

7 II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

TOM 3 • ZESZYT 3



Pw^a

WARSZAWA 1965
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

SPIS TREŚCI

W. NOWACKI, Dynamiczne zagadnienia termosprężystości Динамические вопросы термоупругости Dynamical problems of thermoelasticity	3
W. SZCZEPIŃSKI, Przegląd prac dotyczących nośności granicznej rozciąganych elementów z karbem Обзор работ, касающихся несущей способности стержней с вырезом, подверженных растяжению A survey of papers dealing with the problem of notched bars pulled in tension	51
W. GUTKOWSKI, Powierzchniowe konstrukcje prętowe Поверхностные стержневые конструкции Two-dimensional grid structures	79
P. SUKIENNIK, O naprężeniach w sprężystym podłożu pod ślizgającą się sztywną kulą О касательных напряжениях в упругом основании под скользящим шаром On the tangential stresses in the elastic basis under the sliding sphere	95
S. РУТКО, O możliwościach wykorzystania metody elastoоптической dla badań wyężenia materiału i rozkładu naprężeń w zagadnieniach kontaktowych К вопросу об использовании метода фотоупругости для исследований напряженности материала и распределения напряжений в контактных задачах On the possibility of application of photo-elasticity to the analysis of stress distribution in contact problems.	101
Biuletyn informacyjny PTMTS Konferencja naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Augustowie. Przegląd referatów Międzynarodowe sympozjum I.A.S.S. w Budapeszcie Kursy naukowo-szkoleniowe organizowane przez PAN	111

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 3 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 6 5

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A

JERZY LITWINISZYN—PRZEWODNICZACY

EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · ADAM

MITZEL (WROŚLAW) · JERZY MUTERMILCH

(WARSZAWA) · WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

STANISŁAW OCHEŃDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW

OLSZAK (WARSZAWA) · MARIAN PIATEK

(GDANSK) · JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

ZBIGNIEW OLESIAK — R E D A K T O R

JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI

W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

REDAKCJA

W a r s z a w a, Świątokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 9,0. Arkuszy drukarskich 7,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 12.VIII.65 r., druk ukończono w styczniu 1966 r. Cena zł 27.—

Zam. 1206/65 E-78 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

DYNAMICZNE ZAGADNIENIA TERMOSPĘŻYSTOŚCI

WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Doświadczenie uczy, że odkształcenie ciała związane jest ze zmianą zawartości w nim ciepła. Zmienne w czasie obciążenie ciała wywołuje w nim nie tylko przemieszczenia, ale i zmienny w czasie rozkład temperatury. Odwrotnie, ogrzanie ciała powoduje w nim odkształcenie i zmianę temperatury. Ruch ciała charakteryzowany jest przez wzajemne oddziaływanie na siebie pola odkształcenia i pola temperatury. Dziedzinę, zajmującą się wzajemnym oddziaływaniem tych pól, nazywamy *termospężyścią*.

Sprężenie tych dwu pól powoduje, że w równaniach przemieszczeniowych ruchu pojawiają się człony temperaturowe, w równaniu przewodnictwa cieplnego człony deformacyjne.

Sprężenie pola deformacji i temperatury postulował już J. M. C. DUHAMEL [1], twórca teorii naprężeń cieplnych, wprowadzając do równania przewodnictwa cieplnego człon dylatacyjny. Jednak równanie to nie zostało uzasadnione na drodze termodynamicznej. Próbę uzasadnienia termodynamicznego tego równania podjęli później W. VOIGT [2] i H. JEFFREYS [3]. Jednak dopiero w 1956 r. M. A. BIOT [4] podał pełne uzasadnienie równania przewodnictwa cieplnego w oparciu o termodynamikę procesów nieodwracalnych [5]. M. A. BIOT podał również podstawowe metody rozwiązywania równań termospężyści jak też i twierdzenie wariacyjne.

Termospężyłość opisuje szeroką kategorię zjawisk, jest uogólnieniem klasycznej teorii sprężystości oraz teorii przewodnictwa cieplnego. Obecnie termospężyłość jest dziedziną w pełni ukształtowaną. Zostały sformułowane podstawowe zależności i równania różniczkowe. Opracowano szereg metod rozwiązywania równań termospężyści, uzyskano podstawowe twierdzenia energetyczne i wariacyjne. Rozwiązano też szereg zagadnień dotyczących rozprzestrzeniania się fal termospężystych.

Jak wiadomo, badania w dziedzinie termospężyści poprzedzone były rozległymi badaniami w ramach tak zwanej *teorii naprężeń cieplnych* (Theorie der Wärmespannungen, theory of thermal stresses). Pod tą nazwą rozumiemy badanie odkształceń i naprężeń, wywołanych ogrzaniem ciała, przy przyjęciu upraszczającego założenia, że na przewodnictwo cieplne nie ma wpływu odkształcenie ciała sprężystego.

W teorii tej, sięgającej początków teorii sprężystości i intensywnie rozwijanej w ostatnich latach ze względu na jej rosnące znaczenie praktyczne, posłużono się

klasycznym równaniem przewodnictwa cieplnego, nie zawierającym członu związanego z odkształceniem ciała.

Równoległe z teorią naprężeń cieplnych rozwinęła się *elastokinetyka* również przy założeniu upraszczającym, postulującym, że wymiana ciepła pomiędzy częściami ciała, odbywająca się za pośrednictwem przewodnictwa cieplnego, zachodzi tak wolno, że ruch traktować można jako adiabatyczny.

Wymienione tu dziedziny stanowią obecnie przypadki szczególne teorii ogólniejszej, termosprężystości. W ogólnych twierdzeniach i metodach termosprężystości mieszczą się jako przypadki szczególne twierdzenia i metody teorii przewodnictwa cieplnego i klasycznej teorii sprężystości.

Zauważyć należy, że rozwiązania uzyskane w ramach termosprężystości niewiele odbiegają od rozwiązań klasycznej teorii sprężystości czy też teorii przewodnictwa cieplnego. Sprężenie pola odkształcenia i temperatury jest słabe. Jednakże różnice jakościowe są zasadnicze. Widać to choćby na przykładach fal sprężystych, które w ramach termosprężystości są tłumione i ulegają dyspersji, podczas gdy w ramach elastokinetyki występują jedynie fale nietłumione. Podstawowego znaczenia nabiera termosprężystość w tych przypadkach, w których głównym celem jest badanie sprężystej dyssypacji. Znaczenie termosprężystości polega głównie na walorach poznawczych i uogólniających tej teorii.

W niniejszym referacie przeglądowym punkt ciężkości przeniesiono na przedstawienie podstawy termodynamicznych teorii, na równania różniczkowe termosprężystości i ważniejsze metody ich rozwiązania oraz na ogólne twierdzenia energetyczne i wariacyjne.

Mniej uwagi poświęcono rozwiązaniom konkretnych problemów odsyłając czytelnika do źródłowej literatury, umieszczonej na końcu pracy. Przy podawaniu związków funkcyjnych i równań stosować będziemy zapis tensorowy indeksowy w kartezjańskim układzie współrzędnych.

2. Podstawowe założenia i związki liniowej termosprężystości

W rozważaniach zawartych w niniejszym punkcie zajmować się będziemy jednorodnymi anizotropowymi ciałami sprężystymi. Dla tych ciał wyprowadzimy ogólne związki i równania rozszerzone przewodnictwa cieplnego, a dopiero później przejdziemy do ciała jednorodnego izotropowego, którym zajmować będziemy się w następnych punktach pracy.

Niech ciało w stanie nieodkształconym i beznaprężeniowym (przy niewystępowaniu sił zewnętrznych) znajduje się w temperaturze T_0 . Ten stan wyjściowy nazwiemy stanem naturalnym ciała, przyjmując, że entropia dla tego stanu jest równa zeru. Wskutek działania obciążeń zewnętrznych, a więc sił masowych i powierzchniowych, dalej wskutek działania źródeł ciepła oraz ogrzania (względnie oziębienia) powierzchni ciała, ośrodek dozna odkształcenia i zmiany temperatury. W ciele powstaną przemieszczenia \mathbf{u} , a zmiana temperatury wyniesie $\theta = T - T_0$, gdzie T jest temperaturą bezwzględną punktu \mathbf{x} ciała. Zmianie temperatury towarzyszy powstanie odkształceń ε_{ij} i naprężeń σ_{ij} . Wymienione tu wielkości \mathbf{u} , θ , ε_{ij} , σ_{ij} są funkcjami miejsca \mathbf{x} i czasu t .

Zakładamy, że zmiana temperatury $\theta = T - T_0$ towarzysząca odkształceniu jest mała oraz że wzrost temperatury θ nie powoduje istotnych zmian we współczynnikach materiałowych tak sprężystych jak i termicznych. Współczynniki te będziemy traktować jako niezależne od T .

Do uczynionego założenia $|\theta/T_0| \ll 1$ dodajmy następne, dotyczące małych odkształceń. Zakładamy mianowicie, że kwadraty i iloczyny składowych odkształceń można pominąć w stosunku do odkształceń ε_{ij} . W ten sposób dalsze rozważania ograniczamy do termosprężystości geometrycznie liniowej. Zależność między odkształceniami i przemieszczeniami ogranicza się do związku liniowego

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Odształcenia, jak wiadomo, nie mogą być funkcjami dowolnymi, spełniać muszą sześć związków, tak zwanych związków geometrycznej nierozdzielności,

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Podstawowym zadaniem staje się uzyskanie równań stanu, wiążących składowe tensora naprężenia σ_{ij} ze składowymi tensora odkształcenia ε_{ij} i temperatury θ .

Zauważmy, że stan mechaniczny i termiczny ośrodka jest w danej chwili w sposób zupełny opisany przez rozkład odkształceń ε_{ij} i temperatury θ . Stąd wnioskujemy, że przy izotermicznej zmianie stanu ($T = T_0$) mamy do czynienia z procesem sprężystym i termodynamicznie odwracalnym. W przemianach jednak, w których występują zmiany temperatury, mamy do czynienia z dwoma zalegającymi się procesami, odwracalnym procesem sprężystym i nieodwracalnym procesem termodynamicznym. Ten ostatni wywołany jest przez samorzutny, a więc nieodwracalny proces przeniesienia ciepła za pomocą przewodnictwa cieplnego.

Zaburzeń termosprężystych nie da się tu opisać za pomocą klasycznej termodynamiki, korzystać trzeba ze związków termodynamiki procesów nieodwracalnych [5, 6].

Dla uzyskania równań stanu należy rozpatrzyć energię układu. Wyjdziemy ze związku różniczkowego wywodzącego się z pierwszej zasady termodynamiki

$$(2.3) \quad du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + dQ.$$

Związek ten wykazuje, że mała zmiana du energii wewnętrznej równa się sumie pracy odkształcenia oraz przyrostu ilości ciepła, wprowadzonego do rozpatrywanej nieskończenie małej objętości ciała. Zmiana ilości ciepła równa się Tds , gdzie s jest entropią, tak że równanie (2.3) przyjmuje postać

$$(2.3') \quad du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + Tds.$$

Dodać należy, że przyrost energii wewnętrznej u jest różniczką zupełną. Zmiennymi niezależnymi w związku (2.3') są odkształcenia ε_{ij} i entropia s , tak że $u \equiv u(\varepsilon_{ij}, s)$.

Zamiast funkcji u wygodniej będzie wprowadzić energię swobodną $f = u - sT$, funkcję zmiennych ε_{ij} i T :

$$(2.4) \quad df = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - s dT.$$

Również df jest różniczką zupełną.

Związki (2.3') i (2.4) zezwalają na wyznaczenie naprężeń σ_{ij} jako funkcji zmiennych niezależnych ε_{ij} i s względnie ε_{ij} i T . Zważywszy, że

$$(2.5) \quad du = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_s d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_\varepsilon ds,$$

$$(2.6) \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\varepsilon dT,$$

otrzymamy z porównania równań (2.3') i (2.5) oraz (2.4) i (2.6) następujące zależności:

$$(2.7) \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_s, \quad T = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_\varepsilon, \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T, \quad s = - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_\varepsilon.$$

W dalszych rozważaniach wykorzystamy trzecie z równań (2.7), dążąc do przedstawienia naprężeń σ_{ij} jako funkcji odkształceń ε_{ij} i T .

Rozwińmy funkcję $f(\varepsilon_{ij}, T)$ w szereg nieskończony w otoczeniu stanu naturalnego $f(0, T_0)$:

$$(2.8) \quad f(\varepsilon_{ij}, T) = f(0, T_0) + \frac{\partial f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial f(0, T_0)}{\partial T} (T - T_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial T^2} (T - T_0)^2 \right] + \dots$$

Z rozwinięcia $f(\varepsilon_{ij}, T)$ zatrzymamy człony liniowe i kwadratowe ograniczając się jedynie do liniowych związków między naprężeniami σ_{ij} , odkształceniami ε_{ij} i zmianą temperatury θ .

Zważywszy, że dla $\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0$ mamy do czynienia ze stanem naturalnym, przyjąć można, że $f(0, T_0) = 0$. Do zera przyrównamy również człon $\partial f(0, T_0)/\partial T$. Z porównania bowiem równań (2.4) i (2.6) wynika, że $(\partial f/\partial T)_\varepsilon = -s$, a zatem dla stanu naturalnego jest

$$\frac{\partial f(0, T_0)}{\partial T} = -s(0, T_0) = 0.$$

Wykorzystajmy teraz trzeci ze związków (2.7)

$$(2.9) \quad \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, T) = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \frac{\partial f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (T - T_0).$$

Otrzymaliśmy zatem związek liniowy dla małych odkształceń, związek zgodny z poczynionym założeniem $|\theta/T_0| \ll 1$. W równaniu (2.9) należy przyjąć $\partial f(0, T_0)/\partial \varepsilon_{ij} = 0$, gdyż dla stanu naturalnego $\varepsilon_{ij} = 0, T = T_0$ powinno być $\sigma_{ij} = 0$.

Wprowadzając oznaczenie

$$\frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = c_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\beta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 f(0, T_0)}{\partial T^2} = n,$$

przedstawimy związki (2.8) i (2.9) w postaci

$$(2.10) \quad f(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \frac{n}{2} \theta,$$

$$(2.11) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ijkl} + c_{klij}) \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$(2.12) \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_\varepsilon = -\beta_{ij}.$$

W związkach (2.11) rozpoznajemy prawo Hooke'a uogólnione na zagadnienia termosprężyste. Związki (2.11) noszą nazwę zależności Duhamela-Neumanna dla ciała anizotropowego. Stałe c_{ijkl} , β_{ij} , odnoszące się do stanu izotermicznego, pełnią rolę stałych materiałowych [7]. Wielkości c_{ijkl} są składowymi tensora sztywności sprężystej.

W teorii sprężystości ciała anizotropowego udowadnia się następujące własności symetrii tensora:

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad c_{ijkl} = c_{klij}.$$

Związki te prowadzą do redukcji liczby stałych z 81 do 21 niezależnych od siebie stałych dla ciała o ogólnej anizotropii.

Rozwiążmy układ równań (2.11) względem odkształceń

$$(2.14) \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta.$$

Wielkości s_{ijkl} nazywamy współczynnikami podatności sprężystej. Również i dla tych wielkości obowiązują związki symetrii:

$$s_{ijkl} = s_{jikl}, \quad s_{ijkl} = s_{ijlk}, \quad s_{ijkl} = s_{klij}.$$

Rozpatrzmy teraz element objętościowy ciała anizotropowego wolny na swej powierzchni od naprężeń. Wtenczas zgodnie z (2.14) otrzymamy dla tego elementu

$$(2.15) \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \alpha_{ij} \theta.$$

Związek (2.15) opisuje znane zjawisko fizyczne, proporcjonalność odkształceń elementu do wzrostu temperatury θ . Wielkości α_{ij} są współczynnikami liniowej rozszerzalności cieplnej. Wielkość α_{ij} jest tensorem symetrycznym, co wynika z symetrii tensora ε_{ij} . Dodać należy, że współczynnik cieplnej rozszerzalności objętościowej α_{jj} jest niezmiennikiem.

Ze związków (2.11) i (2.14) otrzymamy następujące zależności:

$$(2.16) \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_s = -\beta_{ij} = -\alpha_{kl} c_{ijkl}, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T} \right)_\sigma = \alpha_{ij}.$$

W dalszych rozważaniach, odnoszących się do wyprowadzenia rozszerzonego równania przewodnictwa cieplnego, konieczne będzie przedstawienie energii we-

wewnętrznej oraz entropii jako funkcji odkształcenia i temperatury. Punktem wyjścia są różniczki zupełne

$$(2.17) \quad du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + T ds,$$

$$(2.18) \quad ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\varepsilon dT.$$

Wstawiając (2.18) do (2.17) otrzymamy

$$(2.19) \quad du = \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T + \sigma_{ij} \right] d\varepsilon_{ij} + T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\varepsilon dT.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby wielkość du była różniczką zupełną, jest zależność

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T + \sigma_{ij} \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left[T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\varepsilon \right].$$

Z warunku tego wynika związek

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_\varepsilon = 0$$

albo, zważywszy na drugi wzór grupy (2.16),

$$(2.20) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \beta_{ij}.$$

Z drugiej strony wykorzystamy związek termodynamiczny

$$(2.21) \quad T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\varepsilon = c_\varepsilon,$$

gdzie c_ε jest ciepłem właściwym przy stałym odkształceniu, odniesionym do jednostki objętości. Wstawiając (2.20) i (2.21) do związków (2.18) i (2.19) otrzymamy

$$(2.22) \quad ds = \beta_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{c_\varepsilon}{T} dT,$$

$$(2.23) \quad du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + T \beta_{ij} d\varepsilon_{ij} + c_\varepsilon dT.$$

Wstawiając do (2.23) związki (2.11) i całkując wyrażenie (2.20) i (2.23) przy założeniu, że dla stanu naturalnego ($T = T_0$, $\varepsilon_{ij} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$) jest $s = 0$, $u = 0$, otrzymamy

$$(2.24) \quad s = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \ln \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right),$$

$$(2.25) \quad u = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \theta.$$

W wyrażeniu na entropię pierwszy człon po prawej stronie pochodzi od sprzężenia pola odkształcenia z polem temperatury, drugi człon wyraża entropię wywołaną przepływem ciepła. W wyrażeniu tym brak jest członu czysto sprężystego.

Wynika to stąd, że proces odkształcenia w warunkach izotermicznych jest odwracalny i nie wywołuje wzrostu entropii. W wyrażeniu (2.25) na energię wewnętrzną występują trzy człony, pierwszy z nich ma charakter czysto sprężysty, przedstawia pracę odkształcenia, ostatni zawartość ciepła w jednostce objętości, środkowy człon pochodzi od wzajemnego oddziaływania pola odkształcenia i pola temperatury. Dla szczególnego przypadku procesu izotermicznego jest $u = \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}/2 + T_0 \beta_{ij} \varepsilon_{ij}$.

Wróćmy do wyrażenia (2.24). Ze względu na poczynione założenie $|\theta/T_0| \ll 1$ funkcję $\ln(1 + \theta/T_0)$ można rozwinąć w szereg nieskończony i uwzględnić tylko jeden człon rozwinięcia. Otrzymamy w ten sposób

$$(2.26) \quad s = \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{c_e}{T_0} \theta.$$

Dla energii wewnętrznej $f = u - sT$, otrzymamy

$$(2.27) \quad f \approx \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{c_e}{2T_0} \theta^2.$$

W ten sposób została określona wielkość $n = -c_e/T_0$, występująca w wyrażeniu (2.10).

Pozostaje powiązać entropię z przewodnictwem cieplnym. W ciele stałym przenoszenie się ciepła realizuje się przez przewodnictwo cieplne, rozumiane jako przenoszenie się ciepła z miejsc o wyższej temperaturze do miejsc o temperaturze niższej. Jest to proces samorzutny i nieodwracalny, powiązany z wytwarzaniem entropii. Równanie przewodnictwa cieplnego wyprowadza się z zasady zachowania energii, wyrażonego w postaci przepływu entropii. Prawo to, stanowiące lokalne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki, ma postać

$$(2.28) \quad T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q}, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} q_{i,i}.$$

Przez \mathbf{q} oznaczmy wektor przepływu strumienia energii w naszym przypadku równy przepływowi ciepła.

Rozpatrzmy ciało obejmujące obszar V i ograniczony powierzchnią A . Wtedy całka

$$(2.29) \quad \frac{dS}{dt} = \int_V \frac{ds}{dt} dV = - \int_V \frac{q_{i,i}}{T} dV$$

oznacza przyrost entropii w jednostce czasu w objętości V , wywołany przepływem ciepła.

Związek (2.29) przedstawić można również w postaci

$$(2.29') \quad \frac{dS}{dt} = - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA - \int_V \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dV.$$

Przyrost entropii w czasie składa się tu z dwu zasadniczych części, z całki powierzchniowej wyrażającej wzrost (lub ubytek) entropii, wywołany wymianą ciepła z otoczeniem, i z całki związanej z tworzeniem entropii w obszarze V .

Wróćmy do związku (2.28), który przedstawić można w postaci

$$(2.30) \quad \frac{ds}{dt} = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}.$$

Wyrażenie to przedstawia przyrost entropii w czasie w sposób lokalny.

Z porównania (2.29') i (2.30) widoczne się staje, że pierwszy człon związku (2.30) odnosi się do wymiany entropii z otoczeniem, drugi człon do wytworzenia entropii w elementarnej objętości ciała. Związek (2.30) przedstawić można jako

$$(2.30') \quad \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \sigma,$$

gdzie $\sigma = -q_i T_{,i} / T^2$ jest źródłem entropii. Oznaczmy przez ds_e/dt wymianę entropii z otoczeniem, przez ds_i/dt szybkość tworzenia entropii. Zatem [5]

$$(2.31) \quad \frac{ds_e}{dt} = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = - \frac{q_i T_{,i}}{T^2} = \sigma.$$

Lokalne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki procesów nieodwracalnych żąda, żeby w każdym elemencie ciała

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_e}{dt} + \frac{ds_i}{dt} > 0, \quad \frac{ds_i}{dt} = \sigma > 0.$$

Źródło entropii σ jest w procesie nieodwracalnym zawsze i wszędzie większe od zera, w procesie odwracalnym jest równe zero. Z tego twierdzenia będziemy korzystać w dalszych rozważaniach.

Źródło entropii związane jest z przyczynami procesów nieodwracalnych, z tak zwanymi wielkościami intensywnymi, *bodźcami termodynamicznymi* F_i za pomocą następujących związków:

$$(2.32) \quad \sigma = F_i q_i.$$

Źródło entropii jest równe sumie iloczynów bodźców termodynamicznych i sprzężonych z nimi składowych strumieni przepływu ciepła. Z porównania związków (2.31) i (2.32) widoczne jest, że

$$(2.33) \quad F_i = - \frac{T_{,i}}{T^2}.$$

Zatem bodźcem termodynamicznym dla przewodnictwa cieplnego jest gradient temperatury.

Z drugiej strony między składowymi wektora przepływu ciepła \mathbf{q} , a bodźcami termodynamicznymi istnieje związek funkcyjny

$$(2.34) \quad q_i = q_i(F_1, F_2, F_3).$$

Dla przepływów laminarnych, które tu będziemy rozważać, przyjąć można, że związek (2.34) jest liniowy, zatem że

$$(2.35) \quad q_i = L_{ij} F_j.$$

Są to równania fenomenologiczne przepływu energii. Występujące w nich wielkości L_{ij} są stałymi, spełniającymi związek Onsagera

$$(2.36) \quad L_{ij} = L_{ji}.$$

Wstawiając (2.33) do (2.35) otrzymamy

$$(2.37) \quad q_i = -\frac{L_{ij}T_{,j}}{T^2}.$$

Równanie to jest zgodne z prawem Fouriera dla przewodnictwa cieplnego w ciele anizotropowym. Dla źródła entropii otrzymamy

$$(2.38) \quad \sigma = L_{ij} \frac{T_{,i}T_{,j}}{T^3} > 0.$$

Ponieważ zawsze musi być $\sigma > 0$, zatem wielkości L_{ij} muszą być dodatnie. Wprowadzając wielkości $\lambda_{ij} = L_{ij}/T^2 > 0$ (współczynniki przewodnictwa cieplnego) otrzymamy następujące prawo przepływu ciepła w ośrodku anizotropowym:

$$(2.39) \quad q_i = -\lambda_{ij}T_{,j}.$$

Wiążąc związki (2.39) i (2.28) oraz wykonując różniczkowanie względem czasu na związku (2.26) otrzymamy układ równań

$$(2.40) \quad T \frac{ds}{dt} = \lambda_{ij}T_{,ij},$$

$$(2.41) \quad T \frac{ds}{dt} = T\beta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{c_e}{T_0} T \frac{d\theta}{dt}.$$

Z porównania tych równań wynika już równanie przewodnictwa cieplnego

$$(2.42) \quad \lambda_{ij}T_{,ij} = T\beta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{c_e}{T_0} T \frac{d\theta}{dt}, \quad \theta = T - T_0.$$

Zauważmy, że jest to równanie nieliniowe ze względu na prawą stronę równania (2.42). Równanie to zlinearyzujemy przez przyjęcie $T = T_0$ po prawej stronie równania. Ostatecznie otrzymamy

$$(2.42') \quad \lambda_{ij}\theta_{,ij} - c_e\dot{\theta} - T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = 0.$$

W tym rozszerzonym równaniu przewodnictwa cieplnego występuje człon $T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$, charakteryzujący sprzężenie pola odkształcenia z polem temperatury. Kropka nad funkcją oznacza pochodną tej funkcji względem czasu. Jeśli w ciele działają źródła ciepła, to w związku (2.40) należy dodać wielkość W , określającą ilość ciepła wytworzoną w jednostce objętości i czasu

$$T \frac{ds}{dt} = \lambda_{ij}T_{,ij} + W.$$

Równanie (2.42') w przypadku występowania w ciele źródeł ciepła rozszerzy się do postaci

$$(2.42'') \quad \lambda_{ij}\theta_{,ij} - c_e\dot{\theta} - T_0\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = -W.$$

Z wyprowadzonych tu związków Duhamela-Neumanna dla ciała anizotropowego łatwo przejdziemy do ciała izotropowego stosując następujące związki:

$$(2.43) \quad \begin{aligned} c_{ijkl} &= \mu[\delta_{ij}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}, \\ s_{ijkl} &= \mu'[\delta_{lk}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + \lambda'\delta_{ij}\delta_{kl}, \\ \beta_{ij} &= \gamma\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \delta_{ij}\alpha_t. \end{aligned}$$

Tutaj μ , λ są stałymi Lamégo dla stanu izotermicznego, a

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t, \quad \mu' = \frac{1}{4\mu}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(\lambda + 3\mu)}.$$

Wielkość α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej. W ten sposób związki (2.11) i (2.14) przechodzą w związki Duhamela-Neumanna dla ciała izotropowego

$$(2.44) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\theta)\delta_{ij},$$

$$(2.45) \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_t\theta\delta_{ij} + 2\mu'\sigma_{ij} + \lambda'\delta_{ij}\sigma_{kk}.$$

Dla ciała izotropowego jest $\lambda_{ij} = \lambda_0\delta_{ij}$. Zatem równanie przewodnictwa cieplnego (2.42'') przyjmie postać [4]:

$$\lambda_0\theta_{,jj} - c_e\dot{\theta} - T_0\gamma\dot{\varepsilon}_{kk} = -W,$$

albo

$$(2.46) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\varkappa}\dot{\theta} - \eta\dot{\varepsilon}_{kk} = -\frac{Q}{\varkappa},$$

gdzie

$$\varkappa = \frac{\lambda_0}{c_e}, \quad \eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}, \quad Q = \frac{W}{\lambda_0}.$$

Podajmy jeszcze wyrażenia na u , f , s dla ciała izotropowego. Otrzymamy tu

$$(2.47) \quad u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}e\gamma(\theta + 2T_0) + c_e\theta,$$

$$f = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}e^2 - \gamma e\theta - \frac{c_e}{2T_0}\theta^2,$$

$$s = \gamma e + c_e\frac{\theta}{T_0}, \quad e = \varepsilon_{kk}.$$

Uzyskane w tym punkcie równanie stanu i równania przewodnictwa cieplnego należy powiązać z równaniami ruchu ciała stałego odkształcalnego. Otrzymamy w ten sposób komplet równań termosprężystości.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że sprzężenie pola temperatury i odkształcenia znika, gdy siły zewnętrzne czy też ogrzanie ciała jest stacjonarne. W tym przypadku w równaniu przewodnictwa cieplnego znikną pochodne czasowe, równanie (2.46) przechodzi w równanie Poissona.

3. Równania różniczkowe termosprężystości i metody ich rozwiązywania

Na komplet równań różniczkowych termosprężystości składają się równania ruchu i równanie przewodnictwa cieplnego. Równania ruchu

$$(3.1) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0$$

przekształcić możemy przez wykorzystanie równań stanu

$$(3.2) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in V + \Sigma, \quad t > 0$$

i związków między przemieszczeniami i odkształceniami

$$(3.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \mathbf{x} \in V + \Sigma, \quad t > 0$$

do układu trzech równań zawierających jako niewiadome funkcje przemieszczenia u_i i temperaturę θ :

$$(3.4) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \gamma \theta_{,i}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0.$$

Powyższe równania oraz równanie przewodnictwa cieplnego

$$(3.5) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{k,k} = -\frac{Q}{\kappa}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0$$

są ze sobą sprzężone. Siły masowe, źródła ciepła, ogrzanie i przepływ ciepła przez powierzchnię Σ , ograniczającą obszar V , jak też i warunki początkowe są przyczynami powstania w ciele zarówno przemieszczeń, jak i towarzyszącej im temperatury. Warunki brzegowe typu mechanicznego dane są albo w postaci danych przemieszczeń u_i , albo obciążeń $p_i = \sigma_{ij} n_j$ na powierzchni Σ . Warunki termiczne można w sposób ogólny zapisać w postaci

$$(3.6) \quad \alpha \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta \theta = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad t > 0, \quad \alpha, \beta \text{ — stałe,}$$

określającej przepływ ciepła przez powierzchnię Σ . Jeśli $\beta = \infty$, to mamy do czynienia z zerową na brzegu temperaturą θ , jeśli $\alpha = \infty$, to mamy przypadek powierzchni Σ termicznie izolowanej. Warunki początkowe sygnalizują, że w chwili początkowej, na przykład dla $t = 0$, przemieszczenie u_i , prędkość tych przemieszczeń i temperatura są funkcjami znanymi

$$(3.7) \quad u_i(\mathbf{x}, t)_{t=0} = f_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t)_{t=0} = g_i(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}, t)_{t=0} = h(\mathbf{x}).$$

Układ równań (3.4) i (3.5) jest nader złożony i naturalnym staje się dążenie sprowadzenia tego układu do równań prostszych, równań falowych. Istotne uproszczenie równań uzyskuje się przez rozłożenia wektora przemieszczenia i wektora sił masowych na część potencjalną i część solenoidalną. Wstawiając zatem do równań (3.4) i (3.5)

$$(3.8) \quad u_i = \Phi_{,i} + \varepsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad X_i = \varrho(\vartheta_{,i} + \varepsilon_{ijk} \chi_{k,j}),$$

gdzie funkcje Φ i ϑ są funkcjami skalarnymi ψ_i i χ_i funkcjami wektorowymi, doprowadza się równania termosprężystości do następującego układu równań [8]:

$$(3.9) \quad \square_1^2 \Phi - m\theta = -\frac{1}{c_1^2} \vartheta,$$

$$(3.10) \quad \square_2^2 \psi_i = -\frac{1}{c_2^2} \chi_i,$$

$$(3.11) \quad D\theta - \eta \nabla^2 \Phi = -\frac{Q}{\varkappa}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad m = \frac{\gamma}{\rho c_1^2}.$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$\square_\alpha^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_\alpha^2} \partial_t^2, \quad D = \nabla^2 - \frac{1}{\varkappa} \partial_t, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Równania (3.9) i (3.11) są ze sobą sprzężone w sposób bezpośredni. Eliminacja funkcji θ prowadzi do równania fali podłużnej

$$(3.12) \quad (\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \Phi = -\frac{mQ}{\varkappa} - \frac{1}{c_1^2} D\vartheta.$$

Równanie (3.10) opisuje falę poprzeczną. Zauważmy, że funkcje Φ i ψ_i są ze sobą związane poprzez warunki brzegowe, które w każdym przypadku wyrażone będą przez przemieszczenia u_i i pochodne tych funkcji oraz przez temperaturę θ .

Eliminując z równań (3.9) i (3.11) funkcję Φ otrzymamy równanie

$$(3.13) \quad (\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \theta = -\frac{m}{\varkappa} \square_1^2 Q - \frac{1}{c_1^2} \eta \partial_t \nabla^2 \vartheta.$$

Spostrzegamy, że równania (3.12) i (3.13) mają tę samą postać. Struktura tych wzorów, o czym będzie jeszcze mowa później, wskazuje, że mamy do czynienia z falą tłumioną i ulegającą dyspersji. W nieograniczonej przestrzeni termosprężystej fale podłużne i poprzeczne rozprzestrzeniają się niezależnie od siebie. Załóżmy, że źródłem ruchu są źródła ciepła Q i siły masowe $X_i = \rho \vartheta_{,i}$. Przy założeniu, że $\chi_i = 0$ oraz że warunki początkowe związane z równaniem (3.10) są równe zeru, otrzymamy $\psi_i \equiv 0$ w całej przestrzeni.

W nieograniczonej przestrzeni powstaną jedynie fale podłużne, dylatacyjne. Zważywszy na (3.2) i (3.8) mamy

$$u_i = \Phi_{,i}, \quad \varepsilon_{ij} = \Phi_{,ij}, \quad \varepsilon_{kk} = \nabla^2 \Phi,$$

oraz

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij} \Phi_{,kk}) + \rho \delta_{ij} (\ddot{\Phi} - \vartheta).$$

Jeśli w przestrzeni nieograniczonej działać będą siły masowe $X_i = \rho \varepsilon_{ijk} \chi_{k,j}$, a $Q = 0$, $\vartheta = 0$ oraz $\Phi(\mathbf{x}, 0) = 0$, $\dot{\Phi}(\mathbf{x}, 0) = 0$, to różnymi od zera będą jedynie funkcje ψ_i , natomiast $\Phi \equiv 0$, $\theta \equiv 0$ w całym obszarze. Propagować będą się jedynie

fale poprzeczne z prędkością $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$. Falom tym nie towarzyszy wytwarzanie ciepła. Zauważmy, że dla fal poprzecznych jest

$$u_i = \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}, \quad u_{k,k} = 0, \quad \theta = 0, \quad \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

W ciele ograniczonym wystąpią w zasadzie jednocześnie oba rodzaje fal. Rozwiązanie równań (3.10) i (3.12) złożymy z dwu części, z całek szczególnych tych równań Φ^o , ψ^o oraz z całek ogólnych równań jednorodnych

$$(\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \Phi' = 0, \quad \square_2^2 \psi' = 0,$$

przy czym funkcje Φ' i ψ'^o należy dobrać w ten sposób, aby spełnione były wszelkie warunki brzegowe.

Dalszą metodą, stosowaną przy rozwiązywaniu równań różniczkowych termospłężystości jest metoda rozwikłania równań, polegająca na doprowadzeniu układu równań (3.4) i (3.5) do układu czterech równań niesprzężonych. W każdym równaniu występuje jedna tylko nieznaną funkcja. Metoda ta chyba po raz pierwszy była stosowana przez HILBERTA [9] w odniesieniu do równań różniczkowych optyki. Pewną jej odmianę w postaci operatorowej, obmyśloną przez G. MOISILA [10] zastosowała do równań quasi-statycznych termospłężystości V. IONESCU-CAZIMIR [12]. Na innej drodze rozwikłanie równań dynamicznych termospłężystości uzyskał S. KALISKI [11]. Wynik jego został powtórzony jeszcze na innej drodze przez J. S. PODSTRIGACZA [13] oraz D. RÜDIGERA [14].

Nie wchodząc w szczegóły tej metody podamy jedynie wynik końcowy. Wprowadzamy jedną funkcję wektorową φ_i i skalarną ψ i za ich pomocą wyrażamy przemieszczenie i temperaturę w sposób następujący:

$$(3.14) \quad u_i = (\Omega \delta_{ij} - I' \partial_i \partial_j) \varphi_j + \gamma_0 \partial_i \psi,$$

$$(3.15) \quad \theta = \eta \partial_i \partial_j \square_2^2 \varphi_j + (1+a) \square_1^2 \psi,$$

gdzie

$$\Omega = (1+a) \square_1^2 D - \gamma_0 \eta \partial_t \nabla^2, \quad I' = aD - \gamma_0 \eta \partial_t, \quad a = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Wstawiając u_i i θ do równań (3.4) i (3.5) otrzymamy cztery rozwikłane już równania dla funkcji Φ i ψ :

$$(3.16) \quad \square_2^2 (\square_1^2 D - \eta m \partial_t \nabla^2) \varphi_i + \frac{X_i}{\rho c_1^2} = 0,$$

$$(3.17) \quad (\square_1^2 D - m \eta \partial_t \nabla^2) \psi + \frac{Q\mu}{\kappa c_1^2 \rho} = 0.$$

Do równań tych należy jeszcze dodać warunki brzegowe i początkowe. W warunkach brzegowych występują oczywiście funkcje φ_i i ψ . Prostota równań różniczkowych (3.16) i (3.17) jest jednak okupiona złożoną postacią warunków brzegowych. Dlatego też równania (3.16) i (3.17) znajdą zastosowanie przede wszystkim w zagadnieniach ruchu w przestrzeni nieograniczonej, gdzie warunki w sensie ścisłym

odpadają, zastąpione przez żądanie zerowych wartości przemieszczeń i temperatury w nieskończoności. Ten postulat będzie spełniony, jeśli rozmieszczenie sił masowych i źródeł ciepła ograniczy się do obszaru skończonego.

Interesującą drogę rozwiązania równań różniczkowych termosprężystości podał H. ZORSKI [15]. Droga ta zmierza do przekształcenia układu równań różniczkowych (3.4) i (3.5) do układu trzech równań różniczkowych dla przemieszczeń u_i . Przedstawimy ją pokrótce w odniesieniu do przestrzeni nieograniczonej przy założeniu jednorodnych warunków początkowych. Napiszmy równanie przewodnictwa w takiej postaci, aby człon zawierający prędkość dylatacji znalazł się po prawej stronie równania

$$(3.18) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} = \eta \dot{u}_{j,j}.$$

Traktując funkcję $\eta \dot{u}_{j,j}$ jako źródła ciepła, można podać rozwiązanie równania (3.18) przy użyciu funkcji Greena dla klasycznego równania przewodnictwa cieplnego

$$(3.19) \quad G_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{G} = -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) \delta(t), \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\exp\left(-\frac{\varrho^2}{4\kappa t}\right)}{8\pi^{3/2} \kappa^{3/2} t^{3/2}}.$$

Wstawiając rozwiązanie równania (3.18)

$$\theta(\mathbf{x}, t) = -\eta \kappa \int_0^t d\tau \int_V G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}), \quad \varrho^2 = (\xi_i - x_i)(\xi_i - x_i),$$

do równań przemieszczeniowych (3.4) uzyskamy następujące równanie różniczkowo-całkowe:

$$(3.20) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \varrho \ddot{\mathbf{u}} = \\ = -\eta \kappa \gamma \operatorname{grad} \int_0^t d\tau \int_V G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}).$$

Jeśli dokonać rozłożenia wektora przemieszczenia według wzoru (3.8), to równanie (3.20) rozpada się na układ równań

$$(3.21) \quad \square_1^2 \Phi + \frac{\gamma \eta}{c_1^2 \varrho} \int_0^t d\tau \int_V G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \Phi(\boldsymbol{\xi}, \tau) dV(\boldsymbol{\xi}) = 0,$$

$$(3.22) \quad \square_2^2 \Psi = 0.$$

Równanie różniczkowo-całkowe (3.21) jest równoważne równaniom (3.9) i (3.11).

W pewnych przypadkach, zwłaszcza gdy warunki brzegowe podane są w naprężeniach, warto korzystać z równań analogicznych do równań Beltramiego-Michella. Równania te dla zagadnień niesprężonych zostały wyprowadzone przez J. IGNA-CZAKA [16], dla zagadnień sprężonych przez E. SOÓSA [17]. Inną metodę rozwiązania w naprężeniach podał W. NOWACKI [18] w odniesieniu do płaskiego stanu odkształcenia.

Jeśli zmienność sił masowych, źródeł ciepła, obciążeń i ogrzań powierzchniowych jest powolna, to w równaniach ruchu pominąć można człony inercyjne, a zagadnienie traktować jako quasi-statyczne. Równania quasi-statyczne termosprężystości

$$(3.23) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \gamma \theta_{,i},$$

$$(3.24) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{j,j} = -\frac{Q}{\kappa}$$

są nadal ze sobą sprzężone. Szczególnie prosto przedstawia się rozwiązanie tego układu równań dla nieograniczonego ośrodka termosprężystego, w którym działają źródła ciepła Q oraz siły masowe typu potencjalnego $X_i = \rho \vartheta_{,i}$. Przez wprowadzenie potencjału termosprężystego przemieszczenia Φ otrzymamy z (3.23) i (3.24) rozwikłany układ równań [15]

$$(3.25) \quad \nabla^2 \theta - \frac{1}{\kappa_1} \dot{\theta} = -\frac{Q}{\kappa} - \frac{\eta}{c_1^2} \dot{\vartheta}, \quad \nabla^2 \Phi = m \theta - \frac{\vartheta}{c_1^2}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa}{1 + \varepsilon}, \quad \varepsilon = \eta m \kappa.$$

Temperaturę θ wyznacza się tu z parabolicznego równania różniczkowego w strukturze swej podobnego do klasycznego równania przewodnictwa ciepłego.

Do rozwikłania układu równań (3.23) i (3.24) zastosować można również sposób poprzednio przedstawiony [równania (3.14)–(3.17)], pomijając występujące tam człony inercyjne.

Interesujący jest wreszcie sposób podany przez M. A. BИOТA [4]. Przez wprowadzenie wyrażenia na entropię

$$(3.26) \quad s = \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{c_e}{T_0} \theta$$

do równań (3.23) i (3.24) przy założeniu, że $Q = 0$, $X_i = 0$, otrzymuje się układ równań

$$(3.27) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu + \delta) u_{j,ji} = \gamma \beta s_{,i},$$

$$(3.29) \quad s_{,jj} - \frac{1}{\kappa_2} \dot{s} = 0, \quad \delta = \gamma^2 \beta, \quad \beta = \frac{T_0}{c_e}, \quad \kappa_2 = \kappa \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu + \beta^2}.$$

Równania te są rozwikłane, a entropia spełnia równanie paraboliczne. Rozwiązanie równań (3.27) można podać w postaci potencjałów Papkowicza-Boussinesqa

$$(3.30) \quad u_i = -(\psi_{0,i} + x_j \psi_{j,i}) + B \psi_i, \quad B = 2 \frac{2\mu + \lambda + \delta}{\lambda + \mu + \delta},$$

przy założeniu, że funkcja wektorowa ψ_i jest funkcją harmoniczną. Do wyznaczenia funkcji ψ_0 , ψ_i mamy do dyspozycji równania

$$(3.31) \quad \nabla^2 \psi_i = 0, \quad \nabla^2 \psi'_0 = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\kappa_2} \partial_t \right) \psi''_0 = 0,$$

gdzie $\psi_0 = \psi'_0 + \psi''_0$.

Po wyznaczeniu funkcji ψ_0 , ψ_i przy uwzględnieniu warunków brzegowych i początkowych otrzymamy przemieszczenia ze wzoru (3.30).

Jak na wstępie wspomnieliśmy, termosprężystość mieści w sobie całe działy dotąd oddzielnie rozwijanych kierunków: elastokinetykę klasyczną, teorię przewodnictwa cieplnego oraz teorię naprężeń cieplnych. Do równań różniczkowych klasycznej elastokinetyki dojdziemy przy założeniu, że ruch odbywa się w warunkach adiabatycznych, a więc bez wymiany ciepła między poszczególnymi częściami ciała. Ponieważ dla procesu adiabatycznego jest $\dot{s} = 0$, zatem ze wzoru (3.26) otrzymamy $\dot{\theta} = -\eta\kappa\dot{\epsilon}_{kk}$ albo po scałkowaniu i przyjęciu jednorodnych warunków początkowych:

$$(3.32) \quad \theta = -\eta_T \kappa \epsilon_{kk}.$$

Równanie to zastępuje równanie przewodnictwa cieplnego. Wstawiając (3.32) do (3.4) uzyskamy równanie przemieszczeniowe klasycznej elastokinetyki

$$(3.33) \quad \mu_s u_{i,jj} + (\lambda + \mu)_s u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i,$$

gdzie

$$\lambda_s = \lambda_T + \gamma_T \eta_T \kappa, \quad \mu_T = \mu_s.$$

Wielkości λ_s , μ_s są stałymi Lamégo mierzonymi w warunkach adiabatycznych. Równania stanu po wstawieniu (3.32) do (3.2) przyjmą postać

$$(3.34) \quad \sigma_{ij} = 2\mu_s \epsilon_{ij} + \lambda_s \epsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

W teorii naprężeń cieplnych, w której rozpatruje się wpływ ogrzania powierzchni ciała oraz działanie źródeł ciepła na stan odkształcenia i naprężenia ciała, przyjmuje się, że wpływ członu $\eta\dot{\epsilon}_{kk}$ występującego w równaniu przewodnictwa cieplnego na odkształcenie ciała jest nader mały i praktycznie pomijalny. To uproszczenie prowadzi do układu dwu równań od siebie niezależnych

$$(3.35) \quad \mu_T u_{i,jj} + (\lambda_T + \mu_T) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i + \gamma_T \theta_{,i},$$

$$(3.36) \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} = -\frac{Q}{\kappa}.$$

Z równania (3.36), a więc z klasycznego równania przewodnictwa cieplnego wyznacza się temperaturę θ . Znajomość rozkładu temperatury zezwala wyznaczyć przemieszczenia z równań (3.35). Teoria naprężeń cieplnych posiada bogatą literaturę naukową. Wiele praktycznych zagadnień tak quasi-statycznych jak i dynamicznych zostało do tej pory rozwiązanych. Metody rozwiązania układu równań (3.35) i (3.36) zostały szczegółowo opracowane. Czytelnik znajdzie je w monografiach [19–22].

W przypadku ustalonego przepływu ciepła tworzenie się entropii kompensowane jest przez wymianę entropii z otoczeniem. Wymiana ta jest ujemna i równa co do wartości bezwzględnej produkcji entropii w ciele. W równaniach termosprężystości (3.4) i (3.5) odpadają pochodne względem czasu. Równanie (3.4) przechodzi w równanie elastostatyki

$$(3.37) \quad \mu_T u_{i,jj} + (\lambda + \mu)_T + X_i = \gamma \theta_{,i},$$

a równanie przewodnictwa cieplnego staje się równaniem typu eliptycznego, równaniem Poissona

$$(3.38) \quad \theta_{,jj} = -\frac{Q}{\kappa}.$$

Ze względu na znaną analogię sił masowych [23] wyznaczenie naprężeń cieplnych sprowadza się tu do rozwiązań klasycznej teorii sprężystości.

4. Twierdzenie wariacyjne termosprężystości

Wiadomo jak poważną rolę odgrywają w teorii sprężystości twierdzenia wariacyjne przy wariacji stanu odkształcenia lub stanu naprężenia. Pozwalają one nie tylko na wyprowadzenie równań różniczkowych opisujących zginanie płyt, powłok, tarcz, membran itd., ale i na konstruowanie rozwiązań przybliżonych. Poniżej podamy twierdzenie wariacyjne przy wariacji stanu odkształcenia dla termosprężystości, obmyślane przez M. A. BIORA [4]. Składać się ono będzie z dwu części, przy czym pierwsza z nich wykorzystuje znaną z teorii sprężystości zasadę d'Alemberta

$$(4.1) \quad \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i d\Sigma.$$

W równaniu tym δu_i są wirtualnymi przyrostami przemieszczeń, $\delta \varepsilon_{ij}$ wirtualnymi przyrostami odkształceń. Zakładamy, że δu_i i $\delta \varepsilon_{ij}$ są funkcjami ciągłymi, dowolnymi, niezależnymi od czasu i zgodnymi z warunkami ograniczającymi ruch ciała.

Zasada d'Alemberta jest ważna bez względu na materiał ciała, tj. przy wszystkich zależnościach stanu naprężenia od stanu odkształcenia. Włączając do (4.1) równanie stanu (3.2) i wprowadzając wielkość

$$(4.2) \quad W = \int_V \left(\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} e^2 \right) dV,$$

w której funkcja podcałkowa jest formą kwadratową dodatnio określoną, otrzymamy z (4.1) następujące równanie

$$(4.3) \quad \delta W = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i dV + \gamma \int_V \theta \delta e dV, \quad e = \varepsilon_{kk}.$$

Druga część twierdzenia wariacyjnego czynić powinna użytek z praw rządzących przepływem ciepła. Dlatego też posłużymy się związkami wiążącymi przepływ ciepła z temperaturą i entropią:

$$(4.4) \quad q_i = -\lambda_0 \theta_{,i}, \quad -q_{i,i} = \dot{s} T_0 = \gamma \dot{\varepsilon}_{kk} T_0 + c_e \dot{\theta}.$$

Związki te można wypisać w dogodniejszej dla dalszych rozważań postaci przez wprowadzenie funkcji wektorowej S_i , związanej z entropią i przepływem następującymi związkami:

$$(4.5) \quad s = -S_{i,i}, \quad q_i = T_0 \dot{S}_i.$$

Wiążąc z sobą związki (4.4) i (4.5) mamy

$$(4.6) \quad T_0 \dot{S}_i = -\lambda_0 \theta_{,i}, \quad -T_0 \dot{S}_{i,i} = c_e \dot{\theta} + T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{kk}.$$

Pomnóżmy pierwsze z równań (4.6) przez przyrost wirtualny δS_i i scałkujmy po obszarze ciała

$$(4.7) \quad \int_V \left(\theta_{,i} + \frac{T_0}{\lambda_0} \dot{S}_i \right) \delta S_i dV = 0.$$

Przez przekształcenie tej całki i przy wzięciu pod uwagę drugiego ze związków (4.6) uzyskamy równanie

$$(4.8) \quad \frac{c_\varepsilon}{T_0} \int_V \theta \delta \theta dV + \frac{T_0}{\lambda_0} \int_V \dot{S}_i \delta S_i dV + \int_\Sigma \theta n_i \delta S_i d\Sigma + \gamma \int_V \theta \delta e dV = 0,$$

w którym występuje człon $\int_V \theta \delta e dV$, identyczny z członem występującym w (4.3).

Eliminując ten człon z równań (4.4) i (4.8) otrzymamy ostateczną postać twierdzenia wariacyjnego

$$(4.9) \quad \delta(W+P+D) = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i d\Sigma - \int_\Sigma \theta n_i \delta S_i d\Sigma.$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia

$$(4.10) \quad P = \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \int_V \theta^2 dV, \quad D = \frac{T_0}{2\lambda_0} \int_V (\dot{S}_i)^2 dV.$$

Funkcję P nazywamy potencjałem cieplnym, D funkcją dyssypacji. Rozpatrzmy jeszcze przypadki szczególne. Jeśli w równaniu (4.3) przyjąć, że $\theta = -\eta_T \kappa \varepsilon_{kk}$, co odpowiada przyjęciu procesu adiabatycznego, to równanie to przechodzi na

$$(4.11) \quad \delta W^{(s)} = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_\Sigma p_i \delta u_i d\Sigma,$$

gdzie

$$W^{(s)} = \int_V \left(\mu_s \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda_s}{2} \varepsilon_{kk}^2 \right) dV,$$

a μ_s , λ_s są adiabatycznymi stałymi Lamégo. Równanie (4.11) stanowi zasadę d'Alemberta dla elastokinetyki klasycznej.

W teorii naprężeń cieplnych pomijamy wzajemne oddziaływanie pola odkształcenia i temperatury, co wyraża się przez skreślenie członu $\gamma \dot{\varepsilon}_{kk} T_0$ w drugim z równań (4.4). Pominięcie tego członu prowadzi do zmodyfikowania równania (4.8). Otrzymamy tu

$$(4.12) \quad \delta P + \delta D + \int_\Sigma \theta n_i \delta S_i d\Sigma = 0.$$

Równanie (4.12) wyraża twierdzenie wariacyjne dla klasycznego, niesprężonego zagadnienia przewodnictwa cieplnego. W teorii naprężeń cieplnych mamy do dyspozycji dwa równania, równanie (4.12) oraz równanie (4.3), w którym funkcję θ traktuje się jako funkcję znaną.

Wróćmy do ogólnego twierdzenia wariacyjnego termosprężystości (4.9) i założmy, że wirtualne przyrosty δu_i , $\delta \varepsilon_{ij}$, δS_i itd. pokrywają się z przyrostami rzeczywiście występującymi przy przejściu od chwili t do $t+dt$. Wtedy

$$(4.13) \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt = v_i dt, \quad \delta S_i = \frac{\partial S_i}{\partial t} dt = \dot{S}_i dt, \quad \delta W = \dot{W} dt \text{ itd.}$$

Wstawiając (4.13) do (4.9) otrzymamy

$$(4.14) \quad \frac{d}{dt}(K+W+P)+\chi_T = \int_V X_i v_i dV + \int_{\Sigma} p_i v_i d\Sigma + \frac{\lambda_0}{T_0} \int_{\Sigma} \theta_{0,n} d\Sigma,$$

gdzie $K = \frac{\rho}{2} \int_V v_i v_i dV$ jest energią kinetyczną, a χ_T funkcją dyssypacyjną, przy czym

$$\chi_T = \lambda_0 T_0 \int_V \left(\frac{\theta_{,i}}{T_0} \right)^2 dV = \lambda_0 T_0 \int_V \left(\frac{q_i}{\lambda_0 T_0} \right)^2 dV.$$

Równanie (4.14) nazywamy podstawowym twierdzeniem energetycznym termospřężystości. Twierdzenie to wykorzystać można do określenia jednoznaczności rozwiązań równań termospřężystości [21, 24]. Postępując podobnie jak w teorii sprężystości założymy, że równania termospřężystości spełnione są przez dwie grupy funkcji u'_i , θ' oraz u''_i , θ'' . Tworząc różnicę tych rozwiązań $\hat{u}_i = u'_i - u''_i$, $\hat{\theta} = \theta' - \theta''$ i wstawiając do równań (3.4) i (3.5) spostrzeżemy, że równania te są jednorodne, spełniają jednorodne warunki brzegowe i początkowe. Funkcjom \hat{u}_i , $\hat{\theta}$ odpowiada zatem ciało termospřężyste, w którego wnętrzu brak źródeł ciepła i sił masowych, a które na swej powierzchni jest nieobciążone i znajduje się w warunkach zerowej temperatury $\hat{\theta}$. Wzór (4.14) odpowie na pytanie, czy we wnętrzu ciała wystąpią przemieszczenia \hat{u}_i i temperatura $\hat{\theta}$. Równanie (4.14) przyjmie postać

$$(4.15) \quad \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\rho}{2} \hat{v}_i \hat{v}_i + \mu \hat{\varepsilon}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + \frac{\lambda}{2} \hat{\varepsilon}_{kk}^2 + \frac{\gamma}{2\eta\kappa} \hat{\theta}^2 \right) dV = - \frac{\lambda_0}{T_0} \int_V (\hat{\theta}_{,i})^2 dV \leq 0.$$

Całka występująca po lewej stronie równania jest w chwili początkowej równa zero, gdyż funkcje \hat{u}_i , \hat{v}_i , $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\hat{\theta}$ spełniają jednorodne warunki początkowe. Z drugiej strony wyprowadzona nierówność wskazuje, że lewa strona równania albo maleje przyjmując wartości ujemne, albo też jest równa zero.

Ponieważ wyrażenie podcałkowe jest sumą kwadratów, a funkcja podcałkowa jest równa zero dla $t = 0$, zatem jest możliwa jedynie druga z wymienionych możliwości. W wyniku otrzymamy, że $\hat{v}_i = 0$, $\hat{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\hat{\theta} = 0$ dla $t \geq 0$. Ponieważ naprężenia $\hat{\sigma}_{ij}$ związane są liniowo z wielkościami $\hat{\varepsilon}_{ij}$, θ zatem i $\hat{\sigma}_{ij} = 0$ dla $t \geq 0$. W rezultacie otrzymamy

$$(4.16) \quad u'_i = u''_i, \quad \theta' = \theta'', \quad \sigma'_{ij} = \sigma''_{ij} \quad \text{dla } t \geq 0.$$

Istnieje zatem jedno tylko rozwiązanie równań termospřężystości.

5. Twierdzenie o wzajemności

Jednym z najbardziej interesujących twierdzeń teorii sprężystości jest twierdzenie o wzajemności E. BETTIEGO, z tego bowiem twierdzenia wynika nie tylko symetria rozwiązań podstawowych (funkcji Greena), ale twierdzenie to daje podstawę do konstruowania dalszych metod całkowania równań różniczkowych teorii sprężystości.

Rozszerzone twierdzenie o wzajemności, odnoszące się do zagadnień termospřężystości, zostało w pełni sformułowane przez V. IONESCU-CAZIMIR [25]. Ele-

menty tego twierdzenia, choć wyrażone w mniej ogólnej postaci, znajdziemy u M. A. BИOТA [26].

Twierdzenie o wzajemności przedstawimy w głównych jego zarysach kładąc punkt ciężkości na jego rozliczne zastosowania.

Niech w ciele izotropowym działają dwa układy sił. Zakładamy, że wewnątrz ciała V działają źródła ciepła i siły masowe, a na jego powierzchni dane są obciążenia p_i i temperatura $\theta = \vartheta$. Przyczyny te oznaczymy skrótowo symbolem $I = \{X_i, p_i, Q, \vartheta\}$, a wywołane przez nich skutki symbolem $C = \{u_i, \theta\}$. Drugi układ przyczyn i skutków oznaczymy przez $I' = \{X'_i, p'_i, Q', \vartheta'\}$ oraz $C' = \{u'_i, \theta'\}$. Zakładamy, że warunki początkowe są jednorodne. Wychodząc z równań ruchu, równań przewodnictwa cieplnego i ze związków Duhamela-Neumanna, wypisanych dla obu układów, odpowiednio dodając te układy i całkując po obszarze V , otrzymamy dwa równania o wzajemności dla transformacji funkcji występujących w obu układach

$$(5.1) \quad \int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{\theta} \bar{e}' - \bar{\theta}' \bar{e}) dV = 0,$$

$$(5.2) \quad \int_V (\bar{Q}' \bar{\theta} - \bar{Q} \bar{\theta}') dV + \kappa \eta p \int_V (\bar{\theta}' \bar{e} - \bar{\theta} \bar{e}') dV + \kappa \int_\Sigma (\bar{\vartheta}' \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n}) d\Sigma = 0,$$

gdzie

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, p) = \int_0^\infty u_i(\mathbf{x}, t) e^{-pt} dt, \text{ itd.}$$

Pierwsze z tych równań powstało z wykorzystania równań ruchu i równań stanu przy zastosowaniu przekształcenia Greena. Eliminując z tych równań wspólne człony uzyskamy następujące równanie:

$$(5.3) \quad \eta \kappa p \left[\int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma \right] = \\ = \kappa \gamma \int_\Sigma (\bar{\vartheta}' \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n}) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{Q}' \bar{\theta}' - \bar{Q} \bar{\theta}) dV.$$

Na równaniu (5.3) należy wykonać jeszcze odwrotną transformację Laplace'a. Przy wykorzystaniu twierdzenia o splocie otrzymamy

$$(5.4) \quad \eta \kappa \left\{ \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t \left[X_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u'_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} - X'_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau + \right. \\ \left. + \int_\Sigma d\Sigma(\mathbf{x}) \int_0^t \left[p_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u'_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} - p'_i(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau \right\} = \\ = \gamma \int_V dV(\mathbf{x}) \int_0^t [Q(\mathbf{x}, t-\tau) \theta'(\mathbf{x}, \tau) - Q'(\mathbf{x}, t-\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau)] d\tau + \\ + \gamma \kappa \int_\Sigma d\Sigma(\mathbf{x}) \int_0^t [\vartheta'(\mathbf{x}, t-\tau) \theta'_{,n}(\mathbf{x}, \tau) - \vartheta(\mathbf{x}, t-\tau) \theta'_{,n}(\mathbf{x}, \tau)] d\tau.$$

Równanie (5.4) jest słuszne tak dla zagadnienia dynamicznego jak i dla zagadnienia quasi-statycznego. W obu jednak przypadkach funkcje u_i , θ oraz u'_i , θ' mają odmiennie znaczenie. W rozważaniach naszych przyjęto, że na powierzchni Σ dano obciążenia p_i i temperaturę $\theta = \vartheta$. Ze struktury równań (5.4) widoczne jest, że na Σ przyjęc można również przemieszczenia oraz przepływ ciepła, proporcjonalny do gradientu temperatury $\theta_{,n} = \vartheta_{,n}$. Równania (5.4) są spełnione również dla przypadku mieszanych warunków brzegowych.

Równanie (5.4) przyjmie szczególnie prostą postać dla ciała nieograniczonego, w tym bowiem przypadku znikają całki powierzchniowe.

Jeśli mamy do czynienia z drganiami harmonicznymi w czasie

$$X_i(\mathbf{x}, t) = X_i^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad p_i(\mathbf{x}, t) = p_i^*(\mathbf{x})e^{i\omega t} \text{ itd.},$$

to równanie o wzajemności przyjmie postać

$$(5.4) \quad \eta\kappa i\omega \left[\int_V (X_i^* u_i'^* - X_i'^* u_i^*) dV + \int_\Sigma (p_i^* u_i'^* - p_i'^* u_i^*) d\Sigma \right] = \\ = \kappa\gamma \int_\Sigma (\vartheta'^* \theta_{,n}^* - \vartheta^* \theta'_{,n}) d\Sigma + \gamma \int_V (Q^* \theta'^* - Q'^* \theta^*) dV.$$

Z równania (5.4) otrzymamy szereg interesujących wniosków. Załóżmy, że w punkcie ξ obszaru V działa chwilowa skupiona siła $X_i = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t) \delta_{ij}$, zwrócona w kierunku osi x_j , a w punkcie ξ' siła skupiona $X_i' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t) \delta_{ik}$, a więc zwrócona w kierunku osi x_k . Jeśli założyć, że warunki brzegowe są jednorodne, to ze związku (5.4) otrzymamy

$$\frac{\partial u'_j(\xi, \xi', t)}{\partial t} = \frac{\partial u_k(\xi', \xi, t)}{\partial t}.$$

Dla źródła ciepła $Q = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t)$ oraz źródła $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t)$ mamy

$$\theta'(\xi, \xi', t) = \theta(\xi', \xi, t).$$

Jeśli w punkcie ξ umieścić skupioną i chwilową siłę $X_i = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t) \delta_{ij}$, a w punkcie ξ' źródło ciepła $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t)$, to z równania (5.4) wynika następujący związek:

$$\theta(\xi', \xi, t) = -\frac{\eta\kappa}{\gamma} \frac{\partial u'_j(\xi, \xi', t)}{\partial t}.$$

Niech w nieograniczonej przestrzeni posuwa się w kierunku osi x_3 źródło ciepła $Q = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 - vt)$ ze stałą prędkością v . Przyjmując, że w układzie przyczyn z «primami» $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi') \delta(t)$, to z (5.4) otrzymamy

$$\theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_0^t \theta'(0, 0, v\tau; \xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \tau) d\tau.$$

Powyższy wzór zezwala na wyznaczenie temperatury spowodowanej poruszającym się źródłem ciepła przy wykorzystaniu wyrażenia dla temperatury, wywołanej działaniem chwilowego, ale nie poruszającego się źródła ciepła.

Z równań (5.1), (5.2) względnie (5.3) otrzymać można postacie szczególne twierdzenia o wzajemności odnoszące się do klasycznej elastokinytyki i teorii naprężeń cieplnych.

Jeśli założyć, że odkształcenie odbywa się w warunkach adiabatycznych, to w równaniu (5.1) przyjmując należy $\bar{\theta} = -\eta_T \kappa \varepsilon_{kk}$, $\theta' = -\eta_T \kappa \varepsilon'_{kk}$. Pozostaje wtedy równanie

$$(5.5) \quad \int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma = 0.$$

Równanie (5.2) odpada, gdyż w elastokinytyce zakładamy, że w ciele nie występują źródła ciepła, a powierzchnia ciała jest termicznie izolowana.

W teorii naprężeń cieplnych pomijamy człon zawierający dylatację w równaniu przewodnictwa cieplnego. Pominięcie to jest formalnie równoważne z przyjęciem $\eta = 0$ w równaniu (5.2). W ten sposób otrzymamy równania

$$(5.6) \quad \int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{\theta} \bar{e}' - \bar{\theta}' \bar{e}) dV = 0,$$

$$(5.7) \quad \int_V (\bar{Q} \bar{\theta}' - \bar{Q}' \bar{\theta}) dV + \kappa \int_\Sigma (\bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta}' \bar{\theta}_{,n}) d\Sigma = 0.$$

Równanie (5.6) zostało wyprowadzone przez W. M. MAJZIĘŁA [27]. Równanie (5.7) jest równaniem o wzajemności dla klasycznego równania przewodnictwa cieplnego.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek, w którym przyczyny $I = \{X_i, p_i, Q, \vartheta\}$ i skutki $C = \{u_i, \theta\}$ odnoszą się do zagadnienia sprzężonego termosprężystości, a przyczyny $I' = \{X'_i, p'_i, Q', \vartheta'\}$ i skutki $C' = \{u'_i, \theta'\}$ do zagadnienia niesprężonego. Zważywszy na różnicę w równaniach przewodnictwa cieplnego dla zagadnienia sprzężonego i niesprężonego

$$(5.8) \quad \bar{\theta}_{,kk} - \frac{p}{\kappa} \bar{\theta} - \eta p \bar{e} = -\frac{\bar{Q}}{\kappa}, \quad \bar{\theta}'_{,kk} - \frac{p}{\kappa} \bar{\theta}' = -\frac{\bar{Q}'}{\kappa},$$

otrzymamy zamiast równania (5.8) następujące równanie:

$$(5.9) \quad \int_V (\bar{Q}' \bar{\theta} - \bar{Q} \bar{\theta}') dV + \kappa \eta p \int_V \bar{\theta} \bar{e}' dV + \kappa \int_\Sigma (\bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n} - \bar{\vartheta}' \bar{\theta}_{,n}) d\Sigma = 0.$$

Eliminując z równań (5.1) i (5.9) człon $\int_V \bar{\theta}' \bar{e} dV$ otrzymamy twierdzenie o wzajemności w postaci

$$(5.10) \quad \kappa \eta p \left[\int_V (\bar{X}_i \bar{u}'_i - \bar{X}'_i \bar{u}_i) dV + \int_\Sigma (\bar{p}_i \bar{u}'_i - \bar{p}'_i \bar{u}_i) d\Sigma + \gamma \int_V \bar{\theta} \bar{e}' dV \right] = \\ = \kappa \gamma \int_\Sigma (\bar{\vartheta}' \bar{\theta}_{,n} - \bar{\vartheta} \bar{\theta}'_{,n}) d\Sigma + \gamma \int_V (\bar{Q} \bar{\theta}' - \bar{Q}' \bar{\theta}) dV.$$

Przyjmijmy teraz, że w układzie z «primami» działa jedynie skupione i chwilowe źródło ciepła w punkcie ξ , a warunki brzegowe są jednorodne. Wstawiając zatem do równania (5.10) $Q' = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t)$, $X'_i = 0$, $p'_i = 0$, $\vartheta' = 0$ na Σ , otrzymamy

$$(5.11) \quad \bar{\theta}(\xi, p) + \eta \kappa p \int_V \bar{\theta}(\xi, p) \bar{e}'(\mathbf{x}, \xi, p) dV(\mathbf{x}) = \bar{M}(\xi, p),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{M}(\xi, p) = & \int_V \bar{Q}(\mathbf{x}, p) \bar{\theta}'(\mathbf{x}, \xi, p) dV(\mathbf{x}) - \kappa \int_{\Sigma} \bar{\vartheta}(\mathbf{x}, p) \bar{\theta}'_{,n}(\mathbf{x}, \xi, p) d\Sigma(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{\eta \kappa p}{\gamma} \left[\int_{\Sigma} \bar{p}_i(\mathbf{x}, p) \bar{u}'_i(\mathbf{x}, \xi, p) d\Sigma(\mathbf{x}) + \int_V \bar{X}_i(\mathbf{x}, p) \bar{u}'_i(\mathbf{x}, \xi, p) dV(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje u'_i , θ' są znane jako rozwiązania równań różniczkowych teorii naprężeń cieplnych, a funkcje \bar{Q} , $\bar{\vartheta}$, \bar{p}_i , \bar{X}_i są dane, zatem funkcja $\bar{M}(\xi, p)$ jest znana. Równanie (5.11) jest niejednorodnym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju, w którym jako nieznaną funkcją występuje temperatura θ . W analogiczny sposób można uzyskać i przemieszczenia.

Przedstawiony tu sposób postępowania zaproponowany przez V. IONESCU-CAZIMIR [25] został zastosowany do wyznaczenia funkcji Greena w nieograniczonym obszarze termosprężystym [28, 29].

6. Metody całkowania równań termosprężystości wynikające z twierdzenia o wzajemności

W elastostatyce wyprowadza się związek uzależniający przemieszczenie $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in V$, $t > 0$ wewnątrz ciała, od przemieszczeń u_i i obciążeń p_i na jego powierzchni. Związki te są znane jako twierdzenia Somigliana i Greena [30]. Poniżej podany tego rodzaju twierdzenia rozszerzone na zagadnienia termosprężystości.

Założmy, że przyczyny wywołujące odkształcenia i temperaturę w ciele wyrażone są jedynie przez warunki brzegowe. Warunki początkowe przyjmiemy jako jednorodne. Równania opisujące ruch ciała mają postać

$$(6.1) \quad \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{e} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0.$$

Do równań tych dołączamy równania stanu

$$(6.2) \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda e_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij}.$$

Rozpatrzmy drugi układ równań z «primami», odnoszący się do nieograniczonego ciała termosprężystego:

$$(6.3) \quad \sigma'_{ij,j} = \rho \ddot{u}'_i, \quad \theta'_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta}' - \eta \dot{e}' = -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0$$

oraz równania Duhamela-Neumanna

$$(6.4) \quad \sigma'_{ij} = 2\mu \varepsilon'_{ij} + (\lambda e'_{kk} - \gamma \theta') \delta_{ij}.$$

Na równaniach (6.1)–(6.4) wykonujemy transformację Laplace'a przy uwzględnieniu jednorodnych warunków początkowych, następnie odpowiednio dodajemy te równania i wykonujemy całkowanie po obszarze V .

Po szeregu przekształceń, które tu pomijamy, otrzymamy ostatecznie [31]

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}(\mathbf{x}, p) = & -\frac{\eta \kappa p}{\gamma} \int_{\Sigma} [\bar{p}_i(\xi, p) \bar{u}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) - \bar{p}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\xi, p)] d\Sigma(\xi) - \\ & - \kappa \int_{\Sigma} [\bar{\vartheta}'(\xi, \mathbf{x}, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, p) - \bar{\vartheta}(\xi, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, \mathbf{x}, p)] d\Sigma(\xi). \end{aligned}$$

Wzór ten można otrzymać również z twierdzenia o wzajemności (5.3) przyjmując, że $Q' = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t)$, $X_i = 0$, $X'_i = 0$, $Q = 0$.

Rozpatrzmy z kolei drugi układ równań

$$(6.6) \quad \sigma_{ij}^s = \rho \ddot{u}_i^s - \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\delta_{is}\delta(t),$$

$$(6.7) \quad \theta_{,jj}^s - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta}^s - \eta \dot{e}^s = 0,$$

$$(6.8) \quad \sigma_{ij}^s = 2\mu \varepsilon_{ij}^s + (\lambda e_{kk}^s - \gamma \theta^s) \delta_{ij}.$$

Funkcje u_i^s , θ^s odnoszą się do nieograniczonego obszaru termosprężystego. Wywołane są one działaniem chwilowej siły skupionej $X'_i = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t)\delta_{is}$, zwróconej w kierunku osi x_s . Wstawiając $X'_i = \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t)\delta_{is}$, $X_i = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$ do twierdzenia o wzajemności, otrzymamy następujące wyrażenie na przemieszczenia u_s [31]:

$$(6.9) \quad u_s(\mathbf{x}, p) = \int_{\Sigma} [\bar{p}_i(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{u}_i^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) - \bar{p}_i^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}, p)] d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) - \\ - \frac{\gamma}{\eta p} \int_{\Sigma} [\bar{\theta}_{,n}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) - \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}_{,n}^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p)] d\Sigma(\boldsymbol{\xi}).$$

Na równaniach (6.5) i (6.9) należy jeszcze wykonać odwrotną transformację Laplace'a. Prowadzi ona do wyrażeń splotowych, których tu już nie wypisujemy.

Równania (6.5) i (6.9) stanowią uogólnienie równań Somigliana na zagadnienia termosprężystości. Za ich pomocą możemy wyrazić funkcje $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\theta(\mathbf{x}, t)$ $\mathbf{x} \in V$, $t > 0$ przez całki powierzchniowe, w których występują funkcje u_i , θ oraz ich pochodne.

Jeśli funkcje Greena \bar{u}_i' , $\bar{\theta}'$ oraz \bar{u}_i^s , $\bar{\theta}^s$ dobrać w ten sposób, aby odnosiły się do ciała zajmującego obszar V ograniczony powierzchnią Σ i przyjąć, że na Σ powinny być spełnione warunki brzegowe

$$\bar{u}_i' = 0, \quad \bar{\theta}' = 0, \quad \bar{u}_i^s = 0, \quad \bar{\theta}^s = 0 \text{ na } \Sigma,$$

to równania (6.5) i (6.9) uproszczą się do postaci

$$(6.10) \quad \theta(\mathbf{x}, p) = \kappa \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}'_{,n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\eta \kappa p}{\gamma} \int_{\Sigma} \bar{p}'_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}),$$

$$(6.11) \quad u_s(\mathbf{x}, p) = - \int_{\Sigma} \bar{p}'_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\gamma}{\eta p} \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi}, p) \bar{\theta}'_{,n}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\boldsymbol{\xi}).$$

Wzory te stanowią rozwiązanie pierwszego zagadnienia brzegowego, w którym na Σ dane są przemieszczenia u_i oraz temperatura θ . Gdyby funkcje \bar{u}_i' , $\bar{\theta}'$ oraz \bar{u}_i^s , $\bar{\theta}^s$ odnosiły się do ciała zajmującego obszar ograniczony V , na powierzchni Σ swobodny od obciążeń i temperatury, to do równań (6.5) i (6.9) należałoby wstawić

$$\bar{p}'_i = 0, \quad \bar{\theta}' = 0, \quad \bar{p}_i^s = 0, \quad \bar{\theta}^s = 0 \text{ na } \Sigma.$$

Wtedy wzory (6.5) i (6.9) przyjmą postać

$$(6.12) \quad \theta(\mathbf{x}, p) = -\frac{\eta \kappa p}{\gamma} \int_{\Sigma} \bar{p}_i(\xi, p) \bar{u}'_i(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi) + \varkappa \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\xi, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi),$$

$$(6.13) \quad \bar{u}_s(\mathbf{x}, p) = \int_{\Sigma} \bar{p}_i(\xi, p) \bar{u}_i(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi) + \frac{\gamma}{\eta p} \int_{\Sigma} \bar{\theta}(\xi, p) \bar{\theta}'_{,n}(\xi, \mathbf{x}, p) d\Sigma(\xi)$$

i stanowią rozwiązanie drugiego zagadnienia brzegowego, w którym na powierzchni Σ dane są obciążenia p_i i temperatura θ . Jednakże stosowanie wzorów (6.10)–(6.13) jest ograniczone ze względu na trudności związane z uzyskaniem funkcji Greena u'_i , θ' , u_i^s , θ^s , spełniających z góry dane warunki brzegowe. W sposób analogiczny do rozszerzonych wzorów Somigliana i Greena można skonstruować rozwiązanie równań termosprężystości dla mieszanych warunków brzegowych. Jeden ze sposobów, będący rozszerzeniem metody W. M. Majziela z teorii zagadnień cieplnych na zagadnienia termosprężystości, znajdujemy w uprzednio cytowanej pracy V. IONESCU-CAZIMIR [25]. Polega on na użyciu funkcji Greena spełniających od razu mieszane warunki brzegowe. Drugi sposób, obmyślony przez W. NOWACKIEGO [32], polega na wykorzystaniu pomocniczych funkcji Greena, spełniających ciągle warunki brzegowe, i sprowadzeniu zagadnienia do rozwiązania układu równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju.

7. Harmoniczne fale płaskie

W dyskusji najprostszego typu fali, harmonicznej fali płaskiej, od razu na jaw wychodzą istotne cechy rozprzestrzeniania się fal termosprężystych, ich charakter, prędkość propagacji fali, dyspersja i tłumienie fali. Na jaw wystąpią zasadnicze różnice między falami termosprężystymi a falami sprężystymi i cieplnymi [33 i 34].

Rozważmy falę płaską harmoniczną przesuwającą się w kierunku osi x_1 , wywołaną przyczyną natury mechanicznej czy cieplnej. Ponieważ przemieszczenia u_j i temperatura θ zależą jedynie od zmiennych x_1 i t , to równania przemieszczeniowe i równania przewodnictwa cieplnego, uwzględniając że

$$(7.1) \quad u_j = \text{Re}[u_j^*(x_1, \omega) e^{-i\omega t}], \quad \theta = \text{Re}[\theta^*(x_1, \omega) e^{-i\omega t}],$$

przyjmą następującą postać:

$$(7.2) \quad (\partial_1^2 + \sigma^2) u_1^* = m \partial_1 \theta^*, \quad (\partial_1^2 + q) \theta^* + \eta \kappa p \partial_1 u_1^* = 0, \\ (\partial_1^2 + \tau^2) u_2^* = 0, \quad (\partial_1^2 + \tau^2) u_3^* = 0,$$

gdzie

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad \tau^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad q = \frac{i\omega}{\varkappa}.$$

Eliminując z dwu pierwszych równań temperaturę θ^* otrzymamy

$$(7.3) \quad [(\partial_1^2 + \sigma^2)(\partial_1^2 + q) + q\varepsilon \partial_1^2] u_1^* = 0, \quad (\partial_1^2 + \tau^2) u_2^* = 0, \quad (\partial_1^2 + \tau^2) u_3^* = 0.$$

Pierwsze równanie odnosi się do fali podłużnej, dwa następne do fal poprzecznych. Jeśli do dwu pierwszych równań (7.2) wstawić

$$u_1^* = u^\circ e^{ikx_1}, \quad \theta^* = \theta^\circ e^{ikx_1},$$

to otrzymamy zależności

$$\frac{u^\circ}{\theta^\circ} = \frac{mik}{\sigma^2 - k^2}, \quad \frac{\theta^\circ}{u^\circ} = -\frac{\eta q \kappa ik}{q - k^2}.$$

Po wyeliminowaniu z tych związków wielkości u°/θ° otrzymamy następujące równanie algebraiczne:

$$(7.4) \quad k^4 - k^2[\sigma^2 + q(1 + \varepsilon)] + q\sigma^2 = 0, \quad \varepsilon = \eta m \kappa,$$

z którego wyznaczymy pierwiastki

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{ \sigma^2 + q(1 + \varepsilon) \pm [(\sigma^2 + q(1 + \varepsilon))^2 - 4q\sigma^2]^{1/2} \}.$$

Pierwiastki te są funkcjami parametru ε : $k_1 = k_1(\varepsilon)$, $k_2 = k_2(\varepsilon)$. Dla $\varepsilon = 0$ mamy

$$k_1(0) = \lambda_1 = \sigma, \quad k_2(0) = \lambda_2 = \sqrt{q}.$$

Rozwiązaniem dwu pierwszych równań (7.2) są funkcje

$$(7.5) \quad \begin{aligned} u_1 = & u_+^\circ \exp[-i\omega t + ik_1 x_1] + u_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_1 x_1) + \\ & + \frac{mik_2}{\sigma^2 - k_2^2} \{ \theta_+^\circ \exp(-i\omega t + ik_2 x_1) - \theta_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_2 x_1) \}, \\ \theta = & \theta_+^\circ \exp(-i\omega t + ik_2 x_1) + \theta_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_2 x_1) + \\ & + \frac{\eta \kappa q ik_1}{k_1^2 - q} \{ u_+^\circ \exp(-i\omega t + ik_1 x_1) - u_-^\circ \exp(-i\omega t - ik_1 x_1) \}. \end{aligned}$$

Fale poprzeczne dane są związkami

$$(7.6) \quad \begin{aligned} u_2 = & B_+ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_2} \right) \right] + B_- \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_2} \right) \right], \\ u_3 = & C_+ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_2} \right) \right] + C_- \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Posuwają się one z prędkością stałą $c_2 = \left(\frac{\mu_T}{\rho} \right)^{1/2}$. Fale te nie powodują zmian objętości i nie wywołują pola temperatury, towarzyszącego ruchowi falowemu.

Zespół równań (7.5) nazywać będziemy równaniami fal termosprężystych. Pierwsze równanie (7.5) przedstawia falę podłużną, drugie towarzyszącą tym falom temperaturę. Oznaczając przez v_β ($\beta = 1, 2$) prędkość fazową, a przez ϑ_β współczynnik tłumienia i wiążąc je z pierwiastkami równania (7.4) zależnościami

$$v_\beta = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_\beta)}, \quad \vartheta_\beta = \operatorname{Im}(k_\beta), \quad \beta = 1, 2,$$

przekształćmy równania (7.5) do postaci

$$(7.7) \quad u_1 = u_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] + u_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_1} \right) + \vartheta_1 x_1 \right] + \\ + \frac{mik_2}{\sigma^2 - k_2^2} \left\{ \theta_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] - \theta_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_2} \right) + \vartheta_2 x_1 \right] \right\}, \\ \theta = \theta_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] + \theta_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_2} \right) + \vartheta_2 x_1 \right] + \\ + \frac{\eta \kappa q i k_1}{k_1^2 - q} \left\{ u_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] - u_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_1} \right) + \vartheta_1 x_1 \right] \right\}.$$

Widoczne jest, że obie fale są tłumione i ulegają dyspersji, gdyż prędkości fazowe v_{β} zależą od częstotliwości ω . Fizyczne znaczenie fal (7.7) stanie się jasne, jeśli porównamy je z falami w ośrodku hipotetycznym, charakteryzowanym zerową wartością rozszerzalności liniowej α_t . Dla $\alpha_t = 0$, a zatem dla $\eta = 0$, $m = 0$ dwa pierwsze równania (7.2) przyjmą postać

$$(7.8) \quad (\partial_1^2 + \sigma^2) \hat{u}_1^* = 0, \quad (\partial_1^2 + q) \hat{\theta}^* = 0.$$

Rozwiązaniem tych równań są funkcje

$$(7.9) \quad \hat{u}_1^* = u_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_1} \right) \right] + u_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{c_1} \right) \right], \quad c_1 = \left(\frac{\lambda_T + 2\mu_T}{\rho} \right)^{1/2}, \\ \hat{\theta}^* = \theta_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{\hat{v}_2} \right) - \hat{\vartheta}_2 x_1 \right] + \theta_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{\hat{v}_2} \right) + \hat{\vartheta}_2 x_1 \right],$$

gdzie

$$\hat{v}_2 = (2\kappa\omega)^{1/2}, \quad \hat{\vartheta}_2 = \left(\frac{\omega}{2\kappa} \right)^{1/2}.$$

Tutaj \hat{u}_1^* przedstawia falę czysto sprężystą, posuwającą się w kierunku osi x_1 względnie $-x_1$ z prędkością stałą $\hat{v}_1 = c_1$. Fale te nie ulegają tłumieniu ani dyspersji. Drugie z równań (7.9) przedstawia falę czysto cieplną, doznającą tłumienia i dyspersji. Tłumienie charakteryzowane jest współczynnikiem $\hat{\vartheta}_2 = \text{Im}(\lambda_2) = (\omega/2\kappa)^{1/2}$.

Dyspersja ma tu miejsce, gdyż prędkość fazowa $\hat{v}_2 = \frac{\omega}{\text{Re}(\lambda_2)} = (2\kappa\omega)^{1/2}$ jest funkcją częstotliwości ω . Równania (7.7) przedstawiają zmodyfikowaną falę podłużną i zmodyfikowaną falę cieplną. Z porównania równań (7.7) i (7.9) wynika, że pierwiastek $k_1(\varepsilon)$ charakteryzuje postać quasi-sprężystą fali termosprężystej, gdyż $k_1(0) = \sigma = \omega/c_1$ odnosi się do fali czysto sprężystej. Podobnie pierwiastek $k_2(\varepsilon)$ charakteryzuje postać fali quasi-ciepłej, podczas gdy $k_2(0) = \lambda_2 = \sqrt{q}$ odnosi się do czysto termicznej fali w ośrodku hipotetycznym. Interesujący jest fakt, że w zmodyfikowanej fali sprężystej [pierwsze równanie grupy (7.9)] występują obok siebie człony quasi-sprężyste

$$u_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right], \quad u_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_1} \right) + \vartheta_1 x_1 \right]$$

oraz człony quasi-termiczne

$$\theta_+^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right], \quad \theta_-^{\circ} \exp \left[-i\omega \left(t + \frac{x_1}{v_2} \right) + \vartheta_2 x_1 \right].$$

Podobny stan rzeczy występuje w zmodyfikowanej fali termicznej.

Należy omówić jeszcze pierwiastki k_1, k_2 względnie wielkości $\vartheta_{\beta}, v_{\beta}, \beta = 1, 2$. Wprowadzając nowe oznaczenia

$$\zeta = \frac{c_1}{\omega^*} k, \quad \omega^* = \frac{c_1^2}{\kappa}, \quad \chi = \frac{\omega}{\omega^*},$$

doprowadzimy równanie (7.4) do prostej postaci

$$(7.10) \quad \zeta^4 - \zeta^2[\chi^2 + i\chi(1 + \varepsilon)] + i\chi^3 = 0.$$

Pierwiastki ζ_1, ζ_2 tego równania są funkcjami parametrów ε i $\chi = \omega/\omega^*$. Wielkość $\varepsilon = \eta m \kappa$ jest wielkością stałą, zależną od właściwości termicznych i mechanicznych materiałów, podczas gdy χ zmienia się ze zmianą częstotliwości ω . Wielkość ω^* jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału.

Częstotliwość drgań wymuszonych ω jest ograniczona przez wielkość

$$\omega_c = 2\pi (c_1)_s \left(\frac{3\rho}{4\pi M} \right)^{1/2},$$

wynikającą z widma Debye'a dla fal podłużnych [35]. We wzorze M oznacza masę atomową materiału tworzącego ciało sprężyste, a $(c_1)_s = \left(\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho} \right)^{1/2}$, gdzie λ_s, μ_s są stałymi Lamégo dla stanu adiabatycznego.

Poniżej podajemy tabelę podstawowych wartości dla czterech metali

	Aluminium	Miedź	Stal	Ołów
$(c_1)_s$ cm/sek.	$6,32 \times 10^5$	$4,36 \times 10^5$	$5,80 \times 10^5$	$2,14 \times 10^5$
ε	$3,56 \times 10^{-2}$	$1,68 \times 10^{-2}$	$2,97 \times 10^{-4}$	$7,33 \times 10^{-2}$
ω^* sek. ⁻¹	$4,66 \times 10^{11}$	$1,73 \times 10^{11}$	$1,75 \times 10^{12}$	$1,91 \times 10^{11}$
ϑ_1^{∞} cm ⁻¹	$1,31 \times 10^4$	$3,29 \times 10^3$	$4,48 \times 10^3$	$3,27 \times 10^4$
ω_c sek. ⁻¹	$9,80 \times 10^{13}$	$7,55 \times 10^{13}$	$9,95 \times 10^{13}$	$3,69 \times 10^{13}$

W tabeli umieszczono również współczynnik tłumienia ϑ_1^{∞} dla $\chi = \infty$, przy czym

$$\vartheta_1^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \omega^*}{(c_1)_T}.$$

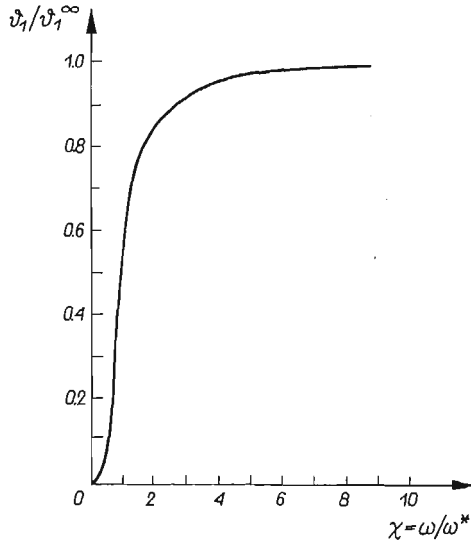
Zwróćmy uwagę, że ω_c jest znacznie większe niż ω^* . W wykonywanych doświadczeniach laboratoryjnych przy użyciu drgań ultradźwiękowych o bardzo dużej częstotliwości jest

$$\omega_c > \omega^* \gg \omega,$$

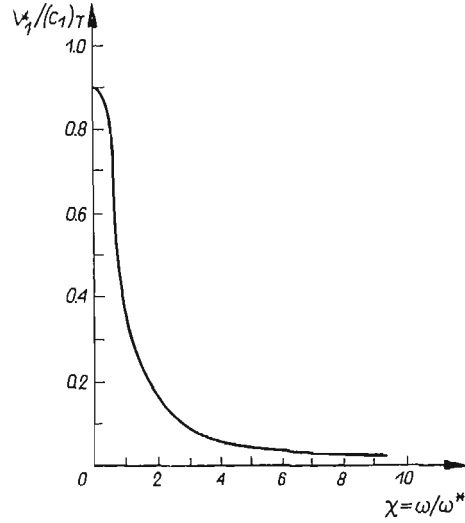
tak że dla drgań mechanicznych spotykanych w praktyce przyjąć można $\chi = \omega/\omega^* \ll 1$.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy stosunków $v_1/(c_1)_T$ oraz $\vartheta_1/\vartheta_1^{\infty}$ dla miedzi w zależności od zmiennej $\chi = \omega/\omega^*$ [33].

Z rysunku 1 jest widoczne, że prędkość fazowa v_1 jest większa od $(c_1)_T$ i dąży do tej wartości dla $\chi \rightarrow \infty$. Współczynnik tłumienia ϑ_1 rośnie wraz z χ i przy małych częstotliwościach jest proporcjonalny do χ^2 , zbliżając się przy $\chi \rightarrow \infty$ do wartości asymptotycznej ϑ_1^∞ . W otoczeniu odciętej $\chi = 1$ ($\omega = \omega^*$) wielkości v_1 i ϑ_1 doznają gwałtownej zmiany. Ale dla zastosowań teorii w praktyce w rachubę



Rys. 1



Rys. 2

wchodzi jedynie mały obszar zmienności $\chi = \omega/\omega^*$. Dlatego też dla $\chi \ll 1$ pierwiastki ζ_1 , ζ_2 można rozłożyć w szereg potęgowy względem potęg χ i wykorzystać związek

$$\zeta_\beta = (c_1)_T \left(\frac{\chi}{v_\beta} + i \frac{\vartheta_\beta}{\omega^*} \right), \quad \beta = 1, 2.$$

W ten sposób otrzyma się przybliżone wartości prędkości fazowych oraz współczynników tłumienia. Podamy je za P. CHADWICKIEM [36]

$$(7.11) \quad v_1 = c_1(1+\varepsilon)^{1/2} \left[1 - \frac{\chi^2 \varepsilon (4-3\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} + O(\chi^4) \right],$$

$$\vartheta_1 = \frac{\omega^*}{c_1(1+\varepsilon)^{1/2}} \left[\frac{\chi^2 \varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2} + O(\chi^4) \right],$$

$$v_2 = c_1 \left(\frac{2\chi}{1+\varepsilon} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\chi \varepsilon}{2(1+\varepsilon)^2} + \frac{\chi^2 \varepsilon (4+\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} + \frac{\chi^3 \varepsilon (8-20\varepsilon+\varepsilon^2)}{16(1+\varepsilon)^6} + O(\chi^4) \right],$$

$$\vartheta_2 = \frac{\omega^*}{c_1} \left(\frac{\chi}{2} (1+\varepsilon) \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\chi \varepsilon}{2(1+\varepsilon)^2} + \frac{\chi^2 \varepsilon^2 (4-\varepsilon)}{8(1+\varepsilon)^4} + \frac{\chi^3 \varepsilon (8-12\varepsilon+\varepsilon^2)}{16(1+\varepsilon)^6} + O(\chi^4) \right].$$

Widoczne jest, że dla $\chi \ll 1$ przyjęc można $v_1 \approx c_1(1+\varepsilon)^{1/2}$ jako wartość stałą, nieco większą niż $c_1 = (c_1)_T$ i falę quasi-sprężystą podłużną traktować jako tłumioną, ale nie podlegającą dyspersji.

Poniżej podamy rozwiązanie bardzo prostego przykładu fali płaskiej, dotyczące działania płaskiego źródła ciepła o intensywności Q_0 . Źródło to zmienia się w sposób harmoniczny w czasie i działa w płaszczyźnie $x_1 = 0$. Otrzymamy tu

$$(7.12) \quad u_1 = \frac{mQ_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left[\exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] - \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] \right] \right\}, \quad x_1 > 0,$$

$$\theta = \frac{Q_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left[\frac{k_2^2 - \sigma^2}{ik_2} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_2} \right) - \vartheta_2 x_1 \right] - \frac{k_1^2 - \sigma^2}{ik_1} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{v_1} \right) - \vartheta_1 x_1 \right] \right] \right\}, \quad x_1 > 0.$$

Prędkości fazowe v_p i współczynniki tłumienia ϑ_p bierzemy ze wzorów (7.11).

Gdyby pominąć sprzężenie pola odkształcenia i temperatury, tzn. jeśli w równaniu przewodnictwa cieplnego pominąć człon $\eta \dot{\epsilon}_{kk}$, to wstawiając zamiast $k_1(\epsilon)$, $k_2(\epsilon)$ wielkości $k_1(0) = \sigma$, $k_2(0) = \sqrt{q}$, otrzymamy z (7.12) rozwiązanie przybliżone teorii naprężeń cieplnych.

$$(7.13) \quad u_1 = \frac{mQ_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sigma^2 - q} \left[\exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{c_1} \right) \right] - \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right) - x_1 \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right] \right] \right\},$$

$$\theta = \frac{Q_0}{2\kappa} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{\sqrt{q}} \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x_1}{\sqrt{2\kappa\omega}} \right) - x_1 \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \right] \right\}.$$

Przemieszczenie u_1 składa się z dwu części: z fali nietłumionej sprężystej, posuwającej się z prędkością c_1 oraz z fali dyfuzyjnej tłumionej i ulegającej dyspersji.

Do tej pory rozwiązano szereg zagadnień szczegółowych dotyczących rozprzestrzeniania się fal płaskich w przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej. I tak I. N. SNEDDON [37] badał rozchodzenie się fali w przecie półnieskończonym i skończonym, przy założeniu rozmaitych warunków brzegowych, a więc rozmaitych przyczyn wywołujących fale, rozpatrując dla pręta skończonego drganie wymuszone. W. NOWACKI [38] rozpatruje działanie płaskich sił masowych w przestrzeni nieograniczonej oraz działanie płaskich źródeł ciepła wymuszających drgania w warstwie termo-sprężystej [38].

Interesującym rezultatem jest tu niewystępowanie zjawiska rezonansu przy drganiach wymuszonych. Wynika to z charakteru ruchu falowego, który jest tłumiony. Przy drganiach wymuszonych otrzymujemy amplitudy o skończonej wartości. I tak dla przypadku warstwy o grubości a , wolnej od naprężeń i temperatury w płaszczyznach ograniczających warstwę $x_1 = 0, a$, poddanej działaniu źródeł ciepła $Q = Q^* \cos \omega t$ otrzymamy dla naprężenia $\sigma_{11}(x_1, t)$ następujące wyrażenie:

$$(7.14) \quad \sigma_{11} = \frac{mQ_0\omega^2}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n^* \{ a_n^2 (a_n^2 - \sigma^2) \cos \omega t - \xi [a_n^2 (1 + \epsilon) - \sigma^2] \sin \omega t \}}{a_n^4 (a_n^2 - \sigma^2)^2 + \xi^2 [a_n^2 (1 + \epsilon) - \sigma^2]^2} \sin a_n x_1,$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \xi = \frac{\omega}{\varkappa}, \quad Q_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a Q^*(x_1) \sin \alpha_n x dx_1.$$

Nie otrzymamy tu rezonansu, gdyż mianownik pod znakiem sumy jest stałe dodatni. W przypadku szczególnym $\alpha_r^2 = \sigma^2$, odpowiadającym rezonansowi dla zagadnienia niesprężonego, r -ty wyraz szeregu przyjmuje postać

$$(7.15) \quad \sigma_{11}^{(r)} = -\frac{\rho \omega m}{\varepsilon} \sin \omega t \frac{Q_r^* \sin \alpha_r x_1}{\alpha_r^2}.$$

Człon ten ma wartość skończoną, choć wielkość naprężenia $\sigma_{11}^{(r)}$ będzie znaczna, gdyż ε jest dla metali rzędu kilku procent.

8. Fale kuliste i walcowe

Rozpatrzmy równania falowe charakteryzujące podłużne fale termosprężyste, wyprowadzone w p. 3 [wzory (3.9) i (3.11)]

$$(8.1) \quad \square_1^2 \Phi = m\theta,$$

$$(8.2) \quad D\theta - \eta \nabla^2 \Phi = 0.$$

Jeśli założyć, że ruch falowy zmienia się w sposób harmoniczny w czasie, zatem gdy

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^*(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad \theta(\mathbf{x}, t) = \theta^*(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t},$$

to z równań (8.1) i (8.2) otrzymamy następujące równania

$$(8.3) \quad (\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)(\Phi^*, \theta^*) = 0,$$

gdzie wielkości k_1, k_2 są pierwiastkami równania (7.4), dyskutowanymi w poprzednim punkcie.

Rozważmy te rozwiązania równania (8.3), które cechują się osobliwością w punkcie ξ i zależne są od promienia r , odległości punktu \mathbf{x} od punktu ξ . Rozwiązania te, które oznaczymy przez $\varphi_\alpha^*(r)$ spełniają równania

$$(8.4) \quad \frac{d^2 \varphi_\alpha^*}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\varphi_\alpha^*}{dr} + k_\alpha^2 \varphi_\alpha^* = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Tutaj $n = 3$ odnosi się do zagadnienia trójwymiarowego, $n = 2$ do zagadnienia dwuwymiarowego. W równaniu (8.4) nie należy wykonywać sumowania względem wskaźnika α .

Ogólne rozwiązanie równania (8.4) ma postać

$$(8.5) \quad \varphi_\alpha^*(r) = \frac{1}{r^m} [AH_m^{(1)}(k_\alpha r) + BH_m^{(2)}(k_\alpha r)], \quad m = \frac{n-2}{2}.$$

Tutaj $H_m^{(1)}$ i $H_m^{(2)}$ są funkcjami Hankela m -tego rzędu i pierwszego oraz drugiego rodzaju.

Dla $n = 3$ (zatem dla $m = 1/2$) mamy

$$H_{1/2}^{(1)}(k_\alpha r) = i \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha}} \frac{e^{ik_\alpha r}}{r}, \quad H_{1/2}^{(2)}(k_\alpha r) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha}} \frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}, \quad \alpha = 1, 2,$$

a rozwiązaniem równania (8.4) staje się funkcja

$$(8.6) \quad \varphi_\alpha^*(r) = A_1 \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} + B_1 \frac{e^{-ik_\alpha r}}{r}, \quad r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

W przestrzeni nieograniczonej termosprężystej w rachubę wchodzi jedynie pierwszy człon równania (8.6), bowiem rozwiązanie

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \right] = \frac{e^{-\vartheta_\alpha}}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v_\alpha} \right),$$

$$v_\alpha = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_\alpha)}, \quad \vartheta_\alpha = \operatorname{Im}(k_\alpha)$$

przedstawia falę rozbieżną, rozchodzącą się z przyjętą fazą od początku układu $r = 0$ do nieskończoności. Tylko to rozwiązanie ma sens fizyczny. Dla fali walcowej przy $n = 2$ oraz $m = 0$ otrzymamy

$$(8.7) \quad \varphi_\alpha^*(r) = AH_0^{(1)}(k_\alpha r) + BH_0^{(2)}(k_\alpha r), \quad r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad i, j = 1, 2.$$

Tutaj w rachubę wchodzi dla ośrodka nieograniczonego jedynie pierwszy człon związku (8.7), gdyż dla wielkich wartości argumentu otrzymamy wyrażenie

$$(8.8) \quad \operatorname{Re} [e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(k_\alpha r)] \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi r k_\alpha}} \cos \left(k_\alpha r - \frac{\pi}{4} - \omega t \right) [1 + O(r^{-1})],$$

przedstawiające falę rozbieżną rozprzestrzeniającą się w kierunku wzrastających r .

W wyrażeniu (8.8) symbol $O(r^{-\alpha})$ oznacza taką wielkość x , że stosunek x/r^α pozostaje ograniczony przy $r \rightarrow \infty$. Rozwiązania tu przedstawione: $e^{ik_\alpha r}/r$, $H_0^{(1)}(k_\alpha r)$ spełniać powinny w nieskończoności tak zwane warunki wypromieniowania [38, 39 i 40]:

$$(8.9) \quad \begin{cases} n = 3: & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \right) - ik_\alpha \frac{e^{ik_\alpha r}}{r} = e^{ik_\alpha r} O(r^{-2}), \quad \vartheta_\alpha > 0, \\ n = 2: & \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(k_\alpha r)) - ik_\alpha H_0^{(1)}(k_\alpha r) = e^{ik_\alpha r} O(r^{-3/2}), \quad \vartheta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Wzory te informują o zachowaniu się rozwiązań podstawowych w otoczeniu punktu nieskończenie odległego.

Jeżeli rozważać będziemy taką klasę rozwiązań równań (8.3), które zachowywać się będą w nieskończoności w sposób podobny jak rozwiązania podstawowe $e^{ik_\alpha r}/r$, $H_0^{(1)}(k_\alpha r)$, to żądać należy od funkcji $\Phi^* = \Phi_1^* + \Phi_2^*$ spełnienia w nieskończoności następujących warunków:

$$(8.10) \quad \begin{cases} n = 3: & \frac{\partial \Phi_\alpha^*}{\partial r} - ik_\alpha \Phi_\alpha^* = e^{ik_\alpha r} O(r^{-2}), \quad \vartheta_\alpha \geq 0, \\ n = 2: & \frac{\partial \Phi_\alpha^*}{\partial r} - ik_\alpha \Phi_\alpha^* = e^{ik_\alpha r} O(r^{-3/2}), \quad \vartheta_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Do tych warunków dodać należy jeszcze warunek o skończonej wartości funkcji

$$\Phi_{\alpha}^* = 0(1) \quad \text{dla} \quad r \rightarrow \infty,$$

gdzie symbol $0(1)$ oznacza wielkość dowolnie małą.

Podłużne fale kuliste uzyskuje się jedynie przy szczególnym doborze zaburzeń. Powstają one wskutek działania źródeł ciepła i sił masowych pochodzenia potencjalnego w ośrodku nieograniczonym jak i ośrodku nieograniczonym z pustką kulistą przy warunkach brzegowych cechujących się symetrią względem punktu.

Rozpatrzmy jeden z tych przypadków, mianowicie działania skupionego źródła ciepła $Q_0 e^{-i\omega t} \delta(r)$. Rozwiązanie równania (8.3) przyjmujemy w postaci

$$(8.11) \quad \Phi^* = \frac{1}{r} (A_1 e^{ik_1 r} + A_2 e^{ik_2 r}),$$

gdzie stałe A_1, A_2 wyznaczmy z warunku, aby przepływ ciepła przez powierzchnię kuli przy $r \rightarrow 0$ był równy intensywności źródła ciepła, oraz aby $u_r^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}$ dla $r = 0$ było równe zeru. W rezultacie otrzymuje się dla funkcji Φ^*, θ^* następujące wzory [41]

$$(8.12) \quad \Phi^* = \frac{mQ_0}{4\pi\kappa r(k_2^2 - k_1^2)} \left\{ \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_1} \right) - \vartheta_1 r \right] - \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_2} \right) - \vartheta_2 r \right] \right\},$$

$$\theta^* = \frac{Q_0}{4\pi\kappa r(k_2^2 - k_1^2)} \left\{ (k_2^2 - \sigma^2) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_2} \right) - \vartheta_2 r \right] - \right.$$

$$\left. - (k_1^2 - \sigma^2) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{r}{v_1} \right) - \vartheta_1 r \right] \right\}.$$

Tutaj ϑ_{α} jest współczynnikiem tłumienia, v_{α} prędkością fazową fali. Funkcje Φ^*, θ^* są tłumione, ulegają dyspersji, spełniają warunki wypromieniowania i wykazują osobliwość w punkcie $r = 0$.

Znajomość funkcji Φ^* zezwala na wyznaczenie przemieszczenia promieniowego $u_r = \partial \Phi / \partial r$. Dla $Q_0 = 1$ wzory (3.12) stają się funkcjami Greena dla potencjału $\hat{\Phi}^*$ i temperatury $\hat{\theta}^*$. Jeśli dany jest rozkład źródeł $Q(\mathbf{x}, t) = Q^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ w ograniczonym obszarze V_1 , to potencjał Φ^* wyrazi się wzorem

$$(8.13) \quad \Phi^*(x, \omega) = \int_{V_1} Q^*(\xi) \hat{\Phi}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) dV(\xi).$$

Dotąd rozwiązano szereg przypadków szczególnych odnoszących się do fal kulistych. Odnoszą się one do działania centrum ściskania w obszarze nieograniczonym oraz do przestrzeni z pustką przy założeniu różnych warunków brzegowych, cechujących się symetrią kulistą [41 i 38].

Dla fal kulistych opracowano szereg twierdzeń, które można traktować jako rozszerzenie twierdzenia Helmholtza dla elastokinetyki i analogicznego twierdzenia teorii przewodnictwa cieplnego na zagadnienia termosprężystości [31]. Istota tego twierdzenia jest następująca. Dany jest układ równań

$$(8.14) \quad (\nabla^2 + \sigma^2)u^* - mv^* = 0, \quad (\nabla^2 + q)v^* + \frac{q\varepsilon}{m}\nabla^2 u^* = 0,$$

regularnych w rozpatrywanym obszarze B . Tutaj u^* oznacza potencjał termosprężystego przemieszczenia, a v^* temperaturę. Wyeliminowanie z równań (8.14) funkcji v^* lub u^* prowadzi do równania typu (8.3).

Można wykazać, że jeśli na brzegu A obszaru B dane są funkcje u^* , v^* , $\partial u^*/\partial n$, $\partial v^*/\partial n$ to funkcja v^* w punkcie $\mathbf{x} \in B$ przedstawi się wzorem

$$(8.14) \quad v^*(\mathbf{x}) = \varkappa \int_A \left[\theta^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \frac{\partial v^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} - v^*(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \theta^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dA(\boldsymbol{\xi}) + \\ + \frac{\varepsilon q \sigma^2 \varkappa}{m^2} \int_A \left[\Phi^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} - u^*(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dA(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in B.$$

Tutaj funkcje $\theta^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\Phi^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ są rozwiązaniami równań

$$(8.15) \quad (\nabla^2 + \sigma^2) \Phi^* - m \theta^* = 0, \quad (\nabla^2 + q) \theta^* + \frac{q\varepsilon}{m} \nabla^2 \Phi^* = -\frac{1}{\varkappa} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in B,$$

gdzie

$$(8.16) \quad \Phi^* = \frac{m}{4\pi\varkappa(k_2^2 - k_1^2)r} (e^{ik_1 r} - e^{ik_2 r}), \quad \theta^* = \frac{1}{4\pi\varkappa(k_2^2 - k_1^2)} \frac{(n_2 e^{ik_2 r} - n_1 e^{ik_1 r})}{r}, \\ n_\alpha = k_\alpha^2 - \sigma^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Dla $\mathbf{x} \in \mathcal{C} - B$, gdzie \mathcal{C} jest całą przestrzenią, jest $v^*(\mathbf{x}) \equiv 0$. Dla zagadnienia niesprężonego ($\varepsilon = 0$), zatem dla teorii naprężeń cieplnych, odpada druga całka równania (8.14). W rezultacie otrzymuje się równanie

$$(8.17) \quad v^*(x) = \frac{1}{4\pi} \int_A \left[v^*(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ir\sqrt{q}}}{r} \right) - \frac{e^{ir\sqrt{q}}}{r} \frac{\partial v^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} \right] dA(\boldsymbol{\xi}), \quad r = r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

a więc znane twierdzenie z teorii przewodnictwa cieplnego. Dla funkcji $u^*(\mathbf{x})$ otrzymuje się następujący wzór:

$$(8.18) \quad u^*(\mathbf{x}) = \varkappa \int_A \left[\Phi^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \frac{\partial v^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} - v^*(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Phi^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n} \right] dA(\boldsymbol{\xi}) + \\ + \frac{\varkappa}{m} \int_A \left[\square_k^2 \Phi^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n} - u^*(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n} (\square_k^2 \Phi^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})) \right] dA(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in B, \\ u^*(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C} - B.$$

We wzorze tym wprowadzono symbol $\square_k^2 = \nabla^2 + k_1^2 + k_2^2 - \sigma^2$. Wzór (8.18) wyraża funkcję $u^*(\mathbf{x})$ wewnątrz obszaru B za pomocą funkcji

$$u^*(\boldsymbol{\xi}), \quad \frac{\partial u^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n}, \quad v^*(\boldsymbol{\xi}), \quad \frac{\partial v^*(\boldsymbol{\xi})}{\partial n}$$

na powierzchni A . Przy przejściu z termosprężystości do elastokinetyki otrzymuje się z (8.18) po szeregu przekształceń znane twierdzenie Helmholtza [42]

$$(8.19) \quad u^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_A \left[\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \right) \right] dA(\boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in B, \\ 0, & \text{jeśli } \mathbf{x} \in \varepsilon - B. \end{cases}$$

Tutaj

$$\sigma_1 = \frac{\omega}{(c_1)_s}, \quad \text{gdzie } (c_1)_s = \left(\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Fale walcowe powstać mogą w przypadku liniowego źródła ciepła lub też liniowego centrum ściskania bądź też w nieograniczonym ośrodku termosprężystym z pustką walcową, na której brzegu występuje ogrzanie, ciśnienie lub odkształcenie, rozłożone w sposób osiowo-symetryczny.

Z licznych rozwiązań [38, 41, 43] podamy tu tylko wynik końcowy odnoszący się do liniowego źródła ciepła $Q(r, t) = Q_0 e^{-i\omega t} \frac{\delta(r)}{2\pi r}$, $r = (x^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Dla amplitud potencjału termosprężystego przemieszczenia i dla temperatury otrzymuje się następujące wzory [41]:

$$(8.20) \quad \begin{aligned} \Phi^* &= \frac{Q_0 m i}{4\kappa(k_2^2 - k_1^2)} [H_0^{(1)}(k_1 r) - H_0^{(1)}(k_2 r)], \\ \theta^* &= \frac{Q_0 i}{4\kappa(k_2^2 - k_1^2)} [(\sigma^2 - k_1^2) H_0^{(1)}(k_1 r) - (\sigma^2 - k_2^2) H_0^{(1)}(k_2 r)]. \end{aligned}$$

Funkcje te spełniają warunki wypromieniowania. Są one tłumione i ulegają dyspersji.

9. Funkcje Greena dla nieograniczonego ośrodka termosprężystego. Osobliwe równanie całkowite termosprężystości

W poprzednim punkcie przedstawiono funkcje Greena dla punktowego i liniowego źródła ciepła. Spełniają one równania

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij,j} &= -\omega^2 \rho \hat{u}_i, \\ \hat{\theta}_{,kk} + h_3^2 \hat{\theta} + \frac{\gamma}{\alpha} \hat{u}_{k,k} &= -\frac{1}{\kappa} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Przez \hat{u} , $\hat{\theta}$ oznaczamy tu amplitudy przemieszczeń i temperatury. Z kolei wyznaczyć należy funkcje Greena dla siły skupionej. Niech w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ obszaru nieograniczonego działa siła skupiona $X_i = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{i1} e^{-i\omega t}$, zwrócona w kierunku osi x_1 . Działanie tej siły wywoła zarówno falę podłużną jak i poprzeczne. Rozwiązać należy układ równań

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(1)} &= -\omega^2 \rho u_i^{(1)} - \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{i1}, \\ \theta_{,kk}^{(1)} + h_3^2 \theta^{(1)} + \frac{\gamma}{\alpha} u_{k,k}^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

w których przez $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ oznaczono amplitudę naprężeń, przemieszczeń oraz temperaturę wywołaną działaniem siły skupionej, działającej w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ i zwróconej w kierunku osi x_1 . Układ równań (9.2) zastąpić można układem równań falowych

$$(9.3) \quad (\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 + k_2^2)\Phi^{(1)} = -\frac{1}{c_1^2}(\nabla^2 + q)\vartheta,$$

$$(9.4) \quad (\nabla^2 + \tau^2)\psi_i^{(1)} = -\frac{1}{c_2^2} \chi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Równania te wynikają z równań (9.2) przy założeniu, że

$$(9.5) \quad \mathbf{u}^{(1)} = \text{grad } \Phi^{(1)} + \text{rot } \Psi^{(1)}; \quad \mathbf{X} = \varrho(\text{grad } \vartheta + \text{rot } \chi).$$

Amplitudę sił masowych wyznaczamy ze wzorów [44]

$$(9.6) \quad \begin{aligned} \vartheta(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varrho} \int_V \mathbf{X}(\mathbf{x}') \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}', \mathbf{x})} \right) dV(\mathbf{x}'), \\ \chi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varrho} \int_V \mathbf{X}(\mathbf{x}') \times \text{grad}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}', \mathbf{x})} \right) dV(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Dla rozważanego tu przypadku siły skupionej, zwróconej w kierunku osi x_1 , otrzymuje się

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi\varrho} \partial_1 \left(\frac{1}{r} \right), \quad \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = \frac{1}{4\pi\varrho} \partial_3 \left(\frac{1}{r} \right), \quad \chi_3 = -\frac{1}{4\pi\varrho} \partial_2 \left(\frac{1}{r} \right).$$

Z rozwiązania równań (9.4) otrzymamy

$$(9.6) \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_3 F_0(r, \omega), \quad \psi_3 = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_2 F_0(r, \omega),$$

gdzie

$$F_0(r, \omega) = \frac{1}{r} (e^{i\omega r} - 1), \quad r^2 = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Z rozwiązania równania (9.3) przy uwzględnieniu faktu, że funkcja $\Phi^{(1)}$ odznacza się osiową symetrią względem osi x_1 , otrzymuje się [44 i 45]:

$$(9.7) \quad \Phi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_1 F(r, \omega),$$

gdzie

$$F(r, \omega) = A_1 I_1 - A_2 I_2 - I_0, \\ A_1 = \frac{(k_1^2 - q)\sigma^2}{k_1^2(k_1^2 - k_2^2)}, \quad A_2 = \frac{(k_2^2 - q)\sigma^2}{k_2^2(k_1^2 - k_2^2)}, \quad I_0 = \frac{1}{r}, \quad I_\beta = \frac{e^{ik_\beta r}}{r}, \quad \beta = 1, 2.$$

Temperaturę $\theta^{(1)}$ wyznacza się ze wzoru

$$(9.8) \quad \theta^{(1)} = \frac{1}{m} (\nabla^2 + \sigma^2) \Phi^{(1)} + \frac{1}{c_1^2 m} \vartheta.$$

Wykorzystując wzór (9.5) i (9.8) otrzymamy

$$(9.9) \quad u_j^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \partial_1 \partial_j [F(r, \omega) - F_0(r, \omega)] + \frac{1}{4\pi\varrho c_2^2} \delta_{ij} \frac{e^{i\omega r}}{r},$$

$$(9.10) \quad \theta^{(1)} = \frac{q\sigma}{4\pi\varrho m c_1^2 (k_1^2 - k_2^2)} \partial_1 [I_1(r, \omega) - I_2(r, \omega)].$$

Funkcje te mają osiowość w punkcie ξ i spełniają warunki wypromieniowania w nieskończoności. Jeśli siła skupiona działa w kierunku osi x_s , to otrzymamy następujące wyrażenie dla tensora przemieszczeniowego Greena u_j^s oraz temperatury θ^s :

$$(9.11) \quad u_j^s = -\frac{1}{4\pi\varrho\omega^2} \{ \partial_j \partial_s [F(r, \omega) - F_0(r, \omega)] - \tau^2 \delta_{js} e^{i\omega r} \},$$

$$(9.12) \quad \theta^s = \frac{q\sigma}{4\pi\varrho m c_1^2 (k_1^2 - k_2^2)} \partial_s [I_1(r, \omega) - I_2(r, \omega)], \quad j, s = 1, 2, 3.$$

Z otrzymanych rozwiązań dla siły skupionej uzyskać można dalsze osobliwości, wyrażenia u_j^s , θ^s dla siły podwójnej, dla momentu skupionego oraz dla centrum ściskania.

Dla zagadnienia dwuwymiarowego otrzymuje się dla siły skupionej i zwróconej w kierunku osi x_s , następujące funkcje Greena [46]:

$$(9.13) \quad u_j^s = -\frac{i}{4\rho\omega^2} \{ \partial_j \partial_s [A_1 H_0^{(1)}(k_1 r) - A_2 H_0^{(1)}(k_2 r) - H_0^{(1)}(er)] - \tau^2 \delta_{js} H_0^{(1)}(er) \},$$

$$(9.14) \quad \theta^s = \frac{q\epsilon i}{4\rho m c_1^2 (k_1^2 - k_2^2)} \partial_s [H_0^{(1)}(k_1 r) - H_0^{(1)}(k_2 r)],$$

$$r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad j, s = 1, 2.$$

Znajomość funkcji przemieszczeniowych i temperatury dla działania skupionego źródła ciepła i siły skupionej zezwala na skonstruowanie metody całkowania równań termosprężystości dla ciała ograniczonego [31].

Wprowadzimy analogiczne do potencjałów elastokinetyki [39] potencjały powierzchniowe termosprężyste

$$(9.15) \quad V_s(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) u_k^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi}) \theta^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}),$$

$$V(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi}) \theta(\boldsymbol{\xi}) + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \hat{u}_k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}).$$

Tutaj $\varphi_k = \varphi_k(\boldsymbol{\xi})$, $\psi(\boldsymbol{\xi})$ są nieznanymi gęstościami powierzchniowymi odpowiedniej regularności. Funkcje \hat{u}_k , $\hat{\theta}$, u_k^s , θ^s są funkcjami Greena, spełniającymi równania (9.1) i (9.2), funkcjami znanymi. Termospężystym potencjałem warstwy podwójnej nazywa się układ

$$(9.16) \quad W_s(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) p_k^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \theta^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n},$$

$$W(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \hat{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\partial n} + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \hat{p}_k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}).$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$p_k^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = [2\mu \epsilon_{kj}^s + (\lambda u_{p,p}^s - \gamma \theta^s) \delta_{kj}] n_j,$$

$$\hat{p}_k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = [2\mu \hat{\epsilon}_{kj} + (\lambda \hat{u}_{p,p} - \gamma \hat{\theta}) \delta_{kj}] n_j.$$

Wreszcie wykorzystywać można potencjał termosprężysty, będący kombinacją potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej

$$(9.17) \quad M_s(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) p_k^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi}) \theta^s(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}),$$

$$M(\mathbf{x}) = 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi}) \hat{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) \hat{p}_k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}).$$

Wykazuje się, że potencjały $V_s(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$ są funkcjami ciągłymi punktów $\mathbf{x} \in \Sigma$. Natomiast potencjały warstwy podwójnej $W_s(\mathbf{x})$, $W(\mathbf{x})$ wykazują nieciągłość na tej powierzchni. Mamy bowiem

$$(9.18) \quad W_s^{(i)}(\boldsymbol{\xi}_0) = -\varphi_s(\boldsymbol{\xi}_0) + W_s(\boldsymbol{\xi}_0), \quad W^{(i)}(\boldsymbol{\xi}_0) = -\psi(\boldsymbol{\xi}_0) + W(\boldsymbol{\xi}_0),$$

$$W_s^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_0) = \varphi_s(\boldsymbol{\xi}_0) + W_s(\boldsymbol{\xi}_0), \quad W^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_0) = \psi(\boldsymbol{\xi}_0) + W(\boldsymbol{\xi}_0).$$

Funkcje $W_s(\xi_0)$, $W_s^{(i)}(\xi_0)$ oraz $W_s^{(e)}(\xi_0)$ oznaczają kolejno granicę wektora $W_s(\xi)$ dla $\xi \rightarrow \xi_0 \in \Sigma$ po powierzchni Σ , $W_s(\xi)$ dla $\xi \rightarrow \xi_0 \in \Sigma$ od wnętrza obszaru V oraz $W_s(\xi)$ dla $\xi \rightarrow \xi_0 \in \Sigma$ przy $\xi \in \mathcal{C} - V$. Wykazuje się, że pierwsza całka powierzchniowa we wzorach (9.16) przedstawia funkcję nieciągłą, druga funkcję ciągłą.

Wprowadźmy dalej oznaczenia

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \check{p}_i(\mathbf{x}) &= [2\mu V_{(i,j)} + \lambda(V_{k,k} - \gamma V)\delta_{ij}]n_j(\mathbf{x}), \\ \check{\theta}(\mathbf{x}) &= V_{,k}n_k(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

gdzie V_s , V przedstawione są wzorami (9.15). Można wykazać, że

$$(9.20) \quad \begin{aligned} \check{p}_k^{(i)}(\xi_0) &= \varphi_k(\xi_0) + \check{p}_k(\xi_0), & \check{\theta}^{(i)}(\xi_0) &= \psi(\xi_0) + \check{\theta}(\xi_0), \\ \check{p}_k^{(e)}(\xi_0) &= -\varphi_k(\xi_0) + \check{p}_k(\xi_0), & \check{\theta}^{(e)}(\xi_0) &= -\psi(\xi_0) + \check{\theta}(\xi_0). \end{aligned}$$

Potencjały termosprężyste (9.15)–(9.17) oraz relacje dotyczące nieciągłości tych potencjałów pozwalają na redukcję podstawowych zagadnień brzegowych do rozwiązania układu osobliwych równań całkowych.

Rozpatrzmy przypadek danych na brzegu Σ przemieszczeń $u_s(\xi_0) = f_s(\xi_0)$ oraz temperatury $\theta(\xi_0) = g(\xi_0)$. Rozwiązania zagadnienia poszukuje się w postaci potencjału warstwy podwójnej (9.16), przyjmując

$$U_s(\mathbf{x}) = W_s(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}).$$

Łatwo sprawdzimy, że funkcje $U_s(\mathbf{x})$, $\theta(\mathbf{x})$ spełniają równania

$$(9.21) \quad L_{sk}U_k - \gamma \partial_s \theta = 0, \quad (\nabla^2 + q)\theta + \frac{\varepsilon}{m} \partial_k U_k = 0, \quad \mathbf{x} \in V,$$

gdzie

$$L_{sk} = (\mu \partial_p \partial_p + \omega^2 \rho) \delta_{sk} + (\lambda + \mu) \partial_s \partial_k.$$

Biorąc pod uwagę związki (9.18) dla funkcji $\varphi_k(\xi)$, $\psi(\xi)$ otrzymuje się następujący układ sprzężonych równań całkowych:

$$(9.22) \quad \begin{aligned} \varphi_s(\xi_0) - 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) p_k^s(\xi, \xi_0) - 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \theta^s(\xi, \xi_0)}{\partial n} &= -f_s(\xi_0), \\ \psi(\xi_0) - 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \xi_0)}{\partial n} - \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \check{p}_k(\xi, \xi_0) &= -g(\xi_0). \end{aligned}$$

Równania te mają postać osobliwych równań całkowych drugiego rodzaju, a całki w nich występujące należy rozumieć w sensie wartości głównych. Jeśli na brzegu Σ dane są przemieszczenia $u_i(\xi_0) = f_i(\xi_0)$ oraz przepływ ciepła $\partial \theta / \partial n|_{\xi=\xi_0} = S(\xi_0)$, to rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

$$U_s(\mathbf{x}) = M_s(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V,$$

gdzie funkcje M_s , M są dane wzorami (9.17). Sprawdzimy łatwo, że wewnątrz obszaru V spełnione są równania (9.21), a niewiadome gęstości spełniają układ równań osobliwych całkowych

$$(9.23) \quad \varphi_s(\xi_0) - 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) p_k^s(\xi, \xi_0) - 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \theta^s(\xi, \xi_0) = -f_s(\xi_0),$$

$$\psi(\xi_0) + 2 \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \psi(\xi) \frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \xi_0)}{\partial n_0} + \frac{2}{\alpha} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \varphi_k(\xi) \frac{\partial \hat{p}_k(\xi, \xi_0)}{\partial n_0} = S(\xi_0),$$

gdzie

$$\frac{\partial \hat{\theta}(\xi, \xi_0)}{\partial n_0} = \lim_{x \rightarrow \xi_0} \frac{\partial}{\partial n_x} \hat{\theta}(\xi, \mathbf{x}), \quad \text{gdy } \mathbf{x} \in \Sigma.$$

Analogicznie zdefiniowana jest wielkość $\partial \hat{p}(\xi, \xi_0) / \partial n_0$. Zauważmy wreszcie, że jeśli na Σ dane jest obciążenie $p_i = p_i(\xi_0)$ oraz strumień ciepła $S = S(\xi_0)$, to rozwiązanie należy poszukiwać przy użyciu potencjałów warstwy pojedynczej $V_s(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$. Badanie istnienia i jednoznaczności otrzymanych osobliwych równań przeprowadza się w podobny sposób, jak to ma miejsce w elastodynamice. Przedstawione tu układy równań całkowych osobliwych zawierają w sobie przypadki szczególne, odnoszące się do teorii naprężeń cieplnych, teorii przewodnictwa cieplnego oraz elastodynamiki.

Równoległe z rozwojem ogólnej teorii propagacji fal termosprężystych, harmonicznym zmieniających się w czasie, rozwiązano szereg zagadnień szczegółowych, doprowadzając je do postaci przydatnej do dyskusji. Przeważnie są to zagadnienia typowe dla elastokinetyki klasycznej, które w ramach termosprężystości doznały rozszerzenia i uogólnienia. Sporo uwagi poświęcono falom powierzchniowym. Zagadnienie to dyskutowane było najpierw w pracy F. J. LOCKETTA [47], a później w sposób szerszy i bardziej wnikliwy w pracy P. CHADWICKA i D. W. WINDLE'A [49].

Przy wyprowadzeniu fal powierzchniowych w płaskim stanie odkształcenia wychodzi się z równań falowych (dla fali podłużnej i poprzecznej) oraz równania przewodnictwa cieplnego. Fala posuwa się równoległe do płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń i zanika wraz z głębokością. Przyjmuje się, że w płaszczyźnie ograniczającej półprzestrzeń zanikają naprężenia i temperatura względnie naprężenia i przepływ ciepła. Z wyznacznika układu równań wyrażających jednorodne warunki brzegowe otrzymuje się równanie algebraiczne trzeciego stopnia o zespolonych współczynnikach. Jeden z pierwiastków tego równania, spełniający przepisane nierówności, daje prędkość fazową fali powierzchniowej. Okazuje się, że fala powierzchniowa doznaje tłumienia oraz dyspersji, prędkość jej jest mniejsza od prędkości fali podłużnej i poprzecznej.

W podobny sposób W. NOWACKI i M. SOKOŁOWSKI [51] zbadali propagację fali harmonicznnej w warstwie termosprężystej. Rozpatrzono tu tak symetryczną jak i antysymetryczną (fala giętą) postać fali i to przy dwu warunkach termicznych na brzegu: $\theta = 0$ oraz $\theta_{,n} = 0$. Ze względu na małość parametru ε , charakteryzującego ośrodek termosprężysty, podano rozwiązanie przybliżone równania przestępnego stosując metodę perturbacji.

Propagacją fal harmoniczych w nieskończonym walcu kołowym i w rurze grubościenniej zajął się F. J. LOCKETT [50] podając przynależne do tego zagadnienia równania przestępne. J. IGNACZAK i W. NOWACKI [52] rozpatrzyli drgania wymuszone walca nieskończonego o przekroju prostokątnym. Przyczyną wymuszającą drgania były tu ogrzania powierzchni walca oraz działanie źródeł ciepła. W pracy [53] ci sami autorzy podali metodę oraz rozwiązanie zagadnienia drgań wymuszonych podłużnych tarcz i drgań giętnych płyt, wywołanych działaniem obciążeń i ogrzania. Analogicznym zagadnieniem poświęcona jest praca P. CHADWICKA [54].

Dalszym zagadnieniem rozwiązany, to propagacja fali płaskiej termosprężystej w nieograniczonym ośrodku z pustką kulistą i walcową [40]. Chodzi tu o rzecz następującą. Płaska fala wywołana działaniem płaskiego źródła ciepła posuwa się w przestrzeni nieograniczonej i natrafia na pustkę kulistą lub walcową. Obmywając tę pustkę pole temperatury doznaje zaburzenia, w otoczeniu pustki następuje spiętrzenie temperatury i naprężeń. Uzyskano tu rozwiązanie częściowe w postaci zamkniętej oraz rozwiązanie resztkowe, wyrażające się nieskończonym układem równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach.

Spora grupa rozwiązań odnosi się do tzw. zagadnienia Lamba elastokinetyki klasycznej. Chodzi tu o rozpatrzenie wpływu obciążeń i ogrzań działających na półprzestrzeń termosprężystą. Rozwiązano tu dwa typowe zagadnienia, mianowicie gdy obciążenie czy też ogrzanie jest osiowo symetryczne oraz gdy obciążenie i ogrzanie wywołuje płaski stan odkształcenia [43]. Z tymi zagadnieniami spokrewnione są dalsze, dotyczące działania źródeł ciepła (skupionego i liniowego) w półprzestrzeni sprężystej [41]. Jednak rozwiązania tej grupy mają jedynie charakter formalny — dotąd nie udało się uzyskać nawet rozwiązań przybliżonych, przydatnych do dyskusji.

10. Zagadnienia aperiodyczne termosprężystości

Wymieniona tu dziedzina badań jest najmniej rozwiniętym działem termosprężystości. Spowodowane to jest wielkimi trudnościami matematycznymi rozwiązania.

Przy rozwiązywaniu zagadnień aperiodycznych termosprężystości stosowane są na ogół trzy drogi. Pierwsza polega na wyeliminowaniu z równań różniczkowych termosprężystości

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i &= \rho \ddot{u}_i + \gamma \theta_{,i}, \\ \theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{e} &= -\frac{Q}{\kappa} \end{aligned}$$

czasu t przez wykonanie na tych równaniach transformacji Laplace'a względnie transformacji Fouriera względem czasu t . Pierwsza z wymienionych transformacji jest najczęściej stosowaną ze względu na obszerny zbiór transformacji odwrotnych. Dokonując zatem na (10.1) transformacji Laplace'a, określonej związkami

$$\mathcal{L}(u_i, \theta) = (\bar{u}_i, \bar{\theta}) = \int_0^{\infty} (u_i, \theta) e^{-pt} dt, \quad p > 0$$

i zakładając jednorodność warunków początkowych uzyskamy z (10.1) następujące przetransformowane równania:

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{i,ji} + \bar{X}_i &= \rho p^2 \bar{u}_i + \gamma \bar{\theta}_{,i}, \\ \bar{\theta}_{,jj} - \frac{p}{\kappa} \bar{\theta} - \eta p \bar{u}_{j,j} &= -\frac{\bar{Q}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Tutaj nieznanne funkcje \bar{u}_i , $\bar{\theta}$ są funkcjami położenia \mathbf{x} i parametru transformacji p . Rozwiązanie równań (10.2) nie nastęrcza dla wielu zadań szczególnych, większych trudności; są one tego samego rzędu jak w zagadnieniach drgań harmonicznie zmiennych w czasie. Istotną trudność leży tu w wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a na uzyskanych rozwiązaniach $\bar{u}_i(\mathbf{x}, p)$, $\bar{\theta}(\mathbf{x}, p)$.

Druga droga rozwiązania polega na wykonaniu na równaniach (10.1) potrójnej transformacji całkowej Fouriera względem zmiennych x_i . W ten sposób doprowadza się równania (10.1) do układu równań różniczkowych zwyczajnych, w których czas występuje jako zmienna niezależna. Po rozwiązaniu tego równania wykonuje się odwrotną potrójną transformację Fouriera [56].

Trzecia droga chętnie stosowana dla przestrzeni i półprzestrzeni termosplężystej polega na stosowaniu poczwórnej transformacji Fouriera. Układ równań (10.1) sprowadza się do układu czterech równań algebraicznych dla transformat \bar{u} , $\bar{\theta}$. Poczwórna transformacja odwrotna prowadzi tu do ostatecznego wyniku [65 i 66].

Każda z tych dróg związana jest z dużymi trudnościami matematycznymi; są one tak wielkie, że dotąd nie uzyskano żadnego rozwiązania w postaci zamkniętej.

Rozpatrzmy nieco szczegółowiej równania falowe (3.9) i (3.11) wywodzące się z równań (10.1). Jeśli stosować pierwszą drogę postępowania i na równaniach falowych wykonać transformację Laplace'a przy założeniu jednorodnych warunków brzegowych, to otrzymamy układ równań

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \left[\left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) \left(\nabla^2 - \frac{p}{\kappa} \right) - \frac{\varepsilon p}{\kappa} \nabla^2 \right] \bar{\Phi} &= -\frac{m}{\kappa} \bar{Q} - \frac{1}{c_1^2} \left(\nabla^2 - \frac{p}{\kappa} \right) \bar{\vartheta}, \\ \left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_2^2} \right) \bar{\psi}_i &= -\frac{1}{c_2^2} \bar{\chi}_i, \\ \bar{\theta} &= \frac{1}{m} \left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2} \right) \bar{\Phi}, \quad \varepsilon = \eta m \kappa, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Równanie fali podłużnej przy $Q = 0$, $\vartheta = 0$ przedstawić możemy w postaci

$$(10.4) \quad (\nabla^2 - \lambda_1^2)(\nabla^2 - \lambda_2^2) \bar{\Phi} = 0,$$

gdzie λ_1 , λ_2 są pierwiastkami równania bikwadratowego:

$$\lambda^4 - \lambda^2 p \left[\frac{p}{c_1^2} + \frac{1}{\kappa} (1 + \varepsilon) \right] + \frac{p^3}{\kappa c_1^2} = 0.$$

Ponieważ pierwiastki tego równania

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p}{\kappa} (1 + \varepsilon) + \frac{p^2}{c_1^2} \pm \left[\left(\frac{p}{\kappa} (1 + \varepsilon) + \frac{p^2}{c_1^2} \right)^2 - \frac{4p^3}{\kappa c_1^2} \right]^{1/2} \right\},$$

wyrażają się w sposób nader złożony jako funkcje parametru p , to widocznym się staje, że wykonanie odwrotnej transformacji Laplace'a na funkcjach $\bar{\Phi}$, $\bar{\theta}$ natrafia na wielkie trudności. Z konieczności zwrócić się trzeba do rozwiązań przybliżonych. Na ogół stosuje się dwie drogi przybliżonego rozwiązania. Pierwsza polega na wykorzystaniu faktu, że wielkość $\varepsilon = \eta m \kappa$ jest mała ($\varepsilon \ll 1$) i że można ją traktować jako mały parametr [36]. Przedstawiając zatem funkcje Φ i θ szeregiem potęgowym względem ε :

$$(10.5) \quad \Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots,$$

doprowadzimy równanie (10.3) do układu równań

$$(10.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \bar{\Phi}_0 &= -\frac{m}{\kappa} \bar{Q} - \frac{1}{c_1^2} \mathcal{D}_2 \bar{\theta}, \\ \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \bar{\Phi}_1 &= \frac{p}{\kappa} \nabla^2 \bar{\Phi}_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{D}_1 = \nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2}, \quad \mathcal{D}_2 = \nabla^2 - p/\kappa.$$

Dla temperatury $\bar{\theta}$ otrzymamy

$$(10.7) \quad \bar{\theta} = \frac{\mathcal{D}_1}{m} (\bar{\Phi}_0 + \varepsilon \bar{\Phi}_1 + \varepsilon^2 \bar{\Phi}_2 + \dots).$$

Przy stosowaniu metody perturbacji wystarczy dla celów praktycznych ograniczyć się do dwu członów szeregu (10.5).

Zauważmy jeszcze, że funkcje Φ_0 , θ_0 odnoszą się do zagadnienia niesprężonego.

Inny wariant metody perturbacyjnej polega na rozwiązaniu równań (10.3), a następnie na rozwinięciu funkcji zawierających wielkości $k_1(\varepsilon, p)$, $k_2(\varepsilon, p)$ w szereg potęgowy względem parametru ε . Wariant ten z powodzeniem został zastosowany przez R. B. HETNARSKIEGO [55 i 61] przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień odnoszących się do przestrzeni i półprzestrzeni termosprężystej.

Druga droga rozwiązania przybliżonego polega na określeniu funkcji Φ , θ dla małych czasów. Rozwiązania tego typu są bardzo użyteczne, gdyż istotna różnica między zagadnieniem dynamicznym i quasi-statycznym istnieje dla małych czasów t . Ze wzrostem czasu różnica ta zanika.

W myśl twierdzenia ABELA

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \mathcal{L}[f(t)],$$

małym czasom odpowiadają wielkie wartości parametru p w transformatach Laplace'a. Należy zatem w rozwiązaniach równań (10.2) czy też równań (10.3) rozwinąć wyrażenie zawierające wielkości $k_1(\varepsilon, p)$, $k_2(\varepsilon, p)$ według potęg $1/p$, zatrzymując kilka członów tego rozwinięcia. Wykonanie odwrotnej transformacji Laplace'a daje ostatecznie przybliżone rozwiązanie zadania.

Prace dotyczące propagacji fal aperiodycznych są nieliczne i odnoszą się do układów najprostszych, do przestrzeni i półprzestrzeni sprężystej. I tak zagadnieniem działania chwilowego i ciągłego skupionego źródła ciepła w nieograniczonej przestrzeni termosprężystej zajął się R. B. HETNARSKI [55 i 61] stosując tak metodę perturbacji, jak i małych czasów. Zagadnienie działania chwilowej i skupionej siły działającej w przestrzeni rozpatrzone było przez E. SOŁSA [17]. Wpływem warunków początkowych na propagację fal termosprężystych w przestrzeni nieograniczonej zajął się W. NOWACKI [57].

Z przedstawionymi tu zagadnieniami spokrewnione jest zagadnienie wyznaczenia pola odkształcenia i temperatury wokół pustki kulistej w przestrzeni nieograniczonej. Zagadnienie nagłego obciążenia brzegu ciała z pustką było przedmiotem dwu prac. W pierwszej M. LESSEN [58] stosuje metodę perturbacji, w drugiej P. CHADWICK [36] przedstawia zastosowanie metody asymptotycznej dla małych czasów.

Zagadnieniem nagłego ogrzania brzegu ciała z pustką kulistą zajął się G. A. NARIBOLI [59] stosując metodę perturbacji. Z uzyskanych rozwiązań przybliżonych wynika, że fale termosprężyste doznają dyspersji i tłumienia. Wpływ sprzężenia pola odkształcenia i temperatury jest nieznaczny. Rozwiązania ilościowo niewiele odbiegają od rozwiązań otrzymanych w ramach teorii naprężeń cieplnych.

Drugim ważnym problemem, któremu poświęcono kilka prac, to propagacja fali płaskiej w półprzestrzeni termosprężystej, wywołana nagłym ogrzaniem płaszczyzny ograniczającej półprzestrzeń. Chodzi tu o uogólnienie znanego z teorii naprężeń cieplnych «zagadnienia Daniłowskiej». Problem ten podjął R. B. HETNARSKI [60 i 61] przy użyciu metody perturbacyjnej oraz przy wykorzystaniu twierdzenia Abela dla małych czasów. Ten sam problem podjęli B. A. BOLEY i I. S. TOLINS [62] oraz R. MUKI i S. BREUER [63]. Działanie ogrzania punktowego półprzestrzeni termosprężystej było przedmiotem pracy G. PARI [64].

Propagacji fali podłużnej w półprzestrzeni sprężystej i w przecie nieskończonym i półnieskończonym poświęcone były prace I. N. SNEDDONA [37] oraz J. IGNACZAKA [56]. W tej ostatniej pracy zastosowano najpierw transformację Fouriera względem zmiennej miejsca i dalej rozwiązano równanie różniczkowe zwyczajne trzeciego rzędu względem czasu. Rozwiązanie tego równania oraz wykonanie odwrotnej transformacji Fouriera doprowadziło do ostatecznego wyniku.

Na zakończenie tego przeglądu przedstawić należy dalsze kierunki rozwojowe termosprężystości.

Wydaje się, że można oczekiwać uzyskania dalszych ogólnych twierdzeń, stanowiących uogólnienie znanych twierdzeń z elastodynamiki. Chodzi tu o uogólnienie twierdzeń KIRCHHOFFA, WEBERA i VOLTERRA. Czyni się również próby [72] uzyskania dalszych, obszerniejszych twierdzeń wariacyjnych. Dalsze badania pójdą również w kierunku uwolnienia się od ograniczenia małych odkształceń, a więc w kierunku rozwijania nieliniowej geometrycznie termosprężystości. Innym kierunkiem — to odstępianie od ograniczenia $|\theta/T_0| \ll 1$, a więc badania ciał o podwyższonych temperaturach, gdy współczynniki termiczne i mechaniczne są funkcjami temperatury. Ostatnio zapoczątkowane zostały badania w dziedzinie powiązania pola odkształcenia, temperatury oraz pola elektrycznego w piezoelektrykach [73, 74

i 75]. Interesującym jest również zapoczątkowany kierunek magneto-termosprężystości [76–81]. Chodzi tu o badanie pola odkształcenia, pola temperatury oraz pola elektrodynamicznego w przewodnikach elektrycznych w obecności silnego, pierwotnego pola magnetycznego.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Literatura

1. J. M. C. DUHAMEL, *Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, J. de l'Ecole Polytechn., **15** (1837), 1–15.
2. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, 1910.
3. H. JEFFREYS, *The thermodynamics of an elastic solid*, Proc. Camb. Phil. Soc., **26** (1930).
4. M. A. BIOT, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys., **27** (1956).
5. S. R. DE GROOT, *Thermodynamics of irreversible processes*, Amsterdam 1952.
6. B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, John Wiley, New York 1960.
7. J. F. NEY, *Własności fizyczne kryształów*, PWN, 1962.
8. W. NOWACKI, *Some dynamic problems in thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., **1**, **11** (1959).
9. R. COURANT, D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1931.
10. GR. C. MOISIL, *Sisteme diferentiale adjuncte si formula de reciprocitate*, Bul. st. Acad. (R.P.R.), **3**, 1951, 189.
11. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Warszawa, Wyd. WAT, 1957.
12. V. IONESCU-CAZIMIR, (1) *Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic. II. Relațiile între tensiuni și temperatura*, Com. Acad. R.P.R., **2**, **1** (1951).
(2) *Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic. III. Relațiile între tensiuni*. Com. Acad. R.P.R., **5**, **1** (1951).
13. J. S. PODSTRIGACZ, *Podstawowe rozwiązanie nieustalonego zagadnienia termosprężystości* (w języku ukraińskim), Příkladna Mechanika, Kijów, **2**, **6** (1960).
14. D. RÜDIGER, *Bemerkung zur Integration der thermo-elastischen Grundgleichungen*, Österr. Ing. Archiv, **18** (1964), 1–2.
15. H. ZORSKI, (1) *Singular solutions for thermoelastic media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **6**, **6** (1958).
(2) *On a certain property of thermoelastic media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **6**, **6** (1958).
16. J. IGNACZAK, *Direct determination of stress from the stress equations of motion in elasticity*, Arch. Mech. Stos., **5**, **11** (1959).
17. E. SOÓS, *Galerkin's representation, Beltrami-Michell's conditions and Green's functions (for short time) in the linear theory of coupled thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., **17** (1965).
18. W. NOWACKI, *On the treatment of the two-dimensional coupled thermoelastic problems in terms of stresses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **3**, **9** (1961).
19. E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1952.
20. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Wien 1959.
21. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, New York 1960.
22. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1962.
23. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical theory of elasticity*, New York 1956.
24. V. IONESCU-CAZIMIR, *Problem of linear thermoelasticity. Uniqueness theorems* (I), (II). Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, **12** (1964).
25. V. IONESCU-CAZIMIR, *Problem of linear coupled thermoelasticity. Theorems on reciprocity for the dynamic problem of coupled thermoelasticity* (I). Bull. Acad. Polon. Sci. Série., Sci. Techn., **9**, **12** (1964).

- (2) *Problem of linear coupled thermoelasticity. Some applications of the theorems of reciprocity for the dynamic problem of coupled thermoelasticity (II)*. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, **12** (1964).
26. M. A. BIOT, *New thermoelastical reciprocity relations with application to thermal stresses*, J. Aero/Space Sciences, 7, **26** (1957).
27. V. M. MAJZIEL, *Temperaturnaja zadacza teorii uprugosti*, Kijów 1951.
28. A. Galka, *Green's functions for the coupled problem of thermoelasticity obtained from the solution of the theory of thermal stresses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, **13** (1965).
29. A. Galka, *Singular solutions of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., 7, **13** (1965).
30. E. TREFFTZ, *Mathematische Elastizitätstheorie*, Encyk. der Physic, 6, Berlin 1926.
31. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Singular integral equations of thermoelasticity*, Int. J. of Engineering Science, V, No 1, 1966.
32. W. NOWACKI, *Mixed boundary value problems of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11, **12** (1964).
33. H. DERESIEWICZ, *Plane wave in a thermoelastic solid*, J. Acoust. Soc. Amer., **29** (1957).
34. P. CHADWICK, I. N. SNEDDON, *Plane waves in an elastic solid conducting heat*, J. Mech. Phys. of Solids, 6 (1958).
35. L. BROUILLON, *Tenseur en mécanique et en élasticité*, Paris 1938.
36. P. CHADWICK, *Progress in solid mechanics. The dynamical theory*, Amsterdam 1960.
37. I. N. SNEDDON, *The propagation of thermal stresses in thin metallic rods*, Proc. Roy. Soc. Edin., Sec. A, 9, **65** (1959).
38. W. NOWACKI, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
39. V. KUPRADZE, *Progress in solid mechanics, V. III. Dynamical problems in elasticity*, Amsterdam 1963.
40. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The Sommerfeld conditions for coupled problems of thermoelasticity, Examples of coupled stresses and temperature concentration at cylindrical and spherical cavities*, Arch. Mech. Stos., 1, **14** (1962).
41. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 2, **11** (1959).
42. B. B. BAKER, E. T. COPSON, *The mathematical theory of Huygens' principle*, Oxford 1953.
43. W. NOWACKI, *Sur certain problèmes dynamiques de la thermoélasticité*, Acad. Polon. Sci. Centre Scient. à Paris, Fasc. 37, Paris 1962.
44. W. NOWACKI, *Green functions for an thermoelastic medium (I)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 6, **12** (1964).
45. W. NOWACKI, *Green functions for the thermoelastic medium (II)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, **12** (1964).
46. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity (II)*, Proc. Vibr. Probl., 5, **4** (1964).
47. F. J. LOCKETT, *Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves*, J. Mech. Phys. Solids, 7 (1958).
48. F. J. LOCKETT, *Propagation of thermal stresses in a semi-infinite medium*, AFOSR TN 59-448 (Duke Univ. ASTIA AD 215 923) Apr. 1959.
49. P. CHADWICK, D. W. WINDLE, *Propagation of Rayleigh waves along isothermal insulated boundaries*, Proc. Roy. Soc., **280**, No 1380, Ser. A, 1964.
50. F. J. LOCKETT, *Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes including thermoelastic effects*, Proc. Edinburgh Math. Soc., part. 3, **11** (1959).
51. W. NOWACKI, M. SOKOŁOWSKI, *Propagation of thermoelastic waves in plates*, Arch. Mech. Stos., 6, **11** (1959).
52. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *The plane dynamic problem of thermoelasticity*, Proc. Vibr. Probl., 4, **2** (1961).
53. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Transversal vibrations of a plate produced by heating*, Arch. Mech. Stos., 5, **13** (1961).
54. P. CHADWICK, *On the propagation of thermoelastic disturbance in thin plates and shells*, J. of Phys. Mech. Solids, V. No 10, 1962.

55. R. B. HETNARSKI, *Solution of the coupled thermoelastic problem in the form of series of functions*, Arch. Mech. Stos., 4, **16** (1964).
56. J. IGNACZAK, *Note on the propagation of thermal stresses in a long metallic rod*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 5, **7** (1959).
57. W. NOWACKI, *Some dynamic problems of thermoelasticity (III)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, **13** (1965).
58. M. LESSEN, *The motion of a thermoelastic solid*, Quart. Appl. Math., **15** (1957).
59. G. A. NARIBOLI, *Spherically symmetric thermal shock in a medium with thermal and elastic deformations coupled*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, **14** (1961).
60. R. B. HETNARSKI, *Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times*, Arch. Mech. Stos., **13** (1961).
61. R. B. HETNARSKI, *Coupled thermoelastic problem for the half-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1, **12** (1964).
62. B. A. BOLEY, I. S. TOLINS, *Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half-space*, J. Appl. Mech., **29** (1962).
63. R. MUKI, S. BREUER, *Coupling effects in transient thermoelastic problem*, Österr. Ing. Archiv. **16** (1962).
64. G. PARIA, *Coupling of elastic and thermal deformations*, Appl. Sci. Res. (A), **7** (1958).
65. G. EASON, I. N. SNEDDON, *The dynamic stresses produced in elastic bodies, by uneven heating*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A, **65** (1959).
66. F. J. LOCKETT, I. N. SNEDDON, *Propagation of thermal stresses in an infinite medium*, Proc. Edinburgh Math. Soc., part 4, **11** (1959).
67. M. LESSEN, *Thermoelastic damping at the boundary between dissimilar solids*, J. Appl. Phys., **28** (1957).
68. G. A. NARIBOLI, V. B. NYAYADHISH, *One dimensional thermoelastic wave*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 4, **16** (1963).
69. W. NOWACKI, *Green functions for the thermoelastic medium (III)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **13** (1964).
70. P. CHADWICK, *Thermal damping of a vibrating elastic body*, Mathematica, **9** (1962).
71. R. B. HETNARSKI, *The fundamental solution of the coupled thermoelastic problem for small times*, Arch. Mech. Stos., 1, **16** (1964).
72. G. HERRMANN, (1) *On a complementary energy principle in linear thermoelasticity*, J. Aero/Space Sciences, **25** (1958).
(2) *On variational principles in thermoelasticity and heat conduction*, Quart. Appl. Mech., 2, **21** (1963).
73. W. P. MASON, *Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics*, D. van Nostrand, New York 1950.
74. R. D. MINDLIN, *On the equation of motion of piezo-electric crystals. Problem of Continuum Mechanics*. Philadelphia 1961.
75. W. NOWACKI, *A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezo-electric crystals*, Proc. Vibr. Probl., 1, **6** (1965).
76. S. KALISKI, J. PETYKIEWICZ, *Dynamical equations of motion coupled with the field of temperatures and resolving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field*, Proc. Vibr. Probl., 3, **1** (1960).
77. G. PARIA, (1) *On magneto-thermo-elastic waves*, Proc. Camb. Phil. Soc., part. 3, **58** (1962).
(2) *Magneto-thermo-elastic interactions in an infinite solid due to instantaneous heat sources*, Proc. Vibr. Probl., 1, **5** (1964).
78. A. J. WILLSON, *The propagation of magneto-thermo-elastic plane waves*, Proc. Camb. Phil. Soc., **59** (1963).
79. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Excitation of mechanical-electromagnetic waves induced by a thermal shock*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1, **10** (1962).

80. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Combined elastic and electromagnetic waves produced by thermal shock in the case of a medium of finite elastic conductivity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 4, 10 (1962).

81. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Twierdzenie o wzajemności w magneto-termosprężystości (I)*, Biul. W.A.T., 11, 13 (1964).

Р е з ю м е

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Доклад посвящается развитию сопряженной термоупругости за последнее десятилетие. После обсуждения термодинамических основ теории выводятся основные соотношения и дифференциальные уравнения термоупругости и даются главные методы их решения. Основное содержание дальнейших рассуждений составляют общие энергетические и вариационные теоремы, теоремы о взаимности, а также вытекающие из них методы интегрирования уравнений термоупругости. В заключение представлен вопрос о распространении монохроматических и аперидических волн и обсуждаются полученные в этой области детальные результаты.

S u m m a r y

DYNAMICAL PROBLEMS OF THERMOELASTICITY

The paper is devoted to the development of the coupled thermoelasticity during the last ten years. After discussing the thermodynamical fundamentals of the theory, basic relations and the differential equations of thermoelasticity have been derived, also the main methods of solution. The central point of the further discussion consists in general theorems: energy theorems, variational principles, reciprocity theorems and consequently the method of integration of the equations of thermoelasticity. Finally, the problem of the propagation of the monochromatic and aperiodic waves has been presented and the main particular achievements in this field have been discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 lipca 1965 r.

PRZEGLĄD PRAC DOTYCZĄCYCH NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
ROZCIĄGANYCH ELEMENTÓW Z KARBEM

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

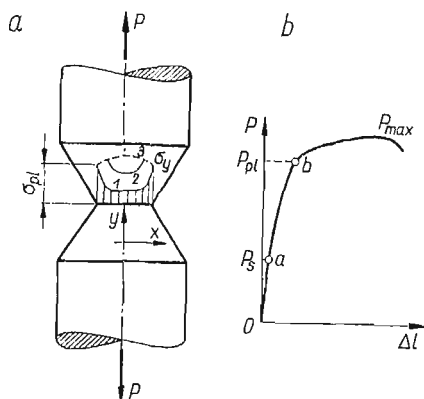
1. Wstęp

W stanie sprężystym nagłe zmiany przekroju poprzecznego wywołują znaczną nierównomierność rozkładu naprężeń. Maksymalne naprężenia w osłabionym przekroju mogą znacznie przewyższać naprężenia średnie obliczone jako iloraz siły przez pole przekroju. Tę koncentrację należy zawsze uwzględniać przy obliczaniu elementów obciążonych zmiennymi siłami, gdyż ona może być przyczyną powstania pęknięcia zmęczeniowego.

Istnieje jednak wiele praktycznie ważnych przypadków, gdy rozpatrywany element z karbem jest obciążony w sposób stały lub gdy liczba zmian obciążenia jest w całym okresie pracy elementu niewielka. Przy takim obciążeniu o zniszczeniu będą decydować bądź to odkształcenia plastyczne, bądź to kruche pęknięcie powstające przy pewnej granicznej wielkości obciążenia. To obciążenie nazywamy nośnością graniczną. Stosowane metale konstrukcyjne mają zwykle dobre własności plastyczne i pęknięcie powstaje w nich dopiero po rozwinięciu się dużych odkształceń plastycznych. Z tego względu analiza nośności granicznej oparta na założeniach teorii plastyczności ma duże znaczenie praktyczne.

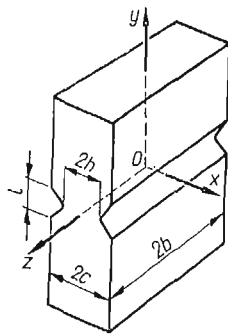
Przy niedużej wartości siły rozciągającej w pręcie istnieje sprężysty stan naprężenia, przy czym w miejscu zwężenia powstaje spiętrzenie naprężeń (krzywa 1 na rys. 1a). Gdy siła rozciągająca przekroczy pewną wielkość P_s , materiał w otoczeniu dna karbu osiąga stan plastyczny. Dalsze powiększanie siły powoduje powstawanie obszaru plastycznego (krzywa 2). Stanowi temu odpowiada na wykresie rozciągania (rys. 1b) odcinek ab . Wykres ten początkowo na odcinku Oa prostoliniowy ulega teraz zakrzywieniu, ale całkowite wydłużenie pręta jest w dalszym ciągu niewielkie, gdyż w środkowej części osłabionego przekroju materiał znajduje się w stanie sprężystym. W miarę wzrostu obciążenia obszar plastyczny rozszerza się i wreszcie dochodzi do osi przy sile równej P_{p1} . Od tej chwili cały przekrój poprzeczny znajduje się w stanie plastycznym i nawet stosunkowo niewielki przyrost obciążenia powoduje duże wydłużenie pręta. Rozkład naprężeń osiowych w najwęższym przekroju przedstawia krzywa 3 na rys. 1a. Dalszy wzrost siły rozciągającej możliwy jest tylko dzięki zjawisku wzmocnienia materiału, związanemu z dużym

mi odkształceniami. Po osiągnięciu przez siłę pewnej wielkości P_{max} następuje szybki proces prowadzący do zerwania pręta. Wartość siły P_{max} określa nośność graniczną pręta.



Rys. 1

Teoretyczne obliczenie nośności granicznej możliwe jest przy założeniu, że materiał pręta nie wykazuje wzmocnienia. Jeżeli w warunkach plastyczności przyjmiemy, że granica plastyczności ciała idealnie plastycznego pokrywa się z granicą plastyczności rzeczywistego materiału, to jako nośność graniczną otrzymamy wielkość siły P_{pl} (rys. 1). Do rzeczywistej wartości P_{max} możemy się zbliżyć zakładając odpowiednio wyższą granicę plastyczności. Zwracamy jednak uwagę, że dla $P = P_{pl}$

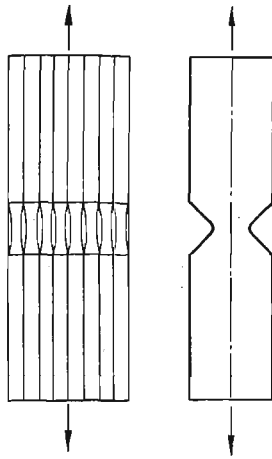


Rys. 2

pręt doznaje dużych odkształceń, a więc szczególnie w konstrukcjach maszynowych praktycznie traci wartość użytkową. Dla konstruktora wyznaczenie siły P_{pl} ma więc zasadnicze znaczenie i w stosunku do niej powinien obliczać zapas pewności.

Dla płaskich prętów osłabionych obustronnie korbami teoretyczna nośność graniczna może być wyznaczona w dwóch skrajnych przypadkach, mianowicie dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dla płaskiego stanu naprężenia. Do warunków płaskiego stanu odkształcenia zbliżamy się, gdy szerokość $2b$ (rys. 2) pręta jest dostatecznie duża w porównaniu z wymiarami miejsca osłabionego korbami. Przeciwnie, gdy szerokość $2b$ jest mała, w pręcie występują warunki płaskiego stanu

naprężenia. Istotnie bowiem, gdyby pręt składał się z szeregu cienkich płytek o łącznej grubości $2b$, to przy wspólnym rozciąganiu w każdej z płytek powstałoby w okolicy karbu znaczne zmniejszenie grubości (rys. 3). Jeżeli jednak pręt stanowi jedną całość, to powstanie takich lokalnych zwężeń jest niemożliwe. Dla $b \gg h$ w przekrojach dostatecznie oddalonych od czołowych powierzchni $z = \pm b$ odkształcenia w kierunku osi z są bardzo małe, rzędu sprężystych odkształceń przylegających grubszych części pręta. Można więc w przybliżeniu przyjąć, że przy znaczniejszych odkształceniach plastycznych mamy $\varepsilon_z = 0$. Przy dużym b w przeważającej części pręta panują warunki zbliżone do płaskiego stanu odkształcenia, co związane jest z występowaniem naprężenia normalnego $\sigma_z = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$. Na obu czołowych powierzchniach naprężenie to musi oczywiście zniknąć, a więc w sąsiadujących z nimi partiach materiału nie ma płaskiego stanu odkształcenia. Wpływ tego lokalnego zaburzenia maleje przy zwiększaniu szerokości $2b$. Na



Rys. 3

odwrot — przy małym b wpływ ten przeważa i dla $b \ll h$ można przyjąć, że w całym materiale $\sigma_z = 0$, a więc panują warunki płaskiego stanu naprężenia. Niestety teoria nie jest obecnie w stanie dać odpowiedzi, jaka będzie nośność graniczna przy pośrednich szerokościach pręta. W § 4 omówiono wyniki doświadczalnej analizy tego zagadnienia.

Dla prętów osiowo-symetrycznych możliwe jest obliczenie nośności przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących stanu naprężenia. Obliczenia te są jednak bardzo żmudne, wobec czego celowe jest opracowanie w tym przypadku uproszczonych metod dających wystarczającą dla celów praktycznych dokładność. Zagadnieniu prętów z osiową symetrią poświęcono § 5.

Osobnym zagadnieniem jest analiza procesu rozwijania się obszarów plastycznych powstających u dna karbu. Pełne rozwiązanie tego problemu sprawia jeszcze ciągle duże trudności. Znane rozwiązania uzyskane przy szeregu założeń upraszczających dotyczą jedynie płaskiego stanu odkształcenia i płaskiego stanu naprężenia.

2. Płaski stan odkształcenia

W pierwszych dwu punktach tego paragrafu przedstawione zostaną dwie różne metody wyznaczania nośności granicznej pręta. Pierwsza metoda zakłada, że materiał jest sprężysto-plastyczny. Pozwala to prześledzić cały proces rozwijania się uplastycznionych obszarów aż do połączenia się na osi pręta, co uważane jest za osiągnięcie stanu granicznego. Obliczenia przeprowadza się numerycznie, co wymaga wielkiego nakładu pracy. W nowszych pracach tej grupy posługiwano się maszynami cyfrowymi. W drugiej metodzie opartej na przyjęciu modelu ciała sztywno-plastycznego obliczenia w większości przypadków są bardzo proste, a rozwiązania uzyskuje się w postaci zamkniętej. Jednakże rozwiązania te są słuszne jedynie dla dostatecznie głębokich korbów, a więc przy wystarczająco dużym stosunku wymiarów c/h (rys. 2). Zagadnienie to szerzej omówimy w p. 2.3 tego paragrafu.

2.1. Rozwiązania sprężysto-plastyczne. Wyznaczanie stanu naprężenia sprowadza się do rozwiązania zagadnień brzegowych dla obszaru sprężystego i plastycznego. Znaczną trudność stanowi tu nieznaną granicę między tymi obszarami, która musi być wyznaczona jako jeden z elementów rozwiązania.

W swej klasycznej pracy D. N. ALLEN i R. SOUTHWELL [1] po wprowadzeniu funkcji naprężeń Airy'ego φ sprowadzili zagadnienie do całkowania równania biharmonicznego w obszarze sprężystym i równania

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4k^2$$

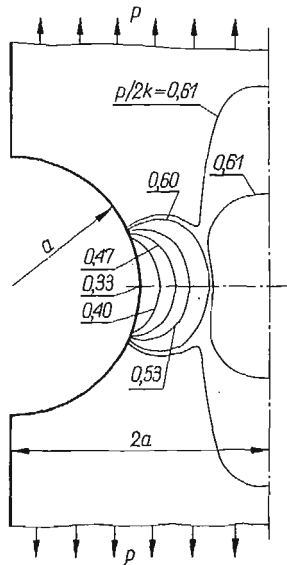
w obszarze plastycznym. Równanie to otrzymano przez podstawienie naprężeń określonych za pomocą funkcji φ do warunku plastyczności

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Całkowanie przeprowadza się numerycznie metodą relaksacji po zastąpieniu różniczek różnicami skończonymi. W całym badanym obszarze przyjmuje się odpowiednio gęstą kwadratową siatkę i wstępnie zakłada wartości funkcji φ w węzłowych punktach. Na całym brzegu obszaru funkcja φ jest znana. Rozwiązanie polega na obliczaniu kolejnych przybliżeń funkcji φ do chwili, gdy dwa następujące po sobie przybliżenia są wystarczająco bliskie. Procedura ta jest długotrwała i uciążliwa, ale stosując ją udało się rozwiązać szereg praktycznie ważnych przypadków.

Jednym z rozwiązanych w pracy [1] zagadnień jest rozciąganie pręta osłabionego dwoma półkolistymi wycięciami (rys. 4). Do chwili, gdy ciągle obciążenie na końcach pręta $p \leq 0,33 \cdot 2k$, cały materiał znajduje się w stanie sprężystym. Przy powiększaniu obciążenia powstają w najwęższym miejscu obustronne obszary plastyczne. Na rysunku zaznaczono położenie granic między obszarami plastycznymi a sprężystą częścią materiału dla różnych wielkości stosunku $p/2k$. Jak zwrócić uwagę R. HILL [2] dla wartości $p/2k > 0,45$ granice te są dwukrotnie przecinane przez niektóre linie poślizgu. Zagadnienie przestaje być statycznie wyznaczalne i przy wyznaczaniu granicy między obszarem sprężystym i plastycznym należałoby uwzględnić również warunki dla prędkości płynięcia. Jednakże mimo tego braku

przebieg rozchodzenia się obszarów plastycznych znaleziony przez ALLENA i SOUTHWELLA z pewnością niewiele odbiega od rzeczywistości. Przy obciążeniu $p = 0,60 \cdot 2k$ powstają dwa nowe plastyczne jądra na osi pręta w pewnej odległości od najwęższego przekroju. Te dwa nowe obszary rozszerzają się bardzo szybko i przy obciążeniu $p = 0,61 \cdot 2k$ łączą się z obu poprzednimi obszarami. Od tej chwili zaczynają się duże odkształcenia plastyczne pręta. Nośność graniczna jest więc



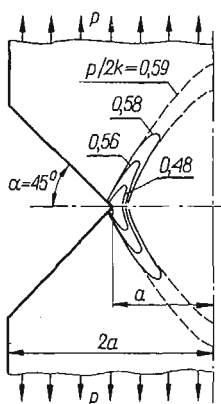
Rys. 4

określona wartością obciążenia $p = 0,61 \cdot 2k$. Średnie naprężenie osiowe w najwęższym przekroju równa się $1,22 \cdot 2k$, a więc jest znacznie większe od granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu, która w warunkach płaskiego stanu odkształcenia równa się $2k$.

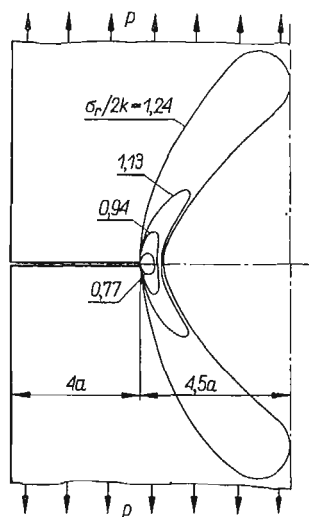
Innym przykładem podanym w pracy [1] jest rozciąganie pręta z ostrym karbem kątowym. Ten sam przypadek został przeliczony przez D. JURIŠICA [3] w inny sposób z uwzględnieniem warunku nierozdzielności również w obszarze plastycznym. Posługując się maszyną cyfrową rozwiązano od razu pełny układ równań różnicowych dla wszystkich węzłów przyjętej siatki. Rysunek 5 pokazuje rozchodzenie się obszarów plastycznych. Wynik ten niewiele odbiega od rozwiązania ALLENA i SOUTHWELLA. Obszary plastyczne mają kształt wąskich pasm i łączą się na osi pręta przy obciążeniu $p = 0,59 \cdot 2k$, pozostawiając w środku sprężyste jądro. Odpowiednia wartość otrzymana w pracy [1] wynosi $p = 0,64 \cdot 2k$, a więc niewiele więcej. Potwierdzenie istnienia sprężystego jądra otrzymał JURIŠIC metodą trawienia wzdłużnego przekroju odkształconego pręta. Średnie naprężenie w najwęższym przekroju równa się $1,18 \cdot 2k$.

W. ŻUKOWSKI [4] badał doświadczalnie proces odkształcenia w najwęższym przekroju pręta z karbem o zbliżonym kształcie wycięcia kąтового. Pomiarów odkształceń dokonywano na czołowych powierzchniach, nanosząc na nich za po-

mocą mikrotwardościomierza szereg gęsto rozmieszczonych punktów; odległość między punktami wynosiła 0,1 mm. W czasie rozciągania odczytywano za pomocą specjalnie dostosowanego mikroskopu o 100-krotnym powiększeniu zmianę odległości pomiędzy poszczególnymi punktami. Stwierdzono, że odkształcenia plastyczne obejmują jedynie mały odcinek najwęższego przekroju bezpośrednio sąsiadujący z dnem karbu. Wynik ten potwierdza istnienie jądra sprężystego, na które wskazują powyższe rozwiązania numeryczne. Pomiar Żukowskiego wykazuje, że jądro to istnieje przez cały czas procesu odkształcenia, aż do rozdzielenia obu części pręta. Jednakże w innej pracy [11] dla karbu o innym kącie α ta sama metoda pomiaru nie wykazała istnienia sprężystego jądra. Jest to związane z szerokością $2c$



Rys. 5



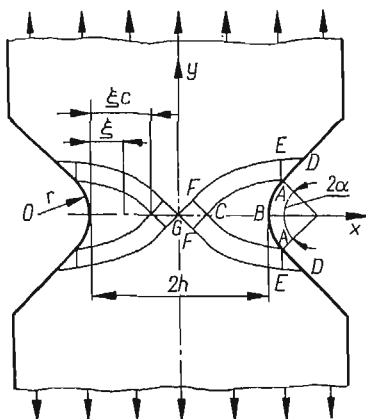
Rys. 6

części chwytowej (rys. 2), która, jak to zapewne uszło uwagi autora, była w pierwszym przypadku niedostateczna, a w drugim wystarczająco duża. Zagadnienie to omówimy w punkcie 2.3.

J. A. JACOBS [5] podał rozwiązanie dla pręta z obustronnym karbem w postaci wąskiej szczeliny, jaki otrzymuje się, gdy kąt wierzchołkowy α karbu z rys. 5 równa się zero. Obliczenia przeprowadzono metodą relaksacji analogicznie jak w pracy [1]. Ten sam karb szczelinowy zbadali A. H. S. ANG i G. N. HARPER [6] metodą relaksacji, zaprogramowaną na maszynę cyfrową. Procedura obliczeń uwzględnia jednocześnie wyznaczanie naprężeń i odkształceń na podstawie związków Prandtla-Reussa. Na rysunku 6 pokazano granice obszarów plastycznych, odpowiadające różnym wartościom średniego naprężenia σ_r w najwęższym przekroju. Przy $\sigma_r = 1,24 \cdot 2k$ obszary plastyczne łączą się na osi pręta.

W pracy Jacobsa [5] obliczenia wykonano przy różnych szerokościach części chwytowej, mianowicie dla $c/h = 2; 4$ i 8 . We wszystkich przypadkach otrzymano sprężyste jądro, co jak wspomniano nie potwierdza się w doświadczeniach przy wystarczająco dużym c . Wyjaśnienie tej rozbieżności wymaga jeszcze dalszych badań.

2.2. Rozwiązania sztywno-plastyczne. W przypadku gdy karb jest dostatecznie głęboki można oczekiwać, że powstające u jego dna obszary plastyczne będą się obustronnie łączyły na osi najwęższego przekroju, a nie jak w rozpatrywanych poprzednio rozwiązaniach w pewnej odległości od tego przekroju pozostawiając sprężyste jądro. Można wtedy wyznaczyć rozkład naprężeń wykorzystując teorię płaskiego stanu odkształcenia ciała sztywno-plastycznego. Jak wiadomo, w stanie plastycznym stan naprężenia w sąsiedztwie brzegu jest zależny jedynie od istniejących na nim warunków. Kontur karbu jest brzegiem swobodnym, a więc warunki brzegowe są na nim jednoznacznie określone. Rozwiązując zagadnienie brzegowe typu Cau-



Rys. 7

chy'ego możemy wyznaczyć z obu stron symetryczne siatki linii poślizgu aż do spotkania na osi pręta. Metoda podana przez R. HILLA [7] pozwala obliczyć w sposób numeryczny rozkład naprężeń i nośność graniczną dla dowolnego kształtu karbu.

Jeżeli zarys karbu utworzony jest z dwu prostych połączonych na dnie łukiem koła (rys. 7), to nośność graniczna może być prosto określona w postaci zamkniętej [7]. Linie poślizgu w polu $ABAC$ są spiralami logarytmicznymi, a naprężenie osiowe na odcinku BC równa się

$$\sigma_y = 2k \left[1 + \ln \left(1 + \frac{\xi}{r} \right) \right],$$

a więc rośnie od punktu B do C , przy czym $\xi_c = h(e^\alpha - 1)$.

W kwadracie $GFCF$ panuje jednorodny stan naprężenia, a siatka linii poślizgu składa się z dwóch rodzin prostych. Na odcinku CG naprężenie osiowe jest więc stałe i jak wynika z zależności, jakie muszą być spełnione wzdłuż linii poślizgu, ma ono wielkość $\sigma_y = 2k(1+a)$.

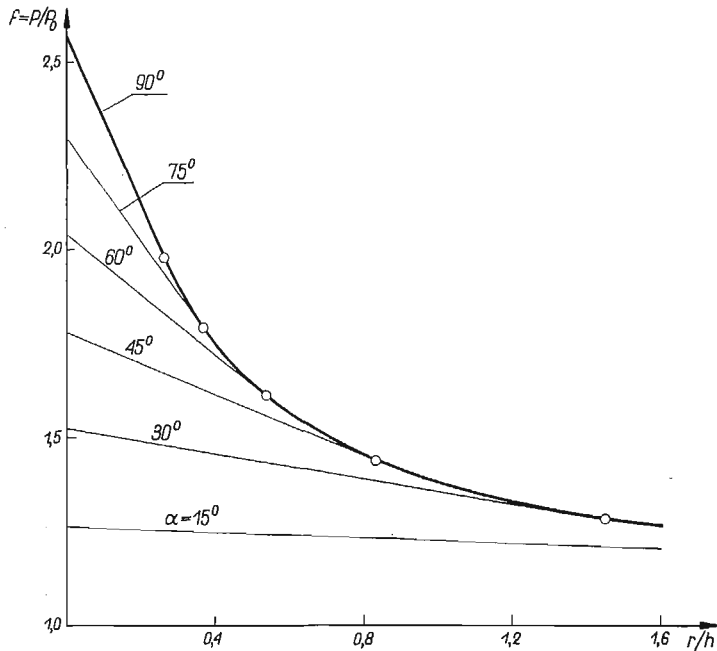
Po scałkowaniu naprężeń osiowych wzdłuż całej długości najwęższego przekroju BG otrzymujemy siłę graniczną

$$P = 4kh \left[(1+a) - \frac{r}{h}(e^\alpha - 1 - a) \right], \quad \left[\frac{r}{h} \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \right],$$

a więc większą od odpowiedniej siły $P_0 = 4kh$ dla pręta bez karbu o szerokości $2h$. Współczynnik zwiększenia siły dla pręta z karbem

$$f_{\text{teor}} = \frac{P}{P_0} = (1+a) - \frac{r}{h}(e^{\alpha} - 1 - a)$$

dla różnych kątów α przedstawiono na rys. 8 w zależności od stosunku r/h . Poszczególne proste dla różnych α mają wspólną obwiednią. Punkt styczności każdej prostej z obwiednią odpowiada stosunkowi r/h , przy którym punkt C na rys. 7



Rys. 8

pokrywa się z punktem G środka pręta. Dla jeszcze większych wartości stosunku r/h krańcowe spirale wychodzące z punktu G przecinają łuk ABA w pewnej odległości od jego końcowych punktów A . Siła graniczna równa się wtedy

$$P = 4kh \left(1 + \frac{r}{h}\right) \ln \left(1 + \frac{h}{r}\right).$$

Wyrażenie na współczynnik nośności

$$f_{\text{teor}} = \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{r}{h}\right) \ln \left(1 + \frac{h}{r}\right)$$

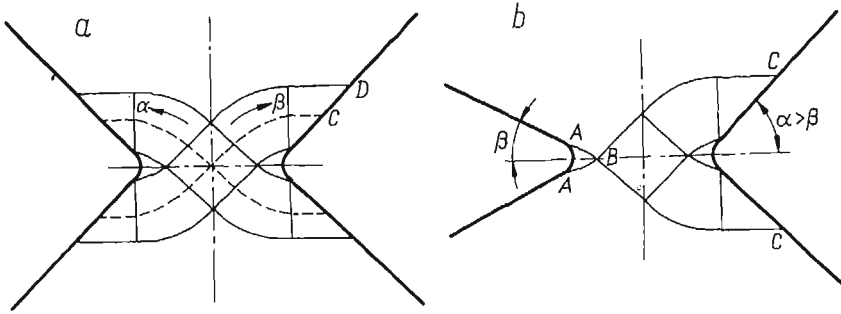
jest jednocześnie równaniem obwiedni z rys. 8.

Drugi skrajny przypadek karbu z rys. 7 otrzymujemy dla $r \rightarrow 0$, gdy karb przybiera formę ostrego kąтового wycięcia. Rozkład naprężeń osiowych w najwęższym przekroju jest równomierny, a współczynnik zwiększenia nośności równa się $P/P_0 = 1 + (\pi/2) - a$ i osiąga największą możliwą we wszystkich wartościach $f_{\text{max}} = 1 + \pi/2 = 2,571$ dla karbu szczelinowego ($\alpha = 0$).

To znaczne zwiększenie nośności granicznej pręta z karbem w stosunku do pręta bez wycięt o szerokości równej $2h$ tłumaczy się tym, że sprężyste partie materiału w sąsiedztwie karbu krępują swobodę odkształcania poprzecznego (zweźniania) materiału w najwęższej części pręta. Powstają wskutek tego poprzeczne naprężenia rozciągające σ_x , dzięki którym materiał przechodzi w stan plastyczny dopiero przy naprężeniach σ_y większych od $2k$.

Łatwo sprawdzić [7], że siatka linii poślizgu z rys. 7 jest kinematycznie dopuszczalna. Jeżeli przyjmiemy, że sztywne części pręta oddalają się z jednakową prędkością v_0 , to wzdłuż zewnętrznych linii poślizgu $DEFG$ możemy wyznaczyć normalną do nich składową prędkości. Pozwala to wyznaczyć prędkości w całym polu siatki linii poślizgu. Składowe styczne prędkości po obu stronach linii $DEFG$ będą oczywiście różne, gdyż od strony obszaru plastycznego określają je równania Geiringer, a od strony zewnętrznej ruch obszaru sztywnego jako całości. Linie $DEFG$ są więc liniami nieciągłości prędkości. Nieciągłość ta kończy się w punktach D na swobodnej powierzchni, co jest kinematycznie dopuszczalne.

Możliwe jest również rozwiązanie bez linii nieciągłości [8], pokazane na rys. 9a. Na odcinku CD swobodnej krawędzi prędkości mogą być dane dowolnie. Ażeby nie było nieciągłości w prędkościach, można na przykład przyjąć, że na odcinku CD

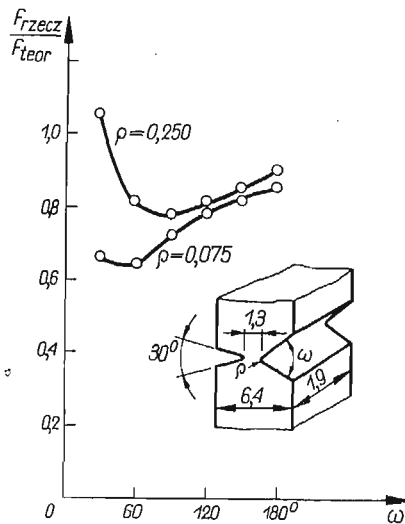


Rys. 9

skierowane wzdłuż linii poślizgu β składowe prędkości płynięcia rosną liniowo od zera w punkcie D w kierunku punktu C przy założeniu, że górna część pręta jest nieruchoma. Pewne uwagi na temat możliwych rozkładów prędkości w podobnym przypadku występującym przy wciskaniu stempla podał G. J. BYKOWCEW [9]. Ta niejednoznaczność pola prędkości jest typowa dla teorii płaskiego stanu odkształcenia ośrodka sztywno-plastycznego. Rozstrzygnięcie, które z nieskończonej liczby możliwych rozwiązań dla prędkości zachodzi w pręcie z rzeczywistego materiału, możliwe jest obecnie, jak się wydaje, jedynie na drodze doświadczalnej. Ścisła analiza bowiem, uwzględniająca wszystkie mogące mieć wpływ na przebieg procesu odkształcenia zjawiska, jak sprężystość materiału, wzmocnienie, ściśliwość a nawet struktura krystaliczna metalu jest w obecnym stanie wiedzy nieosiągalna.

Ciekawe jest, że w przypadku karbu niesymetrycznego (rys. 9b) pole prędkości jest określone jednoznacznie [8]. Zewnętrzne linie poślizgu ABC są liniami nieciągłości prędkości.

Badania doświadczalne wykazują, że rzeczywista wielkość f_{rzecz} współczynnika nośności pręta z karbem dobrze zgadza się z teoretyczną wartością f_{teor} . W. ŻUKOWSKI [10, 11] badał pręty z karbem o kształcie kąтового wycięcia z zaokrągleniem na dnie dla dwóch wartości całkowitego kąta wycięcia $2\alpha = 47^\circ$ i 102° . Pręty wykonane były ze średniowęglowej stali. Dla prętów z karbem o kącie 102° uzyskano [11] stosunek $f_{rzecz}/f_{teor} = 0,95$, przy czym współczynniki wyznaczano dla stosunku sił zrywających. Dla karbu o kącie 47° zgodność ta była znacznie gorsza, ale nie zwrócono uwagi na to, że w tym przypadku szerokość $2c$ części chwytowej pręta była zbyt mała. Zagadnienie to omówimy w p. 2.2. W pracy [12] stwierdzono dla karbu pokazanego na rys. 14 dla początku dużych odkształceń plastycznych $f_{rzecz}/f_{teor} = 1,05$, a dla sił zrywających $f_{rzecz}/f_{teor} = 0,88$. Materiałem badanych prętów było aluminium. Podobne wyniki otrzymano dla nieco innego kształtu karbu dla prętów z miękkiej stali. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że wielkość



Rys. 10

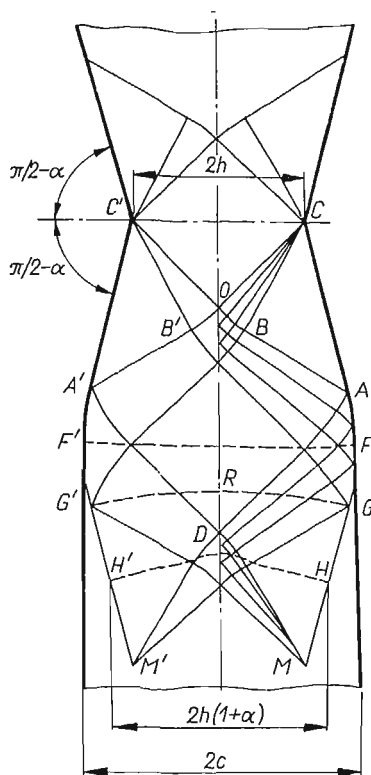
współczynnika f_{rzecz} zależy od czułości materiału na działanie karbu. Szczególnie dotyczy to siły zrywającej. Jak pokazał F. A. MCCLINTOCK [8] siła ta zależy również znacznie od wielkości próbki (efekt skali).

W pracy [8] badano również pręty osłabione karbem w sposób niesymetryczny. Na rysunku 10 pokazano wyniki badania próbek ze stopu aluminium, osłabionych niesymetrycznie wycięciami kątowymi zaokrąglonymi na dnie. Pręty z niesymetrycznymi karbami mają mniejszy rzeczywisty współczynnik nośności od próbek osłabionych symetrycznie, chociaż współczynniki teoretyczne mają jednakowe. Badanie doświadczalne próbek z niesymetrycznymi karbami ma więc istotne znaczenie dla określenia czułości materiału na działanie karbu.

2.3. Wpływ szerokości części chwytowych pręta. Osobnym zagadnieniem jest ustalenie minimalnej szerokości $2c$ części pręta poza karbem. W przekrojach znacznie odległych od karbu, w których można przyjąć, że panuje stan zwykłego rozciągania,

szerokość ta wynika z prostego warunku, że naprężenie rozciągające nie może przekroczyć wartości $2k$. Mamy więc $c/h = P/P_0$. Jednakże tak obliczona szerokość $2c$ jest z pewnością zbyt mała dla przekrojów niezbyt odległych od karbu. Całkowitą pewnością, że w przekrojach tych maksymalna siła określona nośnością graniczną karbu może być przeniesiona bez przekroczenia warunku plastyczności, możemy uzyskać budując przedłużenie stanu naprężenia w karbie na przylegające do niego obszary. Gdyby bowiem warunek plastyczności został w którymkolwiek punkcie przekroczony, znaczyłoby to, że materiał później osiągnie stan plastyczny w karbie niż w jego sąsiedztwie, a więc nośność graniczną całości określałaby nośność najsłabszego miejsca poza karbem. Taka sytuacja miała miejsce w jednym z badań W. Żukowskiego, omówionych w poprzednim punkcie.

Sposób zbudowania przedłużenia siatki linii poślizgu podał J. F. W. BISHOP [13]. Jest on oparty na jednym z podstawowych twierdzeń granicznych teorii ośrodka sztywno-plastycznego, z którego wynika wniosek, że nośność graniczna określona

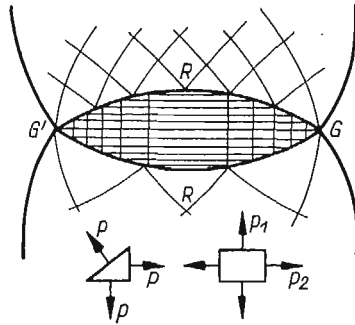


Rys. 11

z dowolnego rozkładu naprężeń, spełniającego równania równowagi i warunki brzegowe dla naprężeń oraz nigdzie nie przekraczającego warunku plastyczności, nie będzie większa od rzeczywistej nośności granicznej. Taki dowolny stan naprężenia nie musi spełniać warunków kinematycznych zagadnienia i nazywany jest statycznie dopuszczalnym. Z wniosku tego bezpośrednio wynika również zasada, że

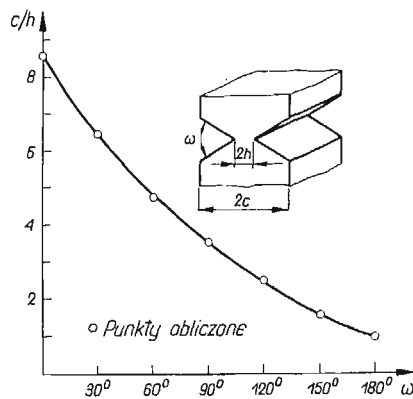
dodanie materiału nie może obniżyć nośności granicznej elementu. W dodanych partiach materiału możemy bowiem zawsze założyć zerowy stan naprężenia.

Sposób wyznaczania bezpiecznej szerokości $2c$ części chwytowych pręta wyjaśnimy na przykładzie pręta z ostrymi wycięciami o kącie $\pi - 2\alpha$ (rys. 11). Przedłużenie siatki linii poślizgu w karbie, ograniczonej skrajnymi liniami $ABOC'$ i $A'B'OC$,



Dys. 12

rozpocznijmy od rozwiązania zagadnienia charakterystycznego, określonego danymi wzdłuż odcinków linii poślizgu OBA i $OB'A'$. Dane te jednoznacznie określają stan naprężenia w czworokącie krzywoliniowym $OADA'$. Następnie należy rozwiązać zagadnienie odwrotne do zagadnienia brzegowego Cauchy'ego. Znając mianowicie przebieg linii poślizgu AD należy wyznaczyć kształt swobodnego brzegu AGM . Brzeg ten jest określony jednoznacznie. Dalsze przedłużanie siatki poza

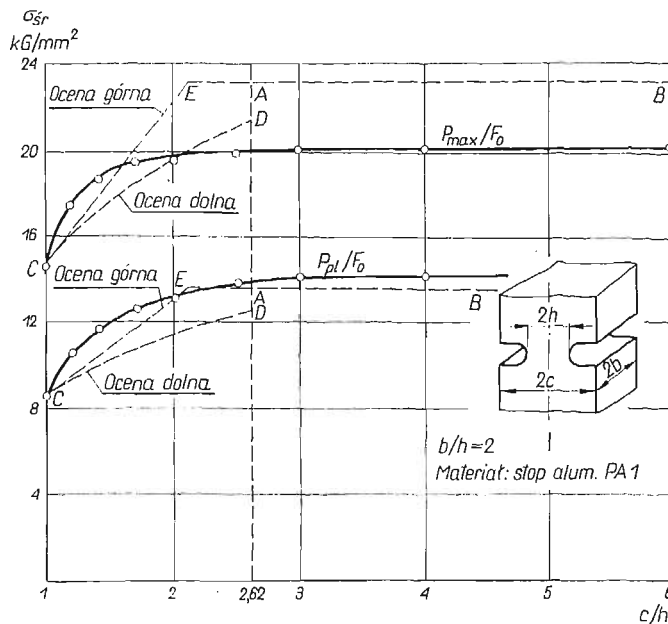


Rys. 13

linię DM możliwe jest po wprowadzeniu pewnej statycznie dopuszczalnej nieciągłości naprężeń.

Poprowadźmy trajektorię naprężeń głównych GRG' przez dowolny punkt G krawędzi poniżej najszerszego przekroju FF' . Zbudujmy następnie lustrzane odbicie tej trajektorii i znajdujące się nad nią siatki linii poślizgu (rys. 12). Podzielmy obydwie trajektorie na skończoną liczbę małych odcinków, na których naprężenie

normalne jest w przybliżeniu stałe. Pole zawarte pomiędzy trajektoriami podzielmy na szereg prostokątnych i trójkątnych elementów za pomocą prostych przechodzących przez punkty podziału trajektorii. W elementach trójkątnych panuje hydrostatyczny stan naprężenia, a w prostokątnych stan dwuosiowego rozciągania, przy czym oba naprężenia główne są równe naprężeniom normalnym przekazywanym w poprzek linii $G'RG'$ odpowiednio na pionowy i poziomy pasek, których przecięcie tworzy dany prostokąt. Zagęszczając siatkę pasków otrzymujemy w granicy statycznie dopuszczalne ciągłe pole naprężeń. Obie linie graniczne $G'RG'$ są liniami nieciągłości naprężeń typu statycznie dopuszczalnego. Można wykazać, że w żadnym punkcie tego pola warunek plastyczności nie będzie przekroczony. Jeżeli więc założymy, że kontur pręta ma kształt linii $CAFG$ i jej zwierciadlanego odbicia względem poziomej linii GG' , to nośność graniczna tej części pręta nie będzie niższa



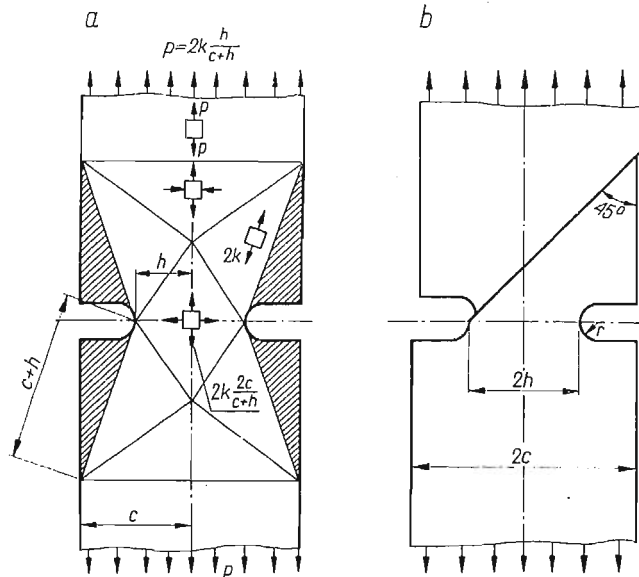
Rys. 14

niż przekroju CC' w karbie. Można jednak z łatwością wykazać, że część konturu pręta poniżej punktów G i G' mogą tworzyć również dwie proste równoległe do osi pręta. W tym przypadku linią nieciągłości naprężeń będzie również pozioma prosta GG' . W prostokątnej części poniżej niej panuje stan jednoosiowego rozciągania. Jak powiedziano punkty G i G' zostały wybrane dowolnie. Jeżeli jednak część pręta poniżej nich mają ograniczać proste równoległe do osi, to skrajne położenie punktu G i G' określają punkty H i H' , dające minimalną dopuszczalną szerokość części chwytowych pręta, równą $2h(1+a)$. Ta część pręta będzie wtedy rozciągana równomiernie rozłożonym naprężeniem równym $2k$. Jeżeli kontur pręta zostanie utworzony przez poprowadzenie prostych pionowych z punktów F i F' w najszerszym miejscu, to z pewnością nośność graniczna części pręta poza karbem

nie będzie mniejsza niż przekroju w karbie. Kontur ten zawiera bowiem wewnątrz poprzednie wystarczająco mocne kontury, a dodanie materiału nie może zmniejszyć nośności granicznej.

W powyższy sposób w pracy [8] wyznaczono bezpieczną szerokość części chwytowych dla pręta z karbem kątowym (rys. 13).

Na rysunku 14 linią ciągłą przedstawiono wyniki doświadczalnej weryfikacji wpływu szerokości $2c$ na nośność pręta z karbem półkolistym [12]. Z przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny wynika teoretyczny stosunek $(c/h_{\text{teor}} = 2,62$. Dla $c/h \geq 2,62$ teoretyczny współczynnik nośności, wynikający z rys. 8, równa się $f_{\text{teor}} = 1,57$. Dwie proste przerywane AB na rys. 14 podają odpowiednio teoretyczne wartości umownych naprężeń zrywających i początku plastycznego płynięcia,



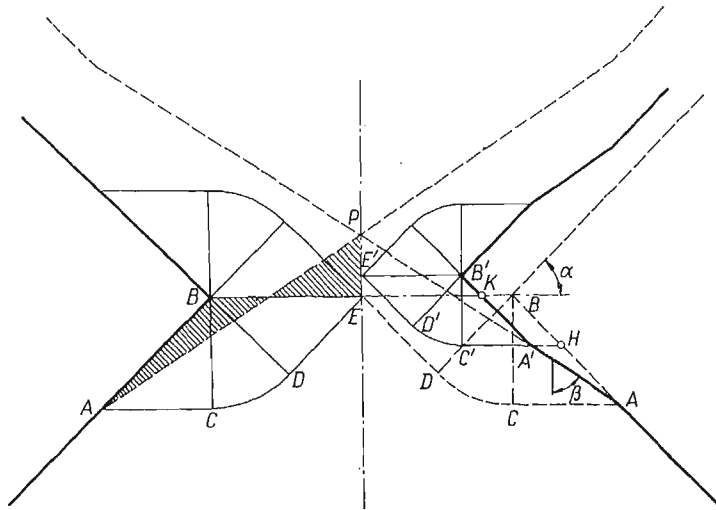
Rys. 15

obliczone przez pomnożenie odpowiednich naprężeń dla pręta bez karbu ($c/h = 1$) przez f_{teor} . Na odcinku AE rozwiązanie z rys. 7 i 8 może być uważane za górną ocenę rzeczywistej nośności, gdyż jest jedynie kinematycznie dopuszczalne. Górną ocenę na odcinku CE otrzymano z kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia pokazanego na rys. 15b, a dolną ocenę na odcinku CD ze statycznie dopuszczalnego nieciągłego pola naprężeń (rys. 15a). Obydwa pola zostały podane przez W. PRAGERA i P. G. HODGE'A [29]. Krzywe doświadczalne dla małych c/h leżą powyżej górnej oceny, ale na ogół zgodność jest dość dobra.

2.4. Teoretyczna analiza procesu odkształcenia pręta z karbem. Przyjmując jedno z kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości, wyznaczonych w sposób podany w punkcie 2.2, można zbadać cały proces odkształcenia w karbie aż do rozdzielenia obu części pręta. E. H. LEE [14] zbadał odkształcenie karbu kąтового o kącie $2\alpha = 90^\circ$, przyjmując pole prędkości z linią nieciągłości między obszarem sztywnym i plastycznym. Załóżmy, że dolna część pręta jest nieruchoma, a górna porusza się

z prędkością równą 2. Linia BE (rys. 16) ma prędkość równą jedności, skierowaną ku górze. Po lewej stronie rysunku pokazano siatkę linii poślizgu w chwili początkowej. Materiał poniżej skrajnej linii $ACDE$ znajduje się w spoczynku. Prędkość wzdłuż $ACDE$ i wszystkich linii należących do tej samej rodziny jest stała i równa się $\sqrt{2}$. Wzdłuż linii drugiej rodziny prostopadłych do $ACDE$ prędkość równa się zeru.

Początkowym odkształceniem krawędzi AB będzie mały uskok w punkcie A , gdyż odcinek AB porusza się poziomo. Po prawej stronie rysunku przedstawiono pole linii poślizgu w zaawansowanym stanie procesu. Plastyczne płynięcie jest teraz ograniczone do znacznie zmniejszonego obszaru $A'C'D'E'B'$. Odcinek AH początkowej krawędzi AB zajął nowe położenie AA' , a odcinek BH przesunął się



Rys. 16

równoległe w położenie KA' . Materiał znajdujący się poniżej chwilowej granicy $A'C'D'E'$, ale powyżej początkowej granicy $ACDE$, został odciążony i przeszedł w stan sztywny, ale uprzednio doznał dużych odkształceń plastycznych. Stan naprężenia w poszczególnych obszarach chwilowej siatki linii poślizgu jest taki sam, jak w odpowiednich obszarach początkowej siatki. Wielkość naprężenia osiowego w najwęższym miejscu karbu jest stała i równa się $\sigma_y = 2k(1 + \pi/2 - \alpha)$. Siła rozciągająca maleje w ciągu całego procesu.

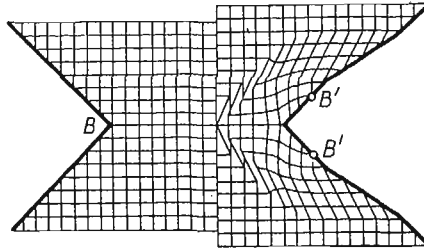
Prostoliniowość nowej krawędzi AA' wynika stąd, że prędkość na chwilowej granicy sztywno-plastycznej $A'C'$ jest stała w czasie całego procesu. Położenie krawędzi można określić z warunku stałej objętości materiału. Przy końcu procesu szerokość w miejscu karbu zaniknie do zera, a nowe krawędzie przetną się w punkcie P . Warunek stałej objętości, wymagający aby zakreskowane pola były równe, daje związek

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha (2 + \cos \alpha)},$$

określający położenie zdeformowanej krawędzi.

Znając prędkości płynięcia w dowolnej chwili możemy prześledzić drogę każdej cząstki materiału i wyznaczyć odkształcenie kwadratowej siatki pomyślanej w materiale. Sposób odkształcenia komplikuje zmieniający się kierunek ruchu cząstek. Trudność tę pokonano dzieląc cały okres aż do rozdzielania pręta na 8 jednakowych odcinków czasu Δt . Ruch badanej cząstki materiału w okresie każdego z tych przyrostów określano jako średnią z prędkości wyznaczonych na początku i końcu rozpatrywanego odcinka czasu Δt .

Na rysunku 17 pokazano po lewej stronie początkową kwadratową siatkę ($t = 0$), a po prawej stronie siatkę po dużym odkształceniu ($t = 3\Delta t$), gdy redukcja szerokości w najwęższym miejscu wynosi 37,5%. Charakterystyczne jest rozdzielanie

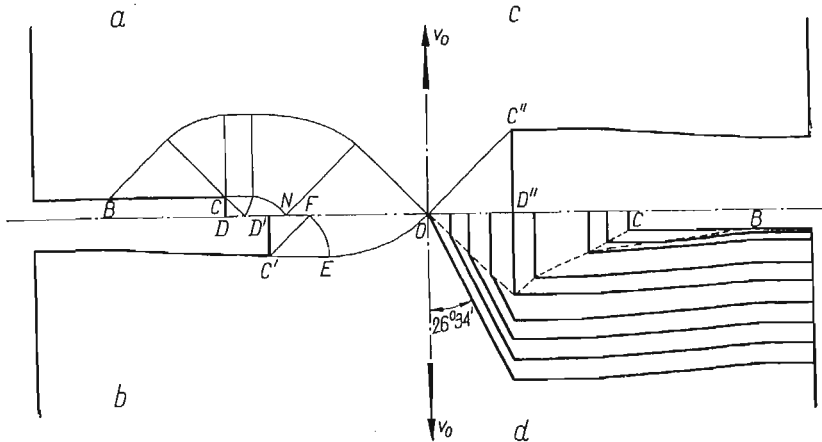


Rys. 17

materiału na dnie karbu, co łatwo zauważyć z końcowego położenia B' cząstek znajdujących się początkowo w najbliższym sąsiedztwie punktu B . Różni się to od zwykle spotykanego typu kruchego pęknięcia, przy którym oprócz energii lokalnego płynięcia plastycznego musi być również dostarczana z zewnątrz znaczna energia związana z powstawaniem nowej powierzchni. Ta część energii jest jednak w naszym przypadku bardzo mała i może być pominięta w porównaniu z energią odkształcenia plastycznego. Zagadnienie to zostało przedyskutowane przez M. E. MERCHANTA [15] w związku z procesem tworzenia się wióra przy skrawaniu metali. Podobne rozdzielanie materiału obserwuje się również przy wciskaniu klina w ośrodek plastyczny [16], ale w obydwu tych przypadkach jest ono wywołane wciskaniem sztywnego zaostrego elementu między rozdzielane części materiału. W naszym przypadku materiał jest rozdzielany rozciąganiem dzięki szczególnemu kształtowi powierzchni. Dalej zobaczymy, że w rozwiązaniu tego samego problemu przy granicznym przejściu od karbu z zaokrąglonym dnem do karbu ostrego takie rozdzielanie nie występuje. Innym przeciwnym argumentem jest, że rozdzielanie powoduje bardzo duże lokalne odkształcenia plastyczne, a więc na rzeczywisty charakter płynięcia w tym obszarze może mieć znaczny wpływ wzmocnienie materiału.

Podobną analizę przeprowadził E. H. LEE [17] również dla karbu w postaci wąskiego wycięcia prostokątnego. Na rysunku 18a pokazano siatkę linii poślizgu w początkowej chwili procesu płynięcia. Z rozwiązania dla prędkości wynika, że odcinek BC krawędzi przesuwa się w sposób sztywny, zachowując poziome położenie. Odcinek CD przesuwa się w kierunku osi pręta zachowując położenie pionowe. Znając prędkości tych odcinków możemy znaleźć ich nowe położenie po upływie

krótkiego czasu Δt . Między przesuniętymi odcinkami krawędzi powstanie w krawędzi luka, gdyż części krawędzi przylegające do narożnego punktu C mają różnie skierowane prędkości odpowiednio od strony odcinka poziomego i pionowego. Luka ta wypełniana jest przez materiał napływający z wnętrza pręta. Jeżeli przyjąć, że cząstki tworzące nowy odcinek krawędzi zachowują w rozpatrywanym przedziale czasu Δt początkową prędkość płynięcia, to powstałoby zaokrąglone naroże na dnie karbu. W omawianej pracy przyjęto, że nowy odcinek krawędzi tworzą dwie prostoliniowe części, stanowiące przedłużenie przesuniętych odcinków BC oraz CD i tworzących ostre prostokątne naroże. Taki schemat odkształcenia jest kine-



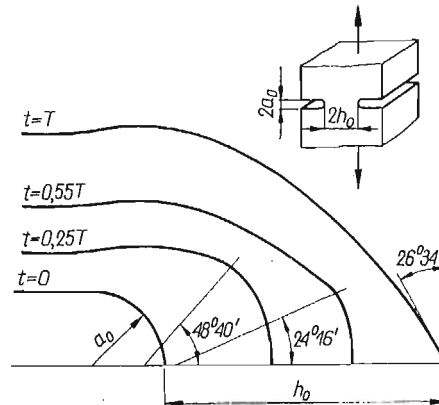
Rys. 18

matycznie dopuszczalny. Budując następnie siatkę linii poślizgu dla nowej konfiguracji karbu można wyznaczyć kolejne położenie krawędzi, odpowiadające nowemu przyrostowi czasu Δt . W ten sposób dochodzimy do momentu, gdy punkt N kolejnej siatki wypadnie na osi pręta (rys. 18b). Od tej chwili obszar plastyczny nie obejmuje już poziomych odcinków krawędzi, a cały materiał na zewnątrz skrajnej linii poślizgu $C'EO$ porusza się jak sztywna całość. Pionowy odcinek $C'D'$ przesuwa się w dalszym ciągu w kierunku osi. Ostatnia faza procesu zaczyna się w chwili, gdy punkt F siatki dojdzie do osi (rys. 18c). Siatkę linii poślizgu tworzy od tej chwili pole jednorodnego stanu naprężenia $C''D''O$, a pionowy odcinek krawędzi $C'D'$ przesuwa się w kierunku osi z prędkością $v = v_0$, a więc równą prędkości obu sztywnych części pręta. Zmniejsza on przy tym swą długość. Tworzące się przy tym nowe odcinki krawędzi są prostoliniowe i nachylone względem osi pod kątem $26^{\circ}34'$. Na rysunku 18d pokazano kształt krawędzi w różnych stadiach procesu aż do rozdzielenia obu części pręta.

Jeżeli karb nie ma ostrego załamania, to prędkość płynięcia każdego punktu jest określona jednoznacznie. A. J. WANG [18] zbadał przypadek karbu półkolistego stosując analogiczną jak w powyższych pracach metodę postępowania, polegającą na podziale czasu przebiegu całego procesu T na szereg krótkich odcinków czasu, w których prędkości można uważać za stałe. Na rysunku 19 pokazano kształt kra-

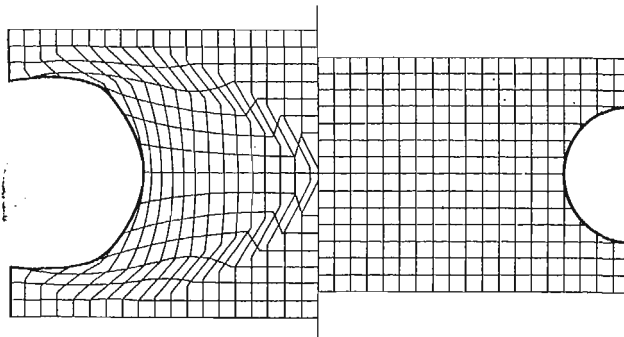
wędzi karbu w kilku fazach procesu. W pracy [19] (por. również [20]) zbadano odkształcenie kwadratowej siatki dla tego samego karbu (rys. 20). Nie ma tu zjawiska rozdzielania materiału na dnie karbu, jakie charakteryzowało rozwiązanie z rys. 17 dla pręta z ostrym karbem.

E. H. LEE i A. J. WANG [21] rozwiązali zagadnienie przebiegu procesu odkształcania pręta z ostrym karbem kątowym oraz z karbem prostokątnym w odmienny



Rys. 19

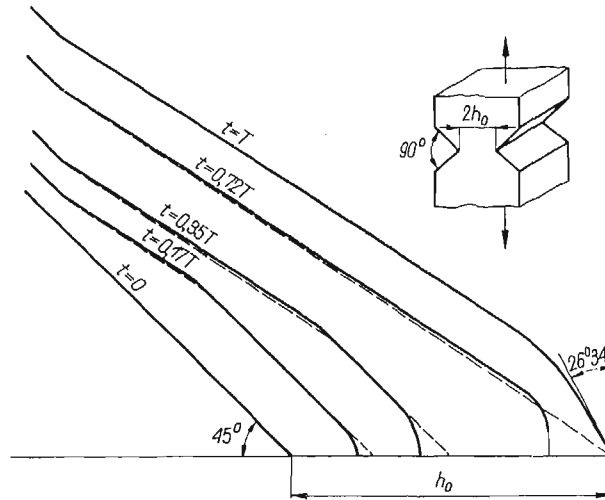
sposób niż w pracach [14] i [17]. Rozwiązanie uzyskano jako przejście graniczne od rozwiązania dla karbów z zaokrąglonymi narożami przy malejącym do zera promieniu zaokrąglenia. Podejście takie usuwa niejednoznaczność kierunku płynięcia w narożach. W obu poprzednich rozwiązaniach niejednoznaczność tę wykorzystano dla przyjęcia najdogodniejszego dla obliczeń schematu odkształcenia. Zastosowana teraz metoda przejścia granicznego daje w wyniku powstanie za-



Rys. 20

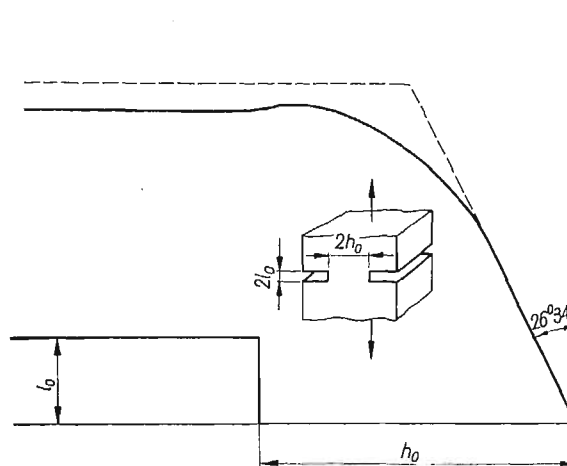
okrąglenia krawędzi w narożu natychmiast po rozpoczęciu procesu odkształcania. Na rysunku 21 pokazano liniami ciągłymi kształt krawędzi karbu kąowego w różnych fazach odkształcania. Dla porównania liniami przerywanymi zaznaczono postacie krawędzi w tych samych chwilach, otrzymane w poprzednio omawianej

pracy [14]. W początkowej fazie obydwie rozwiązania są bardzo zbliżone. Końcowa faza procesu różni się jednak znacznie. Moment rozdzielenia obu części pręta następuje w obecnym rozwiązaniu później niż w poprzednim. Podobnie dla karbu



Rys. 21

prostokątnego (rys. 22) od razu tworzy się zaokrąglenie w narożu. Metoda rozwiązania, polegająca na traktowaniu ostrego załamania krawędzi jako granicznego przypadku naroża zaokrąglonego, bardziej odpowiada warunkom rzeczywistym,



Rys. 22

gdyż w praktyce niemożliwe jest wykonanie idealnie ostrego naroża, odpowiadającego matematycznie pojętej osobliwości.

Wszystkie powyższe rozwiązania oparto na założeniu, że linie poślizgu przecinające się w środku najwęższego przekroju są liniami nieciągłości prędkości. Jak

już poprzednio wspomniano rozkład prędkości jest niejednoznaczny, wobec czego założenie to jest dość dowolne. W rzeczywistych metalach wykazujących wzmocnienie płynięcie obejmie znacznie większy obszar. Jeżeli bowiem przyjmujemy, że pierwszy poślizg nastąpił wzdłuż wspomnianej linii nieciągłości, to materiał ulegnie tu natychmiast wzmocnieniu. Nieciągłość prędkości przeniesie się w słabszą część materiału na zewnątrz linii początkowej itd. Słuszność tego rozumowania potwierdzają doświadczalnie otrzymane metodą trawienia linie poślizgu w stalowym pręcie z karbem [22].

Tą samą metodą można rozwiązać zagadnienie przebiegu odkształcania przy założeniu każdego innego nieciągłego lub ciągłego pola prędkości spełniającego warunki kinematyczne. Jednak jak się wydaje, nikt jeszcze nie podjął takiej próby.

3. Płaski stan naprężenia

Jak wspomniano na wstępie, w uplastycznionej części pręta panują warunki zbliżone do płaskiego stanu naprężenia, jeżeli wymiar b jest dużo mniejszy od wymiaru a . Podobnie jak dla płaskiego stanu odkształcania można posługując się modelem ciała sprężysto-plastycznego zbadać rozchodzenie się obszarów plastycznych. Wyniki prac poświęconych temu zagadnieniu oraz ich doświadczalną weryfikację omówimy w punkcie 3.1. Znacznie prościej można wyznaczyć nośność graniczną przyjmując model ciała sztywno-plastycznego. Zagadnieniu temu poświęcono punkt 3.2.

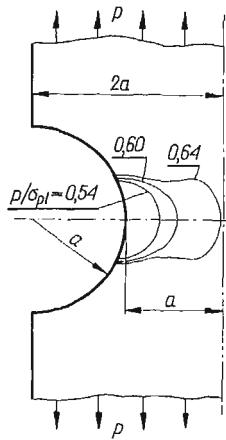
3.1. Rozwiązania sprężysto-plastyczne. Wyznaczanie granic obszarów plastycznych polega na numerycznym rozwiązaniu jednocześnie równań dla obszarów sprężystych i plastycznych [1]. W tych ostatnich warunkach plastyczności HUBERA-MISESA ma teraz postać

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2.$$

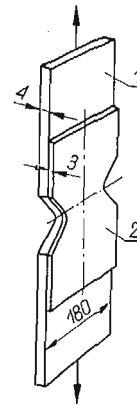
Pozostałe równania są takie same, jak dla płaskiego stanu odkształcania. ALLEN i SOUTHWELL [1] rozwiązywali przypadek pręta z półkolistymi wycięciami i ostrym karbem kątowym o kącie $2\alpha = 90^\circ$. Na rysunku 23 przedstawiono kolejne fazy rozwijania się obszarów plastycznych w płycie z karbem półkolistym. Proces ten jest w końcowej fazie odmienny niż dla tego samego kształtu karbu w warunkach płaskiego stanu odkształcania. Połączenie postępujących z obu stron obszarów plastycznych następuje teraz w środku najwęższego przekroju, a nie w znacznej od niego odległości, jak to pokazywał rys. 4. Wartość średniego naprężenia osiowego w najwęższym przekroju w chwili łączenia się obszarów plastycznych wynosi $\sigma_{ym} = 1,12\sigma_{p1}$. Dla karbu kąтового połączenie obszarów plastycznych następuje w pewnej odległości od najwęższego przekroju. Wątpliwości budzi jednak otrzymana średnia wartość naprężeń osiowych w najwęższym przekroju $\sigma_{ym} = 1,24\sigma_{p1}$, przewyższająca największą możliwą wartość $\sigma_{max} = 1,15\sigma_{p1}$, jaką może osiągnąć naprężenie normalne zgodnie z powyższym warunkiem plastyczności.

W pracy [23] wyznaczono teoretyczny przebieg rozchodzenia się obszarów plastycznych w rozciąganej cienkiej płycie osłabionej symetrycznie karbami szczelinowymi.

P. S. THEOCARIS i E. MARKETOS [24, 25] uzyskali doświadczalne potwierdzenie kształtu obszarów plastycznych i przebiegu procesu ich rozwijania się, wyznaczonych teoretycznie przez ALLENA i SOUTHWELLA. W obydwu pracach badana próbka 1 z karbami (rys. 24) wykonana była ze stali o wysokiej granicy plastyczności, powyżej której krzywa rozciągania przebiega płasko aż do odkształcenia około 2,5%. Materiał ten można więc w przybliżeniu traktować jako sprężysto-plastyczny bez

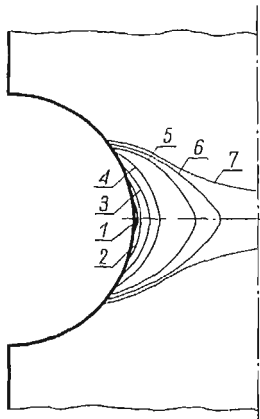


Rys. 23



Rys. 24

wzmocnienia. Do polerowanej powierzchni próbki przyklejano przezroczystą płytkę 2 o grubości 3 mm wykonaną z materiału czułego elastooptycznie. W czasie obciążania płytka 2 dzięki małemu modułowi Younga cały czas znajduje się w stanie sprężystym, mimo tego że w próbce 1 pojawiają się obszary plastyczne. Obserwując



Rys. 25

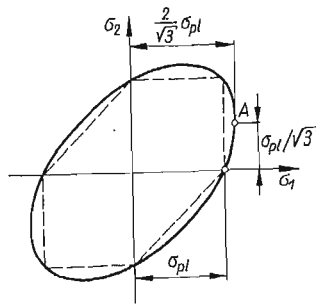
płytkę 2 w spolaryzowanym świetle można wyznaczyć w każdej chwili panujący w niej stan odkształcenia. Odkształcenia te są oczywiście takie same jak w metalowej próbce, gdyż obie płytki są sztywno połączone warstwą kleju. Następnie przyjmując odpowiednie zależności między przyrostami odkształceń a naprężeniami można

obliczyć naprężenia i określić granicę obszaru plastycznego. Na rysunku 25 przedstawiono otrzymane w ten sposób [24] granice w różnych fazach rozciągania płytki z korbami o takim samym kształcie jak na rys. 23. Jak widać, rozwiązanie numeryczne daje ten sam charakter rozszerzania się obszarów plastycznych, jaki otrzymuje się z badań doświadczalnych. Podobna analiza doświadczalna przeprowadzona w pracy [25] dla karbu o kształcie zbliżonym do ostrego kąтового wycięcia również wykazuje dużą zgodność obrazu postępujących granic sprężysto-plastycznych z teoretycznymi wynikami Allena i Southwella.

Ta sama metoda doświadczalna została zastosowana przez R. T. AULTA i J. W. SPRETNAKA [26] do analizy rozwijania się obszarów plastycznych w molybdenowych cienkich próbkach osłabionych korbami.

3.2. Rozwiązania sztywno-plastyczne. Z wyżej przedstawionych teoretycznych rozwiązań sprężysto-plastycznych i badań doświadczalnych wynika, że połączenie obszarów plastycznych następuje w najwęższym przekroju. Należy więc oczekiwać, że w przeciwieństwie do przypadku płaskiego stanu odkształcenia rozwiązania te powinny dawać wyniki bliskie rozwiązaniom sztywno-plastycznym.

Oczywiste jest, że w najwęższym przekroju obydwa naprężenia normalne, zarówno równoległe jak i prostopadłe do osi pręta, są rozciągające. Wynika stąd wniosek, że jeżeli przyjmiemy warunek plastyczności Treski, przedstawiony liniami prze-



Rys. 26

rywanymi na rys. 26, to współczynnik zwiększenia siły granicznej P w stosunku do siły granicznej P_0 dla pręta bez karbu musi być równy jedności, a więc $f = P/P_0 = 1$. Zniszczenie pręta nastąpi przez poślizg wzdłuż płaszczyzn nachylonych pod kątem 45° do obu powierzchni blachy.

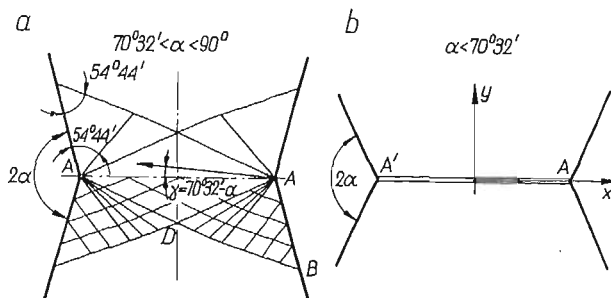
W przypadku warunku Hubera-Misesa, przedstawionego elipsą na rys. 26, naprężenie osiowe może osiągnąć maksymalną wartość $\sigma = 1,15\sigma_{pl}$. Wynika stąd, że współczynnik f może być zawarty jedynie w granicach $1 \leq f \leq 1,15$. Dokładne wyznaczenie jego wartości możliwe jest w wielu przypadkach przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego Cauchy'ego dla naprężeń w sposób podobny jak dla płaskiego stanu odkształcenia. Jednakże jak wykazał R. HILL [27] przy pewnej konfiguracji karbu zniszczenie pręta następuje przez utworzenie się w najwęższym przekroju lokalnego pocienienia blachy, zwanego szyjką.

W przypadku karbu kąтового (rys. 27a) siatkę charakterystyk (nie będących teraz liniami poślizgu) wyznacza się rozpoczynając od swobodnej krawędzi AB ,

na której znamy obydwa naprężenia główne $\sigma_1 = \sigma_{p1}$, $\sigma_2 = 0$. Współczynnik f jest określony zależnością

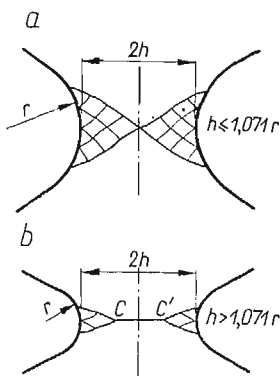
$$f = P/P_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{1 + 3\sin^2\gamma} + 3\cos\gamma).$$

Rozwiązanie to jest słuszne jedynie dla $70^\circ 32' < \alpha < 90^\circ$. Dla $\alpha = 70^\circ 32'$ charakterystyka AD pokrywa się z prostą AA' , a cała siatka charakterystyk redukuje się do jednej charakterystyki AA' (rys. 27b). Współczynnik f osiąga swą największą możliwą wartość, $f = 2/\sqrt{3} = 1,15$. Plastyczne płynięcie sprowadza się jedynie do



Rys. 27

lokalnych odkształceń w szyjce tworzącej się wzdłuż AA' . Stan naprężeń w szyjce jest stały i określony wartościami naprężeń $\sigma_y = 2k$, $\sigma_x = k$ (punkt A na rys. 26), gdzie $k = \sigma_{p1}/\sqrt{3}$. Taki sam stan naprężenia w szyjce istnieje i dla kątów $\alpha < 70^\circ 32'$, gdyż dodanie materiału nie zmniejsza nośności granicznej.



Rys. 28

Taka sama szyjka tworzy się również na środkowym odcinku CC' (rys. 28) w blachach osłabionych karbami zaokrąglonymi, jeżeli $h > 1,071r$.

Zagadnienie wyznaczenia dostatecznej szerokości pręta w przekrojach oddalonych od karbu zostało zbadane w pracy [13] również dla omawianych tu cienkich prętów. Metoda jest analogiczna do omówionego w p. 2.3 przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Wykazano, że dla karbu kąтового zawsze możliwe jest zbudowanie przedłużenia pola naprężeń w obszar sztywny.

H. FORD i G. LIANIS [28] dla oceny dolnej granicy nośności pręta z karbem zastosowali metodę budowy statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, podobnie jak to poprzednio przedstawiono dla płaskiego stanu odkształcenia.

4. Pręty o pośredniej szerokości

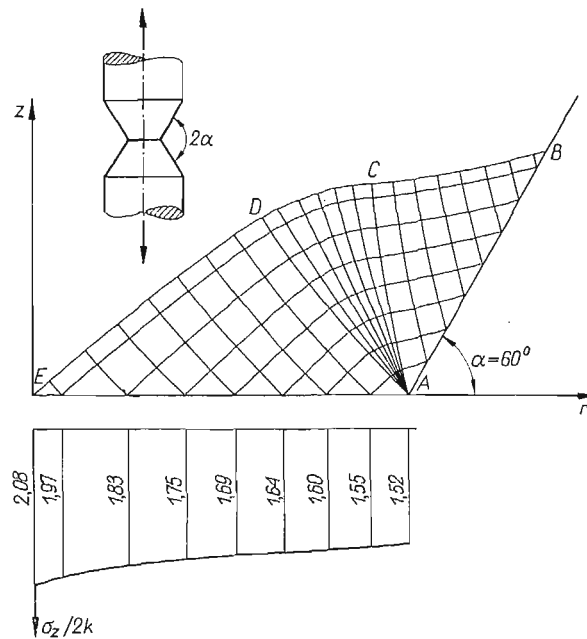
W wielu rzeczywistych konstrukcjach wymiar $2b$ pręta nie jest ani na tyle mały, aby powstał płaski stan naprężenia, ani dostatecznie duży, aby wytworzył się płaski stan odkształcenia. Powstaje wobec tego ważny problem, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia stanowią mogą dobre przybliżenie rzeczywistych warunków. Teoretyczną próbę analizy tego zagadnienia podjął D. C. DRUCKER [30] w oparciu o graniczne twierdzenia teorii plastyczności. Analiza taka, polegająca na doborze odpowiednich pól kinematycznie lub statycznie dopuszczalnych, może dać jedynie bardzo przybliżoną ocenę wielkości $2b$, niezbędnej dla powstania stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. Całkowicie pewne informacje mogą być uzyskane jedynie w sposób doświadczalny.

W. ŻUKOWSKI badał wpływ grubości $2b$ na nośność pręta z ostrym karbem kątowym. W pracy [11] wykazano, że wielkość siły zrywającej, odniesionej do jednostki długości w kierunku wymiaru $2b$, ma już praktycznie stałą wartość dla $b/h > 4$. W pracy [10] badano zmianę wielkości siły, przy której zaczynają się duże odkształcenia plastyczne w zależności od wartości stosunku b/h . Również i ta siła odniesiona do jednostki długości jest prawie stała dla $b/h > 4$.

W pracy [12] otrzymano, że dla karbu z łagodnie zaokrąglonymi narożami już dla $b/h > 2$ wielkość siły jednostkowej jest prawie stała.

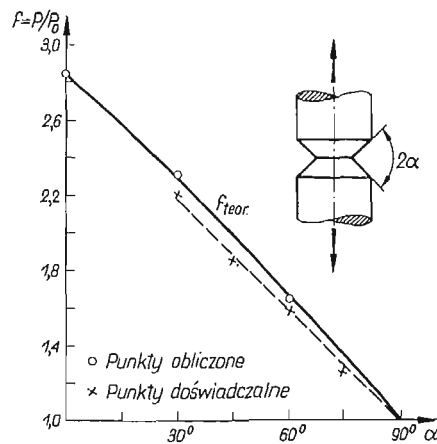
5. Pręty o symetrii obrotowej

Jak wiadomo, rozwiązanie osiowo-symetrycznego zagadnienia teorii plastyczności ciągle jeszcze sprawia duże trudności. Dla warunku plastyczności Hubera-Misesa i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia Lévy'ego-Misesa podstawowy układ równań nie jest typu hiperbolicznego [2], wobec czego nie może być do jego rozwiązania zastosowana najbardziej efektywna w teorii plastyczności metoda charakterystyk. Zagadnienie będzie jednak typu hiperbolicznego, jeżeli przyjąć warunek plastyczności Treski, a ponadto założyć, że stan naprężenia reprezentowany jest w przestrzeni naprężeń głównych wyłącznie przez punkty leżące na jednej z krawędzi sześciokątnej pryzmy odwzorowującej warunek Treski. Założenie to odpowiada tak zwanemu warunkowi pełnej plastyczności Haara-Kármána i w przypadku osiowo-symetrycznego zagadnienia prowadzi do rozprężenia równań dla naprężeń i prędkości. Po wyznaczeniu naprężeń można obliczyć obydwie składowe prędkości płynięcia: promieniową v_r i osiową v_z , rozwiązując układ składający się z warunku izotropii i warunku nieściśliwości. R. T. SHIELD [31] wykazał, że charakterystyki dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń, podobnie jak w płaskich zagadnieniach teorii plastyczności.



Rys. 29

W pracy [31] SHIELD podał rozwiązanie problemu wciskania osiowo-symetrycznego sztywnego stempla w półprzestrzeń z materiału idealnie plastycznego. Rozwiązanie to po zmianie znaków naprężeń jest oczywiście również rozwiązaniem dla



Rys. 30

rozciąganego osiowo-symetrycznego pręta z karbem szczelinowym. Wyznaczone zostało przedłużenie pola naprężeń w obszar sztywny, pozwalające określić niezbędną średnicę części chwytowych pręta oraz rozwiązanie dla prędkości płynięcia materiału.

W pracy [32] podano przy tych samych założeniach jak w [31] rozwiązania dla karbu kąтового o różnych kątach oraz dla karbów z dnem zaokrąglonym. Na rysunku 29 pokazano siatkę charakterystyk, stanowiących jednocześnie linie poślizgu dla karbu kąтового o kącie $\alpha = 60^\circ$. Otrzymano ją przez kolejne rozwiązywanie zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych charakterystyk. W przeciwieństwie do płaskiego stanu odkształcenia zewnętrzna linia poślizgu $BCDE$ nie może być teraz linią nieciągłości prędkości. Linia ciągła na rys. 30 pokazuje, jak zmienia się współczynnik nośności f_{teor} w zależności od kąta α karbu. Linią przerywaną przedstawiono wyniki weryfikacji doświadczalnej na prętach z miękkiego aluminium. W omawianej pracy przeprowadzono również doświadczalną analizę wpływu średnicy części chwytowych pręta na jego nośność. Jest godne podkreślenia, że współczynnik nośności obliczony w opisany sposób dla prętów osiowo-symetrycznych niewiele różni się od współczynnika dla prętów, w których mamy płaski stan odkształcenia, jeżeli kształt karbu jest taki sam.

Wymienimy tu jeszcze pracę E. LEVINA [33], w której podano kinematycznie dopuszczalne pole prędkości dla zagadnienia wciskania walcowego stempla. Pole to pozwala ocenić od góry nośność graniczną pręta z karbem szczelinowym. Ocena ta daje wartość $f = 2,92$ wobec wartości $f' = 2,85$ otrzymanej przez SHIELDA [31].

Literatura cytowana w tekście

1. D. N. ALLEN and R. SOUTHWELL, *Relaxation methods applied to engineering problems*. XIV. *Plastic straining in two-dimensional stress-system*, Phil. Trans. Roy. Soc., A, No. 850, **242** (1950), 379–414.
2. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1956.
3. D. JURIŠIČ, *Two-dimensional elastic-plastic stress and strain analysis*, Inst. Met. Konstr., Univers. Ljubljana, Rep. P-1698.
4. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемом напряженного состояния*, АН СССР, Проблемы прочности в машиностроении, Вып. 2, Москва 1959.
5. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problems of plastic flow*. I. *Notched bar under tension*, Phil. Mag., **41** (1950), 349–361.
6. A. H. S. ANG and G. N. HARPER, *Analysis of contained plastic flow in plane solids*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Division, **30** (1964), no. EM5, 397–418.
7. R. HILL, *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **2** (1949), 40.
8. F. A. MCCLINTOCK, *On notch sensitivity*, Welding Journal Research Supplement, May 1961.
9. Г. И. БЫКОВЦЕВ, *О поле скоростей при вдавливании плоского штампна в пластическое полупространство*, **25** (1961), 552–553.
10. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1958, 116–119.
11. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, Вып. 9, Машгиз, Москва 1963, 231–252.
12. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inżyn., **13** (1965), 637–652.
13. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, **2** (1953), 43–53.
14. E. H. LEE, *Plastic flow in a V-notched bar pulled in tension*, J. Appl. Mech., **19** (1952), 331–336.

15. M. E. MERCHANT, *Mechanics of the metal cutting process. I. Orthogonal cutting and a type 2 chip*, J. Appl. Phys., **16** (1945), 273.
16. R. HILL, E. H. LEE and S. J. TUPPER, *The theory of wedge indentation of ductile materials*, Proc. Roy. Soc. of London, A, **188** (1947), 273-289.
17. E. H. LEE, *Plastic flow in a rectangularly notched bar subjected to tension*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 140-146.
18. A. J. WANG, *Plastic flow in a deeply notched bar with semi-circular root*, Q. Appl. Math., **11** (1954), 427-438.
19. L. GARR, E. H. LEE, A. J. WANG, *The pattern of plastic deformation in a deeply notched bar with semicircular roots*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 56-58.
20. W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Birkhauser Verl., Basel und Stuttgart 1955.
21. E. H. LEE, A. J. WANG, *Plastic flow in deeply notched bars with sharp internal angles*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 489-497.
22. B. B. HUNDY, *Plane plasticity*, Metallurgia, March 1954, 109-118.
23. L. D. STIMPSON and D. EATON, *The extent of elasto-plastic yielding at the crack point of an externally notched plane stress tensile specimen*, ARL 24, Office of Aerospace Research, July 1961.
24. P. S. THEOCARIS, *Experimental solution of elastic-plastic plane stress problems*, J. Appl. Mech., **19** (1962), 735-743.
25. P. S. THEOCARIS and E. MARKETOS, *Elastic-plastic strain and stress distribution in notched plates under plane stress*, J. Mech. Phys. Solids, **11** (1963), 411-428.
26. R. T. AULT and J. W. SPRETNAK, *Initial yielding and fracture in notched sheet molybdenum*, Int. J. Mech. Sci., **7** (1965), 87-102.
27. R. HILL, *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin shells*, J. Mech. Phys. Solids, **1** (1952), 19-30.
28. H. FORD, G. LIANIS, *Plastic yielding of notched strips under conditions of plane stress*, ZAMP, **8** (1957), 360-382.
29. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley Inc., New York 1951, 215-216.
30. D. C. DRUCKER, *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485-488.
31. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc., **233 A**, No. 1193 (1955), 267-287.
32. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHEROWA, J. MIASTOWSKI, *Plastyczne płynięcie osiowo-symetrycznych rozciąganych prętów z karbem*, (w przygotowaniu).
33. E. LEVIN, *Indentation pressure of a smooth circular punch*, Quart. Appl. Math., **13** (1955), 133-137.

Р е з ю м е

ОБЗОР РАБОТ, КАСАЮЩИХСЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТЕРЖНЕЙ С ВЫРЕЗОМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ РАСТЯЖЕНИЮ

Обсуждаются основные теоретические и экспериментальные работы, касающиеся пластических деформаций и несущей способности стержней с вырезом, подверженных растяжению. Для стержней большого размера $2b$ (рис. 1), в которых существует состояние близкое плоскому деформированному состоянию, обсуждаются последовательно: упруго-пластические и жесткопластические решения, влияние ширины стержня вне выреза, а также анализ деформирования, вплоть до момента разделения обеих частей стержня. В случае плоских пластинок с вырезами, подверженных растяжению, обсуждаются упруго-пластические и жесткопластические решения. Рассматриваются вопросы касающиеся стержней промежуточной ширины $2b$. Приводится также актуальное состояние теории осесимметрических стержней с вырезом.

S u m m a r y

A SURVEY OF PAPERS DEALING WITH THE PROBLEM
OF NOTCHED BARS PULLED IN TENSION

Presented is a survey of theoretical and experimental papers dealing with the plastic behaviour of notched bars pulled in tension. For plain strain bars discussed are: elastic-plastic and rigid-plastic solutions, the influence of the width of the bar outside the notch and an analysis of the deformation process until the moment of collapse. For plain stress bars, also elastic-plastic and rigid-plastic approach is described. The survey includes the problem of bars with intermediate width. Finally, the present state of the theory of axially symmetric bars is briefly discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1965 r.

POWIERZCHNIOWE KONSTRUKCJE PRĘTOWE

WITOLD GUTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie zastosowania rachunku różnicowego do badań analitycznych nad regularnymi, powierzchniowymi układami prętowymi. W rozważaniach ograniczono się jedynie do analizy statycznej, jakkolwiek większość zależności podanych w niniejszej pracy można zastosować do zagadnień dynamicznych.

Podstawą analizy jest geometria różnicowa powierzchniowej siatki punktów, której podstawy zostały podane przez autora w pracy [25].

Powierzchniowe konstrukcje prętowe w postaci rusztów, przekryć walcowych lub kulistych zaczęto stosować w połowie dziewiętnastego wieku, jednakże ze względu na poważne trudności w technice obliczeniowej oraz w wykonaniu konstrukcji metalowych z elementów powtarzalnych zaczęto je stosować na większą skalę dopiero w latach czterdziestych naszego stulecia.

Teoretyczne wyznaczanie sił i przemieszczeń w tego typu konstrukcjach (są to konstrukcje kratowe, ramowe i mieszane) nie przedstawia merytorycznych trudności. Literatura na ten temat jest bardzo obszerna; istnieje wiele monografii dotyczących tego zagadnienia, między innymi i w języku polskim [6, 9, 27, 32, 45]. O wiele uboższa jest literatura traktująca o ramach w zakresie plastycznym, ale i temu zagadnieniu poświęcone są niektóre monografie, jak np. książka P. G. HODGE'A [26].

Omawiane konstrukcje charakteryzuje duża liczba prętów i węzłów, sięgająca setek, a nawet tysięcy w jednym układzie. Fakt ten powoduje, że podstawowym problemem staje się technika obliczeniowa, natomiast na dalszy plan odsuwa się analizę teoretyczną zagadnienia, polegającą na badaniu zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a parametrami kształtu. Niekiedy nawet rezygnuje się z opracowania metody obliczeniowej, a przeprowadza się jedynie badania doświadczalne, jak miało to miejsce z dobrze znanymi na terenie USA konstrukcjami typu «Unistrut» [18]. Wspomniane trudności sprawiły, że badania nad konstrukcjami prętowymi szły w kierunku pewnych założeń upraszczających.

Pierwsze teoretyczne rozważania nad powierzchniowymi konstrukcjami prętowymi należy według S. P. TIMOSHENKI [40] przypisać A. FÖPPLOWI [17], który w r. 1892 podał statyczną analizę walcowego pokrycia prętowego z wykrzywianiami (później zwanego w literaturze przekryciem typu Föppla). Rozważania swoje oparł on na założeniach, że przekrycie jest kratowe, a więc że pręty połączone są między sobą przegubami kulistymi. Przy takim założeniu rozwiązanie sprowadzało

się do rozkładu konstrukcji na szereg płaskich kratownic obciążonych w swoich płaszczyznach. Schemat statyczny przyjęty przez Föppla daleko jednak odbiega od rzeczywistości, gdyż sztywne węzły układu mają znaczny wpływ na wartości sił w prętach. Założenia Föppla uściślili dopiero w latach pięćdziesiątych I. G. POPOW [34] i W. A. JERJAGINA [16] przyjmując, że węzły pomiędzy prętami leżącymi na łukach są sztywne. Ich uproszczenia obliczeniowe polegały na grupowaniu niewiadomych, a więc redukowaniu liczby równań i niewiadomych.

Poza wyżej wymienionymi autorami dość liczna grupa osób zajmowała się zagadnieniami kopuł ramowych, rusztów, regularnych ram itp. Z grupy tej należy wymienić przede wszystkim prace [7, 11, 36, 37, 38, 41, 43]. Obejmowały one zagadnienia statyki, stateczności i dynamiki kopuł ramowych i rusztów przy takich znacznie upraszczających analizie założeniach, jak pominięcie sztywności na rozciąganie, sztywności skręcania itp. Nawet przy takich założeniach badania sprowadzały się głównie do szukania uproszczeń w rozwiązywaniu układów równań. Treść tych prac wykazuje dobitnie, jak komplikuje się zagadnienie wobec braku odpowiedniego zapisu geometrii i konstrukcji.

Z chwilą szerszego zastosowania elektronowych maszyn liczących rozpowszechniły się metody oparte na rachunku macierzowym, który jest najkorzystniejszy przy programowaniu. Metody te doczekały się również wnikliwych opracowań, między innymi przez J. H. ARGYRYSA [1], S. O. ASPLUNDA [2] czy W. D. SZAJKOWICZA [39]. Metody te są dogodne przy stosowaniu maszyn liczących, niemniej jednak mają poważną wadę polegającą na tym, że uniemożliwiają w znacznym stopniu analizę teoretyczną konstrukcji.

Dalsza metoda polega na zastępowaniu regularnej konstrukcji prętowej odpowiednią konstrukcją ciągłą (płyty, powłoki). Sposób taki umożliwia korzystanie z gotowych, często zamkniętych wzorów. Metoda ta ma jednak tę wadę, że trudno jest ustalić sztywność zastępczej konstrukcji, co powoduje, że wyniki stosowania jej są często problematyczne. Przykładem zastosowania tej metody może być praca F. LADERERA [28].

Na osobną uwagę zasługuje praca Cz. WOŹNIAKA [47], który zaproponował ciekawą teorię ośrodków włóknistych. Jakkolwiek teoria ta dotyczy ośrodka ciągłego, a nie dyskretnego, to w przypadku niedużych wymiarów «oczek» siatki (w porównaniu z wymiarami całej konstrukcji) może dać zadowalające wyniki.

W niniejszej pracy zastosowano metodę badania powierzchniowych konstrukcji prętowych w oparciu o rachunek różnicowy.

Pierwsze ujęcie zagadnienia statyki konstrukcji w zapisie różnicowym należy przypisać K. CLAPEYRONOWI [10], który rozpatrując belkę na wielu równo oddalonych podporach wyprowadził, znane równanie trzech momentów. Szybki postęp techniki sprawił, że zastosowanie rachunku różnic poważnie rozwinęło się na początku XX wieku, w szczególności w pracach uczonych niemieckich. Poniżej ograniczymy się jedynie do wymienienia ważniejszych prac, które wniosły nowe elementy do tej dziedziny.

Jednym z pierwszych, który zastosował rachunek różnic do złożonych konstrukcji prętowych, był L. MANN [30]. Podał on rozwiązanie płaskiej ramy typu Vierendeel

oraz zbadał powtarzalny element konstrukcji i ze względu na jego skończone rozmiary podał wszystkie równania w zapisie różnicowym. Praca zawiera rozwiązania tych równań w zakresie statyki i stateczności dla szeregu rodzajów obciążeń.

R. MISES i J. RATZERSDORFER [31] w r. 1925 podali teorię stateczności płaskiego słupa kratowego złożonego z jednakowych trójkątów. Rozwiązania zawarte w tej pracy oparte są na rachunku różnicowym, a otrzymane wyniki uzależnione są od liczby segmentów w słupie.

Na szczególną uwagę zasługuje książka F. BLEICHA i E. MELANA [5] wydana w r. 1926 i składająca się z dwóch zasadniczych części. Pierwsza z nich zawiera teorię różnic, sum i równań różnicowych zwyczajnych, liniowych o stałych i zmiennych współczynnikach. W ramach teorii równań różnicowych poruszone są takie zagadnienia, jak transformacje Laplace'a oraz obliczanie równań różnicowych za pomocą funkcji właściwych. Ostatnie rozdziały pierwszej części zawierają szereg uwag dotyczących równań różnicowych cząstkowych. Druga część książki obejmuje szereg ciekawych przykładów praktycznego zastosowania teorii wyłożonej w części pierwszej. W aspekcie niniejszej pracy na uwagę zasługują zwłaszcza zagadnienia płaskich i walcowych rusztów oraz płaskich tarcz ramowych, które autorzy rozwiązują za pomocą równań różnicowych. Zagadnienie te są stosunkowo proste, ponieważ rozpatrzono je przy pominięciu podatności osiowej i sztywności skręcania. Jedynym brakiem omawianej książki jest zbyt powierzchowne potraktowanie problemu warunków brzegowych. Niemniej jednak stanowi ona do dziś niezwykle cenną pozycję. F. BLEICH opublikował ponadto szereg prac przyczyniając się do dalszego rozwoju zastosowań rachunku różnicowego w statyce budowlanej. Należy wspomnieć tu choćby jego pracę na temat stateczności belki podpartej na podporach sprężystych [4].

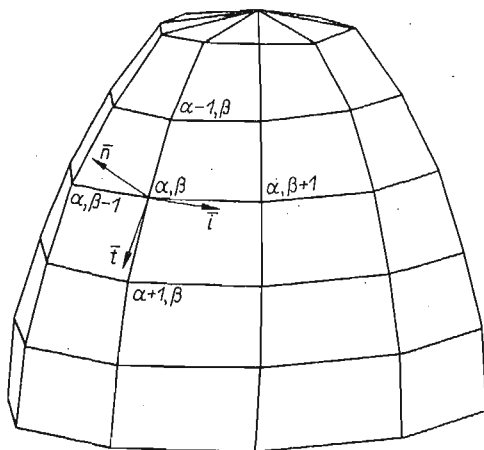
W ostatnich latach niezwykle szybko rozwinęło się budownictwo metalowe z elementów powtarzalnych. Szereg przykładów takich konstrukcji podaje w swych pracach Z. MAKOWSKI [29]. Duże zapotrzebowanie na tego rodzaju konstrukcje spowodowało, że zaczęto ponownie zajmować się szerzej stosowaniem rachunku różnicowego. Przede wszystkim należy wymienić tu książkę W. A. BOWINA [8] i prace D. L. DEAN'A [12, 13, 14, 15]. W. A. BOWIN w swojej książce pierwszy wprowadził rachunek różnicowy do zagadnień wariacyjnych w mechanice budowlanej. Podaje on przy tym szereg oryginalnych przykładów z zakresu dynamiki i stateczności konstrukcji.

D. L. DEAN w swej wcześniejszej pracy [12] podał rozwiązanie stożkowej siatki prętowej obciążonej osiowo-symetrycznie, jak i szereg innych regularnych konstrukcji powierzchniowych. W późniejszej pracy podał on interesujące rozwiązania różnego rodzaju siatek ciągnowych mających zastosowanie w konstrukcjach wiszących. We wszystkich swych pracach autor posługuje się rachunkiem różnicowym wprowadzając człony obrazujące obciążenia w postaci delty Kroneckera.

W latach 1959–60 I. BABUŠKA i E. VITAŠEK [3, 42] zaproponowali — w oparciu o teorię dystrybucji — transformację Fouriera w zastosowaniu do równań różnicowych. Na zakończenie swych prac podali oni proste przykłady rusztów i siatek prętowych.

W Polsce stosowanie rachunku różnicowego w mechanice budowli ma swój początek w pracy W. WIERZBICKIEGO [45]. Autor rozważył w niej ugięcie szeregu prętów sztywno ze sobą złączonych w węzłach i leżących w jednej płaszczyźnie. W. NOWACKI podał w swej książce rozwiązania szeregu jedno- i dwuwymiarowych zagadnień statyki budowli takich jak belka na sprężystych podporach czy ruszty regularne. Osobną grupę zagadnień stanowią publikacje autora niniejszej pracy. Obejmują one takie zagadnienia, jak stateczność przyrządkowanych powłok ramowo-kratowych przy różnych konfiguracjach prętów [19, 21], stateczność słupów kratowych [20], statykę przestrzennych rusztów kratowych [22]. Ostatnie prace obejmują już elementy geometrii różnicowej wykorzystanej w dalszych rozdziałach niniejszego opracowania [23, 24, 25].

Jak już wspomniano, powyższy przegląd nie jest pełnym odzwierciedleniem literatury dotyczącej omawianego tematu. W szczególności nie omówiliśmy tu prac typu konstrukcyjnego. Nie omówiliśmy również szeregu prac nie wnoszących w zasadzie nic nowego do zastosowań rachunku różnicowego w mechanice budowli.



Rys. 1

Wymienione prace, w których zastosowano rachunek różnic, wskazują wyraźnie na korzyści wynikające z jego zastosowania. Korzyści te przede wszystkim polegają na zwartości zapisu, co daje w konsekwencji:

- możliwości uproszczonej, a więc i tańszych obliczeń numerycznych zarówno «ręcznych» jak i maszynowych;
- możliwości analizy jakościowej i ilościowej poszczególnych układów.

Dlatego też poniżej podjęto próbę ujęcia regularnych, prętowych konstrukcji powierzchniowych wspólnym zapisem z możliwością przechodzenia w granicy do przypadków szczególnych, takich jak powłoki walcowe, ruszty, tarcze itp.

Ogólnie rzecz biorąc liczba rodzajów siatek prętowych jest nieograniczona, a my będziemy rozpatrywać jedną z nich podaną na rys. 1, niemniej jednak metoda poniższa mogłaby być z powodzeniem zastosowana i do innych siatek prętowych, na przykład trójkątnych czy sześciokątnych.

2. Założenia i oznaczenia

Przez «powierzchniową konstrukcję prętową» będziemy rozumieli ramę lub kratę o prętach prostych, której węzły leżą na dowolnej powierzchni. Układy o co najmniej jednej krzywiznie różnej od zera nazwano często powłokami przez analogię do powłok w rozumieniu klasycznym. Dlatego też przyjęto z teorii powłok [33, 46] takie pojęcia, jak wycinek powłoki, grubość powłoki, powierzchnia środkowa itp. W pracy niniejszej będziemy rozpatrywać jedynie konstrukcje przy następujących założeniach:

- a) przemieszczenia węzłów są małe w stosunku do wymiarów poprzecznych prętów, a odkształcenia tych ostatnich mieszczą się w ramach prawa Hooke'a,
- b) obciążenia zewnętrzne nie zmieniają się ani co do wartości, ani co do kierunku wskutek odkształceń konstrukcji,
- c) pręty są proste, pryzmatyczne i mają skończone sztywności rozciągania, zginania i skręcania oraz nieskończoną sztywność ścinania (hipoteza płaskich przekrojów),
- d) pręty spotykające się w jednym węźle oddziałują na siebie dowolnym wektorem siły i dowolnym wektorem momentu.
- e) pręty w siatce są tak umieszczone, że ich osie geometryczne przecinają się w geometrycznych węzłach siatki. Kierunki głównych osi bezwładności przekrojów prętów pokrywają się z kierunkami stycznej i normalnej do siatki w punkcie będącym geometrycznym środkiem pręta.

Zapis rachunku różnicowego przyjęliśmy według różnic centralnych stosując oznaczenia

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right), \\ \nabla u(x) &= u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= v(x), & Sv(x) &= u(x) + \sigma, \\ \nabla v(x) &= u(x), & \bar{S}u(x) &= v(x) + \tau, \\ \Delta v(x) &= \nabla u(x), & Su(x) &= v(x) + \sigma, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie

$$\sigma(x + \omega) = \sigma(x), \quad \tau(x + \omega) = -\tau(x). \tag{2.3}$$

W całej pracy wprowadziliśmy następujące podstawowe oznaczenia:

- n, m — liczby naturalne,
- α, β — liczby całkowite, współrzędne zbioru,

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha w &= w_{\alpha + \frac{1}{2}} - w_{\alpha - \frac{1}{2}}, & \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} w &= \pm w_{\alpha \pm 1} \mp w_\alpha, \\ \nabla_\alpha w &= w_{\alpha + \frac{1}{2}} + w_{\alpha - \frac{1}{2}}, & \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} w &= w_{\alpha \pm 1} + w_\alpha, \\ \Delta_\alpha^2 w &= \Delta_\alpha(\Delta_\alpha w), & \nabla_\alpha^2 w &= \nabla_\alpha(\nabla_\alpha w), \\ \Delta_{2\alpha} w &= \nabla_\alpha(\Delta_\alpha w) = \Delta_\alpha(\nabla_\alpha w) = w_{\alpha+1} - w_{\alpha-1}, \\ D_\alpha w &= w_{\alpha+1} + 4w_\alpha + w_{\alpha-1}; & H_\alpha w &= w_{\alpha+1} - 4w_\alpha + w_{\alpha-1} \end{aligned}$$

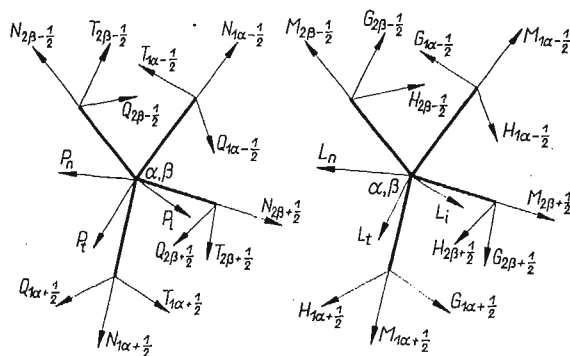
h_1, h_2	odległości pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami siatki przy ustalonym jednym argumentie,
$\mathbf{t}, \mathbf{i}, \mathbf{n}$,	wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe,
R_1, R_2	promienie krzywizny,
A_1, A_2, B_1, B_2	współczynniki form kwadratowych,
χ_1, χ_2	kąty środkowe w kołach krzywiznowych,
u, v, w	składowe wektora przemieszczenia,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega_1, \omega_2, \vartheta_1, \vartheta_2$	odkształcenia liniowe siatki,
φ, ψ, γ	składowe kąta obrotu węzła siatki odkształconej,
p, q, s	odkształcenia kątowe węzłów,
N_1, N_2	siły osiowe,
T_1, T_2, Q_1, Q_2	siły poprzeczne,
M_1, M_2	momenty skręcające,
H_1, H_2, G_1, G_2	momenty zginające,
$E_1 I_{1n}; E_2 I_{2t}$	sztywności zginania,
GI_0	sztywności skręcania,
$E, F_1; E_2 F_2$	sztywności rozciągania,

$$\kappa = \frac{EI}{h^4}; \quad \mu = \frac{EF}{h^2}; \quad \nu = \frac{GI_0}{h^4}.$$

3. Równania równowagi

Wytnijmy powtarzalny element α, β powłoki dokonując cięć w płaszczyznach normalnych do powłoki w punktach $\alpha + \frac{1}{2}, \beta; \alpha - \frac{1}{2}, \beta; \alpha, \beta + \frac{1}{2}; \alpha, \beta - \frac{1}{2}$ (rys. 2).

Przyjmijmy, że w dowolnym przekroju działa nieznaną wektor siły wewnętrznej \mathbf{N} jak i nieznaną wektor momentu wewnętrznego \mathbf{M} (rys. 2, dla jasności podano



Rys. 2

na rysunku osobno siły i momenty). Oznaczmy następujące składowe wektora siły rozłożonego na kierunki $\mathbf{t}, \mathbf{i}, \mathbf{n}$:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= N_1 \cdot \mathbf{t} + T_1 \cdot \mathbf{i} + Q_1 \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{N}_2 &= T_2 \cdot \mathbf{t} + N_2 \cdot \mathbf{i} + Q_2 \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Indeksy 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do zmiennych α i β . Przyjmijmy ponadto te składowe sił i momentów za dodatnie, które mają zwroty zgodne z wektorami

jednostkowymi \mathbf{t} , \mathbf{i} , \mathbf{n} przy kierunku zewnętrznej normalnej do przekroju ze wzrastającym α (lub odpowiednio β). W przypadku gdy wspomniana normalna ma kierunek malejących wartości α (względnie β), za dodatnie przyjmiemy te składowe, które mają zwroty przeciwne do zwrotów jednostkowych. Tak więc w dowolnym przekroju mamy trzy nie znane składowe sił i trzy nie znane składowe momentów, przy czym wszystkie sześć wielkości są odpowiednio funkcjami α i β . W dalszym ciągu przyjmujemy założenie, że wyżej wymienione siły i momenty są statycznie równoważne działającym w omawianych przekrojach naprężeniom, zgodnym z hipotezą płaskich przekrojów w teorii prętów cienkich.

Rozpatrzmy obecnie warunki równowagi wspomnianego elementu, obciążonego siłami wewnętrznymi i zewnętrznymi. Siły zewnętrzne w najogólniejszym przypadku można sprowadzić do trzech skupionych sił i trzech skupionych momentów działających w węźle elementu, a mających odpowiednio kierunki trzech wektorów jednostkowych \mathbf{t} , \mathbf{i} , \mathbf{n} . Oznaczmy je kolejno P_t , P_i , P_n , L_t , L_i , L_n . W przekroju o współrzędnych $\alpha+1/2$, β przyłożmy wektor siły

$$(3.2) \quad \mathbf{N}_{1\alpha+\frac{1}{2}} = N_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha+\frac{1}{2}} + T_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha+\frac{1}{2}} + Q_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha+\frac{1}{2}}$$

i momentu

$$(3.3) \quad \mathbf{M}_{1\alpha+\frac{1}{2}} = M_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha+\frac{1}{2}} + G_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha+\frac{1}{2}} + H_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

W przekrojach o współrzędnych $\alpha-1/2$, β przyłożmy wektor siły

$$(3.4) \quad -\mathbf{N}_{1\alpha-\frac{1}{2}} = -(N_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha-\frac{1}{2}} + T_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha-\frac{1}{2}} + Q_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha-\frac{1}{2}})$$

i momentu

$$(3.5) \quad -\mathbf{M}_{1\alpha-\frac{1}{2}} = -(M_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha-\frac{1}{2}} + G_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha-\frac{1}{2}} + H_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha-\frac{1}{2}}).$$

Odpowiednio przy zmiennym β będziemy mieli w punkcie α , $\beta+1/2$ siłę

$$(3.6) \quad \mathbf{N}_{2\beta+\frac{1}{2}} = T_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta+\frac{1}{2}} + N_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta+\frac{1}{2}} + Q_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta+\frac{1}{2}}$$

i moment

$$(3.7) \quad \mathbf{M}_{2\beta+\frac{1}{2}} = G_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta+\frac{1}{2}} + M_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta+\frac{1}{2}} + H_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta+\frac{1}{2}},$$

a w punkcie o współrzędnych α , $\beta-1/2$, siłę

$$(3.8) \quad -\mathbf{N}_{2\beta-\frac{1}{2}} = -(T_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta-\frac{1}{2}} + N_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta-\frac{1}{2}} + Q_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta-\frac{1}{2}})$$

i moment

$$(3.9) \quad -\mathbf{M}_{2\beta-\frac{1}{2}} = -(G_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta-\frac{1}{2}} + M_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta-\frac{1}{2}} + Q_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta-\frac{1}{2}}).$$

Ponadto w węźle elementu działają siły zewnętrzne o składowych

$$(3.10) \quad \mathbf{P} = P_t \cdot \mathbf{t} + P_i \cdot \mathbf{i} + P_n \cdot \mathbf{n}.$$

i momenty zewnętrzne

$$(3.11) \quad \mathbf{L} = L_t \cdot \mathbf{t} + L_i \cdot \mathbf{i} + L_n \cdot \mathbf{n}.$$

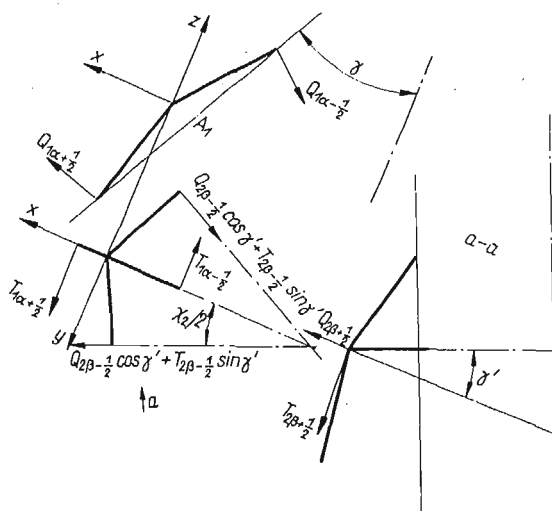
Pamiętając, że na przeciwległych przekrojach siły i momenty wewnętrzne mają zwroty dodatnie przeciwne, napiszemy wektorowe równanie równowagi sił rozważanego elementu

$$(3.12) \quad \Delta_\alpha \mathbf{N}_1 + \Delta_\beta \mathbf{N}_2 + P_t \cdot \mathbf{t} + P_i \cdot \mathbf{i} + P_n \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Podstawiając za N zależność (3.1) i korzystając ze związków dotyczących działań na wektorach jednostkowych podanych w [25] otrzymamy trzy równania równowagi wynikające z przyrównania do zera trzech składowych wypadkowego wektora sił działającego na rozpatrywany element

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha N_1 + \frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha Q_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{2A_1} \nabla_\beta N_2 + \frac{\nabla_\beta A_1}{2A_1} \Delta_\beta T_2 + P_i = 0, \\ & \Delta_\alpha T_1 + \frac{A_2}{h_2} \Delta_\beta N_2 + 2 \frac{B_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta Q_2 + \frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \cdot \nabla_\beta T_2 + P_i = 0, \\ & -\frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha N_1 + \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha Q_1 - \frac{B_2}{h_2} \nabla_\beta N_2 - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 + \frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \cdot \Delta_\beta Q_2 + P_n = 0. \end{aligned}$$

Obecnie zbadajmy warunki równowagi rozpatrywanego elementu pod działaniem wypadkowego wektora momentu. Rozpocznijmy od wyznaczenia sumy momentów wewnętrznych. Sumę tę możemy uzyskać zastępując w równaniach równowagi sił wielkości tych ostatnich — wielkościami odpowiednio skierowanych momentów



Rys. 3

wewnętrznych. Jednakże w tym przypadku sumy rzutów na odpowiednie osie nie będą równe zero, a to dlatego, że na wypadkowy wektor momentu składają się również momenty odpowiednich sił wewnętrznych. Obliczmy więc sumy momentów sił poprzecznych względem trzech osi: równoległych do stycznych i normalnej i przechodzących przez węzeł elementu.

Wprowadźmy w tym celu pomocniczy, prostokątny układ współrzędnych x, y, z , z początkiem w węźle elementu i osią y równoległą do wektora t a osią z — równoległą do osi symetrii powłoki (rys. 3). Zrzućmy teraz siły $Q_{2\beta \pm \frac{1}{2}}$ i $T_{2\beta \pm \frac{1}{2}}$

na poszczególne osie pomocniczego układu i wyznaczmy współrzędne ich punktów zaczepienia. Wielkości te można odczytać bezpośrednio z rys. 3

$$\begin{aligned}
 r_{x\beta\pm\frac{1}{2}} &= -\frac{h_2}{2} \sin^2 \frac{\chi_2}{2}, & r_{y\beta\pm\frac{1}{2}} &= \pm \frac{h_2}{2} \cos \frac{\chi_2}{2}, & r_z &= 0, \\
 P_{x\beta\pm\frac{1}{2}} &= \pm Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \gamma' \cos \frac{\chi_2}{2} \pm T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \gamma' \cos \frac{\chi_2}{2}, \\
 P_{y\beta\pm\frac{1}{2}} &= Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \gamma' \sin \frac{\chi_2}{2} + T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \gamma' \sin \frac{\chi_2}{2}, \\
 P_{z\beta\pm\frac{1}{2}} &= \mp T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \gamma' \pm Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \gamma'.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Z tego samego rysunku można również odczytać wartości ramion sił Q względem osi t i siły T_1 względem osi n . Są one równe odpowiednio

$$h_1/2 \text{ oraz } A_1/2.
 \tag{3.15}$$

Momenty sił $Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}}$ i $T_{2\beta\pm\frac{1}{2}}$ względem wspomnianych osi obliczymy jako rzut iloczynu wektorowego $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ na te osie, a więc jako iloczyn skalarowy

$$M_i = i_x(r_y P_z - r_z P_y) + i_y(r_z P_x - r_x P_z) + i_z(r_x P_y - r_y P_x),
 \tag{3.16}$$

gdzie i_x, i_y, i_z , są kosinusami kierunkowymi zestawionymi poniżej w tabeli.

$$\tag{3.17}$$

	t	i	n
i_x	$\sin \gamma$	0	$\cos \gamma$
i_y	0	1	0
i_z	$-\cos \gamma$	0	$\sin \gamma$

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymamy ostatecznie trzy równania równowagi momentów działających na element powłoki

$$\begin{aligned}
 \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha M_1 + \frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha H_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} \nabla_\beta M_2 + \Delta_\alpha T_1 \frac{h_1^2}{4R_1^2} + \\
 \frac{\nabla_\beta A_1}{2A_1} \Delta_\beta G_2 + \nabla_\beta Q_2 \frac{h_2 \nabla_\beta A_1}{4A_1} + L_i = 0, \\
 \Delta_\alpha G_1 + \frac{A_2}{h_2} \Delta_\beta M_2 + 2 \frac{B_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta H_2 + \frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta G_2 + \\
 - \frac{h_1}{2} \nabla_\alpha Q_2 - \frac{h_2^2 A_1}{2R_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 + \frac{\Delta_\alpha h_2 \cdot A_2}{2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta Q_2 + L_i = 0, \\
 \frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha M_1 + \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha H_1 - \frac{B_2}{h_2} \nabla_\beta M_2 - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta G_2 + \frac{A_1}{2} \nabla_\alpha T_1 + \\
 \frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta H_2 - \frac{A_1 A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta T_2 - \frac{h_2^2 \Delta_\alpha h_2}{4R_2 \nabla_\beta A_1} + L_n = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Równania (3.13) i (3.18) stanowią układ równań równowagi rozpatrywanego elementu. Układ ten zawiera sześć niewiadomych sił i sześć niewiadomych momentów wewnętrznych, a więc o dwie niewiadome więcej niż ma analogiczny układ równań nieskończenie małego wycinka cienkiej powłoki i tyle samo co element ośrodka włóknistego [47]. Różnica polega na tym, że w klasycznej teorii powłok nie występują momenty o wektorach mających kierunek normalnej. Poza tym powyższe równania przy przejściu do granicy z wielkościami h_1 i h_2 przechodzą w równanie równowagi wspomnianej, klasycznej teorii powłok, oczywiście po odrzuceniu momentów działających w kierunku normalnej. Zbadajmy przykładowo przejście do granicy równania równowagi rzutów sił na oś t , pamiętając, że siły w równaniach klasycznej teorii powłok odniesione są do jednostki długości.

Przyjmując oznaczenia W. W. Nowożyłowa [33] mamy

$$\begin{aligned} N_1 &= T_1 A_2 da_2, & Q_1 &= N_1 A_2 da_2, & N_2 &= T_2 A_1 da_1, \\ T_2 &= T_{21} A_1 da_1, & P_1 &= q_1 A_1 A_2 da_1 da_2, \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu powyższych uwag otrzymamy

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial a_1} - \frac{\partial A_2}{\partial a_1} T_2 + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial a_2} \right) + \frac{N_1}{R_1} + q_1 = 0,$$

co pokrywa się z odpowiednim równaniem klasycznej teorii powłok obrotowych [33].

4. Związki pomiędzy siłami i momentami wewnętrznymi a odkształceniami i przemieszczeniami powierzchni środkowej

Jak już wspomnieliśmy w poprzednim punkcie, siły wewnętrzne w określonych przekrojach są statycznie równoważne naprężeniom wyznaczonym zgodnie z hipotezą płaskich przekrojów. Przy tych założeniach związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami możemy wyznaczyć na podstawie powszechnie znanych zależności teorii zginania prętów cienkich.

Rozpatrzmy w tym celu pręt układu odkształconego (rys. 4) przyjmując chwilowo oznaczenia pomocnicze

δ_1, δ_2 przemieszczenia liniowe węzłów 1 i 2 prostopadłe do osi pręta,

Ω_1, Ω_2 bezwzględne kąty obrotów węzłów 1 i 2, względem osi prostopadłych do rysunku,

τ_1, τ_2 względne kąty obrotów węzłów 1 i 2 względem osi prostopadłych do rysunku.

Pomiędzy tymi wielkościami zachodzą związki

$$(4.1) \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \tau_1 = \Omega_1, \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \tau_2 = \Omega_2.$$

Wykorzystując znane związki pomiędzy względnymi kątami ugięcia a siłami i momentami na końcach pręta otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} - \frac{Mh}{2EI} - \frac{Th^2}{12EI} &= \Omega_1, \\ \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \frac{Mh}{2EI} - \frac{Th^2}{12EI} &= \Omega_2, \end{aligned}$$

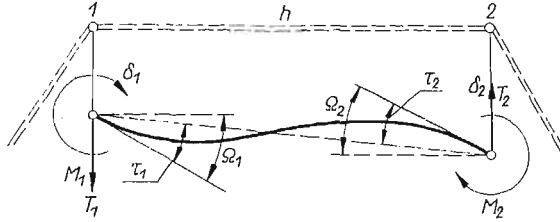
a po przekształceniach

$$(4.2) \quad T = \left[\frac{\delta_2 - \delta_1}{h} - \frac{1}{2} (\Omega_1 + \Omega_2) h \right] h \kappa,$$

$$M = \kappa h^3 (\Omega_2 - \Omega_1),$$

gdzie $\kappa = Ef/h^4$.

Uwzględniając fakt, że w geometrii powierzchniowej siatki punktów wyznaczyliśmy dla poszczególnych prętów wielkości $(\delta_2 - \delta_1)$, $(\Omega_2 - \Omega_1)$, $(\Omega_1 + \Omega_2)$, będące składowymi wektora odkształcenia liniowego i kąтового (por. praca autora [25])



Rys. 4

w funkcji przemieszczeń u , v , w i biorąc pod uwagę znaki poszczególnych sił wewnętrznych (rys. 4), otrzymamy następujące zależności określające cztery siły poprzeczne i cztery momenty zginające:

$$(4.3) \quad Q_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12h_1^2 \kappa_{1n} \left[-\vartheta_{1\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} q_{1\alpha+\frac{1}{2}} \right] = 12h_1 \kappa_{1n} \left[-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{R_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 w) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \psi h_1 \right],$$

$$Q_{2\beta+\frac{1}{2}} = 12h_2^2 \kappa_{2n} \left[\vartheta_{2\beta+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q_{2\beta+\frac{1}{2}} \right] = 12h_2^2 \kappa_{2n} \left[\frac{2A_1}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \left(-\frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} w \right) - \frac{\nabla_{\beta} A_1}{4A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \varphi + \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{2 \nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \psi - \right. \\ \left. - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{2 \nabla_{\beta} A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma \right];$$

$$T_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12h_1^2 \kappa_{1t} \left[\omega_{1\alpha+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} s_{1\alpha+\frac{1}{2}} \right] = 12h_1^2 \kappa_{1t} \left[\frac{\Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} v}{h_1} + \frac{1}{4} h_1 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi}{R_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2h_1} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 \gamma) \right],$$

$$T_{2\beta+\frac{1}{2}} = 12h_2^2 \kappa_{2t} \left[\omega_{2\beta+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} s_{2\beta+\frac{1}{2}} \right] = \frac{12h_2^2 \kappa_{2t}}{A_1 h_2 \nabla_{\beta} A_1} \left[\frac{1}{2} (\nabla_{\beta} A_1)^2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} u - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} A_2 \Delta_{\alpha} h_2 \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} v - B_2 \Delta_{\alpha} h_2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} w + B_2 A_1^2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \psi + A_2 A_1^2 \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma \right],$$

$$\begin{aligned}
 G_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \kappa_{1n} h_1^3 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \psi, \\
 (4.3) \quad G_{2\beta+\frac{1}{2}} &= \kappa_{2n} h_2^3 \left[\frac{1}{2} \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \varphi - \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \psi - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma \right]; \\
 H_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \kappa_{1t} h_1^3 s_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \kappa_{1t} h_1^3 \left[-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 \gamma) \right], \\
 H_{2\beta+\frac{1}{2}} &= \kappa_{2t} h_2^3 s_{2\beta+\frac{1}{2}} = \kappa_{2t} h_2^3 \left[\frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma - \frac{h_2 A_1}{R_2 \nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \psi \right],
 \end{aligned}$$

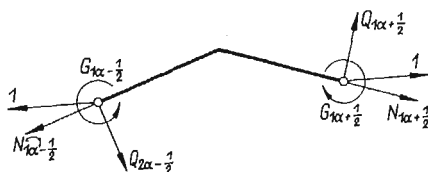
gdzie:

$$\kappa_{1n} = \frac{E_1 I_{1n}}{h_1^4}, \quad \kappa_{2n} = \frac{E_2 I_{2n}}{h_2^4}, \quad \kappa_{1t} = \frac{E_1 I_{1t}}{h_1^4}, \quad \kappa_{2t} = \frac{E_2 I_{2t}}{h_2^4}.$$

Związki określające siły normalne i momenty skręcające w funkcji przemieszczeń i odkształceń nie wymagają szczegółowego omówienia.

$$\begin{aligned}
 N_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \mu_1 h_1^2 \varepsilon_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \mu_1 h_1^2 \left[\frac{1}{h_1^2} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 u) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{w}{R_1} \right) \right], \\
 (4.4) \quad N_{2\beta+\frac{1}{2}} &= \mu_2 h_2^2 \varepsilon_{2\beta+\frac{1}{2}} = \mu_2 h_2^2 \left[\frac{\Delta_\alpha h_2}{2A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} u + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} v + \frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} w \right], \\
 M_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \nu_1 h_1^2 p_{1\alpha+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (\varphi A_1) + h_1 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{R_1} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Powyższy sposób nie jest jedynym sposobem wyznaczenia związków pomiędzy siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami. Zależności te można wyznaczyć również dla punktów przy argumentach całkowitych. Jednakże droga ta prowadzi do wzo-



Rys. 5

rów dość złożonych i nie mających, jak się zdaje, większego znaczenia praktycznego. Dla zilustrowania tego sposobu rozpatrzmy zależność pomiędzy wydłużeniem względnym ε_1 i siłami wewnętrznymi. Związek ten otrzymamy wyznaczając odkształcenie elementu powłoki w kierunku t (rys. 5). Po przekształceniach otrzymamy

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2A_1 \kappa_{1n}} \left[\frac{1}{24R_1} \Delta_\alpha Q_1 - \frac{1}{4h_1 R_1} \nabla_\alpha M_1 + \frac{\kappa_{1n} A_1}{h_1^2 \mu_1} \nabla_\alpha N_1 \right]$$

Jak widać, powyższa zależność przedstawia sobą związek w postaci liniowej kombinacji sum i przyrostów kilku funkcji sił wewnętrznych, co poważnie utrudnia jej stosowanie.

Na zakończenie rozważań nad siłami wewnętrznymi należy zwrócić uwagę na to, że tylko zależności określające siły normalne (N_1 , N_2) przechodzą w granicy w od-

powiednie wyrażenia w teorii powłok cienkich, oczywiście przy współczynniku Poissona równym zeru. Pozostałe siły i momenty wewnętrzne mają granice różne od odpowiednich wielkości w powłokach cienkich. Wynika to stąd, że zostały one wyznaczone z ugięć pręta prostego, który w granicy nie osiąga wycinka powłoki ogólnie biorąc o dwu krzywiznach różnych od zera.

5. Warunki brzegowe

Wszystkie otrzymane w p. 3 równania równowagi w liczbie sześciu są pierwszego rzędu i to w odniesieniu do każdej z nie znanych funkcji sił wewnętrznych. W punkcie 4 wyznaczyliśmy z kolei każdą z dwunastu funkcji sił wewnętrznych przez równania pierwszego rzędu w odniesieniu do każdego z sześciu przemieszczeń liniowych i kątowych. Jeżeli teraz podstawimy do równań równowagi siły wyrażone przez przemieszczenia, to otrzymamy sześć równań drugiego rzędu względem przemieszczeń. Łącznie otrzymamy więc układ równań równoważny jednemu równaniu dwunastego rzędu względem nie znanej funkcji rozwiązującej.

Przyjmijmy, że linie konturu ograniczające naszą powłokę leżą w płaszczyznach wyznaczonych punktami o współrzędnych $\alpha = \text{const}$ lub $\beta = \text{const}$. W takich przypadkach rozwiązanie wspomnianego układu równań wymaga znajomości sześciu warunków brzegowych na każdej z krawędzi wycinka powłoki. Poniżej zajmiemy się warunkami brzegowymi dla kilku najczęściej spotykanych przypadków ograniczając się jedynie do brzegu $\alpha = \alpha_0$. Warunki dla brzegów $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ i $\beta = 0$ mają postać analogiczną.

Brzeg powłoki swobodny. Wszystkie sześć składowych sił i momentów równe są zeru,

$$(5.1) \quad N_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = Q_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = T_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0, \quad M_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = H_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = G_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0.$$

Brzeg podparty przegubowo nieprzesuwnie (przeguby kuliste)

$$(5.2) \quad w_{\alpha_0} = v_{\alpha_0} = u_{\alpha_0} = 0, \quad Q_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_2}{2} + G_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$T_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_2}{2} - H_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0, \quad M_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0.$$

Brzeg całkowicie utwierdzony

$$(5.3) \quad u_{\alpha_0} = v_{\alpha_0} = w_{\alpha_0} = 0, \quad \varphi_{\alpha_0} = \psi_{\alpha_0} = \gamma_{\alpha_0} = 0.$$

Powłoka zamknięta w kierunku α . Jeżeli będziemy zmieniali α przy ustalonym β , to zawsze będziemy wracać do tego samego punktu otrzymując te same wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych. Tak więc w przypadku powłoki zamkniętej warunki brzegowe zamieniają się w warunki okresowości.

Powłoka podparta na brzegach przeciwległych przegubowo z możliwością przesuwu w kierunku α . W takim przypadku, jeżeli stosujemy rozwiązania w postaci okresowych szeregów półzakre-

sowych jak np. $\sin(n\pi a/\alpha_0)$, gdzie n jest liczbą całkowitą, to warunki brzegowe również sprowadzają się do warunków okresowości w postaci

$$(5.4) \quad f(-a) = -f(a).$$

Rozpatrując zagadnienia brzegowe dla równań różnicowych musimy pamiętać o różnicach, jakie tu występują w porównaniu z zagadnieniami brzegowymi dla równań różniczkowych. W tych ostatnich tak funkcja jak i jej dowolna pochodna określone są w jednym i tym samym punkcie. Natomiast w równaniach różnicowych n -tego rzędu (n — liczba parzysta) przyrost lub suma określone są, ogólnie rzecz biorąc, wartościami funkcji w $n+1$ sąsiednich punktach. Jeżeli więc rozpatrujemy w obszarze α_0 punktów równanie różnicowe zwyczajne n -tego rzędu, to ma ono sens tylko w $(\alpha_0 - n)$ punktach. W punktach brzegowych w liczbie $n/2$ na jednym brzegu i $n/2$ na drugim brzegu nasze równanie traci sens. Punktom brzegowym odpowiadają bowiem równania zbudowane z uwzględnieniem wyżej wymienionych warunków brzegowych.

Przykłady zastosowań powyższych równań będą tematem osobnej publikacji w jednym z kolejnych numerów *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*.

Literatura cytowana w tekście

1. J. H. ARGYRIS, *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, 1964.
2. S. O. ASPLUND, *Structural Mechanics*, I, II, Göteborg 1963.
3. I. BABUŠKA, *The Fourier transform in the theory of differences equations and its applications* Arch. Mech. Stos., 4, 11 (1959).
4. F. BLEICH, H. BLEICH, *Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes*, Der Stahlbau, 10 (1937), 7.
5. F. BLEICH, E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, Berlin 1927.
6. S. BŁASZKOWIAK, Z. KAŹKOWSKI, *Metoda Crossa*, Warszawa 1959.
7. М. Я. БОРОДЯНСКИЙ, *Устойчивость рамных куполов*, Расчет пространственных конструкций, Москва 1958.
8. В. А. БОВИН, *Разностно-вариационные методы строительной механики*, Киев 1963.
9. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN, Warszawa 1961.
10. K. CLAPEYRON, *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*, Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des Sciences de Paris, 26, 45 (1857).
11. В. Г. ЧУДНОВСКИЙ, *Свободные колебания и устойчивость циклических симметрических пространственных рам*, Расчет пространственных конструкций, II, 1951.
12. D. L. DEAN, *Analysis of Curved Lattices with Generalized Joint Loadings*, 20 Publications IABSA, 1960.
13. D. L. DEAN, C. P. UGARTE, *Analysis of Structural Nets*, 23 Publications IABSA, 1960.
14. D. L. DEAN, *Lamella beams and grids*, J. Eng. Mech. Div., 2, 90 (1964).
15. D. L. DEAN, S. TAUBER, *Solutions for one-dimensional structural lattices*, J. Eng. Mech. Div. A.S.C.E., 1959.
16. В. А. ЭРЯГИНА, *Устойчивость цилиндрических стержневых систем*, Изв. Высш. учебн. заведения, Стр.-во и арх-ра, 226, 1963.
17. A. FÖPPL, *Das Fachwerk im Raum*, Leipzig 1892.
18. G. GEIZENDORFER, L. LEGATSKI, *Unistrut space-frame system*, Univ. of Michigan Press, 1955.

19. W. GUTKOWSKI, *Statics and stability of prismatic frame-lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., 5, 9 (1961).
20. W. GUTKOWSKI, *The stability of lattice struts*, Z.A.M.M., 6, 43 (1963).
21. W. GUTKOWSKI, *Stateczność pozornie nieszttywnej powłoki ramowo-kratowej ściśkanej siłą osiową*, Rozpr. Inżyn., 3, 11 (1963).
22. W. GUTKOWSKI, *Unistrut plates*, Bull. Acad. Polon. Sci., 3, 12 (1964).
23. W. GUTKOWSKI, *Plane polygonal bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., 9, 12 (1964).
24. W. GUTKOWSKI, *Cylindrical grid shell*, Arch. Mech. Stos., 3, 17 (1965).
25. W. GUTKOWSKI, *Geometria różnicowa powierzchniowej siatki punktów*, Mech. Teor. i Stos., 2, 3 (1965).
26. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw — Hill, 1959.
27. P. JASTRZĘBSKI, R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Kratownice — obliczenia statyczne*, Arkady 1959.
28. F. LADERER, *Grid shells composed of steel tubes*, Proc. Symp. on Shell Research, Delft, Aug. 30 — Sept. 2, 1961.
29. Z. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Düsseldorf 1963.
30. L. MANN, *Die Berechnung steifer Vierecknetze*, Zeitschr. Bauwesen, 59, 1909.
31. R. MISES, J. RATZERSDORFER, *Die Knicksicherheit von Fachwerken*, Z.A.M.M., 5, 1925.
32. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, I, II, Warszawa 1960.
33. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек*, Ленинград 1962.
34. И. Г. ПОПОВ, *Цилиндрические стержневые системы*, Москва 1952.
35. П. К. РАШЕВСКИЙ, *Курс дифференциальной геометрии*, Москва 1956.
36. А. Н. СЕГАЛЬ, *Высотные сооружения. Расчет на прочность, жесткость и устойчивость*, Госстройиздат, 1949.
37. А. Н. СЕГАЛЬ, *О расчете несимметричной циклической стержневой системы*, Расчет постр. конст., 2, 1951.
38. Л. Н. СТАВРАКИ, *Устойчивость пространственных каркасов из тонкостенных открытых, симметричных профилей*, Сборник трудов Института Стр. Мех., 12, 1950.
39. В. Д. ШАПКОВИЧ, *Матричный метод расчета регулярных стержневых систем*, Расчет постр. констр., 4, 1958.
40. S. P. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials*, London 1953.
41. А. А. УШАНСКИЙ, *Пространственные системы*, Москва 1948.
42. E. VITÁSEK, *The n-dimensional transform in the theory of difference equations*, Arch. Mech. Stos., 2, 12 (1960).
43. Д. В. ВАЙНБЕРГ, В. Г. ЧУДНОВСКИЙ, *Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений*, Киев 1948.
44. W. WIERZBIŃSKI, *Mechanika budowli*, Warszawa 1946.
45. W. WIERZBIŃSKI, *Zastosowanie różnic skończonych do obliczania dźwigarów zalamanych w płanie*, Przegląd Techniczny, 1930.
46. В. З. ВЛАСОВ, *Избранные труды*, т. I, Москва 1962.
47. С. WOŹNIAK, *Fibrous media as continuous models of frames and lattices*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 7 (1964).

Резюме

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Даются разностные уравнения стержневых конструкций с сеткой, приведенной на рис. 1. Рассматриваются последовательно уравнения равновесия, зависимости между силами и перемещениями, а также краевые условия. Обсуждаемые зависимости получены, на основе разностной геометрии [25], и рассуждений аналогичных, проводящимся в классической теории оболочек.

S u m m a r y

TWO-DIMENSIONAL GRID STRUCTURES

The present paper deals with finite differences equations of regular grid structures shown in Fig. 1. The equations of equilibrium, the force displacement relations and the corresponding boundary conditions have been considered. These relations are based on finite differences geometry described in paper [25], and the general way of reasoning coincides with that of the classical shell theory.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1965 r.

O NAPRĘŻENIACH W SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU POD ŚLIZGAJĄCĄ SIĘ SZTYWNĄ KULĄ

PIOTR SUKIENNIK (KRAKÓW)

1. **Wstęp.** Badania doświadczalne stanu naprężeń sprężystych, towarzyszących tarcii ślizgowemu, można wg. stosowanych metod podzielić na dwie grupy. W pierwszej grupie o stanie sprężystym kontaktu ślizgowego wnioskuje się na podstawie analizy przemieszczeń wstępnych (STEWENS — 1899, WIERCHOWSKI — 1926, RANKIN — 1926, KONIACHIN — 1951, CURTNEY PRATT-EISNER — 1957, GREENWOOD i TABOR — 1957). Drugą grupę zagadnień stanowią prace uwzględniające w problematyce typu hertzowskiego składową styczną, a nawet analizujące efekty statyczne i dynamiczne właśnie z punktu widzenia składowej stycznej naprężenia (JOHNSON — 1957).

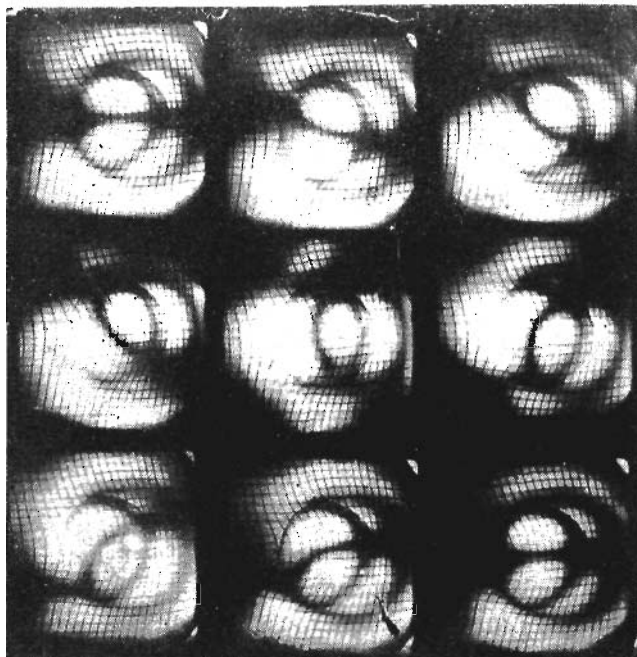
Przedstawioną pracę można zaliczyć do tej właśnie grupy jako pracę doświadczalną, analizującą jakościowo za pomocą metody elastoptycznej rozkład naprężeń stycznych dla trójwymiarowego kontaktu ślizgowego.

2. **Opis doświadczenia.** Dla zbadania rozkładu naprężeń stycznych pod ślizgającą się kulą modelowano półprzestrzeń za pomocą warstwy żelatyny 7% o grubości 50 mm. Po takiej półprzestrzeni ślizgała się kula szklana o promieniu krzywizny 5 cm dając «koło» styku o promieniu rzędu 0,5 cm. Obraz stacjonarny izoklin dla kontaktu ślizgowego (rys. 1) ustala się po przebyciu drogi rzędu średnicy koła styku i jest dobrze odtwarzalny. Fotografie izoklin 0° , 10° , 20° , 30° , 45° , 60° , 70° , 80° i 90° uzyskano w świetle sodowym przechodzącym, padającym prostopadle do kierunku ruchu i do powierzchni kontaktu.

Dla uzyskania obrazu dwuwymiarowego zastosowano metodę warstwy światłoczułej A grubości kilku milimetrów naniesionej na półprzestrzeni B . W tym celu żelatynę B hartowano gliceryną, żelatynę zaś A formaliną. Wpływ sposobu hartowania na czułość elastoptyczną zauważono wcześniej. Jest on dość znaczny, lecz nie rozwiązuje jeszcze problemu, ponieważ różnica pomiędzy czułościami elastoptycznymi A i B nie jest zbyt wielka, a na żelatynie trudno uzyskać większą ilość izochrom, niezbędną dla ilościowego opracowania pola naprężeń. Natomiast kontakt między warstwą A i B uzyskany przez naniesienie warstewki A w stanie płynnym na zastygniętą B jest idealny i jednorodny pod względem własności mechanicznych i optycznych i nie wymaga żadnych klejów.

Była też opracowana technika badania obrazu izoklin w świetle odbitym przez chemiczne naniesienie warstewki srebra na materiał B i następne rozlanie warstewki A . Srebro naniesione chemicznie składa się z bardzo drobnych łusek i nie wpływa w sposób widoczny na własności mechaniczne żelatyny. Ta metoda jest jednak bardziej pracowita i wymaga przystosowywania aparatury. Obraz izoklin zaś jest

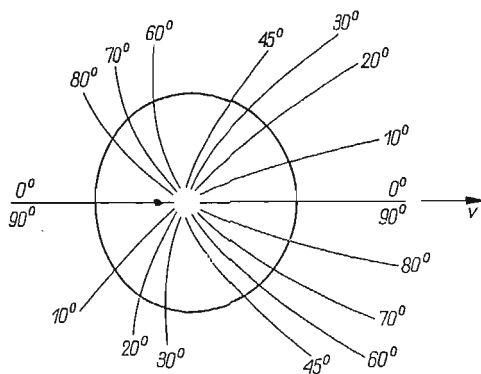
w zarysie taki sam, jak w metodzie światła przechodzącego; jest tylko mniej wysycony. Dlatego zdecydowano się na badanie kontaktów w świetle przechodzącym i na poszukiwanie dla dalszych badań materiałów A o konsystencji gumy bez



Rys. 1

opóźnienia sprężystego, dających dużą liczbę izochrom oraz materiałów B o identycznych własnościach mechanicznych, lecz nieczułych elastoptycznie.

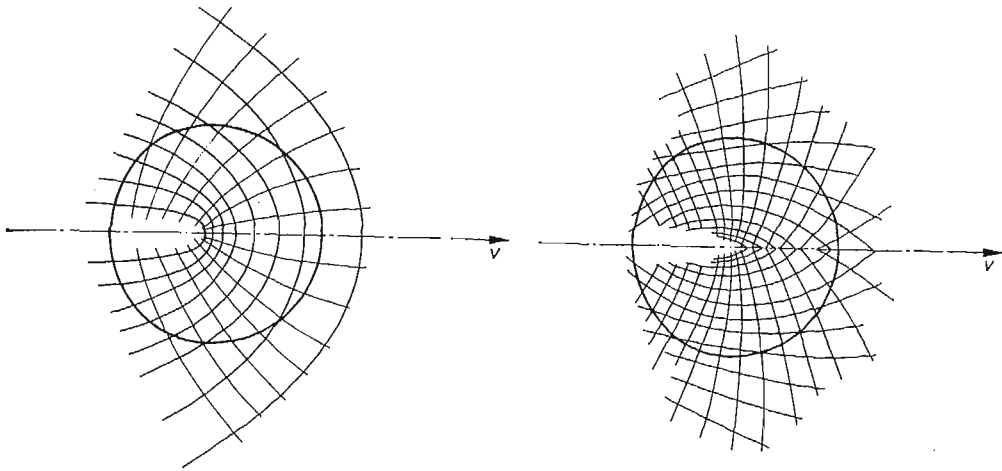
3. Dyskusja wyników. Na podstawie rys. 1 sporządzono obraz zbiorczy izoklin (rys. 2), a następnie znaleziono metodą graficzną trajektorie naprężeń głównych (rys. 3) i trajektorie maksymalnych naprężeń stycznych (rys. 4).



Rys. 2

Na rysunku 2 widać jeden punkt hydrostatycznego rozkładu naprężeń w okolicy środka koła styku.

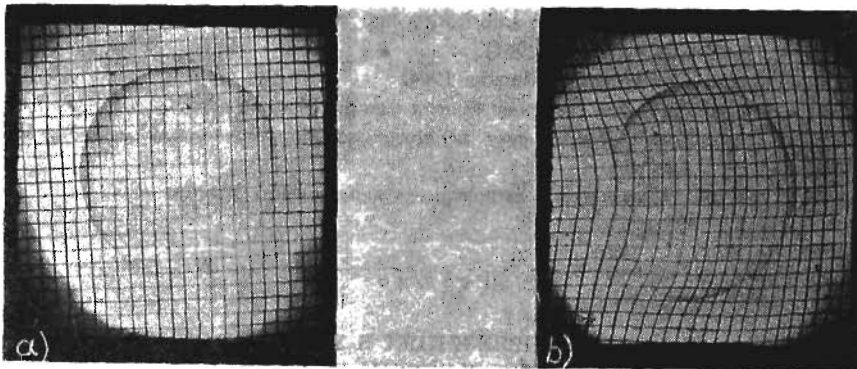
Izoklina 0° rozdziela zwykle obszary, których naprężenia styczne mają przeciwne znaki. Dla konfrontacji sporządzono fotografię koła styku z naniesioną siatką o oczkach kwadratowych. Rysunek 5a przedstawia zdjęcie w stanie spoczynku, a rysunek 5b — zdjęcie w stanie poślizgu na całej powierzchni styku. Na rysunku 5b widać wyraźnie beczkowatą deformację przed kołem styku a poduszkowatą za



Rys. 3

Rys. 4

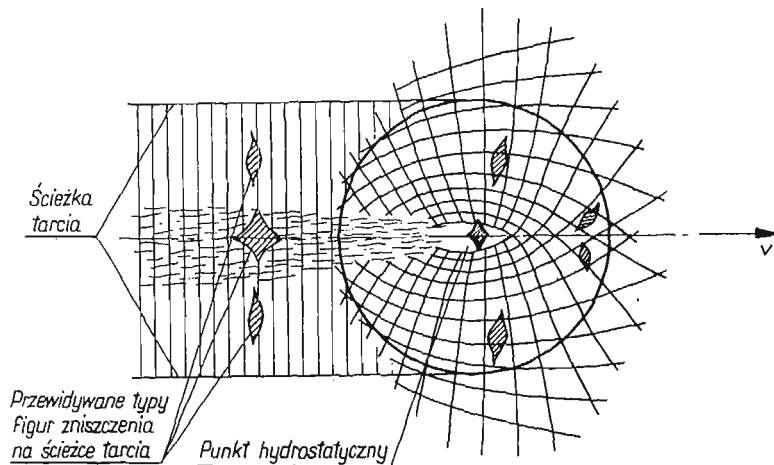
kołem styku. Obie te deformacje rozpościerają się głęboko na obszar styku. Natomiast przejście od stanu zgniecenia do stanu rozciągnięcia na samym kole styku nie ma swego wyraźnego odpowiednika w obrazie elastoptycznym.



Rys. 5

Problem zmiany znaków naprężeń w kontakcie ślizgowym jest ważnym z punktu widzenia zmęczeniowej teorii zużycia trących się par kinematycznych (RADCIK — 1958, KRAGIELSKI — 1962). Na podstawie rys. 6 można przewidzieć rozwój szczelin zużycia na ścieżce tarcia dla przypadku półprzestrzeni izotropowej np. dla gumy

i mas plastycznych (JELKIN — 1964, Chruszczow — 1965). W przypadku metali trzeba by modelować półprzestrzeń za pomocą materiałów elastoptycznych polikrystalicznych typu chlorku srebra (SZASKOLSKA — 1964). Jest to droga bardzo



Rys. 6

obiecująca, ponieważ chlorek srebra znalazł już szerokie zastosowanie przy badaniach podstawowych nad zmęczeniem i tarciem wewnętrznym.

Literatura cytowana w tekście

1. А. В. ВЕРХОВСКИЙ, Ж. Прикл. Физ., 4, 3 (1926).
2. J. S. RANKIN, Phil. Mag., 2, 8 (1926).
3. И. П. КОНЯХИН, Диссертация, Томск 1951.
4. Curtney Pratt-Eisner, Proc. Roy. Soc. A, 238 (1957).
5. Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear, London 1957.
6. РАДЧИК, ДАН СССР, 4, 141 (1961).
7. А. Я. ЕЛЬКИН, Диссертация, Москва 1964.
8. И. В. КРАГЕЛЬСКИЙ, Усталостная теория износа, Москва 1962.
9. М. П. ШАСКОЛЬСКАЯ, Конференция по поляризациино оптическом методу, Ленинград 1964.
10. М. М. ХРУЦОВ, Платмасы в подшипниках скольжения, Москва 1965.

Резюме

О КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД СКОЛЬЗЯЩИМ ШАРОМ

В работе обсуждены эксперименты по исследованию усталостного механизма износа, проведенные в Кафедре физики Краковского Политехнического Института. Для нахождения поля напряжений под скользящим шаром в опытах применен фотоупругий метод. Отмечено, что фотоупругая картина, соответствующая касательным напряжениям под скользящим шаром, существует и имеет хорошую воспроизводимость.

Для нахождения поля напряжений, на основании картины изоклин, применен графический метод.

В работе высказано мнение о том, что проблема развития трещин в полях напряжений и проблема фрикционного износа имеют общие черты, и следовательно существует возможность сопоставления этих проблем и возможность поисков закономерностей развития фрикционного износа на дорожке трения.

Summary

ON THE TANGENTIAL STRESSES IN THE ELASTIC BASIS UNDER THE SLIDING SPHERE

The presented paper discusses the experiments carried out in the programme of studying fatigue mechanism of wear at the Department of Physics at the Technical University in Cracow. For an analysis of a stress field under the sliding ball, the photo-elastic method was applied. It was shown that the anticipated fringe picture appears and may be reproduced.

To find the stress distribution from the fringe picture, the graphical method was applied.

The opinion is expressed that the problem of crack propagation in a stress field and the problem of friction wear have similar aspects; thus a confrontation of both problems and a prediction of wear on the path of friction should be possible.

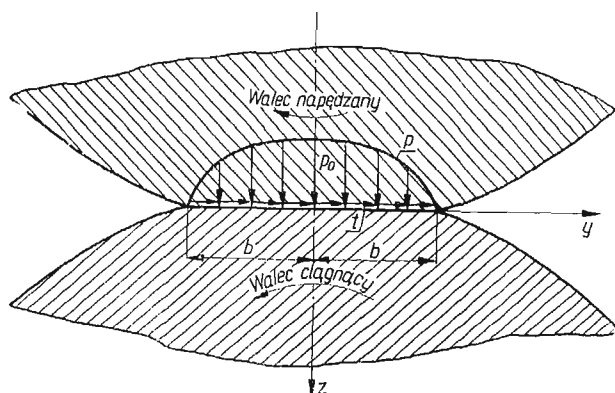
KATEDRA FIZYKI
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dn. 26 marca 1965 r.

O MOŻLIWOŚCIACH WYKORZYSTANIA METODY ELASTOPTYCZNEJ
DLA BADAŃ WYŁĘŻENIA MATERIAŁU I ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ
W ZAGADNIENIACH KONTAKTOWYCH

STANISŁAW PYTKO (KRAKÓW)

1. Wstęp. Celem pracy było zbadanie stanu naprężeń w obszarze styku dwóch walców obciążonych oprócz sił normalnych także siłami stycznymi (rys. 1). Dla potwierdzenia wyników otrzymanych na drodze teoretycznej wykonano pewne badania elastoptyczne na dociskanych w odpowiedni sposób krążkach. Badania



Rys. 1

te jak też ich wyniki były referowane na I symposium z zakresu elastoptyki w r. 1962 [1, 2]. Ażeby wyniki z badań płaskiego stanu naprężenia można było wykorzystać dla rozważania płaskiego stanu odkształcenia, przeprowadzono analizę opisaną poniżej. Wyniki tej analizy miały dać odpowiedź, na ile słuszne są dane otrzymane z badań elastoptycznych przy rozważaniach wyłężenia materiału w obszarze styku dwóch dociskanych do siebie walców. Jak wiadomo, dokładny obraz stanu naprężeń w takich elementach możemy otrzymać metodą zamrażania badając obciążone dwa walce z mas optycznie czułych. Brak stanowiska do badania metodą zamrażania zmusił autora do badania stanu naprężeń metodą elastoptyczną w obciążonych tarczach okrągłych (krążkach), zamiast w obciążonych modelach walcowych.

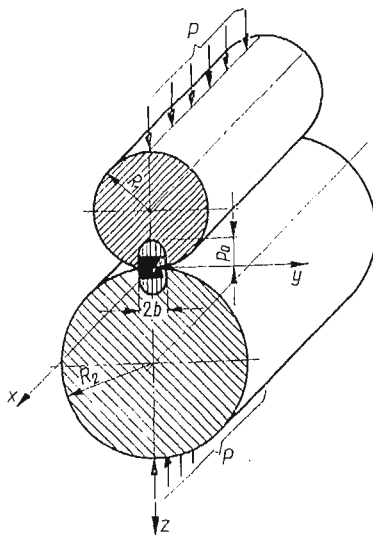
2. Analiza. W przypadku złożonych stanów naprężeń o wyłężeniu materiału wg hipotezy τ_{\max} decydować będą maksymalne wartości naprężeń stycznych określone wzorem

$$(2.1) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

gdzie σ_1 jest największym naprężeniem głównym, a σ_3 najmniejszym naprężeniem głównym.

Jeżeli główne naprężenia w rozpatrywanym punkcie dociskanych do siebie dwóch walców są odpowiednio równe, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, a zarazem $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, to największe naprężenie styczne obliczyć można ze wzoru (2.1). Naprężenie to działa w płaszczyźnie nachylonej pod kątem 45° do płaszczyzny maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego.

Rozpatrzmy stan naprężeń w obszarze styku dociskanych do siebie dwóch walców jak na rys. 2.



Rys. 2

Wartości naprężeń głównych dla strefy styku dwóch dociskanych do siebie walców (rys. 2) obliczyć można wg wzorów (2.2)–(2.4):

$$(2.2) \quad \sigma_1 = \sigma_x,$$

$$(2.3) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2},$$

$$(2.4) \quad \sigma_{11} = \sigma_3 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2}.$$

Według wzorów (2.2)–(2.4) obliczyć można naprężenia główne dla płaskiego stanu naprężenia, które oznaczono indeksami rzymskimi oraz dla płaskiego stanu odkształcenia, oznaczone indeksami arabskimi. Wartość największego głównego naprężenia σ_1 wg oznaczeń wzorów (2.2)–(2.4) jest dla pewnych obszarów styku walców równa σ_x . Wartości naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i τ_{yz} dla obszaru styku obliczyć można wg wzorów (2.5)–(2.8)

$$(2.5) \quad \sigma_x = -p_0 2\nu \frac{z}{b} \left[\sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right],$$

$$(2.6) \quad \sigma_y = -p_0 \frac{z}{b} \left[\sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} \left(2 - \frac{b^2 z^2}{\lambda^2 + b^2 z^2} \right) - 2 \right],$$

$$(2.7) \quad \sigma_z = -p_0 \frac{b z^3}{\lambda^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}},$$

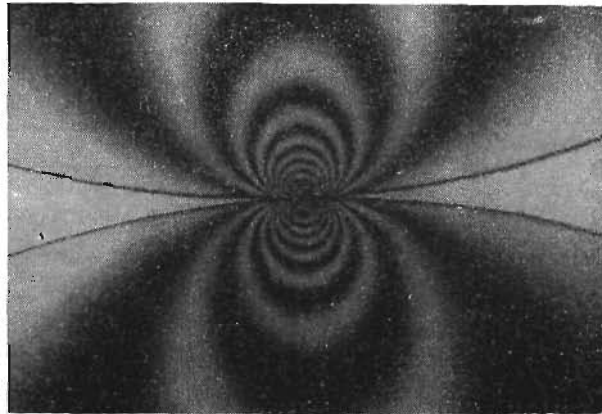
$$(2.8) \quad \tau_{yz} = -p_0 \frac{b y z^3}{\lambda^2 + b^2 z^2} \sqrt{\frac{\lambda}{b^2 + \lambda}},$$

gdzie λ jest największym pierwiastkiem równania

$$\frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1;$$

b oznacza pół szerokości powierzchni styku walców, ν jest współczynnikiem Poissona, p_0 — największym naciskiem na powierzchni styku.

Porównując wartości naprężeń głównych obliczonych wg wzorów (2.2)–(2.5) można było stwierdzić, że spełniają one nierówności $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ tylko w warstwie do głębokości $0,2b$. Poniżej tej warstwy wartość naprężenia $\sigma_1 = \sigma_x < \sigma_2$, czyli



Rys. 3

między naprężeniami głównymi zachodzi tam zależność, $\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$, wobec czego wartość τ_{\max} (dla płaskiego stanu odkształcenia w naszym przypadku) można obliczyć zgodnie z wcześniejszym oznaczeniem naprężeń wg wzoru:

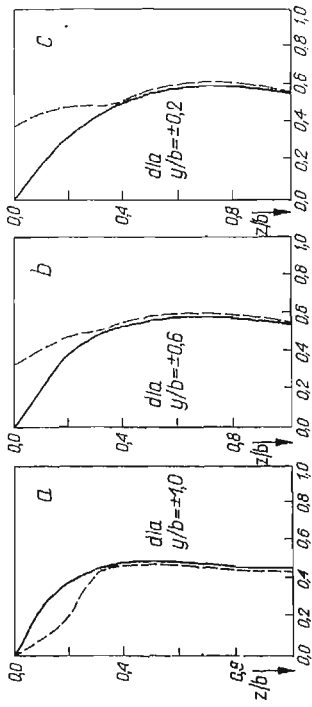
$$(2.9) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}).$$

Ogólnie znany wzór na wartość τ_{\max} dla płaskiego stanu naprężenia ma postać:

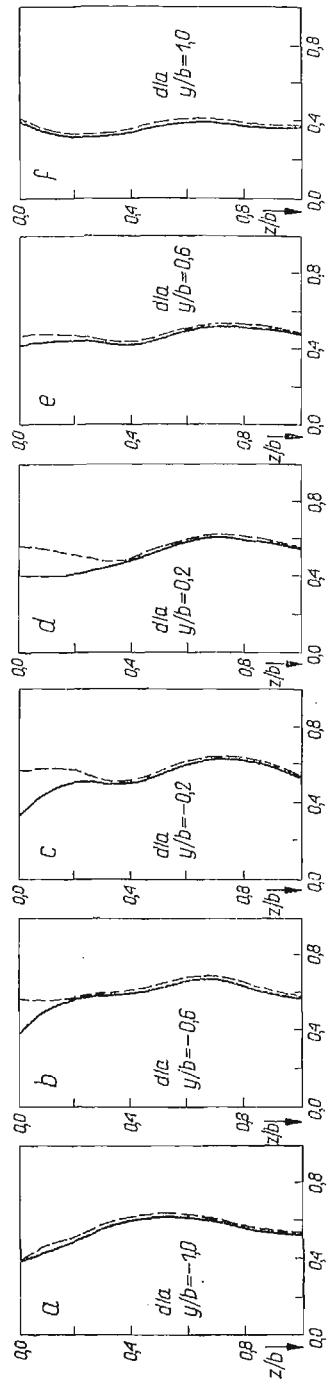
$$(2.10) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}).$$

Wartość naprężeń σ_I i σ_{II} dla tego stanu obliczyć można wg wzorów (2.3) i (2.4).

Wartość τ_{\max} wg wzoru (2.10) otrzymać można również na drodze badań elastoptycznych. Ponieważ wzór (2.9) jest identyczny ze wzorem (2.10) przy rozpatrywaniu warstw na głębokości $> 0,2b$, możemy zatem uzyskać wyniki dla τ_{\max} wg wzoru (2.9) na podstawie badań elastoptycznych. Dla potwierdzenia tych wyników wykonano badania elastoptyczne otrzymując obraz izochrom jak na rys. 3.



Rys. 4



Rys. 5

Podobnie jak dla obciążenia tylko normalnego dwóch walców przeprowadzono rozważania teoretyczne dla przypadku obciążenia jak na rys. 1. Wartości naprężeń σ_x , σ_y , σ_z i τ_{yz} od obciążenia tylko stycznego można obliczyć wg wzorów [4]:

$$(2.11) \quad \sigma_x = \frac{4\nu T}{\pi b} e^{-\xi} \cos \eta,$$

$$(2.12) \quad \sigma_y = \frac{2T}{\pi b} \left[2e^{-\xi} \cos \eta - \operatorname{sh} \xi \sin \eta \frac{\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \right],$$

$$(2.13) \quad \sigma_z = -\frac{2T}{\pi b} \operatorname{sh} \xi \sin \eta \frac{\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta},$$

$$(2.14) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{2T}{\pi b} \left[e^{-\xi} \sin \eta - \operatorname{sh} \xi \sin \eta \left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \right) \right],$$

gdzie $T = \mu P$, P jest obciążeniem normalnym walców, ν oznacza współczynnik Poissona, μ współczynnik tarcia (sczepienia),

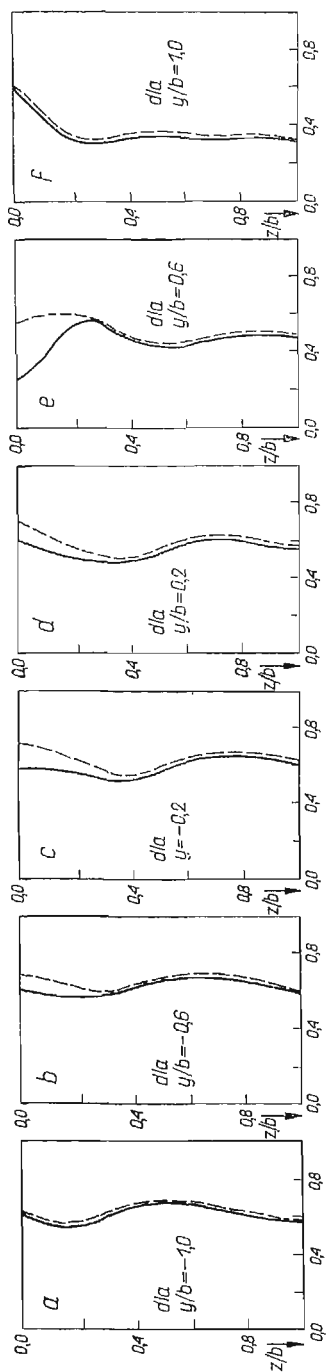
$$\zeta = \xi + i\eta, \quad y = b \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z = b \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Dla tak obciążonych walców (rys. 1) obliczono wartości naprężeń σ_x , σ_y , σ_z i τ_{yz} metodą superpozycji, a następnie wg wzorów (2.2)–(2.4) obliczono także wartości σ_1 , σ_2 i σ_3 dla $\mu = 0,2; 0,3$ i $0,5$.

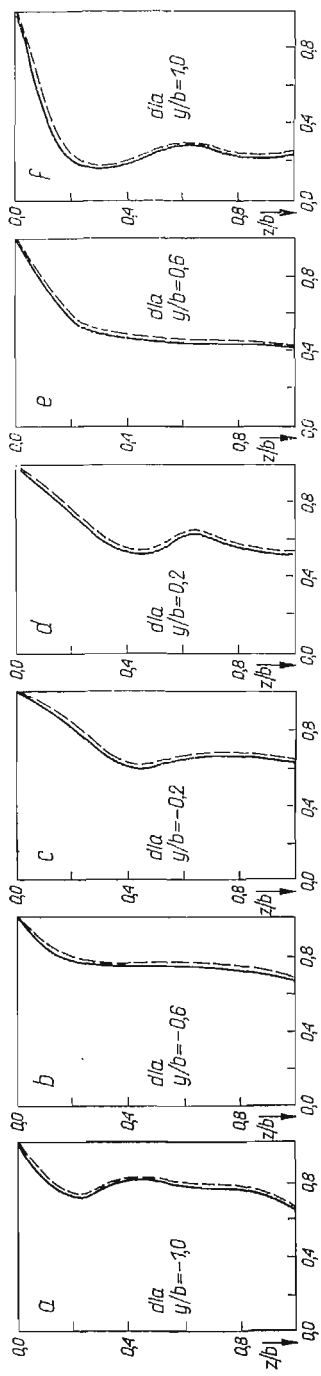
3. Wyniki. Dla potwierdzenia, że trzecia składowa naprężenia σ_x nie wpływa na wytyżenie materiału wg hipotezy τ_{\max} (oczywiście z wyjątkiem warstw tuż przy powierzchni i tylko dla pewnych wartości współczynnika μ), wykonano przeliczenia $\tau_{\max} = \sigma_{z\text{ast}}$ dla obszaru styku krążków, czyli dla płaskiego stanu naprężenia (na rys. 4–7 wartości $(\sigma_1 - \sigma_{11})/p_0$ przedstawiono linią ciągłą) oraz dla walców, czyli dla płaskiego stanu odkształcenia (na rys. 4–7 wartości $(\sigma_1 - \sigma_3)/p_0$ przedstawiono linią przerywaną). Wykresy na rys. 4a–4f są dla $\mu = 0,0$, wykresy na rys. 5a–5f dla $\mu = 0,2$, wykresy na rys. 6a–6f dla $\mu = 0,3$, wykresy na rys. 7a–7f dla $\mu = 0,5$. Na podstawie wyników przedstawionych przy pomocy wykresów można potwierdzić wniosek postawiony we wstępie: aby otrzymać obraz izochrom dla płaskiego stanu odkształcenia, możemy wykonać badania elastoptyczne na modelach w postaci tarczy otrzymując wyniki poprawne. Różnice pomiędzy wartościami naprężeń zastępczych, podanymi na wykresach, zarysowują się tylko dla obszarów blisko powierzchni styku walców do głębokości $z \leq 0,2b$, a w osi symetrii walców max. $0,4b$ dla współczynników $\mu = 0,0; 0,2; 0,3$, zaś dla $\mu = 0,5$ nie ma żadnych różnic (na wykresach linie przerywane podające wartości $(\sigma_1 - \sigma_3)/p_0$ pokrywają się z liniami ciągłymi przedstawiającymi wartości $(\sigma_1 - \sigma_{11})/p_0$).

4. Przykładowe obliczenia. Celem badań elastoptycznych było potwierdzenie wyników otrzymanych na drodze teoretycznej (rys. 8–10 i rys. 3).

a) Dla przykładu porównane zostaną wyniki otrzymane dla stosunków siły stycznej do normalnej $0,3; 0,2; 0,0$. Dane otrzymane z badań elastoptycznych dla $\mu = 0,3$ przedstawia obraz izochrom (rys. 10), wyniki zaś analizy teoretycznej przedstawiono wykreślnie na rys. 6.



Rys. 6



Rys. 7

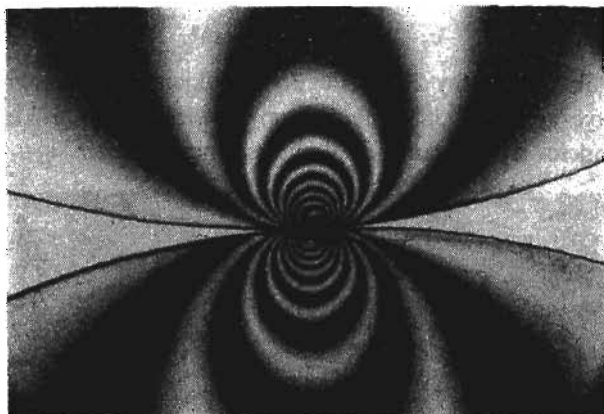
Na podstawie wykresu z rys. 6b stwierdzamy, że z wyjątkiem warstwy przy powierzchniowej największe wyłężenie materiału wynosi $0,680 p_0$, czyli możemy zgodnie ze wzorem (2.9) (ponieważ warstwa rozpatrywana leży poniżej $0,2b$) napisać:

$$(4.1) \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 0,680 p_0.$$

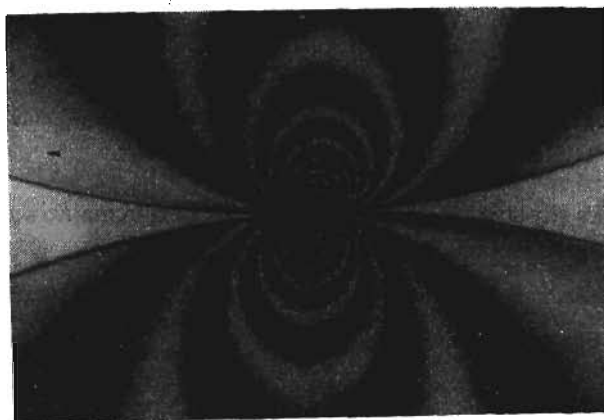
Wartość p_0 obliczono ze znanego wzoru Hertza dla wartości nacisku na osi symetrii w przypadku obciążenia normalnego

$$(4.2) \quad p_0 = 0,418 \sqrt{qE \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}},$$

gdzie q oznacza obciążenie normalne przypadające na cm długości krążka (walca), E jest modułem sprężystości, R_1 i R_2 oznaczają promienie krążków dociskanych.



Rys. 8



Rys. 9

W naszym przypadku przy badaniach elastoptycznych dane potrzebne do obliczenia wartości p_0 wynosiły: $q = 96,5 \text{ kG/cm}$, $E = 45 \cdot 10^3 \text{ kG/cm}^2$, $R_1 = R_2 = 8,6 \text{ cm}$.

Po podstawieniu danych do wzoru (4.2) otrzymamy wartość $p_0 = 422 \text{ kG/cm}^2$.

Jeżeli wartość p_0 wstawimy do wzoru (4.1), otrzymamy wartość maksymalnego wyciężenia materiału wg danych teoretycznych. A zatem

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 422 \text{ kG/cm}^2 \cdot 0,680 = 288 \text{ kG/cm}^2.$$

Zbadajmy teraz, ile wynosi maksymalna wartość $\sigma_I - \sigma_{II}$ otrzymana na podstawie wyników badań elastoptycznych, tj. za pomocą obrazu izochrom.

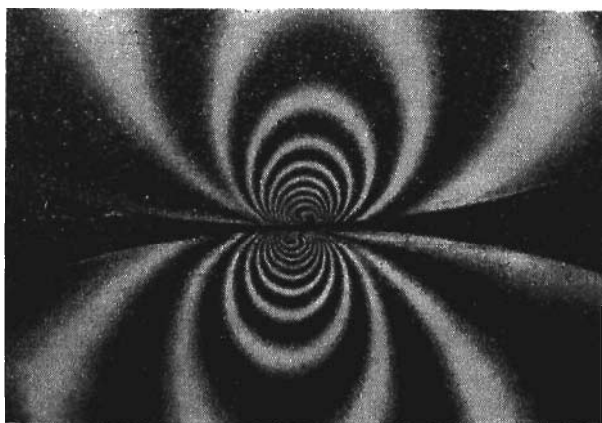
Na rysunku 10, przedstawiającym izochromy dla $\mu = 0,3$, najwyższy rząd izochromy wynosi $m = 10$, a zatem zgodnie ze wzorem (2.9) możemy napisać:

$$(4.3) \quad \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_2 - \sigma_3 = mK.$$

Jeżeli do wzoru (4.3) wstawimy rząd izochromy $m = 10$, a zamiast K (stałej modelowej) wartość $29,4 \text{ kG/cm}^2 \cdot \text{rz} \cdot \text{iz}$. otrzymamy:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = 294 \text{ kG/cm}^2.$$

Porównując wynik teoretyczny 288 kG/cm^2 z wynikiem otrzymanym przy pomocy badań elastoptycznych 294 kG/cm^2 możemy stwierdzić, że różnica wynosi za-
ledwie 2%, co mieści się w granicach dopuszczalnego błędu.



Rys. 10

b) Dla stosunku siły stycznej do normalnej $\mu = 0,2$ ekstremalne wartości naprężeń zastępczych wynoszą zgodnie z wykresem na rys. 5b:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 0,660 p_0 = 0,660 \cdot 422 \text{ kG/cm}^2 = 278 \text{ kG/cm}^2,$$

wg zaś danych doświadczalnych (rys. 9)

$$\sigma_I - \sigma_{II} = K \cdot m = 280 \text{ kG/cm}^2.$$

Różnica pomiędzy wartością teoretyczną a doświadczalną jest bardzo mała.

c) Podobne obliczenia porównawcze można wykonać dla takiego samego obciążenia normalnego (walców-krażków) gdy $\mu = 0$. Wtedy $\sigma_2 - \sigma_3$ w punkcie zwanym często punktem «Bielajewa» wyniesie wg danych teoretycznych:

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 0,6 p_0 = 0,6 \cdot 422 \text{ kG/cm}^2 = 253 \text{ kG/cm}^2,$$

zaś wg danych doświadczalnych (rys. 3)

$$\sigma_I - \sigma_{II} = K \cdot m = 250 \text{ kG/cm}^2,$$

a więc różnica jest znikoma.

5. **Wnioski.** 1. Najistotniejszym problemem, który został wyjaśniony przy pomocy badań elastoptycznych, jest fakt, że w miarę wzrostu siły stycznej punkt największego wytyżenia materiału zmienia położenie przesuując się wzdłuż linii łączącej punkt «Bielajewa» ze skrajnym punktem zetknięcia.

Pęknięcia, jakie zachodzą podczas pracy elementów takich jak walce, mają kierunek zgodny z kierunkiem przesuwania się punktu maksymalnego wytyżenia.

2. W przypadku badania wytyżenia w obszarze styku dwóch walców lub elementów o powierzchniach walcowych względnie do nich zbliżonych, jak np. powierzchnie zębów kół zębatych, krzywek itp., można badać metodą elastoptyczną odpowiednio obciążone tarcze otrzymując wyniki dość poprawne. Badanie elastoptyczne modeli płaskich jest łatwiejsze niż badanie elementów (w rozważanym przypadku) walcowych, które należy wcześniej «zamrażać», a następnie ciąć i dopiero badać pod polaryskopem. Metoda «zamrażania» jest nie tylko droższa, lecz także bardziej pracochłonna.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. DYLAĞ, M. DAĆKO, Z. ORŁOŚ, S. PYTKO, *Elastoptyczne badania naprężeń kontaktowych w przypadku dwóch walców*, Streszczenie referatu w Materiałach I-go Sympozjum z Zakresu Elastoptyki, Warszawa 1962.
2. Z. DYLAĞ, Z. ORŁOŚ, S. PYTKO, *Badanie naprężeń w przypadku złożonego obciążenia dwóch walców*, Biul. WAT 1963, 11—12.
3. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, t. 1, PWN, 1954.
4. S. PYTKO, *Miejsce największego wytyżenia w strefie kontaktu dwóch walców przy uwzględnieniu sił stycznych*, Zeszyty Naukowe AGH w Krakowie, nr 42, Elektr. i Mechaniz. Górn. i Hutn., z. 10, 1963.

Резюме

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ФОТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ НАПРЯЖЕННОСТИ МАТЕРИАЛА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Задача состояла в исследовании напряженного состояния в области стыка двух цилиндров, нагруженных нормальными и касательными силами, с различным их отношением. Для подтверждения результатов, полученных из теоретических рассуждений, проводились контрольные фотоупругие исследования, прижимаемых друг к другу, двух круглых дисков. Упомянутые выше исследования описаны в докладе «фотоупругие исследования, контактных напряжений в случае двух цилиндров» на I Симпозиуме по фотоупругости в 1962 г.

Отсутствие стенда для исследований по фотоупругому методу «замораживания» вызвало необходимость исследования двух прижимаемых друг к другу дисков, в место двух при-

жимаемых цилиндров. Для того чтобы провести такие опыты, с целью подтверждения результатов вытекающих из теоретических исследований, проведен был анализ, который показал:

а) что различие между результатами, полученными на основе теоретических рассуждений и исследований, проведенными по методу фотоупругости, появляется лишь вблизи поверхности стыка, до глубины $0,2b$ (b — половина ширины поверхности стыка двух прижимаемых к себе цилиндров);

б) что с ростом касательной нагрузки слой с разными результатами уменьшается.

Ниже указанного слоя вычисленные по изображениям изохром значения напряжений должны согласовываться со значениями напряжений, полученными на основании теоретических рассуждений.

Это утверждение имеет очень важное значение в случае исследования распределения напряжений в очень малых областях контакта двух, прижимаемых друг к другу тел.

S u m m a r y

ON THE POSSIBILITY OF APPLICATION OF PHOTO-ELASTICITY TO THE ANALYSIS OF STRESS DISTRIBUTION IN CONTACT PROBLEMS

The aim of the paper is to analyse the stress distribution in the contact zone of two cylinders simultaneously loaded by normal and tangential forces for various ratios of both the forces. The theoretical results were verified by photo-elastic investigation, using as a model two flat discs in order to avoid the method of the "frozen" stress field.

Since the plane stress photo-elastic model is used for experimental verification of the plain strain solution, an analysis is given, which shows that:

- a) the differences between theoretical plane-strain and experimental plain-stress results appear only within the thin layer below the contact surface, the thickness of the layer being not greater than $0,2b$, where b is one half of the width of the contact surface.
- b) the thickness of the layer in which the differences are observed, decreases with the increase of the tangential force.

Below that layer the values of stresses obtained from the isochromatic pattern should be in agreement with their theoretical values.

This is an important point, in the case when the stress distribution is investigated within very small contact areas of two compressed bodies.

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1965 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

KONFERENCJA NAUKOWA ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH W AUGUSTOWIE. PRZEGLĄD REFERATÓW

W dniach od 7 do 16 września 1965 r. odbyła się w Augustowie dziewiąta doroczna konferencja naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. Podobnie jak w latach ubiegłych również i tym razem zainteresowanie konferencją było znaczne, czego dowodzi liczba 120 uczestników. Na liczbę tę złożyło się 101 uczestników krajowych (w tym 50 pracowników IPPT), którzy przedstawili 70 referatów oraz 19 uczestników zagranicznych reprezentujących 11 krajów (Austria, Bułgaria, Chiny, CSRS, Francja, NRD, NRF, Rumunia, USA, Wielka Brytania, ZSRR), którzy wygłosili 14 referatów. Tematyka zgłoszonych prac była bardzo różnorodna i obejmowała wszystkie ważniejsze dziedziny mechaniki ciała stałego odkształcalnego.

Wygłoszone referaty można by orientacyjnie podzielić na następujące (przenikające się zresztą) grupy tematyczne:

1. Fale naprężeń (10 referatów). Grupa ta obejmuje rozchodzenie się fal w ośrodkach sprężystych oraz niesprężystych (również z uwzględnieniem efektów termicznych), wielo- lub jednowymiarowych w ujęciu liniowym lub nieliniowym.
2. Teoria sprężystości i jej zastosowania (10 referatów). Tu zaliczamy dwu- lub trzowymiarowe problemy teorii sprężystości, teorii płyt i powłok oraz teorii prętów.
3. Ośrodki z mikrostrukturą, dyslokacje, defekty (16 referatów). Zaliczyliśmy tu również ośrodki o strukturze nieciągłej (włókniste, siatkowe) oraz zagadnienia szczelin.
4. Pola sprzężone (10 referatów) — obejmują problemy sprzężenia pola przemieszczeń sprężystych z dowolnym innym polem (np. termicznym, elektro-magnetycznym). Omawiamy tu także problemy sprzężenia powierzchniowego (zagadnienie flutteru).
5. Podstawy fizykalne mechaniki ciała stałego (7 referatów). W tej grupie referatów zawarte są takie zagadnienia, jak opis materiału, równania konstytutywne i równania stanu, wyznaczanie stałych fizykalnych.
6. Teoria plastyczności i jej zastosowania (18 referatów). Ta obszerna grupa obejmuje rozległy zespół często dość luźno związanych ze sobą referatów. Mieszczą się tu zarówno problemy brzegowe teorii plastyczności, jak i jej zastosowania w teorii nośności granicznej konstrukcji inżynierskich. Zaliczyliśmy tu ponadto problemy mechaniki ośrodków sypkich. Również większość prac doświadczalnych omówiona jest w tej grupie referatów.
7. Teorie lepkosprężystości oraz lepkoplastyczności i ich zastosowanie (13 referatów).

Porównując tematykę obecnej konferencji z tematyką konferencji zeszłorocznej można stwierdzić pewien wzrost udziału grupy 3 i 5 kosztem pozostałych grup. Warto również zasygnalizować zastosowanie metod statystycznych w pięciu z wygłoszonych referatów.

1. *Fale naprężeń*. S. AUGUSTYŃIAK (Politechnika Poznańska) zajął się w swej pracy zagadnieniem propagacji w ośrodku idealnym fal kulistych i walcowych o amplitudzie skończonej. Autor zastosował metodę przybliżoną do wyznaczenia zależności prędkości propagacji dźwięku od prędkości cząstki. Otrzymane wyniki zostały wykorzystane do obliczenia ciśnienia i gęstości na brzegu rozszerzającej się kuli gazowej. Ośrodkiem płynnym zajął się również E. WŁODARCZYK. Kontynuując swe wcześniejsze prace autor rozpatrzył propagację i regularne odbicie kulistej fali uderzeniowej

od płaskiej przegrody zanurzonej w jednorodnej cieczy barotropowej z pominięciem zjawiska kawitacji. Referat zilustrowany był przykładem liczbowym. Pozostali autorzy rozpatrywali propagację fal w ośrodkach stałych. K. SOBczyk (Instytut Podstawowych Problemów Techniki) omówił w swym referacie zagadnienie rozpraszania fali Rayleigha wzdłuż powierzchni losowej ośrodka sprężystego. W centrum zainteresowania autora znalazł się problem tłumienia fali Rayleigha, spowodowanego losowymi nierównościami powierzchni. S. KALISKI (IPPT), K. PODOLAK i E. DARNICKI badali — na przykładach stateczności ruchu układu oscylatorów po belce na podłożu sprężystym oraz flatteru płyt i powłok — zagadnienie drgań samowzbudnych układów z tłumieniem dla fal bieżących. Autorzy wyjaśnili w pracy pozorny paradoks polegający na nieciągłości wartości parametrów krytycznych układu bez tłumienia i z tłumieniem, gdy zmierza ono do zera. Problem stateczności ruchu słabo-nieliniowych oscylatorów poruszających się po powierzchni półprzestrzeni sprężystej rozpatrywali R. BOGACZ (IPPT) i S. KALISKI. Zastosowanie metod asymptotycznych pozwoliło autorom na wyznaczenie obszarów prędkości krytycznych ruchu oscylatorów współdziałających z bieżącymi falami powierzchniowymi w ośrodku sprężystym.

Eksperymentalną metodę badania propagacji fal w dwuwymiarowym ośrodku sprężystym za pomocą elastooptyki zreferował J. LIETZ (IPPT). Przedstawił on nowo opracowaną aparaturę służącą do badania przebiegów dynamicznych i zaprezentował kilka uzyskanych na niej zdjęć. B. RANIĘCKI (IPPT) rozpatrywał w swym referacie zagadnienie propagacji kulistej fali naprężenia w nieograniczonym ośrodku sprężysto-plastycznym, spowodowanej nagłym ogrzaniem powierzchni pustki kulistej, znajdującej się w tym ośrodku. Propagacją fal kulistych zajął się również W. K. NOWACKI (IPPT). Zbadał on rozchodzenie się fali powstałej w wyniku uderzenia termicznego na powierzchni pustki kulistej, znajdującej się w nieograniczonym ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym. W referacie wykazano istnienie fali silnej nieciągłości i wykazano zanikanie efektów dynamicznych po upływie dostatecznie długiego czasu.

Materiałem sprężysto-lepkoplastycznym zajęli się również J. BĘDA (IPPT) i T. WIERZBICKI (IPPT) rozpatrując geometryczną dyspersję fal naprężenia we wstępnie sprężonych prętach, wykonanych z tego materiału. Autorzy wykazali, że zarówno oddziaływanie brzegu, jak i lepkie własności materiału powodują wystąpienie efektu dyspersji. N. W. ZWOLIŃSKI (ZSRR) omówił w swym referacie zagadnienie odbicia od idealnie sprężystej przegrody fali uderzeniowej rozprzestrzeniającej się w sprężysto-plastycznym gruncie. Autor posługując się metodą przybliżoną uzyskał wyrażenie zamknięte, określające stosunek energii fali odbitej do energii fali padającej.

2. *Teoria sprężystości.* Dwa pierwsze referaty konferencji, mianowicie J. KURLANDZKIEGO (IPPT) i G. SZEFERA (Politechnika Krakowska) poświęcone były zagadnieniom matematyki stosowanej w teorii sprężystości. Pierwszy z autorów zajął się rozwiązaniem mieszanego problemu brzegowego dla ogólnego równania eliptycznego rzędu $2m$. Problem został rozwiązany przez sprowadzenie zagadnienia do układu równań z operatorami zwartymi. Drugi z autorów podał nowe rozwiązanie zagadnienia biharmonicznego w obszarze jednopójnym, ograniczonym brzegiem Lapunowa. W rezultacie rozważań zagadnienie sprowadza się do równania funkcyjnego z operatorem całkowym. Rozwiązanie tego równania autor przedstawił w postaci uogólnionego szeregu Fouriera zbieżnego do rozwiązania ścisłego.

Grupę prac z zakresu klasycznej teorii sprężystości reprezentowały referaty P. P. TEODORESCU (Rumunia), J. MOSSAKOWSKIEGO (IPPT) i C. RYMARZA.

Pierwszy z nich zajął się zagadnieniem działania sił skupionych na powierzchni i we wnętrzu ciał sprężystych. Drugi z autorów rozpatrzył nieskończenie długą i grubą rurę cylindryczną z danymi obciążeniami na powierzchni. Rozważania swoje autor oparł na dynamicznych równaniach teorii sprężystości. Tak postawione zagadnienie umożliwiło uzyskanie równań teorii powłok cylindrycznych bez wstępnych założeń powszechnie stosowanych w klasycznej teorii powłok.

Trzeci z autorów rozpatrzył problem brzegowy dynamiki stożka kołowego. Zagadnienie rozwiązano za pomocą metody dyskretno-ciągłej, co umożliwiło zastąpienie równań różniczkowych cząstkowych równaniami różniczkowymi zwykłymi.

Pozostałe prace drugiej grupy dotyczą stosowania teorii sprężystości. G. LÖBEL (NRD) badał współczynnik spiętrzenia naprężeń w szeregu technicznie ważnych postaciach karbu. W zakończeniu pracy autor podał szereg wykresów o dużym znaczeniu praktycznym.

R. CZARNOTA-BOJARSKI (IPPT) rozpatrzył odkształcenia i naprężenia w powłoce kulistej, wywołane wstępnymi odkształceniami lub błędami montażowymi. Punktem wyjścia w pracy były równania technicznej teorii powłok Własowa.

W. KRZYŻ (Politechnika Krakowska) i S. Mazurkiewicz (Politechnika Krakowska) przedstawili prace z zakresu kształtowania elementów konstrukcji. Pierwszy z nich zajął się kształtowaniem prętów o różnych przekrojach z warunku stateczności. Drugi z autorów rozważał problem optymalnego ukształtowania przekroju pręta cienkościennego, poddanego jednoczesnemu skręcaniu i zginaniu.

Ostatnim referatem w tej grupie była praca A. GAJEWSKIEGO (Politechnika Krakowska) na temat stateczności płyty kołowej i niepryzmatycznych prętów obciążonych siłami śledzącymi. Krytyczne wartości sił autor wyznaczył z kinetycznego kryterium stateczności.

3. *Ośrodki z mikrostrukturą, dyslokacje, defekty.* Problem warunków zgodności dla wielospójnych obszarów kontinuum Cosseratów rozpatrzył w swym referacie W. GÜNTHER (NRF). Autor uogólnił dla tego ośrodka warunki obejścia po konturze w przypadku dystorsji. Wykazał on ponadto ścisły związek tych warunków z ciągłą teorią dyslokacji. W drugim referacie ten sam autor omówił geometrię ośrodka ciągłego z mikrostrukturą.

Zagadnienie funkcji naprężeń dla ciał z otworami, w szczególności również dla kontinuum Cosseratów, przedstawił w swym referacie H. SCHAEFER (NRF). Szereg referatów poświęconych było zagadnieniom mechaniki ośrodków o strukturze włóknistej. We wprowadzającym referacie przedstawił C. WOŹNIAK (Politechnika Łódzka) koncepcję ośrodka ciągłego złożonego ze sztywnych mikrostruktur i charakteryzującego się wyróżnioną siatką (ośrodek włóknisty). Okazuje się, że równania pola tego ośrodka są identyczne z równaniami pola żyroskopowego kontinuum Cosseratów. Przedstawiony w referacie ośrodek może być modelem struktur o powtarzających się elementach. Szczególny przypadek płaskiego ośrodka włóknistego, modelujący pewne tarcze wielotworowe, był rozpatrywany w pracy W. BARAŃSKIEGO (Politechnika Łódzka) i C. WOŹNIAKA. Wprowadzony model umożliwił zastąpienie zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych czwartego rzędu w obszarze wielospójnym przez zagadnienie brzegowe dla układu równań szóstego rzędu w obszarze jednospójnym. S. KONIECZNY (Politechnika Łódzka) przeprowadził w swym referacie analizę podstawowych zagadnień statycznych ośrodka włóknistego o sztywnych mikrostrukturach i siatce biegunowej. Ośrodek taki może być modelem pierścieniowej siatki rusztowej. Szczególny typ płaskiego ośrodka włóknistego o sztywnych mikrostrukturach nie doznających niezależnych obrotów rozpatrywali K. WILMAŃSKI (Politechnika Łódzka) i P. KLEMM (Politechnika Łódzka). Wykazali oni analogię zachodzącą między badanym ośrodkiem i ciałem anizotropowym oraz wskazali na zastosowania do obliczeń kratownic i płaskich wysokich rusztów. Równania teorii drugiego rzędu płaskich ośrodków włóknistych o sztywnych mikrostrukturach oraz ich zastosowania do rozwiązywania zagadnień stateczności gęstych płaskich siatek rusztowych przedstawili w swym referacie C. WOŹNIAK i S. ZIELIŃSKI (Politechnika Łódzka). Innego typu ośrodek badał S. FRĄCKIEWICZ (Politechnika Warszawska). Rozpatrzył on mianowicie ośrodek utworzony z dyskretnej regularnej siatki przestrzennej składającej się z prętów, połączonych w węzłach. Autor zbudował geometrię badanego ośrodka mogącego znaleźć zastosowanie w obliczeniach regularnych prętowych konstrukcji przestrzennych. Zagadnienie makroskopowego opisu rozkładu dyslokacji przedstawił w swym referacie C. TEODORESCU (Rumunia). W sformułowaniu podstawowych równań autor zbadał również możliwość zastosowania wprowadzonych wielkości (gęstości i momenty: dyslokacji i rozkładu naprężeń) do makroskopowej teorii plastyczności. Problemem niezmienniczości oraz zasad zachowania w teorii defektów zajął się H. ZORSKI (IPPT). Wyprowadził on zasady zachowania pędu, krętu i energii dla pola sprężystego z dowolną liczbą skupionych defektów oraz zbadał związek z równaniami ruchu defektu. Z. MOSSAKOWSKA (IPPT) przedstawiła pracę zawierającą wyprowadzenie związków fizycznych dla ciał sprężystych, w których znajduje się ekstramateria albo deformacja quasi-plastyczna. Problem wpływu akustycznej dyspersji przestrzennej, występującej w ciałach krystalicznych, na własności dynamiczne dyslokacji omówił D. ROGULA. Przedyskutował on między innymi zagadnienia: siły hamowania wywołanej mechanicznym promieniowaniem typu Czerenkowa, zależności masy efektywnej dyslokacji od prędkości oraz zmiany znaku oddziaływania dyslokacji krawędziowych. M. MATCZYŃSKI (IPPT) zbadał

plaskie zagadnienie jednostajnego, prostoliniowego ruchu szczeliny o stałej długości w jednorodnym izotropowym ośrodku sprężystym. Wyznaczono również siły wzajemnego oddziaływania między szczeliną a polem sprężystym. Zagadnienie statyczne szczeliny w kształcie pierścienia rozpatrzył Z. OLESIAK (IPPT). Przedyskutował on również modele szczelin dopuszczających istnienie na ich końcach strefy plastycznej lub sił zwierających. W referacie przedstawionym przez M. WNUKA (Politechnika Krakowska) i Z. OLESIAKA podane były rozważania dotyczące deformacji plastycznej wokół osiowo-symetrycznej szczeliny przedstawionej modelem Dugdale'a.

4. *Pola sprężone*. W. Nowacki (Uniwersytet Warszawski) rozpatrzył kilka zagadnień dynamicznych magneto-termosprężystości. Autor zajął się głównie problemem wykorzystania funkcji Greena dla skonstruowania rozwiązania brzegowego.

S. KALISKI (IPPT) przedstawił dwie prace. W pierwszej z nich rozpatrzył zagadnienie wzmacniania fal hiperdźwiękowych w piezodielektrykach za pomocą prądu płynącego w półprzewodnikowej warstwie przypowierzchniowej. Proponowana metoda pozwala uzyskać wzmacniacz ciągłego działania w odróżnieniu od dotychczas uzyskiwanych wzmacniaczy dla krótkich impulsów. W drugiej pracy autor wyprowadził falowe równania termo-magnetosprężystości i termo-piezoelektryczności o skończonej prędkości propagacji zaburzeń wszystkich rodzajów.

Kilka referatów dotyczyło zagadnień stosowanej termosprężystości. G. LANDGRAF (NRD) przedstawił wyniki rozważań teoretycznych i doświadczeń, dotyczących naprężeń skurczowych przy bardzo wysokich temperaturach. W przypadkach takich naprężenia nie są proporcjonalne do temperatury. Z. BACZYŃSKI (IPPT) przedstawił jednorodne rozwiązania zagadnień brzegowych przewodnictwa cieplnego i termosprężystości ciał ograniczonych powierzchniami kulistymi i stożkowymi.

A. GAŁKA (Uniwersytet Warszawski) rozpatrywał problem wyznaczania rozkładu temperatury i przemieszczeń w przestrzeni termosprężystej, spowodowanego aperiodycznym, punktowym źródłem ciepła i punktową siłą masową zmienną w czasie. J. KRZEMIŃSKI (IPPT) zbadał rozkład pola temperatur w nieograniczonej powłoce walcowej, wywołany działaniem nieruchomego źródła ciepła. Grupę prac z termosprężystości zamknął referat T. ROŻNOWSKIEGO (IPPT) omawiający plaskie zagadnienia termosprężystości przy ruchomych warunkach brzegowych.

Problemami związanymi z aerosprężystością zajmowało się dwóch autorów. L. SOLARZ kontynuując swoje badania z tego zakresu zbadał aeromagnetoflatter skończonego, płaskiego kanału, przez który przepływa doskonała elektrycznie i mechanicznie gaz. S. WOROSZYŁ rozpatrzył drgania samowzbudne nieskończonej długiej powłoki cylindrycznej, opływanej z zewnątrz naddźwiękowym strumieniem gazu idealnego.

5. *Podstawy fizyczne mechaniki ciała stałego*. Trzy prace tej grupy obejmowały problemy mikrostruktury materiału w ujęciu probabilistycznym. I tak C. EIMER (IPPT) rozpatrzył problem określania makroskopowych stałych sprężystości ośrodka niejednorodnego. Podstawą rozważań autora była analiza geometrii wewnętrznej ośrodka metodami statystyki matematycznej.

J. MURZEWSKI (Akademia Górniczo-Hutnicza) przedstawił wyniki swych badań nad ośrodkami stochastycznie niejednorodnymi z uwzględnieniem energii naprężeń własnych. Autor zanalizował przy tym zależności stochastyczne odkształcenia objętościowego i postaciowego.

Z. MENDERA (Akademia Górniczo-Hutnicza) rozpatrzył cechy wytrzymałościowe elementów ośrodka mikro-niejednorodnego jako zmienne przypadkowe. Wyniki rozważań wykorzystał on do doświadczalnego wyznaczenia granicy niebezpiecznej w jednoosiowym stanie napięcia.

Kolejne cztery prace tej grupy poświęcone były zagadnieniom równań konstytutywnych. B. D. COLEMAN (USA) przedstawił termodynamiczną teorię materiałów z pamięcią, w szczególności materiałów prostych i materiałów z zanikającą pamięcią. Autor zanalizował ograniczenia w równaniach konstytutywnych, wynikających z drugiej zasady termodynamiki, i podał ogólne zależności pomiędzy funkcjonalami energii swobodnej i funkcjonalami naprężenia i entropii.

P. PERZYNA (IPPT) przedstawił w swej pracy ogólną drogę przejścia od termodynamicznej teorii materiału prostego wg Colemana do materiałów lepkoplastycznych i plastycznych. Pokazano również przejścia do izotermicznych teorii materiału lepkoplastycznego i plastycznego.

P. PERZYNA i W. WOJNO (IPPT) zajęli się sformułowaniem i analizą równań konstytutywnych dla izotropowych materiałów plastycznych, wrażliwych na prędkości odkształcenia w procesie izotermicznym.

Ostatnia z tej grupy prac, dotycząca związków fizycznych w mechanice gruntów, przedstawiona została przez T. Jeskego (Politechnika Łódzka). Autor udowadnia konieczność przyjmowania dla gruntu modelu mechanicznego szkieletu jako nieliniowego ciała sprężysto-plastycznego.

6. *Teoria plastyczności i jej zastosowania*. Praca M. ARCISZ i J. RYCHLEWSKIEGO (IPPT) pt. «Mieszany problem brzegowy dla przeciąganej taśmy warstwowej», rozważa ciekawe i trudne zagadnienie przeciągania przez matrycę taśmy złożonej z trzech warstw o różnych granicach plastyczności. Zagadnienie takie występuje czasem w praktyce, gdy przy przeciąganiu metalu o wysokiej granicy plastyczności nakłada się na jego powierzchnię miękkie przekładki, chroniące matrycę przed nadmiernym zużyciem. Stosując teorię płaskiego stanu odkształcenia dla ciała idealnie plastycznego otrzymano mieszany problem brzegowy; całkowanie równań hiperbolicznych przeprowadzono w niektórych przypadkach metodą Riemanna.

Zagadnienie skokowej niejednorodności wystąpiło również w pracy J. OSTROWSKIEJ (IPPT). Klasyczne już zagadnienie teorii plastyczności, mianowicie wciskanie płaskiego stempla w podłoże, zostało zmodyfikowane w ten sposób, że rozpatrzono podłoże złożone z dwóch materiałów o stałych, ale różnych granicach plastyczności. W pewnych przypadkach szczególnych otrzymano kompletne rozwiązanie problemu.

Metoda małego parametru jest często stosowana w teorii plastyczności; jej efektywność jest jednak ograniczona faktem, że często przy małych perturbacjach danego rozwiązania występują nowe linie nieciągłości lub inne miejsca osobliwe, gdzie na ogół nie ma zbieżności szeregów. W pracy M. ŻYCZKOWSKIEGO (Politechnika Krakowska) przedstawiono metodę małego parametru, zmodyfikowaną przez LIGHTHILLA, polegającą na rozwinięciu w szeregi potęgowe nie tylko zmiennej zależnej, lecz również zmiennej niezależnej, i zastosowano ją do problemu skręcenia pręta kołowego o niesymetrycznej niejednorodności plastycznej.

W pracy J. SKRZYPKA (Politechnika Krakowska) «Pewne kołowo-symetryczne problemy nośności granicznej rury grubościennej przy obciążeniach złożonych» rozpatrzono złożony przypadek obciążenia rury siłą osiową, ciśnieniem normalnym, momentem skręcającym i siłami masowymi oraz obciążeniem cieplnym, uwzględniono przy tym niejednorodność własności materiału.

Sprawę uściślenia hipotezy Haara-Kármána dla stanów osiowo-symetrycznych podjął M. ROGOZIŃSKI. Jak wiadomo, przy warunku plastyczności Hubera-Misesa pełny układ równań statyczno-kinematycznych jest typu eliptycznego, natomiast przy założeniu równości naprężenia obwodowego z jednym z naprężeń głównych w płaszczyźnie osiowej otrzymujemy hiperboliczny układ równań statycznych, co ogromnie ułatwia rozwiązanie problemów brzegowych. Przyjmując hipotezę Haara-Kármána jako pierwsze przybliżenie, autor podał sposób jej ulepszenia proponując odpowiednią metodę kolejnych przybliżeń.

J. A. KÖNIG (IPPT) w pracy «Teoria przystosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych w wielkościach uogólnionych» opierając się na twierdzeniu Melana podał sposób poszukiwania stanów statycznie dopuszczalnych przy obciążeniach zmiennych w przestrzeni sił uogólnionych. Przedstawione wyniki mogą służyć do badania przystosowania się płyt i powłok przy zmiennych obciążeniach zewnętrznych.

Zagadnienie zachowania się powłoki walcowej po przekroczeniu nośności granicznej zostało rozpatrzane przez M. DUSZEK (IPPT). Zakładając sztywno-plastyczny model materiału i uwzględniając zmiany geometryczne zbadano przejście powłoki do stanu bezmomentowego.

W pracy W. SZCZEPIŃSKIEGO, L. DIETRICHA, E. DRESCHEROWEJ i J. MIASTKOWSKIEGO (IPPT) rozpatrzono zagadnienie nośności granicznej rozciąganych prętów z karami w stanie osiowo-symetrycznym. Opierając się na warunku plastyczności Treski rozwiązano teoretycznie kilka przypadków dla głębokich karbów półkolistych i w kształcie litery V, a następnie przeprowadzono weryfikację doświadczalną rozciągając pręty z aluminium i miękkiej stali. Jak twierdzą autorzy, zachodzi tu doskonała zgodność wyników doświadczalnych i teoretycznych.

Racjonalne wymiarowanie elementów maszynowych w oparciu o teorię nośności granicznej było tematem pracy W. SZCZEPIŃSKIEGO (IPPT). Opierając się na polach statycznie dopuszczalnych dla płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia ustalono optymalne kształty łbów, cięgieł, osadzeń itp. Przeprowadzono również weryfikację doświadczalną wyników.

Zagadnienie optymalnego projektowania płyt zbrojonych było rozważane w pracy Z. MROZA (IPPT). Przy stałej nośności granicznej autor poszukuje rozkładu zbrojenia i grubości płyty, odpowiadającego minimum kosztu zużytych materiałów. Rozpatrzono dwa warianty zagadnienia i aproksymacje umożliwiające uzyskanie efektywnych rozwiązań. Dla zilustrowania ogólnej teorii rozpatrzono kilka przypadków płyt kołowych i pierścieniowych.

Przejdziemy obecnie do omówienia prac doświadczalnych z zakresu teorii plastyczności.

W. BŁĄŻEWICZ i B. JANCALEWICZ (Politechnika Warszawska) badali doświadczalnie zagadnienie podwyższenia wytrzymałości zmęczeniowej na skutek wstępnego zgniotu plastycznego. Badania przeprowadzono na płaskich próbkach z otworem, na którego krawędzi wywarło wstępnie trwałe odkształcenie. Stwierdzono, że przy niskich naprężeniach i wąskich próbkach wpływ zgniotu na wytrzymałość zmęczeniową jest znaczny, przy wzroście zaś naprężeń wpływ ten maleje.

Dwie prace poświęcone były zagadnieniu zachowania się metali w wysokich ciśnieniach hydrostatycznych. S. ERBEL (Politechnika Warszawska) badał warunki uzyskiwania dowolnie dużych odkształceń metali. Przeprowadzono dwie grupy doświadczeń: skręcanie próbek z jednoczesnym przyłożeniem ciśnienia hydrostatycznego za pośrednictwem cieczy w skręcaniu połączone z trójosiowym ściskaniem wywartym mechanicznie przy pełnej izolacji próbki od otoczenia. W drugim przypadku otrzymano bardzo duże kąty skręcania, przy czym materiał nie wykazywał wzmocnienia począwszy od pewnej wartości odkształceń. W pracy J. LITOŃSKIEGO (IPPT) przedstawiono wyniki badań na skręcanie próbek poddanych ciśnieniu około 10 000 atm. Celem badań było m. in. ustalenie wpływu wstępnego odkształcenia plastycznego pod wysokim ciśnieniem na własności metalu badane w normalnym ciśnieniu. Podobnie jak kilku poprzednich badaczy autor stwierdził, że zdolność materiału do odkształcenia bez pęknięć rośnie po uprzednim dużym odkształceniu w podwyższonym ciśnieniu.

Dwie prace poświęcone były doświadczalnej analizie zmiany warunku plastyczności wskutek plastycznej deformacji metalu. Z. GABRYSZEWSKI (Politechnika Wrocławska) badał próbki poddane dwukierunkowemu rozciąganiu lub ściskaniu. Celem badań było ustalenie zmiany warunku plastyczności przy prostych i złożonych historiach odkształcenia oraz zależność warunku złomu od historii obciążenia. J. MIASTKOWSKI (IPPT) badał, jak szybko zanika wpływ wstępnego odkształcenia na warunek plastyczności przy następnym odkształceniu po innej trajektorii. Próbkę rurkową poddano dwukierunkowemu rozciąganiu i analizę ograniczono do małych odkształceń.

J. KLEPACZKO (IPPT) przedstawił wyniki badań dotyczących efektu zmian prędkości odkształcenia na krzywą umocnienia. Próbkę aluminiową poddano skręcaniu z różnymi szybkościami realizując przy tym nagłe zmiany szybkości. Zaobserwowano wpływ historii prędkości na postać krzywe umocnienia.

Praca A. BUJAKA i A. DRESCHERA (IPPT) miała na celu zbadanie pola kinematycznego pod wciśkanym stemplem i klinem w płaski ośrodek sypki. Rozwiązanie teoretyczne oparte o tzw. stowarzyszone prawo płynięcia porównano z kinematycznym polem doświadczalnym stwierdzając w pierwszym rzędzie, że nie obserwuje się wzrostu objętości przewidzianego teorią.

A. DRESCHER (IPPT) przedstawił wyniki badań nad własnościami reologicznymi itu. W ośrodku takim zachodzi złożone sprzężenie własności sprężystych, plastycznych i lepkich i jedynie cały zespół doświadczeń może dostarczyć informacji o strukturze modelowej gruntu; w pracy przeprowadzono serię badań przy danych programach dla prędkości odkształceń.

7. *Teoria lepkosprężystości oraz ich zastosowania.* W grupie tej można wyróżnić kilka prac o charakterze podstawowym. Omówimy je w pierwszej kolejności.

Praca W. OLSZAKA i Z. BYCHAŃSKIEGO (IPPT) omawia zagadnienie kryteriów energetycznych charakteryzujących stany krytyczne w ciałach lepkosprężystych. O ile dla elementów sprężystych można przyjąć, że o przejściu do stanu krytycznego (np. uplastycznienie) decyduje sprężysta energia postaciowa, dla elementów lepkich istotną wielkością będzie moc dysypowana. Autorzy proponują przyjęcie dla ciała lepkosprężystego kombinacji liniowej tych dwóch wielkości za kryterium osiągnięcia stanu krytycznego w ośrodku. Stan krytyczny jest tu rozumiany dość szeroko jako zmiana jakościowa modelu ciała.

F. J. LOCKETT (Anglia) podał równanie opisujące nieskończone małe, zależne od czasu zaburzenia ustalonego, wolnego przepływu cieczy nienewtonowskiej. Jako szczególny przypadek rozpa-

trzone przepływ Couette'a. Podobny punkt wyjściowy przyjął S. ZAHORSKI (IPPT) przy badaniu stateczności prętów lepkosprężystych. Rozpatrzono mały dodatkowy ruch nałożony na ustalone-powolne odkształcenia materiału nieliniowo lepkosprężystego, opisanego równaniami Rivlina-Ericksena. Badając ten ruch można ustalić warunek stateczności procesu podstawowego.

Z. BYCHAWSKI i A. Fox (IPPT, Politechnika Krakowska) zaproponowali równania opisujące słabo-nieliniowy ośrodek lepkosprężysty, uogólniając liniowe związki Boltzmann-Volterry. Dla wielu materiałów liniowość związków zachodzi jedynie przy stosunkowo niewysokich naprężeniach i przy naprężeniach wyższych musimy uciec się przy opisie do zależności nieliniowych. Przedstawione przez autorów związki mają postać nieliniowych równań całkowych.

A. BAŁTOW (Bułgaria) podał równanie opisujące ruch sprężysto-lepkoplastycznego ośrodka typu Bingham w przypadku płaskiego stanu odkształcenia otrzymując w szczególnym przypadku równanie dla problemu quasi-statycznego. Jako szczególny przypadek rozpatrzono rurę grubościenną poddaną dwuparametrowemu obciążeniu.

Kilka prac dotyczyło konkretnych rozwiązań problemów brzegowych. Z. BYCHAWSKI i H. KOPCECKI rozpatrzyli pełzanie membrany kulistej z materiału nieliniowo-sprężystego przy ustalonym pełzaniu. Rozwiązanie uzyskano stosując metodę małego parametru. J. ORKISZ badał pełzanie obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy różnych typach fizycznej nieliniowości materiału. Związki fizyczne oparto na teorii Nádai i Davisa, wiążącej skończone odkształcenia w mierze logarytmicznej i naprężenia. S. PIĘCHNIK (Politechnika Krakowska) podał sposób obliczania czasu zniszczenia pełzającego pręta, poddanego obciążeniu momentem gnącym i siłą osiową. Przyjęto prawo pełzania Odqvista oraz hipotezę Robinsona-Kaczanowa określającą czas potrzebny do chwili pojawienia się kruchych pęknięć. Z. SOBOTKA (Czechosłowacja) rozpatrywał zginanie płyt lepkosprężystych w przypadku materiałów liniowych i nieliniowych przy występowaniu anizotropii. T. WIERZBIŃSKI (IPPT) badał ciekawe i trudne zagadnienie dynamiki sztywno-lepkoplastycznych płyt kołowych przy założeniu liniowej i nieliniowej lepkości i statycznym warunkiem plastyczności Hubera-Misesa. Otrzymany nieliniowy układ równań typu parabolicznego scałkowano w sposób numeryczny.

Praca I. HLAVAČKA (Czechosłowacja) dotyczy twierdzeń wariacyjnych w liniowej teorii lepkosprężystości, gdzie związki fizyczne podane są w postaci całek liniowych, a funkcje relaksacji i pełzanie są ogólnie przyjętymi funkcjami czasu minionego i rzeczywistego.

T. KISIEL (Pol. Wrocław) omówił pewien model reologiczny polegający na równoległym połączeniu elementu lepkosprężystego, sprężystoplastycznego i lepkiego. Model ten dość dobrze opisuje jakościowo cechy reologiczne gruntu i innych materiałów budowlanych.

H. PARKUS (Austria) rozważył elementy konstrukcji (płyty i pręty) z materiału sprężystego i lepkosprężystego, poddane działaniu stochastycznie zmiennych pól naprężeń, wywołanych przypadkowymi zmianami czasowo-przestrzennymi temperatury.

W. Gutkowski, Z. Mróz, R. Solecki (Warszawa)

MIĘDZYKRAJOWE SYMPOZJUM I.A.S.S. W BUDAPESZCIE

W dniach od 31 sierpnia do 3 września 1965 r. odbyła się w Budapeszcie kolejna konferencja naukowa I.A.S.S. (International Association for Shell Structures). To młode, lecz niezwykle dynamicznie rozwijające się stowarzyszenie naukowe przejawia żywotną działalność. Założone we wrześniu 1959 r. w Madrycie przez E. TORROJA kontynuuje działalność dawnej I.C.S.S. (International Committee for Shell Structures). I.A.A.S. jest organizacją łączącą fachowców z dziedziny konstrukcji cienkościennych z całego świata i mającą na celu ogólną koordynację prac badawczych z tego zakresu. Organizując zjazdy poświęcone konstrukcjom powłokowym, określa każdorazowo miejsce, tematykę i zadania następnego kongresu. Z uwagi na coraz bardziej wzrastającą liczbę zagadnień

w tej dziedzinie wzrasta również częstotliwość konferencji I.A.S.S. Zaplanowane początkowo co dwa lata ogólne kongresy okazały się niewystarczające, tak że zaczęto ostatnio organizować sympozja co rok, a nawet dwukrotnie w ciągu roku.

Tegoroczny kongres w Budapeszcie poświęcony był głównie uproszczonym, inżynierskim metodom projektowania konstrukcji powłokowych. Tematykę konferencji podzielono na dwie podstawowe grupy: projektowanie i konstrukcje. W ramach tych dwóch głównych tematów wprowadzono podział bardziej szczegółowy.

I. Projektowanie

A) Przybliżone metody obliczeń, specjalne metody numeryczne, użycie tablic i nomogramów.

1. Powłoki w stanicie błonowym
2. Powłoki walcowe
3. Ogólna teoria powłok i tarczownic
4. Teoria zgięciowa powłok o podwójnej krzywiznie

B) Mechanizacja i automatyzacja obliczeń

II. Konstrukcja

A) Możliwości oszczędności w deskowaniu, rusztowaniu i w robociznie

B) Użycie konstrukcji typowych i prefabrykowanych.

Podobnie jak w większości ostatnich zjazdów I.A.S.S. poszczególne referaty zostały zebrane w odpowiednie grupy tematyczne, z których każda miała swojego generalnego referenta.

W obradach wzięło udział 199 uczestników (zgłoszonych 212) z 26 krajów, którzy zgłosili łącznie 72 referaty. Polska reprezentowana była przez siedmioosobową delegację, mianowicie: mgr inż. M. DUSZEK, mgr inż. M. GOLCZYKA, mgr inż. B. KOYA, prof. dr R. KOZAKA, dr inż. J. KRZEMIŃSKI-GO, dr inż. S. KUSIA, prof. dr J. LEDWONIA. Polacy przedstawili 5 referatów (M. GOLCZYK, B. KOY, J. KRZEMIŃSKI, S. KUŚ, J. LEDWOŃ i M. GOLCZYK).

Oficjalne otwarcie konferencji nastąpiło we wtorek 31.VIII. 1965 po południu w siedzibie Węgierskiej Akademii Nauk, gdzie też odbywały się dalsze posiedzenia. Po powitaniu członków zjazdu przez przedstawiciela Węgierskiego Ministerstwa Budownictwa i wstępnym przemówieniu prezesa I.A.S.S., prof. dr A. M. HAASA rozpoczęły się obrady sesji I.A. 1. Referentem był P. CSONKA.

W ramach tej sesji A. HAAS przedstawił pracę o przybliżonej metodzie obliczania płaskich powłok kulistych, założonych na prostokątnym rzucie, S. H. ABU-SITTA rozważył wpływ praktycznych warunków brzegowych na powłoki o dodatniej krzywiznie Gaussa, a K. A. ANDERSEN omówił problem wyznaczania powierzchni powłoki rozpiętej nad kwadratowym rzutem przy danym obciążeniu i funkcji naprężeń. Z kolei P. BALLESTEROS rozważył szczególny typ powłoki zwanej wclaroidalną, S. P. BANERJEE zaproponował pewną metodę analizy stanu błonowego powłok o podwójnej krzywiznie oraz T. BRAJANNISZ podał iteracyjną metodę obliczania wycinka powłoki toroidalnej. P. CSONKA zanalizował złożone powłoki sektorialne, H. P. HARRENSTIEN i R. H. GUNDERSON rozpatrzyli tzw. powłoki i funikularne, D. W. HILL zajmował się jednopowłokową hiperboloidą nieobrotową (eliptyczną), a J. KORDA opisał stan naprężenia w prostokątnej membranie pozbawionej żeber brzegowych i podpartej punktowo w narożach. Następne dwie prace miały charakter prac opisowych: R. KRAPPENBAUERA «Konstrukcje powłokowe w nowoczesnym budownictwie» i S. KUSIA «Studium nad właściwym kształtem powłokowego basenu pływackiego». J. LEDWOŃ i M. GOLCZYK przedstawili pracę pt. «Przybliżona metoda obliczania powłoki hiperboloidalnej za pomocą zastępczych powłok stożkowych». Ostatnie referaty sekcji I.A.1 dotyczyły powłok w kształcie paraboloidy hiperbolicznej (H-P shells). P. NISSEN zanalizował odkształcenia antysymetryczne obciążonej powłoki, A. ORDONEZ zbadał zachowanie się uezebrowanej powłoki żelbetowej, złożonej z dwóch wycinków paraboloidy i wreszcie N. C. TETER i R. C. LYU pokazali szereg zastosowań powłok typu H-P (hyper shells) w budownictwie rolniczym.

Wieczorem tegoż dnia w hotelu Gellerta organizatorzy sympozjum podejmowali uczestników lampką wina.

W środę (1. IX) odbyły się dwa posiedzenia. Przed południem obradowała sekcja I.A.2., a po południu I.A.3. Referentem sesji I.A.2. był L. HAHN.

Pierwszy referat L. FISCHERA dotyczył zastosowania tzw. metody płytowej do kołowych powłok walcowych. Metoda ta polega na rozpatrzeniu sprzężonych równań Własowa dla powłoki walcowej jako równań dla płyty. Obciążeniami płyty są przeniesione na prawe strony obu równań człony nie zawierające operatora biharmonicznego. Następnie J. CHINN i S. D. FOREMAN podali rozwiązanie parabolicznej powłoki walcowej metodą belkowa, T. E. HALS i I. HOLAND badali stan naprężenia w powłokach, wywołany działaniem obciążeń skupionych, oraz G. HERRMANN i C. F. BAGGE przedstawili teoretyczne i doświadczalne badania stateczności powłoki walcowej, poddanej działaniu termicznego ściskania osiowego i mechanicznego ciśnienia zewnętrznego. Dalsze dwa referaty przedstawili R. F. HOOLEY «Drewniane konstrukcje klepkowe» («stave structures») i E. INGERSEV «Proste powłoki walcowe». Ostatnie prace sekcji I.A.2 F. NEMETHA, R. RABICHA i K. ZAHRADNIKA poświęcone były przybliżonym metodom obliczania powłok walcowych.

Po południu generalny referent K. SZMODITS zreferował 10 prac zgłoszonych w ramach sesji I.A.3.

Do tej grupy należy referat A. FISKVANTA i I. HOLANDA zajmujący się ustawieniem rozwiązania płyt i powłok szczególnie korzystnym dla obliczeń maszynowych, referat P. GLOCKNERA o pewnych aspektach teorii powłok z inżynierskiego punktu widzenia, praca L. O. KERESZTESYEGO o badaniach drewnianych powłok typu H-P, jak również referat H. VAN KOTENA i A. M. HAASA «Stateczność podwójnie zakrzywionych powłok o dodatniej krzywiznie Gaussa». J. KRZEMIŃSKI opracował pewną metodę obliczania sprzężonych prostoliniowo powłok walcowych, A. NASH pokazał nowe wyprowadzenie związków geometrycznych dla płaskich powłok, A. PADUART zajął się efektem obciążenia skupionego na paraboloidzie hiperbolicznej oraz G. STEINHART pokazał metodę elasto-optyczną, zwaną metodą okręgu —J. Dwie ostatnie prace dotyczą teorii tarczownic: M. REISS mówił o uproszczonej analizie tarczownic o małej rozpiętości, a M. G. TAMHANKAR o analizie tarczownic ciągłych.

Trzeci dzień kongresu poświęcony był sesji I.A.4 (referent K. KOLLAR) i I.B. (referent H. TOTTENHAM).

W grupie I.A.4 zgłoszono 11 referatów. E. L. ALBASINY omówił «Naprężenia w hiperbolicznych wieżach chłodniczych», J. CHINN «Powierzchnie wpływowe dla przemieszczeń i naprężeń w płaskich powłokach kulistych», J. N. DISTEFANO i C. TORREGIANI «Uproszczoną metodę wyznaczania obciążeń krytycznych dla powłok typu H-P» oraz E. DULÁCSKA «Eksperymentalne określenie obciążenia krytycznego dla konstrukcji powłokowych». W dalszych pracach E. DULÁCSKA i L. KOLLAR omówili metodę obliczania wspornikowych powłok konoidalnych, R. E. FULTON przedstawił metodę projektowania płaskich powłok warstwowych (sandwich shells) o podwójnej krzywiznie, L. HAHN pokazał przybliżone sposoby analizy powłok prostokreślnych, a H. HOTZLER rozpatrywał pewne zagadnienia teorii zgięciowej płaskich powłok kulistych, rozpiętych nad prostokątnym rzutem. W trzech ostatnich referatach [L. LACHANCE i E. P. POPOVA przedstawił «Ograniczenia dla równań płaskich powłok kulistych», I. RAJENDRAM i S. H. SIMMONDS «Analizę płaskich powłok translacyjnych» i K. SZMODITS «Analizę powłok płaskich o dowolnym kształcie» Referaty te zamknęły obrady sekcji I.A.4.

Na popołudniowym posiedzeniu grupy I.B referent H. TOTTENHAM przedstawił 7 następujących prac: J. E. GIBSONA «Zastosowanie ogólnych programów dla powłok do projektowania dachów», J. E. GOLDBERGA, A. V. SETLURA i D. W. ALSPAUGHA «Obliczanie niekołowych powłok walcowych za pomocą maszyn matematycznych», H. A. HADIDA «Analiza numeryczna w teorii zgięciowej powłoki konoidalnej», P. E. KORDA «Programowanie dla płaskich powłok na sprężystych podporach», W. M. NEWMANA i A. S. HALJA «Obliczanie ciągłych i wielofalowych powłok walcowych za pomocą maszyn liczących», E. P. POPOVA i Z. A. LU «Zastosowanie maszyn obliczeniowych do analizy powłok obrotowych obciążonych osiowo-symetrycznie», R. SZILÁRDA «Rozwiązanie macierzowe dla powłoki cylindrycznej o dowolnym kształcie».

W ostatnim dniu konferencji omawiano prace sekcji II.A i II.B. Generalnym referentem obu tych sekcji był H. RÜHLE. W pierwszej grupie znalazło się 6 referatów (w tym jeden polski M. GOLCZYKA), omawiających głównie zagadnienia wykonawcze i ekonomiczne. W grupie drugiej zgłoszono 10 prac poświęconych prefabrykacji i użyciu konstrukcji typowych. Z ciekawszych należy wymienić referat polski B. KOVA traktujący o zastosowaniu trójkątnych płyt warstwowych do przekryć dachowych oraz M. P. NIELSENA «Wyznaczenie zbrojenia w powłokach błonowych».

Po południu prof. E. BÖLCSKEI wygłosił referat końcowy, w którym podsumował rezultaty sympozjum, a następnie prof. A. M. HAAS po podziękowaniu organizatorom i członkom zjazdu za owocne obrady i po przypomnieniu, że następne konferencje I.A.S.S. odbędą się w Bratysławie i Leningradzie, zamknął obrady kongresu budapesztańskiego.

Wieczorem w Gundel Restaurant odbył się bankiet pożegnalny.

Podany przegląd referatów jest oczywiście bardzo pobieżny i pozwala tylko na ogólną orientację w tematyce kongresu. Tym niemniej umożliwia on wyciągnięcie pewnych wniosków natury ogólnej. Przede wszystkim można zaobserwować znaczny wzrost zainteresowania metodami obliczania powłok, umożliwiającymi zastosowanie maszyn matematycznych. W dziedzinie konstrukcji inżynierskich dążenie to jest zresztą całkowicie zrozumiałe i wytycza chyba na najbliższe lata jasny kierunek rozwoju metod obliczeniowych ustrojów powłokowych. Z drugiej jednak strony zwiększyła się również znacznie ogólna liczba prac teoretycznych podkreślając tym fakt, że nawet w dziedzinach zastosowań inżynierskich ogólna teoria powłok jest wciąż żywym przedmiotem zainteresowań i nie może się sprowadzić wyłącznie do metod numerycznych. Stosunkowo mało prac przedstawiono na temat problemów konstrukcyjnych i wykonawczych, choć taki właśnie był jeden z głównych tematów konferencji.

Jak na większości tego rodzaju kongresach poziom referatów był nierówny. Obok prac dobrych zdarzały się słabe nie wnoszące żadnych aspektów oryginalnych. Wydaje się, że reżim kwalifikacyjny nadsyłanych prac powinien być podniesiony.

J. Krzeziński
Warszawa

KURSY NAUKOWO-SZKOLENIOWE ORGANIZOWANE PRZEZ PAN

Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych Polskiej Akademii Nauk organizuje w roku 1966 szereg konferencji szkoleniowych w Jabłonnie. Z planu tych konferencji podajemy te, które mogą zainteresować mechaników.

Staraniem Biura zostaną wydane skrypty zawierające materiały pomocnicze.

Jednostka organizująca	Tematyka konferencji	Termin	Wykładowcy
ZMOC	Teoria plastyczności	20-30.IV	Doc. dr Z. MRÓZ, doc. dr J. RYCHLEWSKI, doc. dr W. SZCZEPIŃSKI
I.A.	Teoria zespołów skończonych	9-18.V Kier. konferencji dr A. STASZAK	Prof. dr Gr. C. MOISIL (Bukareszt)
K.I.L.	Teoria plastyczności i reologia w mechanice gruntów	25.V-1.VI Kier. konferencji prof. dr B. ROSSIŃSKI	Dr n.t. A. STROGANOW (Moskwa), prof. dr Z. SOBOTKA (Praga), prof. dr I. KISIEL
ZMOC	Teoria lepkoplastyczności i termodynamika materiałów z pamięcią	6-15.VI	Prof. dr W. OLSZAK, doc. dr P. PERZYNA i wykładowca zagraniczny

Jednostka organizująca	Tematyka konferencji	Termin	Wykładowcy
ZMOC	Niektóre nowe zagadnienia fizyki ośrodka ciągłego	4-14.VII Kier. konferencji prof. dr S. KALISKI, prof. dr H. ZORSKI	2 profesorów zagranicznych, prof. dr W. NOWACKI, prof. dr S. KALISKI, prof. dr H. ZORSKI
ZBD	Kurs tarcia wewnętrznego	13-17.IX Kier. konferencji dr. Z. PAWŁOWSKI	Prof. dr K. G. MIERKUŁOW (ZSRR), prof. dr RON TRUELL, prof. dr D. TOMPSON (USA)
ZMCG	Metody numeryczne w dynamice gazów	19.IX-1.X Kier. konferencji prof. dr W. J. PROSNAK	Prof. dr A. A. DORODNICYN, dr N. I. TISLENIN, k.n. P. I. CZUSZKIN (ZSRR), dr D. M. DE AUE (Anglia)
ZMOC	Fale sprężyste i elektromagnetyczne	3-10.X Kier. konferencji prof. dr Z. OLESIAK	Prof. dr K. KUPRADZE (Tbilisi)
I.A.	Kurs automatów uczących się	listopad Kier. konferencji prof. dr S. WĘGRZYN	Prof. I. C. GILLE (Francja), prof. dr S. WĘGRZYN, prof. dr R. KULIKOWSKI, 2 wykładowców z ZSRR

Skróty: I.A. Instytut Automatyki
 K.I.L. Komitet Inżynierii Lądowej PAN
 ZBD Zakład Badania Drgan IPPT PAN
 ZMCG Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN
 ZMOC Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN

KOMITET REDAKCYJNY zawiadamia, że poczynając od 1 stycznia 1966 r. *MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* będzie wychodziła jako kwartalnik cztery razy do roku w ogólnej objętości 40 arkuszy wydawniczych. Warunki prenumeraty zostaną podane w zeszycie 1/1966 *MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ*. Wydane poprzednio 3 tomy wydawnictwa będzie można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w Warszawie, Pałac Kultury i Nauki, pokój 2305.

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 1/1964

- S. KALIŃSKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 3/1964

- ARTUR KACNER — Wspomnienie pośmiertne
- W. WIERZBIŃSKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYŃIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
Biuletyn informacyjny PTMTS:
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem
Sympozja naukowe IUTAM ~

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1965

- S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego
Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczenia nieliniowych zagadnień przewodnictwa cieplnego
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych

ZESZYT 2/1965

- WITOLD WIERZBICKI — Wspomnienia pośmiertne
Z. WASIUTYŃSKI, O wyznaczaniu warunków równowagi i równań stanu przez pomiar odkształceń
Z. WASIUTYŃSKI, A. Brandt, Pomiary sześciu składowych odkształcenia w ściskanyim walcu betonowym
E. SOÓS, Tensor Kelvina-Somigliany dla ciała lepkosprężystego
Z. WASZCZYŹYŃ, Doświadczalne badania nad skończonymi sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwalnych podporach
J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego mosiądzu
T. AGORSOWICZ, Niektóre związki wychyleń skrętnych i momentów reakcji wałów drgających jako podstawa metody doświadczalnego wyznaczania zmiennych naprężeń ścinających
J. KASPERKIEWICZ, Czujniki do laboratoryjnych pomiarów stanów naprężeń i odkształceń wewnątrz elementów betonowych
Biuletyn Informacyjny PTMTS

Następny zeszyt *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* zawiera prace

- S. OCHĘDUSZKO, Zmiany spowodowane w mechanice przez międzynarodowy układ jednostek miar
W. GOGÓŁ, Teoria stanu uporządkowanego i możliwości jej zastosowania
J. RYCHLEWSKI, Plastyczność ciał o skokowej niejednorodności
K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, Układy współrzędnych prostokreślnych w geometrii powierzchni środkowych cienkich powłok

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągłe mniej więcej w odstępach kwartalnych, Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa.

MECHANIKĘ TEORETYCZNĄ I STOSOWANĄ można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Pałac Kultury i Nauki)
