzie  $J_0(s)$  jest funkcją Bessela zerowego rzędu.

Korzystając ze związków (5.5) i (5.6) wiążących  $\sigma$ ,  $\theta$  z obu stron linii kontaktu oraz zależności (8.5), otrzymamy

$$(8.11) \quad \eta = \eta_1(\theta^-), \quad \xi = \xi_1(\theta^-) \quad \text{na } PA_{23},$$

$$(8.12) \quad \eta = \eta_2(\theta^-), \quad \xi = \xi_2(\theta^-) \quad \text{na } KA_{32}$$

(jawnej postaci tych wzorów nie podajemy). Podstawiając (8.11) i (8.12) do (8.10) otrzymujemy  $V_\alpha$ ,  $V_\beta$  w warstwie środkowej na linii kontaktu jako funkcje kąta  $\theta^-$ .

Ponieważ z założenia wektor prędkości ruchu jest ciągły na styku warstw, otrzymujemy na podstawie związków (8.3), (8.4) i (5.13)

$$(8.13) \quad f_1(\theta^-) = V_\alpha(\theta^-) \cos \Delta\psi_1 + V_\beta(\theta^-) \sin \Delta\psi_1, \quad \Delta\psi_1 \equiv \theta^- + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\eta_1 - \xi_1);$$

$$(8.14) \quad f_2(\theta^-) = -V_\alpha(\theta^-) \sin \Delta\psi_2 + V_\beta(\theta^-) \cos \Delta\psi_2, \quad \Delta\psi_2 \equiv \theta^- + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\eta_2 - \xi_2).$$

Skorzystamy wreszcie z tego, że łuki  $PA_{23}$ ,  $A_{32}K$  są torami, tzn.

$$(8.15) \quad PA_{23}: \quad -\frac{dr_2}{f_2'(\theta^-)} = \frac{r_2 d\theta_2^-}{f_2(\theta_2^-)}, \quad A_{32}K: \quad -\frac{dr_1}{f_1'(\theta_1^-)} = \frac{r_1 d\theta_1^-}{f_1(\theta_1^-)}.$$

Całkując te równania otrzymujemy poszukiwane równania łuków  $PA_{23}$ ,  $A_{32}K$  w postaci:

$$(8.16) \quad PA_{23}: \quad r_2 = \frac{B_2}{f_2(\theta_2^-)}, \quad A_{32}K: \quad r_1 = \frac{B_1}{f_1(\theta_1^-)},$$

gdzie  $r_1$ ,  $\theta_1^-$  i  $r_2$ ,  $\theta_2^-$  są współrzędnymi biegunowymi o biegunach  $K$  i  $P$  odpowiednio. Stałe  $B_1$ ,  $B_2$  wyznaczamy na podstawie współrzędnych punktów  $P$ ,  $K$ .

Po uzyskaniu (8.16) można zrealizować wskazany powyżej program wyznaczenia siatki linii poślizgu. Jest rzeczą oczywistą, że naszkicowany tok postępowania i wykorzystania wzorów (8.16), (8.13), (8.14) i (8.10) wymaga przeprowadzenia obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej.

Dla nieznanych parametrów

$$(8.17) \quad \nu_L, \kappa_M, \nu_k, \kappa_p, \xi_p, \eta_k$$

otrzymuje się układ równań przestępnych z całkami z funkcji Bessela. Analiza tego układu wykazuje, że tylko

$$(8.18) \quad \text{dla } e < 1 \text{ mamy } \nu_L, \nu_M, \nu_k, \nu_p, > 0,$$

a więc zaproponowane rozwiązanie jest poprawne, gdy przeciągane pasmo składa się z mocniejszego rdzenia ze słabszymi zewnętrznymi nakładkami. Można udowodnić również, że gdy  $e \rightarrow 1$ , to otrzymane rozwiązanie zdąża do znanego rozwiązania dla pasma jednorodnego.

### III. Skręcanie prętów o skokowej niejednorodności poprzecznej<sup>(10)</sup>

#### 9. Podstawowe równania w pewnym układzie krzywoliniowym

Przedmiotem naszych rozważań będą skręcane pręty pryzmatyczne o dowolnym przekroju poprzecznym. Przyjmiemy klasyczne założenia Saint-Venanta odnoszące się do przemieszczeń. Prowadzi to do konieczności ograniczenia się do przypadku, gdy granica plastyczności  $K$  nie zależy od  $z$  (oś  $z$  kierujemy równoległe do tworzącej pręta). Istotnie, przyjmując np. kartezjański układ współrzędnych można pokazać (por. np. [30]), że założenia Saint-Venanta prowadzą do zależności  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ . Z równań równowagi mamy  $\tau_{xz,z} = 0$  i  $\tau_{yz,z} = 0$ . Warunek plastyczności może być teraz spełniony na raz w całym pręcie tylko dla  $K_{,z} = 0$ . W przypadku  $K = K(x, y, z)$  założenia Saint-Venanta nie mogą być zatem przyjęte. W stadium sprężysto-plastycznym i w chwili początku niewstrzymanego płynięcia mamy w tym przypadku do czynienia ze złożonym przestrzennym stanem naprężenia.

Rozkład naprężeń w całkowicie uplastycznionym pręcie o poprzecznej niejednorodności opisuje w dowolnym układzie ortogonalnym  $\alpha, \beta, z$ , gdzie  $\alpha, \beta$  są współrzędnymi krzywoliniowymi w płaszczyźnie przekroju, układ złożony z równania równowagi

$$(9.1) \quad (h_\beta \tau_{\alpha z})_{,\alpha} + (h_\alpha \tau_{\beta z})_{,\beta} = 0$$

i warunku plastyczności

$$(9.2) \quad \tau_{\alpha z}^2 + \tau_{\beta z}^2 = K^2(\alpha, \beta)$$

Poszukiwanie składowe fizyczne tensora naprężenia  $\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$  określają wektor naprężenia

$$(9.3) \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_{\alpha z} \frac{\mathbf{g}_\alpha}{h_\alpha} + \tau_{\beta z} \frac{\mathbf{g}_\beta}{h_\beta},$$

gdzie  $\mathbf{g}_\alpha, \mathbf{g}_\beta$  są wektorami bazy (rys. 3.1). Warunek plastyczności ma zatem postać

$$(9.4) \quad |\boldsymbol{\tau}| = K(\alpha, \beta).$$

Wprowadzając funkcję naprężeń przez wzory,

$$(9.5) \quad \tau_{\alpha z} = \frac{\partial F}{\partial s_\beta}, \quad \tau_{\beta z} = -\frac{\partial F}{\partial s_\alpha};$$

<sup>(10)</sup> W rozdziale tym omówimy prace [13], [14]. Niektóre wyniki przedstawiono również w pracy [4].

czyli przez zależność

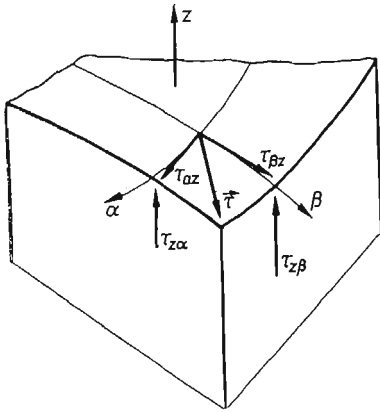
$$\boldsymbol{\tau} \operatorname{grad} F = 0,$$

spełniamy tożsamościowo równanie równowagi. Funkcję naprężeń określa warunek

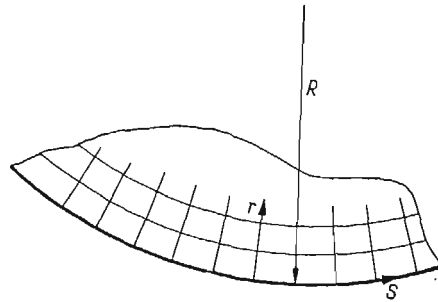
$$(9.6) \quad \left( \frac{\partial F}{\partial s_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial s_\beta} \right)^2 = |\operatorname{grad} F|^2 = K^2(\alpha, \beta).$$

Trajektorią naprężenia stycznego w płaszczyźnie  $\alpha, \beta$  nazywamy linię styczną w każdym punkcie do wektora  $\boldsymbol{\tau}$ . Linią poślizgu nazywamy linię prostopadłą w każdym punkcie do wektora  $\boldsymbol{\tau}$ . Linie poślizgu i trajektorie stanowią krzywoliniową siatkę ortogonalną  $\gamma, \delta$ .

Pierwszym ogólnym studium o nośności granicznej skręcanych prętów o ciągłej poprzecznej niejednorodności była praca A. I. KUZNIECOWA [31], który analizował równania



Rys. 3.1



Rys. 3.2

(9.1) i (9.2), odniesione do układu kartezjańskiego. Posługując się metodą półodwrotną wykazał on m.in., że w przypadku gdy granica plastyczności zależy jedynie od odległości od konturu, wektor naprężenia stycznego jest prostopadły do normalnej do konturu.

Wynik ten można otrzymać natychmiast, jeżeli posłużyć się siatką ortogonalną pokazaną na rys. 3.2. Współrzędna  $r$  jest odległością od konturu,  $s$  jest słułością łuku na konturze,  $R(s)$  jest jego promieniem krzywizny (dla sytuacji pokazanej na rys. 3.2  $R < 0$ ), parametry Lamégo wynoszą  $H_r = 1$ ,  $H_s = 1 + \kappa(s)r$ ,  $\kappa(s) \equiv 1/R(s)$ . Układ równań (9.1), (9.2) przyjmuje postać

$$(9.7) \quad \tau_{sz,s} + (1 + \kappa r) \tau_{rz,r} + \kappa \tau_{rz} = 0,$$

$$(9.8) \quad \tau_{sz}^2 + \tau_{rz}^2 = K^2(r, s).$$

Gdy  $K = K(r)$ , to jedynym rozwiązaniem tego układu, spełniającym na brzegu warunek  $\tau_{rz} = 0$ , jest

$$(9.9) \quad \tau_{sz} = \pm K(r), \quad \tau_{rz} \equiv 0,$$

zatem trajektoriami naprężeń stycznych są linie  $r = \text{const}$  naszego układu, a liniami poślizgu linie  $s = \text{const}$ .

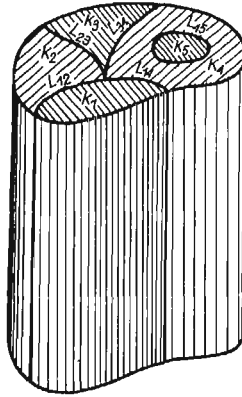
Przyjęty układ współrzędnych może być z powodzeniem wykorzystany w wielu zadaniach skręcania [32].

### 10. Skokowa niejednorodność. Warunki dla naprężeń na powierzchni kontaktu

Szereg zagadnień praktycznych prowadzi do konieczności rozważenia sytuacji, gdy wzdłuż pewnych krzywych w przekroju poprzecznym następuje skok granicy plastyczności  $K$ .

W rozdziale niniejszym ograniczymy się do istotnego dla zastosowań przypadku, gdy skręcany pręt składa się ze skończonej ilości prętów pryzmatycznych jednorodnych o różnych granicach plastyczności  $K_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (rys. 3.3). Linię styku  $\nu$ -tej i  $\mu$ -tej części w przekroju poprzecznym oznaczonym przez  $L_{\mu\nu}$ .

Jest rzeczą zupełnie oczywistą, że podane wartości  $K_\nu$ ,  $K_\mu$  nie wystarcza do opisu zachowania się złącza jako całości. Wystarczającą dla problemu nośności na skręcanie informacją uzupełniającą będzie podanie maksymalnej wartości naprężenia stycznego,



Rys. 3.3

które może być przekazane przez linię kontaktu  $L_{\mu\nu}$ . Wartość tę oznaczmy przez  $K_{\mu\nu}$ <sup>(20)</sup>. W realnej konstrukcji liczba  $K_{\mu\nu}$  zależy od charakteru połączenia (styk klejony, połączenie zgrzewane, styk z przyczepnością itp.). Gdy zachodzi nierówność

$$(10.1) \quad K_{\mu\nu} \geq \min(K_\mu, K_\nu),$$

to wartość  $K_{\mu\nu}$  jest nieistotna i nie wchodzi do rachunków.

Linie kontaktu  $L_{\mu\nu}$  przyjmiemy jako linię  $\beta$  ( $\alpha = \text{const}$ ) układu krzywoliniowego (rys. 3.4). Wektory naprężenia w częściach o granicach plastyczności  $K_\nu$ ,  $K_\mu$  oznaczmy przez  $\tau^\nu$ ,  $\tau^\mu$ . Ze względu na to, że z obu stron linii  $L_{\mu\nu}$  materiał ma być uplastyczniony, moduły tych wektorów są równe odpowiednio

$$(10.2) \quad |\tau^\nu|^2 = (\tau_{\alpha z}^\nu)^2 + (\tau_{\beta z}^\nu)^2 = K_\nu^2, \quad |\tau^\mu|^2 = (\tau_{\alpha z}^\mu)^2 + (\tau_{\beta z}^\mu)^2 = K_\mu^2,$$

zatem linia nieciągłości granicy plastyczności jest zawsze linią nieciągłości naprężeń.

Z ciągłości składowych normalnych wektorów  $\tau^\nu$ ,  $\tau^\mu$  wynika

$$(10.3) \quad \tau_{\alpha z}^\nu = \tau_{\alpha z}^\mu = \tau_{\alpha z}, \quad |\tau_{\alpha z}| \leq K_{\nu\mu}^0,$$

<sup>(20)</sup> Ponieważ z przyjętych założeń teorii skręcania wynika  $\sigma_{\alpha\alpha} \equiv \sigma_{\beta\beta} \equiv 0$ , to dwa modele złącza zdefiniowane w rozdziale I pokrywają się.

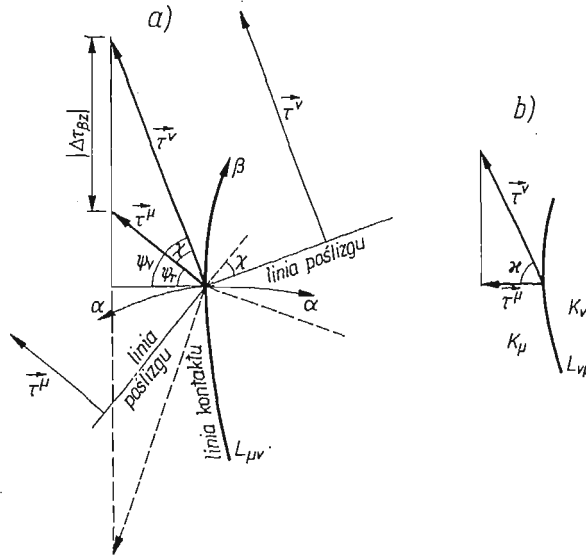


z warunków zaś (10.2) wynika wartość skoku składowych stycznych

$$(10.4) \quad |\tau_{\beta z}^v - \tau_{\beta z}^\mu| = \frac{|(K_v^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2} - (K_\mu^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2}|}{|(K_v^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2} + (K_\mu^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2}|}$$

Przyjmijmy dla uporządkowania dalszych rozważań, że  $K_v > K_\mu$  oraz że kierunek wektora  $\tau^\mu$  jest dany.

Położenie wektorów  $\tau^v$ ,  $\tau^\mu$  na linii  $L_{v\mu}$  przedstawia rys. 3.4a. Wprowadzając terminologię użytą w p. 5 nazwiemy sytuację odpowiadającą znakowi minus we wzorach (10.4) nieciągłości pierwszego rodzaju (górne położenie wektora  $\tau^v$ ), a sytuację odpowiadającą znakowi plus nieciągłości drugiego rodzaju. Linia  $L_{\mu v}$  będzie z reguły linią nieciągłości pierwszego rodzaju, spowodowanej tylko przez niejednorodność i mającej bezpośredni



Rys. 3.4

sens fizyczny. Nieciągłość drugiego rodzaju odpowiada wyjątkowej sytuacji pokrywania się linii  $L_{\mu v}$  z linią nieciągłości naprężeń, która miałaby miejsce w materiale jednorodnym.

Przy rozwiązywaniu problemów brzegowych potrzebne będą kąty, jakie tworzą wektory  $\tau^v$ ,  $\tau^\mu$  z normalną do  $L_{\mu v}$ , oznaczone odpowiednio przez  $\psi_v$ ,  $\psi_\mu$ , oraz kąt między tymi wektorami oznaczony przez  $\chi$ .

Związki między tymi kątami dla linii nieciągłości pierwszego rodzaju określa warunek ciągłości składowych  $\tau_{\alpha z}^v$ ,  $\tau_{\alpha z}^\mu$ . Mają one postać

$$(10.5) \quad \psi_v = \arccos\left(\frac{K_\mu}{K_v} \cos\psi_\mu\right), \quad \chi = \psi_v - \psi_\mu.$$

Kąt  $\chi$  jest jednocześnie kątem załamania linii poslizgu na linii kontaktu. Kąty  $\psi_\mu$ ,  $\psi_v$  muszą spełniać warunki

$$(10.6) \quad \psi_\mu \geq \bar{\psi}_\mu \equiv \arccos \frac{K_{v\mu}}{K_\mu}, \quad \psi_v \geq \bar{\psi}_v \equiv \arccos \frac{K_{v\mu}}{K_v},$$

Gdy zachodzi nierówność (9.7), kąt nachylenia wektora  $\tau^v$  ograniczony jest od dołu przez warunek

$$(10.7) \quad \psi_v \geq \varkappa = \arccos \frac{K_\mu}{K_v}.$$

Znak równości odpowiada granicznej konfiguracji przedstawionej na rys. 3.4b.

### 11. Analogie Nádaia dla skokowej niejednorodności

Dla skręcania prętów o skokowej niejednorodności obowiązują proste uogólnienia obu analogii Nádaia [33].

Pierwsza analogia Nádaia (analogia wzgórza piaskowego) dotyczy funkcji naprężeń  $F$  wprowadzonej przez związki (9.5). Warunek plastyczności określa  $F$  w każdym z obszarów z osobną równością

$$(11.1) \quad |\text{grad} F| = K_i \quad \text{w} \quad G_i.$$

Powierzchnia reprezentująca  $F$  jest więc w każdym z obszarów powierzchnią równego spadku, którego wartość jest inna w każdym obszarze. Ze związków (9.5) wynika, że linie stałego  $F$  są w każdym obszarze trajektoriami naprężenia stycznego.

Wykażemy obecnie, że powierzchnia  $F$  może być przyjęta jako ciągła przy dowolnej liczbie i konfiguracji stref  $G_i$  o różnej granicy plastyczności.

Istotnie, w każdej strefie  $G_i$  z osobną  $F$  jest ciągła. Na granicy  $L_{v\mu}$  stref  $G_v, G_\mu$ , przyjętej jako linia  $\beta$ , z warunku ciągłości  $\tau_{xz}^v = \tau_{xz}^\mu$  oraz ze związku  $F$  z naprężeniami (9.5) wynika zależność

$$(11.2) \quad F_{v,\beta}^v = F_{\mu,\beta}^\mu, \quad \text{czyli} \quad F^v = F^\mu + A_{v\mu},$$

gdzie  $A_{v\mu}$  jest stałą na  $L_{v\mu}$ . Nieciągłości  $F$  na liniach  $L_{v\mu}$  mogą polegać jedynie na stałej różnicy wzniosu. Rozważmy powierzchnię  $\bar{F}$  mającą tego rodzaju nieciągłości. Przyjmijmy pewien obszar  $G_k$  stykający się z obszarami  $G_{k+1}, \dots, G_{k+l}$ , jako wyjściowy. Dodając w każdym z obszarów  $G_{k+1}, \dots, G_{k+l}$  do funkcji naprężeń odpowiednio stałe  $-A_{k,k+1}, \dots, -A_{k,k+l}$  likwidujemy nieciągłości wzdłuż całego brzegu obszaru  $G_k$ . Jednocześnie zlikwidowane zostają nieciągłości wzdłuż łuków styku obszarów  $G_{k+1}, \dots, G_{k+l}$ . Otrzymujemy zwiększony obszar ciągłości powierzchni  $\bar{F}$ , który przyjmujemy znów za wyjściowy. Postępowanie to prowadzi do ciągłej powierzchni  $F$ , przy czym na całym brzegu otrzymamy  $F = \text{const}$  i można przyjąć na brzegu warunek  $F = 0$ .

Otrzymana powierzchnia ciągła  $F$  jest równoważna z punktu widzenia jej związku ze stanem naprężenia poprzez zależności (9.5) z powierzchnią nieciągłą  $\bar{F}$ , ponieważ całe postępowanie polegało na dodawaniu stałych do  $\bar{F}$  w poszczególnych obszarach.

Graniczny moment skręcający wynosi

$$(11.3) \quad M = \int_G \int |\tau \times \mathbf{R}| dS = \sum_{v=1}^n \left\{ 2 \int_{G_v} \int F^v dS - \int_{L_v} F^v dl \right\},$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest promieniem-wektorem poprowadzonym z ustalonego punktu przekroju,  $L_v$  oznacza brzeg obszaru  $G_v$ . Ponieważ wykazaliśmy, że powierzchnia  $F$  składająca się z płatów  $F^v$  jest ciągła, całki krzywoliniowe znoszą się (każdy łuk  $L_v$  jest przebiegany dwukrotnie w przeciwnych kierunkach, zaś na brzegu  $F = 0$ ), zatem znany wzór

$$(11.4) \quad M = 2 \iint_G F dS$$

obowiązuje dla dowolnego przekroju o skokowej niejednorodności.

Zauważmy, że przy rozpatrywaniu przekrojów o skokowej niejednorodności *nie występuje potrzeba osobnego traktowania przekrojów wielospójnych*. Są one przypadkiem szczególnym, gdy w pewnych obszarach  $G_v$  mamy  $K_v = 0$ . Odpowiada to wypełnieniu pryzmy  $G_v$  ciałem nie przenoszącym naprężeń stycznych — cieczą idealną, nie wpływającą na zachowywanie się pręta przy skręcaniu.

*Przekroje jednorodne wielospójne są również przypadkiem szczególnym przekrojów o skokowej niejednorodności*, toteż przy naszym traktowaniu funkcji naprężeń (budowaniu powierzchni  $F$  we wszystkich obszarach włączając w nie również obszary puste) wzór (11.4) obowiązuje i dla nich.

Eksperymentalne wykorzystanie pierwszej analogii Nádai'a wymaga użycia w różnych obszarach  $G_v$  materiałów sypkich o odmiennych kątach tarcia wewnętrznego. W związku z tym metodyka prowadzenia doświadczenia nie może się pokrywać z zaproponowaną przez Nádai'a (por. [33]) i wymaga osobnego opracowania.

Gdy zbudowana jest powierzchnia  $F$ , zadanie sprężysto-plastyczne może być modelowane przy wykorzystaniu drugiej analogii Nádai'a. Ponieważ skokowej niejednorodności plastycznej towarzyszy na ogół skokowa niejednorodność sprężysta, to błona napinana na podstawie powierzchni  $F$  powinna mieć różną sztywność w różnych obszarach  $G_v$ . Trudność eksperymentu polega na konieczności spełnienia warunku, by rzut każdej części błony na płaszczyznę podstawy był niezmienny, co przy dużych ugięciach może nie mieć miejsca.

Problem wyznaczenia naprężeń w stanie granicznym pręta skręcanego o skokowej niejednorodności jest, jak wykazaliśmy, równoważny problemowi zbudowania nad konturem przekroju powierzchni  $F$  o skokowo zmiennym spadku. Należy podkreślić, że oba problemy nie mają jednoznacznego rozwiązania. Rozwiązaniem właściwym jest to, które zgodne jest z kinematyką ruchu. Gdy kinematyka ruchu nie jest badana, ze zbioru możliwych rozwiązań należy zgodnie z twierdzeniem o nośności granicznej wybrać to, które daje największą wartość momentu granicznego (największą wartość objętości bryły  $F$ )<sup>(21)</sup>.

Uwagi powyższe są dość oczywiste i jeżeli zostały tu poczynione, to tylko ze względu na specyficzne trudności związane z mnogością rozwiązań dla przekrojów o skokowej niejednorodności. Wybór właściwej kombinacji linii nieciągłości staje się tu znacznie bardziej skomplikowany niż dla ciała jednorodnego.

Drugim warunkiem poprawności rozwiązania dla skokowej niejednorodności jest wykazanie, że przy wyrównywaniu się wartości  $K_\mu$ ,  $K_v$ ,  $K_{v\mu}^0$  dochodzimy w granicy do rozwiązania dla ciała jednorodnego.

(<sup>21</sup>) Dopiero po dołączeniu tego warunku można nazwać problem skręcania plastycznego problemem statycznie wyznaczalnym.



krywa się z normalną do brzegu w punkcie  $A$ . Wektor  $\tau^-$  jest wtedy ortogonalny do  $L$ , równanie zaś linii nieciągłości ma postać

$$(12.2) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_+ + \alpha_A + \kappa).$$

Gdy w rozwiązaniu przedstawionym na rys. 3.5 zrobimy przejście graniczne  $K_- \rightarrow 0$ , otrzymujemy klasyczny przypadek linii nieciągłości w materiale  $K_+$ , spowodowanej przez wypukłe naroże. Gdy  $K_- \rightarrow K_+$ , skoki na obu liniach nieciągłości (liniach  $L$  i  $l$ ) dążą do zera i otrzymujemy ciągłe pole naprężeń.

Bardziej skomplikowany obraz przebiegu linii poślizgu otrzymujemy w przypadku, gdy linia kontaktu przebiega po tej stronie normalnej do brzegu w punkcie  $A$ , po której znajduje się mocniejszy materiał. Rozważenie powstających tu sytuacji znajdzie Czytelnik w pracy [13].

Zakładaliśmy dotychczas, że wartość  $K_0$  ( $\equiv K_{\mu\nu}$ ) maksymalnego naprężenia stycznego, które może być przekazane przez linię kontaktu dwu materiałów, jest nie mniejsza od granicy plastyczności słabszego materiału [nierówność (10.1)]. Jest to na ogół oszacowanie za silne; rzeczywistą granicę stosowalności każdego rozwiązania określa nierówność

$$(12.3) \quad K_0 \geq \max_L |\tau_{nz}|,$$

gdzie przez  $\tau_{nz}$  oznaczono składową normalną wektora  $\tau$  na linii  $L$ . Dla mniejszych wartości  $K_0$  rozwiązania ulegają zmianom.

Należy podkreślić, że rozważane rozwiązania mają charakter lokalny, co znalazło wyraz w sformułowaniach o otoczeniu punktu  $A$ . Są one koniecznym środkiem pomocniczym przy budowaniu rozwiązania dla całego przekroju.

### 13. Nośność graniczna pręta kołowego o niejednorodności skokowej

Zastosujemy otrzymane wyniki do problemu nośności granicznej pręta kołowego o skokowej niejednorodności poprzecznej. Przyjmujemy, że przekrój poprzeczny składa się z  $n$  wycinków o kątach rozwarcia  $\gamma_\nu$ ,  $\sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu = 2\pi$ , reprezentujących części przyzmatyczne o różnych granicach plastyczności  $K_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) (rys. 3.6).

A. Zbudujemy najpierw rozwiązanie lokalne w otoczeniu punktu przecięcia dowolnej linii kontaktu  $OA_\nu$  z brzegiem przekroju. Zakładamy, że dla wszystkich linii  $OA_\nu$  zachodzi warunek (10.1).

W otoczeniu każdego z punktów  $A$  mamy przypadek szczególny sytuacji rozważonej w p. 12 (por. rys. 3.5). Przyjmując układ współrzędnych jak na rys. 3.7, mamy  $\varphi_+ = \varphi = \arctg y/x$ ,  $\alpha = \pi/2$ . Równanie różniczkowe linii nieciągłości naprężeń w obszarze mocniejszym (12.2) przyjmuje postać

$$(13.1) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi + \kappa \right), \quad \kappa \equiv \arccos \frac{K_-}{K_+}.$$

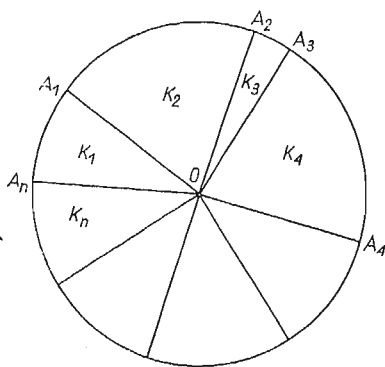
Przechodząc do współrzędnych biegunowych po znanych przekształceniach operacji  $dy/dx$  równanie to zapiszemy w postaci:

$$(13.2) \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \varphi - \varkappa \right).$$

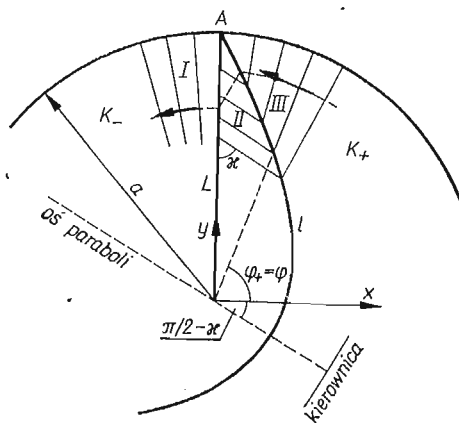
Po scałkowaniu otrzymujemy równanie linii nieciągłości  $l$  przechodzącej przez punkt  $A$  w postaci

$$(13.3) \quad r = \frac{p}{1 + \cos(\varphi + \varphi_0)}, \quad p = a(1 - \cos \varkappa), \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \varkappa.$$

Jest to równanie paraboli w układzie biegunowym. Oś paraboli  $l$  jest nachylona do osi  $x$  pod kątem  $-\varphi_0$ , ognisko znajduje się w początku układu, odległość wierzchołka od ogniska wynosi  $p/2$ , rys. 3.7<sup>(22)</sup>.



Rys. 3.6



Rys. 3.7

Funkcja naprężeń wyraża się w poszczególnych obszarach następującymi zależnościami: w obszarze I

$$(13.4) \quad F = K_-(a-r) = K_+(a-r) \cos \varkappa,$$

w obszarze II

$$(13.5) \quad F = K_+[r \cos(\varphi + \varphi_0) + a \cos \varkappa],$$

w obszarze III

$$(13.6) \quad F = K_+(a-r).$$

W otoczeniu punktu  $A$  powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń składa się z trzech płatów: dwóch części stożkowych (13.4) i (13.6) połączonych płaszczyzną (13.5). Równanie paraboli (13.3) można otrzymać przecinając stożek (13.6) płaszczyzną (13.5).

Gdy  $K_- \rightarrow K_+$ , ( $\varkappa \rightarrow 0$ ), mamy  $p \rightarrow 0$ ,  $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$ ; obszar II zanika, linia nieciągłości dąży do  $OA$ .  $[\tau] \rightarrow 0$  i otrzymujemy w całym otoczeniu  $A$   $F \rightarrow K^+(a-r)$ .

<sup>(22)</sup> Rys. 3.7 i dalsze są wykonane dla  $K_-/K_+ = 0,5$ ,  $\varkappa = 60^\circ$ .

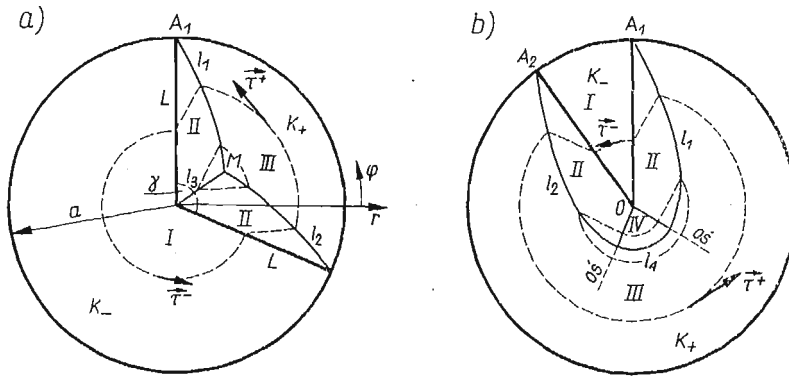
Gdy  $K_- \rightarrow 0$  ( $\kappa \rightarrow \pi/2$ ), otrzymujemy w granicy rozkład naprężeń w materiale jednorodnym ( $K_+$ ) z parabolą nieciągłości w otoczeniu naroża utworzonego przez łuk okręgu i prostą prostopadłą, przy czym  $p = a$ ,  $\varphi_0 = 0$ .

B. Rozpatrzmy w charakterze przykładu najprostsze zadanie o skręcaniu pręta składającego się z dwóch materiałów  $K_-$ ,  $K_+$ ,  $K_- < K_+$ . Kąt rozwarcia strefy mocniejszej oznaczmy przez  $\gamma$ .

a. Gdy kąt  $\gamma$  spełnia nierówność

$$(13.7) \quad \gamma \leq 2(\pi - \kappa)$$

rozwiązanie ma postać przedstawioną na rys. 3.8. Wynika to z przeprowadzonej analizy rozwiązań lokalnych w otoczeniu punktów  $A_1$ ,  $A_2$ . Komentarza wymaga jedynie linia nieciągłości  $l_3$ , będąca prostą łączącą punkt  $M$  przecięcia łuków parabolicznych  $l_1$ ,  $l_2$  ze środkiem przekroju i równo nachylona do linii poślizgu w obu obszarach II.



Rys. 3.8

Funkcja naprężeń jest określona w poszczególnych obszarach wzorami (13.4), (13.5) i (13.6). Na rysunku 3.8 pokazano kilka linii  $F = \text{const}$  (trajektorie naprężeń stycznych). Dla  $\gamma < \pi - 2\kappa$   $F$  ma wartość największą w środku pręta. Gdy  $\gamma = \pi - 2\kappa$ , linia nieciągłości  $l_3$  ma kierunek trajektorii naprężeń stycznych i  $F$  ma wzdłuż niej stałą najwyższą wartość. Gdy  $\pi - 2\kappa < \gamma < 2(\pi - \kappa)$  największa wartość  $F$  przypada na punkt  $M$ .

Moment graniczny na podstawie (3.4) i (5.4) – (5.6) wynosi

$$(13.8) \quad M = 4K_+ \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}}^{\pi/2} \left\{ \int_0^{r(\varphi)} [a \cos \kappa + r \cos(\varphi + \varphi_0)] r dr + \int_{r(\varphi)}^a (a - r) r dr \right\} d\varphi + \frac{K_+ a^3}{3} (2\pi - \gamma) \cos \kappa,$$

gdzie

$$r(\varphi) = p[1 + \cos(\varphi + \varphi_0)]^{-1}.$$

Po przeprowadzeniu całkowania otrzymujemy

$$(13.9) \quad M = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ (2\pi - \gamma) \cos \kappa + \gamma - \frac{2}{3} (1 - \cos \kappa)^3 \left[ \frac{(2 - \cos \kappa) \sin \kappa}{(1 - \cos \kappa)^2} - \frac{\left( 2 - \cos \left( \frac{\gamma}{2} + \kappa \right) \right) \sin \left( \frac{\gamma}{2} + \kappa \right)}{\left( 1 - \cos \left( \frac{\gamma}{2} + \kappa \right) \right)^2} \right] \right\}$$

Przejście graniczne do materiału jednorodnego ( $K_- \rightarrow K_+$ ) na rys. 3.8 i we wzorze (13.9) nie nasuwa żadnych trudności.

Gdy kąt  $\gamma$  osiąga górną dopuszczalną granicę  $2(\pi - \kappa)$ , prosta linia nieciągłości pokrywa się z osią paraboli. Łuki  $l_1, l_2$  są wówczas styczne w punkcie  $M$  i tworzą jedną parabolę.

b. Gdy kąt rozwarcia strefy mocniejszej narasta dalej, tzn. zachodzi nierówność

$$(13.10) \quad \gamma > 2(\pi - \kappa),$$

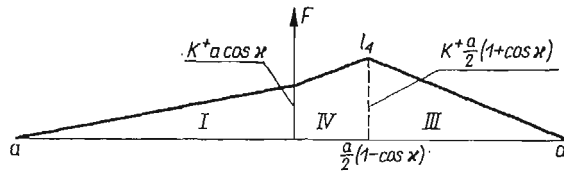
górną strefa II nie ulega żadnym zmianom w stosunku do położenia przy  $\gamma = 2(\pi - \kappa)$ , druga zaś strefa II obraca się jak «ciało sztywne» wokół punktu  $O$ . Zamiast linii nieciągłości  $l_3$  pojawia się w rozwiązaniu nowy obszar IV, rys. 3.8b, ograniczony przez osie symetrii paraboli  $l_1, l_2$ . Linie poślizgu w tym obszarze tworzą wachlarz biegunowy o biegunie  $O$ <sup>(23)</sup>. Rozwartość wachlarza wynosi

$$(13.11) \quad \chi = \gamma - 2(\pi - \kappa).$$

Linia styku  $l_4$  obszarów IV, III jest okręgiem o promieniu, którego wartość wynika z równania paraboli (13.3) i wynosi  $p/2$ . Okrąg ten jest linią nieciągłości naprężeń.

Funkcja naprężeń w obszarach I, II, III wyraża się nadal wzorami (13.4), (13.5), (13.6). W obszarze IV równanie funkcji naprężeń ustalamy łatwo opierając się na rys. 3.9, na którym pokazano jeden z przekrojów powierzchni  $F$ . Otrzymujemy

$$(13.12) \quad F = K_+(r + a \cos \kappa).$$



Rys. 3.9

Na rysunku 3.8.b) zaznaczono linie  $F = \text{const}$ . Na linii nieciągłości  $l_4$ ,  $F$  osiąga największą, stałą wartość.

Moment graniczny łatwo obliczyć biorąc wartość drugiego i trzeciego członu we wzorze poprzednim (13.9) dla  $\gamma = 2(\pi - \kappa)$  i dodając człony pochodzące od naprężeń

<sup>(23)</sup> Ilustracją do uwag wypowiedzianych w p. 11 jest fakt, że i w przypadku (13.10) rozwiązanie znalezione w punkcie a) spełnia nadal układ równań (9.1), (9.2), jednakże musi być odrzucone, jako nie dające maksymalnej wartości momentu granicznego.



w obszarach I, IV i części obszaru III o rozwartości  $\chi$  obliczone w oparciu o rys. 3.9. Otrzymujemy w ten sposób wartość

$$(13.13) \quad M = \frac{K_+ a^3}{3} \left[ (2\pi - \gamma) \cos \kappa + \gamma - \frac{2}{3} (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 - \cos \kappa)^3 \left( \frac{\gamma}{2} + \kappa - \pi \right) \right].$$

Moment graniczny jest tu liniową funkcją kąta  $\gamma$ , co jest oczywiste ze względu na omówiony sposób zachowania się obszarów II. Porównując wzory (13.9), (13.13) lub rys. 3.8a, 3.8b można stwierdzić, że efektywność wykorzystania dodawanego materiału mocnego (przyrost momentu granicznego odniesiony do przyrostu kąta  $\gamma$ ) rośnie wraz z kątem  $\gamma$ , stając się stałą i maksymalną dla  $\gamma > 2(\pi - \kappa)$ .

Przejście graniczne do ciała jednorodnego nie nastrocza żadnych wątpliwości ( $K_- \rightarrow K_+$ ).

Gdy  $K_- \rightarrow 0$ , otrzymujemy rozwiązanie dla pręta o przekroju w postaci wypukłego wycinka koła (rozwiązanie a) lub koła z wycięciem (rozwiązanie b). Momenty graniczne dla tych przypadków otrzymujemy z (13.9), (13.13) przyjmując  $\kappa = \pi/2$ , co daje

$$(13.14) \quad M_{K_- = 0} = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ \gamma - \frac{2}{3} \left[ 2 - \frac{\left( 2 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\gamma}{2}}{\left( 1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2} \right] \right\}, \quad M_{K_- = 0} = \frac{K_+ a^3}{3} \left( \frac{3}{4} \gamma - 0,5479 \right).$$

Z drugiego wzoru otrzymujemy dla  $\gamma = 2\pi$  współczynnik osłabienia przekroju kołowego, rozciętego wzdłuż jednego promienia,

$$M = 0,663 \frac{2\pi K_+ a^3}{3}.$$

Wzór dla  $\gamma = \pi$

$$M = 0,228 \frac{2\pi K_+ a^3}{3}$$

wskazuje na to, jaką część momentu granicznego dla pręta o pełnym przekroju kołowym przenosi pręt o przekroju półkolistym.

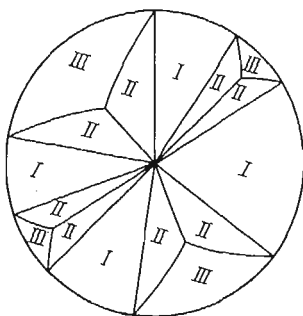
C. Podane rozwiązanie łatwo uogólnić na przypadek, gdy przekrój składa się z  $2n$  wycinków zawierających na przemian dwa materiały o wytrzymałości  $K_-$  i  $K_+$ . Oznaczmy rozwartość stref mocniejszych przez  $\gamma_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ).

Układ linii nieciągłości w każdym wycinku  $K_+$  nie różni się od przedstawionego w p. B. (rys. 3.10). Łatwo zauważyć, że stref z rozwiązaniem B (rys. 3.8b) nie może być więcej niż jedna. Uznając ją za  $n$ -tą, mamy bowiem  $\gamma_n > 2(\pi - \kappa) > \pi$ .

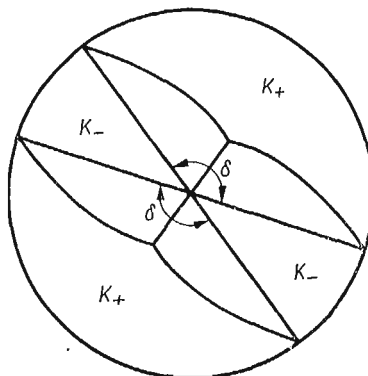
Dla  $\gamma_\nu < 2(\pi - \kappa)$  powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń składa się z części jednego stożka w obszarach I (rys. 3.10), części drugiego stożka w obszarach III oraz płaszczyzn w obszarach II.

Moment graniczny łatwo obliczyć na podstawie wzorów (6.9), (6.13). Wynosi on

$$(13.15) \quad M_{2n} = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ \left( 2\pi - \sum_1^n \gamma_i \right) \cos \kappa + \sum_1^n \gamma_i - \frac{2n}{3} (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} (1 - \cos \kappa)^3 \sum_1^{n-1} \frac{\sin \left( \frac{\gamma_v}{2} + \kappa \right) \left[ 2 - \cos \left( \frac{\gamma_v}{2} + \kappa \right) \right]}{\left[ 1 - \cos \left( \frac{\gamma_v}{2} + \kappa \right) \right]^2} - \frac{1}{2} (1 - \cos \kappa)^3 \left( \frac{\gamma_n}{2} + \kappa - \pi \right) \right\}.$$



Rys. 3.10



Rys. 3.11

Dla przypadku symetrycznego podziału na cztery strefy,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \delta$  (rys. 3.11) otrzymujemy

$$(13.16) \quad M_4 = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ 2(\pi - \delta) \cos \kappa + 2\delta - \frac{4}{3} (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} (1 - \cos \kappa)^3 \frac{\sin \left( \frac{\delta}{2} + \kappa \right) \left[ 2 - \cos \left( \frac{\delta}{2} + \kappa \right) \right]}{\left[ 1 - \cos \left( \frac{\delta}{2} + \kappa \right) \right]} \right\}.$$

Interesujące są dwa przejścia graniczne w tym wzorze,  $\delta \rightarrow 0$  i  $\delta \rightarrow \pi$ . W pierwszym przypadku otrzymujemy przekrój «wzmocniony» wzdłuż jednej średnicy; w wyrażeniu na nośność znoszą się odpowiednie człony i otrzymujemy nośność przekroju jednorodnego. W drugim przypadku otrzymujemy przekrój osłabiony wzdłuż jednej średnicy<sup>(24)</sup>; moment graniczny ulega zmniejszeniu i wynosi

$$(13.17) \quad M = \frac{2\pi K_+ a^3}{3} \left\{ 1 - \frac{4}{3\pi} \left[ (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa - \frac{(1 - \cos \kappa)^3 \cos \kappa (2 + \sin \kappa)}{(1 + \sin \kappa)^2} \right] \right\}.$$

<sup>(24)</sup> Przypadkiem szczególnym przekroju osłabionego wzdłuż pewnych linii jest przekrój z rozcięciami. Nośność graniczną takich przekrojów badał eksperymentalnie na podstawie analogii Nádai F. A. Mc CLINTOCK [34].

Otrzymany wynik można ująć w następujący sposób: sklejenie pręta wzdłuż powierzchni symetrii klejem słabszym od materiału zawsze osłabia pręt, zaś sklejenie klejem mocniejszym od materiału nie może go wzmocnić <sup>(25)</sup>

Rozpatrzmy sytuację, gdy liczba części, na które zostaje rozbity materiał mocniejszy, wzrasta do nieskończoności, przy czym rozwartość każdego wycinka  $\gamma_v$  dąży do zera.

Zachodzi następujące twierdzenie: gdy  $\sum_1^n \gamma_v = \Gamma = \text{const}$ , zaś  $\max \gamma_v \rightarrow 0$ , to bez względu na ilość materiału mocnego  $\Gamma$  oraz sposób jego podziału nośność pręta dąży do wartości odpowiadającej prętowi jednorodnemu z materiału słabszego.

Wypowiedziane twierdzenie jest intuicyjnie oczywiste, jeżeli uzmysłowić sobie kierunek działania wektora naprężenia  $\tau$  lub wyobrazić sposób zachowania się powierzchni reprezentującej funkcję naprężeń  $F$ .

Dowód formalny jest jednak niezupełnie trywialny i polega na wykazaniu, że dla sumy  $A$  wyrazu trzeciego i czwartego we wzorze (13.15) mamy

$$(13.18) \quad \lim_{\max \gamma_k \rightarrow 0} A = -(1 - \cos \kappa) \Gamma.$$

Technika dowodu będzie najprostsza, gdy wprowadzimy  $\gamma_{sr} \equiv \Gamma/n$  oraz  $\Delta\gamma_v \equiv \gamma_v - \gamma_{sr}$ . Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\sup \gamma_k \rightarrow 0} A &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\gamma_v \rightarrow 0}} -\frac{2}{3}(1 - \cos \kappa) \left\{ n(2 - \cos \kappa) \sin \kappa - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \cos \kappa)^2 \sum_{v=1}^n \frac{\sin \left( \frac{\Gamma}{2n} + \kappa + \Delta\gamma_v \right) \left[ 2 - \cos \left( \frac{\Gamma}{2n} + \kappa + \Delta\gamma_v \right) \right]}{\left[ 1 - \cos \left( \frac{\Gamma}{2n} + \kappa + \Delta\gamma_v \right) \right]^2} \right\} = \\ &= -\frac{2}{3}(1 - \cos \kappa) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ (2 - \cos \kappa) \sin \kappa - (1 - \cos \kappa)^2 \frac{\left[ 2 - \cos \left( \frac{\Gamma}{2n} + \kappa \right) \right] \sin \left( \frac{\Gamma}{2n} + \kappa \right)}{\left[ 1 - \cos \left( \frac{\Gamma}{2n} + \kappa \right) \right]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Usuując otrzymaną nieoznaczoność  $\infty \cdot 0$  otrzymujemy

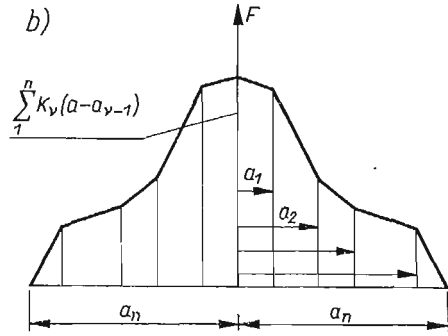
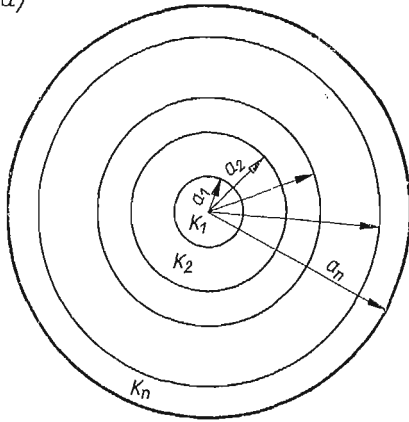
$$\lim_{\max \gamma_k \rightarrow 0} A = -\frac{2}{3}(1 - \cos \kappa) \lim_{s = \frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{3\Gamma(1 - \cos \kappa)^2}{2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\Gamma}{2} s + \kappa \right) \right]^2} = -(1 - \cos \kappa) \Gamma.$$

D. W oparciu o przedstawione wyniki można rozważyć również pręty składające się z wycinków, gdy liczba materiałów jest większa od dwóch. Ogólny tok postępowania

<sup>(25)</sup> Jest to wzmocniona wersja twierdzenia ogólniejszego o zmianie granicy plastyczności na zbiorze miary zero: podwyższenie granicy plastyczności na zbiorze miary zero nie zmienia nośności ciała, zmniejszenie zaś nie może jej zwiększyć. Twierdzenie to jest intuicyjnie widoczne, jednakże autorowi nie udało się udowodnić pierwszej jego części w ogólnym przypadku stanu trójwymiarowego.

polega na wykorzystaniu rozwiązania lokalnego znajdującego w p. A oraz na rozpoczęciu badania rozwiązania od najsłabszej części, w której brak jest linii nieciągłości.

a)



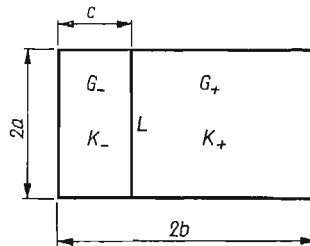
Rys. 3.12

Przypadek gdy pręt kołowy składa się z koncentrycznych cylindrów (rys. 3.12a) ma trywialne rozwiązanie. Przekrój powierzchni naprężeń  $F$  przedstawiony jest na rys. 3.12b. Moment graniczny wynosi

$$(13.19) \quad M = \frac{2\pi}{3} \sum_{v=1}^n K_v (a_v^3 - a_{v-1}^3).$$

#### 14. Nośność graniczna pręta prostokątnego

Rozważmy skręcany pręt o przekroju przedstawionym na rys. 3.13. Prostokąt  $2a \times 2b$  podzielony jest linią kontaktu  $L$  prostopadłą do brzegu o długości  $2b$  na dwa obszary  $G_-$ ,  $G_+$  o szerokości  $c$  oraz  $2b-c$ . Materiały w obszarach  $G_-$ ,  $G_+$  mają stałe ale różne granice plastyczności  $K_-$ ,  $K_+$ ,  $K_- < K_+$ . Wytrzymałość samego złącza charakteryzuje



Rys. 3.13

trzecia liczba  $K_0$  równa maksymalnemu naprężeniu stycznemu, które może być przekazane przez powierzchnię kontaktu. W dalszym ciągu przyjmiemy, że zachodzi kontakt z idealną przyczepnością, tzn.

$$(14.1) \quad K_0 \geq K_-,$$

co wyłącza liczbę  $K_0$  z dalszych rozważań.

Zadanie charakteryzują trzy niezależne parametry, np. następujące:

$$(14.2) \quad 0 \leq \eta = \frac{K_-}{K_+} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{a}{b} \leq \infty, \quad 0 \leq \frac{c}{b} \leq 2,$$

które można nazwać odpowiednio parametrem *niejednorodności*, parametrem *kształtu* i parametrem *podziału*.

W rozważanym zadaniu naturalnym układem odniesienia jest układ kartezjański. Składowe wektora naprężenia stycznego

$$(14.3) \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_{xz} \mathbf{i}_x + \tau_{yz} \mathbf{i}_y,$$

muszą spełniać równanie równowagi

$$(14.4) \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0,$$

warunek plastyczności

$$(14.5) \quad |\boldsymbol{\tau}|^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \begin{cases} K_-^2 & \text{w } G_-, \\ K_+^2 & \text{w } G_+ \end{cases}$$

i warunek brzegowy  $\tau_{tz} = 0$  na brzegu przekroju.

Na linii kontaktu  $L$  musi być spełniony warunek ciągłości składowej normalnej

$$(14.6) \quad \boldsymbol{\tau}_+ \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_- \mathbf{n},$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem prostopadłym do  $L$ . Na linii kontaktu mamy zatem nieciągłość naprężeń, a wektor naprężenia stycznego doznaje obrotu.

Wzory (9.5) przybierają postać:

$$(14.7) \quad \tau_{xz} = F_{,y}, \quad \tau_{yz} = -F_{,x},$$

a z warunku (9.6) mamy

$$(14.8) \quad |\text{grad} F| = \begin{cases} K_- & \text{w } G_-, \\ K_+ & \text{w } G_+. \end{cases}$$

Problem wyznaczenia naprężeń spełniających (14.4) i (14.5) jest zatem równoważny zbudowaniu powierzchni ciągłej  $F(x, y)$  o stałym, ale różnym w  $G_-$ ,  $G_+$  spadku.

Moment graniczny określa wzór (11.4).

Rozwiązania lokalne w otoczeniu punktu  $A$  pokazane na rysunku 3.14 wynikają z rozwiązania znalezionej wcześniej (p. 12) jako przypadek szczególny. Tak więc

$$(14.9) \quad \tau_{xz}^I = K_-, \quad \tau_{yz}^I \equiv 0,$$

$$(14.10) \quad \tau_{yz}^{II} = K_+ \cos \varkappa, \quad \tau_{xz}^{II} = K_+ \sin \varkappa,$$

$$(14.11) \quad \tau_{xz}^{III} = K_+, \quad \tau_{yz}^{III} \equiv 0.$$

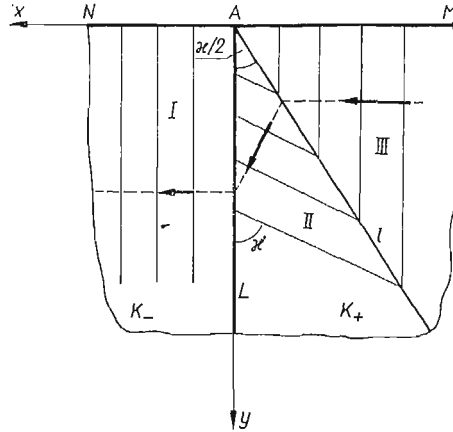
Wektor  $\boldsymbol{\tau}^{II}$  o module  $K_+$  jest obrócony względem wektora  $\boldsymbol{\tau}^I$  o module  $K_-$  o kąt

$$(14.12) \quad \varkappa = \arccos \eta, \quad 0 \leq \varkappa \leq \frac{\pi}{2}.$$

Na rysunku 3.14 podano linie poślizgu ortogonalne w każdym punkcie do  $\boldsymbol{\tau}$  oraz jedną z trajektorii wektora  $\boldsymbol{\tau}$ . Powierzchnia  $F(x, y)$  składa się w otoczeniu  $A$  z trzech płatów płaszczyzn.

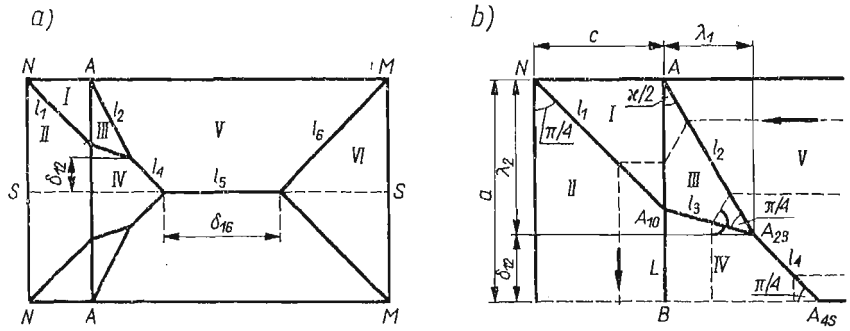
W zależności od wartości parametrów  $\eta$ ,  $a/b$ ,  $c/b$  zadanie o nośności granicznej rozważanego pręta ma pięć różnych rozwiązań.

Rozwiązanie I (rys. 3.15). Z naroża  $N$  wychodzi linia nieciągłości  $l_1$ , dzieląca strefę słabszą na obszary I, II, w których linie poślizgu są prostopadłe odpowiednio do  $NA$  i  $NS$ . Ze względu na warunek maksimum momentu granicznego zakładamy, że



Rys. 3.14

w strefie słabszej brak jest innych linii nieciągłości i  $l_1$  przecina linię kontaktu  $L$  w pewnym punkcie  $A_{10}$ . W otoczeniu punktu  $A$  mamy sytuację przedstawioną na rys. 3.14, linia nieciągłości  $l_2$  jest nachylona do  $L$  pod kątem  $\alpha/2$ . W obszarze III linie poślizgu są prostymi równoległymi<sup>(26)</sup>, tworzącymi z  $L$  kąt  $\alpha$ . Na odcinku  $A_{10}B$  linii  $L$  wektor  $\tau^-$  działa



Rys. 3.15

równoległe do  $L$ , toteż i wektor  $\tau^+$  działa równoległe (por. rys. 3.4), a zatem linie poślizgu w obszarze IV są prostopadłe do  $A_{10}B$ . Z punktu  $A_{10}$  propaguje się linie ciągłości,  $l_3$ , będącą dwusieczną kąta, który tworzą ze sobą linie poślizgu z obszarów III, IV. Linie poślizgu  $l_2$ ,  $l_3$  przecinają się w pewnym punkcie  $A_{23}$ . Ponieważ w obszarze V linie

<sup>(26)</sup> W rozważanym zadaniu występować będą tylko obszary z równoległymi liniami poślizgu, toteż nie będziemy w dalszym ciągu tego zaznaczać. Odpowiednie płyty powierzchni reprezentującej funkcję naprężeń  $F$  będą, jak to wynika z (9.6), płaszczyznami.

poślizgu są prostopadłe do brzegu  $AM$ , w obszarze zaś IV są one prostopadłe do  $A_{10}B$ , to z punktu  $A_{23}$  wychodzi linia nieciągłości  $l_4$  nachylona do nich pod kątem  $\pi/4$ . Przecina ona oś symetrii w punkcie  $A_{45}$ . Linie nieciągłości  $l_5, l_6$  nie wymagają komentarzy.

Charakterystyczne wymiary i kąty łatwo ustalić w oparciu o powyższą analizę; podane one są na rys. 3.15b.

Powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń  $F$  składa się z płatów płaszczyzn, odmiennych w każdym z zaznaczonych obszarów. Linie nieciągłości  $l_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) są odcinkami rzutów prostych, wzdłuż których przecinają się odpowiednie płyty  $F$ . Wystarczającą informację o powierzchni  $F$  dają rzędne punktów  $A_{10}, A_{23}, A_{45}$ :

$$(14.13) \quad F_{10} = K+c\cos\kappa, \quad F_{23} = \frac{1}{2}K+c(1+\sin\kappa+\cos\kappa), \quad F_{45} = K+a$$

oraz zaznaczone na rys. 3.15b linie  $F = \text{const}$ , tzn. trajektorie naprężeń stycznych. Funkcja  $F$  osiąga największą stałą wartość na linii nieciągłości  $l_5$ .

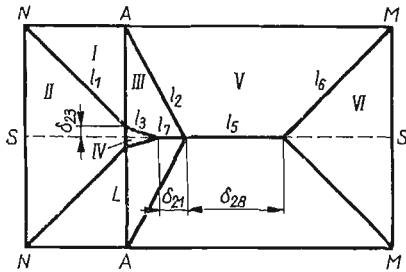
Moment graniczny można znaleźć w oparciu o wzór (6.9).

Gdy  $c$  jest małe w porównaniu z  $a, b$ , układ linii nieciągłości  $l_1, l_2, l_3$  mieści się w niewielkim otoczeniu naroża  $N$  i zakłóca nieznacznie rozwiązanie dla ciała jednorodnego.

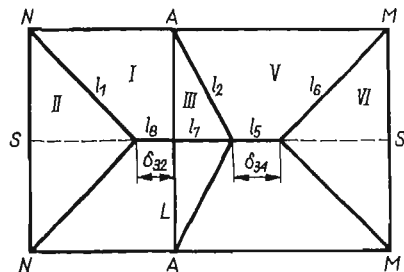
Otrzymane rozwiązanie jest słuszne, gdy punkt  $A_{23}$  leży powyżej osi symetrii, a odcinek  $l_5$  nie znika. Obliczając odpowiednie odległości zaznaczone na rys. 3.15b otrzymujemy nierówności

$$(14.14) \quad \begin{cases} \delta_{12} \geq 0_{II}, & \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(1+\sin\kappa+\cos\kappa)\frac{c}{b} \geq 0, \\ \delta_{16} \geq 0_{II}, & 1 - \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(1+\cos\kappa)\frac{c}{b} \geq 0. \end{cases}$$

Rozwiązania 2-9 przedstawione są na rysunkach (3.16)-(3.23). Szczegóły rachunkowe znajdzie Czytelnik w pracy [14].



Rys. 3.16

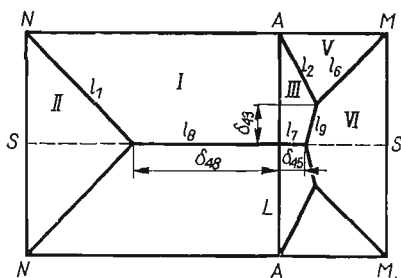


Rys. 3.17

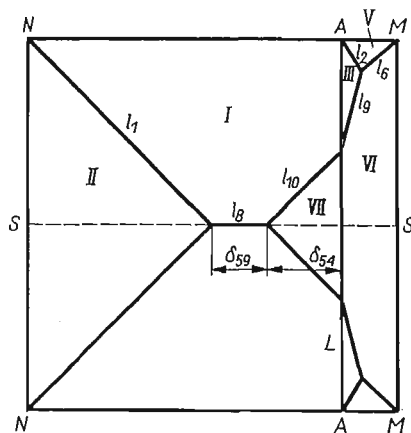
Wielkości  $\delta_{\nu\mu}$  ( $\nu, \mu = 1, \dots, 9$ ) dobrano w ten sposób, że zmianie znaku  $\delta_{\nu\mu}$  odpowiada przejście od  $\nu$ -tego do  $\mu$ -tego rozwiązania. Na ogół  $\delta_{\nu\mu} \neq \delta_{\mu\nu}$ . Te same obszary i ta sama linia ciągłości zaznaczone są jednakowymi numerami na wszystkich rysunkach. Rzędne

powierzchni  $F_{kl}$  w punktach  $A_{kl}$  ( $k, l = 1, \dots, 9, 10, s$ ) są takie same we wszystkich rozwiązaniach, w których występuje punkt  $A_{kl}$ , i wynoszą:

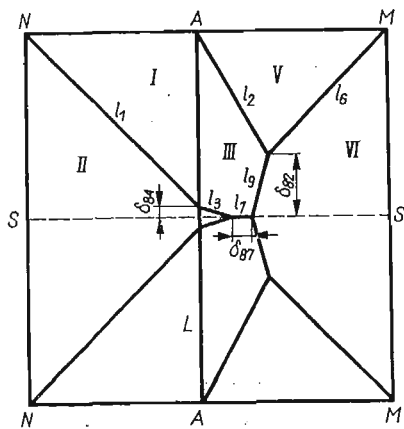
$$\begin{aligned}
 F_{3s} &= K_+ \frac{\cos \kappa}{1 - \sin \kappa} (a - c \sin \kappa), & F_{1s} &= F_B = K_+ a \cos \kappa, \\
 F_{9s} &= K_+ \frac{a \cos \kappa + (2b - c) \sin \kappa}{1 + \sin \kappa}, & F_{26} &= K_+ (2b - c) \frac{1 + \cos \kappa}{1 + \sin \kappa + \cos \kappa}, \\
 F_{90} &= K_+ (2b - c), & F_{10s} &= K_+ a \cos \kappa, \\
 F_{46} &= F_{93} = F_{1,10} = K_+ \left[ b - \frac{c}{2} (1 - \cos \kappa) \right].
 \end{aligned}
 \tag{14.15}$$



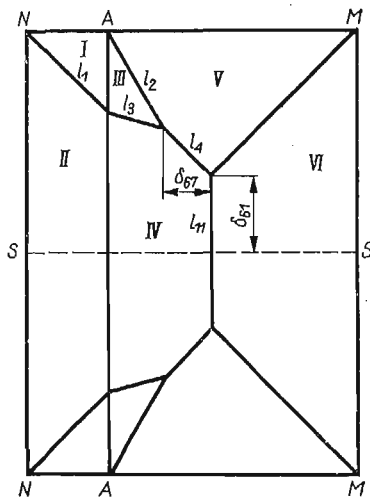
Rys. 3.18



Rys. 3.19



Rys. 3.20



Rys. 3.21

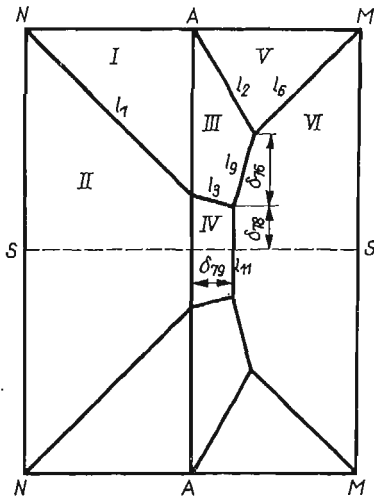


Równania  $\delta_{\nu\mu} = 0$  dają proste w płaszczyźnie  $\eta = \text{const}$ , dzielące obszar parametrów  $a/b$ ,  $c/b$  na dziewięć stref słuszności poszczególnych rozwiązań. (rys. 3.24). Punkty charakterystyczne  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  mają współrzędne

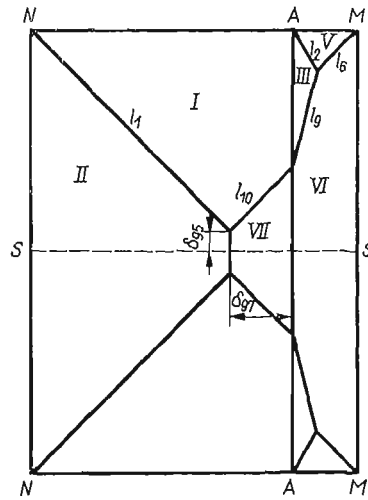
$$(14.16) \quad A_1: \quad \frac{a}{b} = \frac{1 + \sin \kappa + \cos \kappa}{2 + \sin \kappa}, \quad \frac{c}{b} = \frac{2}{2 + \sin \kappa},$$

$$(14.17) \quad A_2: \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{1 + \cos \kappa}{1 + \sin \kappa + \cos \kappa},$$

$$(14.18) \quad A_3: \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{2}{1 + \cos \kappa}.$$



Rys. 3.22



Rys. 3.23

Rozwiązania podstawowe odpowiadające punktom (14.16), (14.17) i (14.18) mają następujące dwie ciekawe własności:

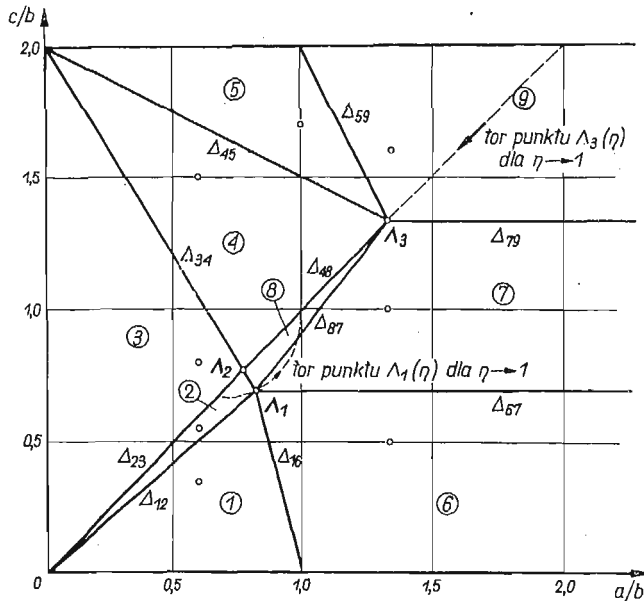
1. Z rozwiązań  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , przedstawionych na rys. 3.25, można otrzymać przez nieznaczne zmiany parametrów  $a/b$ ,  $c/b$  wszystkie dziewięć rozwiązań rozpatrywanego zadania.

2. Podział płaszczyzny  $\eta = \text{const}$  na obszary stosowności poszczególnych rozwiązań jest jednocześnie określony przez podanie punktów  $A_1(\lambda)$ ,  $A_3(\lambda)$ . Łącząc punkt  $A_1$  z punktami  $\{0, 0\}$ ,  $\{1, 0\}$ ,  $\{\infty, 1\}$ <sup>(27)</sup>,  $A_3$ ,  $\{0, 2\}$  otrzymujemy odcinki  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{16}$ ,  $\Delta_{67}$ ,  $\Delta_{78}$ ,  $\Delta_{23}$  ( $\Delta_{34}$ ). Łącząc punkt  $A_3$  z punktami  $\{0, 0\}$ ,  $\{\infty, 1\}$ <sup>1)</sup>,  $\{1, 2\}$ ,  $\{0, 2\}$  otrzymujemy odcinki  $\Delta_{23}$  ( $\Delta_{48}$ ),  $\Delta_{79}$ ,  $\Delta_{59}$   $\Delta_{45}$  oraz położenie punktu  $A_2$ .

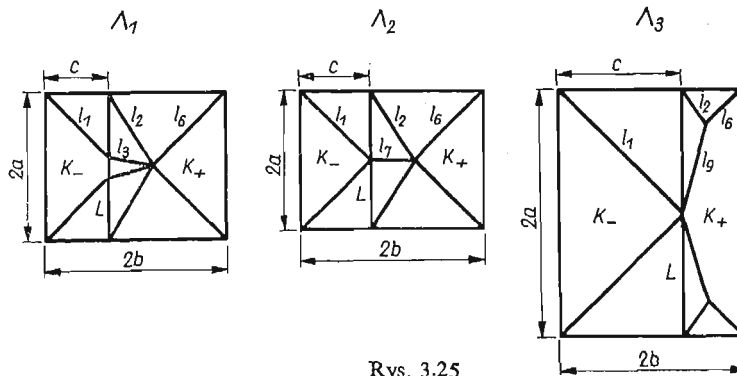
Wpływ wartości  $\eta$  na układ stref 1, ..., 9 w płaszczyźnie  $\eta = \text{const}$  sprowadza się więc do ruchu punktów  $A_1$ ,  $A_3$ : gdy  $\eta = K-/K+$  rośnie od 0 do 1, punkt  $A_1$  porusza się po krzywej o równaniach parametrycznych (14.16) (krzywa przerywana na rys. 3.24) od położenia  $\{2/3, 2/3\}$  do  $\{1, 1\}$ , zaś punkt  $A_3$  porusza się wzdłuż prostej  $a = c$  od  $\{2, 2\}$  do  $\{1, 1\}$  zgodnie z (14.18).

<sup>(27)</sup> Oznaczamy w ten sposób punkt niewłaściwy.

Ostatnia okoliczność ogromnie upraszcza korzystanie z otrzymanych wyników w obliczeniach praktycznych. Mając dany stosunek granic plastyczności materiałów ustalamy położenie punktów  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_3$ , prowadzimy proste  $\Delta_{\nu\mu}$ , ustalamy dla danych parametrów  $a/b$ ,  $c/b$  numer rozwiązania i obliczamy moment graniczny opierając się na podanych wartościach  $F$ .



Rys. 3.24



Rys. 3.25

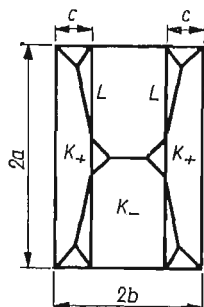
Zauważmy, że występowanie rozwiązań podstawowych typu  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$ , jest w ogóle charakterystyczne dla problemów skokowej niejednorodności (por. p. 7).

Można wysunąć szereg wniosków co do klasyfikacji prętów rozpatrzonej klasy. Wskażemy jedynie, że

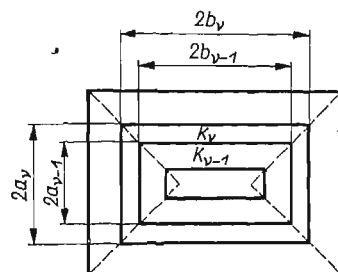
dla  $\frac{a}{b} < \frac{2}{3}$  mamy tylko rozwiązania 1, 2, 3, 4, 5,

dla  $\frac{a}{b} > 2$  mamy tylko rozwiązania 6, 7, 9.

Przedstawione kompletne rozwiązanie prostego przykładu z rys. 3.13 pozwala na analizę innych zadań dla prętów prostokątnych o skokowej niejednorodności. Dla przykładu na rys. 3.26 podano w oparciu o rozwiązanie 5 przebieg linii nieciągłości w przekroju pręta wzmocnionego dwoma symetrycznymi nakładkami o szerokości  $c \ll a$ .



Rys. 3.26



Rys. 3.27

Przypadek, gdy przekrój pręta jest podzielony na  $n$  części przez prostokąty o pokrywających się dwusiecznych kątów wierzchołkowych, rys. 3.27, ma trywialne rozwiązanie. Moment graniczny wynosi

$$(14.19) \quad M = \frac{4}{3} \sum_{v=1}^n K_v [a_v^2(3b_v - a_v) - a_{v-1}^2(3b_{v-1} - a_{v-1})].$$

Skokowa niejednorodność plastyczna prowadzi do istotnych zmian w układzie linii poślizgu, przy czym nawet najprostsze zadania w rodzaju rozważonego powyżej ulegają niespodziewanie dużym komplikacjom. Podobna okoliczność ma również miejsce, jak widzieliśmy, dla płaskiego stanu odkształcenia ciał o skokowej niejednorodności.

#### IV. Nośność graniczna płyt kołowych o skokowej niejednorodności<sup>(28)</sup>

##### 15. Sformułowanie problemu

W niniejszym rozdziale zreferujemy pokrótce wyniki pracy [15], w której rozważono pewne przykłady z dziedziny nośności granicznej płyt o skokowej niejednorodności. W ramach założeń teorii nośności granicznej [35] własności mechaniczne płyty, zdefiniowane dla pewnego punktu powierzchni środkowej, uważamy za całkowicie określone, jeżeli podany jest kształt tzw. powierzchni granicznej w przestrzeni momentów zginających  $M_{11}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{12}$  tzn. związek  $F(M_{\alpha\beta}, C_v) = 0$ . Płytą o skokowej niejednorodności nazwiemy taką płytę, której powierzchnia środkowa podzielona jest na  $n$  obszarów  $G_\mu$  stałych wewnątrz każdego obszaru, lecz różnych dla dwu sąsiadujących obszarów o kształtach powierzchni granicznej,  $F_\mu = 0$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ). Najczęściej postać funkcji  $F_\mu$

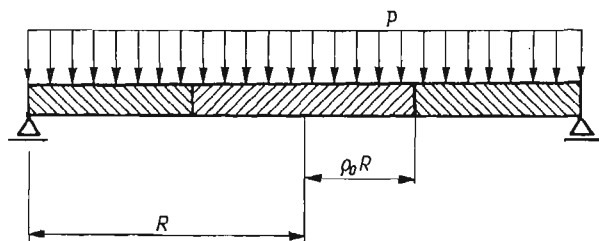
<sup>(28)</sup> W rozdziale tym zreferujemy część wyników uzyskanych wspólnie z J. A. KÖNIGIEM i przedstawionych w pracy [15].

(jako funkcji  $M_{\alpha\beta}$ ) można uznać za jednakową dla całej płyty, natomiast obszary  $G_\mu$  różnią się wartościami modułów  $C_\nu$ . W tym przypadku skokowa niejednorodność opisywana jest przez odcinkowo-stałe funkcje  $C_\nu(x_1, x_2)$ , gdzie  $x_1, x_2$  są współrzędnymi w powierzchni środkowej.

Przyczyny, dla których dwie sąsiadujące części płyty mają różną wytrzymałość, mogą mieć rozmaity charakter. W najprostszym przypadku płyty izotropowej, jednorodnej po grubości, o równaniu powierzchni granicznej  $F = M_{11}^2 - M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 3M_{12}^2 - M_0^2 = 0$ , mamy  $M_0 = \sigma_0 H^2$ , gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności,  $H$  grubością płyty. Skok  $M_0$  może być więc spowodowany bądź skokiem  $\sigma_0$ , bądź skokiem  $H$ . Innym przykładem może być rozmaita struktura dwu części płyty wzdłuż grubości. Jako typowy przykład niejednorodności skokowej w płycie ortotropowej może służyć skokowa zmiana ilości zbrojenia w płycie żelbetowej.

Praca jest oparta na podstawowych założeniach teorii nośności granicznej płyt (por. np. [35]). W szczególności nie są w niej analizowane lokalne trójwymiarowe stany naprężenia i deformacji w otoczeniu powierzchni kontaktu części o różnych własnościach mechanicznych.

Rozpatrywać będziemy płytę kołową, złożoną z dwu koncentrycznych części o różnych własnościach mechanicznych. Rozpatrzmy prosty przypadek, gdy płyta jest obciążona równomiernym ciśnieniem  $p$ , a jej brzeg jest swobodnie podparty (rys. 4.1).



Rys. 4.1

Zajmiemy się początkowo płytami izotropowymi. Przyjmiemy, że słuszny jest związek graniczny między momentem promieniowym  $m_r = M_r/M_0$  i momentem obwodowym  $m_\varphi = M_\varphi/M_0$ , gdzie  $M_0$  jest momentem granicznym dla części silniejszej, wynikający z warunku plastyczności Treski, tzn.

$$(15.1) \quad F = \max\{|m_r - m_\varphi|, |m_r|, |m_\varphi|\} - f(\varrho) = 0.$$

Stowarzyszone z nim prawo płynięcia ma postać

$$(15.2) \quad \dot{m}_r = -\dot{w}'' = \frac{\partial F}{\partial m_r}, \quad \dot{m}_\varphi = -\frac{\dot{w}'}{\varrho} = \frac{\partial F}{\partial m_\varphi},$$

gdzie  $\dot{m}_r, \dot{m}_\varphi$  są prędkościami zmiany krzywizny powierzchni środkowej pomnożonymi przez  $R^2$ ,  $R$  jest promieniem płyty,  $\varrho$  jest promieniem bieżącym odniesionym do  $R$ , przecinek oznacza różniczkowanie po  $\varrho$ .

Skokową niejednorodność płyty opisuje funkcja  $f(\varrho)$ . Dla płyty o słabym środku

$$(15.3) \quad f(\varrho) = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1);$$

dla płyty o silniejszym środku

$$(15.4) \quad f(\varrho) = I(0, \varrho_0) + \eta I(\varrho^0, 1),$$

gdzie

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varrho_0 \leq 1,$$

$I(a, \beta)$  zaś jest impulsem prostokątnym.

Impuls prostokątny definiuje się jako funkcję

$$(15.5) \quad I(a, \beta) \equiv H(x-a) - H(x-\beta) \equiv \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x < \beta, \quad a < \beta, \\ 0, & \beta \leq x \end{cases}$$

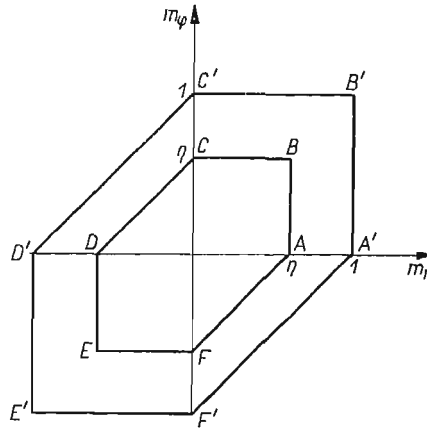
gdzie  $H(x)$  jest jednostkową funkcją Heaviside'a (por. p. 7). W tych przypadkach, gdy funkcja  $I(a, \beta)$  będzie nie tylko środkiem dla skrócenia i czytelności zapisu, lecz także narzędziem rachunkowym (p. 16,17), wykorzystane będą następujące oczywiste związki:

$$(15.6) \quad I(a, \beta) I(\gamma, \delta) = I(\gamma, \beta), \quad a < \gamma < \beta < \delta,$$

$$(15.7) \quad \int_0^x f(t) I(a, \beta) dt = I(a, \beta) \int_0^x f(t) dt + I(\beta, 1) \int_0^\beta f(t) dt, \quad 0 < a < \beta < 1,$$

$$(15.8) \quad \frac{d}{dx} [f(x) I(a, \beta)] = f'(x) I(a, \beta) + f(a) \delta(x-a) - f(\beta) \delta(x-\beta),$$

gdzie  $\delta(x)$  jest funkcją Diraca (por. p. 7).



Rys. 4.2

Wielkość  $\varrho_0$  nazywać będziemy w dalszym ciągu *parametrem podziału*, wielkość  $\eta$ , określającą stosunek momentów granicznych, *parametrem niejednorodności* (rys. 4.2).

Równanie równowagi ma postać

$$(15.9) \quad m'_r + \frac{1}{\varrho} (m_r - m_\varphi) = -\frac{1}{2} q \varrho, \quad q \equiv \frac{p R^2}{M_0},$$

a warunki brzegowe

$$(15.10) \quad \varrho = 1: \quad \dot{w} = m_r = 0,$$

$$(15.11) \quad \varrho = 0: \quad m_r = m_\varphi.$$

Celem naszym będzie zbadanie wpływu parametrów  $\varrho_0$ ,  $\eta$  na wielkość obciążenia granicznego i na kinematykę początkowego niepowstrzymanego ruchu plastycznego płyty.

### 16. Płyta izotropowa o słabszym środku

Gdy  $\eta$  jest bliskie 1, to bez względu na wartość  $\varrho_0$  rozwiązanie powinno być bliskie dobrze znanemu rozwiązaniu dla płyty jednorodnej [35].

Rozwiązanie 1. Przyjmujemy, że profil naprężenia  $\{m_r(\varrho), m_\varphi(\varrho)\}$  leży na boku  $BC$  dla części środkowej i boku  $B'C'$  dla części zewnętrznej, tzn.

$$(16.1) \quad m_\varphi = f(\varrho) = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1).$$

Skok  $m_\varphi$  na  $\varrho = \varrho_0$  jest statycznie dopuszczalny. Podstawiając (3.1) do (2.9) i korzystając z warunku (2.11) mamy

$$(16.2) \quad m_r = -\frac{q}{6}\varrho^2 + \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho \{\eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1)\} d\varrho = \\ = \left( \eta - \frac{q}{6}\varrho^2 \right) I(0, \varrho_0) + \left[ 1 - \frac{q}{6}\varrho^2 - \frac{\varrho_0}{\varrho}(1-\eta) \right] I(\varrho_0, 1).$$

Wartość obciążenia granicznego wynika z drugiego warunku (15.10) i wynosi

$$(16.3) \quad q_1 = 6[1 - \varrho_0(1-\eta)].$$

Na podstawie (2.2) i (2.10) otrzymujemy dla całej płyty  $\dot{\kappa}_r = 0$  i

$$(16.4) \quad \dot{w} = \dot{w}_0(1-\varrho),$$

a więc kinematyka zniszczenia pokrywa się z kinematyką dla płyty jednorodnej. Dla  $\varrho_0 = 0$  i  $\eta = 1$  wyrażenia (16.1), (16.2) i (16.3) dają również znane rozwiązanie tego przypadku.

Profil naprężenia wygodnie jest przedstawić w trójwymiarowej przestrzeni  $m_r$ ,  $m_\varphi$ ,  $\varrho$ . Zależność graniczna (15.1), (15.3) i (15.4) przyjmuje w tej przestrzeni postać powierzchni przedstawionej na rys. 4.3. Powierzchnię tę będziemy w dalszym ciągu nazywać *powierzchnią własności mechanicznych*.

Przejdźmy do określenia zakresu słuszności podanego rozwiązania. Łatwo stwierdzić, że  $m_r(\varrho)$  monotonicznie maleje od wartości  $\eta$  dla  $\varrho = 1$  do 0 dla  $\varrho = 0$ , jeżeli  $2\varrho_0^3(1-\eta) - 2\varrho_0^2 + (1-\eta) \leq 0$ .

Gdy natomiast  $2\varrho_0^3(1-\eta) - 2\varrho_0^2 + (1-\eta) > 0$ , wtedy mamy

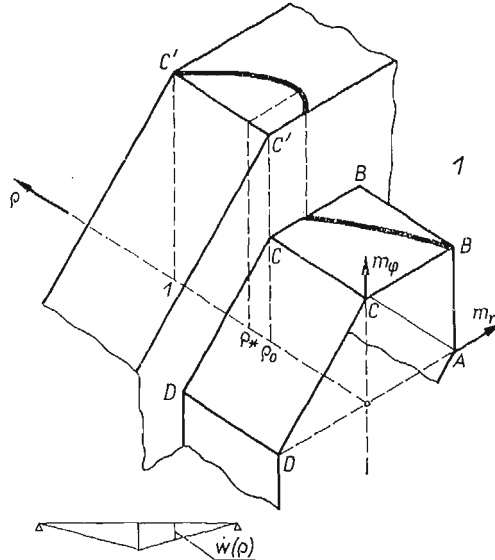
$$(16.5) \quad m'_r = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = \varrho_* \equiv \{\varrho_0(1-\eta)/2[1-\varrho_0(1-\eta)]\}^{1/3} > \varrho_0,$$

a więc  $m_r$  osiąga analitycznie maksimum dla  $\varrho = \varrho_*$ ,  $\varrho = 0$  i nieanalityczne minimum dla  $\varrho = \varrho_0$ , rys. 4.3. Oznacza to, że  $\eta$  jest dla danego  $\varrho_0$  na tyle małe, że następuje częściowe

zamocowywanie się strefy słabszej w zewnętrznej części mocniejszej. Rozwiązanie będzie więc słuszne, gdy

$$(16.6) \quad m_r(\varrho_0) \geq 0 \quad f_{12} \equiv \eta - (\varrho_0^2 - \varrho_0^3)/(1 - \varrho_0^3) \geq 0.$$

Można przekonać się ponadto, że warunek  $m_r(\varrho_*) \leq 1$  jest spełniony zawsze.



Rys. 4.3

Rozwiązanie II. Gdy parametry podziału  $\varrho_0$  lub niejednorodności  $\eta$  nie spełniają nierówności (3.6), w obu częściach płyty pojawiają się strefy ujemnych momentów  $m_r$ . Stany naprężenia w przedziałach  $(0, \xi_1)$ ,  $(\xi_1, \varrho_0)$ ,  $(\varrho_0, \xi_2)$ ,  $(\xi_2, 1)$  odpowiadają kolejno bokom  $BC$ ,  $CD$ ,  $C'D'$ ,  $B'C'$ , co przy użyciu funkcji impulsu można zapisać jednym wzorem

$$(16.7) \quad m_\varphi = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1) + m_r I(\xi_1, \xi_2).$$

Podstawiając (16.7) do równania równowagi (15.9), całkując je i spełniając warunki  $m_r(0) = \eta$ ,  $m_r(\xi_1) = m_r(\xi_2) = m_r(1) = 0$ , otrzymamy

$$(16.8) \quad m_r = \eta \left( 1 - \frac{\varrho^2}{\xi_1^2} \right) I(0, \xi_1) - \eta \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\varrho^2}{\xi_1^2} - 1 \right) - \ln \frac{\varrho}{\xi_1} \right] I(\xi_1, \varrho_0) - \left[ \frac{3\eta}{2\xi_1^2} (\varrho^2 - \xi_2^2) - \ln \frac{\varrho}{\xi_2} \right] I(\varrho_0, \xi_2) + \frac{\eta}{\varrho \xi_1^2} (\varrho - \xi_2) (1 - \varrho) (1 + \varrho + \xi_2) I(\xi_2, 1),$$

przy czym obciążenie graniczne wynosi

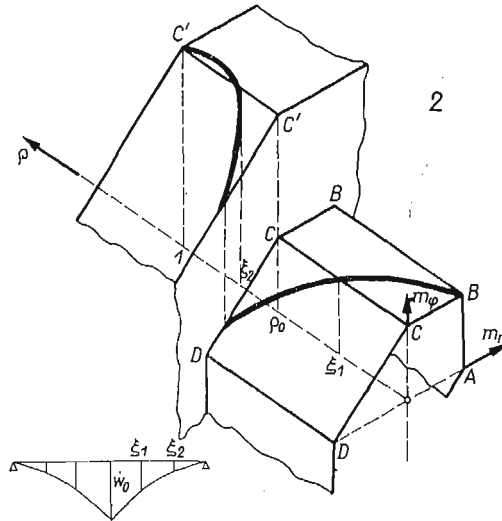
$$(16.9) \quad q_2 = \frac{6\eta}{\xi_1^2},$$

współrzędne zaś  $\xi_1, \xi_2$  wyznaczające zasięg stref ujemnych momentów  $m_r$  określone są przez przestępujący układ równań:

$$(16.10) \quad \xi_1^2 = (1 + \xi_2 + \xi_2^2)\eta,$$

$$(16.11) \quad \frac{3}{2}\eta \left(1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}\right) + \ln \frac{\xi_2}{\rho_0} - \eta \ln \frac{\xi_1}{\rho_0} = 0.$$

Położenie profilu momentów na powierzchni własności mechanicznych pokazano na rys. 4.4.



Rys. 4.4

Na podstawie (15.2), (15.7) mamy  $\dot{\kappa}_r = 0$  w przedziałach  $(0, \xi_1)$ ,  $(\xi_2, 1)$  i  $\dot{\kappa}_r + \dot{\kappa}_\varphi = 0$  dla przedziału  $(\xi_1, \xi_2)$ . Można to zapisać w postaci równania

$$(16.12) \quad \dot{w}'' + \frac{1}{\rho} I(\xi_1, \xi_2) \dot{w}' = 0.$$

Całkując to równanie mamy

$$(16.13) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 - \dot{w}_0 c \left\{ \frac{\rho}{\xi_1} I(0, \xi_1) + \left(1 + \ln \frac{\rho}{\xi_1}\right) I(\xi_1, \xi_2) + \left(\ln \frac{\xi_2}{\xi_1} + \frac{\rho}{\xi_2}\right) I(\xi_2, 1) \right\},$$

przy czym z warunku brzegowego  $\dot{w}(1) = 0$  wynika

$$c = \xi_2 / (1 + \xi_2 \ln \xi_2 / \xi_1).$$

Stosując wzór (15.8) łatwo stwierdzić, że  $\dot{w}'$  jest funkcją ciągłą<sup>(29)</sup>,  $\dot{w}''$  funkcję skokową, i dopiero  $\dot{w}'''$  zawiera  $\delta$ -funkcje od  $\xi_1, \xi_2$ .

<sup>(29)</sup> Przedział  $(0, a)$ ,  $a < 1$  w niniejszej pracy rozumiemy jako przedział  $(-\varepsilon, a)$ , zaś przedział  $(a, 1)$  jako przedział  $(a, 1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Stąd np.  $I'(0, a) = \delta(x) - \delta(x - a) = -\delta(x - a)$  w interesującym nas zakresie zmienności  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .



Przejdźmy do zbadania zakresu słuszności przedstawionego rozwiązania. Funkcja  $m_r(\varrho)$  ma maksimum analityczne w punktach  $\varrho = \varrho_* \equiv (\xi_2 + \xi_2^3/2)^{1/3} > \xi_2$ ,  $\varrho = 0$  i nieanalityczne minimum dla  $\varrho = \varrho_0$ , rys. 4.4. Powinny być spełnione zatem warunki

$$(16.14) \quad m_r(\varrho_0) \leq 1 \quad f_{12} \leq 0,$$

$$(16.15) \quad \xi_2 \leq 0 \quad f_{23} \equiv \ln \varrho_0 - [\eta(3 - \ln 3\eta) - 1]/2(1 - \eta) \geq 0,$$

$$(16.16) \quad m_r(\varrho_0) \geq -\eta \quad \ln \varrho_0^2/\xi_1^2 - 3\varrho_0^2/\xi_1^2 + 5 \geq 0 \text{ tzn.} \\ f_{24} \equiv \xi_1(\eta, \varrho_0) - 0,73\varrho_0 \geq 0,$$

gdzie  $\xi_1(\eta, \varrho_0)$  jest określone przez układ (6.10), (6.11). Można stwierdzić, że warunek  $m_r(\varrho_*) < 1$  jest zawsze spełniony.

Rozwiązanie III. Gdy parametry  $\eta, \varrho_0$  nie spełniają nierówności (16.15), obszar ujemnego momentu  $m_r$  ogarnia całą część mocniejszą płyty. Wtedy

$$(16.17) \quad m_\varphi = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1) + m_r I(\xi_1, 1).$$

Korzystając z równania równowagi i warunków  $m_r(0) = \eta$ ,  $m_r(\xi_1) = m_r(1) = 0$  otrzymujemy

$$(16.18) \quad m_r = \eta \left( 1 - \frac{\varrho^2}{\xi_1^2} \right) I(0, \xi_1) - \eta \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\varrho^2}{\xi_1^2} - 1 \right) - \ln \frac{\varrho}{\xi_1} \right] I(\xi, \varrho_0) - \\ - \left[ \frac{3\eta}{2\xi_1^2} (\varrho^2 - 1) - \ln \varrho \right] I(\varrho_0, 1),$$

przy czym parametr  $\xi_1$  określony jest przez zależność

$$(16.19) \quad \eta \ln \frac{1}{\xi_1} - \frac{3\eta}{2} \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{3\eta}{2} + (\eta - 1) \ln \varrho_0 = 0,$$

obciążenie zaś graniczne wyraża się nadal wzorem (16.9). Łatwo zauważyć, że wyrażenia (16.17), (16.18) i (16.19) otrzymuje się z (16.7), (16.8) i (16.11) przy  $\xi_2 = 1$ . Analogicznie rozkład prędkości ugięcia wyraża się wzorem:

$$(16.20) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 - \dot{w}_0 c \left\{ \frac{\varrho}{\xi_1} I(0, \xi_1) + \left( 1 + \ln \frac{\varrho}{\xi_1} \right) I(\xi_1, 1) \right\}, \quad c = 1/(1 - \ln \xi_1).$$

Zakres słuszności rozwiązania 3 określają warunki

$$(16.21) \quad m'_r(1) \geq 1, \quad f_{23} \leq 0,$$

$$(16.22) \quad m_r(\varrho_0) \geq -\eta, \quad f_{24} \leq 0, \quad \eta \geq \varrho_0^2 \ln \varrho_0 / (1,815\varrho_0^2 - 2,815).$$

W zapisie ostatniego warunku wykorzystaliśmy związek (16.19).

Rozwiązanie IV. Niech w rozwiązaniach II, III parametr podziału  $\varrho_0$  będzie ustalony, parametr zaś niejednorodności  $\eta$  zmniejsza się. Przy pewnej wartości  $\eta = \eta^*$  mamy znak równości w zależności (16.16) dla rozwiązania II lub (16.22) dla rozwiązania III. Odpowiada to sytuacji, gdy

$$(16.23) \quad m_r(\varrho_0) = -\eta^*, \quad \xi_1^* = 0,73\varrho_0, \quad \eta = \eta^*(\varrho_0),$$

a więc w punkcie kontaktu obu części płyty realizuje się stan  $D$  (por. rys. 4.2). W tym przypadku prędkości  $\dot{\kappa}_r, \dot{\kappa}_\varphi$  nie są dla  $\varrho = \varrho_0$  jednoznacznie określone ze wzorów (15.2).

Inaczej mówiąc, dla  $\eta = \eta^*$  na  $\varrho = \varrho_0$  możliwe staje się powstanie przegubu plastycznego. Przegub ten należy rozumieć jako powstający w części słabszej w bezpośredniej bliskości punktu kontaktu.

Dalsze zmniejszenie się  $\eta$  prowadzi do takiego schematu zniszczenia, przy którym uplastycznienie osiągane jest tylko w słabszej części środkowej, która pracuje jako płyta zamocowana w sztywnej części zewnętrznej.

Profil naprężenia  $m_r(\varrho)$ ,  $m_\varphi(\varrho)$  dla tego przypadku uzyskujemy z profilu (16.7), (16.8) ustalając  $\eta = \eta^*$ ,  $\xi_1 = \xi_1^*$ ,  $\xi_2 = \xi_2^*$  i zmniejszając skalę, tzn.

$$(16.24) \quad m_r(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_r^{\text{II}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*, \xi_2^*), \quad m_\varphi(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_\varphi^{\text{II}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*, \xi_2^*)$$

dla  $f_{23} \leq 0$ . Człony z  $I(0, \xi_1^*)$ ,  $I(\xi_1^*, \varrho_0)$  opisują wówczas znane rozwiązanie dla płyty zamocowanej o promieniu  $\varrho_0 R$ , natomiast człony z  $I(\varrho_0, \xi_2^*)$ ,  $I(\xi_2^*, 1)$  opisują przedłużenie profilu naprężenia w część sztywną, leżącą wewnątrz powierzchni własności mechanicznych.

Analogicznie mamy

$$(16.25) \quad m_r(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_r^{\text{III}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*), \quad m_\varphi(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_\varphi^{\text{III}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*)$$

dla  $f_{23} \geq 0$ . Profile (16.24) i (16.25) różnią się tylko przedłużeniem w obszar sztywny.

Obciążenie graniczne wynosi

$$(16.26) \quad q_4 = 11,26\eta/\varrho_0^2.$$

Korzystając z (15.2), (16.24) i warunku  $\dot{w}(\varrho_0) = 0$  kinematykę początkowego ruchu uzyskamy w postaci

$$(16.27) \quad \dot{w} = w_0 \{ (1 - c\varrho/\xi_1) I(0, \xi_1) + [1 - c(1 + \ln \varrho/\xi_1)] I(\xi_1, \varrho_0) \},$$

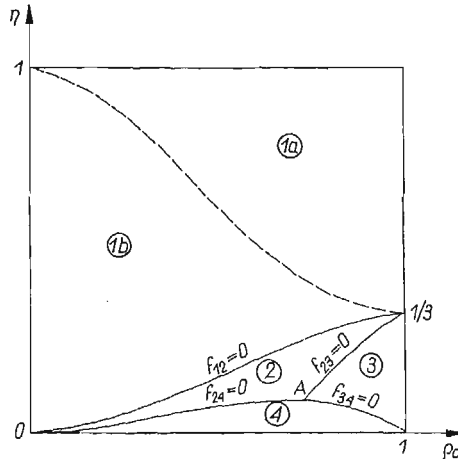
gdzie  $c = 1/(1 + \ln \varrho_0/\xi_1)$ . Korzystając ze wzoru (15.8) widzimy, że  $\dot{w}'$  jest funkcją skokową, natomiast

$$(16.28) \quad \dot{w}'' = \frac{\dot{w}_0 c}{\varrho_0^2} I(\xi_1, \varrho_0) + \frac{\dot{w}_0 c}{\varrho_0} \delta(\varrho - \varrho_0).$$

Występująca w tym wzorze  $\delta$ -funkcja Diraca stanowi formalne odzwierciedlenie przegubu plastycznego, dając nieskończoną wartość prędkości zmiany krzywizny radialnej  $\dot{\kappa}_r$ . Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że przy operowaniu zapisem tego rodzaju nie zachodzi potrzeba oddzielnego traktowania przegubów plastycznych np. przy obliczeniu mocy dyssypacji.

Zbiorczy obraz zakresów słuszności poszczególnych rozwiązań przedstawiono na rys. 4.5. Można stwierdzić, że w każdym przypadku wszystkie podane wyżej odpowiadające sobie wyrażenia z sąsiadujących stref przechodzą w siebie na liniach podziałowych. Linie  $\eta = 1$ ,  $\varrho_0 = 0$  odpowiadają płycie jednorodnej o momencie granicznym równym  $M_0$ , linia  $\varrho_0 = 1$  odpowiada płycie jednorodnej o momencie granicznym równym  $\eta M_0$ . Linia kreskowana dzieląca obszar 1 odpowiada pojawieniu się ekstremum  $m_r$  w części zewnętrznej.

Wynikiem istotnym dla praktyki jest, jak się zdaje, wyznaczenie granicy obszaru 4,  $f_{24}(\varrho_0, \eta) = 0$ ,  $f_{34}(\varrho_0, \eta) = 0$ . Dla wartości parametru podziału  $\varrho_0$  i parametru niejednorodności  $\eta$  leżących powyżej tej linii, obie części płyty współpracują ze sobą w stanie granicznym; dla wartości  $\varrho_0, \eta$  leżących poniżej tej linii, następuje zniszczenie tylko części środkowej, a więc materiał części mocniejszej nie jest w pełni wykorzystany. Aspekt



Rys. 4.5

inżynierski tego stwierdzenia jest następujący: gdy część mocniejszą projektuje się jako «pierścień» mający stworzyć zamocowanie dla płyty środkowej, to wybór promienia podziału  $\varrho$  określa jednoznacznie minimalny konieczny stosunek momentu granicznego «pierścienia» do momentu granicznego płyty  $\eta = \eta^*$ .

Godne odnotowania są następujące dwie ogólne obserwacje jakościowe, wynikające bezpośrednio z rys. 4.6: przy dowolnej wartości parametru podziału  $\varrho_0$ ,

- 1) dla  $\eta \geq 1/3$  w płycie nie występują strefy ujemne momentów radialnych,
- 2) dla  $\eta \geq \eta_A \approx 1/11$  obie części płyty współpracują w stanie granicznym.

### 17. Płyta izotropowa o mocniejszym środku

Opis zachowania się płyty jest w tym przypadku prostszy od przedstawionego w p. 16.

R o z w i ą z a n i e I. Podobnie jak w p. 16 przyjmiemy, że profil naprężenia  $m_r(\varrho)$ ,  $m_\varphi(\varrho)$  odpowiada bokom  $B'C'$ ,  $BC$ . Wówczas

$$(17.1) \quad m_\varphi = I(0, \varrho_0) + \eta I(\varrho_0, 1).$$

Podstawiając tę zależność do równania równowagi, całkując je i spełniając warunki  $m_r(0) = 1$ ,  $m_r(1) = 0$  otrzymamy rozkład momentu

$$(17.2) \quad m_r = \left\{ 1 - \varrho^2 [\eta + \varrho_0(1 - \eta)] \right\} I(0, \varrho_0) + \frac{\eta + \varrho_0(1 - \eta)}{\varrho} (1 - \varrho) \left( \varrho^2 + \varrho + \frac{\varrho_0(1 - \eta)}{n + \varrho_0(1 - \eta)} \right) I(\varrho_0, 1)$$

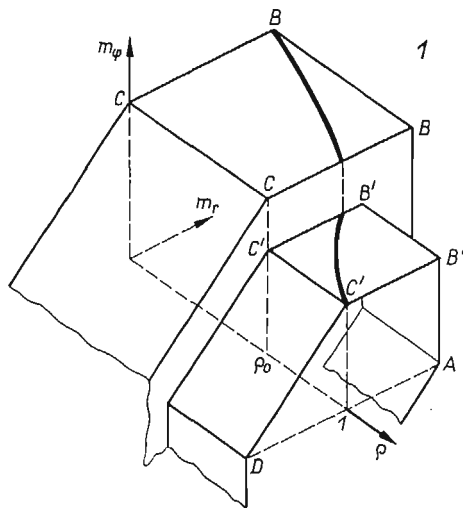
oraz wartość obciążenia granicznego

$$(17.3) \quad q_1 = 6[\eta + \varrho_0(1 - \eta)].$$

Rozkład prędkości określa wzór (16.4). Przy  $\eta = 1$  lub  $\varrho_0 = 0$  otrzymane zależności określają rozwiązanie dla płyty jednorodnej o momencie granicznym odpowiednio  $M_0$  i  $\eta M_0^{(30)}$ .

Analiza wyrażenia (17.2) wykazuje, że  $m_r$  jest monotonicznie malejącą funkcją  $\varrho$ . Zakres słuszności rozwiązania I określa więc jedynie warunek (rys. 4.6)

$$(17.4) \quad m_r(\varrho_0) \leq \eta M_0, \quad \eta \geq \eta^*(\varrho_0) \equiv (1 - \varrho_0^3)/(1 + \varrho_0^2 - \varrho_0^3).$$



Rys. 4.6

Rozwiązanie II. Gdy dla ustalonego  $\varrho_0$  parametr niejednorodności spada do wartości  $\eta = \eta^*$  na  $\varrho = \varrho_0$  mamy  $m_r = \eta M_0$  (punkt  $B'$ ) i możliwe staje się powstanie przegubu plastycznego.

Dla  $\eta < \eta^*$  schemat zniszczenia odpowiada ruchowi części mocniejszej jako bryły sztywnej, uplastycznia się natomiast cała zewnętrzna część słabsza, pracująca jako płyta pierścieniowa, zamocowana na pionowo przesuwym brzegu wewnętrznym  $\varrho = \varrho_0$  i obciążona poza ciśnieniem prostopadłym  $p$  dodatkowo pierścieniem sił skupionych na  $\varrho = \varrho_0$  o intensywności  $q_r = p\varrho_0^2 R^2/2$ . Rozwiązanie ma postać

$$(17.5) \quad m_r = \frac{\eta}{\eta^*} m_r^I(\varrho, \eta^*), \quad m_\varphi = \frac{\eta}{\eta^*} m_\varphi^I(\varrho, \eta^*),$$

gdzie wyrazy z  $I(0, \varrho_0)$  reprezentują przedłużenie profilu naprężenia w obszar sztywnej, leżące wewnątrz powierzchni własności mechanicznych.

Obciążenie graniczne wynosi

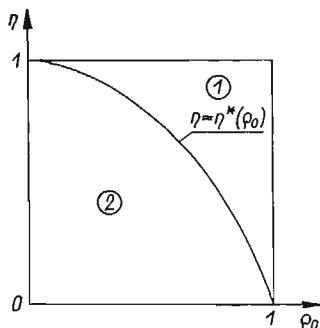
$$(17.6) \quad q_2 = \frac{6\eta M_0}{(1 - \varrho_0^3)},$$

(30) W przypadku  $\varrho_0 = 0$  punkt  $\varrho = 0$  jest oczywiście punktem osobliwym.

rozkład zaś prędkości określa wzór

$$(17.7) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 I(0, \varrho_0) + \dot{w}_0 \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0} I(\varrho_0, 1).$$

Zakresy słuszności przedstawionych rozwiązań obrazuje rys. 4.7; obszar braku współpracy jest tu znacznie większy niż dla przypadku przedstawionego na rys. 4.5. Przebieg linii podziału jest w dobrej zgodności z wyobrażeniami intuicyjnymi.



Rys. 4.7

W pracy [15] zanalizowano w podobny sposób nośność graniczną płyty ortotropowej o skokowej niejednorodności (płyta żelbetowa).

**Od autora.** W czasie opracowania przedstawionej powyżej problematyki autor spotykał się z życzliwością i konstruktywną krytyką ze strony wielu osób. Autor chciałby podziękować tą drogą za słowa zachęty prof. dr Wacławowi OLSZAKOWI, prof. dr Wojciechowi URBANOWSKIEMU, prof. dr G. S. SZAPIRZE (AN ZSRR), prof. dr Antoniemu SAWCZUKOWI i doc. dr Wojciechowi SZCZEPIŃSKIEMU. Zawsze chętnymi słuchaczami i wnikliwymi dyskutantami byli koledzy z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, przy czym autor jest szczególnie wdzięczny dr inż. Andrzejowi KÖNIGOWI, dr inż. Markowi JANASOWI, mgr Janinie OSTROWSKIEJ, mgr inż. Jerzemu ZAWIDZKIEMU i mgr inż. Jerzemu NAJAROWI.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. OLSZAK, *Pierścienie i rury o wyrównanych naprężeniach obwodowych*, Czasopismo techniczne, 1, 55 (1937).
2. W. OLSZAK, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych* (I), Arch. Mech. Stos., 3, 6 (1954), 492–532; (II) 4, 6 (1954), 439–656.
3. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Plasticity under non-homogeneous conditions*, Advances in Appl. Mech., 7 (1962), 131–214.
4. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Теория пластичности неоднородных тел*, Изд. „Мир”, Москва 1964.
5. М. И. БОЯРШИНОВ, Г. Э. АРКУЛИС, Г. А. БРИЧКО, *Опыт расчета прокатки биметаллических листов*, Инж. методы расчета техн. проц. обр. мет. давлением, Металлургиздат, Москва, 1964, 303–308.
6. М. И. БОЯРШИНОВ, Г. Э. АРКУЛИС, Г. А. БРИЧКО, *К расчету неравномерности деформации при пластическом сжатии биметаллической полосы*, Инж. методы расчета техн. проц. обр. мет. давлением, Металлургиздат, Москва, 1964, 299–303.

7. Л. В. МЕАНДРОВ, В. А. УСТИМЕНКО, А. А. БЫКОВ, *Применение вариационных принципов для исследования деформаций и усилий при прокатке биметаллических листов*, Инж. методы расчета техн. проц. обр. мет. давлением, Металлургиздат, Москва 1964, 308–315.
8. H. S. ORR, F. R. ROMEO, Sandwich rolling, *Iron and Steel Engineer*, 10, 9 (1960).
9. Г. Э. АРКУЛИС, *Совместная пластическая деформация разных металлов*, Металлургия, Москва 1964.
10. J. RYCHLEWSKI, *Plastic jump non-homogeneity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, 12, (1964), 341–348.
11. J. RYCHLEWSKI, *Plane plastic strain for jump non-homogeneity*, Int. J. Non-Linear Mech., 1, 1, w druku.
12. J. RYCHLEWSKI, *Plane plastic strain problem of a wedge with jump non-homogeneity*, J. Mecanique, 4, 3 (1964).
13. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a bars with jump non-homogeneity*, Acta Mechanica, 1, 1 (1965).
14. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a rectangular bar with jump non-homogeneity*, Int. J. Solids and Structures, 1 (1965), 243–255.
15. A. KÖNIG, J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of circular plates with jump non-homogeneity*, Int. J. Solids and Structures, 3, 2 (1966).
16. M. ARCISZ, J. RYCHLEWSKI, *A sandwich strip drawing through straight-sided, perfectly lubricated die*, Biull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1966, w druku.
17. А. С. АХМАТОВ, *Молекулярная физика граничного трения*, Физматгиз, Москва 1964.
18. Е. И. АСТРОВ, *Многослойные стали*, сб. Обработка металлов давлением, вып. 5, Металлургиздат, 1959
19. А. П. СЕМЕНОВ, *Исследование схватания металлов при совместном пластическом деформировании*, Изд. АН СССР, Москва 1953.
20. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod red. W. Olszaka, P. Perzyny, A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1964.
21. О. А. ЛАДЬЖЕНСКАЯ, В. А. СОЛОННИКОВ, *Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова 59 (1960), 115–173.
22. О. А. ЛАДЬЖЕНСКАЯ, *О решении общей задачи диффракции*, ДАН СССР, 3, 93 (1954), 433–436.
23. E. H. LEE, *On stress discontinuities in plane plastic flow*, Proc. Symp. in Appl. Math., 3 (1958) 213–228.
24. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Физматгиз, Москва 1959.
25. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950.
26. Г. С. ШАПИРО, *Упруго-пластические равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности*, ПИММ, 1, 16 (1952).
27. P. M. NAGHI, *Stresses and displacements, in an elastic-plastic wedge*, J. Appl. Mech., 1, 24 (1957).
28. J. NAJAR, J. RYCHLEWSKI, G. S. SZAPIRO, *On the elastic-plastic state of an infinite wedge*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1966.
29. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, część II, PWN, Warszawa 1962.
30. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Гостехиздат, Москва 1956.
31. А. И. КУЗНЕЦОВ, *Кручение неоднородных пластических стержней*, Изв. АН СССР, ОТН, 11, 1958.
32. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of non-homogeneous bars analyzed in curvilinear coordinates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 7, 12, (1964), 335–340.
33. A. NÁDAI, *Theory of flow and fracture of solids*, vol. 1, Mc Graw-Hill, New York 1950.
34. F. A. MC CLINTOCK, *The growth of fatigue cracks under plastic torsion*, Proc. Int. Conf. Fatigue of Metals, London-New York.
35. A. SAWCZUK, TH. JÄGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
36. A. SAWCZUK, *Some problems of load carrying capacities of orthotropic and non-homogeneous plates*, Arch. Mech. Stos., 8 (1956), 549–563, and IX-e Congres Int. de Mécanique Appliquée Actes 8, Université de Bruxelles 1957, 93–102.

## Резюме

## ПЛАСТИЧНОСТЬ ТЕЛ С РАЗРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Вопросы совместной пластической деформации разных металлов и некоторые вопросы прочности составных конструкций вызывают необходимость рассмотрения пластичности тел с поверхностями разрыва прочностных свойств. Такие тела названы телами с разрывной пластической неоднородностью.

В настоящей работе излагаются результаты полученные в [10]–[16]. Сделана попытка описания пластичности тел с разрывной неоднородностью на основе математической теории жестко-пластического неупрочняющегося тела.

В первой части дается некоторая упрощенная модель стыка двух частей тела с различными пределами текучести, непротиворечащая основным представлениям теории идеальной пластичности. Приведены некоторые опытные данные.

Вторая часть работы, составляющая половину её объема, посвящена математической теории плоского деформированного состояния. С формальной точки зрения вопрос сводится к решению квазилинейной гиперболической системы уравнений первого порядка, с разрывными коэффициентами. Исследованы свойства поля напряжений и поля скоростей в окрестности линии контакта. Рассмотрена локальная картина характеристик. Приведен полный анализ напряжений и скоростей в задаче о начальном пластическом течении клина нагруженного равномерной боковой нагрузкой на части грани. Для описания разрывных полей скоростей использованы простейшие обобщенные функции. Это дало возможность провести анализ согласованности данных решений с критерием неотрицательности мощности диссипации энергии.

Дано решение задачи о начальном пластическом течении полупространства с некоторым видом разрывной неоднородности, под действием жесткого штампа. Описано полученное совместно с М. Арциш, [16], решение задачи о волочении трехслойной полосы через гладкую матрицу.

В третьей части рассмотрена несущая способность скручиваемых стержней с составным сечением. Стержни многосвязного сечения являются частным случаем рассматриваемого класса стержней. Приведены некоторые качественные результаты и даны примеры решений для стержней круглого и прямоугольного сечения.

В четвертой части дано полученное совместно с А. Кёнигом [15] решение задачи о несущей способности круглой пластины, состоящей из двух концентрических частей с различными предельными моментами.

## Summary

## PLASTICITY OF THE BODIES WITH JUMP NONHOMOGENEITY

Problems concerning joint plastic treatment of different metals and some problems of strength of constructions composed of different materials involve consideration of the plastic deformation of the bodies possessing surfaces on which the moduli describing plastic properties undergo jumps. Such bodies are called bodies with jump plastic nonhomogeneity.

The work includes joint presentation of the paper [10]–[16], in which an attempt of describing some aspects of the plasticity of the bodies with the jump nonhomogeneity has been made on the basis of the mathematical theory of the rigid/perfectly plastic body.

The paper starts with the formulation of a simplified theoretical model of the joint of two parts, each of them with different yield point. The model is built on the assumption of ideal plasticity. Some experimental data are also presented.

The second chapter, which is a half of the entire contents of the paper, deals with the mathematical plane plastic flow theory. Formally, a quasilinear hyperbolic system of the first order with discontinuous

coefficients is here encountered. The properties of the field of stresses and of velocities in the neighbourhood of contact surfaces are examined. The local picture of the characteristics is discussed. The full analysis of stresses and velocities in the problem of initial plastic flow of the wedge with uniform lateral pressure acting on a part of its edge is presented. The description of the discontinuous velocity fields is carried out by the simplest distribution. This enables to analyse the agreement of the solutions with the postulate of non-negative power of energy dissipation. The solution to the problem of initial plastic flow in the half-space containing some kind of the jump nonhomogeneity is presented when a rigid punch acts on the bounding plane. The solution to the steady drawing process of some sandwich strip through smooth dies, obtained by M. ARCISZ and the author [16] is discussed.

The third chapter deals with the limit analysis of twisted bars containing a transversal jump discontinuity. The bars of multiconnected cross-section can be considered a particular case of the discussed class. Some quantitative results are found and examples of solutions for bars of both circular and rectangular cross-sections are shown.

In the fourth chapter, the solution to the problem of the limit analysis of the circular plate consisting of two concentric parts with different strength is considered. This solution has been obtained by A. König and the author [15].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1965 r.*



UKŁADY WSPÓRZĘDNYCH PROSTOKREŚLNYCH  
W GEOMETRII POWIERZCHNI ŚRODKOWEJ CIENKICH POWŁOK

KRZYSZTOF WILMAŃSKI I CZESŁAW WOŹNIAK (ŁÓDŹ)

1. W opracowaniach z teorii powłok cienkich zajmowany przez materiał powłoki obszar w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej bywa z reguły parametryzowany układem tzw. współrzędnych normalnych. Układ ten jest utworzony z rodziny powierzchni  $\xi^3 = \text{const}$  równoległych do środkowej powierzchni powłoki ( $\xi^3 = 0$ ) oraz z dalszych dwóch rodzin  $\xi^\delta = \text{const}$ ,  $\delta = 1, 2$ , ortogonalnych do poprzednich i danych sposobem parametryzacji powierzchni środkowej. Układy współrzędnych normalnych są w teorii powłok cienkich zwłaszcza wtedy dogodnie w zastosowaniu, gdy odkształcenie powłoki przebiega zgodnie z założeniami geometrycznymi teorii Kirchhoffa-Love'a. Założenia te są bowiem od razu spełnione, gdy układ współrzędnych normalnych  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  przyjmiemy jako konwekcyjny (odkształcający się wraz z powłoką) oraz jednocześnie gdy potraktujemy  $\xi^3$  jako odległość dowolnego punktu materialnego powłoki od jej powierzchni środkowej.

Zupełnie ogólny sposób podejścia do równań teorii powłok cienkich uzyskamy nie wprowadzając współrzędnych normalnych, lecz parametryzując powierzchnię środkową powłoki oraz jej przestrzeń dwoma niezależnymi układami współrzędnych: powierzchniowym i przestrzennym (por. np. [1]). Przyjęcie takie prowadzi jednakże do złożonej postaci równań teorii i nie jest wygodne do zastosowania metody współrzędnych konwekcyjnych.

W przedstawionym komunikacie będą omówione układy współrzędnych nazwane prostokreślnymi, które można przyjąć za konwekcyjne również, gdy na odkształcenie powłoki nie są narzucone więzy geometryczne teorii Kirchhoffa-Love'a, lecz gdy rozważamy teorię «drugiego przybliżenia». Uwzględniamy w ramach tej teorii wydłużenie lub skrócenie elementów materialnych powłoki, normalnych w jednej konfiguracji do tej powierzchni środkowej, oraz zmianę kąta nachylenia tychże elementów do powierzchni środkowej. Takie podejście do zagadnienia można znaleźć w pracy [3].

Szczególnymi przypadkami prostokreślnych układów współrzędnych są układy normalne.

*Oznaczenia.* Przyjmujemy, że wskaźniki kontra- i kowariantne, oznaczone literami greckimi, przebiegają ciąg 1, 2, a oznaczone literami alfabetu łacińskiego ciąg 1, 2, 3. W stosunku do wszystkich wskaźników zastosowano konwencję sumacyjną.

Przecinkiem oznaczono w pracy różniczkowanie cząstkowe względem zmiennych znajdujących się po jego prawej stronie. Np.:  $g_{ij,k} = \partial g_{ij} / \partial \xi^k$ . Kreska pionowa oznacza w pracy pochodną kowariantną. Nawias zwykły obejmujący wskaźniki oznacza część

symetryczną tensora względem wydzielonych wskaźników, nawias kwadratowy — część antysymetryczną.

W stosunku do wielkości o charakterze wektorowym zastosowano notację absolutną. Poniżej zestawiono inne ważniejsze oznaczenia:

$\{\xi^i\}$	układ współrzędnych prostokreślnych,
$\hat{\mathbf{r}}(\xi^i)$	promień wodzący przestrzeni otaczającej rozważaną powierzchnię $\pi$ ,
$\mathbf{r}(\xi^\delta)$	promień wodzący powierzchni $\pi$ ,
$\hat{\mathbf{g}}_i$	wektory bazy układu $\{\xi^i\}$ w przestrzeni otaczającej powierzchnię $\pi$ ,
$\mathbf{g}_i$	wektory bazy układu $\{\xi^i\}$ na powierzchni $\pi$ (dla $\xi^3 = 0$ ),
$\hat{g}_{ij}$	tensor metryczny układu $\{\xi^i\}$ ,
$g_{ij}, 'g_{ij}, ''g_{ij}$	pierwszy, drugi i trzeci tensor podstawowy powierzchni $\pi$ ,
$[\hat{j}, k]; \{\hat{j}, k\}$	symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju w przestrzeni otaczającej powierzchnię $\pi$ ,
$[ij; k]; \{j, k\}$	symbole Christoffela dla $\xi^3 = 0$ ,
$\hat{R}_{prst}$	tensor krzywizny Riemanna-Christoffela.

2. Niech równanie powierzchni środkowej powłoki, którą dalej nazywać będziemy powierzchnią  $\pi$ , będzie dane równaniem:

$$(2.1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2),$$

gdzie  $\{\xi^\delta\}$ ,  $\delta = 1, 2$ , jest układem współrzędnych krzywoliniowych przyjętym na tej powierzchni. Wektory bazy tego układu zapiszemy wtedy w postaci

$$(2.2) \quad \mathbf{g}_\delta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\delta} = \mathbf{r}_{,\delta}.$$

Przyjmijmy na rozpatrywanej powierzchni pole wektorowe

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3(\xi^1, \xi^2),$$

najeżające ją w dowolny sposób. O funkcji  $\mathbf{g}_3$  zakładamy, że jest dostatecznie regularna dla dopuszczenia operacji wykonywanych na niej w dalszym ciągu pracy. Punkt  $A$  leżący w otoczeniu powierzchni  $\pi$  (przez otoczenie powierzchni rozumiemy tu obszar jednoznaczności parametryzacji układem  $\{\xi^i\}$ ) można wtedy parametryzować równaniem:

$$(2.3) \quad \hat{\mathbf{r}}(\xi^i) = \mathbf{r}(\xi^\delta) + \xi^3 \mathbf{g}_3(\xi^\delta), \quad i = \delta, 3.$$

Uzależnia ono punkty przestrzeni otaczającej powierzchnię jedynie od wielkości na niej danych (rys. 1).

Układ  $\{\xi^\delta, \xi^3\}$  będziemy dalej oznaczać  $\{\xi^i\}$  i nazywać układem współrzędnych *prostokreślnych*. Jego linie parametryczne dla  $\xi^3 = 0$  pokrywają się z liniami parametrycznymi układu współrzędnych  $\{\xi^\delta\}$ , a linie parametryczne  $\xi^3 = \text{const}$  są prostymi o kierunkach danych na powierzchni  $\pi$  przez pole wektorowe  $\mathbf{g}_3$ . Wektory bazy układu prostokreślnego określa równanie

$$(2.4) \quad \hat{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \xi^i} = \hat{\mathbf{r}}_{,i}.$$

Kwadrat elementu liniowego z otoczenia powierzchni  $\pi$  zapiszemy wtedy w postaci

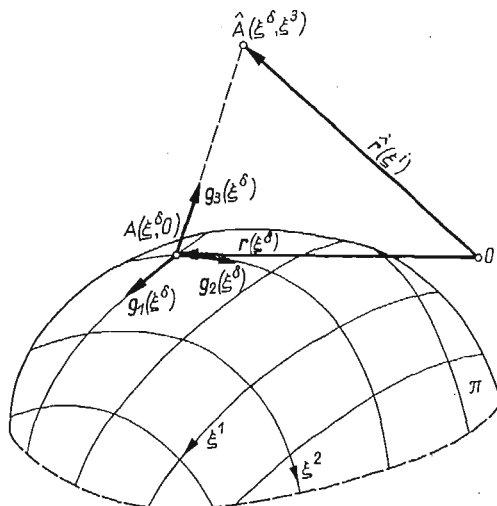
$$ds^2 = d\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_{,i} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{,j} d\xi^i d\xi^j = (\mathbf{r} + \xi^3 \mathbf{g}_3)_{,i} \cdot (\mathbf{r} + \xi^3 \mathbf{g}_3)_{,j} d\xi^i d\xi^j,$$

skąd po przekształceniach otrzymamy

$$(2.5) \quad ds^2 = \hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j = [g_{ij} + 2\xi^3 {}'g_{(ij)} + (\xi^3)^2 {}''g_{ij}] d\xi^i d\xi^j,$$

gdzie  $\hat{g}_{ij}$  jest tensorem metrycznym przestrzeni otaczającej powierzchnię  $\pi$ . Prócz tego w powyższym wzorze wykorzystano następujące oznaczenia:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_{ij} \stackrel{\text{dr}}{=} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j & \text{pierwszy tensor podstawowy powierzchni,} \\ {}'g_{ij} \stackrel{\text{dr}}{=} \mathbf{g}_{3,i} \cdot \mathbf{g}_j & \text{drugi tensor podstawowy powierzchni,} \\ {}''g_{ij} \stackrel{\text{dr}}{=} \mathbf{g}_{3,i} \cdot \mathbf{g}_{3,j} & \text{trzeci tensor podstawowy powierzchni.} \end{array} \right.$$



Rys. 1

Jak łatwo sprawdzić, trzeci tensor podstawowy można wyrazić przez drugi tensor podstawowy i składowe kontrawariantne pierwszego tensora podstawowego. Zależność ta ma postać:

$$(2.7) \quad {}''g_{ij} = {}'g_{ik} {}'g_{jl} g^{kl},$$

gdzie

$$g_{pl} g^{kl} \stackrel{\text{dr}}{=} \delta_p^k.$$

Bezpośrednio z definicji wynika, że składowe kowariantne drugiego tensora podstawowego tworzą następującą macierz:

$$(2.8) \quad [{}'g_{ji}] = \begin{bmatrix} {}'g_{\delta\lambda} & {}'g_{\delta 3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. W dalszym ciągu pracy będziemy również korzystać ze składowych kontrawariantnych tensora metrycznego  $\hat{g}_{ij}$ . Znajdziemy je w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy:

$$(3.1) \quad \hat{g}^{kj} = \sum_{A=0}^{\infty} \frac{g^{kj}}{A!} (\xi^3)^A,$$

gdzie

$$(3.2) \quad g^{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^A \hat{g}^{kj}}{\partial (\xi^3)^A} (\xi^3 = 0).$$

Wykorzystamy teraz związek wiążący składowe kontra- i kowariantne tensora metrycznego

$$(3.3) \quad \hat{g}_{ik} \hat{g}^{kj} = \delta_i^j.$$

Po podstawieniu do równań (3.3) zależności (2.5) i (3.1) oraz po przyrównaniu współczynników przy tych samych potęgach  $\xi^3$  otrzymujemy:

$$(3.4) \quad \hat{g}^{kj} = g^{kj} - 2\xi^3 {}'g^{(kj)} + (\xi^3)^2 (4 {}'g^{(kn)} {}'g^{(ji)} - {}'g^{kn} {}'g^{ji}) g_{in} + \dots$$

Wykorzystano tu równości (2.7)<sub>2</sub> oraz związek

$$(3.5) \quad {}'g^{kj} \stackrel{\text{def}}{=} {}'g_{mn} g^{kn} g^{jm}.$$

4. Przejdziemy obecnie do określenia operacji różniczkowania w otoczeniu powierzchni  $\pi$ . Do wyznaczenia pochodnej kowariantnej musimy znać symbole Christoffela. Można je znaleźć w sposób prosty korzystając ze związków:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{g}}_{\delta, \lambda} = \hat{\mathbf{r}}_{, \delta \lambda} = \mathbf{g}_{\delta, \lambda} + \xi^3 \mathbf{g}_{3, \delta \lambda}, \\ \hat{\mathbf{g}}_{\delta, 3} = \hat{\mathbf{r}}_{, \delta 3} = \mathbf{g}_{3, \delta}, \\ \hat{\mathbf{g}}_{3, \delta} = \hat{\mathbf{r}}_{, 3 \delta} = \mathbf{g}_{3, \delta}, \\ \hat{\mathbf{g}}_{3, 3} = \mathbf{g}_{3, 3} = 0. \end{cases}$$

Ponieważ (por. np. [2], str. 26)

$$(4.2) \quad [\hat{i}^j; k] = \hat{\mathbf{g}}_k \cdot \hat{\mathbf{g}}_{, i}^j,$$

więc dla  $\xi^3 = 0$  otrzymamy następujące wzory:

$$(4.3) \quad \begin{cases} [\delta \lambda; \sigma] = [\delta \hat{\lambda}; \sigma]_{(\xi^3=0)} = \frac{1}{2} (g_{\delta \sigma, \lambda} + g_{\lambda \sigma, \delta} - g_{\delta \lambda, \sigma}), \\ [\delta \lambda; 3] = [\delta \hat{\lambda}; 3]_{(\xi^3=0)} = g_{3(\delta, \lambda)} - {}'g_{(\delta \lambda)}, \\ [\delta 3; i] = [\delta \hat{3}; i]_{(\xi^3=0)} = {}'g_{\delta i}, \\ [33; \delta] = [3\hat{3}; \delta] = 0. \end{cases}$$

Przez podniesienie wskaźnika pierwszym tensorem podstawowym powierzchni dochodzimy do zależności:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \{\delta \lambda\} = g^{i\sigma} [\delta \lambda; i] = g^{\sigma\varphi} [\delta \lambda; \varphi] + g^{\sigma 3} (g_{3(\delta, \lambda)} - {}'g_{(\delta \lambda)}), \\ \{\delta \lambda\}^3 = g^{i3} [\delta \lambda; i] = g^{\varphi 3} [\delta \lambda; \varphi] + g^{33} (g_{3(\delta, \lambda)} - {}'g_{(\delta \lambda)}), \\ \{\delta \delta\}^i = g^{ij} [3 \delta; j] = {}'g_{\delta}^i, \\ \{\delta \delta\}^3 = \{3 \delta\}^3 = 0. \end{cases}$$

Wykorzystując powyższe związki mamy na przykład dla pola tensorowego  $T_{ij}$  na powierzchni ( $\xi^3 = 0$ ) następujące wzory:

$$(4.5) \quad \begin{cases} T_{ij|\varphi} = T_{ij,\varphi} - \{i\varphi\}^k T_{kj} - \{j\varphi\}^k T_{ik}, \\ T_{\delta\lambda|3} = T_{\delta\lambda,3} - \{\delta 3\}^k T_{k\lambda} - \{\lambda 3\}^k T_{\delta k}, \\ T_{\delta 3|3} = T_{\delta 3,3} - \{\delta 3\}^k T_{k3}, \\ T_{3\lambda|3} = T_{3\lambda,3} - \{\lambda 3\}^k T_{3k}, \\ T_{33|3} = T_{33,3}. \end{cases}$$

5. Podane powyżej symbole Christoffela pozwalają napisać równania istnienia powierzchni przy nieortogonalnym najeżeniu. Punktem wyjścia będzie tu własność przestrzeni euklidesowej, stanowiącej otoczenie powierzchni  $\pi$ . Wiemy mianowicie, że w tej przestrzeni tensor krzywizny Riemanna-Christoffela jest równy zeru [2]. Można to zapisać w postaci

$$(5.1) \quad \hat{R}_{prst} = 0,$$

gdzie

$$(5.2) \quad \hat{R}_{prst} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{pt,rs} + \hat{g}_{rs,pt} - \hat{g}_{ps,rt} - \hat{g}_{rt,ps}) + \hat{g}^{mn} ([rs; m][pt; n] - [rt; m][ps; n]).$$

Związki (5.1) i (5.2) prowadzą do następujących zależności:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \hat{R}_{1313}(\xi^3 = 0) &= R_{1313} = 0, \\ \hat{R}_{2323}(\xi^3 = 0) &= R_{2323} = 0, \\ \hat{R}_{1323}(\xi^3 = 0) &= R_{1323} = 0, \\ \hat{R}_{1212}(\xi^3 = 0) &= R_{1212} = 0, \\ \hat{R}_{2312}(\xi^3 = 0) &= R_{2312} = 0, \\ \hat{R}_{1321}(\xi^3 = 0) &= R_{1321} = 0. \end{aligned}$$

Wykorzystując związki (4.3), równania (5.3)<sub>1</sub> i (5.3)<sub>2</sub> zapiszemy, jak następuje:

$$R_{\delta 3 \delta 3} = \frac{1}{2} (4'g_{(3\delta),\delta} - g_{\delta}^k g_{\delta k} - g_{33,\delta\delta}) + g^{mn} [3\delta; m][3\delta; n] = 0 \quad (\delta - \text{niesumowane!}),$$

natomiast równanie (5.3)<sub>3</sub> przyjmuje postać

$$R_{1323} = \frac{1}{2} (2'g_{(13),2} + 2'g_{(23),1} - 2'g_{1}^k g_{2k} - g_{33,12}) + g^{mn} g_{2m}'g_{1n} = 0.$$

Powyzsze zależności można napisać w postaci układu równań

$$(5.4) \quad g_{33,\delta\lambda} = g_{\delta 3,\lambda} + g_{\lambda 3,\delta}.$$

Składowa  $R_{1212}$ , opisująca zakrzywienie powierzchni  $\pi$ , po rozwinięciu przyjmuje postać

$$(5.5) \quad \begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2} (2g_{12,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + g^{mn} ([12; m][12; n] - [22; m][11; n]) = \\ &= \frac{1}{2} (2g_{12,12} - g_{11,22} - g_{22,11}) + g^{\delta\lambda} ([12; \delta][12; \lambda] - [22; \delta][11; \lambda]) + \\ &+ g^{\delta\delta} \{ [12; \delta] (g_{3(1,2)} - g_{(12)}) - [22; \delta] (g_{31,1} - g_{11}) \} + g^{\delta\delta} \{ [12; \delta] (g_{3(1,2)} - g_{(12)}) - \\ &- [11; \delta] (g_{32,2} - g_{22}) \} + g^{33} \{ (g_{3(1,2)} - g_{(12)}) (g_{3(1,2)} - g_{(12)}) - \\ &- (g_{32,2} - g_{22}) (g_{31,1} - g_{11}) \} = 0. \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(5.6) \quad R_{1212}^* \stackrel{\text{def}}{=} -g^{\delta\delta} \{ -2[12; \delta] 'g_{(12)} + [22; \delta] 'g_{11} + [11; \delta] 'g_{22} \} + g^{\delta\delta} \det 'g_{(\varphi\psi)} - \\ - g^{\delta\delta} \{ -2g_{3(1,2)} 'g_{(12)} + g_{32,2} 'g_{11} + g_{31,1} 'g_{22} \}.$$

Równanie (5.5) określa teraz zależność

$$(5.7) \quad R_{1212}^* = -\frac{1}{2} (g_{11,22} - 2g_{12,12} + g_{22,11}) + g^{\delta\lambda} ([12; \delta][12; \lambda] - [22; \delta][11; \lambda]) - \\ - g^{\delta\delta} ([22; \delta]g_{31,1} - 2[12; \delta]g_{3(1,2)} + [11; \delta]g_{3,22}) + g^{\delta\delta} (g_{3(1,2)}g_{3(1,2)} - g_{31,1}g_{32,2}).$$

Ostatnie dwa równania istnienia powierzchni otrzymamy z warunku zerowania się składowych  $R_{2312}$  i  $R_{1321}$  tensora Riemanna-Christoffela.

Pierwsze z nich zapiszemy w postaci

$$R_{2312} = \frac{1}{2} (2 'g_{22,1} + g_{31,22} - 2 'g_{(21),2} - g_{32,21}) + g^{mn} ('g_{1m}[22; n] - 'g_{2m}[21; n]),$$

drugie natomiast jako zależność

$$R_{1321} = \frac{1}{2} (2 'g_{11,2} + g_{32,11} - 2 'g_{(12),1} - g_{31,12}) + g^{mn} ('g_{2m}[11; n] - 'g_{1m}[12; n]).$$

Po przyrównaniu tych związków do zera otrzymujemy:

$$(5.8) \quad \frac{1}{2} g_{3[2,1]\varphi} = 'g_{(\varphi[2],1]} + [\varphi[2; \delta] 'g_{1j}^{\delta} + (g_{3(\varphi,[2)} - 'g_{(\varphi[2)} 'g_{1j}^{\delta}.$$

6. Przytoczymy jeszcze związki określające pochodne cząstkowe wektorów bazy  $\mathbf{g}_\delta$ ,  $\mathbf{g}^\delta$  i wektorów  $\mathbf{g}_3$  oraz  $\mathbf{g}^3$ . Odpowiadają one klasycznym wzorom Weingartena-Gaussa. Można je otrzymać bezpośrednio ze związku (por. np. [2], str. 25)

$$(6.1) \quad \mathbf{g}_{i,j} = [ij; k] \mathbf{g}^k, \quad \mathbf{g}^i_{,j} = -\{^i_{jk}\} \mathbf{g}^k.$$

W naszym przypadku przyjmuje on postać:

$$(6.2) \quad \begin{cases} \mathbf{g}_{\delta,\lambda} = [\delta\lambda; \varphi] \mathbf{g}^\varphi + (g_{3(\delta,\lambda)} - 'g_{(\delta\lambda)}) \mathbf{g}^3, \\ \mathbf{g}_{3,\delta} = 'g_{\delta i} \mathbf{g}^i, \\ \mathbf{g}^\delta_{,\lambda} = -g^{\delta\psi} [\lambda\varphi; \psi] \mathbf{g}^\varphi - g^{\delta\delta} (g_{3(\lambda,\varphi)} - 'g_{(\lambda\varphi)}) \mathbf{g}^\varphi - 'g_{\lambda\delta} \mathbf{g}^3, \\ \mathbf{g}^3_{,\delta} = -g^{\varphi\delta} [\delta\lambda; \varphi] \mathbf{g}^\lambda - g^{\delta\delta} (g_{3(\delta,\lambda)} - 'g_{(\delta\lambda)}) \mathbf{g}^\lambda - 'g_{\delta\delta} \mathbf{g}^3. \end{cases}$$

7. Na zakończenie wykażemy, że przyjęcie pola wektorowego  $\mathbf{g}_3$  ortonormalnie do powierzchni  $\Pi$  prowadzi do układu współrzędnych normalnych. Zgodnie z definicją (2.6) tensor metryczny  $\hat{g}_{ij}$  posiada wtedy pięć składowych niezerowych

$$(7.1) \quad [\hat{g}_{ij}] = \begin{bmatrix} \hat{g}_{\delta\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i na powierzchni  $\xi^3 = 0$  można przyjąć pierwszy tensor podstawowy w postaci

$$(7.2) \quad g_{\delta\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}_{\delta\lambda} (\xi^3 = 0).$$

W drugim tensorze podstawowym znikają przy powyższym przyjęciu składowe  $'g_{\delta\delta}$ . A więc układ pierwszego i drugiego tensora podstawowego powierzchni  $\pi$  jest wtedy taki

sam, jak we współrzędnych normalnych. Po wykorzystaniu uproszczeń wynikających z ortonormalności  $g_3$  symbole Christoffela, określone wzorami (4.3) i (4.4), mają postać

$$(7.3) \quad \begin{aligned} [\delta\lambda; \sigma] &= \frac{1}{2} (g_{\delta\sigma, \lambda} + g_{\lambda\sigma, \delta} - g_{\delta\lambda, \sigma}), \\ [\delta\lambda; 3] &= -'g_{\delta\lambda}, \\ [\delta 3; \lambda] &= 'g_{\delta\lambda}, \\ [33; \delta] &= [\delta 3; 3] = [33; 3] = 0, \end{aligned}$$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \{\delta\lambda\} &= g^{\sigma\varphi} [\delta\lambda; \varphi], \\ \{\delta\lambda\} &= -'g_{\delta\lambda}, \\ \{\delta\delta\} &= 'g_{\delta\delta}^{\lambda}, \\ \{\delta\delta\} &= \{\delta\delta\} = \{\delta\delta\} = 0. \end{aligned}$$

Zależności (7.3) i (7.4) są identyczne ze znanymi w układach normalnych [2].

Wreszcie równania istnienia powierzchni (5.4), (5.6) i (5.8) zmieniają się w sposób następujący: ponieważ

$$(7.5) \quad g_{\delta 3, \lambda} = 0,$$

więc trzy równania (5.4) przechodzą w tożsamości. Równanie (5.6) ma postać

$$(7.6) \quad R_{1212}^* = \det 'g_{\varphi\psi},$$

a więc otrzymujemy związek określający krzywiznę Gaussa mnożoną przez wyznacznik z tensora metrycznego. Podstawiając (7.1) i (7.5) do równań (5.8) otrzymamy

$$'g_{2\varphi, 1} - 'g_{1\varphi, 2} + [2\varphi; \delta] 'g_1^{\delta} - [1\varphi; \delta] 'g_2^{\delta} = 0$$

lub

$$'g_{2\varphi, 1} - \{\delta\delta\} 'g_{2\delta} - \{\delta\delta\} 'g_{\delta\varphi} - 'g_{1\varphi, 2} + \{\delta\delta\} 'g_{1\delta} + \{\delta\delta\} 'g_{\delta\varphi} = 0,$$

co prowadzi do równania Codazziego dla powierzchni parametryzowanej normalnym układem współrzędnych

$$(7.7) \quad 'g_{2\varphi|1} = 'g_{1\varphi|2}.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Encyklopaedia of Physics, v. III/1, Springer-Verag 1960.
2. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, London 1959.
3. C. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, w druku.

#### Р е з ю м е

#### КООРДИНАТНЫЕ ЛИНЕЙЧАТЫЕ СИСТЕМЫ В ГЕОМЕТРИИ СРЕДИННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Обсуждается геометрия срединной поверхности тонких оболочек при использовании координатной системы с произвольным направлением и длиной базисного вектора  $g_3$ . Введенная система координат, в виду принятой формы параметрической линии  $\xi^{\delta} = \text{const}$ , названа линейчатой систе-

мой. Определяются основные тензоры поверхности (формулы(2.6)) и описывается операция ковариантного дифференцирования для  $\xi_3 = 0$  в этой системе. В п. 5 выводится, исходя из тензора кривизны Римана-Христоффеля, шесть уравнений существования поверхности при неортогональности базисного вектора  $g_3$ . В п. 7 показано, что нормальная система координат является, частным случаем линейчатой системы координат. Выведенные соотношения дают возможность применения сопутствующих координатных систем в теории оболочек, не удовлетворяющей геометрическим предположениям Кирхгоффа-Лява.

#### Summary

### RULED COORDINATE SYSTEMS IN THE GEOMETRY OF THE MIDDLE SURFACES OF THIN SHELLS

The geometry of the middle surface of thin shells has been considered in the paper, the problem being parametrized by a coordinate system with base vectors  $g_3$  of arbitrary length and direction. The system introduced is called „ruled system” due to the assumed form of the parametric line  $\xi^3 = \text{const}$ . The fundamental tensors of the surface (Eqs. 2.6) and the covariant differentiation operation for  $\xi^3 = 0$  are defined in this system. Basing upon the Riemann-Christoffel curvature tensor, the six equations of existence of the surface with non-orthogonal rigging have been derived in p. 5. In p. 7 the normal coordinate system is shown to be a particular case of a ruled coordinate system. The derived formulae enable to apply the convectional reference frames in the theory of the surface which does not satisfy the Kirchhoff-Love assumptions.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 czerwca 1965 r.*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## KONFERENCJA SZKOLENIOWA NA TEMAT «TEORIA DYSLOKACJI»

W dniach od 19 do 28 sierpnia 1965 r. odbyła się w Jabłonie konferencja szkoleniowa pod ogólnym tytułem «Teoria dyslokacji».

W ramach tej konferencji wygłoszone zostały trzy zasadnicze cykle wykładów:

- 1) geometria dyslokacji ciągłych,
- 2) połowa teoria defektów dyskretnych w ciele sprężystym,
- 3) metody rentgenograficzne badania dyslokacji.

Pierwszy z wymienionych cykli wykładów prowadził wybitny specjalista w dziedzinie dyslokacji prof. dr B. A. BILBY z Sheffield University (W. Brytania). Wygłosił on dziewięć kolejnych wykładów, w których omówił następujące tematy:

- a) fizyczne i matematyczne podstawy kontynuualnej teorii dyslokacji,
- b) geometria zdyslokowanego ośrodka ciągłego,
- c) układy dyslokacji nie wywołujące naprężeń dalekiego zasięgu,
- d) naprężenia wewnętrzne wywołane dyslokacjami.

Drugi cykl wykładów prowadził prof. dr H. ZORSKI z IPPT PAN wygłaszając również dziewięć kolejnych wykładów, w których po krótkim wstępie matematycznym, dotyczącym klasycznej teorii potencjału oraz rachunku wariacyjnego, omówił następujące tematy:

- a) modele defektów w ośrodkach sprężystych (ogólny model defektu jako powierzchnia nieciągłości),
- b) pole naprężeń defektów,
- c) zasada wariacyjna teorii defektów oraz definicje i własności sił w układzie defekty — pole sprężyste;
- d) równania ruchu defektów,
- e) zasady zachowania w układzie defektów w polu sprężystym.

Trzeci cykl wykładów prowadzony przez doc. dr J. AULEYTNERA i dr T. BEDYŃSKĄ z Instytutu Fizyki PAN w odróżnieniu od dwóch pierwszych, mających charakter ściśle teoretyczny, miał na celu zapoznanie uczestników konferencji z doświadczalnymi metodami badania dyslokacji. Prelegenci w ciągu siedmiu wykładów omówili następujące tematy:

- a) dyfrakcja promieni X i jej zastosowanie,
- b) wyznaczenie gęstości dyslokacji w kryształach,
- c) badanie defektów sieci w materiałach polikrystalicznych,
- d) zastosowanie niskokątowego i dyferencyjnego rozpraszania promieni X do badania defektów sieci.

W ramach dwóch pierwszych cykli wykładów dwa wykłady wygłosił mgr D. ROGULA z IPPT PAN ma temat «Akustyczna dyspersja przestrzenna i własności dynamiczne dyslokacji».

W czasie konferencji odbyło się również kilka seminariów dyskusyjnych, na których referaty wygłosił następujący uczestnicy:

- dr J. GAAL (Węgry) «Ruch dyslokacji w ośrodku z dyspersją»,
- dr T. GESZTI (Węgry) «Statystyczna teoria defektów»,
- dr Z. WEISS (IBJ PAN) «Fale spinowe w ośrodku z defektami»,
- doc. dr M. ŻÓRAWSKI (IPPT PAN) «Teoria defektów ciągłych»,
- mgr J. KRYŁOW (Inst. Fizyki PAN) «Defekty a własności elektryczne ciała stałego».

W konferencji udział wzięło ogółem 75 uczestników w tym czterech gości z Węgier, trzech z Jugosławi i po dwóch z Czechosłowacji i Bułgarii.

*Marek Matczyński (Warszawa a*

## XI KONFERENCJA NAUKOWA KIL PAN I KN PZITB W KRYNICY

**1. Dane organizacyjne.** Doroczna Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej PAN oraz Komitetu Nauki PZITB odbyła się w dniach od 15 do 25 września 1965 r. W odróżnieniu od lat poprzednich tematyka konferencji była szeroka i określona nazwą «Aktualne problemy budownictwa».

W czasie konferencji przedstawiono 125 referatów i komunikaty, z czego 80 prac wydrukowano i dostarczono uprzednio uczestnikom. W konferencji wzięły udział 673 osoby; niemal połowa uczestników, to pracownicy biur projektowych, a przeszło czwarta część — przedsiębiorstw wykonawczych. Udział gości zagranicznych ograniczył się do 15 osób z 11-toma referatami.

Organizacja Konferencji spoczywała w rękach Komitetu wybranego spośród Wrocławskiej Komisji Nauki PZITB, który przeprowadził nie tylko sprawnie obrady i wykonał z powodzeniem trudną pracę redakcyjną przy wydaniu drukiem referatów, ale także zapewnił tradycyjnie dobre warunki pobytu wszystkim uczestnikom.

**2. Przegląd prac.** Prace referowane na Konferencji podzielono na trzy grupy tematyczne, które stanowiły kolejno przedmiot obrad, mianowicie:

Teoria konstrukcji	34 referaty
Konstrukcje betonowe i stalowe	46+12 referatów
Technologia materiałów i zagadnienia korozji	25+ 5 referatów

Wiele prac obejmowało zagadnienia należące do co najmniej dwóch z tych grup, przeto podział taki ma jedynie znaczenie orientacyjne.

**2.1. Prace dotyczące zagadnień teorii konstrukcji.** J. KMITA i J. WUJCZAK przedstawili metodę wyznaczania sił w skrzydełkach przyczółków, które potraktowano jako płyty wspornikowe. S. LICHARDUS (CSRS) zajął się analizą płyt podpartych punktowo. W pracy Z. REIPERTA rozwiązano przypadki nagłego obciążenia belki i nagłego odjęcia podpory wykorzystując własności funkcji własnych.

Z. BZYMEK przeprowadził analizę przydatności ramownic w budowie mostów w zależności od rozpiętości rygli i wysokości słupów. Zagadnieniom ramownic z prętów o zmiennych wymiarach poświęcony był referat E. KRYNICKIEGO.

Kilka referatów obejmowało zagadnienia związane z wykorzystaniem obliczeń za pomocą maszyn cyfrowych. Są to prace: K. WYSIATYCKIEGO na temat tarcz, S. FULIŃSKIEGO dotyczące ramownic, K. WRZEŚNIEWSKIEGO i J. PIETRZAKA o łupinach cylindrycznych oraz R. DOWGIRDA o wykorzystaniu metod macierzowych przy przygotowywaniu programów. Również N. SIEBER (NRD) przedstawił zagadnienia związane z wykorzystaniem maszyn cyfrowych.

Zagadnienia dynamiczne poruszyli: R. CIESIELSKI zajmując się dopuszczalnymi amplitudami drgań budynków, T. SZAMIN wykorzystując analogię elektryczną do analizy fundamentów pod maszyny, M. ŻYSZKO, który rozpatrzył belkę mostową oraz A. GOMULIŃSKI referując analizę płyty kołowej na sprężystym podłożu.

Podłoże sprężyste występowało również w kilku innych referatach. K. FIEDOROWICZ rozpatrzył nośność płyt, Z. KOWAL skręcanie prętów, a C. WOŹNIAK i M. ŻUKOWSKI przeprowadzili analizę siatek prętowych opartych na podłożu sprężystym. T. BASIEWICZ przedstawił zagadnienie obliczania nawierzchni kolejowej uwzględniając sumowanie odkształceń trwałych. K. BIERNATOWSKI zastosował rachunek prawdopodobieństwa do zagadnienia stateczności fundamentów.

E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI opracował metodę analizy izostatycznych kratownic przestrzennych za pomocą parametrów początkowych. J. LANGER przedstawił rozwiązanie przestrzennej konstrukcji wiszącej uwzględniając jej odkształcenia. Praca E. LUBIENIECKIEGO dotyczyła wpływu przestrzennego działania belek suwnicowych na ugięcia. Zagadnienia osiadania fundamentów poruszyli w swoich pracach K. H. PASCHKE (NRD) i J. ORZECZOWSKI.

Wśród prac traktujących o badaniach modelowych wymienić trzeba najpierw referat J. KMITY i K. BIENKA o dokładności pomiarów oraz referat A. BORCZA, zawierający opis fotograficznej metody pomiarów odkształceń kątowych, który nie został wygłoszony z powodu nieobecności autora. O. DĄBROWSKI przedstawił wyniki badań wielkości sił wewnętrznych w przestrzennych ustrojach kratownicowych

Badania modelowe stateczności powłok hiperboloidalnych zreferowali J. LEDWOŃ, O. MATEJA i S. LASKA. Praca J. FILIPKOWSKIEGO dotyczyła pokrycia dachowego z tarcz wielokątnych. R. GANOWICZ i H. MIKO-

ŁAJCZAK przedstawili wyniki badań teoretycznych i modelowych powłok walcowych. J. KANIA zajął się doświadczalnym sprawdzeniem obliczeń ugięć płyt pod działaniem skupionych momentów. Kwadratowa płyta z otworem kołowym była przedmiotem badań R. KOŁODZIEJSKIEGO. M. KOSECKI i H. PRIEBE zaproponowali stosowanie łupin dwukrzywiznowych do budowy fundamentów. Praca H. MATSCKE (NRD) dotyczyła zagadnienia parcia wiatru na budowle wieżowe.

2.2. Prace dotyczące konstrukcji betonowych i stalowych. Sześć prac dotyczyło zagadnień teoretycznych związanych ze stanami granicznymi i nośnością konstrukcji. C. AVRAM, O. MIRSU i C. BOB (Rumunia) nadesłali referat przedstawiony przez W. KUCZYŃSKIEGO, traktujący o ramownicach jednoprzęsłowych w stadium plastycznym. W. KUCZYŃSKI i S. GOSZCZYŃSKI zajęli się ciągłą redystrybucją momentów w ciągłych belkach z betonu uzbrojonego przy zastosowaniu maszyn cyfrowych. T. GODYCKI-ĆWIRKO poddał analizie wpływ uzbrojenia przeciw ścinaniu w stanach granicznych belek. W. KUKULSKI wyprowadził zależności uwzględniające wpływ wytrzymałości betonu na nośność ścian. Ogólne zasady obliczania konstrukcji z betonu sprężonego w stanach granicznych przedstawił P. MOE-NAERT (Belgia). J. TYSZOWIECKI przysłał referat dotyczący wymiarowania płyt dwukierunkowo-sprężonych.

Wyniki pomiarów sześciu składowych odkształcenia wewnątrz betonu i ich analizę podał A. BRANDT. Składowe podłużne w elementach ściskanych badań I. BIAŁAS. Referat M. ABRAMOWICZA poświęcony był dokładności pomiarów odkształceń. S. JASMAN przedstawił pomiary odkształceń reologicznych tarcz betonowych. S. KAJFASZ, J. SZULC i M. CZERNIAK zreferowali badania pełzania w elementach z betonu sprężonego uwzględniając zgodny z rzeczywistością spadek wielkości siły sprężającej. Badania doświadczalne ugięć belek żelbetonowych pod obciążeniem długotrwałym przedstawione zostały przez B. LEWICKIEGO, H. DERENTOWICZ i J. KUBICKIEGO. Wytrzymałość i odkształcalność elementów strunobetonowych badali Z. CZERSKI i H. NIEZBORAŁA. A. MIELNIK pokazał konstrukcję czujnika akustycznego do badania zarysowania belek betonowych. M. SANDOWICZ przedstawił wyniki badań nośności desek siatkobetonowych. Wnioski z badań połączeń klejowych podał M. RYBAK, K. PYZIK przedstawił badanie maksymalnego sprężania belek kablobetonowych, a J. ZIELIŃSKI omówił badania strefy zakotwień belek sprężonych.

Wiele prac miało za temat badanie poszczególnych elementów konstrukcji lub całych ustrojów. S. KUŚ i J. ZIELIŃSKI badali nośność elementów stalobetonowych. S. STUPNICKI przedstawił wyniki badań sprężonej belki bezprzekątniowej. B. LEWICKI i A. ZARZYCKI zajęli się wytrzymałością ścian betonowych, a S. NAGRODZKI omówił zagadnienie zarysowania żelbetonowych podkładów kolejowych. Praca J. STECZKOWSKIEGO dotyczyła badania modelu wiaduktu ramownicowego oraz obiektu rzeczywistego. B. KOPYCIŃSKI, S. OLESZKIEWICZ i J. CIESIELSKI badali połączenia elementów prefabrykowanych. R. IZBICKI przedstawił konstrukcję i wyniki badań płyt stropowych sprężonych jednym ciągłym splotem. W. KUCZYŃSKI zajął się ugięciami belek żelbetonowych poddanych pierwszemu obciążeniu.

Zagadnieniu wzmocnienia konstrukcji poświęcono trzy prace: J. CIESIELSKIEGO i T. BRONIEWSKIEGO, J. RUPPERTA oraz S. OLESZKIEWICZA i K. PIWOWARSKIEGO.

W trzech referatach przedstawiono zagadnienie konstrukcji sprężonych z betonu o kruszywie spiekany. Były to prace J. MAMESA, Z. SULIMOWSKIEGO oraz T. HOPA i R. PUDLIKA.

Zagadnienia projektowe i wykonawcze budynków i mostów omówili autorzy: M. WOLF, K. CIESZYŃSKI, S. BOGDANOWICZ, J. SUWAŁSKI, J. WŁODARCZYK, T. GYENGÖ (Węgry), A. KOZŁOWSKI, K. BRAUN, G. KUNST oraz J. KEMPA.

Referaty dotyczące konstrukcji metalowych stanowiły najmniej liczną grupę 12 prac. M. ŁUBIŃSKI i A. FILIPOWICZ poruszyli podstawowe zagadnienie określania rzeczywistych naprężeń granicznych w stali i aluminium na podstawie przeprowadzonych badań. Praca S. JASTRZĘBSKIEGO i T. KRZYŚPIAKA dotyczyła zakresu zastosowań różnych gatunków stali. L. WIŚNIEWSKI zajął się wyznaczeniem właściwego kształtu belki dwuteowej, uwzględniając przy tym zagadnienie stateczności środka. S. DU CHÂTEAU (Francja) nadesłał referat o konstrukcjach przestrzennych własnego pomysłu z rur stalowych. S. PRZYŁĘCKI i S. WODZIŃSKI zajęli się również konstrukcją z rur stalowych, mianowicie badaniem modelowym wysięgnika dźwigu.

Zagadnienie związane z zastosowaniem śrub sprężających poruszono w dwóch komunikatach: Z. PANCEWICZA oraz J. SARARY i J. KASIŃSKIEGO. W. SZCZECHOWSKI zajął się radiologicznymi metodami kontroli i zastosowaniem ultradźwięków. Pozostałe cztery prace H. BUDZIŁY, J. ŚWIDY, R. DYMARSKIEGO i J. KOZŁOWSKIEGO oraz K. CZARNOWSKIEGO dotyczyły konstrukcji wież wyciągowych, pokrycia dachowego, zbiornika wieżowego i zbiorników walcowych narażonych na wahania temperatury i ciśnienia.

2.3. Prace dotyczące technologii materiałów budowlanych i korozji. Większość referatów zaliczonych do tej grupy wykracza poza ramy niniejszego przeglądu ze względu na niewielki związek z mechaniką techniczną. Poruszone zagadnienia dotyczyły w pierwszym rzędzie zjawisk chemicznych, a także akustycznych i termicznych. Trzeba tu jednakże wymienić prace traktujące o wytrzymałości i odkształcalności materiałów budowlanych. Są to referaty: H. PIERZCHAŁY o przyczepności zapraw cementowych, W. KLEDZIKA o nieniszczących metodach badania wytrzymałości betonu, W. NOWARY o stosunku wytrzymałości na rozciąganie betonu do wytrzymałości na ściskanie, M. ZACHARY i B. WOŹNIAKA o określeniu wytrzymałości betonów na rozciąganie i wreszcie komunikat K. STRASZAKA, w którym autor przedstawił wyniki badań statystycznych wytrzymałości betonu na budowach i zakładach prefabrykacyjnych.

3. Zebrania poza programem Konferencji. Istotnym elementem składowym konferencji były zebrania naukowe i spotkania o charakterze organizacyjnym, które odbywały się wieczorami równoległe z posiedzeniami Konferencji. Łączna liczba tych zebrań wyniosła 18 w ciągu 11 dni. Świadczy to z jednej strony o aktywności uczestników, którzy nie poprzestali na posiedzeniach przedpołudniowych, z drugiej dowodzi przydatności tego rodzaju konferencji w życiu technicznym kraju. Wśród tych zebrań należy przede wszystkim wymienić spotkania naukowe Związków Mostowców, na których przedstawiono i przedyskutowano szereg referatów, wydrukowanych uprzednio i dostarczonych uczestnikom spotkań. Na temat dynamiki mostów przedstawiono dwa referaty W. NOWACKIEGO i Z. WASIUTYŃSKIEGO, prace M. RYBAKA, E. OŁĘDKIEGO i W. RADOMSKIEGO oraz opublikowano zestawienie bibliograficzne niektórych prac tej dziedziny. Zagadnienia mostów wiszących poruszone były w trzech referatach. Z. WASIUTYŃSKI przedstawił obszerny przegląd nowoczesnych konstrukcji mostów wiszących na tle rozwoju historycznego, W. DZIENISZEWSKI, J. GRYZCZ oraz G. ROMASZEWSKI zajęli się ustrojami sprężonymi o kablach wyprowadzonych na zewnątrz belek. P. FUNKE nadesłał krótką notatkę o konstrukcji lin zamkniętych mostów wiszących.

P. MOENAERT (Belgia) rozwinął obszernie zagadnienie projektowania elementów z betonu sprężonego w stanie granicznym, które szkicowo przedstawił w czasie obrad konferencji. W materiałach wydrukowanych dostarczono uczestnikom spotkań jeszcze dwa opracowania: A. BRANDTA o wynikach pomiarów odkształceń wewnątrz betonowych cylindrów oraz S. OWCZARKA o rozstawieniu i kształtach słupów w podporach mostów.

Inne zebranie o ogólnym znaczeniu było poświęcone dyskusji nad dalszym rozwojem konstrukcji z betonu sprężonego w Polsce. Pięciu zaproszonych profesorów: S. KAUFMAN, W. OLSZAK, R. KOZAK, W. GRZEGORZEWSKI i T. KLUZ przedstawiło swoje poglądy na ten temat, a następnie w ożywionej dyskusji poruszono zagadnienia teorii uzbrojenia, jakości wykonawstwa, własności stali sprężonej oraz wiele innych tematów. Uczestnicy zebrania wskazali szereg niezbędnych środków, które trzeba zastosować, aby usunąć istniejące przeszkody w rozwoju konstrukcji sprężonych.

4. Uwagi ogólne. Znaczna większość referatów dotyczyła tematów wynikających bezpośrednio z praktyki projektowej lub wykonawczej; uwaga ta odnosi się do wszystkich grup wymienionych poprzednio. Przydatność takich tematów nie budzi wątpliwości; jednakże można zauważyć, że tylko niewielka liczba poruszonych zagadnień ma ogólne i podstawowe znaczenie, zwłaszcza w grupie teorii konstrukcji. W tej grupie widać wzrost zainteresowania metodami obliczania przy zastosowaniu maszyn cyfrowych.

Wśród referatów, zajmujących się konstrukcjami betonowymi i stalowymi, przeważają tematy związane ze stanami granicznymi; tendencja taka odpowiada obserwowanemu kierunkowi rozwoju tych zagadnień w świecie.

Jeśli chodzi o trzecią grupę tematów, to warto zwrócić uwagę na znaczenie badań właściwości betonów lekkich oraz rozszerzenia zakresu ich zastosowań. Także zjawisko korozji konstrukcji nabiera coraz większego znaczenia.

W stosunku do lat ubiegłych tematyka konferencji uległa dalszemu rozwinięciu i objęła szeroki zakres zagadnień związanych z budownictwem.

Wykroczenie poza teorię konstrukcji i włączenie zagadnień technologii materiałów oraz korozji wzbogaciło tematykę, jednakże wprowadziło podział zarówno obrad jak i uczestników na dwie części. Wynika to bowiem z małej liczby osób zainteresowanych czynnie w tak różnych dziedzinach. Obserwując przebieg konferencji można więc dojść do wniosku, że utrzymując tak szeroką tematykę, wskazane jest prowadzenie równoległe obrad w kilku sekcjach.

Dyskusje po wielu referatach były bardzo żywe i na ogół wносиły nowe elementy do poruszonych tematów. Wydaje się nawet, że warto przewidzieć więcej czasu, aby umożliwić wymianę zdań między zainteresowanymi, na przykład przez powtórne zabranie głosu przez dyskutantów po replice autora referatu.

*Andrzej Brandt (Warszawa)*

## KONFERENCJA NA TEMAT DOŚWIADCZALNYCH METOD BADANIA NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W KONSTRUKCJACH W PRADZE

**Uwagi ogólne.** W dniach od 5 do 8 października 1965 r. odbyła się w Pradze konferencja poświęcona metodom pomiaru naprężeń i odkształceń, zorganizowana przez Instytut Budownictwa przy Politechnice. Referaty około 120 autorów wydrukowano i rozdano uczestnikom; objęły one dwa tomy o łącznej objętości niemal 850 stron. Organizacja obrad była wzorowa: zapewniono równoczesne tłumaczenie wygłoszonych referatów w czterech językach (czeskim, rosyjskim, niemieckim i angielskim), podczas wycieczki pokazano kilka interesujących obiektów budownictwa wodnego i mostowego, a wszyscy uczestnicy otrzymali zakwaterowanie w tym samym hotelu, w którym odbywały się obrady. Poza licznymi uczestnikami krajowymi udział wzięło kilkadziesiąt osób z niemal wszystkich krajów europejskich, a także z Japonii i z USA. Polska reprezentowana była przez 7 osób i 6 referatów.

Referaty zgrupowano w trzech działach, których wygłoszenie poprzedzono referatami generalnymi.

1. Metody doświadczalnych badań naprężeń i odkształceń, ref. V. TESAŘ

2. Badania modelowe, ref. J. KOŽEŠNÍK

3. Pomiary na konstrukcjach oraz zagadnienia dynamiczne, ref. L. MEJZLÍK.

**Metody badań doświadczalnych naprężeń i odkształceń.** W tej grupie przedstawiono około 20 prac reprezentujących podstawowe kierunki badań. Elastooptyką zajęło się trzech referentów: H. ABEN (Estońska SSR) referował rozważania teoretyczne dotyczące analizy wyników otrzymywanych z pomiarów doświadczalnych, praca J. ČERNOŠKA (CSRS) obejmowała zagadnienia wynikające z badań elementów trójwymiarowych, F. VADOVIČ (CSRS) rozpatrzył możliwość uniknięcia wzrostu błędów przy analizie wyników badań. Niektóre problemy powstające przy badaniach na modelach przedstawili V. SZABÓ (CSRS) oraz E. HORÁČEK (CSRS).

W dziedzinie badań za pomocą siatek Moiré'a pracę o współdziałaniu belek z płytami zreferował A. RABINOVICI (Izrael). N. IOSIPESCU i V. DAIS (Rumunia) zajęli się płytami opartymi na słupach, a B. KOŠŤÁK (CSRS) przedstawił konstrukcję czujnika do pomiaru odkształceń.

W zakresie badań tensometrami oporowymi J. ŘEZNÍČEK (CSRS) zajął się zagadnieniem pomiaru wielkości sił. Z. ŠNIADKOWSKI (Polska) rozpatrzył czujniki wewnętrzne w betonie i innych podobnych materiałach, badając wpływ różnic własności materiału i samego czujnika na wielkość wskazań. A. BRANDT (Polska) przedstawił metodę pomiaru sześciu składowych odkształceń wewnątrz elementów betonowych oraz uzyskane wyniki.

Problemem automatyzacji pomiarów odkształceń zajęli się dwaj autorzy: J. ROSENKRANZ (CSRS) oraz J. KRATOCHVÍL. Dwie prace V. HÁJKA (CSRS) i Z. P. BAŽANTA (CSRS) dotyczyły wykorzystania analogii elektrycznych.

**Badania modelowe.** Prace wydrukowane w tej grupie liczą również 20 pozycji. Szereg prac poświęcono zagadnieniom badań elastooptycznych. J. TRÄGER (NRD) zajął się zjawiskami powstającymi przy zderzeniu dwóch płyt kołowych, R. MARK (USA) badał cienkie płyty i powłoki stosowane w budownictwie, L. SŁOWAŃSKI i B. ORŁOWSKA (Polska) przedstawili wyniki badań odnoszące się do usztywniających ścian w budynkach. Zagadnienia związane z badaniem sprężanych zbiorników ciśnieniowych zreferowali V. BRČIČ i A. PAKVOR (Jugosławia). K. KLÍČ (CSRS) rozpatrzył możliwości badania naprężeń cieplnych. W. PONIŽ i Z. DYLAĞ i Z. ORŁOŚ (Polska) przedstawili wyniki badań płyt betonowych współpracujących ze stalowymi belkami.

Badania odkształceń modeli konstrukcji były przedmiotem pracy, którą zreferowali J. BEDNÁR oraz M. MIKOLOVÁ (CSRS). V. KOLÁŘ (CSRS) zajął się pomiarem naprężeń na modelach konstrukcji dwuwymiarowych. I. UNGUREANU (Rumunia) badał modele wykonane z zaprawy cementowej, a E. NICOLAU (Rumunia) podał własności materiału powstałego z piasku i żywicy epoksydowych jako tworzywa modeli.

R. KAZIMIERCZAK i P. WILDE (Polska) przedstawili przegląd badań modelowych prowadzonych w Katedrze Teorii Konstrukcji Politechniki Gdańskiej. Badanie modelu zapory za pomocą tensometrii oporowej pokazali w swym referacie E. JUSTER, I. TOMA i D. TOMA (Rumunia). Z. ČERMÁK i F. Klapetek (CSRS) badali wielkość parcia ziemi na tunel, a A. SZITTNER (Węgry) pokazał wyniki badań modelowych mostu wiszącego w Budapeszcie. K. ULLMANN i J. HEYMANN (NRD) wskazali na możliwość zastosowania modeli wykonanych z gumy. Z. KRIVOSHIEV (Bułgaria) referował badania modelowe elementów zapory wodnej.

**Badania konstrukcji i zagadnienia dynamiczne.** W zakresie badania konstrukcji wydrukowano 24 prace. Wśród tematów dotyczących zastosowania różnych metod i przyrządów pomiarowych wymienić można następujące referaty: P. HANN (Rumunia) przedstawił możliwości zastosowania tensometrów oporowych, M. PETŘÍK i V. ŠTEINER (CSRS) podali konstrukcję czujnika mechanicznego, o zastosowaniu rozet elastooptycznych do badania naprężeń głównych mówił M. PERLA (CSRS), V. F. TRUMBACHEV i G. A. KATKOV (ZSRR) zajęli się pomiarami odkształceń konstrukcji podziemnych za pomocą powłok elastooptycznych, podobną metodę zastosował H. FESSLER (W. Brytania), R. K. DHIR i H. I. DUNELM (W. Brytania) badali zmiany naprężeń w betonie za pomocą czujników elastooptycznych.

Z. CYWIŃSKI i M. WIZMUR (Polska) przedstawili wyniki badania naprężeń w kablach sprężających w mostach. Belki skrzynekowe poddane zginaniu i skręcaniu badał B. GOSCHY (Węgry). T. JÁVOR (CSRS) przeprowadził badania mostów, budowanych metodą nawisową. Również referat wygłoszony przez J. F. BORGES i J. MARECOS (Portugalia) dotyczył obserwacji i pomiarów prowadzonych na mostach. Pomiary naprężeń w stalowych mostach kolejowych przedstawił H. OHMURA (Japonia). Z. SOBOTKA (CSRS) zreferował wyniki badań nośności płyt z betonu uzbrojonego. Dane o badaniach konstrukcji betonowych przedstawił V. FRANCIOSI i G. AUGUSTI (Włochy); referat B. BARBARITO (Włochy) dotyczył badań odbiorczych stalowego zbiornika na gaz.

Wyniki długotrwałych pomiarów odkształceń mostów z betonu sprężonego, prowadzonych różnymi metodami, zawarte były w referacie J. KRCHOVA i M. KLIMEŠA (CSRS). Podobnym zagadnieniem zajmował się G. RICKENSTORF (NRD).

Dalsze prace w tej części poświęcone były zagadnieniom dynamicznym. Badania modelowe były przedmiotem referatów B. KOUNOVSKY'EGO i L. PÚSTA, a także M. NOVÁKA i M. PETRIKA, wszyscy z CSRS. Kilku autorów zajęło się zagadnieniami nieniszczącej kontroli elementów betonowych; są to I. FĂCĂOARU (Rumunia), A. PAVLÍK (CSRS) i G. MARTINČEK (CSRS).

I. HOLAND i E. HJORTH-HANSEN (Norwegia) przedstawili wyniki pomiarów tłumienia drgań w belkach z betonu sprężonego.

**Wystawa sprzętu pomiarowego.** Równocześnie z konferencją na sali obrad zorganizowano wystawę urządzeń pomiarowych, w której wzięło udział szereg firm, głównie z Niemiec, Czechosłowacji i Anglii. Umiejętna ekspozycja tych urządzeń oraz wyjaśnienia udzielane przez przedstawicieli producentów i udostępnione wydawnictwa informacyjne pozwoliły na praktyczne zapoznanie uczestników konferencji z nowoczesnymi aparatami i metodami badawczymi. Szczególne zainteresowanie budziły zestawy urządzeń, pozwalające na automatyczne odczytywanie i zapisywanie wskazań czujników pomiarowych.

*Andrzej Brandt (Warszawa)*

### III OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA NAUKOWA DOTYCZĄCA DRGAŃ LINIOWYCH I NIELINIOWYCH, ODBYTA W POZNANIU W DNIACH 8 i 9 PAŹDZIERNIKA 1965 R.

W konferencji brało udział 70 osób ze wszystkich ośrodków naukowych Polski, zajmujących się problemami drgań. Wygłoszono na niej 37 referatów, z których część (17) dotyczyła zagadnień teoretycznych, pozostałe omawiały zastosowania teorii do zagadnień praktycznych.

Zagadnienia teoretyczne dotyczyły:

- a) analizy jakościowej, zagadnień stateczności oraz metod rozwiązywania równań różniczkowych nieliniowych,
- b) wpływu tarcia na ruch,
- c) zagadnień ze stochastycznym obciążeniem,

d) warunków oscylacyjności ruchu układu o większej ilości stopni swobody.

Zastosowania dotyczyły

a) analizy drgań w zastosowaniu do budowy maszyn, drgań wałów oraz drgań układów elektromechanicznych,

b) analizy drgań pojazdów samochodowych i szynowych,

c) wibrotechniki,

d) drgań złożonych układów prętowych.

Prawie wszystkie problemy związane były z zagadnieniami nieliniowymi.

W poprzednich konferencjach przeważały zagadnienia teoretyczne. Na ostatniej konferencji zaznaczyło się wyraźne przesunięcie w kierunku zastosowań, a zwłaszcza do budowy maszyn, co wynika z potrzeb przemysłu.

Omawiano też zagadnienia o większej liczbie stopni swobody, analizę i syntezę układów drgających w zastosowaniu do budowy maszyn oraz zagadnienie drgań przy warunkach stochastycznych.

Ze względu na krótki okres trwania konferencji wykłady odbywały się w dwóch sekcjach. Jest jednak pożądane, by wszyscy uczestnicy konferencji mieli możliwość wysłuchania wszystkich referatów. Przyszła konferencja powinna więc trwać dłużej, co zarazem powiększy możliwość tak pożytecznych kontaktów osobistych między osobami pracującymi nad podobnymi problemami.

*E. Karaśkiewicz (Poznań)*

#### KONFERENCJA NA TEMAT DUŻYCH ODKSZTAŁCEŃ I DEFECTÓW Arandjelovac (Jugosławia) 16-20.X.1965

Konferencja została zorganizowana w dniach od 16 do 20 października w miejscowości Arandjelovac przez Jugosłowiańskie Towarzystwo Mechaniki. Potrzeba zorganizowania tej konferencji wynikała z istnienia w Jugosławii i Polsce grup naukowców zajmujących się zbliżoną tematyką. Głównym celem konferencji było zaznajomienie uczestników z aktualnym stanem i kierunkami rozwoju teorii dużych odkształceń, teorii defektów i dyslokacji. W konferencji wzięło udział 29 osób, w tym 23 naukowców jugosłowiańskich, reprezentujących różne ośrodki w Belgradzie, Sarajewie, Zagrzebiu, Lublanie itp. oraz 6 pracowników Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie -- członków Oddziału Warszawskiego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

W ciągu pięciu dni obrad przedstawiono i przedyskutowano 14 referatów 13 autorów, które ogólnie można było podzielić na 3 następujące grupy: 1) defekty i dyslokacje, 2) mikrostruktury i naprężenia wewnętrzne, 3) duże odkształcenia ośrodków ciągłych.

Pierwszą grupę prac otworzył referat H. ZORSKIEGO [14], poświęcony ogólnej teorii defektów dyskretnych w polu sprężystym. Między innymi autor w oparciu o zasady wariacyjne i teorię potencjału wyprowadził równania ruchu defektów, odpowiednie oddziaływania między defektami i polem sprężystym oraz zasady zachowania pędu, krętu i energii. M. MATCZYŃSKI [3] wykorzystał powyższą teorię do szczegółowego rozważenia równań ruchu pojedynczej szczeliny przy różnym usytuowaniu obciążeń w postaci sił skupionych. R. STOJANOVIC [8] poddał pod dyskusję nowe sformułowanie geometrycznej teorii dyslokacji ciągłych w oparciu o geometrię wyłącznie riemannowską. Autor pokazał, że uzyskane przez niego podstawowe zależności są prostsze niż odpowiednie związki w geometrii nieriemannowskiej. D. ROGULA [7] zbadał wpływ akustycznej dyspersji na podstawowe własności dyslokacji. Sformułowano przy tym odpowiednią zasadę wariacyjną, na podstawie której wyprowadzono równania ruchu dyslokacji uzależnione od akustycznych cech ośrodka. Jedyną pracą doświadczalną konferencji była praca S. RANKOVICA i Ž. SPASICA [6], zajmująca tworzeniem się i rozprzestrzenieniem szczelin w próbkach aluminiowych.

Przegląd referatów drugiej grupy otwiera praca S. DJURICA [1], w której podobnie jak w teorii Schaefera kontinuum typu Cosserat, zbudowano równania dla płaskiego zagadnienia teorii zorientowanych ośrodków sprężystych. Rozważany ośrodek charakteryzował się 9 stałymi materiałowymi zamiast 4 występujących w teorii Schaefera. S. KOMLJENOVIC [2] przedyskutował ograniczenia, jakie na naprężenia (w tym również naprężenia momentowe) w ośrodkach plastycznych nakładają zasady termodynamiki. Z. WESOŁOWSKI

[10, 11], wykorzystując własne twierdzenia o rozkładzie deformacji dla elementów powierzchniowych zbudował równania dla kontinuum sprężystego przenoszące momenty powierzchniowe, które są oddziaływaniami typu kontaktowego. L. VUJOŠEVIĆ [9], posługując się metodą opracowaną przez szkołę jugosłowiańską dla teorii dyslokacji, rozważył związki fizyczne materiału sprężystego w regularnym układzie krystalograficznym. Odpowiednie redukcje i zależności między stałymi materiałowymi wyprowadzono dla wszystkich pięciu klas krystalicznych tego układu.

Do trzeciej grupy tematycznej należy zaliczyć pracę S. ZAHORSKIEGO [12, 13], w której wyprowadzono teorię zaburzeń ustalonego ruchu ośrodków nieliniowo lepko-sprężystych oraz podano jej zastosowania do badania niestateczności takich ośrodków przy odkształceniach skończonych. N. NAERLOVIĆ-VELJKOVIĆ [5], rozwiązała zagadnienie naprężeń cieplnych w wydrążonej kuli i walcu. Rozwiązania uzyskano w oparciu o teorię sprężystości drugiego rzędu przy założeniu, że zjawiska cieplne nie naruszają początkowej izotropii materiału. Z. MOSSAKOWSKA [4], wyprowadziła równania stanu dla ciał nieliniowo sprężystych z odkształceniami wstępnymi. Rozważono również zasady zachowania pędu i energii oraz równań stanu w przypadku istnienia źródeł masy.

#### SPIS REFERATÓW

1. S. DJURIĆ, *Plaskie zagadnienia w teorii zorientowanego kontinuum sprężystego*
2. S. KOMLJENOVIĆ, *Teoria plastyczności z naprężeniami momentowymi*
3. M. MATCZYŃSKI, *Ruch szczeliny w polu sprężystym*
4. Z. MOSSAKOWSKA, *Naprężenia wewnętrzne wywołane odkształceniami niespójnymi*
5. N. NAERLOVIĆ VELJKOVIĆ, *Teoria drugiego rzędu sprężystych naprężeń cieplnych w wydrążonej kuli i walcu*
6. S. RANKOVIĆ, Ž. SPASIĆ, *Tworzenie i rozprzestrzenianie się szczeliny w aluminium*
7. D. ROGULA, *Akustyczna dyspersja przestrzenna i dynamiczne własności dyslokacji*
8. R. STOJANOVIĆ, *Riemannowska teoria dyslokacji*
9. L. VUJOŠEVIĆ, *Zależności naprężenie — odkształcenie w kryształach regularnych dla odkształceń niespójnych*
10. Z. WESOŁOWSKI, *Twierdzenia o rozkładzie dla elementów liniowych i powierzchniowych w mechanice kontinuum*
11. Z. WESOŁOWSKI, *Kontinuum sprężyste z naprężeniami momentowymi*
12. S. ZAHORSKI, *Teoria zaburzonego ruchu w nieliniowych ośrodkach lepko sprężystych*
13. S. ZAHORSKI, *Zagadnienia niestateczności dla ośrodków lepko-sprężystych, poddanych skończonemu odkształceniu*
14. H. ZORSKI, *Teoria pola dla defektów*

Z. Wesolowski, S. Zahorski  
(Warszawa)

#### SYMPOZJA NAUKOWE «RILEM»

Podajemy terminarz sympozjów naukowych RILEM (Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions, Paris 15 e, 12, rue Brancioln).

Pozycje 1–3 uwzględniają sympozja zatwierdzone, natomiast pozycje 4–7 dotyczą propozycji, które prawdopodobnie zostaną zrealizowane w latach 1967–1968.

Powyżej podaliśmy adres sekretariatu RILEM.

1. Wpływ powtarzających się obciążeń na materiały i konstrukcje (Effects of repeated loads on materials and structures); Meksyk, 15–17 września 1966, organizator prof. ROSENBLEETH.

2. Pomiar wytrzymałościowych charakterystyk lekkich betonów (Measurement of the strength characteristics of light concretes); Budapeszt, marzec 1967, organizator dr TOBIAS.



3. Domieszki do betonu (Concrete admixtures); Bruksela, wrzesień 1967, organizator dr DUTRON. Sympozyja proponowane w późniejszym okresie.
4. Badanie bitumicznych spoiw w materiałach bitumicznych w budownictwie (Testing of bituminous binders in bituminous materials for construction). Propozycja prof. MŁOSCHA.
5. Zachowanie się i trwałość jakości materiałów budowlanych w klimacie o wysokiej temperaturze (Behaviour and durability quality of building materials in hot climates). Propozycja dr L'HERMITE'A.
6. Skurcz betonu, zaprawa, beton. Związki między trzema rodzajami skurczu (Shrinkage of cement, mortar, concrete. Relations between these three kinds of shrinkage). Sympozyjum połączone CEMBUREAU i RILEM, propozycja dr L'HERMITE'A.
7. Badania doświadczalne nowych osiągnięć w dziedzinie konstrukcji z betonu, betonu zbrojonego i murowych spowodowanych wprowadzeniem żywic syntetycznych (Experimental research on new developments in concrete, reinforced concrete and masonry techniques brought by synthetic resins). Propozycja dr L'HERMITE'A.

### KONFERENCJE

II Międzynarodowa konferencja na temat wstępnie sprężonych konstrukcji metalowych (II International Conference on Prestressed Metal Structures) odbędzie się w dniach 26 września — 3 października 1966 w Tále, Mýta pod Dumbieram CSRS. Organizator konferencji: Building Research Institute, Technical University in Prague, Praha 6, Dejvice, Solinowa 7.

\* \* \*

I Międzynarodowy Kongres Mechaniki Skał odbędzie się w Lizbonie (Portugalia) w dniach 25 września— 1 października 1966. Kongres pod egidą Międzynarodowego Towarzystwa Mechaniki Skał (International Society of Rock Mechanics) jest organizowany przez "Laboratorio Nacional de Engenharia Civil" Avenida do Brasil, Lisboa 5, Portugal.

### KONKURS ODDZIAŁÓW WARSZAWSKIEGO I WROCŁAWSKIEGO PTMTS

Zarządy Oddziałów Warszawskiego i Wrocławskiego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej ogłaszają konkurs na najlepszą pracę naukową z dziedziny mechaniki stosowanej w zakresie teorii konstrukcji maszynowych i budowlanych.

Konkurs jest ograniczony i mogą w nim brać udział tylko członkowie Oddziałów Warszawskiego i Wrocławskiego PTMTS.

Na konkurs należy zgłaszać prace oryginalne, nie publikowane dotąd (ewentualnie opublikowane w roku 1966) i nie zgłoszone na żaden inny konkurs.

Prace o objętości nie przekraczającej w zasadzie 20 stron maszynopisu, w 3 egzemplarzach, w formie nadającej się do druku, podpisane imieniem i nazwiskiem z podaniem adresu, należy przesyłać w terminie do dnia 30 września 1966 r. pod adresem Sekretariatu Oddziału Warszawskiego PTMTS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, pokój nr 2305, lub Oddziału Wrocławskiego PTMTS, Wrocław, Plac Grunwaldzki 13, Politechnika, Nowy Gmach Elektryczny, pokój nr 15.

Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarządy obu Oddziałów.

Przewiduje się następujące nagrody:

I sza	zł. 7.000.—
II ga	zł. 3.000.—
III cia	zł. 2.000.—

Zarządy Oddziałów zastrzegają sobie prawo nie przyznawania lub podziału nagród.

Nagrodzone prace zostaną opublikowane w *MECHANICE TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ*.

Przewodniczący  
Oddziału Wrocławskiego PTMTS  
(—) Prof. dr *Roman Mromliński*

Przewodniczący  
Oddziału Warszawskiego PTMTS  
(—) Prof. dr *Zbigniew Kączkowski*

KONKURS ZARZĄDU GŁÓWNEGO  
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Zarząd Główny PTMETS ogłasza konkurs na prace doświadczalne z dziedziny mechaniki.

Za najlepsze prace, spełniające warunki konkursu, będą przyznane trzy nagrody pieniężne w wysokości

I nagroda 8000 zł.

II nagroda 4000 zł.

III nagroda 2000 zł.

Prace należy nadsyłać do Sekretariatu PTMETS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki p. 2305 w nieprzekraczalnym terminie 31 października 1966 r. Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani złożona do druku poza Mechaniką Teoretyczną i Stosowaną. Nagrodzone prace zostaną opublikowane w Mechanice Teoretycznej i Stosowanej. Konkurs jest ograniczony, dostępny dla członków PTMETS.

---

## SPIS TREŚCI

### ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

### ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń  
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 1/1964

- S. KALIŃSKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce  
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki  
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYNIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi  
Biuletyn informacyjny PTMTS:  
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.  
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem  
Sympozja naukowe IUTAM

**SPIS TREŚCI**

**ZESZYT 1/1965**

- S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej  
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego  
Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczenia nieliniowych zagadnień przewodnictwa cieplnego  
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów  
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali  
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

**ZESZYT 2/1965**

- WITOLD WIERZBICKI — Wspomnienie pośmiertne  
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczaniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń  
Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, Pomiar sześciu składowych odkształcenia w ściskanym walcu betonowym  
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego  
Z. WASZCZYŹYŃ, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwnych podporach  
J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu  
T. AGOPSOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających  
J. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

**ZESZYT 3/1965**

- W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości  
W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem  
W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe  
P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się sztywną kulą  
S. PYTKO, O możliwościach wykorzystania metody elastooptycznej dla badań wyężenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągle mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 25% w Oddziałach Towarzystwa.*

*MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Pałac Kultury i Nauki).*

---