

g. II. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

TOM 3 • ZESZYT 1



P<sup>A</sup>

WARSZAWA 1965  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## SPIS TREŚCI

S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej О некотором обобщении ортогонализационного метода On a generalization of the method of orthogonalization	3
W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego Кинетический синтез общей механической системы Kinetic synthesis of general mechanical systems	13
Z. TRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczania nieliniowych zagadnień przewod- nictwa cieplnego О некотором способе приближенного решения нелинейных задач теплопро- водности A certain approximate method of solving non-linear problems of heat conduction	29
W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów Разностная геометрия поверхностной сетки точек Difference geometry of the point surface	37
W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali Влияние динамических эффектов на параметры процессов волочения The influence of inertial forces and strain rate sensitivity on the drawing processes of metals	49
J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych Вопрос о разгрузке симметрических оболочек вращения в безмоментном со- стоянии, при больших неупругих деформациях Unloading process of the rotationally symmetric membrane shells with large defor- mations	63
Biuletyn informacyjny PTMTS	85

71.120

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 3 • Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 6 5

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A  
WITOLD WIERZBICKI—PRZEWODNICZĄCY  
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · JERZY LIT-  
WINISZYN (KRAKÓW) · ADAM MITZEL (WROCŁAW)  
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA) · STANISŁAW  
OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW OLSZAK  
(WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK (GDAŃSK)  
JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y  
ZBIGNIEW OLESIK — R E D A K T O R  
JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI  
W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

## REDAKCJA

W a r s z a w a, Świątokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład (800+100) egz. Arkuszy wydawn. 8,25, Arkuszy drukarskich 6,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 1.II.65 r., druk ukończono we wrześniu 1965 r. Cena zł 25,—

---

Zam. 157 E-80 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## O PEWNYM UOGÓLNIENIU METODY ORTOGONALIZACYJNEJ

SYLWESTER KALISKI (WARSZAWA)

### 1. Uwagi wstępne

W problemach teorii drgań zasadniczą rolę odgrywają metody przybliżone, w szczególności metody wariacyjne i ortogonalizacyjne. Należą do nich metody: RITZA, TREFFTZA i GALERKINA. Niemożliwość uzyskania ścisłych rozwiązań w wielu przypadkach zagadnień brzegowych doprowadziła do znacznego rozwoju wyżej cytowanych metod rozwiązań. Poza literaturą specjalną zostały one ujęte również w opracowaniach monograficznych, z których do podstawowych należą książki MICHLINA [1, 2].

Podstawową własnością metod Ritza, Trefftza i Galerkina jest fakt, że poszukując rozwiązania przybliżonego dynamicznego problemu brzegowego w postaci  $u = \sum_i a_i \varphi_i$  żądamy bądź spełnienia przez te funkcje warunków brzegowych (metoda Ritza, Galerkina), bądź równań (metoda Trefftza). Ponieważ metoda ortogonalizacyjna jest ogólniejsza (nie wymaga wprowadzenia pojęcia energii), zatem będziemy mówić w dalszym ciągu jedynie o niej. Również metodę Trefftza można przekształcić na ortogonalizacyjną, jeżeli warunki minimum kwadratów zastąpić na brzegu bądź warunkami ortogonalności operatora brzegowego rozwiązania względem funkcji  $\varphi_i$  bądź odpowiednich ich pochodnych. Należy tutaj jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że operując w metodach Ritza i Galerkina normą energii [1, 2] można zaniedbać, z teoretycznego punktu widzenia, spełnienie dynamicznych warunków brzegowych, tj. takich, które dla operatora różniczkowego rzędu  $2k$  zawierają kombinacje od  $k$ -tej do  $2k-1$  pochodnej z pozostałą funkcją i pochodnymi.

Wyniki otrzymane za pomocą układu funkcji nie spełniających dynamicznych warunków brzegowych stają się od tych warunków niezależne ściśle dopiero przy nieskończonej liczbie funkcji  $\varphi_i$ . Przy skończonej ich liczbie, szczególnie zaś przy małej liczbie, co ma najczęściej miejsce w praktyce, nieuwzględnienie tych warunków w metodzie Galerkina prowadzi do istotnych błędów. W praktyce jednakże, szczególnie dla bardziej złożonych problemów brzegowych, trudno częstokroć dobrać układy funkcji spełniających bądź równanie, bądź warunki brzegowe. Jeżeli nawet takie funkcje znajdzie się, to są one zwykle tak skomplikowane, że dalsze obliczenia w oparciu o nie są niewykonalne.

Nasuwa się więc pytanie, czy nie można by uogólnić metody ortogonalizacyjnej w taki sposób, aby dopuszczała ona przy określonych warunkach operowanie układem funkcji  $\varphi_i$  nie spełniających ani układu równań, ani warunków brzegowych

i prowadziła do dobrych wyników również w przypadkach, gdy operujemy małą liczbą funkcji, jak to ma miejsce w klasycznej metodzie Galerkiina, gdy układ funkcji  $\varphi_i$  spełnia warunki brzegowe. Otóż niżej chcielibyśmy zaproponować tego rodzaju uogólnienie metody ortogonalizacyjnej, pozwalającej operować funkcjami nie spełniającymi równań i warunków brzegowych. Funkcje te jednakże nie będą zupełnie wolne od ograniczeń, mianowicie podlegać będą pewnemu wyborowi związanemu z potrzebą wprowadzenia małego parametru charakteryzującego odchylenie od spełnienia warunków klasycznych.

Niżej przedstawimy formalny szkic metody. Ponieważ idea rozwiązania opiera się na wprowadzeniu małego parametru, żądać będziemy jedynie asymptotycznej zbieżności rozwiązań do rozwiązań metodą Galerkiina i zmodyfikowaną metodą Trefftza przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nie będziemy więc konstruować ogólnego dowodu zbieżności, lecz ograniczymy się do zbieżności asymptotycznej, co w praktyce, z uwagi na ograniczoną liczbę funkcji, jaką się operuje, jest na ogół wystarczające.

Warunki dostateczne rozwiązalności dla przypadków asymptotycznych granicznych, tj. rozwiązalności metody Galerkiina i Trefftza, są znane [1, 2] i nie będziemy ich tutaj powtórnie przytaczać. Odnośnie założeń i warunków dostatecznych gwarantujących zbieżność tych metod przyjmujemy je identycznie z [1, 2 i 3].

W drugim punkcie niniejszej pracy naszkicujemy ideę metody, w trzecim zilustrujemy ją na przykładzie prostokątnej płyty drgającej, sprężyste utwierdzonej na obwodzie.

## 2. Idea metody

Proponowana metoda obejmuje zarówno równania wektorowe, jak i układy równań skalarnych oraz równania dowolnego rzędu charakteryzujące się układem warunków brzegowych. Dla jasności jednakże i skupienia uwagi przedstawimy ogólną ideę metody na najprostszym przypadku, tj. rozważymy równanie skalarne drugiego rzędu. W następnym natomiast punkcie rozważymy przykład równania wyższego rzędu. Uogólnienie tego sposobu postępowania na układy równań jest automatyczne.

Rozważmy dowolne liniowe równanie drugiego rzędu o dowolnej liczbie zmiennych niezależnych w postaci

$$(2.1) \quad Lu = f$$

z warunkiem brzegowym

$$(2.2) \quad Ku = P.$$

Warunek (2.2) może być dynamiczny, nienaturalny.

Jak wiadomo, sprowadzić można równanie (2.1) i warunek brzegowy (2.2) zawsze do takiej postaci, w której jedno z tych równań będzie jednorodne. Stosując metodę Galerkiina można np. (2.2) sprowadzić do formy jednorodnej, tj. przy  $P=0$ .

Gdybyśmy chcieli zastosować do rozwiązania naszego problemu metodę Galerkiina, wówczas zakładając rozwiązanie w postaci

$$(2.3) \quad u = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i,$$

żądalibyśmy od funkcji  $\varphi_i$  spełnienia jednorodnych warunków brzegowych (2.2). Współczynniki  $a_i$  (bądź wartości własne) wyznaczylibyśmy z warunków ortogonalności operatora  $L$  od rozwiązania (2.3) względem funkcji  $\varphi_i$  w obszarze ograniczonym brzegiem. Natomiast w zmodyfikowanej metodzie Trefftza żądalibyśmy, aby  $\varphi_i$  spełniały równanie, zaś  $a_i$  wyznaczylibyśmy z warunków ortogonalizacji operatora  $K$  od (2.3) po brzegu względem funkcji  $\varphi_i$  (przy  $P \neq 0$  zaś  $f = 0$ ).

Obecnie przyjmiemy jako rozwiązania dwa układy zupełne funkcji  $\varphi_i$  oraz  $\psi_i$  linio-wo niezależne, z których oba nie czynią zadość ani równaniu, ani warunkom brzegowym. Jednakże układy funkcji  $\varphi_i, \psi_i$  podajemy pewnym dodatkowym założeniem. Mianowicie żądamy, aby funkcja  $\varphi_i$  pierwszego układu nie spełniając równania w ogóle, nie spełniała warunków brzegowych tylko «nieznacznie», tj. tak, aby np. amplituda operacji  $Ku$  «niewiele» różniła się od zera, mówiąc innymi słowy, aby można było wprowadzić mały parametr  $\varepsilon_1$  charakteryzujący stopień niezzerowania się  $Ku$ .

Podobnie dla funkcji  $\psi_i$  żądamy, aby nie spełniając warunków brzegowych w ogóle, były bliskie spełnienia równania jednorodnego (2.1), tak aby odchylenie od  $Lu = 0$  charakteryzowało się również małym parametrem  $\varepsilon_2$ . Oczywiście określenie: układ funkcji «w przybliżeniu» spełnia operator, odnosi się zawsze do równań (operatorów) jednorodnych. Te dodatkowe żądania odnośnie funkcji  $\varphi_i$  oraz  $\psi_i$  utrudniają oczywiście ich wybór, jednakże jest on znacznie łatwiejszy aniżeli w metodach klasycznych. Wielokrotnie inżynier badający dany problem potrafi na podstawie przesłanek intuicyjnych dobrać tego typu funkcje z dokładnością do małych odchyłek, a nie ściśle jak w metodach klasycznych. Układy funkcji  $\varphi_i, \psi_i$  powinny stanowić linio-wo niezależne układy zupełne tylko wtedy, gdybyśmy chcieli sprowadzić problem do nieskończonego układu równań i badać dążenie rozwiązania przybliżonego do ścisłego. W przypadku operowania skończoną liczbą funkcji z warunku zupełności można zrezygnować.

Rozwiązania naszego problemu będziemy zatem poszukiwać w postaci

$$(2.4) \quad u = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{i=1}^m b_i \psi_i,$$

przy czym niekoniecznie  $m=n$ . Liczby te zależą od fizycznie stawianych celów zadania (np. jeżeli istotniejszą rolę odgrywać będą warunki brzegowe  $m > n$  itp.). Poza tym funkcje  $\varphi_i$  i  $\psi_i$  spełniają omówione wyżej warunki.

Podstawiając (2.4) do (2.1) i (2.2) żądać będziemy ortogonalności operatora równania od rozwiązania (2.4) względem funkcji  $\varphi_i$ , operatora zaś warunków brzegowych względem  $\psi_i$  (lub względem ich pochodnych, jeżeli same funkcje zerują się tożsamościowo na brzegu). Taki tok postępowania pozwoli uzyskać  $n+m$  równań względem współczynników  $a_i$  i  $b_i$ . Zauważymy, że ponieważ  $L\left(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i\right)$  oraz  $K\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right)$  zawierają zgodnie z założeniem małe parametry, tzn.

$$(2.5) \quad L\left(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i\right) = \varepsilon_2 \bar{L}\left(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i\right), \quad K\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right) = \varepsilon_1 \bar{K}\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i\right),$$

to żądanie ortogonalności równania względem  $\varphi_i$ , warunku zaś brzegowego względem  $\psi_i$  jest podyktowane i uzasadnione tym, że żądamy spełnienia równania przez rozwiązanie  $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$  przy potraktowaniu małych członów  $\bar{L}(\sum_{i=1}^m b_i \psi_i)$  jako znanej części niejednorodnej tego równania. Analogicznie, ale na odwrót przebiega rozumowanie dla operatora warunków brzegowych.

Z matematycznego punktu widzenia żądamy, aby przy  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  rozwiązania dla klasycznych metod Galerkina i Trefftza, które otrzymujemy przy asymptotycznym przejściu z  $\varepsilon_i$  do zera — miały sens — istniały, były jednoznaczne i zbieżne. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, dla metod klasycznych zakładamy, że są spełnione warunki dostateczne stosowalności (zbieżności) tych metod [1, 2].

Od rozwiązania przy  $\varepsilon_i \neq 0$  nie żądamy ogólnie zbieżności, lecz jedynie zbieżności asymptotycznej, tj. aby przy  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  rozwiązania zmierzały do znanych rozwiązań metody Galerkina czy Trefftza, których istnienie zapewniliśmy spełnieniem wyżej cytowanych warunków dostatecznych. Mamy tutaj sytuację podobną jak w metodzie Kryłowa-Bogolubowa w teorii drgań nieliniowych. Ponieważ w praktyce z reguły operujemy skończoną liczbą funkcji, zatem warunek zbieżności asymptotycznej dla małego parametru  $\varepsilon$  jest praktycznie wystarczający.

Oczywiście można próbować dowieść, podobnie jak w niektórych zagadnieniach metody Kryłowa-Bogolubowa, poza zbieżnością asymptotyczną również zbieżność rozwiązań przy  $\varepsilon_i \neq 0$ . Dowód taki dla dostatecznie małych  $\varepsilon_i$  nie nastęrcza trudności. Nie przytaczamy go tutaj, gdyż dla przypadków, w których operujemy skończoną liczbą funkcji, nie przedstawia on istotniejszego praktycznego znaczenia, strona praktyczna zaś zagadnienia jest zasadniczym celem niniejszego artykułu. Tutaj natomiast otwartą pozostaje kwestia, na ile w ogóle istnieje konieczność wprowadzenia małych parametrów lub w jakim stopniu. Zagadnienie to stanowi poważny problem matematyczny i wymaga głębokiej analizy. Nie będziemy poruszać go na obecnym etapie ograniczając się do założenia zbieżności asymptotycznej. Zgodnie z tym co powiedzieliśmy wyżej, warunki ortogonalności w naszym problemie kształtować się będą przy uwzględnieniu (2.5) następująco:

$$(2.6) \quad \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) + \varepsilon_2 \bar{L} \left( \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right) - f \right\} \varphi_k dV = 0, \quad k = 1, 2 \dots n,$$

$$\int_S \left\{ \varepsilon_1 \bar{K} \left( \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) + K \left( \sum_{i=1}^m b_i \psi_i \right) - P \right\} \psi_k^* dS = 0, \quad k = 1, 2 \dots m,$$

gdzie  $V$  oznacza całkowanie po obszarze,  $S$  — po konturze, przy czym zamiast  $\psi_k^*$  mogą wejść bądź same funkcje  $\psi_k$ , bądź pochodne normalne do konturu, o ile same funkcje zerują się tożsamościowo na brzegu (w przypadku równań wyższych rzędów mogą to być również odpowiednio wyższe pochodne). Układ równań (2.6) pozwala na wyznaczenie współczynników  $a_i$ ,  $b_i$  bądź też wartości własnych, gdy  $f = P = 0$ . Równania (2.6) można rozwiązywać bezpośrednio, można jednak uprościć rozwiązywanie pełnego układu równań wykorzystując metodę małego parametru. Mianowicie przyjmując przy operowaniu rzędami wielkości  $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2 \approx \varepsilon$

$$(2.7) \quad a_i = a_{0i} + \varepsilon a_{1i} + \varepsilon^2 a_{2i} + \dots, \quad b_i = b_{0i} + \varepsilon b_{1i} + \varepsilon^2 b_{2i} + \dots$$



i podstawiając do (2.6) oraz przyrównując do siebie wielkości odpowiednich rzędów małości względem  $\varepsilon$  znajdujemy

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_{0i} \varphi_i \right) - f \right\} \varphi_k dV = 0, \\
 & \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} \varphi_i \right) + \bar{L} \left( \sum_{i=1}^m b_{0i} \psi_i \right) \right\} \varphi_k dV = 0, \\
 & \int_V \left\{ L \left( \sum_{i=1}^n a_{2i} \varphi_i \right) + \bar{L} \left( \sum_{i=1}^m b_{1i} \psi_i \right) \right\} \varphi_k dV = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \\
 (2.8) \quad & \int_S \left\{ K \left( \sum_{i=1}^m b_{0i} \psi_i \right) - P \right\} \psi_k^* dS = 0, \\
 & \int_S \left\{ \bar{K} \left( \sum_{i=1}^n a_{0i} \varphi_i \right) + K \left( \sum_{i=1}^m b_{1i} \psi_i \right) \right\} \psi_k^* dS = 0, \\
 & \int_S \left\{ \bar{K} \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} \varphi_i \right) + K \left( \sum_{i=1}^m b_{2i} \psi_i \right) \right\} \psi_k^* dS = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

W praktyce można korzystać bądź z układu równań (2.6), bądź (2.7) i (2.8). Ze względu na wyższą dokładność przy badaniu prostszych układów [gdzie łączny układ (2.6) nie jest zbyt skomplikowany] warto stosować bezpośrednio układ równań (2.6). Gdy równanie jest wyższego rzędu (lub mamy układ równań), wówczas rozwiązanie (2.4) musi zawierać większą kombinację funkcji. Na przykład gdy mamy jedno równanie i dwa warunki brzegowe, trzeba wprowadzić trzy układy funkcji  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$ ,  $\theta_i$ , z których każdy nie spełnia tylko jednego z trzech operatorów (równania i dwóch warunków brzegowych) w ogóle, a pozostałe spełnia z dokładnością do małego parametru. Wówczas układ równań buduje się z warunków ortogonalności każdorazowo danego operatora względem tego układu funkcji, który nie spełnia go «w ogóle». Jeżeli układ funkcji spełniałby np. jeden z warunków brzegowych, wówczas mimo że równanie jest czwartego rzędu, rozwiązanie (2.4) przyjmiemy w postaci układu dwóch funkcji. Procedurę tę można w taki sam sposób rozszerzyć na dowolny rząd równania i dowolny układ równań. Sposób konstrukcji rozwiązania zilustrujemy na przykładzie.

### 3. Przykład

Jako przykład rozważymy drgania własne płyty prostokątnej sprężysto utwierdzonej na obwodzie. Rozwiązanie takiego problemu w postaci zamkniętej, jak wiadomo, nie jest znane. Zakładać będziemy, że funkcje  $\varphi_i$  i  $\psi_i$  spełniać będą warunek ugięcia równego zero na obwodzie płyty, tj. pierwszy warunek brzegowy, nie będą spełniać natomiast drugiego warunku brzegowego, tj. sprężystego utwierdzenia. W przykładzie tym wprowadzimy mały parametr tylko do operatora brzegowego. Przekonamy się, że i w tym przypadku uzyskamy bardzo dobre wyniki.

Mimo że drugi nie spełniony przez  $\varphi_i, \psi_i$  warunek brzegowy należy do dynamicznych, to jak już wspomnieliśmy, korzystając z małej liczby funkcji jego niespełnienie w metodzie Galerkiina prowadzioby do istotnych błędów.

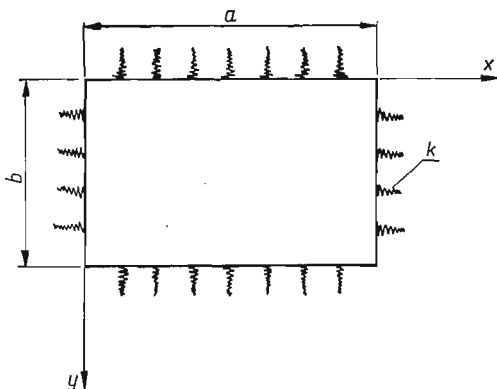
Rozważmy płytę prostokątną (w konkretnych rachunkach założymy płytę kwadratową). Równanie drgań swobodnych płyty ma postać

$$(3.1) \quad \nabla^4 w - \alpha^2 w = 0, \quad \alpha^2 = \frac{\rho \omega^2}{D}$$

z warunkami brzegowymi (rys. 1) na obwodzie

$$(3.2) \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \pm k \frac{\partial w}{\partial n},$$

gdzie  $n$  jest pochodną normalną do konturu płyty, przy czym dla  $x, y = 0$  bierzemy  $+k$ , dla  $x, y = a$  bierzemy  $-k$ .



Rys. 1

Rozwiązanie (2.4) przyjmujemy w postaci

$$(3.3) \quad w = a_1 \varphi + b_1 \psi,$$

$$(3.4) \quad \varphi = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad \psi = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{a}\right).$$

Funkcja  $\varphi$  spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia, zaś  $\psi$  pełnego utwierdzenia. Obie funkcje nie spełniają równania <sup>(1)</sup> i drugiego warunku brzegowego.

Jeżeli liczba  $k$  charakteryzująca stopień utwierdzenia płyty na brzegu jest bardzo duża, tzn. płyta jest bliska płyty utwierdzonej, wówczas funkcja  $\psi$  «prawie» spełnia drugi warunek brzegowy nie spełniając równania.

Jeżeli  $k$  jest bardzo małe, funkcja  $\varphi$  spełnia z małym parametrem drugi warunek brzegowy nie spełniając równania.

W ostatnim więc przypadku równanie będziemy ortogonalizować za pomocą funkcji  $\varphi$ , warunek zaś brzegowy za pomocą funkcji  $\psi$  (zgodnie z oznaczeniami

<sup>(1)</sup> Funkcja  $\varphi$  dla swobodnie podpartej płyty jest funkcją własną.

poprzedniego paragrafu). W pierwszym natomiast przypadku należy odwrotnie ortogonalizować równanie za pomocą funkcji  $\psi$ , warunek zaś brzegowy za pomocą  $\varphi$ , gdyż mały parametr dla warunku brzegowego związany jest teraz z funkcją  $\psi$ . Dla zachowania oznaczeń poprzedniego paragrafu należałoby dla tego przypadku przemianować funkcje  $\varphi$  i  $\psi$ . Rozważymy oba warianty. Rozpocznemy od małego  $k$ .

1. Dla małego  $k$  równanie (2.6) po wykorzystaniu własności symetrii dla pierwszej częstości harmonicznej przyjmie postać następującą:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_0^a \left\{ a_1 \left( 4 \frac{\pi^4}{a^4} - \alpha^2 \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + b_1 \frac{\pi^4}{a^4} \left[ -16 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 32 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} - 16 \cos \frac{2\pi y}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - b_1 \alpha^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = 0, \\
 (3.5) \quad & \int_0^a \left\{ \left[ -a_1 \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + b_1 \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - k a_1 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - k b_1 \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left[ - \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \right\}_{x=0} dy = \\
 & = \int_0^a \left\{ b_1 \frac{4\pi^2}{a^2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right)^2 - k a_1 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right\} dy = 0.
 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu znajdziemy:

$$(3.6) \quad a_1 \left( 1 - \alpha^2 \frac{a^4}{4\pi^4} \right) + b_1 \left( \frac{640}{9\pi^2} - \alpha^2 \frac{64a^4}{9\pi^6} \right) = 0, \quad a_1 = \frac{9\pi^2}{4ka} b_1,$$

skąd

$$(3.7) \quad \alpha^2 = 4 \frac{\pi^4}{a^4} \frac{1 + \frac{2560a}{81\pi^4} k}{1 + \frac{1024a}{81\pi^4} k}.$$

Rozwiązanie (3.7) jest ważne dla małych  $k$  ( $k$  — mały parametr). Gdy  $k \rightarrow 0$ , to

$$(3.8) \quad \alpha^2 = 4 \frac{\pi^4}{a^4}, \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{\rho} \frac{2\pi^2}{a^2}},$$

co pokrywa się z rozwiązaniem ścisłym. Wynika to stąd, że jak już wspomnieliśmy, funkcja  $\varphi$  jest funkcją własną dla częstości podstawowej płyty swobodnie podpartej.

Gdy  $k \rightarrow \infty$ , wówczas  $k$  przestaje być małym parametrem i wynik powinien być obarczony pokaźnym błędem. Rzeczywiście dla  $k \rightarrow \infty$ , mamy  $\alpha^2 = 16 \frac{\pi^4}{a^4}$

$$(3.9) \quad \omega = \frac{40.0}{a^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\varrho}},$$

co daje w stosunku do znanej wartości znalezionej na innej drodze  $\omega = \frac{36,1}{a^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\varrho}}$  błąd rzędu ponad 10%. Błąd taki dla częstości uważa się za duży. Błąd dla amplitud będzie w takim przypadku znacznie większy. Rozważmy teraz przypadek dużego  $k$ .

2. W przypadku dużego  $k$  należy zamienić rolami funkcje  $\varphi$  i  $\psi$  (mały parametr  $1/k$ ). Układ równań (2.6) przyjmie teraz postać różną od (3.5)

$$(3.10) \quad \int_0^a \int_0^a \left\{ a_1 \left( 4 \frac{\pi^4}{a^4} - \alpha^2 \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + b_1 \frac{\pi^4}{a^4} \left[ -16 \cos \frac{2\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 32 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a} - 16 \cos \frac{2\pi y}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \right] - \right. \\ \left. - b_1 \alpha^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \right\} \times \\ \times \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) dx dy = 0, \\ \int_0^a \left[ b_1 \frac{4\pi^2}{a^2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - k a_1 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right] \sin \frac{\pi y}{a} dy = 0.$$

Po scałkowaniu znajdujemy

$$(3.11) \quad a_1 \left( \frac{256}{9} \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{64}{9} \frac{a^2}{\pi^2} \alpha^2 \right) + b_1 \left( 32 \frac{\pi^4}{a^2} - \frac{9}{4} a^2 \alpha^2 \right) = 0, \quad a_1 = \frac{64}{3ak} b_1,$$

stąd

$$(3.12) \quad \alpha^2 = \frac{128}{9} \frac{\pi^4}{a^4} \frac{1 + \frac{512}{27} \frac{1}{\pi^2 ak}}{1 + \frac{16384}{243} \frac{1}{\pi^2 ak}}.$$

Rozwiązanie jest ważne dla bardzo dużych  $k$ . Gdy

$$(3.13) \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{to} \quad \alpha^2 = \frac{128}{9} \frac{\pi^4}{a^4} \quad \text{oraz} \quad \omega = \sqrt[3]{\frac{D}{\varrho}} \frac{36,9}{a^2},$$

co różni się nieznacznie od wartości ścisłej  $\frac{36,1}{a^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\varrho}}$ .

Gdy  $k \rightarrow 0$ , błąd ogólnie biorąc powinien być znaczny, analogicznie jak w poprzednim skrajnym przypadku. Jednakże tak miałaby się rzecz, gdyby funkcja  $\varphi$  nie była akurat pierwszą funkcją własną dla płyty swobodnie podparte.

W naszym natomiast przypadku, gdy  $k \rightarrow 0$ .

$$(3.14) \quad \alpha^2 = \frac{128}{9} \frac{\pi^4}{a^4} \frac{512 \cdot 243}{27 \cdot 16384} = 4 \frac{\pi^4}{a^4},$$

co pokrywa się ze ścisłą wartością. Gdyby  $\varphi$  nie była akurat pierwszą funkcją własną płyty swobodnie podpartej, lecz inną funkcją spełniającą analogiczne warunki brzegowe, wówczas błąd byłby znaczny, podobnie jak w pierwszym przypadku. Gdy natomiast  $k \neq 0$ , lecz jest małe, wówczas poprawki otrzymane dla  $\omega^2$  ze wzoru (3.7) będą bardzo bliskie rzeczywistych, otrzymane zaś ze wzoru (3.12) będą nieściśle. Tym samym ogólnie biorąc rozwiązanie typu (3.12) zachowuje moc dla dużego  $k$ . Oczywiście wyniki można by znacznie uściślić, gdyby pod uwagę wziąć nie dwie a np. cztery funkcje  $\varphi_i, \psi_i$ . W wielu przypadkach metoda powyższa prowadzi do celu również i wtedy, gdy nie wprowadzi się małego parametru. Jednakże ogólne rozstrzygnięcie tej kwestii nie jest proste i dlatego w pracy niniejszej nie wykraczamy poza metodę asymptotyczną.

Wyżej rozważyliśmy problem własny. Równie dobre wyniki otrzymuje się i dla przypadku poszukiwania amplitudy lub problemów statycznych. Na przykład, jeżeli rozważyć płytę z niniejszego przykładu przy pominięciu sił bezwładności i nieskończenie rozległą w kierunku osi  $y$  oraz obciążoną w środku skupioną siłą  $r$  ołożoną liniowo (stała) w kierunku  $y$  przy danych małych kątach  $\varphi$  na obu krańcach  $x = 0, a$ , to wówczas ugięcie pod siłą wyniesie: dla  $\varphi = 0$

$$(3.15) \quad w_m = \frac{Pa^2}{192D},$$

dla  $\varphi \neq 0$  według rozwiązania ścisłego

$$(3.16) \quad w_m = \frac{1}{D} \left( \frac{Pa^3}{192} + 0,25\varphi a \right),$$

dla  $\varphi \neq 0$  według metody proponowanej w pracy przyjmując  $\varphi$  i  $\psi$  dla zmiennej  $x$  identycznie jak w niniejszym przykładzie

$$(3.17) \quad w_m = \frac{1}{D} \left( \frac{Pa^3}{194} + 0,28\varphi a \right).$$

Jak widać, wyniki są dobre już przy najprostszej postaci przyjętego przybliżenia.

#### 4. Uwagi końcowe

Reasumując wydaje się, że zaproponowana metoda daje możliwość konstrukcji przybliżonych rozwiązań metodą ortogonalizacji za pomocą układu funkcji nie spełniających równań i warunków brzegowych, jeżeli udaje się wprowadzić mały parametr. Przy tym żąda się tylko zbieżności asymptotycznej do znanych rozwiązań Galerkinia i Trefftza. Metodę stosuje się do problemów z naturalnymi i dynamicznymi warunkami brzegowymi, przy czym w przypadku naturalnych warunków brzegowych odgrywa również istotną rolę, gdyż jak wiadomo, operując małą liczbą funkcji metoda Galerkinia prowadzi w takich przypadkach na ogół do istotnych

błędów. Metoda daje niekiedy również wyniki, nawet jeżeli nie uwzględnić małego parametru, jednakże ta sprawa stanowi problem otwarty, nie poruszony w pracy niniejszej. Zagadnienie to stanowi poważny problem natury ogólniejszej i nie było rozważane w pracy niniejszej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. Г. МИХЛИН, *Прямые методы в математической физике*, 1950.
2. С. Г. МИХЛИН, *Вариационные методы в математической физике*, 1957.
3. В. А. МЕДВЕДЕВ, *О сходимости метода Бубнова-Галеркина*, Прикл. Мат. Мех., 6, 27 (1963).

#### Р е з ю м е

#### О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ОРТОГОНАЛИЗАЦИОННОГО МЕТОДА

В работе обобщается ортогонализационный метод на случай системы функций, неудовлетворяющих дифференциальному уравнению ни краевым условиям. Метод основывается на введении малого параметра отклонений, а также на асимптотической сходимости.

#### S u m m a r y

#### ON A GENERALIZATION OF THE METHOD OF ORTHOGONALIZATION

In the paper the author discusses a generalization of the method of orthogonalization on the case of a system of functions which satisfy neither the differential equation nor the boundary conditions. The method rests upon the introduction of the small parameter deviations and the asymptotic convergence.

ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 września 1964 r.*

---

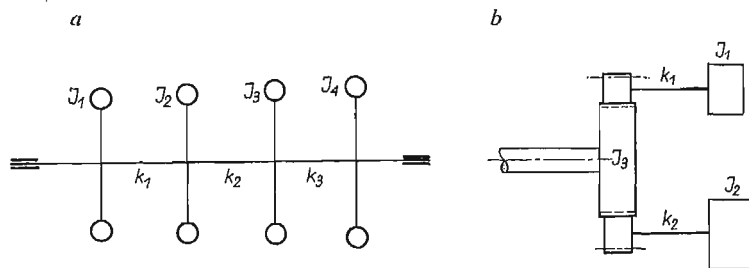
## SYNTEZA KINETYCZNA OGÓLNEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

WŁADYSŁAW BOGUSZ, JANISŁAW SKOWROŃSKI (WARSZAWA)

### Wstęp

Zagadnienie konstruowania maszyn i urządzeń mechanicznych na podstawie warunków optymalnych jest jednym z podstawowych problemów w przemyśle maszynowym. Konstruktorzy muszą realizować coraz bardziej skomplikowane warunki stawiane maszynom odnośnie ich ciężaru, wytrzymałości, trwałości, bezpieczeństwa i dokładności ich pracy. Korzystają przy tym z wyników badań naukowych, pomiarów i teorii układów mechanicznych. Tok postępowania jest skomplikowany i prowadzi od analizy przypuszczalnego modelu układu do syntezy i powtórnej analizy.

W artykule zajmiemy się kinetyczną syntezą ogólnego układu mechanicznego. Po sformułowaniu problemu podamy przegląd wyników badań w tej dziedzinie w oparciu o współczesną literaturę oraz możliwe podejścia do konkretnych zagadnień. Sformułowanie problemu oprzemy na modelu układu mechanicznego, który rozważany jest w pracach [62, 63, 64]. Model zastępujący rzeczywisty układ mechaniczny jest układem punktów materialnych połączonych ze sobą sprężynami, tłumikami dodatnimi i częściowo ujemnymi i obciążonych uogólnionymi siłami zewnętrznymi. W praktyce stosuje się dwa typy modeli: o połączeniu prostym i rozgałęzionym. Modelami o połączeniu prostym zastępuje się np. wały wykorbione, mosty, dźwigi oraz maszyny, w których przekazywanie mocy jest jednoliniowe.



Rys. 1

Modelami rozgałęzionymi zastępuje się urządzenia mechaniczne, w których występuje rozgałęzienie strumienia mocy, jak np. napęd śruby okrętowej turbinami niskiego i wysokiego ciśnienia oraz konstrukcje, w których jeden element jest połączony przynajmniej z trzema innymi elementami za pomocą więzów sprężystych. Dwa takie modele przedstawione są na rys. 1. Model 1a przedstawia wał wykor-

biony, a model 1b — napęd turbinami  $I_1$  i  $I_2$  śruby okrętowej. Przez  $I$  oznaczono momenty bezwładności, a przez  $k$  — połączenia sprężyste.

### 1. Zagadnienie syntezy kinetycznej

Ruch układu zastąpionego modelem może być opisany równaniem różniczkowym w postaci wektorowej

$$(1.1) \quad \ddot{q} + F(q, \dot{q}, t) = 0$$

z warunkami początkowymi  $(t_0, q_0, \dot{q}_0) \in \Omega_\alpha$ , gdzie  $q, \dot{q}$  oznaczają  $n$ -wymiarowe wektory, funkcja  $F(q, \dot{q}, t)$  określa pole wektorowe w obszarze otwartym  $\Omega$ , zawartym w czasoprzestrzeni  $(2n+1)$ -wymiarowej Euklidesa, zaś obszar  $\Omega_\alpha$  jest zawarty w  $\Omega$  i określony jest w następujący sposób:

$$(1.2) \quad \Omega_\alpha \{ |q_0| < \alpha, |\dot{q}_0| < \alpha, 0 \leq t_0 < +\infty \},$$

gdzie  $\alpha$  jest dowolną stałą. Dodatkowo przyjmijmy założenie, że dla układu (1.1) są spełnione warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań.

Zgodnie z własnościami przyjętego modelu mechanicznego operator  $F(q, \dot{q}, t)$  może być przedstawiony w postaci różnicy operatora charakterystyk i operatora wymuszenia:

$$(1.3) \quad F(q, \dot{q}, t) = \tilde{F}(q, \dot{q}) - G(q, \dot{q}, t).$$

Operator  $\tilde{F}$  można przedstawić w postaci

$$(1.4) \quad \tilde{F}(q, \dot{q}) = \Phi^p(|q|, \dot{q}) + \Phi^n(|q|, \dot{q}) + \Psi(q),$$

gdzie  $\Phi^p$  jest operatorem tłumienia dodatniego,  $\Phi^n$  — operatorem tłumienia częściowo ujemnego, które jest wynikiem działania zewnętrznego źródła energii, a  $\Psi$  jest operatorem sił sprężystych.

Odnosnie tych operatorów uzasadniono w pracach [62, 63, 64] pewne ich dodatkowe własności. Na podstawie tych własności przyjmijmy następujące założenia (1.5) i (1.6)

$$(1.5) \quad \Phi^p \dot{q} \geq 0, \quad \Phi^p(|q|, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi^p}{\partial \dot{q}} > 0, \quad \frac{\partial \Phi^p}{\partial |q|} > 0$$

dla  $q$  i  $\dot{q}$  należących do  $2n$ -wymiarowego podobszaru  $\Delta$  zawartego w  $\Omega$ ;

$$(1.6) \quad \Phi^n \dot{q} > 0, \quad \frac{\partial \Phi^n}{\partial \dot{q}} \geq 0, \quad \frac{\partial \Phi^n}{\partial |q|} \geq 0, \quad \Phi^n(|q|, 0) = 0$$

dla  $|\dot{q}| \in (Q, \infty)$  i  $q < \infty$ , gdzie  $Q$  jest pewną stałą, a  $q$  i  $\dot{q}$  należą do  $\Delta$ .

Nierówności (1.6) nie muszą być spełnione dla  $|\dot{q}| < Q$ , czyli  $\Phi^n$  w tym przedziale może być dowolnym operatorem. Zakładamy jednak, że istnieje pewna stała  $M^*$  zależna od  $Q$  i taka, że spełniona jest nierówność

$$|\Phi^n| < M^*(Q)$$

dla każdego  $q$  i  $\dot{q}$  należących do  $\Delta$ .

Odnosnie operatorów  $\Psi$  i  $G$  założymy

$$(1.7) \quad \Psi(q)q > 0, \quad \Psi(0) = 0$$



dla  $q$  i  $\dot{q}$  należących do  $\Delta$ , a

$$(1.8) \quad G(q, \dot{q}, t) \neq 0 \quad \text{dla} \quad t \neq 0.$$

W teorii drgań nieliniowych występują dwie grupy zagadnień. Do pierwszej należą zagadnienia istnienia ruchu rzeczywistego, opisanego równaniami, wyprowadzonymi na podstawie przyjętego modelu. Są to zagadnienia związane ze strukturą układu, charakterystykami oraz statecznością ruchu. Do drugiej grupy należy zagadnienie rozwiązania otrzymanych równań i oceny dokładności otrzymanych wyników. Na tle tych dwóch grup zagadnień rozwija się teoria analizy i syntezy.

Aby przejść od rzeczywistej konstrukcji do modelu i do równań opisujących ruch, stosujemy analizę strukturalną. Przy działaniu odwrotnym, a więc projektując konstrukcję na podstawie obranego modelu, stosujemy syntezę strukturalną. Oprócz tych dwóch operacji nad strukturą układu rozróżniamy jeszcze analizę kinetyczną i syntezę kinetyczną.

Analiza kinetyczna polega na badaniu przebiegu rozwiązań równań ruchu, zaś taki dobór operatorów w równaniu ruchu, aby otrzymać żadaną postać ruchu, jest syntezą kinetyczną. Do konstrukcji układu mechanicznego dochodzimy przez wielozwrotną analizę i syntezę kinetyczną i strukturalną.

Rozważmy jeden krok w tej procedurze, syntezę kinetyczną, zakładając że w wyniku analizy i syntezy strukturalnej otrzymaliśmy model zastępczy i równania ruchu w postaci (1.1) oraz analizą kinetyczną określiliśmy przebieg rozwiązania tych równań. Zadaniem syntezy kinetycznej jest wyznaczenie operatora  $F(q, \dot{q}, t)$  z pewnej dopuszczalnej klasy funkcji określonych w pewnym obszarze  $\Omega$  w ten sposób, aby ruch określony równaniami (1.1) spełniał z góry ustalone warunki. Oczywiście, że istnienie rozwiązania syntezy (istnienie operatora  $F$ ) zależy od warunków, które mają być zrealizowane przez układ. Jeżeli istnieje rozwiązanie syntezy, układ mechaniczny nazywamy syntezowalnym ze względu na żądane warunki. Klasa funkcji dopuszczalnych, określających operator  $F$ , nazywa się zakresem syntezowalności, a obszar  $\Omega$  — obszarem syntezowalności. Operator  $F$  spełniający warunki syntezy nazywa się funkcją syntezującą.

W celu rozwinięcia teorii tak określonej syntezy kinetycznej należy rozwiązać zagadnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązań oraz opracować metodę otrzymania rozwiązania. Trudności związane z tymi zagadnieniami można scharakteryzować następująco.

Układ (1.1) otrzymany w wyniku syntezy strukturalnej zawiera operator  $F$  należący do pewnej klasy funkcji, a więc ruch opisany układem (1.1) ma pewne ogólne własności. Jeżeli warunki syntezy kinetycznej są sprzeczne z tymi własnościami, to rozwiązanie syntezy nie istnieje.

Przypuśćmy np., że układ (1.1) opisuje ruch układu zachowawczego. Żądanie wyznaczenia funkcji  $F(q)$  w ten sposób, aby ruch zanikał, jest niemożliwe i synteza kinetyczna nie ma rozwiązania. Można oczywiście przytoczyć wiele przykładów, w których synteza nie ma rozwiązania i z tego względu każdą syntezę musi poprzedzać analiza kinetyczna w celu ustalenia zakresu syntezowalności i ogólnych własności ruchu.

Jeżeli operator  $F$  określa jedyną funkcję syntezy, to synteza nazywa się brzegową, w przypadku zaś, gdy określa on pewną podklasę w zakresie syntezywalności, synteza jest wewnętrzną. Przykładem syntezy brzegowej może być dobór funkcji  $\Psi(q) = k^2q$  w równaniu drgań układu:  $\ddot{q} + \Psi(q) + 2h\dot{q} = A \sin \omega t$  tak, aby amplituda drgań osiągała maksimum przy danych  $h > 0$  oraz  $\omega$ . Jedyną odpowiedzią jest tu  $k^2 = \omega^2$ .

Przykładem syntezy wewnętrznej jest taki dobór funkcji  $\Psi(\dot{q}) = 2h\dot{q}$ , aby ruch opisany równaniem  $\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2q = 0$  był oscylacyjny. Odpowiedź nie jest jedyną, gdyż otrzymujemy nierówność  $k^2 - h^2 > 0$ . W obu przykładach zakresem syntezywalności jest klasa funkcji liniowych.

Można ogólnie scharakteryzować synteze brzegową jako rozwiązanie problemu przez dobór ustalonych parametrów lub postaci operatora  $F$  bez możliwości dalszych zmian. Przy syntezie wewnętrznej mamy możliwości wyboru parametrów lub funkcji spośród funkcji syntezy, na przykład przez optymalizację. Z tego względu synteze kinetyczną często niesłusznie nazywa się optymalizacją.

Optymalizacja rozwinięta w teorii układów automatyki ma odmienny sens. Mając dany sygnał na wejściu szuka się w teorii optymalizacji operacji matematycznych, które należy zastosować na tym sygnale po to, aby na wyjściu spełniał on żądany warunek. Operacje matematyczne są wprawdzie funkcjami optymalizującymi, ale realizacja ich przez konstruktora jest dowolna. Wymaga to dalszej pracy konstruktora, którą można nazwać synteza, przy czym funkcja optymalizująca jest warunkiem syntezy.

Celem syntezy kinetycznej jest natomiast podanie konkretnych rozwiązań konstrukcyjnych dotyczących sił sprężystych, sił tłumienia lub sił wymuszających w modelu przedstawiającym maszynę. Zadaniem konstruktora jest jedynie dobranie elementów przedstawionych na modelu o określonych własnościach i zbudowanie z nich maszyny.

Mimo tej różnicy między optymalizacją a synteza kinetyczną, metody stosowane w optymalizacji można przenieść do syntezy zależnie od warunku syntezy oraz od modelu mechanicznego. Przypuśćmy dla przykładu, że w procesie syntezy kinetycznej należy otrzymać ruch opisany daną funkcją czasu dla danego modelu mechanicznego. W tym przypadku metoda minimum kwadratu średniej odchyłki stosowana w teorii optymalizacji może być przeniesiona bez modyfikacji do syntezy kinetycznej.

Omówimy obecnie pewne grupy zagadnień związanych z synteza kinetyczną. W modelu mechanicznym, którego ruch opisuje układ równań (1.1), występują dwa operatory  $\tilde{F}(q, \dot{q})$  i  $G(q, \dot{q}, t)$ . Pierwszy z nich określa charakterystyki układu, drugi jest operatorem wymuszającym ruch. Wiele zagadnień syntezy kinetycznej dotyczy wyznaczenia operatora  $\tilde{F}$  przy danym wymuszeniu  $G$  i żądanym przebiegu ruchu. Oznacza to, że mając model mechaniczny należy ustalić typ układu (liniowy, nieliniowy) oraz wyznaczyć jego charakterystyki sił sprężystych i tłumienia.

Z tego rodzaju zagadnieniem spotykamy się przy konstrukcji amortyzatorów i tłumików w pojazdach mechanicznych. Wymuszenie ruchu przez nierówności

jezdni można dla pewnych typów jezdni określić, a następnie w procesie syntezy można wyznaczyć charakterystyki amortyzatorów i tłumików przy warunku jazdy bez wstrząsów.

Tok rozwiązania tego zagadnienia powinien przebiegać następująco. Pojazd mechaniczny należy zastąpić modelem i ułożyć ogólne równania ruchu. Ten proces jest przedmiotem analizy i syntezy strukturalnej. Syntezę kinetyczną można przeprowadzić metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu można przyjąć układ liniowy i ustalić własności możliwych do zrealizowania ruchów. Jeżeli w zakresie tych własności można zrealizować żądany przebieg jazdy, to przystępujemy do określenia charakterystyk liniowych amortyzatorów i tłumików.

Z praktyki wiadomo, że ten prosty narzucający się tok postępowania, nie prowadzi do zadowalających wyników. W drugim przybliżeniu można przyjąć układ jako nieliniowy i uzupełnić funkcje liniowe wyrazami nieliniowymi.

Pozytywne rozwiązanie zagadnienia zależy w dużym stopniu od ujęcia matematycznego warunku syntezy, tzn. od matematycznego opisu jazdy spokojnej bez wstrząsów. Z tego opisu otrzymujemy równania, z których wyznaczamy operator  $\tilde{F}(q, \dot{q})$ . Do tej grupy zagadnień należą syntezy maszyn wibracyjnych, obrabiarek, dźwigarów, mostów, suwnic itd. przy odpowiednich warunkach syntezy.

Druga grupa zagadnień związana jest z wyznaczeniem operatora wymuszeń  $G(q, \dot{q}, t)$  przy danym operatorze  $\tilde{F}(q, \dot{q})$ , a więc przy danym polu sił. W tym przypadku operator  $G$  można uważać za operator sterujący i stosować metody z teorii sterowania. Do tej grupy należy zagadnienie przenoszenia pocisku z danego miejsca do celu. To zagadnienie przy przyjęciu specjalnej postaci równań (1.1) zostało rozwiązane w wielu pracach (np. [21, 23, 42]) i nazywa się sterowaniem «bangbang» lub «on-of».

W przemyśle hutniczym spotykamy się z tym zagadnieniem przy projektowaniu napędów: zwijarek blach, walcarek, młotów itd. Również do tej grupy zagadnień należą w przemyśle górniczym zagadnienia napędów maszyn wyciągowych, wrębiarek łańcuchowych, żerdzi wiertniczych itd. Oczywiście każde z tych zagadnień wymaga opracowania właściwej metody wyznaczenia funkcji syntezującej.

Trzecia grupa zagadnień łączy się z poprzednimi i dotyczy przypadków, gdy operatory  $\tilde{F}$  i  $G$  są częściowo ustalone i należy je tak określić, aby rozwiązania układu (1.1) wchodziły do danego obszaru po skończonym czasie. Są to zagadnienia procesów przejściowych, a więc rozruch i zatrzymywanie agregatów, pomiar wielkości szybkozmiennych, dostrajanie odbioru do zasilania, regulacja biegu maszyn itd. Chodzi tu o przeprowadzenie układu z jednego stanu w drugi w skończonym czasie.

Odnosnie tego zagadnienia przytoczymy pewne wyniki syntezy kinetycznej na podstawie prac [64, 66]. Weźmy pod uwagę równanie (1.1). Pomnożymy lewą stronę przez  $\dot{q}$  i korzystając z oznaczeń (1.3) i (1.4) oznaczymy przez  $N(q, \dot{q}, t)$  funkcję

$$(1.9) \quad N(q, \dot{q}, t) = G\dot{q} - \Phi^n \dot{q} - \Phi^p \dot{q},$$

gdzie  $G\dot{q}$  jest mocą pochodzącą od sił zewnętrznych,  $\Phi^n \dot{q}$  — mocą sił ujemnego tłumienia i  $\Phi^p \dot{q}$  — mocą sił tłumienia dodatniego.

Oznaczmy jeszcze przez  $N^p = G\dot{q} - \Phi^n \dot{q}$  moc zewnętrzną, a przez  $N^n = -\Phi^p \dot{q}$  moc sił tłumienia. Przy tych oznaczeniach otrzymamy:

$$(1.10) \quad N = N^p + N^n.$$

Oprócz założeń od (1.2) do (1.8) przyjmujemy dodatkowe, które można uzasadnić własnościami fizycznymi układów mechanicznych:

a) rozważamy obszar  $\Omega_\alpha$  taki, że dla każdego  $t = \text{const}$   $N$  jest monotoniczną funkcją  $q, \dot{q}$ ;

b) istnieje takie  $M > 0$ , że zachodzi nierówność  $|N^p(q, \dot{q}, t)| < M$  dla  $(q, \dot{q}) \in \Omega_\alpha$  czyli że moc sił zewnętrznych jest ograniczona;

c) w otoczeniu punktu  $O$  istnieje taki podobszar określony nierównością

$$0 < \varepsilon < q^2 + \dot{q}^2 < \eta^2(\mu),$$

że wzdłuż każdego rozwiązania należącego do tego podobszaru zachodzi nierówność

$$G\dot{q} - \Phi^n \dot{q} \geq \Phi^p \dot{q} + \mu^2,$$

gdzie  $\varepsilon, \mu$  są stałymi, a  $\eta$  jest stałą zależną od  $\mu$ .

Przy tych założeniach wykazano w pracy [64, 66] następujące twierdzenia:

1) istnieje jedyny podobszar  $\Omega_0 C \Omega_\alpha$  taki, że wszystkie rozwiązania wychodzące z  $\Omega_\alpha$  wchodzą do  $\Omega_0$  po skończonym czasie niezależnym od chwili początkowej  $t = t_0$ ;

2) istnieje podobszar  $\Omega'_0 C \Omega_\alpha$  taki, że wszystkie rozwiązania wychodzące z  $\Omega_\alpha$  pozostają na zewnątrz obszaru  $\Omega'_0$  po skończonym czasie zależnym od warunków początkowych.

Podobszar  $\Omega_0$ , do którego wchodzą rozwiązania, nazywamy obszarem granicznym. Granice tego obszaru oraz liczba jego wymiarów zależą od operatora tłumienia.

Jak wynika z powyższych twierdzeń, w procesie syntezy kinetycznej stwierdzono istnienie obszaru granicznego. Warunkiem syntezy w tym przypadku było żądanie wchodzenia rozwiązań po skończonym czasie. Można wysunąć dalsze warunki syntezy, na przykład aby  $\Omega_0$  sprowadzał się do położenia równowagi lub do cyklu granicznego itd. Spełnienie tych warunków jest możliwe przez odpowiedni dobór operatora tłumienia.

## 2. Metody stosowane w syntezie kinetycznej

Odnośnie metod rozwiązywania syntezy kinetycznej ogólnego układu mechanicznego należy stwierdzić, że ogólna metoda nie została dotychczas opracowana. Można jednak korzystać z metod matematycznych opracowanych dla podobnych zagadnień mechaniki teoretycznej. Do nich np. należą:

- 1) metody stosowane w teorii optymalizacji układów automatyki;
- 2) zasady wariacyjne klasycznej mechaniki;
- 3) metoda syntezy parametrycznej;
- 4) metody kolejnych przybliżeń;
- 5) metody energetyczne;
- 6) metoda eksperymentalno-teoretyczna.

Trzy pierwsze dotyczą ogólnego przypadku syntezy, trzy zaś ostatnie — pewnych przypadków szczególnych. Pierwsza grupa metod ma ograniczony zakres zastosowań

z tego powodu, że są one opracowane w literaturze przy założeniach liniowości układu równań ruchu. Wyczerpująco są te metody opisane w pracach [9–19].

Na szczególną uwagę zasługują metody opracowane dla rozwiązania nieliniowego problemu optymalizacji czasu przejścia układu z jednego położenia w drugie. Zagadnienie to rozwiązyali w swoich pracach BUSHAW, BELLMAN, KRASSOWSKI, GAMKREILIDZE, PONTRIAGIN, BOLTJANSKI i LA SALLE.

Również analiza funkcjonalna znalazła zastosowanie do rozwiązania powyższego problemu. Optymalne ujęcia tej metody można znaleźć w pracach [27, 29, 30, 31].

Zastosowanie zasad wariacyjnych mechaniki klasycznej przedstawione jest w pracach [3, 38, 39, 40]. Podstawą metody rozwiązania syntezy jest teoria mnożników Lagrange'a. Bliżej objaśnimy tę metodę w dalszej części artykułu.

Synteza parametryczna polega na ustaleniu grupy parametrów określających charakterystyki układu w taki sposób, aby otrzymać warunek syntezy. Opisana jest ona w pracach [22, 23].

Wiele prac z mechaniki teoretycznej i stosowanej dotyczy problematyki związanej właściwie z syntezą kinetyczną, mimo że autorzy nie używają tej nomenklatury wyraźnie. Dla przykładu można wymienić prace, w których zagadnienia są rozwiązane metodą  $\delta$ -delta. Jest to metoda pozwalająca na określenie parametrów układu równań ruchu ciągiem kolejnych przybliżeń. Metoda ta ma zastosowanie zwłaszcza w przypadku, gdy warunek syntezy jest sformułowany w postaci żądanej trajektorii ruchu.

Zastosowanie metod energetycznych w procesie syntezy opisane jest w pracy [24].

Ostatnia z wymienionych metod, metoda eksperymentalno-teoretyczna, znajduje obecnie coraz większe zastosowanie ze względu na możliwość wykorzystania aparatury pomiarowej, maszyn analogowych i cyfrowych. Konfrontacja wyników otrzymanych z eksperymentu z wynikami analizy kinetycznej prowadzi bardzo skutecznie do realizacji warunku syntezy. Przykłady zastosowania tej metody można znaleźć w pracach [25, 26].

Obecnie przejdziemy do bliższego opisanie trzech pierwszych metod, gdyż na ich tle sens syntezy kinetycznej występuje najwyraźniej.

Zagadnienie optymalizacji czasu przejścia układu z jednego położenia w drugie można sformułować następująco. Rozważmy układ równań różniczkowych opisujących ruch układu materialnego:

$$(2.1) \quad \dot{x} = f(x, u, t),$$

gdzie  $x$  jest wektorem o współrzędnych  $(x_1 \dots x_{2n})$  określonym w obszarze  $\Delta$ , zawartym w przestrzeni  $E^{2n}$ ,  $u$  jest wektorem o współrzędnych  $(u_1 \dots u_r)$  określonym w obszarze  $U$  zawartym w przestrzeni  $E^r$ ,  $f$  jest wektorem o współrzędnych  $(f_1 \dots f_{2n})$ , a  $f_i$  oraz  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ( $i, j = 1 \dots 2n$ ) są funkcjami rzeczywistymi i ciągłymi swoich zmiennych. Wektor  $u$  nazywa się wektorem sterującym. Każdemu wektorowi  $u$  odpowiada rodzina trajektorii opisana rozwiązaniami układu (2.1).

Zajmiemy się tylko tymi trajektoriami, które przechodzą przez dwa ustalone położenia układu  $x_0$  i  $x_1$ . Oczywiście nie każdemu wektorowi  $u$  musi odpowiadać ro-

dzina trajektorii, w której taka trajektoria się znajduje. Inaczej mówiąc, nie każdy wektor musi przeprowadzać układ z położenia  $x_0$  w położenie  $x_1$ . Z tego względu zajmiemy się tylko zbiorem takich wektorów  $u$ , które przeprowadzają układ z położenia  $x_0$  do położenia  $x_1$ . Ten zbiór wektorów  $u$  nazywamy zbiorem dopuszczalnym. Przypuśćmy, że dana jest pewna funkcja  $f_0(x, u, t)$  taka, że funkcjonał

$$(2.2) \quad I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t) dt$$

opisuje pewną własność ruchu.

Zagadnienie, które należy rozwiązać, polega na tym, aby ze zbioru wektorów dopuszczalnych  $u$  wybrać taki wektor, przy którym funkcjonał  $J$  posiada ekstremum. Przy ustalonym  $t_0$  czas  $t_1$  może być również ustalony lub można żądać, aby czas  $(t_1 - t_0)$  był najkrótszy. Rozwiązanie tego zagadnienia różnymi metodami można znaleźć w pracach [12–21]. Powyższy problem można sformułować w odniesieniu do układu (1.1). Zamiast wektora sterującego  $u$  można podstawić operator wymuszenia  $G(q, \dot{q}, t)$  i zachowując pozostałe założenia przyjąć jako warunek syntezy kinetycznej ekstremum funkcjonału (2.2).

Dowód istnienia rozwiązania tak sformułowanego problemu natrafia na istotne trudności. Warunki konieczne dla istnienia rozwiązania zagadnienia sformułowanego w odniesieniu do układu (2.1) nie mogą być spełnione w odniesieniu do układu (1.1). Z tego względu metody stosowane w optymalizacji czasu przejścia układu z jednego położenia w drugie nie mogą być bezpośrednio przeniesione do syntezy kinetycznej. Rozwiązanie tego problemu jest możliwe w oparciu o zasadę maksimum PONTIAGINA [15, 19] i programowanie dynamiczne BELLMANA [18, 27]. Jak wykazano w pracy [32], istnieje duża analogia między tymi dwiema metodami. Chcąc zastosować jedną z nich w syntezie kinetycznej należy wektor sterujący przyjąć w postaci  $u = Q(x)$  i rozważać układ

$$(2.3) \quad \dot{x} = f(x, t, Q(x)).$$

Podamy dwie metody, które można bezpośrednio zastosować w syntezie kinetycznej. Podstawą tych metod są równania Lagrange'a i Hamiltona. Równania (2.1) oraz funkcjonał  $J$  (2.2) napiszemy w postaci

$$(2.4) \quad g_i(x, \dot{x}, u, t) = \dot{x}_i - f_i(x, u, t) = 0, \quad i = 1 \dots 2n;$$

$$(2.5) \quad I = \int_0^T L[x(t), u(t), t] dt.$$

Funkcję Lagrange'a określimy wzorem

$$(2.6) \quad L_1 = L + \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i g_i,$$

gdzie  $\lambda_i$  są mnożnikami, które rozważamy jako funkcje czasu.

Jeżeli  $g_i(x, \dot{x}, u, t)$  są równe zero, czyli wzdłuż rozwiązań układu (2.4) funkcja  $L_1$  równa się  $L$  i obie te funkcje posiadają te same ekstrema. Funkcję  $L_1$  można rozważać jako funkcję zmiennych  $(x_i, u_j, \lambda_i)$  i napisać równania Lagrange'a

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \right) &= 0, & i = 1 \dots 2n, \\ \frac{\partial L_1}{\partial u_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{u}_j} \right) &= 0, & j = 1 \dots r, \\ \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) &= 0, & i = 1 \dots 2n. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja  $L_1$  nie zależy od  $\dot{u}$  i  $\dot{\lambda}$ , układ  $r$  równań sprowadza się do układu

$$(2.8) \quad \frac{\partial L_1}{\partial u_j} = 0,$$

układ  $2n$  zaś ostatnich równań jest identyczny z układem (2.4). Ogółem otrzymujemy  $(4n+r)$  równań, z których należy wyznaczyć  $2n$  zmiennych  $x$ ,  $r$  zmiennych  $u$  i  $2n$  zmiennych  $\lambda$ .

Tok rozwiązania przebiega następująco. Z drugiej grupy równań, które są równaniami algebraicznymi, należy wyznaczyć  $u$  jako funkcję  $x$  i  $\lambda$ . Po podstawieniu  $u$  do pozostałych równań należy z nich wyrugować  $\lambda$  i wyznaczyć trajektorię  $x$  o warunkach brzegowych  $x(0)$  i  $x(T)$ . Metoda powyższa jest teoretycznie prosta, lecz w zastosowaniach może prowadzić do bardziej skomplikowanych równań niż układ (2.4).

Druga metoda opiera się na równaniach Hamiltona. Przy oznaczeniach (2.4) i (2.5) dołączymy do układu (2.4) równanie

$$(2.9) \quad \dot{x}_{n+1} = L[x, u, t] = f_{n+1}(x, u, t).$$

Funkcję Hamiltona przyjmujemy w postaci

$$(2.10) \quad H = \sum_{i=1}^{n+1} p_i f_i(x, u, t),$$

gdzie  $p_i$  są funkcjami czasu.

Równania Hamiltona mają postać

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = 1 \dots n+1, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Równania (2.11) należy rozwiązać przy warunku

$$(2.12) \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1 \dots r.$$

Metoda rozwiązania układu (2.11) jest następująca. Z równań algebraicznych (2.12) obliczamy  $u$  jako funkcję  $x$  i  $p$ , a następnie wstawiamy do (2.11). Otrzymujemy  $(2n+2)$  równań pierwszego rzędu. Do rozwiązania tych równań potrzeba  $(2n+2)$

warunków brzegowych. Warunki te otrzymujemy z wartości  $x_i$  w czasie  $t_0 = 0$  oraz przyjmując  $p_1(T) = p_2(T) = \dots = p_n(T) = 0$ ,  $p_{n+1}(T) = 1$ . Wartość  $p_{n+1}$  przyjmujemy równą jedności, ponieważ zagadnienie polega na minimalizacji funkcji  $x_{n+1}$ .

Objaśnimy tę metodę na przykładzie.

Rozważmy układ o jednym stopniu swobody

$$(2.13) \quad \ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0.$$

Jako warunek syntezy przyjmiemy minimum funkcjonału

$$(2.14) \quad I = \int_0^{t_1} [F^2 + \dot{x}^2] dt,$$

gdzie  $t_1$  jest ustalone.

Równanie (2.13) napiszemy w postaci

$$(2.15) \quad \dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -F(x_1, x_2).$$

Do tych równań dodajemy trzecie

$$(2.16) \quad \dot{x}_3 = F^2 + x_2^2.$$

Funkcję  $F$  oznaczmy przez  $u$ . Funkcja Hamiltona ma postać:

$$(2.17) \quad H = p_1 x_2 - p_2 F(x_1, x_2) + p_3 (u^2 + x_2^2),$$

$$H = p_1 x_2 - p_2 u + p_3 (u^2 + x_2^2).$$

Równania (2.11) na  $\dot{x}_i$  pokrywają się z (2.15) i (2.16). Napiszemy równania na  $p_i$ :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 - 2p_3 x_2, \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}$$

Oprócz tych równań muszą być spełnione równania (2.12)

$$(2.19) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -p_2 + 2p_3 u = 0.$$

Równania powyższe należy rozwiązać przy warunkach brzegowych:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, & x_2(0) &= x_2^0, & x_3(0) &= x_3^0, \\ p_1(t_1) &= p_2(t_1) = 0, & p_3(t_1) &= 1. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania (2.18) otrzymujemy  $p_1 = 0$ , z trzeciego  $p_3 = 1$ , a z równania (2.19)  $p_2 = 2u$ . Po podstawieniu tych funkcji do drugiego równania (2.18) otrzymamy  $\dot{p}_2 = -2x_2$ , a po zróżniczkowaniu

$$(2.21) \quad \ddot{p}_2 = -2\dot{x}_2 = 2u = p_2.$$



Po rozwiązaniu otrzymujemy

$$(2.22) \quad p_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Z warunków brzegowych  $p_2(t_1) = 0$ ,  $\dot{p}_2(0) = -2x_2^0$  obliczamy  $C_1$  i  $C_2$ :

$$(2.23) \quad C_1 = -2x_2^0 \frac{e^{-2t_1}}{1 + e^{-2t_1}}, \quad C_2 = 2x_2^0 \frac{1}{1 + e^{-2t_1}}.$$

Po podstawieniu (2.13) do (2.12) otrzymamy rozwiązanie na  $p_2$ , a następnie  $u$ ,  $x_2$ ,  $x_1$ .

$$(2.24) \quad p_2 = \frac{2x_2^0}{1 + e^{-2t_1}} [e^{-t} - e^{t-2t_1}], \quad u = \frac{p_2}{2},$$

$$x_2 = \frac{x_2^0}{1 + e^{-2t_1}} [e^{-t} + e^{t-2t_1}], \quad x_1 = \frac{x_2^0}{1 + e^{-2t_1}} [e^{t-2t_1} - e^{-t}].$$

Z porównania  $x_1$  i  $u$  otrzymujemy

$$(2.25) \quad -x_1 = u = F.$$

Ten sam wynik otrzymamy posługując się równaniami Lagrange'a.

Jak wynika z powyższego przykładu, metody stosowane w optymalizacji układów mogą być użyte w syntezie kinetycznej, jeżeli warunek syntezy kinetycznej można zapisać w postaci minimalizacji funkcjonału. W tych przypadkach synteza jest syntezą brzegową.

Omówimy obecnie syntezę parametryczną. Przypuśćmy, że ruch układu opisany jest równaniem pierwszego rzędu

$$(2.26) \quad \dot{x}_i = f_i(x_1 \dots x_n, t, \mu_1 \dots \mu_r).$$

gdzie  $\mu_1 \dots \mu_r$ , są parametrami, które należy tak wyznaczyć, aby otrzymać żadaną własność ruchu. W odróżnieniu od poprzednio dyskutowanych zagadnień, w których występował wektor sterujący  $u$  zależny od czasu, parametry  $\mu_j$  nie zależą ani od czasu, ani od położenia układu. Mogą one określać pewne własności reologiczne modelu zastępczego. Często są to współczynniki wielomianów określających charakterystyki sił sprężystych i sił tłumienia.

Warunki syntezy mogą być stawiane różnorodnie, zależnie od żadanego przebiegu ruchu. Mogą to być żądania okresowości rozwiązań, ograniczoneści, stateczności w małym otoczeniu położenia równowagi, w skończonym otoczeniu lub w całym polu określoności funkcji  $f_i$ . Warunki te formułowane są za pomocą pewnych nierówności, które mają być spełnione przez parametry układu (2.26). W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie syntezy w postaci pewnego obszaru parametrów  $\mu_1 \dots \mu_r$ , ograniczonego lub nieograniczonego. Hiperpowierzchnia ograniczająca obszar rozwiązań dla parametrów  $\mu_1 \dots \mu_r$  nazywa się powierzchnią bifurkacji. Do parametrów tych należą np. prędkości krytyczne, tłumienie krytyczne, krytyczne przesunięcie układu itd, czyli takie wartości parametrów, dla których następuje zmiana jakościowa ruchu.

Parametryczna synteza ruchu jest przedmiotem wielu prac. Interesujące z punktu widzenia technicznego są przykłady omówione w pracach [48–61]. W tych wszystkich przypadkach synteza kinetyczna jest syntezą wewnętrzną.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na konieczność rozwiązania zagadnienia syntezy kinetycznej układów mechanicznych przy obciążeniach przypadkowych i charakterystykach określonych funkcjami przypadkowymi. Jak dotychczas na ten temat znane są jedynie wzmianki w literaturze, mimo że zagadnienie jest bardzo ważne, gdyż pracę taśmociągów koparek, kombajnów, walcarek itd. można prawidłowo rozpatrywać tylko przy założeniu obciążeń przypadkowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. Н. БЕРНШТАЙН, *Об уравнениях вариационного исчисления*, Усп. Мат. Наук, **8** (1961), 32-74.
2. С. LANCZOS, *The variational principle of mechanics*, Univ. of Toronto Press, Toronto 1949.
3. R. M. ROSENBERG, *An optimum rocket trajectories and the calculus of variations*, Aerospace Engng, **10**, **19** (1960), 20-21.
4. V. G. SZEVENELY, *The generalized universe problem of orbit computation*, Proc. II Intern. Space-Sci. Symp., Florence, April 10-14, 1961, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1961.
5. Н. И. АНДРЕЕВ, *Метод определения оптимальной динамической системы по критерию экстремума функционала представляющего заданную функцию от нескольких других функционалов*, Труды I Конгресса ИФАС, Москва 1960.
6. J. M. SKOWROŃSKI, *The possibility of synthesis of some strongly nonlinear mechanical systems*, Nonlin. Vibr. Problems, **1** (1960), 59-68.
7. J. M. SKOWROŃSKI, *The problem of size of limit domain for nonlinear mechanical system*, Proc. II Intern. Conf. on Nonlin. Vibr., Warsaw 1962, Nonlin. Vibr. Problems, **5** (1963).
8. W. BOGUSZ, J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *The kinetic synthesis problem for general mechanical systems*, Bull. Politechnic Institute Jassy, Roumania, 1964, w druku.
9. R. E. KALMAN, *Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems*, Trans. ASME, **3**, **79** (1957), 553-566.
10. R. E. KALMAN, *On the general theory of control systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.
11. K. MAGNUS, *Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs und Regelungs Systeme*, VDJ-Forschungsheft 451, Ausgabe B, **21** (1955).
12. E. V. LEE, L. MARCUS, *Optimal control for nonlinear processes*, Arch. Rat. Mech. Anal., **1**, **8** (1961), 36-58.
13. E. V. LEE, L. MARCUS, *On the existence of optimal controls*, Trans. ASME, Ser. D, **1**, **84** (1962), 13-22.
14. Y. H. KU, *Nonlinear control systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.
15. Р. Ю. БОЛТЯНСКИ, Р. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Л. С. ПОНТЯГИН, *Теория оптимальных процессов*, Изв. АН СССР, Мат., **24** (1960), 3-42.
16. Н. Н. КРАССОВСКИЙ, *Проблема оптимального управления в нелинейных системах*, Прикл. Мат.-Мех., **2**, **23** (1959), 209-229.
17. E. V. LEE, *Methods of optimum feedback control*, Univ. of Minnesota, Thesis, Minneapolis 1960.
18. R. BELLMAN, *Dynamic programming*, Princeton University Press, 1957.
19. Л. С. ПОНТЯГИН, *Математическая теория оптимальных процессов*, ГИФиз-Мат. Лит., Москва 1961.
20. А. ЛУРЬЕ, *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования*, ГИТТЛ, 1951.
21. J. P. LA SALLE, *The time optimal control problem*, Contributions to Theory of Nonlinear Oscillations, V Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1960.

22. IN. J. NEIMARK, *The dependence on parameters of periodical motions*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.
23. N. N. KRASSOWSKI, *The parameter choice for optimal stable systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.
24. В.М. ПОНОМАРЕВ, *Энергетические характеристики процессов регуляции в автоматических системах*, Изв. АН СССР, ТН, **6** (1959), 134–140.
25. P. W. SMITH, C. J. MALME, C. M. GOGOS, *Nonlinear response of a simple clamped panel*, S. Acoust. Soc. Amer., **33** (1961), 1476–1482.
26. W. BOGUSZ, *The inverse problem of stability of certain mechanical system*, Proc. III Conference on Nonlin. Vibrations, Berlin 1964, to appear.
27. R. BELLMAN, *Functional equations in the theory of dynamic programming* — successively: Proc. Nat. AC. Sci, USA, **43** (1957), 839–841; Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 435–440; Duke Math. J., **27** (1960), 55–70; Rendiconti Circ. Math. Palermo, Ser. II, **8** (1959), 1–3.
28. Ю.Е. ЦИПКИН, *Теория импульсных систем*, Москва 1958.
29. Н.Н. КРАССОВСКИЙ, *К теории оптимального регулирования*, Автом. и Телемех, **18** (1957), 960–970.
30. R. KULIKOWSKI, *Concerning the synthesis of the optimum nonlinear control systems*, Bull. Acad. Polon. Sci, **6**, **8** (1959) 391–399.
31. R. KULIKOWSKI, *Synthesis of a class of optimum control systems*, Bull. Acad. Polon. Sci., **11**, **7** (1959), 663–671.
32. S. L. CHANG, *Dynamic programming and Pontryagin's maximum principle*, AFOSR 865, (N. Y.-Univ., Dep. Electr. Engng TR 400-32), June 1961, 15.
33. Л. РЕЗОНЕР, *Принцип максимума Понтрягина в теории оптимальных систем*, Авт. и Телемех., **5**, **10**, **11**, **12**, **20** (1959).
34. R. BELLMAN, *The mathematical theory of control processes*, Modern Math. for Eng., Ser. II, New-York 1961, 194–212.
35. I. X. РОЙТЕНБЕРГ, *Некоторые задачи теории динамического программирования для нелинейных систем*, Прикл. Мат.-Мех., **26** (1962), 419–430, 613–630.
36. Т. ОДАНАКЕ, *Prediction theory and dynamic programming*, S. Operations Res. Soc. Japan, **2** (1959), 80–92.
37. J. V. ROSEN, *The gradient projection method for nonlinear programming*, J. Soc. Indust. Appl. Math., **8** (1960), 181–217.
38. В.А. ТРОИЦКИЙ, *Задача Лагранжа вариационного исчисления и теория оптимальных систем*, Наук.-Техн. Информ. Бюл. Ленингр. Политехн. Инст., **7**, 1961, 58–64.
39. В.А. ТРОИЦКИЙ, *Вариационные задачи оптимизации...* Прикл. Мат. Мех., **26** (1962), 29–38, 431–443.
40. ЧЖАН-СЫ-ИН, *К теории оптимального регулирования*, Прикл. Мат. Мех., **25** (1961).
41. А.М. ЛЕТОВ, *Аналитическое конструирование регуляторов*, Автом. и Телемех., **4**, **21** (1961), 436–441; нр 5 — 561–568; нр 6 — 661–665; **4**, **22** (1961), 425–435.
42. Г. ЛЕИТМАН, *On a classe of variational problems in rocketflight*, J. Aerospace Sci, **9** (1959), 586–591.
43. В.А. ТРОИЦКИЙ, *Задача Майер-Болц вариационного исчисления и теория оптимальных систем*, Прикл. Мат. и Мех., **4**, **25** (1961), 668–679.
44. Е.Г. АЛЬБЕРХТ, *Об оптимальной стабилизации*, Прикл. Мат. Мех., **25** (1961).
45. R. E. KALMAN, J. E. BERTRAM, *Control system analysis and design via the second Liapunov method*, Trans. ASME, **2**, **82 D** (1960), 371–400.
46. S. S. L. CHANG, *Kinetic Liapunov function for stability analysis of nonlinear control systems*, Trans. ASME, **1**, **83 D** (1961), 91–94.
47. Л. РЕЗОНЕР, *О вариационных методах исследования качества систем управления*, Труды I Конгресса ИФАЦ, Москва 1960.

48. В.В. БОЛОТИН, *Критические скорости в нелинейных проблемах аэро-упругости*, Наук. Докл. Высшей Школы Маш., 3, 1958, 25-29.
49. R. L. SWAIM, *A note of the effect of a time varying forward flight velocity on a bending torsion-stability of a supersonic wing*, J. Aero-Space Sci., 11, 28 (1961), 906-907.
50. R. WIŚNIEWIECKI, *Nonlineare optimization des serve*, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., 44 (1958), 493-502.
51. IN. J. NEIMARK, *The parameter-dependence of periodical motions*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.
52. N. N. KRASSOVSKI, *Optimal parameter selection for stable systems*, Automatic and Remote Control, Butterworths, London 1961.
53. D. G. LEVIS, *On the perturbation of a periodic solution when the variational system has non-trivial periodic solution*, I. Rot. Mech. Anal., 5, 4 (1955), 795-815.
54. П.А. КУЗМИН, *Устойчивость при параметрических возмущениях*, Прикл. Мат.-Мех., 1, 21 (1957), 129-132.
55. О.А. ЗЕНТЬКОВ, *Исчисляемый систем дифф-уравнений с изменяющимися параметрами*, Мат. Сборник, 49/91 (1959), 317-330.
56. М. НУКУНАРА, *Sur les equ fonctionnelles contenant un parametre*, I. Fac. Sci, Hokkaido Imperial Univ., Ser. I, 3-4, 5 (1937), 107-122.
57. М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, *Об исследовании точек бифуркации нелинейных уравнений*, Труды III Съезда Матем., АН СССР, 1 (1956), 204-205.
58. J. JARNIK, J. KURZWEIL. *Continuous dependence on a parameter*, Contrib. to the Theory of Nonlin. Oscill., Vol. 5, Princeton Univ. Press, 1960, 25-35.
59. А.М. САМОЙЛЕНКО, *Об одном случае непрерывной зависимости от параметра*, Укр. Мат. Журн., 3, 15 (1962), 289-298.
60. H. A. ANTOSIEWICZ, *Continuous parameter dependence*, University of Southern California T. Rep. 1960.
61. А.Н. ТИХОНОВ, *Зависимость уравнений от параметров*, Труды III Съезда Матем. АН СССР, 2 (1956).
62. J. M. SKOWROŃSKI, S. ZIEMBA, *Certain properties of mechanical model of structures*, Arch. Mech. Stos., 2, 11 (1959).
63. J. M. SKOWROŃSKI, *The damping influence on the character of strongly nonlinear mechanical systems*, Nonlin. Vibr. Problems, 2 (1960).
64. J. M. SKOWROŃSKI, *The character of motion of general mechanical systems*, Nonlin. Vibr. Problems, 4 (1962) 4-100.
65. J. M. SKOWROŃSKI, *Structural investigation...*, Nonlinear Vibr. Problems, 6 (1964).
66. J. M. SKOWROŃSKI, *Some remarks about the character of motions...*, Proc. IV Nat. US Congress of Appl. Mech., 1962, 387-390.

### Summary

#### KINETIC SYNTHESIS OF GENERAL MECHANICAL SYSTEMS

The problem under consideration is connected with designing and constructing of machines and mechanisms. The designing data should include, besides the destination of the machine, the optimal requirements as regards the gabarites, endurance, precision of the process, power, expenses etc. The imposed requirements are fulfilled with the aid of the kinetic synthesis which consists in the proper choice and mutual connection of machine elements according to the assumed conditions.

Recent results concerning the problem have been presented. The considerations are confined to mechanical systems the motion of which can be described by a finite number of differential equations. Polish nomenclature of the synthesis problem has been introduced, the methods used in other fields of mechanical analysis with possible applications to the problem are quoted, and original

results of the authors' research are given. In particular, the attention is drawn to the possibility of utilizing the results obtained in the steering and optimization theory of linear and non-linear systems. The method based upon the Hamilton equations is illustrated by an example.

In addition to the methods described above, other problems which can be solved by means of the kinetic synthesis have been formulated in the paper.

### Р е з ю м е

#### КИНЕТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОБЩЕЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задача рассмотренная в работе имеет связь с проектированием и конструированием машин и механических установок.

Проектные предположения должны заключать, кроме предназначений машины, условия оптимальности конструкционных решений, по габаритам, прочности, точности реализации процесса, мощности, стоимости и т.д. Реализация поставленных условий проводится в процессе кинетического синтеза, который состоит в соответствующем подборе элементов машины и их взаимной увязке согласно продиктованным условиям.

В работе представлены современные результаты исследовательских работ по постановке вопроса синтеза и методов его решения. В рассуждениях принималась во внимание только лишь механическая система, движение которой можно описать конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, основываясь на литературе, вводится польская номенклатура понятий употребляемых в вопросах синтеза. Приводятся возможные для использования методы, применяемые в других областях анализа нелинейных систем и даются результаты исследований, проведенных авторами. В особенности, обращается внимание на возможность использования результатов исследований в теории уравнения и оптимизации линейных и нелинейных систем. Метод, основанный на уравнениях Гамильтона поясняется на примере.

Кроме приведенных методов в работе дается формулировка задач, которые можно решать в процессе кинетического синтеза.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1964 r.*



◊ PEWNYM SPOSOBIE PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA NIELINIOWYCH  
ZAGADNIENI PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

ZYGMUNT THRUN (GDAŃSK)

1. Wstęp

W zagadnieniach przewodnictwa ciepłego, w których granice zmian temperatur nie są zbyt duże, można przyjąć zwykle z dobrym przybliżeniem, że własności termiczne przewodzącego materiału są niezależne od temperatury. Założenie to upraszcza znacznie matematyczne traktowanie problemu. Jednakże w wielu praktycznie ważnych zagadnieniach technicznych (np. ruch i tarcie przy dużych szybkościach, reakcje chemiczne ośrodka, przewodzenie ciepła wywołanego reakcjami termojądrowymi, przewodniki prądu) takie upraszczające założenia mogą prowadzić do poważnych różnic między obliczonym a rzeczywistym rozkładem temperatur. Dla zależnych od temperatury  $T$  współczynników przewodnictwa  $K$  i pojemności cieplnej  $c$  (iloczyn ciepła właściwego i gęstości materiału) równanie przewodnictwa ciepłego staje się nieliniowe. Dla szczególnego przypadku jednowymiarowego i dla pół-przestrzeni przy parabolicznej zależności współczynników  $c$ ,  $K$  od temperatury  $T$  AWBERY [1] zredukował to równanie nieliniowe do zwyczajnego równania różniczkowego. Następnie HOPKINS [2] podał sposób przybliżonego rozwiązania, jeżeli znane jest rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia liniowego. Najbardziej wyczerpująco i wszechstronnie problem ten opracował BIOT [3] przy zupełnie odmiennym podejściu do zagadnienia na podstawie rachunku wariacyjnego. Niniejsza publikacja ma za zadanie podać przybliżone rozwiązanie zagadnienia przez redukcję do układu zwyczajnych równań nieliniowych.

2. Równania różniczkowe zagadnienia

Dla przypadku anizotropii termicznej równaniem różniczkowym przewodnictwa ciepłego w danym ośrodku  $\Omega$  jest [4]<sup>1</sup>

$$(2.1) \quad L(T) - A/c = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{c(T)} \sum_{s=x,y,z} \frac{\partial}{\partial s} \left[ K_s(T) \frac{\partial T}{\partial s} \right] - \frac{A}{c(T)} = 0,$$

gdzie przez  $A$  oznaczono ciepło generowane przez jednostkę objętości ośrodka  $\Omega$  w jednostce czasu. Osie układu współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są tutaj tzw. «głównymi osiami przewodnictwa», a wielkości  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  «głównymi współczynnikami przewodnictwa» dla danej anizotropii termicznej ośrodka. Współczynniki  $K$  i  $c$  są ponadto funkcjami temperatury.

<sup>1</sup> Str. 21, wz. (4).

Niech poza tym będzie warunek początkowy w całym obszarze  $\Omega$  w postaci

$$(2.2) \quad t = 0, \quad T = F(x, y, z),$$

oraz warunki na brzegu tegoż obszaru

$$(2.3) \quad \sum_{s=x,y,z} h_s \frac{\partial T}{\partial s} + hT = g(x, y, z, t).$$

Zazwyczaj wystarczająco dokładne jest przyjęcie liniowej zależności współczynników przewodnictwa i pojemności cieplnej od temperatury w postaci

$$(2.4) \quad c = c_0(\alpha + \beta T), \quad K_s = K_{0s}(\alpha'_s + \beta'_s T), \quad s = x, y, z.$$

W powyższym wzorze współczynniki  $c_0$  i  $K_{0s}$  przedstawiają odpowiednio pojemność i przewodnictwo cieplne materiału ośrodka przewodzącego ciepło przy pewnej danej wartości porównawczej temperatury, zaś  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  są stałymi współczynnikami. Możliwe jest także uwzględnienie zależności wyższego rzędu

$$c = c_0(\alpha + \beta T + \gamma T^2), \quad K = K_0(\alpha' + \beta' T + \gamma' T^2).$$

Ograniczymy się jednakże w dalszych rozważaniach do zależności liniowych (2.4). Przybliżone rozwiązanie zagadnienia możemy założyć w postaci wyrażenia:

$$(2.5) \quad T_{(x,y,z,t)}^* = \varphi_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(x, y, z).$$

Jeżeli powyższe przybliżone rozwiązanie oraz zależności (2.4) podstawimy do równania (2.1) i założymy ponadto, aby dla każdej funkcji  $\varphi_k$  spełniona była zależność ortogonalności

$$(2.6) \quad \iiint_{\Omega} \left[ L(T^*) - \frac{A}{c} \right] \varphi_k dx dy dz = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

to otrzymamy następujący układ nieliniowych, zwyczajnych równań różniczkowych:

$$(2.7) \quad \sum_{i=1}^n \left[ \dot{a}_i \alpha A_{ik} + \dot{a}_i \beta \left( C_{ik} + \sum_{j=1}^n a_j D_{ijk} \right) + \right. \\ \left. + a_i \sum_{s=x,y,z} \frac{K_{0s}}{c_0} \left( \alpha'_s B_{iks} + \beta'_s E_{iks} + \beta'_s \sum_{j=1}^n a_j G_{ijks} \right) \right] = Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

W powyższych równaniach wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(2.8) \quad \dot{a}_i = \frac{da_i}{dt}, \quad A_{ik} = \iiint_{\Omega} \varphi_i \varphi_k dx dy dz, \quad C_{ik} = \iiint_{\Omega} \varphi_0 \varphi_i \varphi_k dx dy dz, \\ D_{ijk} = \iiint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \varphi_k dx dy dz, \quad B_{iks} = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s^2} \varphi_k dx dy dz, \\ E_{iks} = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\varphi_0 \varphi_i) \varphi_k dx dy dz, \quad G_{ijks} = - \iiint_{\Omega} \varphi_k \frac{\partial}{\partial s} \left( \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} \right) dx dy dz, \\ Z_k = \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{A}{c_0} + \sum_{s=x,y,z} \frac{K_{0s}}{c_0} \left[ (\alpha'_s + \beta'_s \varphi_0) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial s^2} + \beta'_s \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} \right)^2 \right] \right\} \varphi_k dx dy dz.$$



Warunek początkowy (2.2) możemy spełnić w ten sposób, ażeby średni kwadrat błędu

$$(2.9) \quad I = \iiint_{\Omega} \left[ F(x, y, z) - \varphi_0 - \sum_{i=1}^n a_i(0) \varphi_i(x, y, z) \right]^2 dx dy dz$$

był jak najmniejszy. Postulat osiągnięcia minimum całki (2.9) prowadzi do znanych warunków koniecznych:

$$(2.10) \quad \frac{\partial I}{\partial a_i(0)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jest to układ równań, z którego możemy wyznaczyć wielkości  $a_i(0)$ .

Dla przypadku izotropii termicznej  $K_x = K_y = K_z = K(T)$  równanie (2.1) można znacznie uprościć, wprowadzając bowiem nową zmienną niezależną  $\theta = \int_0^T K(T) dT$  i podstawiając stąd do równania (2.1) związki  $\partial\theta/\partial s = K\partial T/\partial s$  ( $s = x, y, z, t$ ), otrzymamy równanie uproszczone

$$(2.11) \quad \frac{c}{K} \frac{\partial\theta}{\partial t} - \sum_{s=x,y,z} \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} - A = 0.$$

Równanie to można traktować jako ważne dla ośrodka o jednostkowym przewodnictwie cieplnym i o współczynniku pojemności cieplnej:

$$\bar{c} = \frac{c}{K}(\theta).$$

Z powyższego wynika, że nieliniowe zagadnienie dla ośrodka o przewodnictwie i pojemności cieplnej, zależnych od temperatury, można zawsze sprowadzić do przypadku o stałym współczynniku przewodnictwa cieplnego. Dlatego też w przypadkach izotropii termicznej wystarczy rozważać zagadnienia, w których tylko współczynnik pojemności cieplnej  $c$  jest zależny od temperatury. Układ równań różniczkowych (2.7) uprości się wówczas przez podstawienie

$$(2.12) \quad \beta'_s = 0, \quad \alpha'_s = 1, \quad K_s = K_{0s} = K_0,$$

do postaci

$$(2.13) \quad \sum_{i=1}^n \left[ \dot{a}_i \alpha A_{ik} + \dot{a}_i \beta \left( C_{ik} + \sum_{j=1}^n a_j D_{ijk} \right) + a_i B_{ik} \right] = Z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Współczynniki  $B_{ik}$  i  $Z_k$  oznaczają tu:

$$(2.14) \quad B_{ik} = \sum_{s=x,y,z} \frac{K_{0s}}{c_0} B_{iks} = -\kappa_0 \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) \varphi_k dx dy dz,$$

$$Z_k = \iiint_{\Omega} \left[ \frac{A}{c_0} + \kappa_0 \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} \right) \right] \varphi_k dx dy dz, \quad \kappa_0 = \frac{K_0}{c_0}.$$

## 3. Wyznaczanie pierwszego przybliżenia

Zgodnie z założeniem (2.5) pierwsze przybliżenie przyjmujemy w postaci

$$(3.1) \quad T_1^* = \varphi_0(x, y, z) + a_1(t)\varphi_1(x, y, z).$$

Rozważmy najpierw zagadnienie ośrodka termicznie izotropowego. Układ równań (2.13) sprowadza się w tym przypadku do jednego równania nieliniowego

$$(3.2) \quad \dot{a}_1 \alpha A_{11} + a_1 B_{11} = Z_1 - \beta \dot{a}_1 (C_{11} + a_1 D_{111}),$$

dla którego można otrzymać ściśle rozwiązanie.

a. Dla szczególnego przypadku  $Z_1 = 0$ , równanie (3.2) można scałkować elementarnie otrzymując rozwiązanie przy warunku początkowym:  $t = 0$ ,  $a_1 = a_1(0)$  w postaci

$$(3.3) \quad a_1(t) = a_1(0) \exp \left\{ \frac{-B_{11}t + \beta D_{111}[a_1(0) - a_1]}{\alpha A_{11} + \beta C_{11}} \right\}.$$

b. Dla ogólnego przypadku  $Z_1 \neq 0$  równanie (3.2) drogą podstawienia

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \beta D_{111} v_1(\lambda) &= \beta [D_{111} a_1(t) + C_{11}] + B_{11}t + \alpha A_{11}, \\ \beta D_{111} \lambda &= \int Z_1(t) dt + \frac{B_{11}}{D_{111}} \left( C_{11} + \frac{\alpha}{\beta} A_{11} \right) t, \end{aligned}$$

można doprowadzić do prostszej postaci

$$(3.5) \quad \frac{dv_1}{d\lambda} \left( v_1 - t \frac{B_{11}}{\beta D_{111}} \right) = 1.$$

Tak na przykład dla ośrodka, w którym ciepło jest generowane tylko w chwili początkowej,  $t = 0$ , w intensywności  $A(x, y, z, t) = A_0(x, y, z)\delta(t)$  ( $\delta$  — funkcja Diraca) w przypadku  $\varphi_0 = 0$  mamy

$$\int Z_1(t) dt = \int \frac{\delta(t)}{c_0} \left( \int \int \int A_0 \varphi_1 dx dy dz \right) dt = \int F_0 \delta(t) dt = F_0.$$

Stąd za pomocą (3.4) otrzymamy z równania (3.5) równanie liniowe

$$\frac{d\lambda}{dv_1} + \frac{\beta D_{111}}{(\alpha A_{11} + \beta C_{11})} \lambda = v_1 + \frac{F_0}{(\alpha A_{11} + \beta B_{11})},$$

z warunkiem początkowym  $\lambda = 0$ ,  $\beta D_{111} v_1(0) = \alpha A_{11} + \beta C_{11}$  i o znanym rozwiązaniu.

Dla różnych równań różniczkowych typu (3.5) gotowe rozwiązania są podane w literaturze [5]<sup>2</sup>.

c. *Przykład.* Ogrzewanie muru, którego jedna ściana jest utrzymywana stale w temperaturze  $T = \theta_0$ , a druga równoległa ściana w odległości  $l$  niech będzie izolowana. Warunek początkowy jest dany w postaci  $t = 0$ ,  $T = 0$ . Początek współrzędnej  $x$  zakładamy na ścianie o temperaturze  $\theta_0$ . Zgodnie z warunkami brzegowymi przyjmujemy pierwsze przybliżenie:

$$(3.6) \quad T_1^* = \theta_0 + a_1(t) \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

<sup>2</sup> Str. 236–245.

Po wyznaczeniu współczynników (2.8) i (2.14) oraz stałej początkowej  $a_1(0)$  z warunku (2.10) w postaci  $a_1(0) = 4\theta_0/\pi$  rozwiązanie (3.3) przyjmie postać następującego związku:

$$(3.7) \quad a_1(t) = \frac{-4\theta_0}{\pi} \exp \left\{ \frac{-1}{(\alpha + \beta\theta_0)} \left[ \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \kappa_0 t + \beta \frac{8}{3\pi} \left( \frac{4\theta_0}{\pi} + a_1 \right) \right] \right\}.$$

Za pomocą tej zależności można też wyznaczyć tzw. «czas przejścia», po którym ściana izolowana ( $x = l$ ) zaczyna się ogrzewać. Ponieważ w tym przypadku musi być  $\theta_0 + a_1(t_1) = 0$ , więc otrzymamy

$$(3.8) \quad \frac{\kappa_0 t_1}{l^2} = (\alpha + \beta\theta_0) \frac{4}{\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\pi} \right) - \beta\theta_0 \frac{32}{3\pi^3} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia liniowego otrzymamy także ze związków (3.7) i (3.8) przez podstawienie  $\alpha = 1, \beta = 0$ :

$$(3.9) \quad a_1(t) = \frac{-4\theta_0}{\pi} \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \kappa_0 t \right], \quad \frac{\kappa_0 t_1}{l^2} = \frac{4}{\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\pi} \right) = 0,0979.$$

Dla porównania z wynikami BIOTA założmy, że dla granicznych zmian temperatur występujących w danym przykładzie  $T = -\theta_0 \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)$  i  $T = \theta_0$  współczynnik pojemności cieplnej zmienia się od  $c = c_0$  do  $c = 2c_0$ , czyli  $\alpha = \left( 2 - \frac{\pi}{4} \right), \beta = \pi/4\theta_0$ .

Rozwiązanie (3.7) oraz «czas przejścia» (3.8) przyjmą tu postać

$$(3.10) \quad a_1(t) = \frac{-4\theta_0}{\pi} \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \frac{\kappa_0 t}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{4}{\pi} + \frac{a_1}{\theta_0} \right) \right],$$

$$\frac{\kappa_0 t_1}{l^2} = \frac{8}{\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\pi} \right) - \frac{8}{3\pi^2} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) = 0,122.$$

Powyższy «czas przejścia» otrzymamy też z (3.9) przez podstawienie wartości współczynnika pojemności cieplnej równej  $1,25 c_0$ . BIOT<sup>3</sup> otrzymał wynik  $\kappa_0 t_1/l^2 = 0,113$ .

d. *Przykład.* Ochładzanie muru z poprzedniego przykładu. Przyjmujemy teraz warunek początkowy  $t = 0, T = \theta_0$  oraz warunki brzegowe  $x = 0, T = 0$  i  $x = l, \partial T/\partial x = 0$ . Pierwsze przybliżenie ze względu na jednorodne warunki brzegowe zakładamy w postaci wyrażenia;

$$(3.11) \quad T_1^* = a_1(t) \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

Po wyznaczeniu współczynników  $A_{11}, B_{11}, D_{111}$  ze wzorów (2.8), (2.14) oraz z zależności (2.10) stałej początkowej  $a_1(0) = 4\theta_0/\pi$ , rozwiązanie zagadnienia (3.3) otrzymamy w postaci następującej:

$$(3.12) \quad a_1(t) = \frac{4\theta_0}{\pi} \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \frac{\kappa_0 t}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{8}{3\pi} \left( \frac{4\theta_0}{\pi} - a_1 \right) \right].$$

Ze związku  $a_1 = \theta_0$  otrzymamy czas przejścia:

$$(3.13) \quad \frac{\kappa_0 t_1}{l^2} = \alpha \frac{4}{\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\pi} \right) + \beta\theta_0 \frac{32}{3\pi^2} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

<sup>3</sup> Str. 869, wzór (9.15). Uwaga. Łatwo sprawdzić, że podany tam wynik liczbowy 0,106 jest błędny.

Jako szczególny przypadek wzorów (3.12) i (3.13) otrzymamy rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia liniowego przez podstawienie  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ :

$$(3.14) \quad a_1(t) = \frac{4\theta_0}{\pi} \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \kappa_0 t \right]$$

oraz czas przejścia identyczny z wartością (3.9) otrzymaną dla przykładu ogrzewania muru. Z powyższych związków wynika identyczność sposobu przebiegu procesu ogrzewania i ochładzania dla zagadnienia liniowego oraz zasadnicza różnica tych przebiegów w zagadnieniu nieliniowym.

Dla porównania wyników liczbowych z procesem ogrzewania założmy, że dla granicznych zmian temperatur z niniejszego przykładu ( $T = 4\theta_0/\pi$  i  $T = 0$ ), współczynnik pojemności cieplnej zmienia się znowu od  $c = 2c_0$  do  $c = c_0$ , czyli  $\beta\theta_0 = \pi/4$ ,  $\alpha = 1$ . Wzory (3.12) i (3.13) przyjmą wtedy postać

$$(3.15) \quad a_1(t) = \frac{4}{\pi} \theta_0 \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2l} \right)^2 \kappa_0 t + \frac{2}{3} \left( \frac{4}{\pi} - \frac{a_1}{\theta_0} \right) \right],$$

$$\frac{\kappa_0 t_1}{l^2} = \frac{4}{\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\pi} \right) + \frac{8}{3\pi^2} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) = 0,172.$$

Z porównania wartości (3.10) i (3.15) wynika, że dla zagadnienia nieliniowego proces ochładzania trwa o 41% dłużej od ogrzewania w tych samych granicach temperatur. Wartość liczbowa czasu przejścia (3.15) otrzymamy z zagadnienia liniowego, jeżeli podstawimy do (3.9) średnią, efektywną wartość współczynnika pojemności cieplnej, równą  $1,76 c_0$ <sup>4</sup>.

Dla ośrodka termicznie anizotropowego w przypadku pierwszego przybliżenia według (3.1) układ (2.7) sprowadza się do równania następującego:

$$\alpha A_{11} \dot{a}_1 = \left( Z_{1s} - \frac{a_1}{c_0} \sum_{s=x,y,z} \alpha'_s K_{0s} B_{11s} \right) +$$

$$+ \left[ - \beta \dot{a}_1 (C_{11} + a_1 D_{111}) - \frac{a_1}{c_0} \sum_{s=x,y,z} \beta'_s K_{0s} (E_{11s} + a_1 G_{111s}) \right].$$

Przybliżone rozwiązanie można tu otrzymać za pomocą metody perturbacji Poincarego, przy czym wyrażenie w nawiasie kwadratowym przedstawia część nieliniową sprawiającą trudność rozwiązania, którą należy przemnożyć przez mały parametr. Sposób postępowania, typowy dla tej metody, jest analogiczny do pokazanego poniżej obliczenia drugiego przybliżenia.

#### 4. Wyznaczanie drugiego przybliżenia

$$(4.1) \quad T_2^* = \varphi_0(x, y, z) + a_1(t) \varphi_1(x, y, z) + a_2(t) \varphi_2(x, y, z).$$

Zajmiemy się tutaj tylko przypadkiem izotropii termicznej. Z zależności (2.13) otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych nieliniowych, których rozwiązanie przeprowadzimy metodą małego parametru. Sposób postępowania niech objaśni przykład ochładzania muru, dla którego uprzednio obliczono pierwsze przybliżenie.

<sup>4</sup> Por. [3], str. 869–870.

Warunki brzegowe i początkowe przyjmiemy jak w 3d. Przyjmujemy drugie przybliżenie w postaci

$$(4.2) \quad T_2^* = a_1(t) \sin \frac{\pi x}{2l} + a_2(t) \sin \frac{3\pi x}{2l}.$$

Ze związku (2.10) za pomocą danego warunku początkowego wyznaczamy stałe początkowe

$$(4.3) \quad \frac{a_1(0)}{\theta_0} = \frac{3a_2(0)}{\theta_0} = \frac{4}{\pi}.$$

Po wyznaczeniu współczynników (2.8) i (2.14) układ dwóch równań różniczkowych (2.13) przedstawimy w postaci

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\left(\frac{\kappa_0 \pi^2}{\alpha 4l^2}\right) a_1 - \mu \frac{8}{\pi \theta_0} \left[ \dot{a}_1 \left(\frac{a_2}{15} - \frac{a_1}{3}\right) + \dot{a}_2 \left(\frac{a_1}{15} - \frac{9a_2}{35}\right) \right], \\ \dot{a}_2 &= -\left(\frac{\kappa_0 9\pi^2}{\alpha 4l^2}\right) a_2 - \mu \frac{8}{\pi \theta_0} \left[ \dot{a}_1 \left(\frac{a_1}{15} - \frac{9a_2}{35}\right) + \dot{a}_2 \left(\frac{-9a_1}{35} - \frac{a_2}{9}\right) \right], \end{aligned}$$

gdzie  $\mu = \beta \theta_0 / \alpha$ .

Zgodnie ze znaną metodą «małego parametru» rozwiązanie przybliżone układu równań (4.4) można otrzymać w postaci

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_1(t) &= a_{10}(t) + \mu a_{11}(t) + \mu^2 a_{12}(t) + \dots, \\ a_2(t) &= a_{20}(t) + \mu a_{21}(t) + \mu^2 a_{22}(t) + \dots \end{aligned}$$

Dla  $\mu = 0$  rozwiązanie pomocnicze układu (4.4) jest rozwiązaniem odpowiedniego zagadnienia liniowego i przy danych warunkach początkowych (4.3) jest równe

$$(4.6) \quad a_{10}(t) = \frac{4\theta_0}{\pi} e^{-zt}, \quad a_{20}(t) = \frac{4\theta_0}{3\pi} e^{-9zt},$$

gdzie  $z = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{\kappa_0}{\alpha}$ .

Ograniczając się do członów korekcyjnych pierwszego rzędu w (4.5) otrzymamy po prostych przeliczeniach następujące rozwiązanie ostateczne:

$$\begin{aligned} \frac{a_1(t)}{\theta_0} &= \frac{4}{\pi} e^{-zt} + \frac{\beta \theta_0}{\alpha} \frac{128}{\pi^3} \left( \frac{15604}{48195} e^{-zt} - \frac{1}{3} e^{-2zt} + \frac{2}{81} e^{-10zt} - \frac{9}{595} e^{-18zt} \right), \\ \frac{a_2(t)}{\theta_0} &= \frac{4}{3\pi} e^{-9zt} + \frac{\beta \theta_0}{\alpha} \frac{128}{\pi^3} \left( \frac{2492}{2835} e^{-9zt} - \frac{1}{105} e^{-2zt} - \frac{6}{7} e^{-10zt} - \frac{1}{81} e^{-18zt} \right). \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że dla  $t = 0$ , otrzymamy stałe początkowe (4.3).

### 5. Uwagi końcowe

Powyższe przykłady ilustrują sposób przeprowadzenia przybliżonych obliczeń dla jednowymiarowych zagadnień przepływu ciepła; w sposobie traktowania zagadnień dwu lub trójwymiarowych w danej metodzie nie ma istotnych różnic, zmiana dotyczy jedynie przyjęcia funkcji przybliżeń  $\varphi_i$ . Już pierwsze przybliżenie daje wyniki

dostatecznie bliskie rzeczywistości nawet dla czasów stosunkowo krótkich («czasы przejścia» w przykładach), dla dłuższych zaś czasów przybliżenia będą znacznie lepsze.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. H. AWBERY, *Temperature-Rise in a material of which the thermal properties vary with temperature*, The Proceedings of the Physical Society, **48** (1936), London.
2. M. R. HOPKINS, *Heat conduction in a medium having thermal properties depending on the temperature*, The Proceedings of the Physical Society, **50** (1938), London.
3. M. A. BIOT, *New methods in heat flow analysis with application to flight structures*, J. Aeronaut Sci., **24** (1957).
4. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford 1948.
5. N. H. ABEL, *Oeuvres complètes* Christiania 1839.

#### Резюме

#### О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В случае когда коэффициенты теплопроводности и теплоемкости зависят от величины температуры, дифференциальное уравнение теплопроводности становится нелинейным. Приближенное решение предполагается в виде произведений неизвестных функций времени и принятых функций декартовых координат. С использованием принципа ортогональности данного дифференциального уравнения по отдельности к каждой из принятых функций, получена система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, из которых можно определить неизвестные функции времени. В качестве частных случаев из этих решений получаются решения для соответствующих линейных задач. Способы получения первого и второго приближений иллюстрируются примерами.

#### Summary

#### A CERTAIN APPROXIMATE METHOD OF SOLVING NON-LINEAR PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

The partial differential equation governing the flow of heat in a medium for which the thermal conductivity and heat capacity vary with temperature, is non-linear. The approximate solution is assumed in a product form of unknown time-dependent functions and presumed functions of the Cartesian coordinates. Applying the principle of orthogonality to the fundamental equation and to each of the assumed functions, a set of ordinary differential equations is obtained, the solution of which yields unknown functions. As particular cases the solutions of adequate linear problems are available. The method of computation of the first and second approximation is illustrated by examples.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

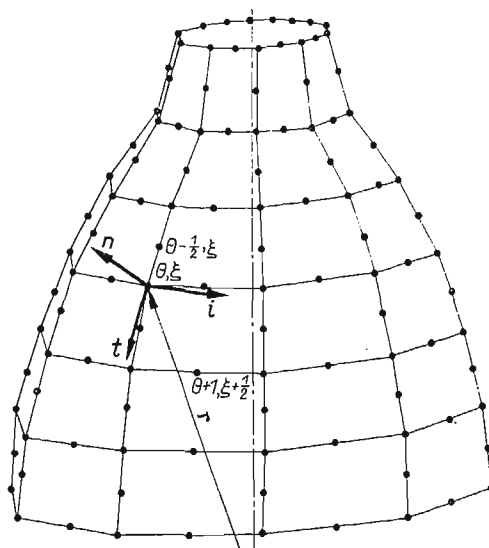
*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1964 r.*

GEOMETRIA RÓŻNICOWA POWIERZCHNIOWEJ SIATKI PUNKTÓW

WITOLD GUTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy zbadano geometrię różnicową zbioru punktów przedstawionych na rys. 1 (odcinki prostych łączące poszczególne punkty mają znaczenie jedynie graficzne). Konieczność zbudowania takiej geometrii wynika z zastosowania rachunku różnicowego do analizy regularnych siatek prętowych (wtedy odcinki prostych na rys. 1 odgrywają rolę prętów).



Rys. 1

Podstawą rozważań jest praca autora [3], w której zdefiniowano geometrię różnicową płaskiej siatki punktów w zastosowaniu do analizy prętów wielobocznych. Podobnie jak we wspomnianej pracy tak i tutaj korzystano wyłącznie z rachunku różnicowego przyjmując w nim następujące oznaczenia funkcji oraz operatorów sumy i różnicy:

$$y_x = y,$$

$$\nabla_x y = y_{x+\frac{1}{2}} + y_{x-\frac{1}{2}}, \quad \Delta_x y = y_{x+\frac{1}{2}} - y_{x-\frac{1}{2}},$$

$$\nabla_{x \pm \frac{1}{2}} y = y_{x \pm 1} + y, \quad \Delta_{x \pm \frac{1}{2}} y = \pm y_{x \pm 1} \mp y_x,$$

$x$  oznacza liczby całkowite. Tak więc jedynie przy funkcjach o argumentach przesuniętych (np.  $y_{x-\frac{1}{2}}$ ) i nie będących pod znakiem operatorów  $\nabla$  czy  $\Delta$  indeksów nie opuszczano.

## 2. Własności siatki

Niech będzie dana jednojednoznaczna funkcja wektorowa  $\mathbf{r}$  odwzorowująca w pewnym obszarze przestrzeni trójwymiarowej parę uporządkowaną  $\{\alpha, \beta\}$  w zbiór wektorów o wspólnym początku. Końce tych wektorów nazwiemy przestrzenną siatką punktową. W parze uporządkowanej  $\alpha$  i  $\beta$  są następującymi ciągami:

$$\alpha = \left( \theta - \frac{1}{2} \right), \theta, \left( \theta + \frac{1}{2} \right); \quad \beta = \left( \xi - \frac{1}{2} \right), \xi, \left( \xi + \frac{1}{2} \right),$$

gdzie  $\theta$  i  $\xi$  są liczbami całkowitymi.

Ze wszystkich dowolnych zbiorów siatek rozpatrywać będziemy jedynie te, których własności będą następujące:

$$(2.1) \quad |\Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r}| = h_1 = \text{const},$$

$$(2.2) \quad |\Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r}| = h_2 = \text{const}, \quad |\Delta_{\xi} \mathbf{r}| = A_2 = \text{const},$$

$$(2.3) \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_{\theta \pm \frac{1}{2}} = 0, \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_{\xi \pm \frac{1}{2}} = 0,$$

$$(2.4) \quad \Delta_{\theta} [\Delta_{\theta} \mathbf{r} \times \Delta_{\theta}^2 \mathbf{r}] = 0, \quad \Delta_{\xi} [\Delta_{\xi} \mathbf{r} \times \Delta_{\xi}^2 \mathbf{r}] = 0.$$

$$(2.5) \quad \Delta_{\xi} \mathbf{r} \cdot \Delta_{\theta} \mathbf{r} = 0,$$

Związek (2.1) oznacza, że odległości pomiędzy punktami siatki przy dowolnym, ustalonym  $\xi$  i zmiennym  $\theta$  są stałe i równe  $h_1$ . Związki (2.2) oznaczają, że odległości pomiędzy punktami przy stałym  $\theta$  i zmiennym  $\xi$  są stałe, a same punkty leżą w wierzchołkach lub w środkach boków wielokątów foremnych.

Związki (2.3) oznaczają, że punkty wyznaczone końcem wektora  $\mathbf{r}$  przy argumentach  $\theta \pm \frac{1}{2}$  i  $\xi \pm \frac{1}{2}$  leżą w połowie odległości pomiędzy punktami a argumentach  $\theta - 1$ ,  $\theta$  i  $\theta + 1$ .

Związki (2.4) oznaczają, że zbiory punktów o stałym  $\xi$  lub odpowiednio stałym  $\theta$  leżą na jednej wspólnej płaszczyźnie (skręcenie równe zero). I wreszcie związek (2.5) mówi, że płaszczyzny dla stałego  $\theta$  i stałego  $\xi$  są nawzajem prostopadłe. Reasumując stwierdzamy, że rozpatrywany przez nas zbiór składa się z siatek o co najmniej jednej osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny  $\theta = \text{const}$ .

## 3. Wektory jednostkowe i działania nad nimi

Wszystkie wektory będące funkcjami położenia punktu siatki będziemy dawać w rzutach na dwa kierunki styczne i kierunek normalny do siatki w rozpatrywanym punkcie.



Przez kierunki styczne będziemy rozumieli kierunki zgodne z wektorami jednostkowymi:

$$(3.1) \quad t = \frac{1}{A_1} \Delta_\theta \mathbf{r}, \quad i = \frac{1}{A_2} \Delta_\xi \mathbf{r},$$

a kierunek normalny zgodny z kierunkiem wektora jednostkowego:

$$(3.2) \quad \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{i}.$$

Wielkości  $A_1$  i  $A_2$  podobnie jak również później stosowane  $B_1$  i  $B_2$  wyznaczamy z następujących związków:

$$(3.3) \quad |\Delta_\theta \mathbf{r}|^2 = A_1^2, \quad |\Delta_\xi \mathbf{r}|^2 = A_2^2,$$

$$(3.4) \quad |\nabla_\theta \mathbf{r} - 2\mathbf{r}|^2 = B_1^2 = \left( \frac{h_1^2}{2R_1} \right)^2, \quad |\nabla_\xi \mathbf{r} - 2\mathbf{r}|^2 = B_2^2 = \left( \frac{h_2^2}{2r_2} \right)^2.$$

Wielkości  $R_1$  i  $r_2$  są promieniami krzywizny płaskich siatek i zostały zdefiniowane w pracy autora [3].

Poszukiwanie wszelkich przyrostów i sum dowolnych wektorów, będących funkcjami położenia punktu siatki, związane jest z uprzednim wyznaczeniem przyrostów i sum wektorów jednostkowych  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{n}$ , dlatego też rozpatrzono poniżej przyrosty i sumy wektorów jednostkowych kolejno dla  $\theta$ ,  $\xi$  oraz dla  $\theta \pm \frac{1}{2}$  i  $\xi \pm \frac{1}{2}$ .

Wektor  $\mathbf{t}$ . Ze względu na symetrię obrotową rzut jego przyrostu na kierunek wektora  $\mathbf{i}$  równy jest zeru. Na podstawie definicji podanych w pracy [3] rzut tegoż przyrostu na kierunek  $\mathbf{t}$  również jest równy zeru. I wreszcie na podstawie tychże samych definicji rzut na kierunek normalnej wynosi:

$$(3.5) \quad (\Delta_\theta \mathbf{t})_n = -\frac{h_1}{R_1} \mathbf{n}.$$

Podobnie za pomocą związków z wyżej wspomnianej pracy możemy określić rzuty sumy  $\nabla_\theta \mathbf{t}$ :

$$(3.6) \quad \nabla_\theta \mathbf{t} = 2 \frac{A_1}{h_1} \mathbf{t}.$$

Rzuty tego wektora na pozostałe osie są równe zeru.

Rozpatrzmy z kolei przyrost i sumę tegoż wektora względem  $\xi$ . Ze względu na obrotową symetrię przyrost ma tylko jedną składową w kierunku osi  $\mathbf{i}$ . W tym celu rozpatrzmy tożsamość

$$\Delta_\xi (\Delta_\theta \mathbf{r}) = \Delta_\theta (\Delta_\xi \mathbf{r})$$

lub

$$\Delta_\xi (A_1 \mathbf{t}) = \Delta_\theta (A_2 \mathbf{i}).$$

Po zróżnicowaniu ostatniej równości stronami otrzymamy

$$\Delta_\xi A_1 \nabla_\xi \mathbf{t} + \nabla_\xi A_1 \Delta_\xi \mathbf{t} = \Delta_\theta A_2 \nabla_\theta \mathbf{i} + \nabla_\theta A_2 \Delta_\theta \mathbf{i}$$

ze względu na symetrię  $\Delta_\xi A_1 = 0$  jak i  $\Delta_\theta \mathbf{i} = 0$ . Tak więc po przekształceniach otrzymamy

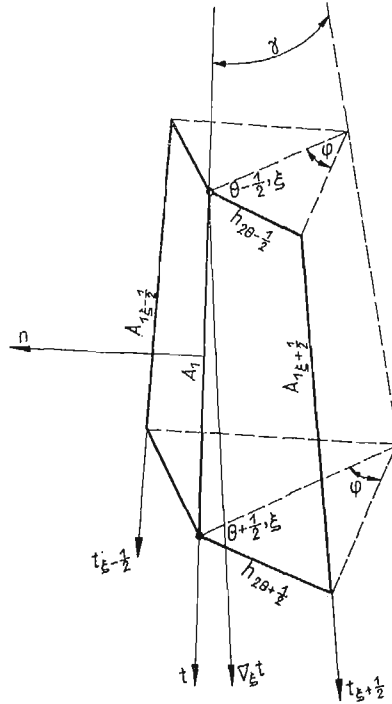
$$(3.7) \quad \Delta_\xi \mathbf{t} = 2 \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \mathbf{i}.$$

Po przejściu do granicy przy jednoczesnym podzieleniu przez element łuku otrzymamy znaną zależność z teorii powierzchni (por. np. [1]):

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \mathbf{i}.$$

Z kolei przejdźmy do wyznaczenia składowych sumy  $\Delta_\xi t$ . Ze względu na obrotową symetrię wielkość ta może mieć wyłącznie składowe skierowane wzdłuż osi  $\mathbf{t}$  i  $\mathbf{n}$ . Rzut na oś  $\mathbf{n}$  jest widoczny bezpośrednio z rys. 2:

$$(3.8) \quad (\nabla_\xi t)_n = -2 \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi A_1} \sin \varphi \cos \gamma.$$



Rys. 2

Uwzględniając jednak, że  $\sin \varphi = h_2/2r_2$  oraz wprowadzając oznaczenie  $R_2 = r_2/\cos \gamma$  otrzymujemy

$$(3.9) \quad (\nabla_\xi t)_n = - \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi A_1} \frac{h_2}{R_2}.$$

Z tego rysunku otrzymamy rzut poszukiwanego wektora na oś  $\mathbf{t}$ :

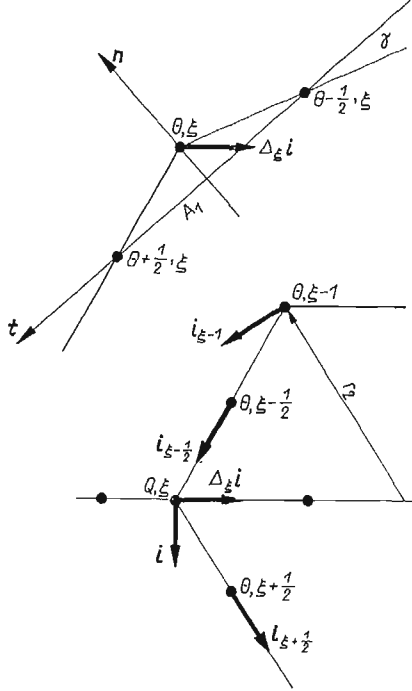
$$(3.10) \quad (\nabla_\xi t)_t = \frac{\nabla_\xi A_1}{A_1}.$$

Wektor  $\mathbf{i}$ . Ze względu na symetrię obrotową i ortogonalność płaszczyzn dla  $\theta = \text{const}$  i  $\xi = \text{const}$  od razu otrzymamy

$$(3.11) \quad \Delta_\theta \mathbf{i} = 0, \quad \nabla_\theta \mathbf{i} = 2\mathbf{i}, \quad \nabla_\xi \mathbf{i} = 2 \frac{A_2}{h_2} \mathbf{i}.$$

Składowe wektora  $\Delta_\xi \mathbf{i}$  można łatwo wyznaczyć bezpośrednio z rys. 3 pamiętając, że sam wektor jest prostopadły do osi  $i$ . Tak więc mamy

$$(3.12) \quad \Delta_\xi \mathbf{i} = -\frac{\Delta_\theta h_2}{A_1} \mathbf{t} - \frac{h_2}{R_2} \mathbf{n}.$$



Rys. 3

Wektor  $\mathbf{n}$ . Wielkości rzutów sum i różnic dla tego wektora otrzymamy z definicji (3.2). Po podstawieniu znalezionych uprzednio wielkości i po przekształceniach otrzymamy odpowiednie zależności przy zmiennym  $\theta$ :

$$(3.13) \quad \Delta_\theta \mathbf{n} = \frac{h_1}{R_1} \mathbf{t},$$

$$(3.14) \quad \nabla_\theta \mathbf{n} = 2 \frac{A_1}{h_1} \mathbf{n}.$$

Bardziej złożone są przekształcenia dla przyrostu i sumy względem  $\xi$ :

$$\Delta_\xi \mathbf{n} = \frac{h_2}{2 R_2 A_1 \nabla_\xi A_1} [(\nabla_\xi A_1)^2 + (\Delta_\theta h_2)^2] \mathbf{i},$$

ponieważ zaś

$$(\nabla_\xi A_1)^2 + (\Delta_\theta h_2)^2 = 4 A_1^2,$$

przeto ostatecznie otrzymamy

$$(3.15) \quad \Delta_\xi \mathbf{n} = 2 \frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \mathbf{i}.$$

Z kolei

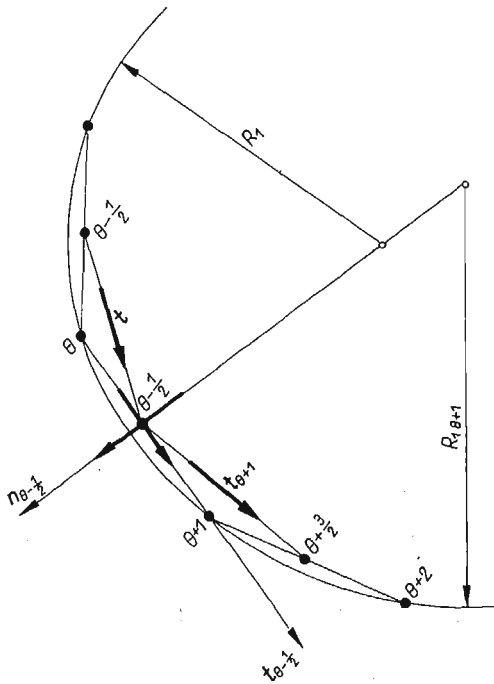
$$\nabla_{\xi} \mathbf{n} = \frac{1}{R_2 \nabla_{\xi} A_1} (A_2 \Delta_0 h_2 - h_1 \Delta_0 A_2) \mathbf{t} + \frac{A_2 (\nabla_{\xi} A_1)^2 + \Delta_0 A_2 h_2 \Delta_0 h_2}{\nabla_{\xi} A_1 A_1 h_2} \mathbf{n}.$$

Uwzględniając że

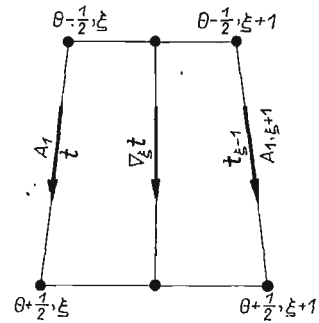
$$A_2 \Delta_0 h_2 = h_2 \Delta_0 A_2,$$

otrzymujemy zależność

$$(3.16) \quad \nabla_{\xi} \mathbf{n} = 2 \frac{A_1 A_2}{h_2 \nabla_{\xi} A_2} \mathbf{n}.$$



Rys. 4



Rys. 5

Pozostaje jeszcze wyznaczyć przyrosty i sumy wektorów jednostkowych przy  $\alpha = \theta \pm \frac{1}{2}$  i  $\beta = \xi \pm \frac{1}{2}$ . Rozpocznijmy od wektora  $\mathbf{i}$ . Ze względu na symetrię obrotową otrzymujemy bezpośrednio

$$(3.17) \quad \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = 0, \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = 2 \mathbf{i}_{\theta \pm \frac{1}{2}}, \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = 2 \frac{A_2}{h_2} \mathbf{i}_{\xi \pm \frac{1}{2}},$$

natomiast z rys. 3 można wywnioskować, że:

$$(3.18) \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i} = -2 \frac{A_2}{h_2} \frac{1}{\nabla_{\xi} A_1} \Delta_0 h_1 \mathbf{t}_{\xi \pm \frac{1}{2}} - 2 \frac{A_2}{\nabla_{\xi} R_2} \mathbf{n}_{\xi \pm \frac{1}{2}}.$$

Wektor  $\mathbf{t}$ . Z twierdzeń pomocniczych [3] jak i z rys. 4 wynika bezpośrednio, że

$$(3.19) \quad \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t}_\theta = -\frac{h_1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{R_1} \right) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{A_1}{h_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.20) \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} = \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{A_1}{h_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{R_1} \right) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

a z rys. 5

$$(3.21) \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} = \frac{\Delta_\theta h_2}{A_2} \mathbf{j}_{\xi \pm \frac{1}{2}}, \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} = \frac{\nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} A_1}{A_1} \mathbf{t}_{\xi \pm \frac{1}{2}},$$

Wektor  $\mathbf{n}$ . Odpowiednie wielkości dla  $\mathbf{n}$  uzyskamy jak i poprzednio z iloczynu wektorowego  $\mathbf{t} \times \mathbf{i}$ :

$$(3.22) \quad \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = \frac{h_1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{R_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \frac{1}{h_1} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.23) \quad \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = \frac{1}{h_1} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1) \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \frac{h_1}{2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{R_1} \right) \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.24) \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\nabla_\xi A_1}{\nabla_\xi R_2} \mathbf{j}_{\xi \pm \frac{1}{2}},$$

$$(3.25) \quad \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n} = -\frac{A_2}{A_1} \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi R_2} \mathbf{t}_{\xi \pm \frac{1}{2}} + \frac{4A_1 A_2}{h_2 \nabla_\xi A_1} \mathbf{n}_{\xi \pm \frac{1}{2}}.$$

Jak już wspomniano, powyższe zależności umożliwiają wyznaczenie przyrostów i sum wektorów w dowolnym punkcie siatki. Niemniej jednak ze wzorów tych nie wynikają związki pomiędzy  $A_1$ ,  $A_2$  i promieniami krzywizny  $R_1$  i  $R_2$ . Związki te można otrzymać na podstawie podobnego rozumowania jak i w geometrii różniczkowej. Weźmy w tym celu pod uwagę drugi, mieszany przyrost wektora  $\mathbf{n}$ :

$$\Delta_\xi (\Delta_\theta \mathbf{n}) = \Delta_\theta (\Delta_\xi \mathbf{n}).$$

Wstawiając zamiast  $\Delta_\theta \mathbf{n}$  i  $\Delta_\xi \mathbf{n}$  wyrażenia (3.13) i (3.15) otrzymujemy

$$\Delta_\xi \left( \frac{h_1}{R_1} \mathbf{t} \right) = 2\Delta_\theta \left( \frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \mathbf{i} \right),$$

a po przekształceniach

$$\Delta_\xi \left( \frac{h_1}{R_1} \right) \frac{\nabla_\xi A_1}{A_1} \mathbf{t} + 2 \left[ \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \nabla_\xi \left( \frac{h_1}{R_1} \right) - 2\Delta_\theta \frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \right] \mathbf{i} - \frac{h_2}{R_2} \frac{\Delta_\theta h_2}{\nabla_\xi A_1} \Delta_\xi \frac{h_1}{R_1} \mathbf{n} = 0.$$

Z równości tej wynika, że poszczególne składowe w kierunku  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{n}$  powinny być równe zeru. Pierwsza i trzecia składowe są równe zeru tożsamościowo, gdyż ze względu na symetrię obrotową

$$\Delta_\xi \left( \frac{h_1}{R_1} \right) = 0.$$

Z przyrównania współczynnika przy  $\mathbf{i}$  otrzymujemy zależność wiążącą ze sobą wielkości  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ :

$$(3.26) \quad \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \nabla_\xi \left( \frac{h_1}{R_1} \right) = 2\Delta_\theta \left( \frac{A_1 h_2}{\nabla_\xi A_1 R_2} \right).$$

Nie trudno wykazać, że przy przejściu do granicy otrzymamy znany związek Codazziego dla powierzchni obrotowej (por. np. [2]):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.$$

Rozpatrzmy z kolei tożsamość

$$\Delta_\theta \Delta_\xi \mathbf{t} = \Delta_\xi \Delta_\theta \mathbf{t}.$$

Wstawiając zamiast  $\Delta_\xi \mathbf{t}$  i  $\Delta_\theta \mathbf{t}$  zależności (3.7) i (3.5) otrzymujemy

$$\Delta_\theta \left( 2 \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \mathbf{i} \right) = \Delta_\xi \left( -\frac{h_1}{R_1} \mathbf{n} \right),$$

a po przekształceniach

$$(3.27) \quad 2\Delta_\theta \left( \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\nabla_\xi h_1 \nabla_\xi R_1 A_1 h_2}{R_1 \nabla_\xi A_1} \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Jak poprzednio tak i w tym przypadku nie trudno sprawdzić, że wyrażenie to w granicy przechodzi do znanego z teorii powierzchni [1] związku Gaussa dla powierzchni obrotowej.

#### 4. Geometria siatki odkształconej

Przyjmijmy jak w paragrafach poprzednich, że punkty siatki określone są współrzędnymi  $\theta$  i  $\xi$ . Ponadto przyjmijmy, że dowolny punkt naszej siatki doznał przemieszczenia  $\mathbf{u}$  jako funkcji tychże współrzędnych  $\theta$  i  $\xi$ . Rozłóżmy teraz to przemieszczenie  $\mathbf{u}$  na trzy podstawowe kierunki zgodne z kierunkami wektorów jednostkowych  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{n}$ . W rezultacie tego nowe położenie punktu wyznaczone zostanie końcem wektora  $\rho$  będącego sumą wektorową

$$(4.1) \quad \rho = \mathbf{r} + \mathbf{u} = \mathbf{r} + u\mathbf{t} + v\mathbf{i} + w\mathbf{n}.$$

Rozpatrzmy teraz wektor  $\frac{1}{A_1} \Delta_\theta \rho$ . Po zróżnicowaniu prawej strony równania (4.1) i podstawieniu poprzednio wyznaczonych wyrażeń na przyrost i sumy wektorów jednostkowych otrzymamy

$$(4.2) \quad \frac{1}{A_1} \Delta_\theta \rho = \left( 1 + \frac{\Delta_\theta u}{h_1} + \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta w}{h_1} \right) \mathbf{t} + \frac{\Delta_\theta v}{A_1} \mathbf{i} + \left( \frac{\Delta_\theta w}{h_1} - \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta u}{h_1} \right) \mathbf{n}.$$

Jeżeli oznaczymy podobnie jak w teorii powłok [2]

$$(4.3) \quad \varepsilon_\theta = \left( \frac{\Delta_\theta u}{h_1} + \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta w}{h_1} \right),$$

$$\omega = \frac{\Delta_\theta v}{A_1}, \quad -\vartheta_\theta = \left( \frac{\Delta_\theta w}{h_1} - \frac{B_1}{A_1} \frac{\nabla_\theta u}{h_1} \right),$$

to otrzymamy

$$(4.4) \quad \frac{1}{A_1} \Delta_\theta \rho = (1 + \varepsilon_\theta) \mathbf{t} + \omega_\theta \mathbf{i} - \vartheta_\theta \mathbf{n}.$$

Podobnie możemy wyznaczyć względny przyrost wektora  $\rho$  względem  $\xi$ . Rozumując jak poprzednio otrzymamy po przekształceniach

$$(4.5) \quad \frac{1}{A_2} \Delta_\xi \rho = \omega_\xi \mathbf{t} + (1 + \varepsilon_\xi) \mathbf{i} - \vartheta_\xi \mathbf{n},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\Delta_\theta A_2}{\nabla_\xi A_1} \frac{\nabla_\xi u}{A_2} + \frac{1}{h_2} \Delta_\xi v + \frac{A_1 h_2}{A_2 R_2 \nabla_\xi A_1} \nabla_\xi w, \\ \omega_\xi &= \frac{1}{2} \frac{\nabla_\xi A_1}{A_1 A_2} \Delta_\xi u - \frac{1}{2} \frac{\Delta_\theta h_2}{A_2 A_2} \nabla_\xi v, \\ -\vartheta_\xi &= -\frac{B_2 \Delta_\theta h_2}{A_2 h_2 \nabla_\xi A_1} \Delta_\xi u - \frac{B_2}{A_2 h_1} \nabla_\xi v + 2 \frac{A_1}{h_2 \nabla_\xi A_1} \Delta_\xi w. \end{aligned}$$

Następnie wyznaczmy przyrosty wektora  $\rho$  przy argumentach przesuniętych, a więc

$$\Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \rho \quad \text{i} \quad \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \rho.$$

Sposób postępowania jest taki sam jak wyżej, dlatego nie podając przekształceń zapiszemy

$$(4.6) \quad \frac{1}{h_1} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \rho = [1 + \varepsilon_{\theta \pm \frac{1}{2}}] \mathbf{t}_{\theta \pm \frac{1}{2}} + \omega_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\theta \pm \frac{1}{2}} - \vartheta_{\theta \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\theta \pm \frac{1}{2}},$$

gdzie

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\theta \pm \frac{1}{2}} &= \frac{1}{h_1^2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1 u) + \frac{1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{w}{R_1} \right), \\ \omega_{\theta \pm \frac{1}{2}} &= \frac{\Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} v}{h_1}, \\ -\vartheta_{\theta \pm \frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} \nabla_{\theta \pm \frac{1}{2}} \left( \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1^2} \Delta_{\theta \pm \frac{1}{2}} (A_1 \omega). \end{aligned}$$

Podobnie przy zmiennym  $\xi$

$$(4.8) \quad \frac{1}{h^2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \rho = \omega_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{t} + (1 + \varepsilon_{\xi \pm \frac{1}{2}}) \mathbf{i} - \vartheta_{\xi \pm \frac{1}{2}} \mathbf{n},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi \pm \frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} u \frac{\Delta_{\theta} h_2}{h_2 A_1} + \frac{A_2}{h_2^2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} v + \frac{A_2 \nabla_{\xi} A_1}{A_1 h_2 \nabla_{\xi} R_2} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} w, \\
 \omega_{\xi \pm \frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \frac{\nabla_{\xi} A_1}{A_1 h_2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} u - \frac{\Delta_{\theta} A_2}{h_2 \nabla_{\xi} A_1} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} v - \frac{A_2 \Delta_{\theta} h_2}{2 h_2 A_1 \nabla_{\xi} R_2} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} w, \\
 -\vartheta_{\xi \pm \frac{1}{2}} &= -\frac{A_2}{h_2 \nabla_{\xi} R_2} \nabla_{\xi \pm \frac{1}{2}} u + 2 \frac{A_1 A_2}{h_2^2 \nabla_{\xi} A_1} \Delta_{\xi \pm \frac{1}{2}} w.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Wyznamy teraz wektory jednostkowe odkształconej siatki oznaczając je przez  $\mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{i}^*$  i  $\mathbf{n}^*$ . Rozumując analogicznie jak w teorii powierzchni (por. np. [2]) dochodzimy przy założeniu, że odkształcenia są małe, do następujących zależności:

$$\begin{aligned}
 A_1^* &\approx A_1(1 + \varepsilon_{\theta}), & A_2^* &\approx A_2(1 + \varepsilon_{\xi}), \\
 \mathbf{t}^* &\approx \mathbf{t} + \omega_{\theta} \mathbf{i} - \vartheta_{\theta} \mathbf{n}, \\
 \mathbf{i}^* &\approx \omega_{\xi} \mathbf{t} + \mathbf{i} - \vartheta_{\xi} \mathbf{n}, \\
 \mathbf{n}^* &\approx \vartheta_{\theta} \mathbf{t} + \vartheta_{\xi} \mathbf{i} + \mathbf{n}.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Za pomocą powyższych zależności określimy odkształcenie postaciowe  $\omega$  siatki jako iloczyn skalarny:

$$\omega = \mathbf{t}^* \mathbf{i}^* = \omega_{\xi} + \omega_{\theta} + \vartheta_{\theta} \vartheta_{\xi}.$$

Przy małych odkształceniach odrzucając iloczyn  $\vartheta_{\theta} \vartheta_{\xi}$  jako małą wyższego rzędu otrzymamy ostatecznie

$$\omega = \omega_{\theta} + \omega_{\xi}.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. П. К. РАШЕВСКИЙ, *Курс дифференциальной геометрии*, Москва 1956.
2. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз, Ленинград 1962.
3. W. GUTKOWSKI, *Plane polygonal bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, 12 (1964).

#### Резюме

#### РАЗНОСТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ СЕТКИ ТОЧЕК

В работе представлена разностная геометрия множества точек, определенных зависимостями (2.1)–(2.5) и расположенных на произвольной поверхности вращения (рис. 1). В п. 3 дается определения отдельных характеристических сеток, а также действий над тремя единичными ортогональными векторами. Кроме того приводятся геометрические зависимости соответствующие соотношениям Кодаци-Гаусса в дифференциальной геометрии. В п. 4 выводятся соотношения, описывающие деформированную сетку. Эти соотношения могут быть использованы, между прочим, при исследовании поверхностных стержневых сеток.



## S u m m a r y

## DIFFERENCE GEOMETRY OF THE POINT SURFACES

The object of the paper is to present the difference geometry of a set of points defined by relations (2.1)–(2.5) and located on an arbitrary surface of revolution (Fig. 1). In Sec. 3 of the paper, the characteristic parameters of the surface as well as operations on the dextral set of mutually perpendicular unit-vectors are considered. Besides the geometrical relations analogous to the Codazzi-Gauss relations in the differential geometry are given. In the last Sec. of the paper, the deformed surface is considered. The relations thus obtained can be applied, among others, to the analysis of the regular sets of rods.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1964 r.*

---



WPLYW EFEKTÓW DYNAMICZNYCH  
NA PRZEBIEG PROCESÓW CIĄNIENIA METALI

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

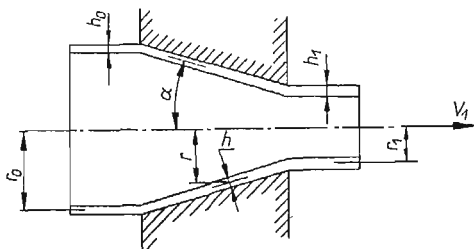
W teoretycznych rozwiązaniach procesów obróbki plastycznej metali, mimo że każdy z nich przebiega z określoną prędkością, przyjmuje się, że zarówno siły bezwładności w równaniach równowagi, jak i wzrost oporu plastycznego przy większych prędkościach odkształcania są pomijalnie małe. W większości przypadków praktycznych takie quasi-statyczne podejście nie prowadzi do większych błędów, a nawet jest w pełni uzasadnione z uwagi na to, że z konieczności w rozwiązaniach tych przyjmuje się szereg innych założeń upraszczających. Istnieje jednak szereg przypadków, w których pominięcie efektów dynamicznych może dać bardzo duże błędy. Dotyczy to zwłaszcza uwzględnienia lepkości materiału, przejawiającej się w zależności oporu plastycznego od prędkości odkształcania. Jak wiadomo [1] dla miękkiej stali przy prędkości odkształcania większej od  $\dot{\epsilon} = 100 \text{ sek.}^{-1}$  granica plastyczności na rozciąganie ma dwukrotnie większą wartość od statycznej. Ta czułość metali na prędkość odkształcania szczególnie wzrasta w podwyższonych temperaturach, w jakich często przebiegają procesy obróbki plastycznej. W procesach ciągnięcia cienkich drutów, blach oraz rur o małej średnicy prędkości odkształcania osiągają często bardzo duże wielkości i ich wpływ na opór plastyczny materiału nie może być pominięty. Znaczenie praktyczne ma również zbadanie wpływu nagłych zmian prędkości (szarpnięcia), wywołanych wadliwym działaniem lub obsługą ciągarok. Związane z takim szarpnięciem przyspieszenia mogą prowadzić do zerwania drutu lub rury.

Poniżej podano rozwiązania niektórych procesów ciągnięcia z uwzględnieniem zarówno sił bezwładności, jak i efektów prędkości odkształcania. W przypadku ciągnięcia rury uzyskano rozwiązanie ściśle drogą numerycznego całkowania. Dla procesów ciągnięcia blach i drutów próby ścisłego rozwiązania zagadnienia trafiają na bardzo duże trudności. Z tego względu w celu oceny efektów dynamicznych i wpływu lepkości materiału przedstawiono przybliżone rozwiązania oparte na założeniu uproszczonego schematu odkształcania materiału. Założenie takie pozwala uzyskać proste rozwiązania w postaci zamkniętej.

1. Ciągnięcie rury przez stożkową matrycę

Rozpatrzmy proces ciągnięcia rury o początkowym promieniu  $r_0$  i grubości ścianki  $h_0$  przez stożkową matrycę (rys. 1) uwzględniając wpływ sił bezwładności. Stan naprężenia w ściance rury można uważać za błonowy, ponieważ grubość

ścianki jest mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami, co pozwala pominąć zmianę naprężeń po grubości. Nacisk  $p$  pomiędzy rurą a ścianką matrycy jest bardzo mały w porównaniu z naprężeniami i może być pominięty w warunku pla-



Rys. 1

styczności. W każdym punkcie należy wyznaczyć cztery niewiadome: naprężenie wzdłuż tworzącej  $\sigma_r$ , naprężenie obwodowe  $\sigma_t$ , grubość ścianki  $h$  oraz prędkość płynięcia materiału wzdłuż tworzącej  $v$ .

W równaniu ruchu elementarnej cząstki materiału oprócz sił wynikających z działania naprężeń należy uwzględnić siłę bezwładności przypadającą na jednostkę objętości. Siła ta równa się

$$(1.1) \quad \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right),$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału,  $t$  — czasem, a  $r$  — promieniem rozpatrywanego elementu rury. W wyrażeniu tym założono, że prędkość płynięcia zależy również od czasu, a więc  $v = v(r, t)$ . Jest to związane z możliwością zmiany prędkości ciągnięcia rury w przekroju wyjściowym, w którym  $v_1 = v_1(t)$ . Proces jest w takim przypadku niestacjonarny i wszystkie poszukiwane wielkości są zależne zarówno od promienia  $r$  jak i od czasu. Odpowiedni układ równań różniczkowych cząstkowych ma niepełną liczbę charakterystyk rzeczywistych i jego rozwiązanie napotyka bardzo duże trudności. Z tego względu ograniczymy się do zbadania jedynie stacjonarnego przebiegu procesu ciągnięcia przyjmując, że prędkość ciągnięcia w przekroju wyjściowym nie zmienia się, a więc  $v_0 = \text{const}$ .

W takim przypadku w wyrażeniu (1.1) na siłę bezwładności znika pierwszy człon  $\partial v / \partial t$  w nawiasie, a równanie ruchu przyjmuje uproszczoną postać

$$(1.2) \quad \frac{d(\sigma_r r h)}{dr} - \sigma_t h - \rho \frac{hr}{\sin \alpha} v \frac{dv}{dr} = 0.$$

W równaniu tym pominięto wpływ tarcia materiału o matrycę, ponieważ celem naszym jest zbadanie efektów dynamicznych. Zwracamy uwagę, że siły tarcia mogą być bez żadnych trudności uwzględnione w sposób pokazany w pracy H. W. SWIFTA [2].

Warunek plastyczności wyraża się równością

$$(1.3) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = 3k^2.$$

Chwilowo przyjmijmy, że  $k = \text{const}$ , a więc że granica plastyczności materiału jest niezależna od stanu odkształcenia i od prędkości odkształcenia. Dalej omówimy sposób uwzględnienia w rozwiązaniu zarówno zjawiska wzmocnienia, jak i czułości materiału na prędkość odkształcania.

Dalszymi równaniami są: związek między prędkością  $v$  a naprężeniami

$$(1.4) \quad \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r},$$

oraz warunek nieściśliwości materiału

$$(1.5) \quad \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + \frac{v}{h} \frac{dh}{dr} = 0.$$

Z równań (1.4) i (1.5) można wyrugować prędkość  $v$ . W wyniku otrzymujemy równanie

$$(1.6) \quad \frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r} \frac{\sigma_r + \sigma_t}{\sigma_r - 2\sigma_t}.$$

Naprężenia przedstawimy w znany sposób za pomocą jednej funkcji  $\omega$

$$(1.7) \quad \sigma_r = 2k \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_t = 2k \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right).$$

Jak wiadomo, wyrażenia (1.7) spełniają tożsamościowo warunek plastyczności (1.3).

Za pomocą równania (1.6) można wyrugować grubość  $h$  z równania (1.2). Podstawiając następnie wyrażenia (1.7) oraz wyrażenie (1.4) na pochodną  $dv/dr$  otrzymujemy ostatecznie równanie

$$(1.8) \quad \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{r} \frac{3 + \frac{\rho}{k} \frac{v^2}{\sin \alpha} \left[ 2 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right]}{2 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \left[ \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right]}.$$

Podstawiając wyrażenia (1.7) do równań (1.4) i (1.6) otrzymujemy dwa pozostałe równania

$$(1.9) \quad \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} \frac{2 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)},$$

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r} \frac{\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Zagadnienie zostało więc sprowadzone do całkowania typowego układu równań o budowie

$$\omega' = F_1(\omega, v, r), \quad v' = F_2(v, \omega, r), \quad h' = F_3(h, \omega, r),$$

z warunkami brzegowymi (rys. 1)

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{2}{3} \pi \\ h = h_0 \end{array} \right\} \text{ dla } r = r_0 \quad \text{oraz} \quad v = v_1 \quad \text{dla } r = r_1.$$

Warunek  $\omega_{r=r_0} = \frac{2}{3}\pi$  wynika z zależności (1.7) po podstawieniu  $\sigma_r = 0$  i  $\sigma_t = -2k$  dla  $r = r_0$ . Ostatni z powyższych warunków na  $v_{r=r_1}$  jest niedogodny zarówno dla przebiegu całkowania, jak i ze względu na zakres ważności otrzymanych wyników, ponieważ w odróżnieniu od obu pozostałych dotyczy on przekroju wyjściowego rury. Tak postawione zagadnienie brzegowe zmusza do założenia od razu wielkości obu promieni  $r_0$  i  $r_1$ . Jeżeli jednak jako znaną wielkość przyjmiemy prędkość ruchu rury przed wejściem w matrycę, a więc  $v_{r=r_0} = v_0$ , to dowolny promień w uzyskanych zależnościach  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_t(r)$ ,  $h(r)$  i  $v(r)$  może być uznany za promień końcowy  $r_1$ . Rozwiązanie będzie więc ważne dla dowolnej redukcji średnicy  $(r_0 - r_1)/r_0$  rury o początkowym promieniu  $r_0$ . Ostatecznie więc przyjmiemy warunki brzegowe w postaci

$$(1.10) \quad \omega = \omega_0 = \frac{2}{3}\pi, \quad h = h_0 \quad \text{i} \quad v = v_0 \quad \text{dla } r = r_0.$$

W przypadku konieczności uzyskania rozwiązania dla określonej prędkości  $v_1$  można je otrzymać drogą interpolacji.

Układ równań (1.8) i (1.9) rozwiążemy metodą kolejnych przybliżeń Picarda (por. np. [3]) przyjmując jako pierwsze przybliżenie wartości brzegowe poszukiwanych funkcji, a więc

$$\omega_{(1)}(r) = \omega_0, \quad h_{(1)}(r) = h_0, \quad v_{(1)}(r) = v_0.$$

Drugie przybliżenie otrzymamy przez całkowanie równań

$$\omega'_{(2)} = F_1(\omega_0, v_0, r), \quad v'_{(2)} = F_2(v_0, \omega_0, r), \quad h'_{(2)} = F_3(h_0, \omega_0, r),$$

gdzie przez  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  oznaczono funkcje znajdujące się po prawych stronach równań (1.8) i (1.9). Podobnie obliczenie  $n$ -tego przybliżenia polega na całkowaniu równań

$$\begin{aligned} \omega'_{(n)} &= F_1(\omega_{(n-1)}, v_{(n-1)}, r), & v'_{(n)} &= F_2(v_{(n-1)}, \omega_{(n-1)}, r), \\ h'_{(n)} &= F_3(h_{(n-1)}, \omega_{(n-1)}, r). \end{aligned}$$

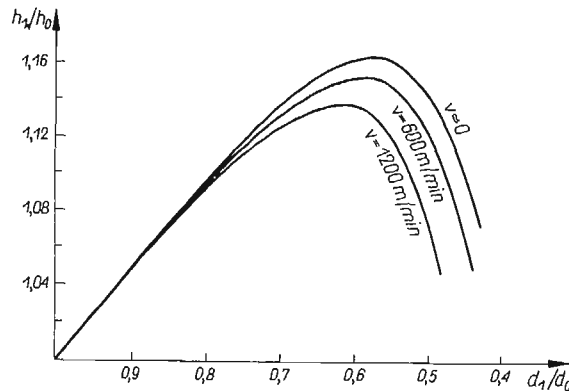
Przy całkowaniu każdego z przybliżeń obowiązują oczywiście warunki brzegowe (1.10). Złożoność budowy równań (1.8) i (1.9) powoduje, że całkowanie można przeprowadzić jedynie w sposób numeryczny metodą różnic skończonych dzieląc całkowitą różnicę promieni  $r_0 - r_1$  na szereg odpowiednio małych skończonych przyrostów. Zwracamy uwagę, że procedurę obliczania kolejnych przybliżeń można przeprowadzać od razu do końca dla każdego przyrostu  $\Delta r$ .

Układ równań (1.8) i (1.9) różni się od odpowiedniego układu równań, w którym pominięto siły bezwładności, jedynie członem zawierającym kwadrat prędkości  $v^2$  w liczniku prawej strony równania (1.8). Równania (1.9) są w obu przypadkach

i identyczne. Zanalizujmy poszczególne czynniki członu bezwładnościowego w równaniu (1.8).

Jak łatwo sprawdzić, czynnik  $\beta = 2 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)$  zawiera się w granicach  $\sqrt{3}/2 \leq \beta \leq \sqrt{3}$ , gdyż  $0 > \sigma_t > -\sqrt{3}k$ , gdzie  $k = \sigma_{pl}/\sqrt{3}$ . A więc o rzędzie wielkości członu bezwładnościowego będzie decydować czynnik  $\frac{\rho}{k} \frac{v^2}{\sin \alpha}$ . Zależna od własności materiału wielkość  $\rho/k$  wynosi dla miękkiej stali około  $6,25 \cdot 10^{-9}$  sek.<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup> ( $k \approx 1270$  kG/cm<sup>2</sup>), a dla miedzi  $2,25 \cdot 10^{-8}$  sek.<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup> ( $k \approx 400$  kG/cm<sup>2</sup>). Widać stąd, że na to, aby człon bezwładnościowy w równaniu (1.8) miał praktyczne znaczenie w porównaniu z liczbą 3, występującą obok niego w liczniku, prędkość ciągnięcia musi być rzędu  $v = 10^3 - 10^4$  cm/sek. (600–6000 m/min.). Rzeczywiste prędkości ciągnięcia rur na ciągarkach nie przekraczają wielkości 100 m/min. Przy takiej prędkości przy kącie  $\alpha = 15^\circ$  człon bezwładnościowy dla miedzi wynosi około 0,0025, a więc jest pomijalnie mały.

Jako przykład liczbowy obliczono przypadek ciągnięcia rury miedzianej przez matrycę o kącie  $\alpha = 15^\circ$  przy dwóch różnych prędkościach na wejściu  $v_0 = 600$  m/min. i 1200 m/min. Na rysunku 2 pokazano zmianę grubości ścianki przeciągniętej rury w zależności od stosunku średnicy końcowej  $d_1$  do początkowej  $d_0$ .



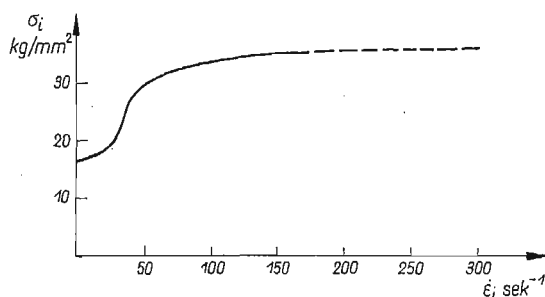
Rys. 2

Przejdźmy obecnie do zbadania wpływu lepkości materiału na przebieg procesu ciągnięcia rury. Jak już wspomniano we wstępie metale w podwyższonej temperaturze wykazują znaczny wzrost oporu plastycznego w miarę zwiększania prędkości odkształcania. Własność tę wykazują również wyraźnie niektóre metale, na przykład miękka stal, w temperaturze pokojowej. Wszystkie znane z literatury dane doświadczalne (por. np. [4,5]) dotyczą próby jednoosiowego rozciągania z dużymi prędkościami. Uwzględnienie efektu czułości materiału na prędkość odkształcania w obliczeniach procesów, w których stan naprężenia jest złożony, wymaga przyjęcia pewnej hipotezy pozwalającej uogólnić wyniki uzyskane z próby jednoosiowego rozciągania na dowolny stan naprężenia. Jedną z najprostszych hipotez jest założenie, że powierzchnia plastyczności Hubera-Misesa  $\sigma_i = \text{const}$ , uzy-

skana z doświadczeń z małymi prędkościami, ulega w miarę zwiększania intensywności prędkości odkształcania  $\dot{\epsilon}_i$  równomiernemu rozszerzeniu. Odpowiada to przyjęciu zależności określającej osiągnięcie stanu plastycznego w postaci  $\sigma_i = \sigma_i(\dot{\epsilon}_i)$ . Zależność tę dla miękkiej stali w normalnej temperaturze przedstawia rys. 3, otrzymany przez zmianę współrzędnych w odpowiednim wykresie dla jednoosiowego rozciągania, uzyskany przez D. S. CLARKA i P. E. DUWEZA [1]. Warunek plastyczności będzie miał teraz postać

$$(1.11) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = 3k^2(\dot{\epsilon}_i),$$

gdzie wielkość  $k$ , równa granicy plastyczności na ścinanie, jest teraz oczywiście zależna od prędkości odkształcania. Pamiętając, że przy czystym ścinaniu  $k = \sigma_i$ , otrzymamy dla poszczególnych intensywności  $\dot{\epsilon}_i$  odpowiednią wartość  $k(\dot{\epsilon}_i)$  bezpośrednio z rys. 3.



Rys. 3

Założymy, że analogicznie jak w teorii plastycznego płynięcia wektory przyrostów odkształcenia są zwrócone w kierunku normalnym do chwilowej powierzchni plastyczności, określonej dowolną wartością  $\dot{\epsilon}_i$ . Wobec tego związek (1.4) między prędkością płynięcia  $v$  a naprężeniami nie ulegnie zmianie. Również bez zmiany pozostanie warunek nieściśliwości (1.5).

Ograniczając nasze rozważania do prędkości ciągnięcia stosowanych w praktyce ( $v_1 < 100$  m/min.) pominiemy człony bezwładnościowe w równaniu (1.2). Jak bowiem poprzednio stwierdzono przy małych prędkościach człony te są pomijalnie małe. Mamy więc

$$(1.12) \quad \frac{d(\sigma_r r h)}{dr} - \sigma_t h = 0.$$

Zagadnienie rozwiążemy metodą kolejnych przybliżeń. Metoda ta była już poprzednio zastosowana przy uwzględnianiu wzmocnienia materiału [6]. W pierwszym przybliżeniu przyjmiemy, że wielkość stałej  $k$  nie zmienia się wzdłuż promienia  $r$ , a więc  $k = k_0 = \text{const}$ . Następnie po wyznaczeniu prędkości płynięcia materiału w każdym punkcie znajdziemy poszczególne składowe prędkości odkształcenia ze wzorów

$$(1.13) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{dv}{dr} \sin \alpha, \quad \dot{\epsilon}_t = \frac{v}{r} \sin \alpha, \quad \dot{\epsilon}_h = -\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_t,$$



z kolei intensywność prędkości odkształcenia

$$(1.14) \quad \dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_t^2 + \dot{\epsilon}_h^2)}$$

i wreszcie z rys. 3 wartość  $k(\dot{\epsilon}_i)$  w każdym punkcie. Tak wyznaczona zależność stałej  $k$  od promienia  $r$  stanowi punkt wyjścia dla obliczenia drugiego przybliżenia. W warunku (1.11) możemy bowiem przyjąć, że prawa strona jest znaną funkcją współrzędnej  $r$

$$(1.15) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = 3k^2(r).$$

Rugując jak poprzednio  $h$  z równania (1.12) oraz podstawiając wyrażenia (1.7), spełniające tożsamościowo warunek (1.15), otrzymujemy ostatecznie równanie z jedną niewiadomą funkcją  $\omega$

$$(1.16) \quad \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{r} \frac{3}{2 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \left[ \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right]} + \operatorname{ctg}\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \frac{d \ln k}{dr}.$$

Całkując numerycznie równanie (1.16) oraz następnie równanie (1.4) z warunkami brzegowymi (1.10) otrzymujemy nowy rozkład prędkości  $v$  wzdłuż promienia. Pozwala to obliczyć następne przybliżenie intensywności  $\dot{\epsilon}_i$  dla każdego  $r$  za pomocą wzorów (1.13) i (1.14), a następnie z rys. 3 nową zależność  $k(r)$ . Teraz w identyczny sposób możemy obliczyć trzecie przybliżenie itd. Czynności te przerywamy, gdy dwa kolejne przybliżenia są wystarczająco bliskie. W praktyce różnica między drugim i trzecim przybliżeniem jest mniejsza od 3%. Tak więc drugie przybliżenie jest dla celów praktycznych wystarczająco dokładne.

Ocenę, kiedy w przypadku ciągnięcia rur stalowych na zimno lepkość materiału może mieć istotny wpływ, można przeprowadzić w bardzo prosty sposób. Jak wiadomo, przy ciągnięciu rur zmiana grubości ścianki nie przekracza 15%. Można więc w przybliżeniu założyć, że prędkość ciągnięcia w dowolnym przekroju równa się  $v \approx v_1 r_1 / r$ . Z zależności (1.13) i (1.14) wynika, że intensywność prędkości odkształcenia równa się  $\dot{\epsilon}_i \approx \frac{v_1 r_1}{r_2} \sin \alpha$ . Osiąga ona największą wartość  $\dot{\epsilon}_{i \max} \approx \frac{v_1}{r_1} \sin \alpha$  w przekroju wyjściowym ( $r = r_1$ ). Z wyrażenia tego wynika, że nawet przy normalnie stosowanych prędkościach ciągnięcia ( $\sim 20$  m/min) intensywność prędkości odkształcenia osiąga bardzo duże wartości w przypadku ciągnięcia rurek o małej średnicy. Na przykład dla  $v_1 = 20$  m/min. i  $r_1 = 1$  mm otrzymujemy przy kącie  $\alpha = 15^\circ$  wielkość  $\dot{\epsilon}_{i \max} = 86,5$  sek.<sup>-1</sup>. Jak widać z rys. 3 przy takiej prędkości odkształcenia opór plastyczny stali wzrasta ponad dwukrotnie, a więc efekt lepkości nie może być pominięty w rozwiązaniu.

## 2. Ciągnięcie blach i płaskowników

Istniejąca teoria ciągnięcia przez klinową matrycę [7,8] została opracowana dla płaskiego stanu odkształcenia z pominięciem wzmocnienia i lepkości materiału oraz efektów dynamicznych. Uwzględnienie tych zjawisk w rozwiązaniu napotyka duże trudności matematyczne.

Równania ruchu w dowolnie obranym układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y$  mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  są normalnie stosowanymi oznaczeniami naprężeń, a  $v_x$  i  $v_y$  prędkościami płynięcia materiału odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$ . Gęstość materiału oznaczono jak poprzednio przez  $\rho$ . Wyrażenia w nawiasach oznaczają całkowite przyśpieszenie cząstki materiału, obliczane jako suma pochodnej lokalnej i pochodnej konwekcyjnej odpowiedniej składowej prędkości. W przypadku procesu stacjonarnego, gdy prędkość ciągnięcia materiału w przekroju wyjściowym jest stała, pochodne względem czasu  $t$  znikają.

Równania (2.1) wraz z warunkami plastycznego płynięcia Lévy'ego-Misesa

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{1}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{1}{\sigma_y - \sigma_x} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \frac{1}{4\tau_{xy}}$$

i warunkiem plastyczności

$$(2.3) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

tworzą układ pięciu równań z pięcioma poszukiwanymi funkcjami  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v_x$  i  $v_y$ .

Niestety układu tego nie udaje się rozwiązać nawet dla procesu stacjonarnego i przy pominięciu efektów wzmocnienia i lepkości materiału. W szczególnym przypadku dynamicznego wciskania stempla w ośrodek plastyczny A. J. M. SPENCER [9] uzyskał rozwiązanie przybliżone metodą perturbacji. Rozwiązanie dynamiczne otrzymuje się jako perturbację znanego rozwiązania quasi-statycznego. SPENCER nie uwzględnił wzmocnienia i lepkości i nie rozpatrywał innych zagadnień dynamicznych w płaskim stanie odkształcenia.

Ocenę wpływu efektu lepkości i sił bezwładności przy ciągnięciu blachy przeprowadzimy w sposób przybliżony, zakładając walcowy przepływ materiału przez matrycę. Uproszczenie takie stosowane z pominięciem efektów dynamicznych i lepkości w obliczeniach praktycznych [10] daje bardzo dobre przybliżenie w przypadkach, gdy kąt  $\alpha$  matrycy jest niewielki, a redukcja grubości blachy dostatecznie duża. Zagadnienie to zostało wyczerpująco zbadane przez R. HILLA [7].

Przyjmijmy biegunowy układ współrzędnych  $r, \vartheta$  ze środkiem  $O$  w punkcie przecięcia przedłużeń obu ścian matrycy (rys. 4). Zagadnienie rozpatrzmy dla najbardziej ogólnego przypadku procesu niestacjonarnego, gdy prędkość ciągnięcia w przekroju wyjściowym jest zmienna w czasie, a więc  $v_1 = v_1(t)$ . Pozwoli to zanalizować wpływ nagłych zmian prędkości ciągnięcia (szarpnięć) na przebieg procesu. Zgodnie z przyjętym założeniem o walcowym płynięciu materiału wszystkie poszukiwane wielkości będą funkcjami tylko promienia  $r$  i czasu  $t$ . W każdym punkcie należy wyznaczyć trzy niewiadome: naprężenie promieniowe  $\sigma_r(r, t)$ , naprężenie

obwodowe  $\sigma_\theta(r, t)$ , oraz promieniową prędkość pływnięcia  $v(r, t)$ . Pozostałe składowe naprężenia  $\tau_{r\theta}$  i prędkości  $v_\theta$  są równe zeru.

Układ trzech równań tworzą:  
równanie ruchu

$$(2.4) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} - \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0,$$

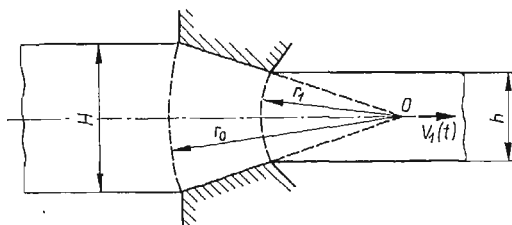
warunek nieściśliwości materiału

$$(2.5) \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

oraz warunek plastyczności

$$(2.6) \quad \sigma_r - \sigma_\theta = 2k,$$

w którym chwilowo pominiemy wzmocnienie i lepkość ( $k = \text{const}$ ). Zgodnie z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa granica plastyczności na ścinanie równa się  $k = \sigma_{p1}/\sqrt{3}$ , gdzie  $\sigma_{p1}$  oznacza granicę plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu.



Rys. 4

Rozkład prędkości pływnięcia otrzymamy przez scałkowanie równania (2.5) z warunkiem brzegowym  $v_{r=r_1} = -v_1(t)$ . Wynika stąd zależność

$$(2.7) \quad v = -\frac{r_1}{r} v_1(t).$$

Po podstawieniu zależności (2.7) i (2.6) do równania ruchu (2.4) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne z jedną niewiadomą funkcją  $\sigma_r$ . Równanie to daje się scałkować w elementarny sposób, ale trudności sprawia wyznaczenie stałej całkowania. Jeżeli bowiem przed wejściem w matrycę znajduje się znaczna długość ciągniętej blachy o masie  $M$  na jednostkę szerokości, to przy nagłej zmianie prędkości w przekroju wyjściowym, określonej przyspieszeniem  $dv_1/dt$ , doznaje ona również przyspieszenia równego  $\frac{r_1}{r_0} \frac{dv_1}{dt}$ , co wynika z zależności (2.7). Dla nadania masie  $M$  takiego przyspieszenia musi na nią działać w przekroju wyjściowym matrycy ( $r = r_0$ ) naprężenie  $\sigma_r = \frac{M}{H} \frac{r_1}{r_0} \frac{dv_1}{dt}$ . Przy dużej długości blachy przed matrycą wielkość tego naprężenia może być znaczna. W takim przypadku szarpnięcia mogą silnie wpływać na przebieg procesu ciągnięcia zwiększając naprężenia, a nawet mogą wywołać zerwanie blachy.

Ze względu na to, że wielkość masy  $M$  może być określona tylko przy rozpatrywaniu konkretnych zagadnień, a sposób uwzględnienia jej wpływu omówiono powyżej, ograniczymy się tu do zbadania wpływu przyśpieszeń jedynie w obszarze odkształcenia plastycznego przyjmując, że proces znajduje się w końcowym stadium gdy swobodny koniec blachy dochodzi do wejściowego przekroju matrycy. W tym przypadku, po uwzględnieniu warunku brzegowego w postaci  $\sigma_r = 0$  dla  $r = r_0$ , otrzymujemy wyrażenie na naprężenie promieniowe

$$(2.8) \quad \sigma_r = 2k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( \frac{r_1^2}{r^2} - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) + \rho \frac{dv_1}{dt} r_1 \ln \frac{r_0}{r}.$$

Naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$  można teraz otrzymać bezpośrednio z warunku plastyczności (2.6).

Pierwszy człon w zależności (2.8) przedstawia rozwiązanie quasi-statyczne, odpowiadające pominięciu członów zawierających prędkość  $v$  w równaniu (2.4). Drugi człon przedstawia wpływ przyśpieszenia wynikającego ze zmiany prędkości, jakiej doznaje każda cząstka nawet przy procesie stacjonarnym ( $v_1 = \text{const}$ ) przechodząc w coraz węższą część matrycy. Jak łatwo zauważyć, człon ten daje istotne różnice w wielkości naprężeń dopiero przy bardzo dużych prędkościach ciągnięcia, jakich nie stosuje się w praktyce. Obliczmy tak zwaną redukcję graniczną, wynikającą z warunku, że naprężenie  $\sigma_r$  w przekroju wyjściowym ( $r = r_1$ ) może być co najwyżej równe  $2k$ . Dla procesu ustalonego warunek ten prowadzi do równania

$$\ln \left( \frac{r_0}{r_1} \right)_{\text{gr}} - 1 - \frac{\rho v_1^2}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)_{\text{gr}}^2 \right] = 0.$$

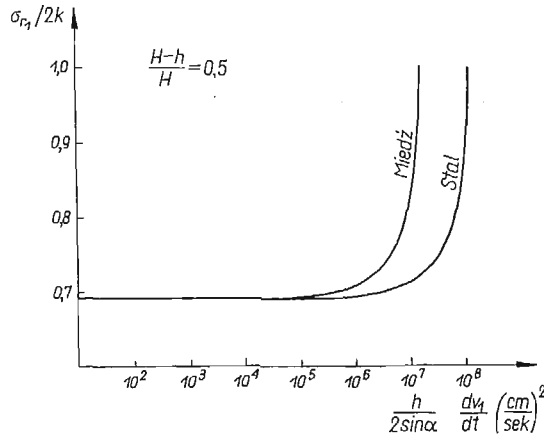
Przy pominięciu członu dynamicznego otrzymujemy stąd graniczną wartość redukcji  $\left( \frac{H-h}{H} \right)_{\text{gr}} \approx 0,632$ . Zmienia się ona o około 5%  $\left[ \left( \frac{H-h}{H} \right)_{\text{gr}} \approx 0,600 \right]$  dopiero przy prędkościach ciągnięcia dla miedzi  $v_1 \approx 1800$  m/min., a dla miękkiej stali  $v_1 \approx 2500$  m/min. Wynika stąd, że pominięcie tego członu przy rozpatrywaniu rzeczywistych procesów jest w pełni uzasadnione. †

Trzeci człon w wyrażeniu (2.8) przedstawia wpływ nagłej zmiany prędkości ciągnięcia (szarpnięcia). Zbadamy, jak wpływa on na wielkość naprężeń  $\sigma_r$  w przekroju wyjściowym. Pomijając wpływ drugiego członu w (2.8) otrzymujemy

$$\sigma_{r(r=r_1)} = 2k \left( 1 + \frac{\rho}{2k} \frac{h}{2 \sin \alpha} \frac{dv_1}{dt} \right).$$

Obecność grubości  $h$  w wyrażeniu w nawiasie wskazuje, że wpływ szarpnięcia jest większy przy dużych grubościach ciągnionego materiału. Na rysunku 5 pokazano w półlogarytmicznej skali zależność naprężenia w przekroju wyjściowym od grubości i przyśpieszenia dla miękkiej stali i miedzi obliczone dla redukcji  $(H-h)/H = 0,5$ . Jak widać, dopiero bardzo duże przyśpieszenia  $dv_1/dt$  mają istotny wpływ na przebieg końcowej fazy procesu ciągnięcia. Dla mniejszych przyśpieszeń siły bezwładności występujące w obszarze odkształcania są pomijalnie małe. W takim przypadku przy analizie wpływu szarpnięcia wystarczy uwzględnić jedynie siłę bezwładności blachy znajdującej się przed wejściem w matrycę.

Przejdźmy do zbadania wpływu lepkości. Zagadnienie rozwiążemy dla spotykanych w praktyce prędkości ciągnięcia ( $v_1 < 50$  m/min.). W równaniu (2.4) pominiemy zatem człony zawierające  $v$ , przyjmując że również przyspieszenie  $dv_1/dt$  jest pomijal-



Rys. 5

nie małe. Dla otrzymania wyniku w postaci zamkniętej przyjmiemy liniową zależność między granicą plastyczności stali przy prostym rozciąganiu a prędkością odkształcenia

$$\sigma = \sigma_0 + H\dot{\epsilon}.$$

Następnie podobnie jak przy ciągnięciu rury założymy, że istnieje stała zależność  $\sigma_i = \sigma_i(\dot{\epsilon}_i)$  obowiązująca dla dowolnego stanu naprężenia. W naszym przypadku prędkości odkształcenia określone są zależnościami

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r_1}{r^2} v_1, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{r} = -\frac{r_1}{r^2} v_1, \quad \dot{\epsilon}_z = 0,$$

gdyż wyrażenie (2.7) na prędkość nie ulega zmianie.

Wobec tego intensywność prędkości odkształcenia równa się

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{6} [(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + (\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r)^2]} = \frac{r_1 v_1}{\sqrt{3} r^2}.$$

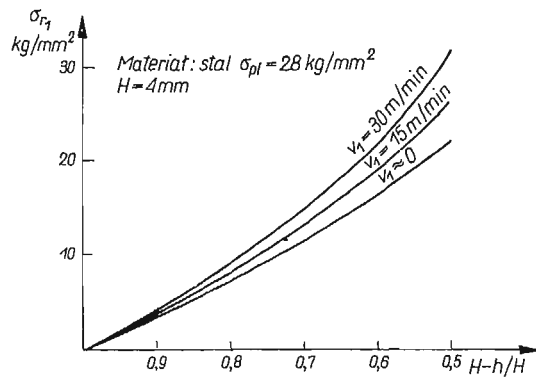
Zamiast warunku plastyczności (2.6) mamy więc teraz związek

$$(2.9) \quad \sigma_r - \sigma_\theta = 2k \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H}{k} \frac{r_1}{r^2} v_1 \right).$$

Po scałkowaniu i wyznaczeniu stałej otrzymujemy

$$(2.10) \quad \sigma_r = 2k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{2}{3\sqrt{3}} H \frac{v_1}{r_1} \left( \frac{r_1^2}{r^2} - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right).$$

Na rysunku 6 pokazano wpływ prędkości na zmianę naprężeń  $\sigma_{r_1}$  w przekroju wyjściowym dla miękkiej stali o granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu  $\sigma_{p1} = 2800 \text{ kg/cm}^2$ . Jak widać, przy praktycznie stosowanych prędkościach

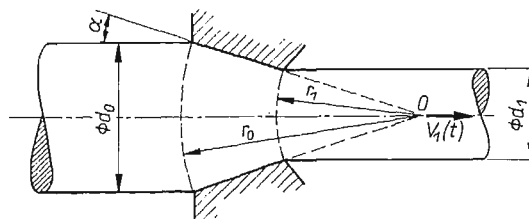


Rys. 6

ciągnięcia cienkich blach lepkość stali znacznie zwiększa siłę konieczną dla przeprowadzenia procesu.

### 3. Ciągnięcie drutu i prętów

W podobny sposób można zbadać wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesu ciągnięcia drutu przez stożkową matrycę (rys. 7). Dla uproszczenia założymy, że wszystkie cząstki materiału w obszarze odkształcania poruszają się wzdłuż promieni wycinka kuli ograniczonego ścianą matrycy. Zarówno stan odkształcania jak i naprężenia zależą tylko od jednej współrzędnej  $r$ , a dla niestacjonarnego procesu również od czasu  $t$ . Uproszczenie takie stosowane w obliczeniach praktycznych [10] z pominięciem efektów dynamicznych i lepkości daje dobre wyniki dla małych kątów  $\alpha$  matrycy i znacznej redukcji grubości drutu przy jednym przejściu. W rozwiązaniu tym pominięte są siły tarcia między drutem a matrycą.



Rys. 7

W każdym punkcie należy wyznaczyć naprężenie promieniowe  $\sigma_r(r, t)$ , naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta(r, t)$  oraz promieniową prędkość płynięcia  $v(r, t)$ . Naprężenie styczne  $\tau_{r,\theta}$  i składowa prędkości  $v_\theta$  są równe zero.

Odpowiednie równania mają teraz postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2(\sigma_s - \sigma_r)}{r} - \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = 0, \quad \sigma_r - \sigma_s = 2k.$$

W warunku plastyczności pominięto wzmocnienie i lepkość materiału.

Postępując analogicznie jak w poprzednim paragrafie otrzymujemy wyrażenie na promieniową składową naprężenia

$$\sigma_r = 4k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( \frac{r_1^4}{r^4} - \frac{r_1^4}{r_0^4} \right) + \rho \frac{dv_1}{dt} r_1 \left( \frac{r_1}{r} - \frac{r_1}{r_0} \right),$$

gdzie  $v_1(t)$  jest prędkością ciągnięcia w przekroju wyjściowym. Nie podajemy tu analizy wielkości poszczególnych członów tego wyrażenia, gdyż daje ona podobne wyniki jak w przypadku ciągnięcia blach.

Analiza wpływu lepkości materiału może być przeprowadzona w taki sam sposób jak dla blach. Wpływ ten jest tym większy, im mniejsza jest średnica ciągnionego drutu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. S. CLARK, P. E. DUWEZ, *The influence of strain rate on some tensile properties of steel* Proc. ASTM, 50 (1950), 560.
2. H. W. SWIFT, *Stresses and strains in tube-drawing*, Phil. Mag., 40 (1949), 655.
3. А.Н. КРЫЛОВ, *Лекции о приближенных вычислениях*, Москва 1954.
4. P. G. SHEWMOR, V. F. ZACKAY, *Response of metals to high velocity deformation*, Proc. Metallurgical Soc. Conf., 1960.
5. A. NÁDÁI, *Theory of flow and fracture of solids*, McGraw-Hill, 1950.
6. W. SZCZEPIŃSKI, *Axially symmetric plane stress problem of a plastic strain-hardening body*, Arch. Mech. Stos., 15(1963), 611.
7. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1956.
8. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, 1957.
9. A. J. M. SPENCER, *The dynamic plane deformation of an ideal plastic-rigid solid*, J. Mech. Phys. of Solids, 8 (1960), 262.
10. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the theory of plasticity for engineers*, McGraw-Hill, 1953.

#### Р е з ю м е

#### ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ПАРАМЕТРЫ ПРОЦЕССОВ ВОЛОЧЕНИЯ

В работе исследуется влияние сил инерции и вязкости материала на параметры процессов волочения труб, листового материала и проволоки. Для процессов волочения труб получено точное решение путем численного интегрирования. Для процессов волочения листового материала и проволоки вопрос упрощается предполагая, что напряженное и деформированное состояние зависит только от радиуса, в соответствии принятой цилиндрической

или сферической координатной системе. Констатируется, что при обычно применяемых скоростях волочения, влияние сил инерции является пренебрежимо малым. Исследовано, при каких именно ускорениях силы инерции следует учитывать в расчетах. Влияние вязкости материала на напряжения может быть весьма значительным для тонких листов материала, а также для труб и проволок малого диаметра.

#### Summary

#### THE INFLUENCE OF INERTIAL FORCES AND STRAIN RATE SENSITIVITY ON THE DRAWING PROCESSES OF METALS

The influence of inertial forces and viscosity of the material on the tube, wire and sheet-drawing processes is investigated. For the tube-drawing process an exact solution is obtained by means of numerical integration. For sheet and wire-drawing, the approximate solution is presented with an assumption that in the cylindrical or spherical coordinates respectively, the stresses and velocities depend on the radius only. It is found that for the drawing velocities used in practice the inertial forces are negligible. However, the strain rate sensitivity of the material cannot be neglected in the solution for thin sheet and wires because the strain rate reaches very high values even for small drawing velocities.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 grudnia 1964 r.*

---



PROBLEM ODCIĄŻENIA OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK W STANIE  
BŁONOWYM PRZY DUŻYCH ODKSZTAŁCENIACH NIESPRĘŻYSTYCH

JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy poruszono zagadnienie wiotkich konstrukcji powłokowych pracujących tylko na rozciąganie i mogących pod wpływem obciążenia w istotny sposób zmieniać swą pierwotną formę, jak również doznawać nawet znacznych odkształceń. Powłokom tym poświęca się ostatnio coraz więcej uwagi ze względu na liczne zastosowania inżynierskie [13, 24] i to zarówno w budownictwie jak i w konstrukcjach mechanicznych. Przy ścisłych obliczeniach takich powłok na ogół trzeba uwzględniać takie czynniki, jak znaczna nieliniowość fizyczna i geometryczna, duże odkształcenia, zasadnicze zmiany formy, anizotropia materiału, obciążenia dynamiczne, procesy termiczne i reologiczne, co oczywiście związane jest nieraz z trudnościami nie do pokonania. Dodatkowy kłopot stanowi problem stateczności przy rozciąganiu [14, 25, 33], związany z istnieniem maksimum obciążenia [1, 10, 12, 18, 29, 30, 32]. Ze względu na wspomniane trudności prace dotyczące omawianych powłok są bardzo fragmentaryczne i w większości dotyczą konkretnych zadań, rozwiązywanych zazwyczaj numerycznie przy mniejszych lub większych uproszczeniach i różnych założeniach ograniczających. Stąd np. nie ma, jak dotąd, prac poświęconych zagadnieniom dynamicznym, reologicznym i termicznym. Stosunkowo najwięcej zajmowano się skończonymi odkształceniami izotropowej membrany kołowej [8, 9, 12, 15, 24, 26, 28, 31], a także powłoki walcowej [10, 18, 20, 30] i stożkowej [22] pod stałym ciśnieniem wewnętrznym. Pewną próbą rozwiązania sprężystej ortotropowej membrany kołowej jest praca [19], a powłoki walcowej [6 i 7]. W pewnym sensie podstawą fizyczną wielu wspomnianych prac były wyniki doświadczeń, głównie E. A. DAVIS, prowadzonych na cienkościennych cylindrach stalowych [5] i miedzianych [4], poddanych złożonemu stanowi naprężenia: ciśnieniu wewnętrznemu i rozciąganiu. Rezultatem ich było ustalenie pewnych fenomenologicznych zależności fizycznych, które zostały sprecyzowane przez E. A. DAVIS [4], a następnie uogólnione przez A. NÁDÁIA [21]. Podają one związki, jakie zachodzą w trójosiowym stanie przy dużych deformacjach pomiędzy naturalnymi odkształceniami (w mierze logarytmicznej), a rzeczywistymi naprężeniami oraz analogiczne równania dla teorii płynięcia. W oparciu o równania Nádáia-Davisa I. W. KEPPEN [16] oraz bardziej ogólnie A. S. GRIGORIEW [11, 12] podali dla szerokiej klasy powłok obrotowych w stanie błonowym ogólne równania opisujące ich formę oraz stan naprężenia i odkształcenia w przypadku statycznych obciążeń normalnych. Założenie obrotowej symetrii

wiąże się z potrzebą zapewnienia znajomości kierunków głównych naprężeń i odkształceń po deformacji, co w ogólnym przypadku nie jest możliwe *a priori*. Dużym odkształceniom niesprężystym powłok o dowolnych kształtach regularnych ze specjalnym uwzględnieniem przybliżonych metod wariacyjnych poświęcona jest część monografii R. TROSTELA [24]. Czyni on jednak sporo założeń upraszczających, co rzutuje na wartość otrzymanych rezultatów.

Podstawą fizyczną innej grupy prac stały się równania, jakie daje teoria materiałów wysokoelastycznych (por. np. monografia [27]). Zależnie od stopnia przybliżenia zawierają one dowolną liczbę stałych materiałowych. Dzięki temu, choć wyprowadzono je dla materiałów nieliniowo sprężystych, można przy ich pomocy formalnie opisać zachowanie się metali w stanie plastycznym (obciążanie); podobnie zresztą jak i równania Nádaia-Davisa, uzyskane dla metali poza granicą sprężystości, można rozszerzyć także na niektóre inne materiały (np. gumopodobne, polimery). Przy związkach fizycznych dla materiałów kauczukopodobnych J. E. ADKINS i R. S. RIVLIN [1] rozwiązali przypadek membrany kołowej, a A. E. GREEN i J. E. ADKINS [33] przypadek powłoki obrotowo-symetrycznej. Zagadnieniu temu jest też poświęcona praca autora [23].

Wszystkie wspomniane wyżej prace traktują powłokę jako ciało sprężyste liniowo lub nieliniowo albo jako ciało plastyczne ograniczając się tylko do procesu obciążania. Natomiast celem niniejszej pracy jest podanie dla plastycznych powłok równań w procesie odciążania będących odpowiednikiem równań A. S. Grigoriewa dla powłok obciążanych [11, 12]. Ze względu na założony liniowy charakter procesu odciążania (w układzie współrzędnych: naturalne odkształcenia — rzeczywiste naprężenia) równania te dotyczą powłok metalowych.

## 2. Założenia wstępne i równania wyjściowe

W pracy przyjęto, że:

- 1) zachowana jest obrotowa symetria formy i obciążenia,
- 2) znajdują się one w stanie błonowym, są wiotkie i nie przenoszą naprężeń ściskających, wobec czego mogą zajść [11, 22] dwa przypadki:
  - a) naprężenia główne  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są dodatnie,
  - b) naprężenie pierścieniowe  $\sigma_2$  zeruje się i powstaje tzw. strefa fałdów ( $\sigma_1 > 0$  i  $\sigma_2 = 0$ );
- 3) pod obciążeniem mogą doznawać znacznych odkształceń i zasadniczych zmian formy;
- 4) obciążenie jest dowolne, normalne;
- 5) są wykonane z nieściśliwego materiału izotropowego o nieliniowej charakterystyce fizycznej przy obciążaniu i liniowej przy odciążaniu;
- 6) grubość ścianki przed odkształceniem jest stała.

Ponadto za podstawę do otrzymania równań powłoki w procesie czynnym przyjęto za A. S. GRIGORIEWEM [11, 12] następujące zależności:

a) Związki fizyczne. Równania Nádáia-Davisa [5, 21]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \Phi \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right), & \varepsilon_2 &= \Phi \left( \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right), \\ \varepsilon_3 &= \Phi \left( \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right), \end{aligned}$$

przy czym  $\sigma_3 = 0$ .

Ze związków (2.1) wynika oczywiście założenie o nieściśliwości materiału

$$(2.3) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Dla określenia funkcji  $\Phi$  przyjęto zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami bądź to w formie [12]

$$(2.4) \quad \varepsilon_i = \left( \frac{\sigma_i}{K_i} \right)^{1/\mu},$$

bądź to (por. [11])

$$(2.5) \quad \gamma = \text{sign } \tau \left| \frac{\tau}{K} \right|^{1/\mu},$$

gdzie

$$(2.6) \quad \gamma = \max(\gamma_{13}, \gamma_{23}), \quad \tau = \max(\tau_{13}, \tau_{23})$$

są odpowiednio maksymalnym odkształceniem postaciowym i maksymalnym naprężeniem stycznym, a

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}, \\ \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \end{aligned}$$

intensywnością odkształceń i intensywnością naprężeń.

b) Równania równowagi powłoki w stanie odkształconym przyjęto w formie podanej przez ALEKSIEJEWĄ [2]

$$\frac{d}{dX}(XH\sigma_1) = \sigma_2 H, \quad \frac{d}{dX}(XH\sigma_1 \sin \varphi) = q(X, Y)X,$$

gdzie  $X, Y$  jak na rys. 1,  $q(X, Y)$  oznacza obciążenie normalne na jednostkę powierzchni, a  $H$  grubość powłoki po odkształceniu.

c) Zależności geometryczne. Zgodnie z rys. 1 odkształcenia umowne wyniosą (por. [11, 12, 29])

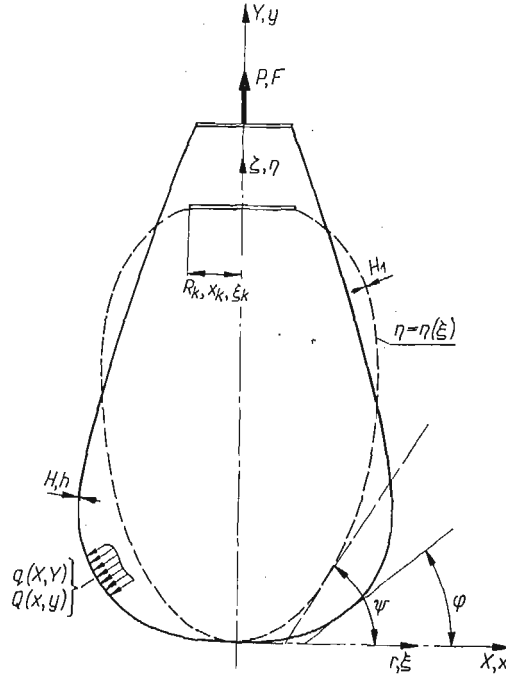
$$(2.9) \quad \varepsilon_1 = \frac{dS_1 - dS_{10}}{dS_{10}} = \frac{dX \cos \psi}{dr \cos \varphi} - 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{X - r}{r}, \quad \varepsilon_3 = \frac{H - H_1}{H_1},$$

gdzie  $dS_{10}, dS_1$  oznacza długość elementu południka powłoki przed i po odkształceniu,  $H_1$  grubość powłoki przed odkształceniem,  $\psi$  i  $r$  jak na rys. 1.

We wszystkich powyższych wzorach

$$(2.10) \quad \varepsilon_j = \ln(1 + e_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

oznaczają główne odkształcenia naturalne,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  główne naprężenia rzeczywiste — odpowiednio w kierunku południkowym, równoleżnikowym i prostopadłym do grubości powłoki;  $K, K_i, \mu$  są to stałe materiałowe.



Rys. 1. Powłoka — — — — — przed odkształceniem i ————— po odkształceniu

Dla uproszczenia wprowadzono wielkości bezwymiarowe (rys. 1):

$$(2.11) \quad x = \frac{X}{R_1} A, \quad y = \frac{Y}{R_1} A, \quad h = \frac{H}{H_1},$$

$$\xi = \frac{r}{R_1} A, \quad \eta = \frac{\zeta}{R_1} A,$$

gdzie  $\xi, \eta$  są współrzędnymi punktu powłoki przed, a  $x, y$  po deformacji;  $R_1$  oznacza dowolny wymiar charakteryzujący powłokę przed odkształceniem,  $A$  dowolny niezmianowany parametr najczęściej przyjmowany jako równy jedności. Ponadto zdefiniowano bezwymiarowe wielkości naprężeń i obciążenia; dla przypadku (2.4):

$$(2.12) \quad p_j = \frac{\sigma_j}{K_i}, \quad j = 1, 2, \quad Q(x, y) = \frac{R_1}{K_i H_1} q(X, Y),$$

a dla (2.5)

$$(2.13) \quad p_j = \frac{\sigma_j}{2K}, \quad j = 1, 2, \quad Q(x, y) = \frac{R_1 q(X, Y)}{2K H_1}.$$

Przy takich założeniach podane wyżej równania przyjmą postać ([11, 12]):  
równania fizyczne

$$(2.14a) \quad p_1 = -\frac{2}{3} \varepsilon_1^{n-1} (\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad p_2 = \frac{2}{3} \varepsilon_1^{n-1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

dla przypadku (2.4) oraz

$$(2.14b) \quad p_1 = (-\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)^\mu, \quad p_2 = (-\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)^{\mu-1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

dla przypadku (2.5) przy  $p_1 > p_2$ ,

$$(2.14c) \quad p_1 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^{\mu-1}(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad p_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^\mu$$

dla przypadku (2.5) przy ( $p_2 > p_1$ );

równania równowagi

$$(2.15a) \quad \frac{d}{dx}(xhp_1) = p_2h, \quad \frac{d}{dx}(xhp_1 \sin \varphi) = \frac{Q(x, y)}{A}x;$$

związki geometryczne

$$(2.16a) \quad \varepsilon_1 = \ln \left( \frac{dx \cos \varphi}{d\xi \cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln h.$$

Ponadto z geometrii powłoki (rys. 1) widoczne są związki

$$(2.17a) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$(2.17b) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \psi,$$

przy czym  $\eta = \eta(\xi)$  jest znaną funkcją określającą kształt powłoki przed odkształceniem. Równania (2.14), (2.15a), (2.16a), (2.17a) w najogólniejszym przypadku dają się sprowadzić do układu 4 równań typu

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= f_1(\xi; x, \vartheta, h, \varphi), & \frac{dy}{d\xi} &= f_2(\xi; x, \vartheta, h, \varphi), \\ \frac{dh}{d\xi} &= f_3(\xi; x, y, h, \varphi), & \frac{d\varphi}{d\xi} &= f_4(\xi; x, y, h, \varphi) \end{aligned}$$

z niewiadomymi funkcjami  $x(\xi)$ ,  $y(\xi)$ ,  $h(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ . Prawa strona równań (2.18) jest zależna od tego spośród równań (2.14), które wykorzystaliśmy. W szczególnych przypadkach równania (2.18) mogą przyjąć nieco prostszą postać, ale zawsze pozostają uciążliwe i poza paroma najprostszymi przypadkami nie dają się efektywnie scałkować. Równanie (2.18) wraz z wyprowadzeniem podaje A. S. GRIGORIEW [11, 12]. Opisują one przypadek powłoki, w którym  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ .

Jeśli w powłoce tworzy się strefa pofałdowana  $p_1 > 0$  i  $p_2 = 0$ , to układ wyjściowych równań (2.14), (2.15) i (2.16) ulegnie pewnej zmianie. I tak w równaniach fizycznych (2.14) należy przyjąć  $p_2 = 0$ ; drugie z równań (2.16) ze względu na skończoną szerokość  $S_2$  fałdy należy zastąpić związkiem

$$(2.16b) \quad S_2 = r\theta(1 + e_2),$$

przy czym współrzędne  $X$ ,  $Y$  odnoszą się tu nie do rzeczywistej pofałdowanej, lecz do pewnej fikcyjnej gładkiej powłoki «uśredniającej» fałdy. Powłokę taką utworzyłby system nici zaczepionych z jednej strony do dna powłoki, a z drugiej do granicy pomiędzy obszarami. Wreszcie równania równowagi przyjmą postać:

$$(2.15b) \quad \sigma_1 HS_2 = \text{const}, \quad \frac{d}{dX}(\sigma_1 HS_2 \sin \varphi) = q(X, Y)x\theta.$$

Równania powyższe i otrzymany następnie podstawowy układ równań typu (2.18), choć nieco prostszy, podał A. S. GRIGORIEW [11].

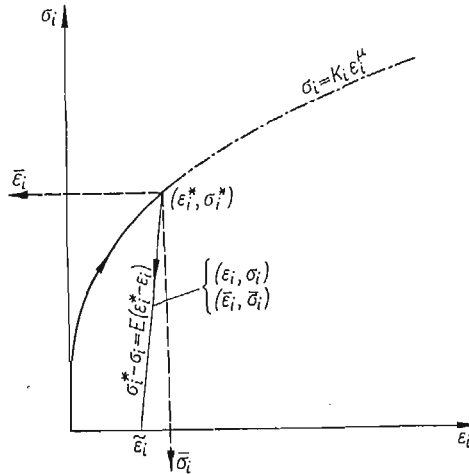
Celem niniejszej pracy jest podanie odpowiednika równań (2.18) dla przypadku odciążenia zarówno w obszarze czystego rozciągania jak i w obszarze pofałdowanym.

### 3. Podstawowy układ równań odciążenia dla powłoki

Przyjmijmy, że w procesie obciążania osiągnięty został pewien stan, który oznaczmy gwiazdką. Wprowadźmy następnie zgodnie z rys. 2 nowe wielkości

$$(3.1) \quad \bar{\sigma}_j = \sigma_j^* - \sigma_j, \quad \bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j^* - \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

przy czym z (2.2) wynika, że  $\bar{\sigma}_3 = 0$ . Tu  $\bar{\sigma}_0$ ,  $\bar{\varepsilon}_j$  oznaczają odpowiednio wielkość naprężeń i odkształceń głównych w nowym, a  $\sigma_j$ ,  $\varepsilon_j$  w starym układzie współrzędnych.



Rys. 2. Przebieg procesu obciążania i odciążania powłoki

Przyjmijmy ponadto, zgodnie z poprzednimi oznaczeniami (2.7), liniowe prawo odciążenia

$$(3.2) \quad \bar{\sigma}_i = E\bar{\varepsilon}_i,$$

gdzie  $E$  jest modulem sprężystości ekstrapolowanym na zakres dużych odkształceń.

Na podstawie (2.1) i (2.3) możemy napisać

$$(3.3) \quad \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}{\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3},$$

$$(3.4) \quad \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0.$$

Związki (3.2), (3.3) i (3.4) tworzą układ równań fizycznych dla przypadku odciążenia. Wprowadzając jak poprzednio [zależności (2.12) lub (2.13)] wielkości bezwymiarowe otrzymujemy stąd

$$(3.5) \quad \bar{p}_1 = -k(\bar{\varepsilon}_2 + 2\bar{\varepsilon}_3), \quad \bar{p}_2 = k(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3),$$

gdzie zależnie od prawa obciążania

$$(3.6) \quad k = \frac{2E}{3K_j}, \text{ jeśli przyjąć (2.4) i (2.12) lub}$$

$$(3.7) \quad k = \frac{E}{3K}, \text{ jeśli zachodzi (2.5) i (2.13).}$$

Związki geometryczne na podstawie (2.16a) i (3.1) można zapisać w postaci:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1^* - \varepsilon_1 = \ln \frac{dx}{d\xi} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi^*} - \ln \frac{dx}{d\xi} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi} = \ln \frac{dx^*}{dx} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi^*}, \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_2^* - \varepsilon_2 = \ln \frac{x^*}{\xi} - \ln \frac{x}{\xi} = \ln \frac{x^*}{x} = \alpha^* - \alpha, \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_3^* - \varepsilon_3 = \ln h^* - \ln h = \ln \frac{h^*}{h} = \beta^* - \beta. \end{aligned}$$

Wprowadzono tu dodatkowo oznaczenia

$$(3.9) \quad \alpha = \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \alpha^* = \varepsilon_2^* = \ln \frac{x^*}{\xi}, \quad \beta = \varepsilon_3 = \ln h, \quad \beta^* = \varepsilon_3^* = \ln h^*.$$

Stąd ze związków (3.5), (3.8), (3.9) otrzymano wyrażenia dla rzeczywistych bezwymiarowych naprężeń

$$(3.10) \quad \begin{aligned} p_1 &= p_1^* - \bar{p}_1 = p_1^* + k(\alpha^* + 2\beta^*) - k(\alpha + 2\beta), \\ p_2 &= p_2^* - \bar{p}_2 = p_2^* - k(\alpha^* - \beta^*) + k(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia do (2.15) otrzymujemy równania równowagi w przypadku odciążenia w następującej postaci:

$$(3.11a) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ [p_1^* + k(\alpha^* + 2\beta^*) - k(\alpha + 2\beta)] x h \} &= [p_2^* - k(\alpha^* - \beta^*) + k(\alpha - \beta)] h, \\ \frac{d}{dx} \{ [p_1^* + k(\alpha^* + 2\beta^*) - k(\alpha + 2\beta)] x h \sin \varphi \} &= \frac{Q(x, y)x}{A}. \end{aligned}$$

Układ równań (2.17a), (3.4) i (3.11a) przy wykorzystaniu związków (3.8) i (3.9) daje się sprowadzić do następującej postaci odpowiadającej równaniom (2.18)

$$(3.12a) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\xi \cos \varphi}{x h \cos \varphi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{x h \cos \varphi}, \\ \frac{dh}{d\xi} &= h \frac{\frac{\xi \cos \varphi}{x^2 h \cos \varphi} [z_1^* + (2\alpha + \beta + 1)] - z_2^*}{z_3^* - (\alpha + 2\beta + 2)}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{\frac{Q(x, y)}{A h k} - [z_1^* + z_3^* + (\alpha - \beta)] \frac{\sin \varphi}{x}}{\frac{x h \cos \varphi}{\xi} [z_3^* - (\alpha + 2\beta)]} \end{aligned}$$

lub w formie bardziej dogodnej do (numerycznych) obliczeń

$$(3.12b) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\xi}{xh} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{dx}{d\xi} \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{dh}{d\xi} &= h \frac{\frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} [z_1^* + (2\alpha + \beta + 1)] - z_2^*}{z_3^* - (\alpha + 2\beta + 2)}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{dx}{d\xi} \frac{\frac{Q(x, y)}{Ahk} - [z_1^* + z_3^* + (\alpha - \beta)] \frac{\sin \varphi}{x}}{[z_3^* - (\alpha + 2\beta)] \cos \varphi}. \end{aligned}$$

W równaniach tych

$$(3.13) \quad \begin{aligned} z_1^* &= \frac{p_2^* - p_1^*}{k} - (2\alpha^* + \beta^*), \\ z_2^* &= \frac{1}{k} \frac{dp_1^*}{d\xi} + \frac{1}{x^*} \frac{dx^*}{d\xi} + \frac{2}{h^*} \frac{dh^*}{d\xi}, \\ z_3^* &= \frac{p_1^*}{k} + (\alpha^* + 2\beta^*) \end{aligned}$$

są znanymi funkcjami zależnymi jedynie od wielkości charakteryzujących stan, od którego rozpoczęło się odciążenie. W przypadku gdy  $Q(x, y) = Q = \text{const}$ , czyli przy stałym wewnętrznym ciśnieniu w powłoce, czwarte z równań (3.12a) i (3.12b) daje się scałkować i przyjmuje postać

$$(3.14) \quad \sin \varphi = \frac{\frac{Qx}{A} + \frac{AF}{x}}{2kh[z_3^* - (\alpha + 2\beta)]},$$

gdzie

$$(3.15a) \quad F = \frac{P}{\pi H_1 K_1 R_1}$$

lub

$$(3.15b) \quad F = \frac{P}{2\pi H_1 K R_1}$$

jest bezwymiarowym odpowiednikiem wypadkowej siły  $P$  zaczepionej do krawędzi powłoki (np. do dna).

Równania (3.12) są rozwiązaniem postawionego w pracy zadania dla przypadku, gdy  $p_1 > 0$  i  $p_2 > 0$ . Dla otrzymania analogicznych równań w przypadku obszaru pofałdowanego, gdzie  $p_2 = 0$ , korzystając ze związków (3.10) obliczamy najpierw

$$(3.16) \quad p_1 = k(z_4^* - 3\beta),$$

przy czym

$$(3.17) \quad z_4^* = \frac{1}{k}(p_1^* + p_2^*) + 3\beta^*,$$



z tym, że jeśli obszar pofałdowany istniał również w procesie obciążania, należy w (3.17) dodatkowo przyjąć  $p_2^* = 0$ . Równania równowagi (2.15b) po przejściu na wielkości bezwymiarowe [por. (2.11), (2.12), (2.13)] i podstawieniu (3.16) przyjmą postać:

$$(3.11b) \quad \begin{aligned} (z_4^* - 3\beta)hs_2 &= \text{const}, \\ \frac{d}{dx} [(z_4^* - 3\beta)hs_2 \sin \varphi] &= \frac{Q(x, y)x\theta}{Ak}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.18) \quad s_2 = \frac{S_2}{R_1}.$$

Układ równań (2.17a), (3.4) i (3.11b) przy wykorzystaniu związków (3.8) i (3.9), z tym że wielkość  $\varepsilon_2$  określa się z równania (2.16b) wyrażonego w wielkościach bezwymiarowych — daje się sprowadzić do postaci:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\xi p_1 \cos \varphi}{C' \cos \psi} = \frac{e^{z_1^* + z_3^*} \cos \varphi}{h^2 \cos \psi}, \\ \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi p_1 \sin \varphi}{C' \cos \psi} = \frac{e^{z_1^* + z_3^*} \sin \varphi}{h^2 \cos \psi}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{Q(x, y)xe^{z_1^* + z_3^*}}{AkC'h^2 \cos \psi}, \\ h^2 k \xi (z_4^* - 3\beta) e^{-(z_1^* + z_3^*)} &= C', \end{aligned}$$

gdzie  $C' = p_1' h' x'$  jest stałą wyznaczaną z warunków ciągłości obszaru pofałdowanego z obszarem, gdzie  $p_1 > 0$  i  $p_2 > 0$ .

Warunek dla obliczenia odkształceń  $\varepsilon_2$  przyjmuje postać

$$(3.20) \quad 1 + \varepsilon_2 = \frac{C'}{p_1 h \xi} = h e^{-(z_1^* + z_3^*)}.$$

Równania (3.19) stanowią rozwiązanie postawionego w pracy zadania dla strefy fałdów, tj. gdy  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ . W ogólnym przypadku układ równań (3.19) jest na tyle złożony, że rozwiązywać go trzeba numerycznie, w szczególności jednak, gdy  $Q(x, y) = Q = \text{const}$ , daje się on rozwiązać stosunkowo prosto. Wówczas trzecie z równań (3.19) przyjmuje postać:

$$(3.21) \quad \sin \varphi = \frac{\frac{Q}{A} x^2 + FA}{2kC'}.$$

Stąd na podstawie związku (2.17a) przy przyjętym na rys. 1 kształcie powłoki ( $\cos \varphi < 0$ ) mamy:

$$(3.22) \quad y = y' - \int_x^x \frac{(m^2 t^2 + n^2) dt}{\sqrt{1 - (m^2 t^2 + n^2)^2}},$$

gdzie

$$(3.23) \quad m^2 = \frac{Q}{2AkC'}, \quad n^2 = \frac{FA}{2kC'}.$$

Całkę występującą w równaniu (3.22) można przedstawić za pomocą kombinacji całek eliptycznych zależnie od wartości stałych  $m^2$ ,  $n^2$ . Tak np. (por. [3])

$$(3.24) \quad y = y' + f(x') - \sqrt{a^2 + b^2} \left[ E(\gamma, \omega) - \frac{1}{2} F(\gamma, \omega) \right] + x \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{a^2 + x^2}},$$

gdzie

$$(3.25) \quad f(x') = \sqrt{a^2 + b^2} \left[ E(\gamma', \omega) - \frac{1}{2} F(\gamma', \omega) \right] - x' \sqrt{\frac{b^2 - x'^2}{a^2 + x'^2}},$$

$$\gamma = \arcsin \frac{x}{b} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + x^2}}, \quad \gamma' = \arcsin \frac{x'}{b} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + x'^2}}, \quad \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$a^2 = \frac{A}{Q} (2kC' + FA), \quad b^2 = \frac{A}{Q} (2kC' - FA),$$

jeśli  $b \geq x > 0$  i  $b \geq x' > 0$ .

W dalszym ciągu z czwartego z równań (3.19) zakładając, iż  $z_1^*$ ,  $z_3^*$  i  $z_4^*$  są znanymi funkcjami od  $\xi$  obliczamy (równanie przestępne)

$$(3.26) \quad h = h(\xi).$$

Natomiast z pierwszego uwzględniając związki (3.21), (3.23), (3.26) mamy

$$(3.27) \quad \int_{x'}^x \frac{dt}{\sqrt{1 - (m^2 t^2 + n^2)^2}} = -\frac{1}{\cos \varphi} \int_{\xi'}^{\xi} \frac{e^{z_1^* + z_3^*}}{h^2(u)} du.$$

Równanie to daje brakujący związek pomiędzy  $x$  a  $\xi$  i chociaż wyznaczyć go można tylko numerycznie, to jednak układ (3.19) jest tym samym efektywnie rozwiązany.

#### 4. Odształcenia i naprężenia resztkowe

Jak wiadomo, w konstrukcjach pracujących w zakresie plastycznym po zdjęciu obciążenia na ogół pozostają pewne naprężenia, tworzące samozrównoważony układ statyczny i pewne odształcenia resztkowe. Zbadajmy jak ta sprawa przedstawia się w rozpatrywanych przez nas powłokach. Aby określić warunki istnienia naprężeń resztkowych, rozwiążmy względem  $p_1$  i  $p_2$  układ równań równowagi (2.15a), przyjmując  $Q(x, y) = 0$ , skąd otrzymamy:

$$(4.1) \quad p_1 = \frac{C}{xh \sin \varphi}, \quad p_2 = \frac{C}{h} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Jeśli przyjąć

$$(4.2) \quad C = \frac{P}{2\pi K_1 H_1 R_1} \left[ \text{lub odpowiednio } C = \frac{P}{4\pi K H_1 R_1} \text{ dla (2.13)} \right],$$

to stała  $C$  odpowiada wypadkowej sile  $P$  działającej na dno (lub krawędź) powłoki (rys. 1). Przy braku obciążenia występowanie siły  $P$ , a co za tym idzie naprężeń

resztkowych, związane jest z reakcją nieprzesuwnych den (jeśli istnieją dwa, a nie jedno jak na rys. 1) powłoki. Jeśli zatem warunki brzegowe zezwalają na swobodny wzajemny przesuw den, to naprężenia resztkowe nie wystąpią. W przeciwnym przypadku należy je wyznaczyć zakładając przy dnach reakcje  $P$ , których wielkość określa się z warunków nieprzesuwności tych den (por. [10]).

Natomiast określenie odkształceń resztkowych jest bardziej złożone. Można je co prawda wyznaczyć (najczęściej numerycznie) z układów równań (3.12) i (3.19) jako graniczny przypadek dla  $Q(x, y)$  zmierzającego do zera, jest to jednak droga bardzo żmudna [trzeba tu zaznaczyć, że w takim przypadku należy w obliczeniach przyjąć za  $Q(x, y)$  choćby bardzo małą, ale różną od zera wielkość, gdyż przy rozpatrywaniu wiotkich powłok czyni się milczące założenie, że zachowują one swą formę dzięki istnieniu pewnego niewielkiego ciśnienia wewnętrznego]. Jeśli jednak po zdjęciu obciążenia naprężenia w powłoce zerują się, to przy dodatkowym założeniu, że maksymalne odkształcenia we wszystkich punktach powłoki zostały osiągnięte w procesie obciążania, co zachodzi np. w przypadku, gdy odciążenie w całej powłoce odbywa się proporcjonalnie do jednego tylko parametru  $Q_0$ , gdzie  $Q(x, y) = Q_0 m(x, y)$ , — odkształcenie resztkowe można wyznaczyć w prosty sposób z równań (3.10) przyjmując

$$(4.3) \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0,$$

oraz z warunku nieściśliwości (2.3). Otrzymamy stąd:

$$(4.4) \quad \tilde{\varepsilon}_1 = -\alpha^* - \beta^* - \frac{2p_1^* - p_2^*}{3k}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \alpha^* + \frac{p_1^* - 2p_2^*}{3k}, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \beta^* + \frac{p_1^* + p_2^*}{3k}.$$

Rezultaty te są słuszne zarówno w przypadku, gdy proces odciążenia zachodzi wg równań (3.12) jak i (3.19) z tym jednak, że jeśli przy odciążaniu dana część powłoki znajdowała się w strefie fałdów, należy dodatkowo przyjąć  $p_2^* = 0$ . Z równań (4.4) otrzymujemy:

$$(4.5) \quad \tilde{x} = x^* e^{\frac{p_1^* - 2p_2^*}{3k}}, \quad \tilde{h} = h^* e^{\frac{p_1^* + p_2^*}{3k}},$$

gdzie wężykiem oznaczono jak poprzednio stan po całkowitym odciążeniu. Trzecią wielkość ( $\tilde{y}$  lub  $\tilde{\varphi}$ ) decydującą o formie powłoki obliczymy z równań (3.12) i (3.19) otrzymując jednakowo

$$(4.6) \quad \frac{d\tilde{y}}{d\xi} = \frac{\xi}{x^* h^*} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\cos \varphi} e^{\frac{\tilde{p}_2^* - 2\tilde{p}_1^*}{3k}},$$

przy czym

$$(4.7) \quad \cos \tilde{\varphi} = \frac{d\tilde{x}}{dx^*} e^{\frac{2p_1^* - p_2^*}{3k}} \cos \varphi^*.$$

W wyrażeniu tym pochodną  $d\tilde{x}/dx^*$  obliczamy ze związków (4.5)

$$(4.8) \quad \frac{d\tilde{x}}{dx^*} = \left[ 1 + \frac{d\xi}{dx^*} \frac{x^*}{3k} \left( \frac{dp_1^*}{d\xi} - 2 \frac{dp_2^*}{d\xi} \right) \right] e^{\frac{p_1^* - 2p_2^*}{3k}},$$

Pochodne  $dp_1^*/d\xi$  i  $dp_2^*/d\xi$  obliczamy dla konkretnych przyjętych związków fizycznych. Tak np. na podstawie (2.14a), (2.16a) i (3.9):

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{dp_1^*}{d\xi} &= \frac{p_1^*}{2B_1^*B_4^*} \left\{ \frac{d\alpha^*}{d\xi} [2B_4^* + (\mu - 1)B_1^*B_2^*] + \frac{d\beta^*}{d\xi} [4B_4^* + (\mu - 1)B_1^{*2}] \right\}, \\ \frac{dp_2^*}{d\xi} &= \frac{p_2^*}{2B_3^*B_4^*} \left\{ \frac{d\alpha^*}{d\xi} [2B_4^* + (\mu - 1)B_2^*B_3^*] + \frac{d\beta^*}{d\xi} [-2B_4^* + (\mu - 1)B_1^*B_3^*] \right\}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{d\xi} &= \frac{1}{x^*} \frac{dx^*}{d\xi} - \frac{1}{\xi}, & B_1^* &= \alpha^* + 2\beta^*, & B_2^* &= \beta^* + 2\alpha^*, \\ \frac{d\beta^*}{d\xi} &= \frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{d\xi}, & B_3^* &= \alpha^* - \beta^*, & B_4^* &= \alpha^{*2} + \beta^{*2} + \alpha^*\beta^*. \end{aligned}$$

Jeśli ponadto  $p_2^* = 0$ , to

$$(4.11) \quad \frac{dp_1^*}{d\xi} = \frac{\mu p_1^*}{h^* \ln h^*} \frac{dh^*}{d\xi}.$$

Jak widać, pochodna  $d\tilde{x}/dx^*$  jest funkcją jedynie znanych wielkości i można ją określić w każdym punkcie powłoki, a stąd na podstawie (4.6) i (4.7) obliczyć współrzędną  $\tilde{y}$ .

### 5. Proste przykłady

Dla ilustracji i choćby pobieżnej jakościowej oceny problemu podamy kilka prostych przykładów, w których przy przyjętych poprzednio założeniach można otrzymać ścisłe rezultaty. Rozwiązania dla tych przypadków w procesie obciążania można znaleźć np. w pracy [12]. I tak weźmy pod uwagę powłokę kołistą o promieniu początkowym  $R_1$  i grubości początkowej  $H_1$  poddaną równomiernemu ciśnieniu wewnętrznemu o stałej wartości  $q$ . Przyjawszy, iż obciążenie zachodzi w myśl związku (2.4), wprowadźmy bezwymiarowe wielkości

$$(5.1) \quad p = \frac{\sigma}{K_i}, \quad Q = \frac{qR_1}{K_i H_1}, \quad h = \frac{H}{H_1}, \quad e = \frac{R}{R_1},$$

gdzie  $\sigma$  oznacza naprężenie rzeczywiste,  $R$  — promień,  $H$  — grubość powłoki odkształconej. Zachodzą tu następujące związki:

$$(5.2) \quad \ln e = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_3}{2} = -\frac{1}{2} \ln h = \frac{1}{2} \varepsilon_i, \quad \text{skąd } R = \frac{R_1}{h^2}.$$

Z równania równowagi

$$(5.3) \quad p = \frac{Qe}{2h} = p_i$$

na podstawie (2.4), (5.1), (5.2) i (5.3)

$$(5.4) \quad Q = 2h^3(-2 \ln h)^\mu, \quad \text{skąd } Q_{\max} = 2 \left( \frac{\mu}{3e} \right)^\mu \text{ dla } h = e^{-\frac{\mu}{3}}.$$

Równania odciążenia w bezwymiarowych wielkościach podobnie jak w punkcie 3 przyjmujemy w postaci liniowej i przy uwzględnieniu (3.6) i (5.3) mamy:

$$(5.5) \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^* - \frac{1}{k} \left( p_i^* - \frac{Q}{2h^3} \right),$$

skąd

$$(5.6) \quad Q = 2h^3 [p_i^* - k(\varepsilon_i^* + \ln h)],$$

gdzie jak poprzednio wielkości z gwiazdką odpowiadają początkowi odciążenia. Przyjmując  $Q = 0$  otrzymamy wielkości resztkowe

$$(5.7) \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^* - \frac{p_i^*}{k}, \quad \tilde{h} = h^* e^{\frac{(-\ln h^*)^\mu}{k}}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{h^{*2}} e^{-\frac{2}{k}(-\ln h^*)^\mu}.$$

Dla otrzymania wykresów przyjęto konkretne wartości liczbowe  $K_I = 3820 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ ,  $k = 5500$ ,  $\mu = 1/3$  odpowiadające średnim wartościom stali w doświadczeniach Davisa [5]. Stąd np. przy pełnym odciążeniu

$$(5.8) \quad \tilde{h}_{\max} = 1,00126 h^*.$$

Podobnie znikomy okazuje się w tym przypadku wpływ odciążenia na  $\tilde{\varepsilon}$  czy  $\tilde{R}$ . Wyniki przedstawiono na rys. 3. Linia ciągła oznacza obszar stateczny, linia przerywana niestateczny. Pokazano dwa przypadki odciążenia przy obciążeniu maksymalnym  $Q^* = Q_{\max}$  i przy obciążeniu  $Q^* < Q_{\max}$ .

Jako drugi przykład rozpatrzono nieskończenie długą powłokę walcową poddaną stałemu ciśnieniu wewnętrznemu o wielkości  $q$ . Podobnie jak poprzednio  $R_1$  i  $H_1$  oraz  $R$  i  $H$  oznaczają odpowiednio promień i grubość powłoki przed i po odkształceniu. Tym razem przyjęto, iż obciążenie zachodzi w myśl prawa (2.14c) ( $\sigma_2 > \sigma_1$ ). Przyjmując oznaczenia bezwymiarowe (2.13) i (5.1) z równań równowagi mamy

$$(5.9) \quad p_2 = 2p_1 = \frac{Qq}{h}.$$

Analogicznie jak dla powłoki kolistej otrzymujemy  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\ln h$ ,  $q = 1/h$  oraz

$$(5.10) \quad Q = h^2(-2 \ln h)^\mu,$$

skąd

$$Q_{\max} = \left( \frac{\mu}{e} \right)^\mu \text{ dla } h = e^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Odciążenie zachodzi w myśl związku:

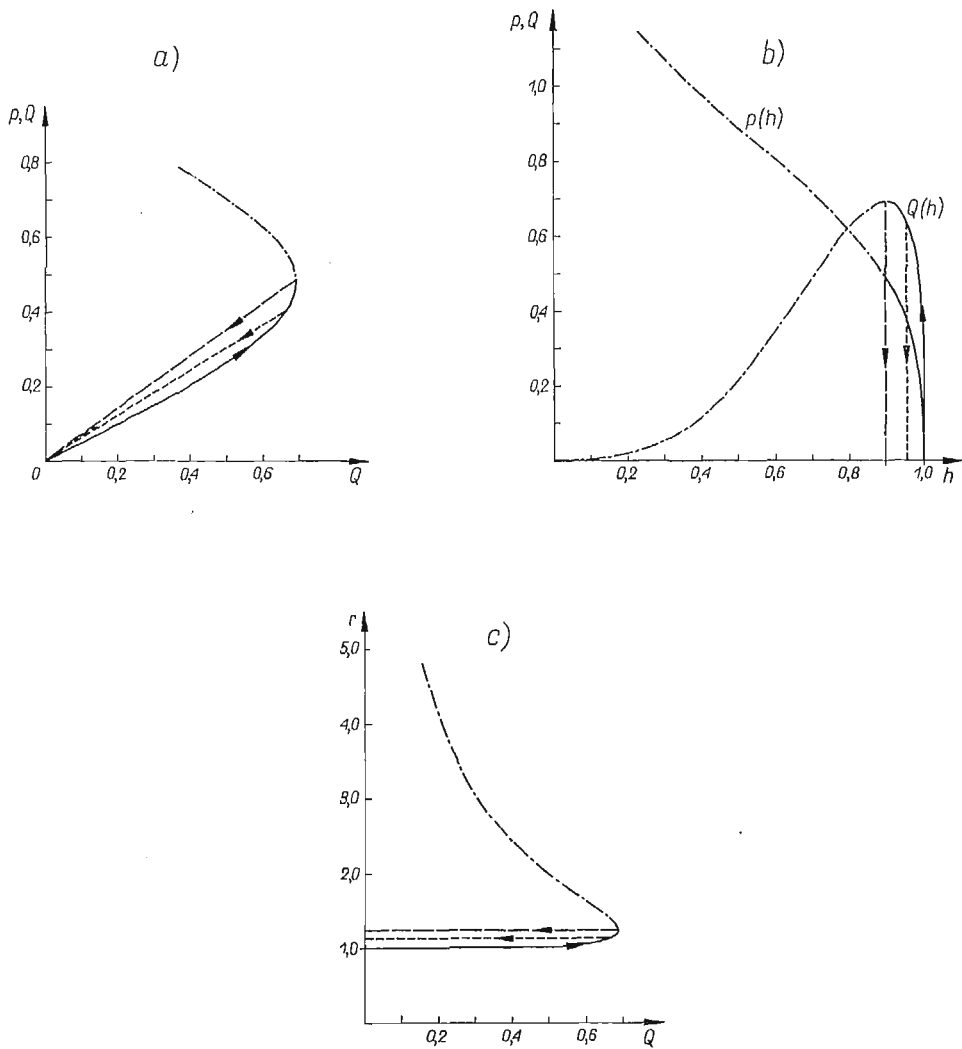
$$(5.11) \quad p_2^* - p_2 = 2k(\varepsilon_2^* - \varepsilon_2),$$

gdzie  $k$  określone jest równością (3.7), skąd następnie

$$(5.12) \quad Q = h^2 \left( p_2^* - 2k \ln \frac{h^*}{h} \right).$$

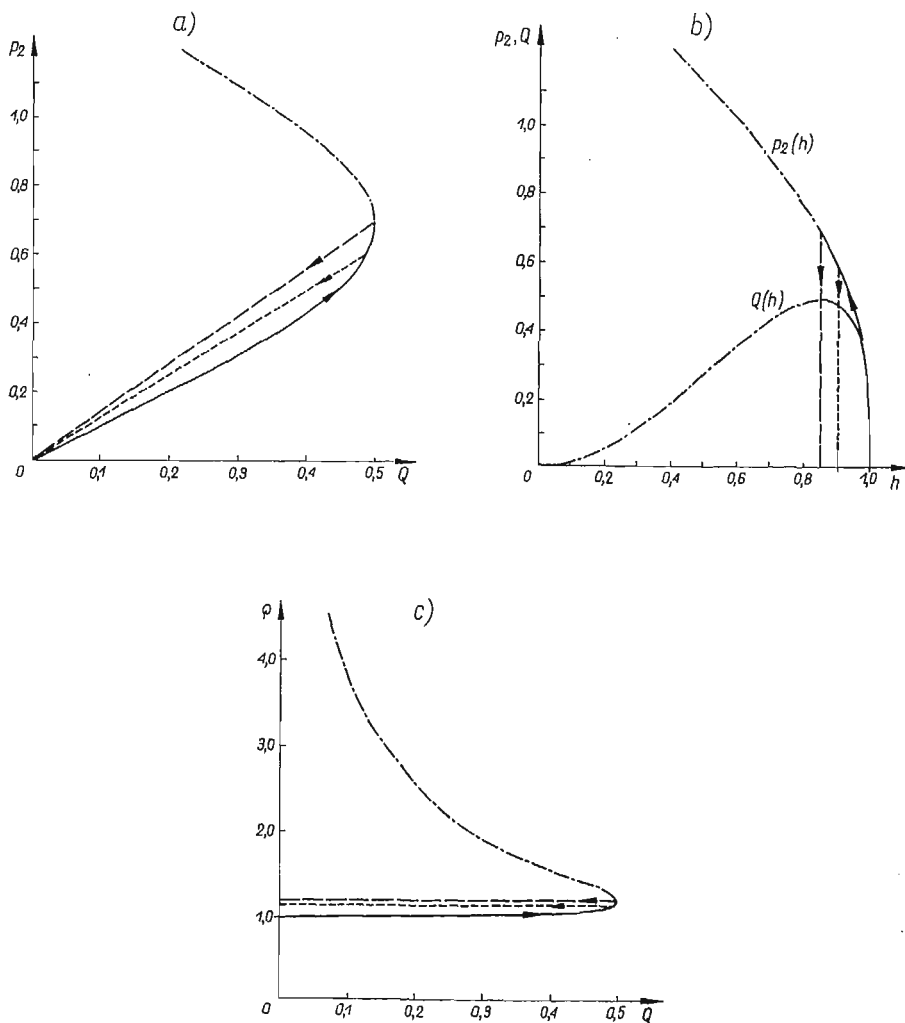
Przyjmując  $Q = 0$  otrzymujemy wielkości resztkowe

$$(5.13) \quad \tilde{\varepsilon}_2 = -\tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_2^* - \frac{p_2^*}{2k}, \quad \tilde{h} = h^* e^{\frac{p_2^*}{2k}}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{h^*} e^{-\frac{p_2^*}{2k}}.$$



Rys. 3. Powłoka kulista: — proces obciążania, obszar stateczny; - - - - - proces obciążania, obszar niestateczny; - - - - - proces odciążania;  
 a - naprężenie jako funkcja obciążenia, b - wykresy funkcji  $p(h)$  i  $Q(h)$ , c - wykres funkcji  $r(Q)$

Wyniki powyższych rozważań przy przyjęciu konkretnych wartości liczbowych jak w poprzednim przykładzie pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Powłoka walcowa nieskończenie długa obciążona parciem wewnętrznym: — proces obciążania, obszar stateczny; - · - · - · proces obciążania, obszar niestateczny; — — — — proces odciążania;

a - naprężenie  $p_2$  jako funkcja obciążenia, b - wykresy funkcji  $p_2(h)$  i  $Q(h)$ , c - wykres funkcji  $q(Q)$

Rozpatrzono również powłokę jak w przykładzie drugim, lecz obciążoną jedynie siłami  $P$  przyłożonymi do jej końców. Przyjmując jak poprzednio oznaczenia bezwymiarowe i uwzględniając (3.15b) możemy napisać równanie równowagi:

$$(5.14) \quad p_1 = \frac{F}{h^2}, \quad p_2 = 0.$$

W procesie obciążania przy spełnieniu (2.14b) mamy

$$(5.15) \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 = \ln \varrho = \ln h$$

oraz

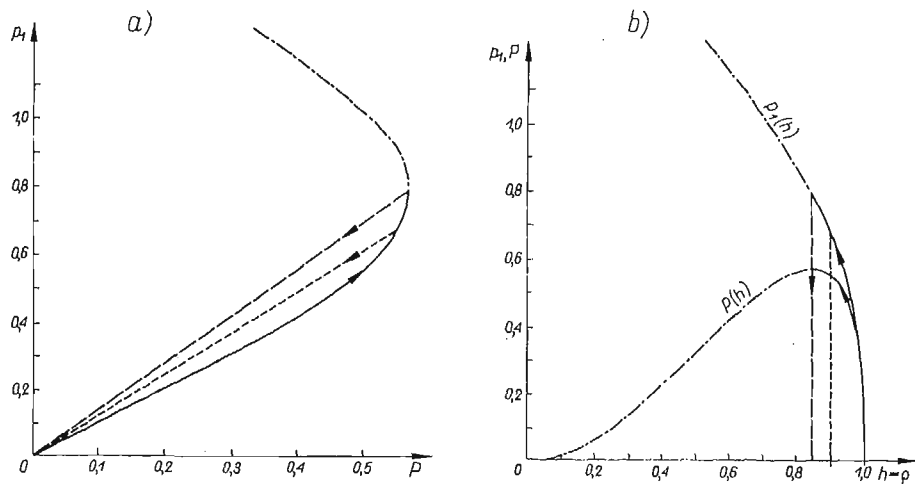
$$(5.16) \quad F = h^2 (-3 \ln h)^{\mu}.$$

Równanie odciążenia w bezwymiarowych wielkościach ma postać

$$(5.17) \quad p_1^* - p_1 = 3k(\varepsilon_3^* - \varepsilon_3),$$

skąd następnie

$$(5.18) \quad F = h^2 \left( p_1^* + 3k \ln \frac{h^*}{h} \right).$$



Rys. 5. Powłoka walcowa, nieskończenie długa, rozciągana osiowo: — proces obciążania, obszar stateczny; - · - · - proces obciążania, obszar niestateczny; - - - - proces odciążania;

a - naprężenie  $p_1$  jako funkcja obciążenia, b - wykresy funkcji  $p_1(h)$ ,  $P(h)$

Przyjmując  $F = 0$  otrzymujemy wielkości resztkowe

$$(5.19) \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3^* + \frac{p_1^*}{3k}, \quad \tilde{\varrho} = \tilde{h} = h^* e^{\frac{p_1^*}{3k}}.$$

Odpowiednie wykresy dla wartości liczbowych z poprzednich przykładów pokazano na rys. 5.

## 6. Uwagi końcowe

Jak łatwo zauważyć, w podanych wyżej przykładach przy dużych (rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu procent) odkształceniach metalowej powłoki odciążenie prawie nie wpływa na jej kształt, a odkształcenia nawet przy pełnym odciążeniu niemal nie różnią się od wartości osiągniętych w procesie obciążania ( $\tilde{h} \approx h^*$ ,  $\tilde{\varrho} \approx \varrho^*$ )



Można więc przypuszczać, że zjawisko to wystąpi również i przy bardziej skomplikowanych kształtach powłoki i rodzajach obciążenia. Jednakże w odróżnieniu od przytoczonych wyżej przykładów w ogólnym przypadku nawet w procesie odciażania naprężenia zazwyczaj nie są liniowymi funkcjami obciążenia (obciążenie nie jest proste w sensie Iliuszina). Powoduje to m.in. możliwość pojawienia się obszaru po-fałdowań, nawet jeśli przedtem go nie było, a ponadto wiąże się zazwyczaj z bardzo uciążliwymi obliczeniami rachunkowymi. Spróbujmy jednak w oparciu o wnioski, jakie nasuwają przytoczone przykłady, określić warunki, przy których naprężenia  $p_1$  i  $p_2$  w każdym dowolnie obranym punkcie powłoki będą z dostatecznym przybliżeniem liniowymi funkcjami obciążenia, co równocześnie zabezpieczy powłokę przed powstaniem strefy fałdów.

Rozpatrzmy w tym celu wyjściowe równania powłoki

$$(6.1) \quad \frac{d}{dx}(xhp_1) = hp_2, \quad \frac{d}{dx}(xhp_1 \sin \varphi) = Q(x, y)x.$$

Założmy, że obciążenie zmniejszać się będzie proporcjonalnie do jednego parametru  $Q_0$ , gdzie

$$(6.2) \quad Q(x, y) = Q_0 m(x, y).$$

Wówczas z równań (6.1) otrzymamy

$$(6.3) \quad p_1 = Q_0 \frac{\int m(x, y) x dx}{xh \sin \varphi} + \frac{C}{xh \sin \varphi}.$$

Fizycznie stała  $C$  jak wiadomo (3.14) i (3.15) oznacza wypadkową siłę przyłożoną do dna (lub krawędzi) powłoki, przy czym może to być zarówno dane obciążenie na przesuwym denku jak i reakcja w przypadku zamocowania. Aby utrzymać proporcjonalność  $p_1$  do jednego tylko parametru  $Q_0$ , należy przyjąć, że warunki brzegowe zezwalają na swobodny przesuw dna powłoki, a jeżeli przykłada się siłę, to zmienia się ona proporcjonalnie do  $Q_0$ , czyli

$$(6.4) \quad C = Q_0 \cdot C_1.$$

Wówczas można napisać

$$(6.5) \quad p_1 = Q_0 f_1,$$

gdzie

$$f_1 = \frac{C_1 + \int m(x, y) x dx}{xh \sin \varphi}.$$

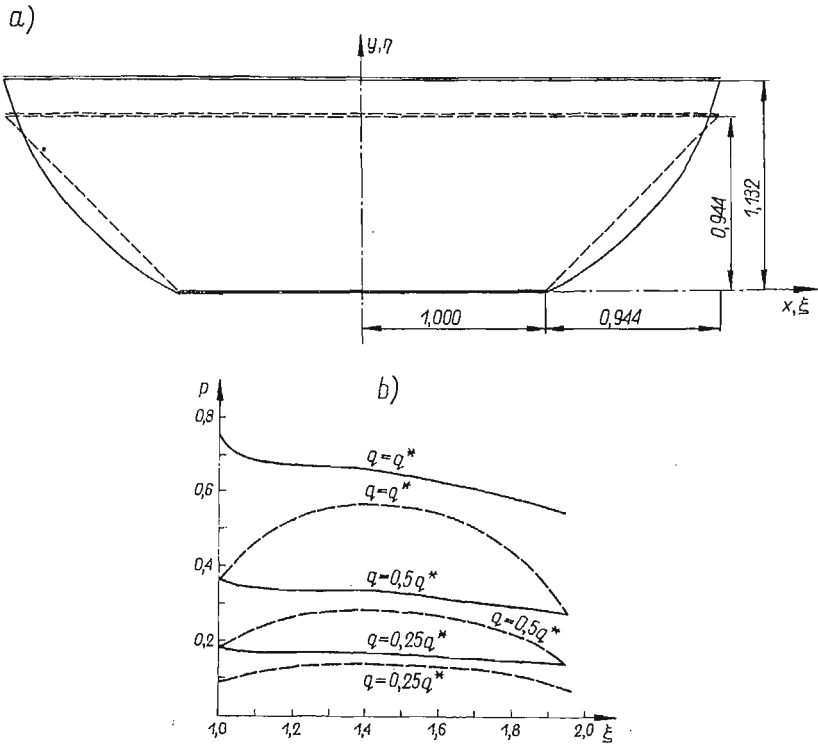
Z pierwszego z równań (6.1) otrzymamy wtedy

$$(6.6) \quad p_2 = Q_0 f_2,$$

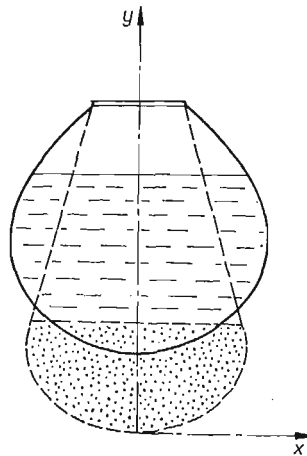
gdzie

$$f_2 = f_1 + \frac{x}{h} \frac{d}{dx}(hf_1).$$

Jeśli przy tym okazałoby się, iż w procesie obciążania odkształcenia na całej wysokości powłoki były znaczne, to zgodnie z wynikami rozpatrywanych przykładów można by



Rys. 6. a – Kształt powłoki ———— przed odkształceniem, ————— po odkształceniu  
 b – Wykresy naprężeń w powłoce stożkowej przy ociążaniu —————  $p_1$ ; - - - -  $p_2$ .



Rys. 7. Powłoka zmieniająca w istotny sposób swój kształt przy ociążaniu: ————— przed ociążaniem, - - - - - po częściowym ociążaniu

z dość dobrym przybliżeniem przyjmując, że przy odciążeniu deformacja nie zmienia się, czyli że

$$(6.7) \quad x \approx x^*, \quad h \approx h^*, \quad \varphi \approx \varphi^*, \quad f_1 \approx f_1^*, \quad f_2 \approx f_2^*.$$

Przy takich założeniach naprężenia  $p_1$  i  $p_2$  będą liniowymi funkcjami obciążenia i wyrażą się wzorami:

$$(6.8) \quad p_1 = Q_0 \frac{p_1^*}{Q_0^*}, \quad p_2 = Q_0 \frac{p_2^*}{Q_0^*}.$$

Wzory (6.7) i (6.8) dają elementarne rozwiązanie problemu odciążenia, przy podanych wyżej założeniach upraszczających. Przykładem powłoki rozwiązanej w myśl wzorów (6.7) i (6.8) może być (zob. [22]) powłoka stożkowa (rys. 6) obciążona parciem wewnętrznym gazu wzrastającym do wielkości  $Q$  (bezwym.), a następnie malejącym stopniowo do 0. Rysunek 6a pokazuje kształt tej powłoki przy maksymalnym obciążeniu i zgodnie z (6.7) także po odciążeniu, rys. 6b przedstawia rozkład naprężeń wzdłuż powłoki przy zmniejszaniu się  $Q$ . Przedstawione wyżej (6.7), (6.8) rozważanie zawiera m.in. jako przypadki szczególne obciążenie powłoki stałym parciem wewnętrznym lub rozciąganie siłą skupioną. Jako przykład przypadku, do którego przeprowadzone wyżej uproszczone rozumowanie nie da się zastosować, można podać powłokę obciążoną parciem hydrostatycznym, przy czym odciążenie odbywa się na skutek ubytku cieczy (rys. 7).

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. E. ADKINS, R. S. RIVLIN, *Phil. Trans. A*, 244 (1952).
2. С. А. АЛЕКСЕЕВ, *Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску*, Инж. Сб. АН СССР, 10 (1951).
3. P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
4. E. A. DAVIS, *Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses*, *Trans. ASME*, 65 (1943), A-187.
5. E. S. DAVIS, *Yielding and fracture of medium carbon steel under combined stress*, *J. Appl. Mech.*, 1, 1954.
6. И. И. ФЕДИК, *Безмоментные ортотропные оболочки вращения при больших деформациях*, Труды всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Киев 1962.
7. И. И. ФЕДИК, *Некоторые задачи равновесия ортотропных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Теория оболочек и пластин, Изд. АН Арм ССР, Эревань 1964.
8. A. GLEYZAL, *Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure*, *J. Appl. Mech.*, 3, 1948.
9. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Исследование работы круглой мембраны при больших прогибах за пределом упругости*, Инж. Сб., (1951).
10. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех. 6, 21 (1957).
11. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., 6, 25 (1961).
12. A. S. GRIGORIEV, *The stress state and the carrying capacity of flexible plates and shells at large deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN, Warszawa 1964, repr. *Non-classical Shells Problems*, Proc. IASS Symp., Warsaw, sept. 1963.
13. А. В. ГУБЕНКО и др., *Пневматические строительные конструкции*, Гос. Изд. Лит. по Строит. Арх. и Строит. Мат., Москва 1963.

14. О. ХОФМАН, Т. САХС, *Введение в теорию эластичности для инженеров*, ГНТИ, Москва 1957.
15. И. В. КЕППЕН, *Большие прогибы круглой пластинки под действием равномерного распределенного давления*, Научные труды МПИ, 7-8, 1957.
16. И. В. КЕППЕН, *Конечные деформации безмоментной оболочки вращения под действием гидростатического давления*, Сб. Расчеты на прочность, Машгиз, М., 6, 1960.
17. А. Н. КРЫЛОВ, *Лекции о приближенных вычислениях*, Изд. АН СССР, Ленинград 1933.
18. W. T. LANKFORD, E. SEIBEL, *Some problems in unstable plastic flow under biaxial tensions*, Metals Technol, August 1947.
19. И. С. МАМЕДОВ, *Большие прогибы ортотропной мембраны*, Инж. Ж. АН СССР, 1, 3 (1963).
20. Z. MARCINIAK, *Analiza stateczności cienkościennej powłoki walcowej poddanej rozciąganiu w stanie plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 10 (1959).
21. A. NÁDÁI, *Theory of flow and fracture of solids*, New York-Toronto-London 1950.
22. Я. ОРКИШ, *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, Инж. Ж. АН СССР, 5 (1965).
23. Я. ОРКИШ, *Равновесие безмоментных оболочек вращения из каучукоподобных материалов*, Изв. АН СССР, ОТН, 4(1965).
24. F. OTTO, R. TROSTEL, *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Fachverlag, Frankfurt-Berlin 1962.
25. Ю. Т. ПАНОВКО, И. И. ГУБАНОВА, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Изд. наука, Москва 1964.
26. TRAN-LYU-CZONG, Изв. АН СССР, ОТН. Мех. i Маш., 1964.
27. L. TRELOAR, *The physics of rubber elasticity*, Oxford 1948.
28. N. A. WEIL, *Approximation to plastic behavior of circular membrans*, Proc. of The ASCE 83 (1957), 1139.
29. N. A. WEIL, *Rupture characteristics of safety diaphragms*, J. Appl. Mech., 26 (1959), 621.
30. N. A. WEIL, *Tensile instability of thin-walled cylinders of finite length*, Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press Ltd., 5 (1963), 487-506.
31. A. N. WEIL, N. M. NEWMARK, *Large plastic deformations of circular membrans*, J. Appl. Mech., 4, 1955.
32. Z. WESOŁOWSKI, *The axially symmetric problem of stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., 3, 15 (1963).
33. A. E. GREEN and J. E. ADKINS, *Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics*, Clarendon Press, Oxford 1960.

## Р е з ю м е

ПРОБЛЕМА РАЗГРУЗКИ ОСЕ-СИММЕТРИЧЕСКИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ  
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Существующие до сих пор работы, по большим неупругим деформациям осе-симметрических оболочек вращения, посвящены процессу нагрузки. В настоящей же работе рассматривается вопрос о разгрузке таких оболочек, т.е. расширяются в этом смысле работы [11 и 12]. При этом предполагается линейный закон разгрузки (в координатной системе логарифмические деформации — действительные напряжения), т.е. рассуждения относятся, тем самым, к металлическим оболочкам. В результате рассуждений получено дифференциальное уравнение процесса разгрузки рассматриваемых оболочек: (3.12) в случае когда  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_2 > 0$ , а также (3.19) в так называемой зоне складок, когда  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_2 = 0$ .

Кроме того, проводится анализ возможности упрощения этих уравнений и даются точные решения для нескольких самых простых случаев.

## Summary

UNLOADING PROCESS OF THE ROTATIONALLY SYMMETRIC MEMBRANE SHELLS  
WITH LARGE DEFORMATIONS

All the papers dealing with large unelastic deformations of rotationally symmetric shells in membrane state of stress are concerned with the loading process. In the present paper being the extension of the results given in [11 and 12] the unloading process of such shells is investigated. Since only metallic shells are considered the linear unloading law (in the logarithmic strain — true stress coordinates) is assumed. The differential equation (3.12) is obtained for the case  $\sigma_1 > 0$ , and  $\sigma_2 > 0$ , and equation (3.19) in folded zone where  $\sigma_1 > 0$  and  $\sigma_2 = 0$ . Moreover, an analysis of possible simplification of these equations is given. The exact solutions of some simple particular cases are presented.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI  
I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lipca 1964 r.*

---



---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

---

### TEMATYKA MIĘDZYNARODOWEGO SYMPOZJUM REOLOGII I MECHANIKI GRUNTÓW W GRENOBLE

#### 1. WSTĘP

W dniach od 1 do 8 kwietnia 1964 r. odbyło się w Grenoble Międzynarodowe Sympozjum Reologii i Mechaniki Gruntów zorganizowane przez Zakład Mechaniki Płynów Uniwersytetu w Grenoble. Sympozjum odbyło się pod egidą Międzynarodowego Stowarzyszenia Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej przy współudziale Międzynarodowego Stowarzyszenia Mechaniki Gruntów i Fundamentowania.

Program Sympozjum obejmował.

1. Teorie stosowane w mechanice gruntów: reologia teoretyczna różnych materiałów, statyka i dynamika gruntów oraz analityczne i numeryczne metody rozwiązywania zagadnień analizy matematycznej, stosowane w teoriach mechaniki gruntów.

2. Badania doświadczalne zjawisk mechanicznych występujących w gruncie; doświadczalne określenie praw reologicznych różnych materiałów dla złożonych i zmiennych warunków brzegowych; sposoby pomiaru naprężeń, odkształceń, prędkości odkształceń oraz porównania danych doświadczalnych z przewidywaniami teoretycznymi.

Zgłoszone referaty zgrupowano w dwóch sekcjach: teoretycznej i doświadczalnej, a te z kolei podzielono na dwie podsekcje.

a. Sekcja teoretyczna. Pierwsza podsekcja obejmowała: teoretyczne prawa zachowania się ciał oraz ustalenie podstawowych równań zagadnień mechaniki, dla których ośrodek gruntowy może stanowić punkt wyjścia. Druga podsekcja obejmowała metody rozwiązania równań mechaniki gruntów.

b. Sekcja doświadczalna. Trzecia podsekcja obejmowała doświadczalne określenie praw reologii ciał, sposoby pomiaru właściwości mechanicznych gruntu w laboratorium i w terenie (*in situ*). Czwarta podsekcja dotyczyła doświadczalnej weryfikacji metod obliczeniowych stosowanych w mechanice gruntów, badań modelowych i pomiarów *in situ*.

Powyższy program Sympozjum wprowadził określony podział tematyczny nadesłanych referatów i stosownie do tego podziału przedstawiono poszczególne prace.

#### 2. REFERATY PIERWSZEJ PODSEKCJI TEORETYCZNEJ

2.1. W pierwszej podsekcji teoretycznej można wyróżnić tematycznie trzy grupy referatów.

Pierwszą grupę otwiera referat P. ANGLES d' AURIACA na temat definicji i zasad reologii tensorowej. Autor proponuje pewne zasady fizyczne, które prowadzą do ogólnej klasyfikacji ciał i określenia praw nimi rządzących. W celu określenia wszystkich praw wystarczy podać trzy wielkości tensorowe: tensor naprężenia  $\sigma$ , tensor odkształcenia  $D$ , tensor prędkości odkształcenia  $\dot{D}$ . Autor określa możliwość istnienia ciał pośrednich i podaje następnie definicję zjawisk lepkich i nielepkich wykazując istnienie tylko trzech przypadków: ciało stałe nielepkie, ciało stałe lepkie, płyn lepkie.

W. OLSZAK i P. PERZYNA omówili grunty sprężysto-lepkoplastyczne. Pierwsza część pracy poświęcona była dyskusji równań podstawowych opisujących dynamiczne własności gruntów. W pracy wykorzystano koncepcję ciała sprężysto-lepko plastycznego opartą na publikacjach K. HOHENEMSER, W. PRAGERA i P. PERZYNY. Umożliwia to opis wpływu prędkości odkształcenia na zachowanie się gruntu. Przyjmuje się, że grunt jest w pełni sprężysty aż do osiągnięcia stanu plastycznego. Gdy stan ten zostaje osiągnięty, grunt staje się sprężysto-lepkoplastyczny. Stosownie do tego przyjęcia, właściwy warunek płynięcia, który nazwano kryterium statycznego płynięcia, nie różni się od kryterium płynięcia sprężysto-plastycznej teorii gruntu podanej przez D. C. DRUCKERA, W. PRAGERA i W. OLSZAKA.

Druga część pracy przynosi rozwiązanie zagadnienia rozchodzenia się fal naprężeń w nieskończonym ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym. W pracy analizuje się fale: sferyczne, cylindryczne, radialne i płaskie w półprzestrzeni.

Zastosowanie zmiennej niezależnej losowej do mechaniki ośrodków ziarnistych podał referat J. LITWINISZYNA. Referent omawiał badania teoretyczne i doświadczalne, rozpatrujące ośrodek ziarnisty jako zbiór pojedynczych cząstek. Autor wychodząc z równań Smoluchowskiego-Kolmogorowa oraz stochastycznego procesu Markowa wyprowadził równania ze zmienną niezależną losową, które są uogólnieniem rozwiązań S. Goldstejna. Jako wynik autor otrzymał w ogólnym przypadku równania różniczkowe typu hiperbolicznego, a jako przypadek szczególny — równanie paraboliczne typu Markowa. W rozwiązaniu przyjmuje się, że identyczne cząstki ułożone są w dwuwymiarowym układzie siatki i poddane działaniu siły ciężkości wykluczającej ich ruch ku górze. Przemieszczenia cząstek dokonują się kolejnymi stopniami lub «skokami» ku dołowi w lewo lub prawo. Na miejsce cząstki obsuwającej się przemieszcza się «dziura» (pusta przestrzeń) ku górze, odpowiednio w prawo lub w lewo. Autor wykonał doświadczenia polegające na otwarciu otworu w dnie zbiornika z piaskiem i odwzorowaniu stanu niezmiennego w czasie, opisanego liniowym równaniem hiperbolicznym.

D. C. DRUCKER mówił o pojęciach niezależności trajektorii i stateczności materiału w odniesieniu do gruntu. Praca opiera się głównie na wprowadzonym przez autora i PRAGERA w 1952 r. pojęciu idealnego uplastycznienia gruntu (rozszerzonym i uściślonym następnie przez SHIELDA i JENIKE) i na wprowadzeniu pojęcia modelu gruntu jako ciała utwardzonego przez zgniot (przez analogię do metali). Ostatnie badania CALLADINE'A, SCHOFIELDA i ROSCOE, wykonane na «mokrych» ilach, wykazały dużą zgodność opisu własności ilów z modelem ciała izotropowego utwardzonego przez zgniot. Zakres pojęcia stateczności ciała rozszerzono w pracy tak, aby można było uwzględnić niektóre specjalne właściwości gruntów, których pozbawione są metale.

W przedstawionej pracy autor zbadał kilka elementarnych modeli gruntu jako ciała utwardzonego (skonsolidowanego) przez zgniot dla wykazania zalet modeli przy prostym obciążeniu jak i ich ograniczenia w bardziej złożonych przypadkach obciążeń. Podobnie jak w metalach zasadniczy problem polega tu na oszacowaniu nieodwracalnego lub plastycznego odkształcenia, pomijanego w drugim przybliżeniu. Autor zwraca uwagę na trudności powstające przy przyjęciu idealnego uplastycznienia, które uwzględnia tylko pewne cechy ciała.

W pracy uwypuklono główne różnice między początkowymi i dalszymi powierzchniami płynięcia, a granicznymi naprężeniami powierzchniowymi, oraz wykazano ich wielkie znaczenie dla gruntów. Szczegółowo przedyskutowano w pracy powierzchnię graniczną. Analizuje się również związek «naprężenie-odkształcenie» zależny od czasu, wpływ czasu oraz wpływ szybkości badania na odkształcenia.

A. E. GREEN i R. S. RIVLIN przedstawili pracę pt. «Mechanika ośrodków ciągłych dla ciał o pewnej strukturze». Jeżeli przyjmie się, że ciała są nie ośrodkami ciągłymi, lecz składają się z elementów strukturalnych, krystalicznych czy molekularnych, to pola wektorów przemieszczeń i sił można rozpatrywać jako aproksymację nieciągłych przemieszczeń, jakim ulegają elementy strukturalne i nieciągłych układów sił na nie działających.

A. M. FREUDENTHAL i W. R. SPILLERS mówili o konsolidacji warstwy lepkosprężystej pod wpływem obciążenia quasi-statycznego. W pracy rozważa się w skrócie zastosowanie teorii ośrodków konsolidowanych BIOTA do zagadnienia konsolidacji wierzchniej gruntu. Przedstawiono rozwiązanie



zagadnienia konsolidowanej osiowo-symetrycznej warstwy lepkosprężystej, która jest częściowo obciążona na swej powierzchni.

Ostatnia praca tej grupy S. S. WIAŁOWA omawiała plastyczność i pełzanie ośrodków spoistych. Opierając się na badaniach uczonych radzieckich, którzy wykazali, że zmiany postaciowe i objętościowe takich materiałów jak grunty charakteryzujące się różną wytrzymałością na rozciąganie i ściskanie zależą zarówno od dewiatora naprężenia jak i ciśnienia hydrostatycznego, autor podaje dla stanu plastycznego i pełzania równanie

$$\sigma_i = \varphi_1(\varepsilon_i) + \varphi_2(\varepsilon_i) \Phi(\sigma).$$

W podanym równaniu pierwszy wyraz określa wytrzymałość na czyste ścinanie, a drugi wzrost tej wytrzymałości na skutek działania ciśnienia hydrostatycznego  $\sigma$ . W ogólnym przypadku równanie to ma postać całkową. Podobne równanie otrzymuje się dla zmian objętościowych. Reologiczne równanie równowagi dla ośrodka spoistego otrzymano wprowadzając do powyższego równania czynnik czasu. Wyrażając to równanie dla przypadku ogólnego w postaci całkowej według Volterry-Boltzmana i konfrontując z wynikami doświadczeń, autor otrzymał równanie

$$\sigma_i = A(t) \varepsilon_i^m + B(t) \sigma \varepsilon_i^n.$$

W równaniu tym funkcje  $A(t)$  i  $B(t)$  charakteryzują prawo rozwoju deformacji w czasie (prawo pełzania). Określa się je doświadczalnie z badań w aparacie trójosiowego ściskania lub skręcania i ściskania przy warunku pełzania. Autor rozpatrywał również równania dla płynięcia materiałów newtonowskich, nie-newtonowskich i materiałów Bingham'a.

2.2. Druga grupa poświęcona była właściwościom ilów, ich konsolidacji, relaksacji płynięcia i reologii.

Otworzył ją referat R. SCHIFFMANA, CH. C. LADDA i A. T. CHENA na temat wieczystej konsolidacji ilów. W pracy podaje się teorię obliczania lepkości przestrzennej szkieletu gruntowego. Zaproponowano dwa zmienne modele jako liniową aproksymację dla procesu wieczystej konsolidacji. W pierwszym modelu  $A$  element reprezentujący lepkość przestrzenną połączono równoległe z elementem sprężystym (model Kelvina). W modelu  $B$  równoległe połączenie modelu  $A$  jest zmniejszone przez dodanie elementu sprężystego w szeregu z modelem  $A$ . Oba modele są sprzężone z modelem dewiatorowym, który ma połączone w szereg elementy lepki i sprężysty. Używając operatorów liniowych składniki dewiatorowe i przestrzenne można sprzęgać tak, aby utworzyły efektywny model przedstawiający zależność «naprężenie-odkształcenie» dla wieczystej konsolidacji warstw ilów.

Opracowano w ten sposób analityczne rozwiązanie dla modelu  $A$  i  $B$ , aby przedstawić rozkład naprężeń efektywnych i zależność osiadania od czasu dla obciążonych warstw ilu. Rozwiązanie analityczne przedstawia się jako funkcję lepkości wchodzącą w składniki objętościowe i dewiatorowe. Wykazano, że wprowadzenie lepkości przestrzennej do zasadniczego równania zmienia kształt i opóźnienie dla krzywych konsolidacji wieczystej. Przeprowadzono doświadczenia dla wykazania charakteru wieczystej konsolidacji kilkunastu normalnie konsolidowanych próbek ilu. Stwierdzono, że wielkość konsolidacji wieczystej po okresie, w którym zanikają skutki konsolidacji filtracyjnej, są w przybliżeniu takie same dla izotropowo konsolidowanych próbek w aparacie trójosiowym i dla próbek w edometrze. Wyjaśnienie zaobserwowanych danych doświadczalnych można znaleźć w zjawiskach fizyko-chemicznych układu il-woda, zwłaszcza w falcie, że ility są specjalnymi ciałami złożonymi z cząstek blaszkowatych.

Określenie parametrów reologicznych i utwardzenia gruntów spoistych oraz nową nieliniową teorię konsolidacji podał referat TAN TJONG-KIE. W pracy rozważa się głównie wpływ pierwszego niezmiennika odkształceń na operatory reologiczne. Bazując na wynikach doświadczeń autor przedstawia modyfikację prawa Darcy oraz wyprowadza nieliniową zależność odkształceń od naprężeń. Po dalszych rozważaniach warunku ciągłości autor wskazuje na nową nieliniową teorię jednowymiarowej konsolidacji, twardnienia i wtórnego efektu czasu.

S. MURAYAMA i T. SHIBATA zajęli się rewizją i ulepszeniem swych pierwotnych teorii (1958, 1961) dotyczących reologicznych własności ilów, zwłaszcza jeżeli chodzi o relaksację naprężeń w zakresie

naprężeń niższych niż górna granica płynięcia. Autorzy doszli do wniosku, że określone w zwykły sposób granice wytrzymałości podłoża gruntowego lub fundamentu, oparte na standardowej metodzie badania leżą zawsze po stronie niebezpiecznej w porównaniu z rzeczywistą wytrzymałością dla warunków, gdy obciążenia przykładane są w sposób ciągły. Górna granica płynięcia iltu może być określona jako naprężenie odpowiadające pierwszemu punktowi przegięcia na krzywej obrazującej zależność odkształceń od naprężeń, uzyskanej przez dodawanie równych przyrostów naprężeń w równych przedziałach czasu.

Zniszczeniem wskutek płynięcia i konsolidacją wieczystą iltów zajęli się również S. MURAYAMA i T. SHIBATA. W pracy swej rozważyli z punktu widzenia mikrometrycznego dwa aspekty studiów teoretycznych nad reologicznymi właściwościami iltów, uwzględniającymi zmiany objętościowe, mianowicie zniszczenie wskutek płynięcia i konsolidację wieczystą.

Reologiczne i mechaniczne modele układów cząstek iltów przesyconych wodą podał referat E. C. W. A. GEUZE. Autor przedstawił pomysł modelu reologicznego zwanego mechanicznym dla podkreślenia, że zasada modelu opiera się na mechanizmie sił i przemieszczeń w układzie cząstek iltowych. Użyto mechanicznego modelu dwuwymiarowego równomiernie flokulowanego (koagulowanego) iltu, aby wykazać, że:

a) graniczna siła strukturalna jest wynikiem zerwania wiązań rozciągających w stykach krawędzi do czoła cząstek, jeżeli wyciśnięcie cieczy jest zabezpieczone na granicach układu;

b) w tej granicy układ zachowuje się jak materiał o nieliniowej sztywności (wzrastającej przy zmniejszających się przemieszczeniach);

c) poza tą granicą połączenia przenoszące ciągnięcia wyłączają się z pracy i przemieszczenia cząstek przebiegają jako ciągły poślizg krawędzi po powierzchni cząstek, tak jak w zjawiskach lepkości;

d) ten sam przebieg odnosi się do układu w stanie naprężeń hydrostatycznych, przy zabezpieczeniu usunięcia cieczy z porów na granicy. Tutaj zerwanie powiązań następuje bez poprzedniego zwiększenia objętości tych porów i następnie oddzielenia krawędzi od płaszczyzn;

e) zerwanie występuje najpierw w tych stykach, gdzie kąt przecięcia jest mały i to w punktach styku cząstek o dogodniejszym położeniu (bliższym do prostokątnego ułożenia obok siebie);

f) łączenia składników hydrostatycznych i składowych dewiatorów naprężenia przy konsolidacji nie można rozważać dla superpozycji odkształceń. Zniszczenie wiązań cząstek powstaje zarówno w zakresie sprężystym, jak i lepkiem ze względu na liczne przyczyny w wielu punktach, zależnych przede wszystkim od ułożenia (orientacji) cząstek i ich wymiaru;

g) odkształceń wynikających z przenieszenia cząstek nie można w tym stanie rzeczy uzyskać przez superpozycję przemieszczeń wywołanych oddzielnie przez każdy ze składników naprężeń.

2.3. Trzecia grupa pierwszej podsekcji zajmowała się strukturą gruntu, modulem ściśliwości oraz zagadnieniem ciśnienia cieczy w porach. Obrady jej otworzył referat A. KÉZDIEGO na temat układu geometrycznego ziarn. W pracy podał on określony sposób konstrukcji systematycznego układu kul o równych średnicach, ciągłych, nieściśliwych i jednolitych oraz ogólne wyrażenie dla porowatości, przyjmując zwłaszcza przejście zwykłego systemu sześciennego w ortorombowy i romboedryczny. W pracy podano krzywe dla określenia objętości i wysokości pojedynczej pory, porowatości i ogólnej liczby koordynacyjnej dla płaszczyzny i dla przestrzeni. Wychodząc z ogólnych praw dla cieczy można ustalić zależność między współczynnikiem tarcia a współczynnikiem porowatości, ustalając zależność między zmianą objętości, naprężeniem ścinającym i odpowiadającymi mu odkształceniami. Autor podaje kilka rozwiązań przybliżonych. W ostatniej części pracy autor rozważa ciśnienie poziome układu, co może rzucić nowe światło na zjawisko parcia gruntu.

N. V. R. L. N. RAO zajmował się badaniem ciśnienia w porach gruntu przyjmując w rozważaniach modele reologiczne. Autor wprowadził dwa nowe elementy dla odwzorowania ściśliwego gazu i nieściśliwego płynu. W ten sposób za pomocą pięciu elementów skonstruowano cztery modele reologiczne dla przedstawienia pewnych idealnych reakcji gruntu przy wzrastającym ściskaniu osiowym. W pracy rozważa się ciśnienie w dwu nowych elementach dla przedstawienia ciśnienia w porach gruntu. Dla badania właściwości (trójfazowego) systemu w trzech stanach (sprężystość, plastyczność, lepkość) autor proponuje wprowadzić nowy element dla reprezentowania gazu i jesz-

cze inny dla nieściśliwości. W pracy rozważono ośrodek gruntowy w trzech stanach za pomocą pięciu elementów, a ciśnienie występujące w dwu nowych elementach rozpatrzono jako ciśnienie w porach.

Granicę plastyczności i moduł ściśliwości gruntu w tej grupie omawiał referat F. KAWAKAMI i S. OGAWA, którzy zajęli się granicą plastyczności  $\sigma_y$  i modulem ściśliwości  $E$  gruntów poddanych wielokrotnym obciążeniu. Badania przeprowadzono w aparacie jednoosiowego ściskania i w aparacie trójosiowym na ubijanych próbkach gliny piaszczystej, ilu i trzech rodzajach mieszaniny ilu z piaskiem. Z wykresu  $\sigma/E$  wyznaczono moduł ściśliwości gruntu poddanego wielokrotnemu obciążeniu. Wyciągnięto wnioski uwzględniające związki między granicą płynności a modulem ściśliwości oraz częstością i wielkością wielokrotnych obciążeń i naprężeń przy umożliwionej rozszerzalności bocznej. Opisano również rolę zachowania się gruntu jako ośrodka sprężystego i plastycznego przy projektowaniu budowli ziemnych.

### 3. REFERATY DRUGIEJ PODSEKCI TEORETYCZNEJ

Druga podsekcja, obejmująca zagadnienia metody rozwiązania równań mechaniki gruntów, dotyczyła głównie problemów równowagi granicznej. Do tematów tej podsekcji należała również próba zbudowania racjonalnej teorii ośrodków ziarnistych w warunkach płaskiego układu sił oraz rozwiązanie zagadnienia konsolidacji gruntu w półprzestrzeni.

Tematykę drugiej podsekcji otworzyła praca J. K. ZARECKIEGO i N. A. CYTOWICZA na temat niejednorodności i nieliniowego charakteru pelzania podłoża gruntowego. Autorzy zajęli się zagadnieniem nieliniowego pelzania materiału podłoża przy uwzględnieniu jego niejednorodności. Rozpatrywano najpierw zagadnienie silnie odkształconego podłoża pod wpływem siły skupionej z podaniem dla tego stanu rozkładu naprężeń, a następnie analizowano zagadnienie naprężeń w płaszczyźnie styku gruntu ze stopą fundamentową. W pracy wyjaśniono, w jakich przypadkach i według jakich praw odkształceń możliwy jest radialny rozkład naprężeń w podłożu przy płaskim odkształceniu. Dla zagadnień nieliniowego pelzania podłoża poddanego działaniu siły skupionej i obciążeniu rozłożonemu możliwe są stosunkowo proste i ścisłe rozwiązania w przypadkach radialnego rozchodzenia się naprężeń. Poza tym badano możliwość radialnego rozchodzenia się naprężeń w niejednorodnym podłożu, wykazującym ściśliwość przestrzenną. Autorzy określili również obszar graniczny pod działaniem obciążenia rozłożonego. Przy pomocy teorii Boltzmann-Volterry wprowadzono czynnik czasu, który wpływa na rozwój odkształceń podłoża. Praca podaje badanie wpływu wywieranego przez nieliniowy charakter prawa odkształceń i niejednorodność podłoża na wielkość jego osiadania. Na zakończenie podano rozwiązanie zagadnienia styku fundamentu z gruntem według J. K. ZARECKIEGO. Zastosował on nową metodę dla rozwiązania osobliwego równania całkowego typu Fredholma rzędu pierwszego, opisującego wyżej wymienione zagadnienie.

Z. SOBOTKA przedstawił dwa referaty. W pierwszym autor zajmował się ogólną teorią równowagi granicznej i liniami poślizgu gruntu niejednorodnego. Wychodząc z różnych warunków płynięcia materiału, które można wyrazić krzywą obwiednią, kryteriami energetycznymi lub powierzchnią płynięcia, autor zróżniczkował układy równań równowagi granicznej. Równania te określają pole naprężeń i mogą być rozwiązane metodą charakterystyk, na przykład przy użyciu metody różnic skończonych. Dla pola prędkości autor posłużył się równaniem ściśliwości i związkiem między głównymi kierunkami tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcenia. Dla przypadków specjalnych pole naprężenia i pole prędkości mogą być określone oddzielnie. Autor stwierdził, że w przypadku ściśliwości i wpływu średniego naprężenia na warunek plastyczności kierunki naprężeń głównych i prędkości głównych nie pokrywają się, lecz tworzą między sobą kąt odchylenia (dewiacji), który przyjmuje wartości między zerem i połową kąta tarcia wewnętrzznego. Kąt dewiacji jest nową charakterystyką mechaniczną gruntu.

W drugim referacie autor podał rozwiązanie zagadnień reologicznych płaskiego odkształcenia w ośrodku ciągłym o anizotropii ortogonalnej przy istnieniu różnych warunków brzegowych. Autor otrzymał rozkład naprężeń i odkształceń w półpłaszczyźnie liniowej lub nieliniowej o anizotropii ortogonalnej przy uwzględnieniu różnych właściwości reologicznych gruntu. Wprowadzenie

pojęcia odkształceń i naprężeń zastępczych umożliwia oddzielne całkowanie względem współrzędnych i względem czasu, co w konsekwencji prowadzi do znacznych uproszczeń w rozwiązaniu zagadnień dotyczących odkształceń reologicznych.

J. KRAVTCHEŃKO i R. STIBILLE podali przybliżone rozwiązania zagadnień równowagi granicznej dla ośrodków ważkich w oparciu o prawo Coulomba. Wychodząc z równań równowagi granicznej, opartej na prawie Coulomba dla ośrodka spójnego, izotropowego, jednorodnego i ważkiego, autorzy podają przybliżoną metodę ich rozwiązania posługując się ograniczonym szeregiem typu Cauchy-Kowalewska. Proponowane rozwiązanie opiera się na założeniu, że dane wyjściowe są odcinkami analityczne i regularne. Autorzy przedstawiają proponowaną metodę dla dwóch różnych zagadnień: dla regularnego zagadnienia typu Cauchy'ego i dla nieciągłości typu Prandtla. Te dwa rozwiązania przybliżone w połączeniu z innymi wynikami znajdują szerokie zastosowanie w zagadnieniach mechaniki gruntów, dla których rozwiązań poszukiwano dotychczas jedynie metodami numerycznymi.

Zagadnienie warunku naprężenia granicznego w gruntach w układzie osiowo-symetrycznym rozpatrzył W. G. BEREZANCEW. Warunek pełnej równowagi granicznej prowadzi do równości między obwodowym naprężeniem głównym i jednym z głównych naprężeń w płaszczyznach promieniowych. Autor opisał przeprowadzone badania laboratoryjne, mające na celu potwierdzenie tego warunku. Otrzymane wyniki dają dobrą zgodność wyników z danymi teoretycznymi.

O znaczeniu tarcia w ośrodkach ziarnistych mówił referat R. M. HAYTHORNTHWALTE'A. Autor wyszedł z bardziej ogólnej teorii, która odrzuca założenie, że główne kierunki naprężeń i odkształceń muszą być koniecznie zgodne. Wyniki autora mają służyć do naszkicowania próbnych wniosków dotyczących działania płaskich układów sił na zbiory cząstek, które, makroskopowo biorąc, są izotropowe. Analizuje się regularny układ jednakowych wałców w częściowo rozluźnionym stanie. Gdy pole sił jest jednorodne, wszystkie wałce uważa się jako jednakowo obciążone. Siły w płaszczyznach styku są określone, gdy pojawia się ruch przez toczenie się na dwóch przeciwnych punktach styku danego walca i poślizg w dwu innych punktach. Stan równowagi pojedynczego walca prowadzi do związku między naprężeniami głównymi, który dla pewnego szczególnego przypadku (pokrywanie się głównego kierunku naprężeń i odkształceń) jest identyczny z równaniem Rowe'a (1962). Autor podaje również wyniki doświadczeń na poparcie proponowanych wyrażań teoretycznych.

Ostatni artykuł sekcji teoretycznej N. N. WERIGINA omawiał konsolidację gruntu pod wpływem obciążenia zewnętrznego propopadłego do powierzchni ograniczającej półprzestrzeń. Autor rozpatrzył przypadki szczególne: a) równomiernego obciążenia działającego wzdłuż linii prostej o skończonej długości (fundament pasmowy); b) równomiernego obciążenia rozłożonego wzdłuż obwodu prostokąta — co odpowiada fundamentom budynku prostokątnego oraz c) fundamentu kołowego.

#### 4. SEKCJA DOŚWIADCZALNA

4. 1. Trzecią podsekcję wchodzącą w skład sekcji doświadczalnej otworzył referat P. HABIBA, P. MORLIERA i D. RADENKOVIČA o zastosowaniu tzw. badania brazylijskiego w mechanice skał. Autorzy opisują znany proces badania wytrzymałości próbek poddanych obciążeniu aż do zmiążdżenia, a następnie podają dotychczasową (klasyczną) interpretację teoretyczną badanego zjawiska. Otrzymane wyniki wykazały, że taka interpretacja doświadczenia nie jest wystarczająca. Doświadczenia wykazały mianowicie tworzenie się dużej ciągłej strefy odkształceń plastycznych pod powierzchnią styku, nawet pod obciążeniem mniejszym od krytycznego.

Przedstawione badania teoretyczne i doświadczalne dowodzą korzyści płynących z interpretowania procesu zniszczenia według teorii plastyczności. Pozwalają one określić proces zniszczenia diametralnego badanego walca w warunkach złożonego obciążenia oraz wskazują na możliwość zastosowania teorii równowagi granicznej do takich ciał jak skały, dla których obwiednia nie jest linią prostą.

Zjawiska występujące przy zniszczeniu skał izotropowych i anizotropowych omawiał P. M. STRİÈYS. Autor zanalizował stany naprężenia w pewnych określonych skałach w zależności od

wywieranego na nie nacisku. Zależnie od stanów naprężenia wywieranych na skałę można (lub nie) otrzymać w niej odkształcenia plastyczne. Przy zastosowaniu znacznych ciśnień izotropowych skała doznaje odkształceń ciągłych, przyjmując cechy ciała sprężysto-plastycznego. Poniżej pewnego punktu odpowiadającego ciśnieniu granicznemu nie można uzyskać odkształcenia plastycznego, gdyż następuje zniszczenie analizowanej próbki, skała zachowuje się bowiem jak ciało sprężysto-kruche. W pierwszym zatem przypadku granica sprężystości pokrywa się z granicą plastyczności, w drugim zaś z granicą zniszczenia dla ciał kruchych.

W dalszej części referatu autor podaje określenie powierzchni granicznych dla skał. Można je przedstawić w przestrzeni naprężeń za pomocą trzech powierzchni;  $R_1$  — powierzchni zniszczenia izostaticznego, dla której zniszczenie występuje w płaszczyźnie prostopadłej do najmniejszego głównego naprężenia dewiatorowego;  $R_2$  — powierzchni zniszczenia ze względu na ścinanie;  $R_3$  — powierzchni plastyczności, od której rozpoczyna się płynięcie plastyczne. Powierzchnię graniczną zniszczenia można wyrazić za pomocą naprężeń lub odkształceń. Niektóre skały mają kierunki uprzywilejowane (np. uwarstwione wapienie, łupki). Izotropowe powierzchnie graniczne zniszczenia są więc utworzone przez dwie rodziny powierzchni, które zależą od dwóch parametrów. Skały posiadające kilka kierunków uprzywilejowanych mogą, zależnie od wartości modułów zniszczenia i kierunków tych płaszczyzn, przyjmować jako powierzchnie zniszczenia jedynie powierzchnię otrzymaną za pomocą szczególnych praw podstawowych; zniszczenie nie zależy zatem od kierunku działania sił i pokrywa się zawsze z kierunkiem szczególnym.

J. BIAREZ, J. M. PIERRARD, K. WIENDIECK przedstawili przyczynek do badań praw reologicznych gruntu. Referat omawiał badania praw reologicznych ciała spoiстого poddanego małym odkształceniom oraz podał kilka uwag dotyczących własności ośrodków sypkich. Badania miały na celu określenie warunków, w których proste prawo lepkosprężyste mogłoby określić własności piasku spoiстого. Przeprowadzone przez autorów doświadczenia dla ośrodków sypkich (utworzonych nawet z ziarn kulistych) wskazują na ich wyraźną anizotropię własności mechanicznych. Anizotropia ta zależy od sposobu przygotowania próbki do badań oraz od doznanych odkształceń nieodwracalnych. Autorzy odróżniają tutaj anizotropię w zakresie prawa sprężystego w małym obszarze i silną anizotropię powierzchni granicznej obszaru sprężystego lub ściślej powierzchni, wzdłuż której własności mechaniczne wykazują wyraźną zmianę. Przeprowadzone badania wykazały, że anizotropia własności mechanicznych jest związana z anizotropią geometryczną struktury mieszaniny.

O wytrzymałości na rozciąganie gruntów o naruszonej strukturze mówił referat H. HASEGAWA i M. IKEUTI. W pracy opisano wyniki doświadczeń nad próbkami gruntu o naruszonej strukturze, przeprowadzonych w prostym aparacie dla prób na rozciąganie, pomysłu autorów. Siły rozciągające przynosiły specjalne ciągną w kształcie płytek kotwiących zanurzone w walcowych końcówkach próbki. Badano próbki mocno nawodnione na granicy ich stateczności na poślizg. Największe wydłużenie wynosiło  $5,5 \cdot 10^{-2}$ . W badaniach stwierdzono wpływ zawartości wody na wytrzymałość na rozciąganie.

E. SCHULTZE i J. KRAUSE przedstawili badania nad ciśnieniem w porach i pełzaniem w konsolidacji jednowymiarowej płynów. Przedmiotem badań była konsolidacja jednowymiarowa z uwzględnieniem jej reologicznego charakteru. W badaniach chodziło o stwierdzenie, w jakim stopniu istniejące teorie konsolidacji jednowymiarowej zgadzają się z wynikami pomiarów. Doświadczenia wykonano w edometrach o średnicy 30 cm i 50 cm, wysokości od 8 cm do 32 cm, na sztucznie przygotowanych próbkach pyłów nawodnionych do granicy płynności. Poza osiadczeniem mierzono dodatkowo zmiany ciśnienia wody w porach wzdłuż całej wysokości próbki. Pozwoliło to wykreślić izochrony dla różnych czasów, a na ich podstawie rozdzielić ciśnienie wody w porach i naprężenia efektywne w czasie obciążenia. Związki stwierdzone w doświadczeniach można przedstawić za pomocą modelu reologicznego.

4.2. Czwarta podsekcja obejmowała doświadczalną weryfikację zagadnień poruszanych szczególnie w sekcji teoretycznej. W podsekcji tej wygłoszono następujące referaty.

L. ŠUKLJE omówił badania sferycznej konsolidacji gruntów nienasyconych, poddanych filtracji nieliniowej. Badanie oparte było na metodzie półgraficznej, używanej uprzednio do analogicz-

nych badań konsolidacji sferycznej gruntów nasyconych. Przedstawione badania ograniczają się do gruntów nienasyconych, w których bańki powietrza są całkowicie otoczone wodą. Zakłada się, że powietrze ucieka z porów razem z wodą. Stąd stopień nasycenia  $S_r$  na początku i na końcu konsolidacji założono jednakowy, a współczynnik filtracji  $k$  odnosi się do wspólnego wydatku wody i powietrza. Zastosowanie wyłożonej metody wskazuje na duży wpływ grubości warstwy jak również początkowego ciężaru objętościowego na rozkład ciśnienia międzyporowego oraz na wzrost osiadania pierwotnego gruntów nienasyconych, podatnych na działanie pełzania.

Y. KOIZUMI i K. ITO omówili ściśliwość pewnych ilów pochodzenia wulkanicznego. J. VERDEYEN, i J. NUYENS przedstawili doświadczalne sprawdzenie metod obliczeń ścianek kotwiących pojedynczo zakotwionych. Komunikat miał na celu podanie wyników doświadczeń na modelach dotyczących obliczania ścianek kotwiących dla krótkich zakotwień oraz adaptowanie metody ogólnej, stosowanej do zagadnień długich zakotwień. Doświadczenia przeprowadzone na ściankach kotwiących pojedynczo podpartych pozwoliły na wyciągnięcie następujących wniosków ogólnych wykraczających poza zagadnienie zakotwień ścianek szczelnych:

a) otrzymane wykresy doświadczalne płynięcia materiału dla małych odkształceń są ograniczone liniami, które zbliżają się do charakterystyk teoretycznych, otrzymanych dla stanów równowagi granicznej;

b) ze wzrostem odkształcenia linie poślizgu przekształcają się powoli w linie pokrywające się kinematycznie z ruchem. Dla przypadku szczególnego krótkich zakotwień linie te wykazują wyraźną zgodność ze spiralami logarytmicznymi przyjętymi przez różnych autorów.

Autorzy J. BIAREZ, L. M. BOUCAUT, J. HAERINGER, D. MARTIN, B. MONTEL, R. NÈGRE, P. STUTZ, K. WIENDIECK badali równowagę graniczną sztywnego fundamentu poddanego różnym obciążeniom w ośrodku sypkim. Przedstawiona praca podaje omówienie kilku weryfikacji doświadczalnych dotyczących metod obliczeniowych fundamentów. Badania przeprowadzono w ośrodku dwuwymiarowym spełniającym warunek idealnej plastyczności (grunt modelowy z wałeczków). Przeprowadzone doświadczenia pozwoliły na badania kinematyczne ośrodka podczas przemieszczeń fundamentu, pomiar sił przyłożonych do fundamentu i pomiar naprężeń na jego konturze.

Artykuł B. WACKA przedstawił wyniki pomiaru ciężaru objętościowego i wilgotności za pomocą radioizotopów, jak również próbę zastosowania tej metody do pomiaru zagęszczenia gruntu.

Spostrzeżenia dotyczące zapór ziemnych przedstawił referat P. LANDE'A. Autor omówił poczynione obserwacje statystyczne 200 zapór ziemnych. Obserwacje przeprowadzono od 1953 r. dla zapór wykazujących poważne uszkodzenia. Pozwoliły one na ustalenie następującej klasyfikacji przyczyn katastrof zapór:

1. Przechył budowli	30%
2. Nadmierne przecieki i przebiecia	25%
3. Poślizg skarp	15%
4. Przepływ pod nasypem	13%
5. Zadrzewienie skarp	5%
6. Różne	7%
7. Przyczyny nieznane	5%

Istniejące zapory są, niestety, wyposażone w małą ilość aparatury pomiarowej dla określenia ich stanu rzeczywistego.

W przedstawione jtematyce Sympozjum wydzielić można szereg referatów (OLSZAK i PERZYNA, LITWINISZYN, HAYTHORNTHWAIT, DRUCKER, GREEN i RIVLIN, KÉZDI) zmierzających do odzworowania ośrodka gruntowego poprzez różne teorie mechaniki ośrodków ciągłych.

Druga grupa interesujących prac (FREUDENTHAL i SPILLERS, WIAŁOW, TAN TJONG-KIE, WERIGIN i SCHULTZE, MURAYAMA i SHIBATA) dotyczyła zagadnień konsolidacji gruntów. Przedstawiono tu zarówno nowe koncepcje teoretyczne jak i wyniki badań modelowych weryfikujących te koncepcje.

Referaty dotyczące reologii sprowadzały się głównie do propozycji nowych modeli reologicznych dla gruntu (SCHIFFMAN, LADD i CHEN, GEUZE, RAO, MURAYAMA i SHIBATA). Spośród nowych propozycji rozwiązań matematycznych zagadnień mechaniki gruntów wyróżniają się koncepcje ZARECKIEGO i CYTOWICZA, KRAVTCZENKI i SIBILLE'A oraz SOBOTKI.

W referatach sekcji doświadczalnej nowym ujęciem wyróżniały się referaty dotyczące mechaniki skał (HABIB, MORLIER i RADENKOVIČ, SIRIÈYS) oraz prace weryfikujące modele reologiczne (BIAREZ i współpracownicy oraz inni).

E. Dembicki, M. Węgrzyn  
Gdańsk

## II SYMPOZJUM POŚWIĘCONE REOLOGII

W dniach 6 i 7 listopada 1964 r. odbyło się we Wrocławiu zorganizowane staraniem Wrocławskiego Oddziału PTMTS drugie sympozjum poświęcone reologii. Zgłoszone na sympozjum referaty wydane zostały *in extenso* techniką fotooffsetową w książeczce formatu A5, na prawach rękopisu, obejmując około 200 stron gęstego druku (około 3200 znaków na stronie). W przedmowie do wydawnictwa czytamy: «... Pragniemy odnotować z przyjemnością prawie trzykrotny wzrost liczby zgłoszonych prac w porównaniu z pierwszym sympozjum odbytym w październiku 1961 r. Wzrost ten, wydaje się, dobrze obrazuje rozwój badań reologicznych w skali krajowej i pozwala optymistycznie patrzeć na ich przyszłość w Polsce».

Nadesłano z Krakowa 1 pracę, z Warszawy — 4 prace, z Wrocławia (Wyższa Szkoła Rolnicza i Politechnika) — 14 prac. Prace zgrupowano w czterech sekcjach: reologii metali i polimerów, reologii betonu, reologii gruntów i reologii konstrukcji. Obrady zgromadziły blisko 60 gości spoza Wrocławia i ponad 40 członków i sympatyków PTMTS z Wrocławia.

Obrady zajął prof. dr. M. SAŚIADEK, przewodniczący Oddziału. Przewodnictwo obrad przedpołudniowych w dn. 6 listopada objął członek PAN prof. dr S. ZIEMBA.

W pierwszej sekcji (reologii metali i polimerów) przedstawiono referaty: 1. A. ZIABICKI i R. TAKSERMAN-KROZER «Zagadnienie reologicznych charakterystyk cieczy wielkocząsteczkowych w różnych polach prędkości». W referacie zbadano różne przypadki obciążeń, jakim poddawana bywa ciecz nie-newtonowska. Autorzy zajęli się szczegółowo badaniem przepływów przy podłużnym gradiencie prędkości. Sądzą oni, że znalezienie przynajmniej niektórych charakterystyk reologicznych w różnych polach prędkości na drodze doświadczalnej jest możliwe, jednak posługiwanie się tylko przepływami wiskozymetrycznymi w tym celu nie wystarczy. Istnieje więc pilna potrzeba opracowania nowych metod badania tych cieczy, metod opartych na złożonych rodzajach płynięcia. Autorzy są zdania, że traktowanie cieczy wielkocząsteczkowych jako izotropowych jest niewłaściwe. 2. J. ZAWADZKI, I. HYLĄ, M. NOWAK, A. STRYCZEK «Relaksacja naprężeń a podstawa termodynamiki wyężenia tworzyw». Autorzy nawiązują do pracy przedstawionej na I sympozjum. Omawiając badania nad relaksacją naprężeń przy określonych parametrach stanu dla wybranej grupy tworzyw podają w części teoretycznej próbę opisu reoefektów dekohezji przy posługiwaniu się hipotezą właściwej energii swobodnej, przedłożoną przez J. ZAWADZKIEGO. Stwierdzono teoretycznie i doświadczalnie występowanie tych reoefektów zarówno wobec zmiany energii wewnętrznej jak i entropii przy wyężeniu. We wnioskach autorzy stwierdzają celowość badań relaksacji przy zmiennym gradiencie czasowym temperatury w celu znalezienia charakterystycznych cech procesu dekohezji. 3. J. ZAWADZKI, B. GABRYSZEWSKA, Z. GABRYSZEWSKI «Termoefekty wyężenia tworzyw». Zmiana temperatury przy wyężeniu to jeden z charakterystycznych parametrów hipotezy Zawadzkiego. Zastosowanie tej hipotezy do tworzyw sztucznych, w których obszary krystaliczne stanowią pewien procent na tle struktury amorfnej, umożliwiło uwzględnienie w mierze wyężenia zarówno energii wewnętrznej jak i zmian entropii (struktury krystalicznej oraz konfiguracyjnej obszarów amorfnych). W oparciu o analizę teoretyczną stosowano pomiar zmian temperatury jako metodę badawczą w doświadczeniach nad wyężeniem tworzyw sztucznych. 4. J. ZAWADZKI, L. GOŁASKI, J. ORŁOWSKI, W. SIUTA «Quasi-statyczne charakterystyki taśmy zbrojonej przekładkami steelonowymi». Praca wykonana w oparciu o badania dla przemysłu węgla brunatnego. Zbadano charakterystyki sprężyste, pętlę histerezy (statyczną) i tłumienie dla taśmy, stosowanej w taśmociągach transportujących węgiel i grunt. Dla opisu zachowania się taśmy zaproponowano standardowy model reologiczny. 5. A. JAKOŃLUK «Pewne spostrzeżenia na temat pełzania stopu PA-3 w warunkach obciążeń statycznych i dynamicznych». Przedstawiono szereg doświadczalnych krzywych pełzania omawianego stopu. Stwierdzono bardzo intensywne pełza-

nie w ciągu pierwszych 2 do 3 tysięcy cykli obciążenia. Pełzanie statyczne jest znacznie większe od zmęczeniowego; obserwowano zjawisko ciągłej generacji i regeneracji dyslokacji przy pełzaniu statycznym.

W dyskusji nad tą grupą referatów, którą bardzo żywo prowadził prof. ZIEMBA, zabrało głos 12 dyskutantów (14 wypowiedzi). Po dyskusji zabrało głos 5 autorów.

Po przerwie w drugiej sekcji referatów (reologia betonu), której przewodniczył prof. dr I. KISIEL, przedstawione były referaty: 1. A. MITZEL «Reologia betonowych płyt wstępnie sprężonych w świetle badań». Opisano wstępne badania nad właściwościami reologicznymi betonów, stanowiące dalszy ciąg prac, przedstawionych wstępnie na pierwszym sympozjum w 1961 r. Badania nad płytami prowadzono przez 120 dni. Podano wyniki badań nad płytami sprężonymi dwukierunkowo, jednokierunkowo i niesprężonymi (świadkami). Podano też odnośne rozważania teoretyczne. 2. A. DZIENDZIEL «Odształcenia reologiczne próbek betonowych poddanych rozciąganiu». Przyjmowanie jednakowych współczynników reologicznych dla ściskania i rozciągania w betonie budzi szereg zastrzeżeń. Autor badał w okresie 600 dni próbki, poddane stałemu rozciąganiu i przytacza szereg wyników. Można z nich m.in. wnosić, że przebieg pełzania przy ściskaniu i przy rozciąganiu betonu jest różny. Trudność w badaniach stanowił skurcz, działający odwrotnie do rozciągania. Wydaje się ponadto że wartość skurczu zależy od stanu obciążenia, tak że superpozycja rozciągania i skurczu jest niedopuszczalna. 3. S. JASMAN «Odształcenia reologiczne betonu w stanie tarczowym przy stałych obciążeniach zewnętrznych». Badano płyty poddane dwuosiowemu stanowi naprężenia: obustronne ściskanie bądź ściskanie z jednej, a rozciąganie z drugiej strony. Okres badań wynosił do 160 dni. Stwierdzono, że dotychczasowy rozdział odształceń reologicznych betonu na pełzanie i skurcz budzi wiele zastrzeżeń. Skurcz jest funkcją naprężenia, wilgotności, temperatury i grubości elementu badanego. Odształcenia reologiczne w stanie tarczowym są zawsze mniejsze od analogicznych odształceń w próbce walcowej. Załączone wykresy nie powinny być traktowane jako końcowe wyniki badań; badania jeszcze trwają. 4. K. FIEDOROWICZ «Wpływ pełzania materiału płyty i podłoża na nośność graniczną nawierzchni betonowych». Autor podaje obwiednię obciążeń niszczących płytę na podłożu i wychodząc ze wzoru logarytmicznego na osiadanie podłoża pod obciążeniem cyklicznym przytacza model obliczeniowy płyty i sposób rachunku. Autor sądzi, że uwzględnianie przynajmniej jednego wpływu reologicznego w betonie — jego pełzania, jak też pełzania podłoża, jest bezwzględnie konieczne

W dyskusji nad wymienioną grupą referatów było 12 wypowiedzi 10-ciu dyskutantów. Ponadto po dyskusji zabrali głos trzej autorzy.

Przewodnictwo na popołudniowym posiedzeniu w dniu 6 listopada objął sekretarz generalny PTMTS, prof. dr Z. OLESIK. Przedstawione na nim zostały następujące referaty: 1. I. KISIEL «Modele reologiczne gruntów». Na tle podstawowych właściwości reologicznych gruntów, mianowicie zdolności do reologicznych odształceń objętościowych jak też postaciowych, istnienia granicy plastyczności, słabej sprężystości, a także w oparciu o podstawowe właściwości gruntów jako ośrodków fizycznych: porowatości, zawartości wody (filtracja), zdolności do zmian struktury pod wpływem nawodnienia i obciążenia łącznie — przedstawiono zaproponowane dotychczas reologiczne modele gruntów, jak też wskazano na możliwość uogólnienia cech gruntów w celu stworzenia jednego, przybliżonego modelu, przydatnego do rachunków inżynierskich. W wykazie publikacji podano 72 pozycje. 2. W. DERSKI «O zastosowaniu zasady prac przygotowanych w teorii konsolidacji». Rozważając teorię konsolidacji Biot'a autor po wypisaniu równań równowagi, związków geometrycznych i fizycznych podał ogólną postać warunków brzegowych w naprężeniach. Następnie rozdzielił je na warunki oddzielne dla cieczy i oddzielne dla szkieletu gruntowego. Z kolei, stosując twierdzenie Greena, autor uzyskał wyrażenia na pracę sił zewnętrznych odniesione do objętości rozważanego ciała. Rozpatrując dalej stany obciążeń rzeczywistych i stan wirtualny autor uzyskał analogon do twierdzenia Bettiego o wzajemności przemieszczeń. Pozwoliło to z kolei wnioskować o możliwości stosowania rozwiązań teorii sprężystości do zagadnień konsolidacji. W swej uzupełniającej wypowiedzi autor przedstawił przykład konkretnego rozwiązania zadania o źródle punktowym cieczy, uzyskując ponadto rozwiązanie w postaci zamkniętej. 3. B. BROŚ «Kształtowanie się parcia gruntu sypkiego w czasie dla przypadków unieruchomionej odształcal-



nej ściany oporowej». Na podstawie doświadczenia z piaskiem suchym, usypanym w skrzyni pomiarowej i zawibrowanym przy usypywaniu, autor stwierdził fakt stopniowego zmniejszania się ciśnienia na ściankę oporową. Doświadczenie trwało 1000 godzin. Autor uważa za miarodajny okres pomiędzy 200-tną a 700-tną godziną, kiedy to następował prawie jednostajny spadek ciśnienia. Ciśnienie mierzono w kilkunastu punktach tuż przy ścianie i w odległości około 10 cm od niej. Wyniki wskazują niedwuznacznie na istnienie procesów reologicznych także i w suchym piasku.

4. W. PARZONKA «Ustalenie modelu reologicznego dla namułu na podstawie pomiarów rurowych i viskozymetrycznych». Tezy referatu wskutek nieobecności w kraju autora przedstawił prof. I. KRISIEL. Na podstawie pomiarów autor referatu doszedł do wniosku, że z dwu modeli proponowanych dla opisu zachowania się namułu: modelu Binghama i modelu potęgowego de Waele-Ostwalda, pierwszy znacznie lepiej opisuje realne zachowanie się namułów.

W dyskusji nad tą grupą referatów było 9 wypowiedzi siedmiu dyskutantów; ponadto zabrali głos dwaj autorzy referatów.

Drugi dzień obrad rozpoczęty został referatem czwartej sekcji (reologia konstrukcji). Przewodnictwo przed przerwą objął prof. dr S. ANDRUSZEWICZ z Politechniki Krakowskiej. Wygłoszono referaty: 1. Z. BYCHAWSKI «O stosowalności analogii sprężystej w zakresie nieliniowej geometrycznie teorii pełzania membran kołowych». Autor rozszerza zaproponowane przez HOFFA (1954) i ODQVISTA (1962), wyznaczanie naprężeń w ustalonym stanie pełzania, korzystając z analogii do rozwiązań dla materiałów o nieliniowej charakterystyce sprężystej, m. in. dla membran, na duże przemieszczenia. Autor wyprowadza odnośne wzory i rozwiązuje przypadek nieliniowego fizycznie i geometrycznie pełzania lepkosprężystego membrany kołowej i udowadnia w ten sposób możliwość szerokiego uogólniania rozwiązań sprężystych, także nieliniowych. 2. Z. KOWAL «Dynamika belki na podporach lepkosprężystych». W pracy zbadano teoretycznie przypadki nieważkiej, sprężystej belki na podporach sztywnych, lepkosprężystych i lepkich, oraz belki lepkosprężystej na podporach sprężystych i lepkosprężystych. Stwierdzono możliwość występowania dudnień a także uzyskano rozszerzone wzory na przemieszczenia i współczynniki dynamiczne. Referat wywołał szczególnie żywą dyskusję, świadczącą o ostrości postawionych w nim problemów i braku zadowalających rozwiązań. 3. B. OKOŁÓW «Pełzanie płyt w warunkach dominującego jednorodnego stanu naprężenia». Autor rozważa m. in. pojęcie «czasu granicznego nośności», tj. czasu, po upływie którego nastąpi zniszczenie materiału wskutek postępującego pełzania. W oparciu o teorię pełzania wg RABORNOWA autor znajduje wyrażenia dla statecznej formy pełzania płyty (skośnione ugięcie w dowolnym czasie) i na ich podstawie rozwiązuje kilka szczególnych przypadków: zgięcia walcowego, płyty kwadratowej i prostokątnej swobodnie podpartej. 4. A. MITZEL «O odkształceniach reologicznych w zbiornikach walcowych wstępnie sprężonych». W referacie autor zanalizował stratę siły sprężającej w stali, spowodowanej pełzaniem betonu. Rozpatrzono przypadek zbiornika w postaci walca kołowego o stałej grubości ścian utwierdzonych dołem. Rozwiązanie analityczne oparto na teorii pełzania Arutiuniana przyjmując dość złożoną funkcję pełzania (zależność od odwrotności czasu obciążenia, starzenie i dziedziczność). Rozważania poparto przykładem liczbowym. 5. J. KMITA «Z badań nad relaksacją lin stosowanych w kablabetonie». Autor opisał metodę i wyniki dokonanego w ciągu 110 dni pomiaru spadku naprężeń w zakotwionej linie sprężającej, złożonej z 91 drutów  $\varnothing$  5 mm. Stwierdzono: a) długotrwałość procesu relaksacji lin, b) niedostateczność zabiegu, polegającego na godzinnym przedprężeniu lin przed ich założeniem i zakotwieniem. 6. S. FULIŃSKI, E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI «Obserwacje i próba reologicznej interpretacji stanu nierównoważonego kratownicy drewnianej obciążonej intensywnie». Przeprowadzono badania nadmiernie ugiętych kratownic o rozpiętości każda 3 m  $\times$  35 m. Zbadano ugięcia pasów kratownic (wizualnie i analitycznie) i stwierdzono, że wskutek nadmiernych obciążeń trwałych «czas trwania» konstrukcji mógł wynosić tylko 15 lat (co właśnie minęło). Stwierdzono też szereg nieprawidłowości w niemieckiej normie drewnianej DIN 1052.

W dyskusji zanotowano 11 wypowiedzi 10-ciu dyskutantów. Poza dyskusją wszyscy autorzy zabierali głos w odpowiedziach na wysunięte postulaty.

Należy podnieść zbieżność niektórych problemów, rozważanych w całkowicie nieraz odmiennych zagadnieniach jak np. czasu trwania konstrukcji (OKOŁÓW i FULIŃSKI — GAWRYCH), możliwości

stosowania analogii z rozwiązaniami sprężystymi w zadaniach reologicznych (DERSKI i BYCHAWSKI). Żywą dyskusję wywołały referaty zespołu pracującego pod kierunkiem ZAWADZKIEGO, co świadczy o ich dużej wartości; duże zainteresowanie okazano dla prac zespołu MITZELA. Interesowano się też zagadnieniami modeli reologicznych w gruntach.

Po zamknięciu dyskusji nad referatami odbyła się dyskusja generalna. Prof. ZIEMBA zaproponował wydać materiały z Sympozjum w jednym z języków kongresowych, zobowiązać Oddział Wrocławski, aby raz do roku urządzał zebrania naukowe omawiające postępy reologii w ostatnim roku, materiały dalszych sympozjów wydawać tylko w językach kongresowych i zaprosić na następne sympozjum gości z zagranicy na ich koszt. Prof. ANDRUSZEWCZ poparł pierwszy punkt wystąpienia prof. ZIEMBY. Prof. OLESIAK uważa, że raczej nie należy organizować konferencji międzynarodowych, ale konferencje z udziałem gości z zagranicy. Sądzi, że wydaniem materiałów obecnego sympozjum powinien zainteresować się Biuletyn PAN, względnie należy je drukować w różnych pismach. P. MUSZYŃSKI uważa, że nie należy ograniczać dyskusji, natomiast wobec wydrukowania referatów autorzy nie powinni ich wygłaszać przed dyskusją.

Wszyscy dyskutanci byli zgodni co do tego, że reologia stanowi dziś dyscyplinę, która powinna być wprowadzona do programów nauczania w wyższych szkołach technicznych.

W końcowym przemówieniu sekretarz generalny PTMTS prof. dr Z. OLESIAK podziękował organizatorom, dziękując szczególnie doc. dr. J. KMICIE i pracownikowi umysłowemu Zarządu Oddziału ob. STRZELECKIEMU.

Oceniając dorobek sympozjum należy podkreślić fakt, że dyskusja nad referatami była bardzo ożywiona. Interesującym, a szczególnie cennym dla autorów referatów jej akcentem była duża liczba propozycji i postulatów, zgłaszanych pod ich adresem. Propozycje te często dotyczyły aktualnie wykonanej pracy, jeszcze zaś częściej odnosiły się one do przyszłych zamiarów. Świadczy to korzystnie o poruszanych przez autorów referatów zagadnieniach: wszystkie one okazały się aktualne. Świadczy to też o młodości reologii, a tym samym o jej dużej prężności. Świadczy to wreszcie o potrzebie organizowania regularnych sympozjów reologii.

W świetle znacznego rozwoju badań reologicznych w Polsce i sporej liczby doskonałych prac polskich ukazujących się stale w periodykach naukowych, propozycja organizowania sympozjów co dwa lata, zgłoszona przez Sekretarza Generalnego PTMTS prof. dr Z. OLESIAKA, wydaje się być realna.

Sympozjum poświęcone reologii we Wrocławiu w dniach 6 i 7 listopada 1964 spełniło swe zadanie. Zapoznało ono — przynajmniej częściowo — z aktualnymi pracami w dziedzinie reologii prowadzonymi w kraju, pozwoliło nawiązać cenne kontakty osobiste między naukowcami tak odległych dziedzin, jak np. chemia i budownictwo. W tym ostatnim leży jego szczególna wartość.

*I. Kisiel*

**ZEBRANIA NAUKOWE W ODDZIAŁACH PTMTS**  
W roku 1964 odbyły się w Oddziałach Polskiego Towarzystwa  
Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej następujące zebrania naukowe

Data	Prelegent	Temat referatu	Uczes- tni- ków	Dys- kutan- tów
<b>Oddział w Gdańsku</b>				
12.II	M. WIZMUR	Z zagadnień obliczania przekryć wiszących	10	5
4.VI	W. PIETRASZKIEWICZ	O pewnych przekryciach jednosłupowych	12	6
<b>Oddział w Gliwicach</b>				
30.I	J. FOLWARCZNY	Kontrola złożonych procesów	15	3

Data	Prelegent	Temat referatu	Uczes- tni- ków	Dys- kutan- tów
27.II	S. KAUFMAN	Stan naprężenia w strefie zakotwienia belki sprężonej	35	5
26.III	J. SZARGUT	Egzergia w zastosowaniach ekonomicznych	47	4
28.IV	T. ŚWIERZAWSKI	Zastosowanie mechaniki zderzeń sprężystych w procesie moderacji neutronów	18	4
26.V	B. SKALMIERSKI	Zagadnienie lepko-sprężystego pręta kołowego na podłożu lepko-sprężystym	36	5
30.VI	Cz. WOŹNIAK	Obliczanie przestrzennych ustrojów prętowych za pomocą macierzy przeniesienia	14	4
27.X	J. SZPILECKI	Silniki odrzutowe plazmowe i jonowe	22	4
26.XI	Cz. WOŹNIAK	O niektórych współczesnych kierunkach rozwoju mechaniki ośrodków ciągłych	22	3
15.XII	T. BES	Wnikanie ciepła przy przepływie laminarnym w kanale płaskim i cylindrycznym	17	15
15.XII	T. GDULA	Bezwładność cieplna przegrody płaskiej	17	15
15.XII	R. HOFMAN	Betonowy dźwigar galerii przenośników taśmowych zbrojony stalą zwykłą lub sprężoną	17	15
15.XII	J. WOJAS	Hipoteza Georga Sinesa w świetle badań złącz spawanych	17	15
15.XII	J. WOJNAROWSKI	Funkcja tłumienia pręta gumowego przy obciążeniach skrętnych	17	15
15.XII	J. ŻELKOWSKI	Nowa metoda zimnego modelowania wpływu z palników do komór spalania pyłu węglowego	17	15
<b>Oddział w Krakowie</b>				
25.III	A. GUMIŃSKI	Obliczanie płyty trójkątnej jako dna zbiornika	17	11
15.IV	M. ŻYCZKOWSKI	Sprawozdanie z II-go Wszechzwiązkowego Zjazdu Mechaniki w Moskwie	14	3
14.X	Z. KLONOWICZ	Analiza stanu ustalonego przy skokowych zmianach parametrów układu	11	4
<b>Oddział w Łodzi</b>				
12.I	W. DERSKI	O zagadnieniach konsolidacji	15	5
19.III	K. WILMAŃSKI	O pewnym płaskim zagadnieniu ośrodka dwufazowego, przypadek quasi-ustalony	21	6
21.III	P. WASILEWSKI	Metoda analityczno-wykreślna rozwiązania równań wymiany ciepła między odlewem, formą metalową i ośrodkiem otaczającym	11	5
25.VI	O. NIŻYBICKI	Badania drgań ciężkiego poziomego wrzeciona z oporami sprężynowymi, napędzanego przez wał cierny	18	
25.VI	K. WILMAŃSKI	Belka Timoszenki obciążona siłą wędrującą	18	4
30.X	W. DERSKI	Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń w przypadku zagadnień konsolidacji	12	3

Data	Prelegent	Temat referatu	Uczes- tni- ków	Dys- kutan- tów
10.XI	M. ŁUKOWIAK	Pewne zastosowanie rachunku macierzowego do statyki ustrojów przestrzennych	15	5
1.XII	K. KAZIMIERSKI	Numeryczne rozwiązanie potencjalnego opływu dowolnych zespolów profili o dowolnych kształtach	17	2
15.XII	B. MELDNER	Wpływ parametrów uzębienia na sprawność przekładni ślimakowej	10	3
<b>Oddział w Poznaniu</b>				
13.II	A. BUCH	Ocena wytrzymałości zmęczeniowej stali konstrukcyjnych	40	8
26.III	J. RADOWICZ	Badanie stabilności układów silnie nieliniowych zawierających oporność ujemną	25	3
16.IV	E. TULISZKA	Tarcza wirnikowa o stałej wytrzymałości chłodzona strumieniem powietrza	16	4
19.X	S. ZIEMBA	Graficzne rozwiązywanie równań różniczkowych nieliniowych	15	5
23.XI	H. ZORSKI	O defektach ciał stałych	16	6
<b>Oddział w Szczecinie</b>				
24.I	Z. ZBORÓWSKI	Wyznaczanie stanu naprężeń w elastooptyce metodą stycznych	14	2
28.II	J. BO CZAR	Równanie różniczkowe ruchu w strefie mieszania strumienia laminarnego i burzliwego cieczy lepkiej	20	5
20.III	A. JAKUBOWICZ	O pewnym zastosowaniu zagadnienia metryzowalności przestrzeni 3-wymiarowej o koneksji afinicznej w mechanice	11	2
29.IV	J. KORJAN	Dowód możliwości równoczesnego stosowania kilku ustrojów podstawowych statycznie wyznaczalnych w zagadnieniach ustrojów hiperstatycznych	13	1
20.V	T. KABAT	Biegunowo symetryczny stan naprężeń w wielowarstwowym grubościennym zbiorniku kulistym	15	2
26.VI	K. MARCHELEK	Analiza czynników wpływających na drgania skrętne napędu głównego frezarki	10	3
16.X	K. KARPIŃSKA i B. BIELENIS	Wpływ parametrów geometrycznych i obciążenia na wielkość błędu uproszczonych obliczeń parabolicznego łuku dwuprzegubowego	17	5
20.XI	H. PRIEBE	Analogie elektryczne w obliczeniach statycznych układów ramowych, złożonych z prętów o zmiennej sztywności	16	8
16.XII	L. MARTINI	Mechanika złącza gniazdowego izolatorów wiszących	13	6
<b>Oddział w Warszawie</b>				
20.I	Z. WESOŁOWSKI	Powstanie szyjki jako zjawiska utraty stateczności	13	

Data	Prelegent	Temat referatu	Uczes- tni- ków	Dys- kutan- tów
20.I	J. SOBIESZCZAŃSKI	Wpływ tarcia o podłoże na zjawisko samokompensacji cieplnej	13	5
23.III	W. GUTKOWSKI	Walcowe powłoki prętowe	7	12
13.IV	M. ŻÓRAWSKI	Metoda przemieszczeń w teorii ciągłych defektów siatek krystalicznych	11	4
27.IV	H. SOBOLEWSKI	Nierozwiązane problemy pojazdów szynowych	39	8
11.V	W. NOWACKI	Dynamiczne zagadnienia sprężystości	41	3
8.VI	J. MUSZYŃSKI	Pewne warunki ograniczoności rozwiązań równania $X + F(x, \dot{x}, t) = 0$	7	2
22.IV	W. PROSNAK	Metoda związków całkowych w zastosowaniu do zagadnień aerodynamiki	16	2
5.X	T. WIERZBICKI	Zginanie płyty kołowej z materiału lepkoplastycznego	9	5
16.XI	S. PILECKI	O pewnej hipotezie mechanizmu powstawania mikropeknięć w metalach	11	4
30.XI	J. RUTKOWSKI	Bilans energetyczny obszaru ruchomego, wypełnionego płynnym środowiskiem ciągłym	8	3
7.XII	W. PIEKARSKI	Bezpieczeństwo złożonych elementów konstrukcyjnych	7	3
<b>Oddział we Wrocławiu</b>				
27.I	M. SĄSIADK	Badania nad własnościami termicznymi niektórych pikrynianów	14	3
24.II	A. NEGRUSZ	Analiza dynamicznych własności pneumatycznych przetworników pomiarowych	12	3
23.III	M. TEISSEYRE	Pneumatyczna metoda oznaczania powierzchni właściwej pyłu	19	6
18.V	C. SAPIAN	Płyta kolistą na przestrzeni wielowarstwowej	13	6
8.VI	O. DĄBROWSKI	Rozwiązanie ogólne stanu momentowego powłoki o kształcie paraboloidy eliptycznej	15	4
29.VI	T. KOLENDOWICZ	Odpowiedniość modelowa konstrukcji przestrzennych	12	6
19.X	G. GŁADYSIEWICZ	Niektóre prawidłowości określające prawo podobieństwa hydromechanicznego wirów maszyn wodnych	12	5
18.XII	P. PRÓCHNIAK	Obliczanie strat reologicznych w betonowych konstrukcjach wstępnie sprężonych przy dowolnej ilości cięgien sprężonych	15	6

## WYKŁADY

Oddział Warszawski PTMTS wspólnie z IPPT PAN zorganizował w dniach 22–25 września 1964 r. wykłady prof. dr L. SOBRERO na temat «Nomografia jako dyscyplina naukowa», prof. A. A. ILIUSZINA ze Związku Radzieckiego na temat teorii plastyczności oraz w dniu 24 września 1964 r. wykład prof. GIANGRECO na temat nośności granicznej.

## ROZSTRZYGNIĘCIE KONKURSÓW NAUKOWYCH OGŁOSZONYCH W ROKU 1964

### Konkurs Zarządu Głównego PTMTS

Na ogłoszony przez Zarząd Główny Towarzystwa konkurs naukowy na pracę doświadczalną z dziedziny mechaniki wpłynęło 8 prac. Zgodnie z wnioskiem Sądu Konkursowego w składzie: przewodniczący — prof. dr Jerzy MUTERMILCH, członkowie — prof. dr Zbigniew BRZOSKA, prof. dr Jarosław NALESZKIEWICZ, prof. dr Edmund SZCZEPANIAK, prof. dr Stefan ZIEMBA, Zarząd Główny PTMTS dnia 19 grudnia 1964 postanowił:

- a) nie przyznać nagrody pierwszej;
- b) zwiększyć liczbę nagród do czterech;
- c) **dwie równorzędne nagrody drugie po zł. 5.000.**— każda, przyznać mgr J. MIĄSTKOWSKIEMU i doc. W. SZCZEPIŃSKIEMU za pracę (nr 4) pt. «Doświadczalne badania powierzchni płynięcia wstępnie odkształconego mosiądzu» oraz dr J. STUPNICKIEMU za pracę (nr 5) pt. «Wpływ warstwy oleju na kinetostatyczne naprężenie kontaktowe»;
- d) **dwie równorzędne nagrody trzecie po zł. 2.000.**— każda, przyznać: prof. Z. WASIUTYŃSKIEMU i dr A. BRANDTOWI za pracę (nr 7) pt. «Pomiary sześciu składowych odkształceń w ściskanym walcu betonowym» oraz dr Z. WASZCZYŃNOWI za pracę (nr 8) pt. «Doświadczalne badania nad skończonymi, sprężysto-plastycznymi ugięciami belek opartych na nieprzesuwnych podporach».

Trzy spośród wyżej wymienionych, nagrodzonych prac zostaną opublikowane w 2 zeszytach (1965) Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

### Konkurs Oddziału Gliwickiego PTMTS

Oddział Gliwicki naszego Towarzystwa dzięki ufundowaniu nagród przez Wydział Kultury Miejskiej Rady Narodowej w Gliwicach ogłosił Konkurs na pracę naukową z dziedziny mechaniki. Na Konkurs wpłynęło 6 prac. Sąd Konkursowy pod przewodnictwem prof. dr Jana SZARGUTA przyznał: pierwszą nagrodę w wysokości 5.000 zł J. WOJNAROWSKIEMU za pracę «Funkcja tłumienia pręta gumowego przy obciążeniach skrętnych», dwie drugie nagrody w wysokości 4.000 zł. każda dr Jackowi ŻELKOWSKIEMU za pracę «Nowa metoda zimnego modelowania wypływu z palników do komór spalania pyłu węglowego» oraz dr Stanisławowi GDULI za pracę «Bezładność cieplna przegrody płaskiej», wreszcie dwie trzecie nagrody w wysokości 2.500 zł każda mgr TADEUSZOWI BESOWI za pracę «Wnikanie ciepła przy przepływie laminarnym w kanale płaskim i cylindrycznym» oraz dr Józefowi WOJASOWI za pracę «Hipoteza Georga Sinesa w świetle badań złączy spawanych».

Nagrodzone prace zostały zreferowane na specjalnym zebraniu naukowym Oddziału Gliwickiego PTMTS dnia 15 grudnia 1964.

#### KONKURS ZARZĄDU GŁÓWNEGO POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Zarząd Główny PTMTS ogłasza konkurs na prace doświadczalne z dziedziny mechaniki.  
Za najlepsze prace spełniające warunki konkursu będą przyznane trzy nagrody pieniężne w wysokości

I nagroda 8 000 zł

II nagroda 4 000 zł

III nagroda 2 000 zł

Prace należy nadsyłać do Sekretariatu PTMTS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki p. 2305 w nieprzekraczalnym terminie 30 października 1965 r. Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani złożona do druku. Nagrodzone prace zostaną opublikowane w Mechanice Teoretycznej i Stosowanej. Konkurs jest ograniczony, dostępny dla członków PTMTS.

KONKURS ODDZIAŁU WROCŁAWSKIEGO  
POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Prace powinny dotyczyć mechaniki teoretycznej i stosowanej i mogą mieć charakter teoretyczny i doświadczalny.
2. Prace muszą być oryginalne i dotychczas nie publikowane. Po rozstrzygnięciu wyników konkursu można je publikować.
3. W konkursie biorą udział członkowie Oddziału Wrocławskiego PTMTS spośród pomocniczych pracowników nauki oraz niezrzeszeni po uprzednim wpisaniu się na członków PTMTS.
4. Objętość pracy nie może przekraczać 20 stron maszynopisu.
5. Prace należy składać w 3 egzemplarzach w Sekretariacie Oddziału PTMTS Wrocław, Pl. Grunwaldzki 9, Gmach Inżynierii Sanitarnej pok. 010, w terminie do dnia 3 listopada 1965 r.
6. Nadesłane prace zostaną rozpatrzone przez Sąd konkursowy w takim stanie, w jakim zostały przedstawione bez ich korekty czy usunięcia niedokładności. Protokół z każdego zebrania Sądu konkursowego podpisują wszyscy członkowie Sądu.
7. Każda decyzja Sądu konkursowego powinna być oparta na podstawie co najmniej dwóch pisemnych opinii lub jednej opinii w przypadku, gdy praca zostanie zreferowana na zebraniu naukowym Oddziału.
8. W skład Sądu konkursowego wchodzi: Prof. Roman MROMLIŃSKI jako Przewodniczący Zarządu Oddziału, Prof. dr Adam MITZEL, Prof. dr Igor KISIEL, Prof. dr Mieczysław SAŚTADEK, Prof. dr Jerzy ZAWADZKI, Doc. dr Otton DĄBROWSKI oraz Doc. dr Adam RYBARSKI.
9. Prace zakwalifikowane jako najlepsze przez Sąd konkursowy mają być zreferowane przez autora na specjalnych posiedzeniach naukowych Oddziału i przedyskutowane (ad pkt. 7, wystarczy jedna opinia).
10. Wyniki konkursu zostaną ogłoszone w terminie do dnia 20 grudnia 1965 r.
11. Przewiduje się trzy nagrody w wysokości orientacyjnej 5.000 — 3.000 — 2.000 zł oraz wyróżnienia. Autorzy prac nagrodzonych otrzymują dyplom i nagrodę. Autorzy prac wyróżnionych otrzymują dyplom.
12. Nagrody zostaną wręczone przez Przewodniczącego Oddziału w czasie zebrania naukowego.



## SPIS TREŚCI

### ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Symposium na temat elastoptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

### ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
- Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

### ZESZYT 1/1964

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastoptycznych materiałów używanych w elastoptyce
- Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym, z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
- Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 3/1964

- W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany
- M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych
- S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego
- J. MARYŃIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi
- Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na 12 numerach w odstęпах kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa*

*MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (PKiN)*

---