

y. II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

TOM 2 • ZESZYT 3



Pw^a

WARSZAWA 1964
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

ARTUR KACNER—Wspomnienie pośmiertne	3
W. WIERZBICKI, Katastrofa budowlana jako przypadek unormowany Строительная катастрофа как нормированное событие Structure collapse as a normed event	7
M. JANUSZ, Zasada Bettiego jako podstawa warunków modelowych Принцип Бетти в качестве основы для условий моделирования Betti's principle as a basis of model conditions	35
S. ZIEMBA, Rola mechaniki teoretycznej i stosowanej w rozwoju postępu technicznego Роль теоретической и прикладной механики в развитии технического прогресса The role of theoretical and applied mechanics in the technological progress	55
J. MARYNIAK, Oscylacje rakiety lecącej po torze falistym w atmosferze Ziemi Осцилляций ракеты движущейся в атмосфере Земли по волнообразной траектории Oscillatory motion of a skip rocket in the earth's atmosphere	71
Biuletyn informacyjny PTMTS:	91
Sprawozdanie z Kongresu Mechaniki w Monachium w 1964 r.	
Sprawozdanie z konferencji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Zakopanem	
Sympozja naukowe IUTAM	

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

M.E. + 50
6-

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 2 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 6 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A
WITOLD WIERZBICKI—PRZEWODNICZACY
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · JERZY LIT-
WINISZYN (KRAKÓW) · ADAM MITZEL (WROCLAW)
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA) · STANISŁAW
OCHEŃDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW OLSZAK
(WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK (GDAŃSK)
JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y
ZBIGNIEW OLESIK — R E D A K T O R
JÓZEF JANICZEK · MAREK SOKOŁOWSKI
W O J C I E C H S Z C Z E P I Ń S K I

REDAKCJA

Warszawa, Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 213

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 9,5. Arkuszy drukarskich 6,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 29.IX-64 r., druk ukończono w lutym 1965 r. Cena zł 30.—

Zam. 1492/64 E-78 Druk. im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



Artur Kacner

ARTUR KACNER

Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, nasza Redakcja, Polska Mechanika poniosły niepowetowaną stratę. Dnia 26 września 1964 zmarł przedwcześnie po długiej nieuleczalnej chorobie, w pełni sił twórczych i rozwoju działalności naukowej dr ARTUR KACNER, profesor nadzwyczajny w Polskiej Akademii Nauk, członek założyciel i były skarbnik Zarządu Głównego PTMTS, redaktor Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Bogata i twórcza była droga życiowa ARTURA KACNERA.

Urodzony w r. 1912 w Krzemieńcu na Wołyniu w rodzinie nauczycieli po uzyskaniu świadectwa dojrzałości wstąpił na Wydział Inżynierii Politechniki Lwowskiej. W czasie studiów utrzymywał się z własnych zarobków prowadząc kursy przygotowawcze do egzaminów i pracując dorywczo we lwowskich firmach budowlanych. Tuż przed egzaminem dyplomowym w r. 1938 został relegowany z uczelni za przynależność do akademickiej organizacji lewicowej «Życie». W związku z tym dyplom inżyniera dróg i mostów otrzymał już po wybuchu wojny w r. 1940.

Stałą pracę zawodową rozpoczął w r. 1938 jako zastępca kierownika budowy. W latach wojny pracował jako inżynier w przedsiębiorstwach budowlanych we Lwowie, Uzbekistanie, Czelabińsku i do końca 1946 znowu we Lwowie.

W kraju od stycznia 1947 do listopada 1950 był głównym inżynierem Przedsiębiorstwa Budowlanego MBP, a od 1948 do 1954 równoległe kierownikiem zespołu konstrukcyjnego w biurach projektów. Po krótkim okresie pracy na stanowisku radcy Ministerstwa Budownictwa Przemysłowego do spraw Technicznych pracował w Instytucie Techniki Budowlanej. Jego zainteresowania pracą naukową spowodowały to, że pracę w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych, a następnie w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki podjął od samego początku istnienia tych instytucji w r. 1953. W latach 1954–1961 prowadził wykłady w Katedrze Mechaniki Budowli na Wydziale Budownictwa Przemysłowego Politechniki Warszawskiej.

Docentem został mianowany w r. 1954, tytuł profesora nadzwyczajnego otrzymał w r. 1962.

Na podkreślenie zasługuje wielostronna działalność zawodowa i społeczna ARTURA KACNERA. Jako naczelny inżynier Przedsiębiorstwa Budowlanego MBP zrealizował budowę trzech kolonii mieszkaniowych i zorganizował jedną z pierwszych w kraju wytwórnię pustaków i elementów prefabrykowanych. Zajmując się równoległe w latach 1948–1951 projektowaniem, jako kierownik zespołu konstruktorskiego wykonał szereg poważnych projektów konstrukcji dużych obiektów.

Był współautorem pierwszych w Polsce stropów wielkopłytowych, za co otrzymał nagrodę Ministerstwa Budownictwa.

Współdziałał w utworzeniu Wydziału Budownictwa Przemysłowego Politechniki Warszawskiej, a następnie wykładał przez szereg lat na tym Wydziale.

Profesor ARTUR KACNER był sekretarzem generalnym komitetu organizacyjnego Sympozjum IUTAM w Warszawie w r. 1958 oraz skarbnikiem PTMTS w okresie pierwszych dwóch kadencji (4 lat). Współdziałał w założeniu czasopisma «Budownictwo Przemysłowe» oraz był redaktorem działu konstrukcyjnego tego pisma w ciągu 6 lat. Od chwili powstania PTMTS był redaktorem Biuletynu, a następnie od chwili powstania wydawnictwa «Mechanika Teoretyczna i Stosowana» pierwszym jej redaktorem naczelnym.

Spis jego bogatego dorobku naukowego obejmuje 50 pozycji z zakresu mechaniki budowli, wytrzymałości materiałów i teorii sprężystości; w szczególności omawiane są w nich zagadnienia stateczności, płyt o nieciągłych warunkach brzegowych, płyt o zmiennej sztywności i nieliniowe zagadnienie teorii płyt.

Odszedł od nas człowiek wyjątkowych cech charakteru i szlachetności, w pełni rozwoju twórczego, w chwili gdy wydawało się, że czekają na niego długie lata twórczej działalności dla dobra Nauki Polskiej.

WYKAZ PRAC NAUKOWYCH A. KACNERA

a) BUDOWNICTWO WIELKOPLYTOWE

1. *Kilka uwag o stropie Akermana* (z B. Lewickim), *Inwestycje*, 1, 1951.
2. *Strzemiona w stropie Akermana — zbędny wydatek stali* (z B. Lewickim), *Inwestycje i Budownictwo*, 10, 1951; 1, 1952.
3. *Zagadnienia konstrukcji wielopiętrowych budynków mieszkalnych*, *Inwestycje i Budownictwo*, 10, 1951; 1, 1952.
4. *Gęstożebrowe stropy krzyżowe* (z B. Lewickim), *Budownictwo Przemysłowe*, 1, 3, 1952.
5. *Strop DMS w świetle normy PN/B—03260* (z B. Lewickim), *Inwestycje i Budownictwo*, 4, 1952.
6. *Uwagi do Zarządzenia Nr. 5 MBP i Os.* (z B. Lewickim), *Inwestycje i Budownictwo*.
7. *Wydatek stali na 1 m² stropów gęstożebrowych* (z B. Lewickim), *Inwestycje i Budownictwo*, 8, 1952.
8. *Wydatek cementu w stropach gęstożebrowych* (z B. Lewickim), *Inwestycje i Budownictwo*, 9, 1952.
9. *Gęstożebrowe stropy żelbetowe w budownictwie mieszkaniowym* (z B. Lewickim), *Instytut Budownictwa Mieszkaniowego*.
10. *O porównywaniu stropów gęstożebrowych* (z B. Lewickim), *Inwestycje i Budownictwo*, 1, 1953.
11. *Instrukcja o stropach DMS. Warunki techniczne projektowania i wytyczne wykonania* (z B. Lewickim), *Instytut Techniki Budownictwa*, 3-4, 1953.
12. *Stropy wielkopłytkowe. Cz. I i Cz. II. Stropy belkowe. Cz. I i Cz. II* (z B. Lewickim), *Biuro Studiów Budownictwa Miejskiego*, 10, 1953; 2, 1954.
13. *Racjonalny kształt pustaka ceramicznego* (z B. Lewickim), *Inżynieria i Budownictwo*, 12, 1953.
14. *Strop DMS. Norma* (z B. Lewickim i innymi), *Instytut Techniki Budownictwa*, 13, 1953.
15. *Metody wprowadzania elementów wielkowymiarowych do budownictwa miejskiego* (z B. Lewickim), *Budownictwo Przemysłowe*, 1, 1955.
16. *O efektach gospodarczych stosowania stropów płytowych* (z B. Lewickim), *Budownictwo Przemysłowe*, 5, 1955.
17. *Wykorzystanie gazobetonu do uprzemysłowienia budownictwa* (z B. Lewickim), *Budownictwo Przemysłowe*, 7-8, 1955.

18. *Poszukiwania racjonalnego systemu konstrukcyjnego dla budynków mieszkalnych z elementów wielkowymiarowych* (z B. Lewickim), Budownictwo Przemysłowe, 9, 1955.
19. *Sztywność przestrzenna budynków wielkopłytowych* (z B. Lewickim), Instytut Budownictwa Mieszk., 5, 1957.
20. *Obliczanie ugięć stropów żelbetowych w świetle teorii W. Muraszowa i zaleceń NITU 123-55* (z B. Lewickim), Budownictwo Przemysłowe, 4, 1958.
21. *Praca budynków z elementów wielkowymiarowych pod działaniem sił poziomych parcia wiatru* (z B. Lewickim), PAN, Zakład Budownictwa, 1959.
22. *Schemat obliczeniowy pracy przepon z otworami pod działaniem sił poziomych parcia wiatru* (z B. Lewickim, Z. Orłosiem, Z. Dylągiem), Inżynieria i Budownictwo, 1, 1960.

b) MECHANIKA BUDOWLI I TEORIA PŁYT

23. *Przyczynek do... obliczeń statycznych... ram... i belek ciągłych*, Inżynieria i Budownictwo, 11, 1951.
24. *Metoda rzeczywistych współczynników rozdziału. Układy symetryczne*, Inżynieria i Budownictwo, 1, 1953.
25. *Metoda rzeczywistych współczynników rozdziału. Belki ciągłe o stałym I/I*, Inżynieria i Budownictwo, 4, 1953.
26. j.w. *Jednoprzęsłowe, wielokondygnacyjne ramy symetryczne*, Inżynieria i Budownictwo, 4, 1953.
27. *Belki na sprężystym podłożu, poddane nierównomiernemu ogrzaniu* (z B. Lewickim), Inżynieria i Budownictwo, 4, 1953.
28. *Stateczność rusztów wzmocnionych płytą* (z W. Nowackim), Archiwum Inżynierii Lądowej, 1-2, 1 (1955).
29. *A Closed Solution in the Case of a Semi-Infinite Plate with Discontinuous Boundary Conditions (I)*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 9, 4 (1957).
30. *A Closed Solution of a Particular Case of Bending of a Semi-Infinite Plate-Strip with Discontinuous Boundary Conditions*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, 1, 6 (1958).
31. *Metoda Nyströma-Gaussa w zastosowaniu do zagadnień zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1, 10 (1958).
32. *A Closed Solution in the Case of a Semi-Infinite Plate with Discontinuous Boundary Conditions*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1, 10 (1958).
33. *Metoda kolejnych przybliżeń w zastosowaniu do zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 3 (1958).
34. *The Method of Successive Approximations Applied to Bending of Plates with Discontinuous Boundary Conditions*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, 5, 6 (1958).
35. *Izotropowe i ortotropowe pasmo i półpasmo płytowe. Powierzchnie wpływowe. Półpasmo izotropowe o nieciągłych warunkach brzegowych*, Wydawnictwo Biura Studiów i Proj. Typ. Bud. Przem. 1958-1959.
36. *Zastosowanie stabelaryzowanych funkcji do obliczania ugięć i wielkości statycznych w ortotropowych pasmach i półpasmach płytowych* (z Z. Kączkowskim), Rozprawy Inżynierskie, 4, 8 (1960).
37. *Bending of Semi-Infinite Strips*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 4, 12 (1960).
38. *Method of Two Fundamental Systems in Problems of Bending of Plates with Discontinuous Boundary Conditions*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 7, 8 (1960).
39. *Płyty ciągłe*, Wydawn. Biura Studiów i Projektów Bud. Przem.
40. *Zginanie, stateczność i drgania prętów o zmiennym przekroju*, Rozprawy Inżynierskie, 3, 9 (1961).
41. *Bending of Plates with Variable Thickness*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 3, 13 (1961).
42. *Bending of Thin Anisotropic Plates of Variable Thickness*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, 4, 9 (1961).
43. *Temperature Distribution in Thin Orthotropic Plates of Variable Thickness*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 5, 14 (1962).

44. *Contribution to the Problem of Large Deflection of Plates and Shells*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, 6, 9 (1961).
45. *Large Deflections of Rectangular Orthotropic Plates of Variable Thickness*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 7, 9 (1961).
46. *Heat Conduction Equations for Thin Plates*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 3, 10 (1962).
47. *Pręty i płyty o zmiennej sztywności*, Monografia, Wyd. IPPT PAN.

TLUMACZENIA

48. Przekład z języka angielskiego monografii: S. P. Timoshenko, *Elastic Stability*, Wyd. Arkady, 1963.
 49. Przekład z języka polskiego na język rosyjski monografii W. Nowackiego, *Zagadnienia termo-sprężystości*, Wyd. Akademii Nauk ZSRR, 1963.
 50. Przekład z języka polskiego na język angielski (z Z. Olesiakiem), S. Błaszkwia i Z. Kączkowskiego, *Metoda Crossa*, Wyd. PWN-Pergamon Press.
-



KATASTROFA BUDOWLANA JAKO PRZYPADEK UNORMOWANY

WITOLD WIERZBICKI (WARSZAWA)

Powierzchny obserwator katastrofy budowlanej ocenia ją zwykle jako nie-szczęśliwy wypadek, którego przyczyny często nie są zrozumiałe. Ludzie jednak odpowiedzialni za bezpieczeństwo budowli muszą zdobyć dla jego oceny informacje dotyczące losów i zachowania się budowli w ogóle i na tej podstawie muszą ustalić w stosunku do danego obiektu wymagania, którym powinien on odpowiadać. W ten sposób przestajemy uważać katastrofę budowlaną za niezrozumiałe zdarzenie, lecz zaczynamy ją traktować jako tzw. *przypadek unormowany*, którego wystąpieniu odpowiada pewne unormowane, a więc podlegające ocenie prawdopodobieństwo (por. [1]).

Spośród okoliczności, które mogą wywołać katastrofę budowli, są takie, które —jak pożar lub trzęsienie ziemi—bezpośrednio nie zależą ani od jej konstrukcji, ani od jej wykonania, oraz takie, które właśnie od nich zależą. Czynnikiem tego ostatniego rodzaju są obciążenia budowli, jej odkształcenia oraz występujące w niej naprężenia lub, ogólnie mówiąc, wewnętrzne siły uogólnione. Te trzy czynniki są w zasadzie ze sobą związane, można jednak na ogół oceniać je od siebie niezależnie.

Obciążenia budynków są w tej chwili tak sprecyzowane (por. np. [2]), że tylko rzadko mogą być uważane za dzieło przypadku. Podobnie odkształcenia konstrukcji budowlanych na ogół nie występują jako samodzielny czynnik bezpieczeństwa.

Stąd za czynnik decydujący w sprawie bezpieczeństwa budowli należy uważać przede wszystkim czynniki sił wewnętrznych i ich stosunek do własności mechanicznych materiału, z którego wykonana jest budowla. Ponieważ jednak wyniki prób nad własnościami mechanicznymi materiałów budowlanych są dziełem przypadku, który normuje statystyka tych prób, musimy rozpatrywać bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa unormowanego.

Niżej przytoczone rozważania szczegółowe będą stanowiły uzasadnienie tego twierdzenia, przy czym za katastrofę będziemy uważali takie zmiany w konstrukcji, poza całkiem powierzchownymi, do których dopuścić nie chcemy.

Wymiary poszczególnych elementów konstrukcji stalowych sprawdzamy zwykle na podstawie wzoru

$$(1) \quad \sigma \leq k,$$

w którym σ oznacza naprężenie występujące w danym punkcie budowli, a k naprężenie dopuszczalne.

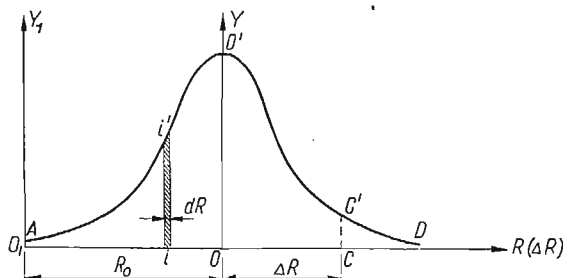
Jak widać ze wzoru (1) obliczenia wytrzymałościowe odbywają się w dwóch etapach. W pierwszym, na podstawie reguł mechaniki budowli wyznaczamy naprężenia, które uważamy za istotnie występujące w danym punkcie budowli, w drugim natomiast porównujemy te naprężenia z naprężeniami uważanymi za dopuszczalne. Obliczenia pierwszego etapu często, a obliczenia drugiego etapu — zawsze oparte być muszą na danych wziętych z doświadczenia.

Przy doświadczalnym badaniu jakiegoś materiału budowlanego poszczególne wyniki prób wytrzymałościowych nie są, jak wiadomo, identyczne. Pochodzi to z powodu wielu nie dających się bliżej określić przyczyn w ten sposób, iż każdy wynik próby wytrzymałościowej musi być uważany za dzieło przypadku, a więc za wielkość losową. Wkraczamy w ten sposób w sferę rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Wyniki próby wytrzymałościowej możemy przedstawić za pomocą równania (rys. 1)

$$(2) \quad y = f(\Delta R),$$

gdzie pod ΔR rozumiemy odchylenia wytrzymałości materiału R od średniej wartości tej wytrzymałości R_0 , a y oznacza tzw. gęstość prawdopodobieństwa występowania tych odchyżeń. Funkcji (2) można nadać kształt krzywej Gaussa, krzywej Pearsona III rodzaju lub innej w zależności od rodzaju materiału, z jakim mamy do czynienia, oraz od rodzaju przeprowadzanych prób.



Rys. 1

W podobny sposób postępujemy, gdy mamy do czynienia z wynikami prób dla naprężeń \bar{R} na granicy plastyczności stali.

Krzywe, których typ podany jest na rys. 1, stanowią punkt wyjścia do badania bezpieczeństwa konstrukcji na podstawie metody probabilistycznej (por. [3]).

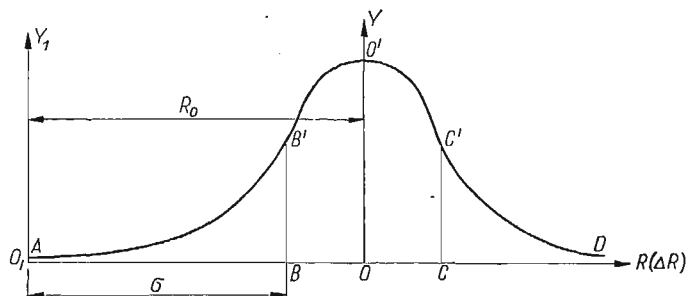
Przypuśćmy, że mamy sprawdzić wymiary pręta stalowego rozciąganego osiowo, a wykres na rys. 2. przedstawia krzywą prawdopodobieństwa dla naprężeń R na granicy wytrzymałości na rozciąganie stali, z której ten pręt jest wykonany.

Przyjmujemy, że krzywa prawdopodobieństwa jest krzywą Gaussa i że jest odniesiona do układu współrzędnych ΔROY . Od punktu O odkładamy odcinek OO_1 równy wartości średniej arytmetycznej R_0 z poszczególnych wyników R prób wytrzymałościowych i znajdujemy nowy układ osi współrzędnych RO_1Y_1 .

Oceniamy bezpieczeństwo rozpatrywanego elementu budowli za pomocą pewnej liczby p , którą nazywamy *wskaznikiem bezpieczeństwa*, a która wyraża prawdo-

podobieństwo, że katastrofa tego elementu nie będzie miała miejsca. Za ewentualną katastrofę uważamy w tym wypadku rozerwanie osiowe rozciąganego pręta.

Aby znaleźć naprężenie dopuszczalne $\sigma = k$ odpowiadające przyjętemu *a priori* wskaźnikowi bezpieczeństwa, odkładamy na rys. 2 odcinek O_1B wyrażający nie-



Rys. 3

znane naprężenie σ . Pole $BB'O'C'D$ będzie w tych warunkach wyrażało prawdopodobieństwo Ω , że naprężenie R na granicy wytrzymałości stali na rozciąganie zawarte jest w granicach od σ do ∞ , a więc prawdopodobieństwo, że R jest większe od σ , czyli inaczej mówiąc, że przy pewnym $\sigma = k$ katastrofa nie nastąpi.

Jak wynika z rys. 2

$$(3) \quad \Omega = \text{polu } BB'O'C'D = \frac{1}{2} \text{ pola } BB'O'C'C + \frac{1}{2} \text{ pola } AO'D.$$

Jeżeli rozpatrywana krzywa prawdopodobieństwa posiada kształt krzywej Gaussa, wówczas pole $BB'O'C'C$ wyraża się tzw. funkcją Laplace'a, czyli

$$(4) \quad \text{pole } BB'O'C'C = \theta[h(R_0 - \sigma)],$$

gdzie $h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}$ a μ jest błędem średnim.

Wobec tego, że przyjęliśmy z góry prawdopodobieństwo p , że rozpatrywany pręt nie będzie rozerwany, dochodzimy do równania

$$(5) \quad \Omega = p.$$

Ponieważ ze względu na własności krzywej Gaussa pole $AO'D$ równa się 1, możemy równaniu (5) nadać postać

$$(6) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta [h(R_0 - \sigma)] = p,$$

skąd korzystając z tablic funkcji Laplace'a obliczamy wartość naprężenia dopuszczalnego $\sigma = k$.

W dalszym ciągu znajdujemy współczynnik bezpieczeństwa

$$(7) \quad n = \frac{R_0}{k},$$

jako stosunek średniej wartości naprężenia na granicy wytrzymałości stali na rozciąganie do wartości dopuszczalnej tego naprężenia.

Rozważania analogiczne do przeprowadzonych dla pręta rozciąganego osiowo znajdują zastosowanie i dla innych sposobów działania sił na konstrukcję, a więc np. dla belki zginanej, dla słupa ściskanego itd.

Dotąd przyjmowaliśmy w naszych rozumowaniach, że wszystkie założenia, na których oparty jest wzór na naprężenia normalne w pręcie rozciągającym, czyli wzór

$$(8) \quad \sigma = \frac{P}{A},$$

zostały całkowicie urzeczywistnione. Tu P oznacza siłę rozciągającą i A — pole przekroju poprzecznego pręta.

W praktyce wzór (8) nie określa na ogół ściśle efektywnych naprężeń występujących w pręcie rozciągającym, które są w rzeczywistości, podobnie jak naprężenia na granicy wytrzymałości lub plastyczności, dziełem przypadku.

Nie podobna jednak sporządzić dla naprężeń efektywnych krzywej prawdopodobieństwa podobnej do krzywej podanej na rys. 1 dla różnych powodów, choćby np. dlatego, że nie ma sposobów bezpośredniego pomiaru naprężeń bez pomiaru odkształceń. W związku z tym musimy przy badaniu bezpieczeństwa pręta rozciąganego korzystać ze wzoru (8) po wprowadzeniu jednak do niego poprawek charakteryzujących odmienną okoliczność, w których pracuje konstrukcja, od tych, dla których wzór ten został wyprowadzony. Tego rodzaju poprawki uważamy jako graniczne, występujące z pewnym przyjętym prawdopodobieństwem. Jeżeli przez σ_0 oznaczymy naprężenie obliczone ze wzoru (8) w tych samych warunkach, dla jakich wzór został ustalony, a przez a graniczny przyrost procentowy tego naprężenia, występujący z prawdopodobieństwem ω i spowodowany przez niespełnienie się pewnego z tych warunków, wówczas iloczyn $\sigma(1+a)$ będzie wyrażał występujące w pręcie z prawdopodobieństwem ω naprężenie graniczne, a naprężenie

$$(9) \quad \sigma_g = \sigma_0 \Pi(1 + a_i)$$

będzie naprężeniem granicznym występującym w myśl reguły o mnożeniu prawdopodobieństw z prawdopodobieństwem

$$(10) \quad \Omega_1 = \Pi\omega_i,$$

spowodowanym niezachowaniem wszystkich lub szeregu warunków, dla których został wyprowadzony wzór (8) przy przyrostach a_i odpowiadających niezachowaniu każdego z nich i przy prawdopodobieństwach ω_i występowania tych przyrostów. Współczynniki a charakteryzują np. odchylenia od założenia płaskich przekrojów, niedokładności obróbki i montażu itd. (por. [3]).

Wzór (9) możemy zastąpić przez wygodniejszy w użyciu wzór

$$(11) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \sum a_i)$$

ze względu przede wszystkim na naturę współczynników a oraz ze względu na ich małe wartości.

W układach stalowych statycznie niewyznaczalnych, np. w ramach, naprężenie graniczne wyraża się wzorem

$$(12) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \sum \alpha_i + \sum \beta_i),$$

gdzie β_i są to przyrosty naprężenia σ_0 występujące w danym miejscu układu statycznie niewyznaczalnego z powodu wahań we współczynniku sprężystości E lub z powodu niedokładności w wymiarach konstrukcji. Odpowiednio Ω_2 będzie tu wyrażać prawdopodobieństwo, że poszczególne przyrosty procentowe wywołane przez te przyczyny nie przekroczą każdy z osobna wartości β_i .

Iloczyn

$$(13) \quad \Omega' = \Omega_1 \cdot \Omega_2$$

wyraża prawdopodobieństwo, że żaden z przyrostów α_i lub β_i nie zostanie przekroczony.

Na to więc aby dana konstrukcja stalowa statycznie wyznaczalna lub statycznie niewyznaczalna nie doznała katastrofy, potrzeba przy traktowaniu katastrofy jako przypadku unormowanego zbiegu dwóch niezależnych od siebie faktów następujących:

A) aby naprężenie σ w pewnym punkcie danej konstrukcji nie przekraczało naprężenia granicznego σ_g w tym punkcie, przy czym przez Ω' oznaczamy prawdopodobieństwo tego faktu,

B) aby wytrzymałość materiału R nie była mniejsza od naprężenia σ_g , przy czym prawdopodobieństwo tego faktu wyraża się wielkością Ω_3 .

Stąd

$$(14) \quad \Omega = \Omega' \Omega_3,$$

gdzie Ω wyraża, jak poprzednio, prawdopodobieństwo że dany element konstrukcyjny nie dozna katastrofy.

Wzorowi (14) możemy nadać również postać

$$(15) \quad \Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3.$$

Przyrównując do siebie dwa różne wyrażenia na prawdopodobieństwo, że konstrukcji nie grozi niebezpieczeństwo, dochodzimy do równań

$$(16) \quad \Omega' \Omega_3 = p.$$

lub

$$(17) \quad \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = p.$$

W przypadku pręta rozciąganego osiowo, gdy założenia na podstawie których został zbudowany wzór (8) nie są całkowicie spełnione, musimy równanie (5) zastąpić przez równanie (17).

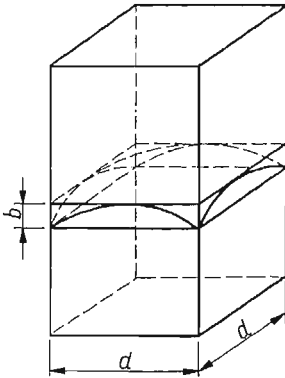
Rozpatrujemy dalej przypadek pręta rozciąganego osiowo, kiedy tylko założenie płaskich przekrojów i prawo Hooke'a nie są całkowicie spełnione.

Wzór (11) przybiera w tych warunkach postać

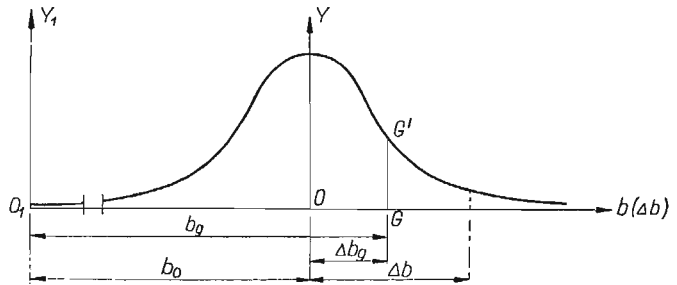
$$(18) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

gdzie α_1 charakteryzuje przyrost naprężenia σ_0 spowodowany niecałkowitym spełnieniem się założenia płaskich przekrojów, a α_2 przyrost wywołany niecałkowitym urzeczywistnieniem się prawa Hooke'a.

Wyobrażamy sobie, że najbardziej zwiczrzonny przekrój poprzeczny pręta rozciąganego zawarty został między dwie płaszczyzny prostopadłe do osi pręta i oddalone od siebie o b (rys. 3). Odległość b jest oczywiście wielkością losową i niech będzie b_0 średnią arytmetyczną pomiarów tej wielkości. Przyjmujemy, że odchylenia $\Delta b = b - b_0$ grupują się według prawa Gaussa, przy czym Δb_g jest odchyleniem granicz-



Rys. 3



Rys. 4

nym (rys. 4). Prawdopodobieństwo, że przyrost naprężenia σ_0 spowodowany niecałkowitym spełnieniem się założenia płaskich przekrojów nie przekroczy wartości $\sigma_0\alpha_1$ uważamy za równe prawdopodobieństwu, że odchylenie Δb nie przekroczy Δb_g i że odległość b nie przekroczy odległości granicznej $b_g = b_0 + \Delta b_g$. Prawdopodobieństwo to wyraża się polem O_1GG' i wynosi

$$(19) \quad \omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_1 (h_1 \Delta b_g).$$

Prawu Hooke'a nadajemy w tym wypadku postać

$$(20) \quad \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

gdzie ε oznacza wydłużenie jednostkowe.

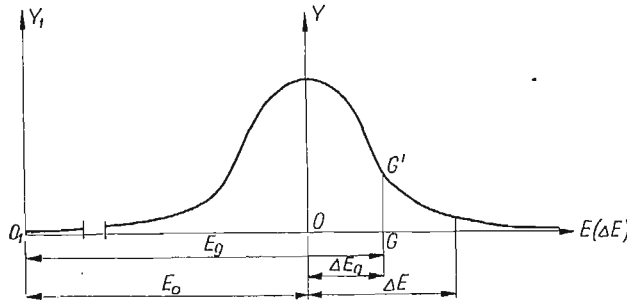
Ponieważ współczynnik E otrzymujemy z doświadczenia, to możemy przyjąć, że odchylenia ΔE poszczególnych jego wartości od średniej arytmetycznej $\Delta E = E - E_0$ grupują się również według krzywej Gaussa (rys. 5). Prawdopodobieństwo, że przyrost naprężenia σ_0 spowodowany niecałkowitym urzeczywistnieniem się prawa Hooke'a nie przekroczy wartości $\sigma_0\alpha_2$, jest równe prawdopodobieństwu, że wartość współczynnika sprężystości nie przekroczy wartości granicznej $E_g = E_0 + \Delta E_g$, czyli polu O_1GG' ; a więc

$$(21) \quad \omega_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_2 (h_2 \Delta E_g).$$

Z drugiej strony, zastępując na rys. 2 odcinek σ przez odcinek σ_g znajdujemy, że pole $BB'O'C'D$ będzie wyrażało prawdopodobieństwo Ω_3 ; w związku z tym

$$(22) \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3(R_0 - \sigma_g)],$$

gdzie θ_3 i h_3 mają ten sam sens co θ i h we wzorze (4).



Rys. 5

Wstawiając otrzymane wyrażenia na σ_g , ω_1 , ω_2 i Ω_3 do równania (17) znajdujemy:

$$(23) \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_1 (h_1 \Delta b_g) \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_2 (h_2 \Delta E_g) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3 R_0 - h_3 \sigma_0 (1 + \alpha_1 + \alpha_2)] \right\} = p.$$

Równanie (23) jest równaniem względem naprężenia σ_0 , a otrzymana z niego wartość $\sigma_0 = k$ będzie naprężeniem dopuszczalnym.

Jeżeli za katastrofę uważamy nie rozerwanie się pręta, lecz przekroczenie przez występujące w nim naprężenia granicy plastyczności \bar{R} , należy we wzorze (23) zastąpić R_0 przez \bar{R}_0 i ewentualnie zmienić wartość wskaźnika bezpieczeństwa p . Wówczas zamiast korzystać z krzywej prawdopodobieństwa dla R (rys. 2), musimy uciec się do odpowiedniej krzywej dla \bar{R} .

Korzystamy dalej z równania (17) do wyznaczenia współczynnika bezpieczeństwa n w przypadku elementów zginanych.

Największe naprężenia normalne w belce wyrażają się jak wiadomo wzorem

$$(24) \quad \sigma = \frac{M}{W},$$

gdzie M oznacza moment zginający, a W wskaźnik wytrzymałości.

Przyjmujemy, podobnie jak w zadaniu poprzednim, że spośród założeń, na których oparty jest wzór (24), nie jest całkowicie urzeczywistnione tylko założenie płaskich przekrojów i prawo Hooke'a.

Na podstawie pewnych obliczeń z dziedziny teorii sprężystości można przyjąć, że największa różnica między naprężeniem obliczonym dla belki zginanej, z jednej strony przy oparciu się na założeniu płaskich przekrojów, z drugiej zaś z po-

minięciem tego założenia, dochodzi do 10%. Prawdopodobieństwo, że ta różnica nie będzie większa, można w tych warunkach uważać za równą 1, czyli za pewność. A więc wielkości ω_i i α_i dotyczące niecałkowitego spełnienia się założenia płaskich przekrojów będą równe

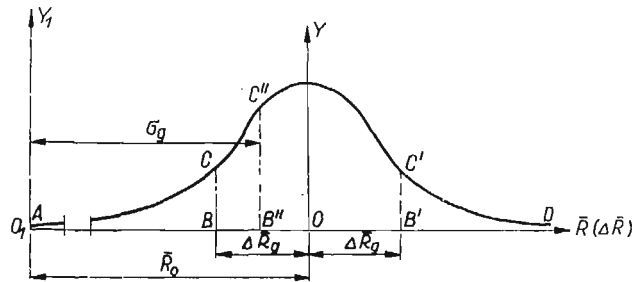
$$(25) \quad \omega_4 = 1, \quad \alpha_4 = 0,100.$$

Przyrost $\alpha_2\sigma_0$ naprężenia σ_0 obliczonego ze wzoru (24), wywołany niecałkowitym spełnieniem się prawa Hooke'a, a więc równania (20), odpowiada granicznemu przyrostowi ΔE_g w rozumieniu rys. 5. Możemy więc tu przyjąć, podobnie jak w przypadku pręta rozciąganego, że współczynniki przyrostu naprężeń α_2 , wywołanemu niecałkowitym urzeczywistnieniem się prawa Hooke'a, odpowiada prawdopodobieństwo wyrażone wzorem (21).

W tych warunkach wzory (10) i (11) dają:

$$(26) \quad \begin{aligned} \Omega_1 = \Omega' &= 1 \cdot \omega_2, \\ \sigma_g &= \sigma_0(1 + \alpha_2 + \alpha_4). \end{aligned}$$

Rozumiejąc przez katastrofę belki wypadek, gdy naprężenie na granicy plastyczności belki zostało przekroczone w pewnym punkcie belki, uciekamy się do wykresu Gaussa dla odchyżeń $\Delta \bar{R}$ (rys. 6). Odkładamy tu odcinek σ_g i wówczas pole



Rys. 6

$B''C''C'D$ będzie wyrażało prawdopodobieństwo, że naprężenie \bar{R} nie będzie mniejsze od σ_g , czyli że

$$(27) \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3(\bar{R}_0 - \sigma_g)].$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia ma σ_g , ω_2 , ω_4 i Ω_3 do równania (17) otrzymujemy:

$$(28) \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_2 (h_2 \Delta E_g) \right] \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \theta_3 [h_3 \bar{R}_0 - h_3 \sigma_0 (1 + \alpha_2 + \alpha_4)] \right\} = p.$$

Stąd obliczamy naprężenie dopuszczalne k i odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa n .

Najogólniejszym sposobem wyznaczenia wskaźnika bezpieczeństwa p , w przypadku gdy statystyka katastrof z budowlami danego typu jest uboga, może być zastosowanie równania

$$(29) \quad K_b(1-p) = K_0 p_0,$$

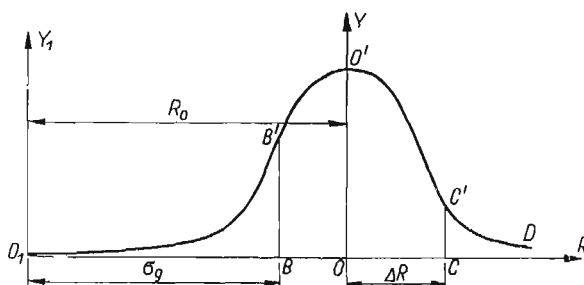
które powstało z przyrównania do siebie oczekiwań matematycznych skutków ekonomicznych dwóch katastrof, z których jedna jest katastrofą budowlaną, a druga katastrofą innego rodzaju lepiej zbadaną ze statystycznego punktu widzenia; tu K_b oznacza straty, jakie może spowodować katastrofa elementu budowlanego, K_0 — straty, jakie może spowodować katastrofa, z którą daną katastrofą budowlaną porównujemy, a p_0 — prawdopodobieństwo tej katastrofy.

Przy stosowaniu metody probabilistycznej do rozwiązywania zadań praktyki inżynierskiej okazało się, że współczynniki a_i można uważać w wielu wypadkach za wielkości nielosowe, a więc przyjmować, że poszczególne prawdopodobieństwa ω_i są równe 1 i że wobec tego niekiedy również i $\Omega' = 1$. W tych warunkach metoda probabilistyczna nabiera cech metody tylko w połowie probabilistycznej, a więc *metody półprobabilistycznej*. Okazało się również, że liczba współczynników a_i może być w metodzie półprobabilistycznej znacznie większa niż w metodzie probabilistycznej.

Przechodząc od metody probabilistycznej do metody półprobabilistycznej przyjmujemy, że w równaniu (17) iloczyn $\Omega_1 \Omega_2 = \Omega' = 1$, wobec czego równanie to przybiera postać

$$(30) \quad \Omega_3 = p,$$

przy czym wielkość Ω_3 zachowuje tu ten sam sens co poprzednio, tzn. wyraża się na rys. 7 polem $BB'O'C'D$.



Rys. 7

Metoda półprobabilistyczna, podobnie jak i probabilistyczna, zabezpiecza budowlę przed katastrofą niejako dwiema drogami: z jednej strony przez wprowadzenie współczynników przyrostu a korygujących jakby ogólnie przyjęte wzory wytrzymałościowe, z drugiej zaś przez wybór właściwego wskaźnika bezpieczeństwa p . Dwie te drogi zmierzające do tego samego celu w zasadzie nie są od siebie zależne. O ile jednak nie rozporządzamy dostateczną liczbą obserwacji i doświadczeń, wówczas pewne uzależnienie tych dróg od siebie ułatwia wyznaczenie właściwych naprężeń dopuszczalnych. W szczególności stosując metodę półprobabilistyczną uciekamy się do tego środka. Robimy to mając przede wszystkim na uwadze stalowe pręty rozciągane i zginane i przyjmując za katastrofę przekroczenie przez naprężenie w pewnym punkcie granicy plastyczności \bar{R} .

Gdybyśmy znali wszystkie przyczyny mogące spowodować zwiększenie naprężeń σ_0 w stosunku do ich wartości otrzymanych ze wzorów (8) lub (24), wówczas naprężenie graniczne

$$(31) \quad \sigma_g = \sigma_0(1 + \max \sum a)$$

musiałyby być uważane za równe największej wartości naprężenia \bar{R} , czyli przy założeniu że naprężenia dopuszczalne są całkowicie wyzyskane, mielibyśmy dla ich wyznaczenia równanie

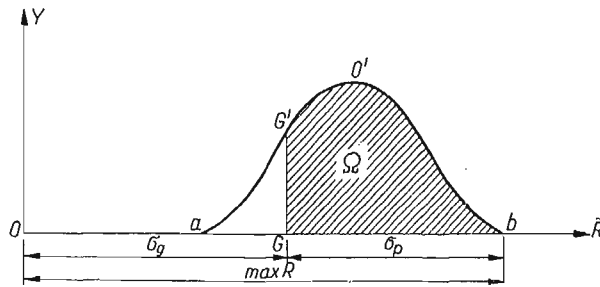
$$(32) \quad k(1 + \max \sum a) = \max \bar{R}.$$

Znaczyłyby to, że przy $\sigma_0 = \sigma_g$ katastrofa nieuchronnie nastąpi, czyli że wskaźnik bezpieczeństwa p równa się 0.

Ponieważ jednak niepodobna za pomocą samych współczynników a uchwycić wszystkich okoliczności zwiększających naprężenia σ_0 , musimy uważać różnicę

$$(33) \quad \sigma_p = \max \bar{R} - \sigma_g$$

(rys. 8) za przyrost naprężenia σ_p , występujący z prawdopodobieństwem $\Omega = p$, a wywołany okolicznościami nie dającymi się ująć przez współczynniki a .



Rys. 8

Współczynniki przyrostu naprężeń a są obliczane na podstawie zasad mechaniki budowli przy zastosowaniu tolerancji ustalonej przez normalizację krajową lub międzynarodową. Przy ich obliczaniu staramy się, aby suma $\sum a_i$ była możliwie najbliższa wielkości uzyskanej ze wzoru (11) przy $\sigma = k = 1400 \text{ kG/cm}^2$. Przyjmując, że wszystkie wchodzące tu w grę współczynniki zostały w danym przypadku uwzględnione i że wszystkie pręty obliczone na podstawie naprężenia dopuszczalnego $k = 1400 \text{ kG/cm}^2$ zdały swój egzamin w praktyce budowlanej, możemy wprowadzić do poszczególnych współczynników a_i pewne korektywy w ten sposób, aby suma $\sum a_i$ odpowiadała równaniu (11).

Dążymy dalej do tego, aby dla powodów wymienionych wyżej wskaźnik bezpieczeństwa p jak najlepiej odpowiadał, według krzywej prawdopodobieństwa zbudowanej dla naprężeń \bar{R} na granicy plastyczności, naprężeniu granicznemu obliczonemu ze wzoru (11) na podstawie przyjętego w obowiązujących przepisach naprężenia dopuszczalnego $k = 1400 \text{ kG/cm}^2$. Przy wyborze wskaźnika bezpieczeństwa decydujemy się mianowicie w tym wypadku na zastosowanie w równaniu (30) $p = 0,8$, ponieważ polu $\Omega = 0,8$ na krzywych prawdopodobieństwa odpowiada

ta sama wartość $\bar{R} = 2338 \text{ kG/cm}^2$ niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z wielobokiem prawdopodobieństwa, trójkątem prawdopodobieństwa, krzywą Gaussa, czy z krzywą Pearsona III rodzaju; liczbę tę cechuje więc niezależność od statystycznego opracowania wyników badań nad zmiennością wielkości \bar{R} . Poza tym w tych częściach krzywych prawdopodobieństwa, którym odpowiada pole $\Omega = 0,8$, dokładność odczytów jest największa (por. [3], s. 159).

Aby móc katastrofę mostu stalowego uważać również za przypadek unormowany, musimy w obliczeniach naprężeń zastąpić wzory (8) i (24) przez wzory

$$(34) \quad \sigma = \frac{S\vartheta}{A}, \quad \sigma = \frac{M\vartheta}{W},$$

gdzie ϑ oznacza pewien współczynnik dynamiczny, czyli stosunek odkształceń mostu pod obciążeniem ruchomym do odkształceń pod obciążeniem stałym. Rozumiemy tu przez katastrofę, tak jak wyżej, przekroczenie przez naprężenie normalne granicy plastyczności.

Współczynnik dynamiczny wyrażamy za pomocą wzoru

$$(35) \quad \vartheta = 1 + \frac{a}{2f},$$

gdzie a oznacza amplitudę drgań pionowych przy największym ugięciu mostu, a f — wielkość ugięcia statycznego.

Ze względu na sposób działania dynamicznego ciężarów na most należy współczynnik ϑ uważać za wielkość losową. Jako wielkość losową zadania będziemy w szczególności traktowali drugi składnik dwumianu (35), czyli wielkość

$$(36) \quad a_d = \frac{a}{2f}.$$

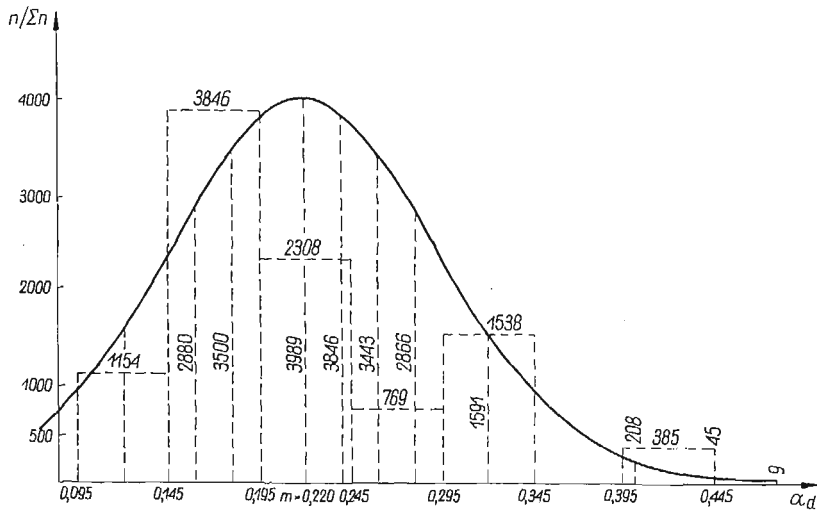
Mając na widoku probabilistyczne ujęcie zagadnienia bezpieczeństwa mostu stalowego przy obciążeniu dynamicznym musimy sporządzić dla wielkości a_d wykres rozkładu gęstości prawdopodobieństw.

Korzystamy tu z danych zawartych w literaturze specjalnej, w znacznym stopniu z danych Lesochina. Wartości a_d , które uwzględniamy, dotyczą mostów kratowych o rozpiętościach zawartych w granicach od 45 do 100 m (por. [4]). Dane te traktujemy dalej jednakowo, niezależnie od źródeł, z których zostały zaczerpnięte, i niezależnie od rozpiętości mostów zawartych w omówionych wyżej granicach. Budujemy więc histogram występowania częstości względnych $n/\Sigma n$ wielkości (36) oraz odpowiednią krzywą prawdopodobieństwa (rys. 9). Na rys. 10 przedstawiającym schemat omawianej krzywej równoległe do osi O , Y_1 odłożone są gęstości prawdopodobieństw, a odcinek a_{d0} przedstawiający średnią wartość a_d oznacza odległość początku układu współrzędnych od osi krzywej.

Wyznaczenie dopuszczalnego naprężenia k dla pewnego elementu mostu stalowego lub też wyznaczenie współczynnika bezpieczeństwa n dla tego elementu wymaga ustalenia dla naprężeń α wartości granicznej. Robi się to na podstawie wzoru

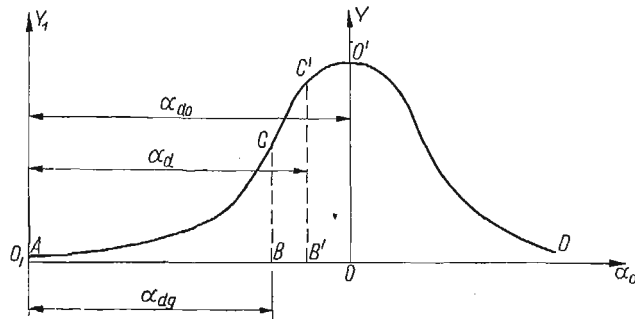
$$(37) \quad \sigma_g = \sigma_0 II(1 + \alpha),$$

gdzie α oznaczają współczynniki przyrostu naprężeń, wyrażające każdy z osobna bądź największy możliwy procentowy przyrost naprężenia σ_0 obliczonego ze wzorów (8) i (24) (współczynniki α_i), bądź też wpływ czynnika dynamicznego (współczynnik α_d).



Rys 9

Współczynniki α poza współczynnikiem α_d charakteryzującym dynamiczne działanie obciążenia mogą być traktowane bądź jako graniczne wartości nielosowe odpowiednich przyrostów naprężenia (metoda półprobabilistyczna), bądź też jako wartości, których nieprzekroczenie wyraża się dla każdego z nich pewnym prawdopodobieństwem ω (metoda probabilistyczna).



Rys. 10

Łącznie prawdopodobieństwo, że żaden z procentowych przyrostów naprężenia σ_0 nie przekroczy w przypadku obciążenia statycznego wartości α_i , wyraża się w myśl twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw iloczynem

$$(38) \quad \Omega_3 = \prod \omega_i.$$

O ile współczynniki α_i uważamy za wielkości nielosowe, to odpowiednie prawdopodobieństwa ω_i i prawdopodobieństwo Ω_3 równe są 1.

Przyrost naprężenia σ_0 spowodowany czynnikami dynamicznymi obciążenia wyraża, jak było powiedziane poprzednio, współczynnik oznaczony wyżej przez α_d .

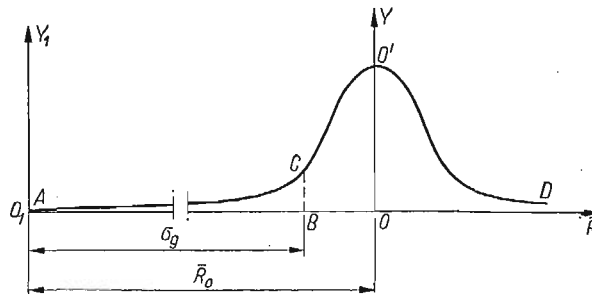
Wzorowi (37) możemy wobec tego nadać postać

$$(39) \quad \sigma_g = \sigma_0 (1 + \alpha_d) II (1 + \alpha_i)$$

lub, co przy małych wartościach α_i daje podobne wyniki, postać

$$(40) \quad \sigma_g = \sigma_0 (1 + \alpha_d) (1 + \sum \alpha_i).$$

Prawdopodobieństwo, że współczynnik α_d , a tym samym i suma $(1 + \alpha_d)$ nie przekroczy pewnej wartości granicznej, oznaczamy przez Ω_d , prawdopodobieństwo zaś, że naprężenie na granicy plastyczności stali jest większe niż naprężenie graniczne σ_g — przez Ω_m .



Rys. 11

Wielkość Ω_m jest przedstawiona na rys. 11 jako pole BCD . Rysunek przedstawia krzywą Gaussa dla naprężeń na granicy plastyczności \bar{R} .

Aby katastrofa mostu nie nastąpiła, potrzeba zbiegu trzech niezależnych od siebie faktów następujących:

A) aby żaden z procentowych przyrostów naprężenia σ_0 wyrażonego jednym ze wzorów (8) lub (24) nie przekroczył wartości α_i (prawdopodobieństwo Ω_s);

B) aby procentowy przyrost naprężenia σ_0 spowodowany przez czynniki dynamiczne nie przekroczył wartości α_{dg} (prawdopodobieństwo Ω_d);

C) aby naprężenie na granicy plastyczności stali było większe od naprężenia granicznego σ_g (prawdopodobieństwo Ω_m).

Tak więc prawdopodobieństwo Ω faktu, że katastrofa mostu nie będzie miała miejsca, jest prawdopodobieństwem złożonym i wyraża się iloczynem

$$(41) \quad \Omega = \Omega_s \Omega_d \Omega_m.$$

Wprowadzamy dalej, jak to zostało zapowiedziane wyżej, wskaźnik bezpieczeństwa p , wobec czego

$$(42) \quad \Omega = p.$$

Z równania tego możemy ustalić dopuszczalne naprężenie w danym elemencie mostu lub odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa. Równaniu możemy nadać postać

$$(43) \quad \Omega_s \Omega_d \Omega_m = p.$$

Przy stosowaniu metody półprobabilistycznej przyjmujemy, że wszystkie prawdopodobieństwa ω równe są 1 i że wobec tego w równaniu (43) czynnik Ω_s odpada i równanie przybiera postać

$$(44) \quad \Omega_d \Omega_m = p.$$

Jeżeli się zdecydujemy przyjmując, że $\Omega_d = \Omega_m$ i że

$$(45) \quad \Omega_d = \sqrt{p},$$

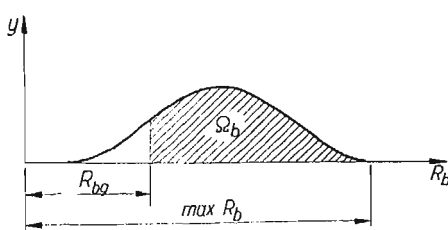
to na wykresie krzywej Gaussa dla wielkości a_d (rys. 10) odkładamy pole BCD równe \sqrt{p} i dochodzimy w ten sposób do wartości granicznej dla a_d , którą oznaczamy przez a_{dg} .

Po ustaleniu granicznych wartości wielkości a_t i a_d możemy rozwiązać równanie (40) względem σ_0 i w ten sposób ze wzoru

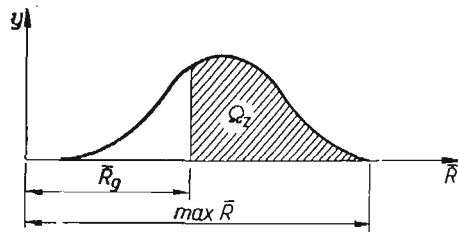
$$(46) \quad k = \sigma_0 = \frac{\sigma_u}{(1+a_d)(1+\Sigma a_t)}$$

ustalić dopuszczalne naprężenie k dla danego elementu mostu stalowego.

Przy badaniu bezpieczeństwa konstrukcji żelbetowych uważamy za katastrofę jednoczesne zgniecenie w elemencie ściskanym lub zginanym betonu i osiągnięcie przez uzbrojenie granicy plastyczności. Aby tak rozumianej katastrofie nadać cechy przypadku unormowanego, uciekamy się do krzywych prawdopodobieństwa przedstawionych na rysunkach 12 i 13.



Rys. 12



Rys. 13

Na rysunku 12 przedstawiamy schemat krzywej prawdopodobieństwa dla wytrzymałości betonu R_b na ściskanie. Powierzchnia zacieniowana wyraża tu prawdopodobieństwo Ω_b , że wartości R_b zawarte są między pewną wartością R_{bg} uważaną za graniczną, a wartością $\max R_b$.

Rysunek 13 przedstawia schemat krzywej prawdopodobieństwa dla naprężenia na granicy plastyczności stali zbrojeniowej. Przez Ω_z wyrażone jest prawdopodobieństwo, że wartości \bar{R} zawarte są między pewną wartością \bar{R}_g uważaną za graniczną, a wartością $\max \bar{R}$.

Aby zniszczenie słupa lub belki żelbetowej nie mogło nastąpić, potrzeba zbiegu dwóch niezależnych od siebie okoliczności następujących:

A. Naprężenie na granicy wytrzymałości betonu musi być większe od wartości granicznej R_{bg} (prawdopodobieństwo Ω_b).

B. Naprężenie na granicy plastyczności prętów stalowych uzbrojenia musi być większe od wartości granicznej \bar{R}_g (prawdopodobieństwo Ω_z).

W związku z tym możemy analogicznie do wzoru (17) ustawić równanie

$$(47) \quad \Omega_b \cdot \Omega_z = p,$$

gdzie wskaźnik bezpieczeństwa p będzie, tak jak wyżej, wyrażał prawdopodobieństwo, że katastrofa konstrukcji żelbetowej nie nastąpi.

Katastrofę słupa żelbetowego uważamy co do efektu praktycznego za identyczną z przekroczeniem w słupie stalowym granicy plastyczności w całym jego przekroju. Wobec tego przyjmujemy w równaniu (47), podobnie jak w równaniu (30), $p = 0,8$, co przy $\Omega_b = \Omega_z$ daje $\Omega_b = \Omega_z = 0,9$.

Przyjętemu wskaźnikowi bezpieczeństwa odpowiada pewna wartość R_{bg} naprężenia na granicy wytrzymałości w betonie oraz pewna wartość \bar{R}_g naprężenia na granicy plastyczności stali. W związku z tym znajdujemy siłę niszczącą w słupie

$$(48) \quad N_n = (A_b \cdot R_{bg} + A_z \cdot \bar{R}_g) \kappa,$$

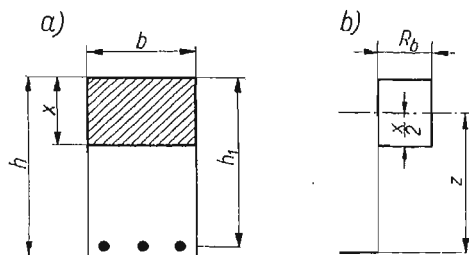
gdzie A_b oznacza pole betonowej części przekroju słupa, A_z — pole przekroju poprzecznego zbrojenia i κ — współczynnik zmniejszający na wyoboczenie.

Siła N_d , która może być w słupie dopuszczona, jest mniejsza od siły N_n , a zależność między nimi wyraża się wzorem

$$(49) \quad N_d = N_n (1 - \sum a_i'),$$

gdzie współczynniki a_i' oznaczają graniczne spadki procentowe siły N_n , spowodowane niecałkowitym spełnieniem się poszczególnych założeń będących podstawą wzoru (48).

Współczynniki a' mogą być uważane bądź za wielkości losowe występujące każdy z pewnym prawdopodobieństwem ω' (metoda probabilistyczna), bądź też jako wielkości nielosowe (metoda półprobabilistyczna). Współczynniki te charakteryzują np. spadek siły N_d wywołany przez błędy w wymiarach poprzecznych słupa, przez błędy w wymiarach uzbrojenia itd. Odgrywają one rolę podobną do współczynników przyrostu naprężeń α w konstrukcjach stalowych.



Rys. 14

W przypadku żelbetowej belki zginanej pojedynczo zbrojonej (rys. 14) moment niszczący wyraża się, jak wiadomo, wzorem

$$(50) \quad M_n = 0,375 b h_1^2,$$

a odpowiedni moment dopuszczalny wzorem

$$(51) \quad M_d = M_n (1 - \sum a_i').$$

Współczynniki a'_i mają w tym wypadku na ogół inne wartości niż te, które występują we wzorze (49).

Wskaźnik bezpieczeństwa przyjmujemy tu za równy $p = 0,8$, gdyż zniszczenie następuje tu przy jednoczesnym przekroczeniu w betonie naprężenia na granicy wytrzymałości, a w stali — granicy plastyczności, a więc w tych samych okolicznościach co w przypadku ściskania słupa z żelbetu.

Przy zastosowaniu do zadania poprzedniego metody czysto probabilistycznej należy wzór (47) zastąpić przez wzór typu (16), gdzie prawdopodobieństwo Ω' będzie miało sens podobny jak w tamtym wzorze z tym, że prawdopodobieństwa składające się na iloczyn Ω' będą przystawane do warunków zadania.

Gdy mamy do czynienia ze statycznie niewyznaczalnymi układami żelbetowymi, wówczas wzór (51) musi być zastąpiony przez wzór

$$(52) \quad M_d = M_n(1 - \sum a'_i - \sum \beta'_j),$$

gdzie współczynniki a'_i oznaczają, jak poprzednio, graniczne spadki procentowe momentu M_n , spowodowane niecałkowitym spełnieniem się warunków, dla których został on obliczony, z wyjątkiem okoliczności wpływających ze statycznej niewyznaczalności konstrukcji, współczynniki zaś β'_j — spadki tegoż momentu wynikające właśnie ze statycznej niewyznaczalności.

Na współczynniki β'_j składa się szereg okoliczności towarzyszących obliczeniu układów statycznie niewyznaczalnych, a więc wahania wielkości charakteryzujących własności sprężyste betonu, wahania współczynnika E dla stali, sposób rozmieszczenia prętów uzbrojenia itp. Wobec trudności ustalania wartości β'_j , wywołanych różnymi przyczynami, ujmujemy wpływ tych przyczyn w jeden współczynnik β' wyrażający spadek momentu M_n , spowodowany zmianami procentowymi sztywności poszczególnych elementów konstrukcji statycznie niewyznaczalnej.

Ponieważ najbardziej rozpowszechnionym typem statycznie niewyznaczalnych konstrukcji żelbetowych jest układ ramowy, ustalamy sumę $\sum \beta'_j$, w danym razie równą β' , dla takiej właśnie konstrukcji. W tym celu rozpatrujemy dwa układy ramowe przedstawione wraz z ich obciążeniem na rys. 15 i na rys. 16. Ramy te różnią się od siebie liczbą pięter, stosunkami wymiarów geometrycznych i rodzajem obciążenia. Aby na podstawie ich pracy obliczyć wartości β'_j , należałoby ustalić liczby wpływu położenia pewnych prętów o różnej od innych sztywności na wartości momentów przywęzłowych, a tym samym na wielkość momentów M_n i M_d poszczególnych elementów zginanych ramy. Wobec związanych jednak z tym trudności opieramy się tu tylko na obliczeniach wymienionych ramownic w warunkach, które dają najlepszą podstawę do wyznaczenia wielkości β' dla możliwie największej liczby przypadków (por. [5]).

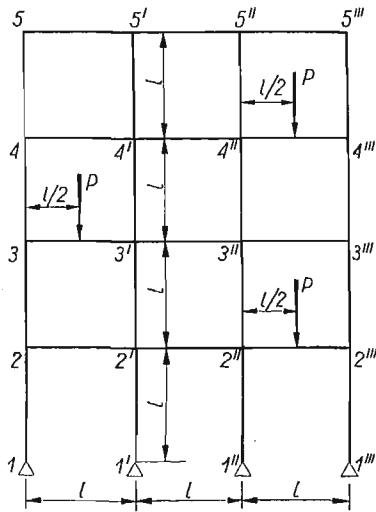
Ramownice przedstawione na rys. 15 i 16 zostały dla przytoczonych wyżej warunków obliczone według metod przyjętych dla ram sprężystych, a otrzymane tą drogą wartości momentów przywęzłowych były poddane analizie. Wyniki obliczeń i ich analiza doprowadzają do następujących spostrzeżeń i wniosków:

I. Przyrost sztywności pewnego pręta ramownicy wywołać może wprawdzie zwiększenie momentów przywęzłowych, ale głównie w bliskości tego pręta; podob-

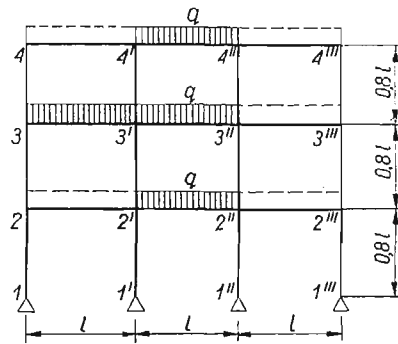
ny skutek ma również usunięcie pewnego pręta ramownicy, tj. przyjęcie, że w tym wypadku $EJ = 0$.

II. Jeżeli weźmiemy dwa skrajne przypadki, tzn. przypadek kiedy jeden z prętów ramownicy jest całkowicie sztywny, i drugi, kiedy momenty węzłowe obliczono w założeniu całkowitej sprężystości wszystkich prętów ramy, to średni dla całej sumy przyrost momentów węzłowych w ramownicy będzie wynosił w pierwszym przypadku trochę ponad 6 %, a w drugim 0 %, a więc średnia z tych dwóch liczb będzie wynosiła około 3 %.

III. Wahania w przyrostach momentów przywęzłowych przy zmianie miejsca przez pręt o sztywności $EJ = \infty$ nie są duże.



Rys. 15

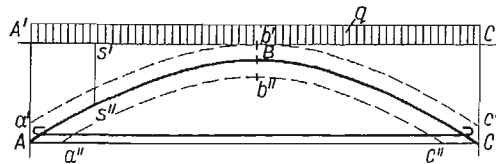


Rys. 16

Przytoczone spostrzeżenia pozwalają na ustalenie liczby β' jako równej $\beta' = 0,04$.

Możliwość wytworzenia się całkowitej sztywności poprzecznej elementu żelbetowego należy wyjaśnić w sposób następujący (por. [3]):

Zastępujemy pręt żelbetowy AC (rys. 17) przez dwuprzegubowy łuk paraboliczny ABC z materiału nieściśliwego. Łuk pod działaniem obciążenia równomiernego q



Rys. 17

na 1 mb. nie dozna żadnych odkształceń, w szczególności odkształceń prostopadłych do prostej AC . Również żadnych odkształceń nie dozna łuk, który będzie miał kształt dowolny i obciążenie dobrane na podstawie teorii linii nośnej. Wreszcie nie odkształci się również przy odpowiednim obciążeniu łuk przedstawiony na rys. 17

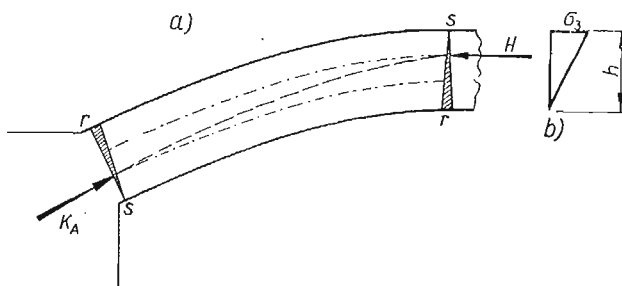
literami $a'a''c''c'$, dla którego uzbrojenie dolne belki odegra rolę ścięgna, jeżeli nawet w skład jego obciążenia wchodzi ciężar zapełnienia pachwin $a'A'b'$ i $c'C'b'$ oraz masyw $a''b''c''$.

Można więc sobie wyobrazić przypadek, że w pewnym elemencie ramy żelbetonowej wystąpi tego rodzaju obciążenie i tego rodzaju rozkład sił wewnętrznych, że element ten nie dozna żadnych odkształceń poprzecznych.

Dalszego przykładu przedstawienia katastrofy budowlanej jako przypadku unormowanego dostarcza zagadnienie sklepienia walcowego wykonanego z materiału, którego wytrzymałość na rozciąganie jest bardzo mała, a więc z betonu, muru kamiennego lub muru ceglanego, a w szczególności zagadnienie obliczenia dla takiego sklepienia nośności granicznej konstrukcji.

Nawiązujemy tu do stosowanej niegdyś szeroko, a obecnie prawie zarzuconej metody równowagi granicznej sklepień (praca [6]). Rachunek prawdopodobieństwa pozwala na rzucanie nowego światła na tę metodę. Uważamy przy tym, że próbki betonu, muru kamiennego lub muru ceglanego przy ich badaniu na ściskanie zachowują się jako sprężyste aż do zniszczenia.

Metoda równowagi granicznej powstała opierając się na bardzo licznych obserwacjach katastrof sklepień walcowych równej długości, dokonanych w ciągu długich lat i wyzyskanych z dobrym skutkiem na przełomie XIX i XX wieku przez wybitnych inżynierów i teoretyków jak Méry, Lévy itd., chociaż nieusystematyzowanych i nie poddanych współczesnej analizie wymiarowej. Obserwacje te doprowadzają dla symetrycznego obciążenia łuku do stwierdzenia, że:



Rys. 18

1) w łuku *jednocześnie* rozwiera się przekrój zwornika od strony podniebienia i dwa przekroje położone symetrycznie między zwornikiem a wezłowiami od strony grzbietu (praca [6] oraz rys. 18a), które w łukach płaskich pokrywają się z przekrojami w wezłowiacz;

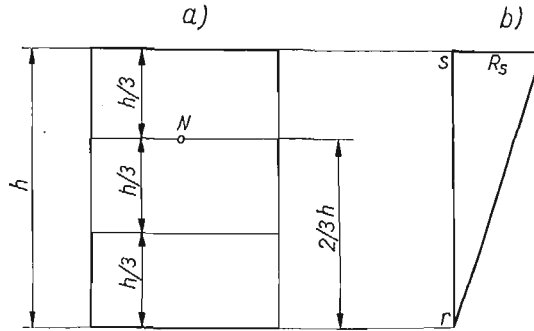
2) dwie części łuku zawarte między przekrojami pęknięcia sr doznają w chwili katastrofy zmiężdżenia materiału w punktach s , czego konsekwencją jest zapadnięcie się, czyli zniszczenie budowli (rys. 18b i 19b).

Opisany wyżej przebieg zniszczenia łuku pozwala na ustalenie punktów zaczepienia sił N w poszczególnych przekrojach łuku (rys. 18a).

Skoro zmiężdżenie materiału w punkcie s przekroju występuje w chwili rozwarcia się tego przekroju w punkcie r , to w myśl teorii ściskania mimośrodowego siła

podłużna będzie tu zaczepiona w odległości $2/3$ wysokości przekroju h od tego punktu.

W przekroju zwornikowym siła N równa się parciu poziomemu łuku H , a w węzłach reakjom K_A i K_B . Stajemy w ten sposób w chwili katastrofy wobec zadania statycznie wyznaczalnego i możemy sporządzić dla łuku (krótkiego sklepienia) krzywą ciśnień (rys. 18).



Rys. 19

Jak widać, istotnym dla metody równowagi granicznej jest postulat *jednoczesności* rozwierania się w chwili katastrofy łuku wszystkich trzech przekrojów pęknięcia. Ponieważ jednak ta jednoczesność jest trudna do stwierdzenia, zachodzi potrzeba wprowadzenia do obliczeń sklepienia rachunku prawdopodobieństwa. Musimy tu mianowicie zastąpić wymieniony postulat jednoczesności przez *prawdopodobieństwo* tej jednoczesności. Wprowadzamy w tym celu do obliczeń statycznych sklepienia prawdopodobieństwo faktu, że katastrofa konstrukcji nie nastąpi. Aby bezpieczeństwo budowli było w tym sensie zapewnione, potrzeba jednoczesnego zbiegu trzech niezależnych od siebie okoliczności następujących:

- 1) nie ma rozwarcia się spoiny w zworniku,
- 2) nie ma rozwarcia się spoiny na lewej podporze,
- 3) nie ma rozwarcia się spoiny na prawej podporze.

Prawdopodobieństwa wystąpienia trzech wymienionych okoliczności oznaczamy odpowiednio przez $\Omega_z, \Omega_l, \Omega_p$, a wobec tego w myśl twierdzenia o mnożeniu prawdopodobieństw iloczyn $\Omega_z \Omega_l \Omega_p$ będzie wyrażał prawdopodobieństwo, że katastrofa sklepienia czy łuku nie nastąpi. Innym wyrazem tegoż prawdopodobieństwa jest wskaźnik bezpieczeństwa p jako przyjęty z góry pożądaný stopień bezpieczeństwa budowli.

Ponieważ zarówno iloczyn $\Omega_z \Omega_l \Omega_p$ jak i symbol p oznaczają to samo prawdopodobieństwo, że sklepienie nie ulegnie zniszczeniu, możemy ułożyć równanie

$$(53) \quad \Omega_z \Omega_l \Omega_p = p.$$

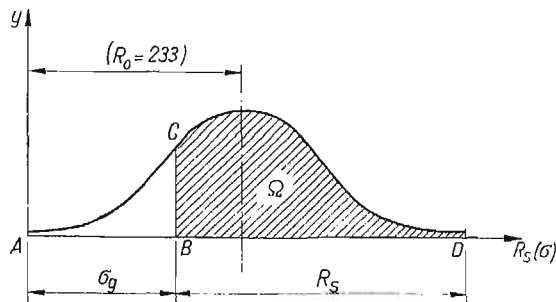
Bardziej intuicyjnie od równania (53) przemawia do wyobraźni inżyniera równanie

$$(54) \quad (1 - \Omega_z)(1 - \Omega_l)(1 - \Omega_p) = 1 - p,$$

którego obie strony wyrażają prawdopodobieństwo, że sklepienie ulegnie zniszczeniu; jednak równanie to jest niewygodne w użyciu i daje mniejszą od równania (53) gwarancję bezpieczeństwa budowli.

Ponieważ w myśl teorii ściskania mimośrodowego rozwarciu się spoin łuku w przekrojach pęknięcia w punktach r towarzyszy przekroczenie wytrzymałości materiału sklepienia na ściskanie w punktach s , to można uważać, że każde z prawdopodobieństw Ω_z , Ω_l i Ω_p przedstawia prawdopodobieństwo, że wytrzymałość materiału sklepienia jest większa niż naprężenie występujące w punktach s poszczególnych przekrojów. Można więc uważać przypadek, kiedy sklepieniu nie grozi niebezpieczeństwo, za przypadek unormowany, czyli za przypadek nadający się do obliczenia jego prawdopodobieństwa (praca [1], s. 8). Obliczenie opieramy tu na statystyce dla wytrzymałości materiału sklepienia na ściskanie i na odpowiednich krzywych prawdopodobieństwa.

Szkic krzywej prawdopodobieństwa dla wytrzymałości materiału sklepienia przedstawiony jest na rys. 20. Na osi odciętych odłożone są wielkości naprężeń



Rys. 20

ściskających R_s na granicy wytrzymałości materiału sklepienia, a również w ogóle wielkości σ naprężeń ściskających w punktach s przekrojów pęknięcia, a na osi rzędnych — gęstości prawdopodobieństwa występowania poszczególnych wartości R_s i σ w próbach wytrzymałościowych. Przy korzystaniu z rys. 20 będziemy rozumieli pod Ω jedno z prawdopodobieństw występujących z lewej strony równania (53). Jeżeli nie ma powodów do innych przypuszczeń, to przyjmujemy, że $\Omega_z = \Omega_l = \Omega_p = \Omega$ i wobec tego $\Omega = \sqrt[3]{p}$.

Odkładamy na krzywej prawdopodobieństwa wielkość Ω jako pole BCD i znajdujemy w ten sposób odcinek AB wyrażający naprężenie graniczne σ_g w punkcie s , a więc naprężenie normalne, poniżej którego z prawdopodobieństwem Ω nie będzie miało miejsca w punkcie s zmiążdżenie materiału sklepienia, a tym samym rozwarcie się spoiny sr w punkcie r . Inaczej mówiąc pole BCD wyraża tu prawdopodobieństwo, że wytrzymałość materiału sklepienia na ściskanie zawarta jest w granicach między $R_s = \sigma_g$ i $\max R_s$, względnie między $R_s = \sigma_g$ i $R_s = \infty$.

Jeżeli przyjmiemy, że wszystkie warunki ważności wzoru na ściskanie mimośrodowe zostały spełnione, to zależność między siłą normalną N w sklepieniu w prze-

kroju pęknięcia a wysokością przekroju wyraża się dla długości sklepienia 1 m wzorem

$$(55) \quad \sigma_s = 2 \frac{N}{h}.$$

Jeżeli jednak wymienione warunki nie są spełnione, to wzór (55) powinien być zastąpiony przez wzór

$$(56) \quad \sigma_g = 2 \frac{N}{h} (1 + \sum a_i),$$

gdzie pod a_i rozumiemy współczynniki wyrażające przyrosty naprężenia σ_s , spowodowane niecałkowitym urzeczywistnieniem się założeń, na podstawie których to naprężenie zostało obliczone.

Współczynniki a mogą być traktowane bądź jako graniczne wartości nielosowe, bądź też jako wartości, których nieprzekroczenie wyraża się dla każdego z nich pewnym prawdopodobieństwem. W tym ostatnim wypadku należy każdą z wielkości Ω w równaniu (53) pomnożyć przez odpowiedni iloczyn $\Pi \omega_i$, gdzie symbole ω_i wyrażają prawdopodobieństwo, że poszczególne współczynniki a nie przekroczą pewnych wartości (por. [3]).

We wzorach (55) i (56) wielkości N są proporcjonalne do obciążenia sklepienia, a więc wstawiając tu naprężenia $\sigma_g = R_s$, odpowiadające prawdopodobieństwu Ω dla danego przekroju pęknięcia, możemy znaleźć ze wzorów

$$(57) \quad R_s = 2N/h,$$

$$(58) \quad R_s = 2 \frac{N}{h} (1 + \sum a_i).$$

nośność graniczną sklepienia na podstawie jego grubości lub odwrotnie, dla danego obciążenia znaleźć odpowiednią grubość sklepienia.

Przytoczony sposób rozumowania sprecyzujemy na przykładzie łuku betonowego o przekroju poprzecznym prostokątnym, osi kolistej, rozpiętości teoretycznej $l = 20$ m, o strzałce $f = 5$ m i szerokości łuku 1 m. W węzłowiach wysokość przekroju tego łuku wynosi 1,44 m, a w zworniku 0,80 m. Kąt środkowy połowy łuku zawiera 53° (rys. 21).

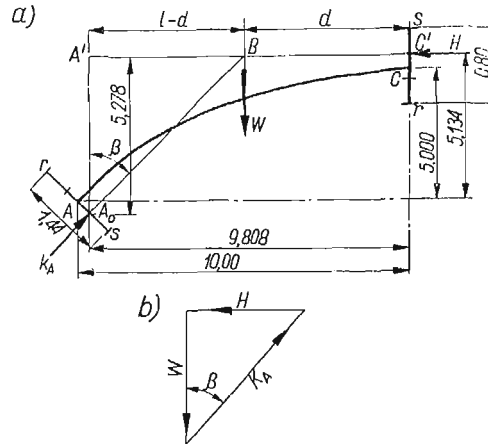
Sprawdzamy, czy te wymiary poprzeczne łuku są dostateczne przy obciążeniu $q = 40$ t/m.

Na rysunku 21a podane są współrzędne punktów ograniczających środkową trzecią część wysokości przekroju zwornikowego i węzłowiowego oraz kierunki AB i BC linii działania reakcji K_A i H tych przekrojów. Ciężar własny łuku wynosi $2,4$ t/m³. Ramię d wypadkowej obciążenia jednej połowy łuku względem środka zwornika będzie się tu wyrażało wzorem

$$(59) \quad d = \frac{183,82 + 50,30 q}{31,26 + 10,03 q},$$

gdzie q oznacza obciążenie jednostkowe przypadające na 1 mb rozpiętości łuku.

Z podobieństwa trójkątów $A_0A'B$ i $K_A W, H$ (rys. 21b) znajdujemy siły K_A i H . Przyjmujemy, że beton, z którego wykonano sklepienie, jest marki «250». Krzywa prawdopodobieństwa Gaussa dla niego podana została w pracy [3], s. 160, a kształt jej odpowiada rys. 20.



Rys. 21

Mając na widoku przykładowy charakter dalszych obliczeń przyjmujemy w danym wypadku $p = 0,8$. Liczba ta została wyżej umotywowana dla konstrukcji stalowych i żelbetowych, a stosowanie jej dla elementów konstrukcyjnych jednocześnie ściskanych i zginanych zostało wyjaśnione w pracy [5]. Również współczynniki przyrostu naprężeń α przyjmujemy tu na podstawie pewnej analogii warunków pracy między łukiem betonowym a konstrukcjami żelbetowymi; są to współczynniki następujące:

- α_1 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia wywołany przez błędy w wymiarach przekroju poprzecznego łuku (dla zwornika $\alpha_1 = 0,06$, a dla wezłowania $\alpha_1 = 0,10$);
- α_2 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia wywołany nieściśłym ustaleniem punktu zaczepienia siły podłużnej w łuku (dla zwornika $\alpha_2 = 0,10$, a dla wezłowania $\alpha_2 = 0,15$);
- α_3 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany różnicą temperatur w różnych częściach powierzchni łuku ($\alpha_3 = 0,20$);
- α_4 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany przez wahania współczynnika sprężystości E ($\alpha_4 = 0,15$);
- α_5 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany odchyleniami od założenia płaskich przekrojów ($\alpha_5 = 0,15$);
- α_6 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany różnicą własności sprężystych betonu na szerokości sklepienia ($\alpha_6 = 0,25$);
- α_7 współczynnik charakteryzujący przyrost naprężenia spowodowany warunkami utwierdzenia łuku (dla wezłowania $\alpha_7 = 0,20$).

Mamy stąd dla zwornika $\sum \alpha = 0,86$, a dla wezłowania $\sum \alpha = 1,20$.

Proste sr przedstawiają na rys. 21 przekroje poprzeczne w zworniku i w wezłowaniach. Prosta BC' przechodzi przez górny punkt rdzenia przekroju w zworniku i określa kierunek reakcji H zwornika, a prosta A_0B przez dolny punkt rdzenia w wezłowaniu i określa kierunek K_A reakcji wezłowania.

Ze wzoru (59) znajdujemy $d = 5,14$ m, a mianownik tego wzoru oznaczający wypadkową obciążenia połowy łuku daje $W = 431$ t. W trójkącie $A_0A'B$ kąt $\beta = = 42^\circ 40'$, a wobec tego trójkąt sił na rys. 21b daje

$$(60) \quad H = 387 \text{ t}, \quad K_A = 586 \text{ t}.$$

Wzór (56) doprowadza w tych warunkach do największych naprężeń ściskających na krawędziach s :

$$(61) \quad \begin{array}{ll} \text{w zworniku} & \sigma_g = 179 = \approx 180 \text{ kG/cm}^2, \\ \text{w wezłowaniach} & \sigma_g = 178 = \approx 180 \text{ kG/cm}^2. \end{array}$$

Z drugiej strony przy $p = 0,8$ prawdopodobieństwo $\Omega = \sqrt[3]{p} = 0,93$, czemu odpowiada na wykresie krzywej Gaussa dla betonu «250» wytrzymałość betonu na ściskanie $R_s \approx 180 \text{ kG/cm}^2$.

A więc można przyjąć, że wymiary sklepienia odpowiadają jego obciążeniu.

Gdyby się okazało, że naprężenia σ_g są tu dużo mniejsze od R_s i że wobec tego wymiary poprzeczne sklepienia powinny być zmniejszone, trzeba by skorzystać ze sposobu kolejnych przybliżeń, w szczególności należałoby:

- 1) na podstawie ustalonych wartości R_s wyznaczyć ze wzoru (58) nowe, odmienne od założonych wartości h ;
- 2) na podstawie nowych wartości h znaleźć nowe wartości H i K_A ;
- 3) na podstawie nowych wartości H i K_A ustalić ostateczne grubości sklepienia.

Katastrofa muru podporowego polega bądź na przesuwaniu się, bądź też na wywracaniu się muru. Aby móc tę katastrofę uważać za przypadek unormowany, musimy umieć ocenić siły działające na mur oraz prawdopodobieństwa ich występowania.

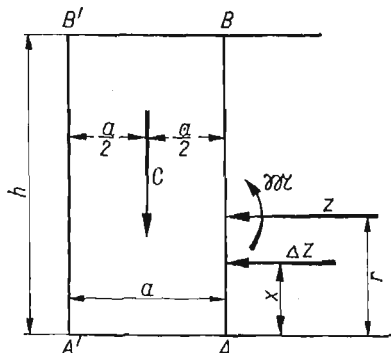
W naszych rozważaniach ograniczamy się do badania samej tylko stateczności muru podporowego pomijając kwestię wypierania gruntu spod fundamentu i wytrzymałości muru. Aby nie wprowadzać okoliczności nieistotnych dla zagadnienia, rozpatrujemy mur o przekroju poprzecznym prostokątnym wykonany z materiału jednorodnego (rys. 22); C oznacza na rysunku ciężar całego muru, Z parcie ziemi na mur, a \mathfrak{M} moment wywracający.

Chodzi o ustalenie warunków, przy których mur podporowy będzie zabezpieczony zarówno przed przesunięciem się po płaszczyźnie AA' jak i przed obrotem względem punktu A' .

Wartości parcia ziemi na mur i momentu wywracającego na ogół są ze sobą związane, gdyż każdej wartości parcia na mur zarówno całkowitego Z jak i cząstkowego ΔZ odpowiada moment Zr lub ΔZx , gdzie x oznacza ramię momentu. Nie ma więc potrzeby uważać momentu \mathfrak{M} za wielkość losową.

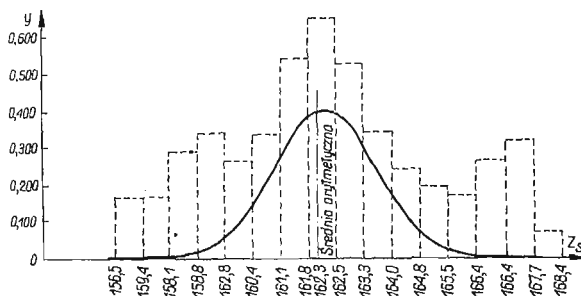
Będziemy dalej rozumieli siłę Z jako siłę poziomą i jako rzeczywiste parcie ziemi na mur, tzn. parcie geostatyczne (parcie w spokoju). Wprowadzamy do zadania parcie geostatyczne mając na widoku istnienie pewnej zależności między tym parciem, a parciem geodynamicznym (parciem w stanie równowagi granicznej), dającym się łatwo obliczyć z prostych wzorów statyki budowli i stanowiącym najczęściej używany w praktyce inżynierskiej schemat obliczenia parcia ziemi na mur podporowy.

Zastanawiając się nad możliwościami zastosowania metody półprobabilistycznej do badania stateczności murów podporowych musimy liczyć się z faktem, że teoria



Rys.22

parcia geostatycznego nie jest jeszcze na tyle rozwinięta, aby bezpośrednio stosowanie jej dla celów praktyki było łatwe, i z tego powodu musimy oprzeć się tu przede wszystkim na doświadczeniach. Należy przy tym zaznaczyć, że dla celu, o który nam chodzi, potrzebna jest bezpośrednia znajomość parcia geostatycznego, a nie jedynie zdobycie danych, które, jak współczynnik Poissona dla masy ziemnej, mają dopiero służyć do wyznaczenia tego parcia.

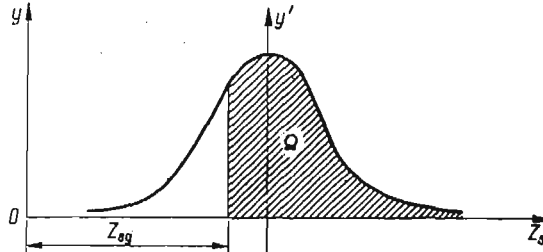


Rys. 23

Korzystamy tu z wyników doświadczeń zorganizowanych w 1955 r. w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN, a dotyczących geostatycznego parcia piasku wiślanego Z_s na ścianę o wysokości 0,95 m i szerokości 0,60 m. Wielkość Z_s jako otrzymana z doświadczenia musi być uważana za wielkość losową. Rozrzut jej odpowiada krzywej prawdopodobieństwa Gaussa przedstawionej na rys. 23.

Tu na osi poziomej odłożone zostały poszczególne wartości Z_{sg} , a na osi pionowej gęstości prawdopodobieństw ich występowania (por. [7]).

Linie przerywane i odpowiednie liczby dotyczą histogramu otrzymanego z doświadczenia.



Rys. 24

Załączona tablica daje zależność między wziętymi z rys. 23 wartościami parcia Z_{sg} uważanymi za graniczne i prawdopodobieństwami Ω , którym one odpowiadają, a które przedstawione są jako powierzchnie zakreskowane na rys. 24.

Tablica 1

Ω	Z
0,95	160,0
0,90	160,5
0,85	160,8
0,80	161,2
0,75	161,4
0,70	161,2

Nie ma powodu, aby wskaźnik bezpieczeństwa p odpowiadający stateczności muru podporowego był różny od wskaźnika odpowiadającego bezpieczeństwu muru ze względu na jego wytrzymałość, a więc praktycznie na ściskanie mimośrodowe. Z drugiej strony, wskaźnik bezpieczeństwa przy ścisaniu mimośrodowym muru można uważać za taki sam, jak wskaźnik bezpieczeństwa dla konstrukcji żelbetowych, który przyjmujemy w pewnych warunkach pracy konstrukcji za równy $p = 0,8$ (praca [3], s. 136).

Wskaźnikowi $p = 0,8$ odpowiada według krzywej Gaussa wartość graniczna $Z_{sg} = 161,1$; dotyczy ona przedniej ściany skrzyni użytej do doświadczenia, o którym była mowa, a więc ściany o wysokości 0,95 m. Natomiast mur podporowy przeciętnej konstrukcji posiada zwykle wysokość znacznie większą i dlatego z otrzymanych w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki wyników można właściwie korzystać dopiero po zastosowaniu zasady podobieństwa. Ponieważ jednak dla parcia geostatycznego zasada podobieństwa nie może nam jeszcze dostarczyć potrzebnych wzorów, uciekamy się tu do interpolacji lub ekstrapolacji. Ta ostatnia omówiona została w pracy [8]. W danym wypadku korzystamy ze wzoru

$$(62) \quad Z_s = \frac{c_1 h^2}{4} \frac{\operatorname{tg}(30^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(45^\circ - \beta)}{2},$$

gdzie h oznacza wysokość ściany, β kąt chropowatości i c_1 pewien współczynnik stały, a więc niezależny od wysokości ściany.

Aby wyznaczyć stałą c_1 , wstawiamy do wzoru (62) wielkości odpowiadające omówionemu doświadczeniu, wykonanemu w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki; przyjmujemy tu wysokość ściany za równą $h = 1$ m, a kąt chropowatości za równy $\beta = 12^\circ$, co stanowi $2/3$ kąta tarcia gładkiej powierzchni kamiennej po drugiej powierzchni kamiennej, który równa się 18° i który wchodzi w grę przy napełnieniu skrzyni przeznaczonej do doświadczeń z piaskiem. Dla parcia geostatycznego Z_s wprowadzamy tu wartość $Z_{sg} = 161,1$ kG odpowiadającą prawdopodobieństwu $\Omega = 0,8$.

Otrzymujemy w tych warunkach $c_1 = 1336$ kG/m³, wobec czego wzór (62) dla wszystkich $\Omega = 0,8$ i dowolnej wysokości muru przybiera postać

$$(63) \quad Z_{sg} = \frac{1336 h^2 \operatorname{tg}(30^\circ - \beta) + \operatorname{tg}(45^\circ - \beta)}{4}.$$

Dla szerokości muru 1 m $c_1 = 2353$ kG/m³.

Jeżeli oznaczymy przez Z_0 dopuszczalne ze względu na przesuwanie muru parcie ziemi, wówczas możemy ustalić zależność

$$(64) \quad Z_{sg} = Z_0(1 + \sum \alpha),$$

gdzie α są to współczynniki przyrostu parcia Z_0 , doprowadzające je do wartości Z_{sg} , tj. wartości odpowiadającej przyjętemu wskaźnikowi bezpieczeństwa $p = 0,8$.

Współczynniki α charakteryzują takie okoliczności pracy muru podporowego, jak wilgotność ziemi, jej zagęszczenie, chropowatość powierzchni muru, a przede wszystkim różnicę między rzeczywistym parciem ziemi na mur, czyli parciem geostatycznym, a przeważnie stosowanym w obliczeniach statycznych parciem geodynamicznym. Współczynnik przyrostu parcia $\alpha = \alpha_d$ charakteryzujący tę ostatnią okoliczność ustalamy na podstawie omówionego wyżej doświadczenia. W tym celu przyjmujemy, że we wzorze (64) w sumie $\sum \alpha$ wszystkie współczynniki α są równe zeru z wyjątkiem samego tylko współczynnika α_d i że parcie dopuszczalne Z_0 jest równe właśnie parciu geodynamicznemu Z_d , obliczonemu ze wzorów Coulomba lub wzorów pokrewnych.

Dla geodynamicznego parcia poziomego przy naziomie nieobciążonym mamy znany wzór

$$(65) \quad Z_d = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right),$$

gdzie γ oznacza ciężar jednostkowy ziemi, a ψ kąt tarcia wewnętrznego. Jeżeli wstawimy do wzoru (65) liczby odpowiadające opisanemu doświadczeniu, to otrzymamy

$$(66) \quad Z_d = 145,6 \text{ kG}.$$

Natomiast graniczna wartość parcia geostatycznego odczytana z krzywej Gaussa, przedstawionej na rys. 23, i odpowiadająca wskaźnikowi bezpieczeństwa $p = \Omega = 0,8$ wynosi, jak było powiedziane wyżej,

$$(67) \quad Z_{sg} = 161,1 \text{ kG}.$$

A więc wstawiając do wzoru (64) wielkości (66) i (67) oraz $Z_0 = Z_d$ i $\Sigma\alpha = \alpha_d$ znajdujemy, że

$$(68) \quad 161,1 = 145,6(1 + \alpha_d),$$

skąd

$$(69) \quad \alpha_d = \frac{Z_{sg} - Z_d}{Z_d} = 0,106.$$

Inne współczynniki przyrostu parcia ziemi α zależą od konstrukcji muru podporowego i rodzaju ziemi nasypowej, a więc są to np. przyrost parcia ziemi, spowodowany wzrostem jej ciężaru jednostkowego, który można ocenić jako przyrost rzędu $\alpha = 0,02$, przyrost spowodowany wilgotnością ziemi (podobnego rzędu) itd.

Jak wynika z powyższych rozważań, metoda półprobabilistyczna daje możliwość zabezpieczenia muru podporowego przed przesuwaniem z jednej strony przez wybór właściwego wskaźnika bezpieczeństwa p , a z drugiej przez wprowadzenie współczynników α przyrostu parcia ziemi na mur. Jeżeli nie rozporządzamy dostatecznymi danymi statystycznymi, to uzależnienie od siebie obydwóch sposobów ułatwia wyznaczenie dopuszczalnego rzeczywistego parcia ziemi na mur. Ułatwia ono mianowicie ustalenie współczynników α , o ile w pewnym specjalnym wypadku współczynnik bezpieczeństwa muru, a więc i dopuszczalne parcie na mur, możemy uważać za znane. Wówczas we wzorze (64) Z_0 równa się pewnej znanej wielkości Z'_0 , tj.

$$(70) \quad Z_{sg} = Z'_0(1 + \Sigma\alpha),$$

gdzie Z'_0 daje się niekiedy wziąć z praktyki budowlanej. Wzór (70) pozwala na wprowadzenie korektywy do poszczególnych współczynników α , podnoszącej ich znaczenie praktyczne.

W rezultacie ze wzoru (64) znajdujemy dopuszczalne parcie na mur

$$(71) \quad Z_0 = \frac{Z_{sg}}{1 + \Sigma\alpha},$$

co daje podstawę do wyznaczenia współczynników bezpieczeństwa n zarówno na przesuwanie, jak i wywracanie się muru.

Analiza bezpieczeństwa rozpatrzonych czterech różnych rodzajów konstrukcji pozwala twierdzić, że katastrofę budowlaną można dzięki zastosowaniu zasad rachunku prawdopodobieństwa i statystyki rozpatrywać jako przypadek unormowany, co daje możliwość sprowadzić zabezpieczenie konstrukcji przed katastrofą na realny grunt obliczeń wytrzymałościowych.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. SMOLUCHOWSKI, *O pojęciu przypadku i pochodzeniu praw fizyki opartych na prawdopodobieństwie*, Wiadomości Matematyczne, 1923.

[2] Н. СТРЕЛБИЦКИЙ, *Сопротивление полезных нагрузок разных стран*, 1962.

- [3] W. WIERZBICKI, *Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych*, Warszawa 1961.
- [4] W. WIERZBICKI, *Sécurité des ponts en acier considérée du point de vue probabiliste*, AIPC, Septième Congrès, Publication Préliminaire, 1964.
- [5] W. WIERZBICKI, *Bezpieczeństwo statycznie niewyznaczalnych konstrukcji żelbetowych w ujęciu probabilistycznym*, Inżynieria i Budownictwo, 1963.
- [6] W. WIERZBICKI, *Mechanika budowli*, wyd. VI, Warszawa 1961.
- [7] W. WIERZBICKI, *O możliwości zastosowania metody półprobabilistycznej do badania stateczności murów podporowych*, Inżynieria i Budownictwo, 1962.
- [8] W. WIERZBICKI, *Parcie geostatyczne na tle doświadczeń*, Rozprawy Inżynierskie, 1964.

Р е з ю м е

СТРОИТЕЛЬНАЯ КАТАСТРОФА КАК НОРМИРОВАННОЕ СОБЫТИЕ

Благодаря применению теории вероятностей и статистики можно рассматривать строительную катастрофу как так называемое нормированное событие. Это обосновано оценкой безопасности основных видов строительных конструкций, таких как стальные и железобетонные сооружения, своды и опорные стенки. Исследование безопасности отдельных конструктивных элементов произведено так по вероятностному, как и по полувероятностному методам.

S u m m a r y

STRUCTURE COLLAPSE AS A NORMED EVENT

Due to the application of the probability calculus and the mathematical statistics, the collapse of a structure may be considered what is termed a normed event. This has been proved on the basis of the estimated safety of main engineering structures, e.g. steel and concrete structures, vaults and retaining walls. The safety of individual elements of the structure has been analysed by means of both the probabilistic and semi-probabilistic methods.

ZASADA BETTIEGO JAKO PODSTAWA WARUNKÓW MODELOWYCH

MARIAN JANUSZ (GLIWICE)

1. Uwagi ogólne. Zasada Bettiego

Publikacja niniejsza ma na celu zwrócenie większej niż dotychczas uwagi na możliwość wszechstronnego uwzględnienia odpowiedniości modelowej przy badaniach konstrukcji inżynierskich na modelach. Chodzi również o przedstawienie zasady Bettiego jako podbudowy teoretycznej owej odpowiedniości. Zagadnienia te były już poruszone w jednym z rozdziałów obszerniejszej pracy autora [1]. Z powodu bardzo małego nakładu sprawa powyższa jednak nie została należycie upowszechniona. Stąd też zapewne wynika fakt, iż w literaturze przedmiotu odpowiedniość modelową traktuje się często jako zagadnienie nowe i w zakresie ograniczonym. W pracy obecnej wyniki teoretyczne zilustrowano przykładami liczbowymi.

W celu wyznaczenia pewnych wielkości statycznych, występujących w prętowym układzie konstrukcyjnym, za pomocą badań modelowych należy sporządzić model obiektu rzeczywistego i to zazwyczaj z odmiennego materiału. Przez termin «model» rozumiemy w tym przypadku pomniejszony i geometrycznie podobny materialny obraz odpowiadający układowi rzeczywistemu w taki sposób, ażeby wielkości statyczne wyznaczone dla modelu mogły być łatwo obliczone dla obiektu rzeczywistego przez uwzględnienie odpowiednich podziałek. Dlatego wymiary modelu powinny być tak dobrane, aby stosunek odpowiadających sobie, a różnych od zera składników wzoru na przemieszczenie w obiekcie rzeczywistym i modelu wyrażał się tą samą liczbą.

Wspomniany wzór na przemieszczenie można wyprowadzić np. za pomocą zasady Bettiego, której treść wyraża znana równość:

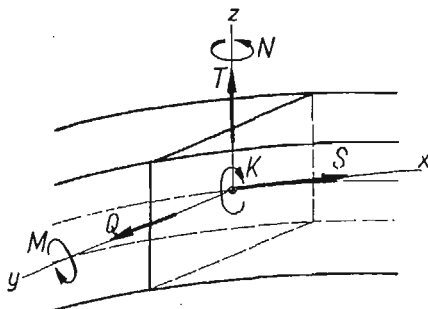
$$(1.1) \quad \sum_J P_J p_{JK} = \sum_K Q_K q_{kJ}.$$

Symbole P_J i Q_K oznaczają tu wielkości skupionych obciążeń statycznych działających na rozpatrywany układ, natomiast symbolami p_{JK} i q_{kJ} oznaczono odpowiednie przemieszczenia; pierwszy indeks określa miejsce i kierunek przemieszczenia, drugi zaś przyczynę jego powstania.

W dowolnym przypadku obociążenia układu prętowego energię sprężystą U przedstawić można za pomocą następujących wielkości statycznych: siła podłużna S , moment skręcający K , dwa momenty zginające M i N oraz dwie siły ścinające T i Q (rys. 1, gdzie osie y i z są głównymi środkowymi osiami bezwładności prze-

kroju, a oś x jest zgodna w danym miejscu z osią elementu). Energia sprężysta układu ma, jak wiadomo, postać następującą:

$$(1.2) \quad U = \frac{1}{2} \int \frac{S^2 ds}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{K^2 ds}{GC} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI_y} + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EI_z} + \frac{1}{2} \int \kappa_y \frac{Q^2 ds}{GA} + \frac{1}{2} \int \kappa_z \frac{T^2 ds}{GA}.$$



Rys. 1

Korzystając ze znanych wzorów na energię sprężystą możemy zasadę Bettiego dla układu przestrzennego wyrazić w następujący sposób:

$$(1.3) \quad \sum_J P_J p_{JK} = \sum_K Q_K q_{kJ} = \int \frac{S_J S_K}{EA} ds + \int \frac{K_J K_K}{GC} ds + \int \frac{M_J M_K}{EI_y} ds + \\ + \int \frac{N_J N_K}{EI_z} ds + \int \kappa_y \frac{Q_J Q_K}{GA} ds + \int \kappa_z \frac{T_J T_K}{GA} ds.$$

2. Przeszczenia rzeczywiste i modelowe; ogólny warunek odpowiedności modelowej

Gdy grupę sił J stanowi tylko jedna siła P , a badany układ jest układem liniowo sprężystym, czyli podlegającym uogólnionemu prawu Hooke'a, to można napisać, że

$$S_J = PS_J^{\circ}, \quad K_J = PK_J^{\circ}, \quad M_J = PM_J^{\circ}, \quad N_J = PN_J^{\circ}, \quad Q_J = PQ_J^{\circ}, \quad T_J = PT_J^{\circ},$$

gdzie S_J° , K_J° , M_J° , N_J° , Q_J° , T_J° pochodzą od niemianowanej siły jednostkowej. Jeżeli jest to faktycznie siła, wtedy S_J° , Q_J° , T_J° są wielkościami niemianowanymi. Jeśli siła jednostkowa będzie momentem, to wielkości te będą miały wymiar 1/długość. W pierwszym przypadku M_J° , N_J° , K_J° mają wymiar długości, w drugim zaś przypadku są niemianowane. Siła jednostkowa jest momentem wtedy, gdy i siła P jest momentem. Przez siłę P bowiem należy rozumieć siłę uogólnioną. Równanie (1.3) przybierze teraz postać następującą:

$$(2.1) \quad P p_{JK} = \int \frac{PS_J^{\circ} S_K}{EA} ds + \int \frac{PK_J^{\circ} K_K}{GC} ds + \int \frac{PM_J^{\circ} M_K}{EI_y} ds + \\ + \int \frac{PN_J^{\circ} N_K}{EI_z} ds + \int \kappa_y \frac{PQ_J^{\circ} Q_K}{GA} ds + \int \kappa_z \frac{PT_J^{\circ} T_K}{GA} ds,$$

skąd

$$p_{JK} = \int \frac{S_J^{\circ} S_K}{EA} ds + \int \frac{K_J^{\circ} K_K}{GC} ds + \int \frac{M_J^{\circ} M_K}{EI_y} ds + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N_K}{EI_z} ds + \int \kappa_y \frac{Q_J^{\circ} Q_K}{GA} ds + \int \kappa_z \frac{T_J^{\circ} T_K}{GA} ds.$$

Należy mieć zawsze na uwadze, że S_J° , K_J° , M_J° itd. pochodzą od działania siły $P = 1$, stanowiącej teraz całkowitą grupę sił J . W ten sposób dla danego układu prętowego liniowo sprężystego obciążonego uogólnionymi siłami Q_K grupy K znaleziono przemieszczenie określonego punktu i .

Nawiązując teraz do uwag ogólnych, sformułowanych w odniesieniu do badań modelowych na początku poprzedniego punktu, obliczymy wartość liczbową stosunków pomiędzy odpowiadającymi sobie składnikami wzoru na przemieszczenie dla pewnego punktu obiektu rzeczywistego i analogicznego punktu na modelu. Jak już wiadomo, stosunki te muszą być równe. Jeżeli przemieszczenie jakiegoś punktu obiektu rzeczywistego jest $a' + b' + c' + \dots$, a przemieszczenie analogicznego punktu na modelu jest $a'' + b'' + c'' + \dots$ oraz jeśli dla wszystkich możliwych a' , b' , c' , ... ma być

$$\frac{a' + b' + c' + \dots}{a'' + b'' + c'' + \dots} = l,$$

to musi równocześnie zachodzić równość

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''} = \dots = l.$$

Oznaczając przez p'_{iK} przemieszczenie dowolnego i -tego punktu obiektu rzeczywistego pod działaniem grupy sił K , a przez p''_{iK} — analogiczne przemieszczenie na modelu, otrzymamy według wzoru (2.1)

$$p'_{iK} = \int \frac{S_J^{\circ} S'_K}{E'A'} ds' + \int \frac{K_J^{\circ} K'_K}{G'C'} ds' + \int \frac{M_J^{\circ} M'_K}{E'I'_y} ds' + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N'_K}{E'I'_z} ds' + \int \kappa'_y \frac{Q_J^{\circ} Q'_K}{G'A'} ds' + \int \kappa'_z \frac{T_J^{\circ} T'_K}{G'A'} ds', \\ p''_{iK} = \int \frac{S_J^{\circ} S''_K}{E''A''} ds'' + \int \frac{K_J^{\circ} K''_K}{G''C''} ds'' + \int \frac{M_J^{\circ} M''_K}{E''I''_y} ds'' + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N''_K}{E''I''_z} ds'' + \int \kappa''_y \frac{Q_J^{\circ} Q''_K}{G''A''} ds'' + \int \kappa''_z \frac{T_J^{\circ} T''_K}{G''A''} ds''.$$

Wielkości S_J° , Q_J° i T_J° są jednakowe dla obiektu rzeczywistego i dla modelu, ponieważ w obydwóch przypadkach pochodzą od niemianowej siły jednostkowej. Natomiast $S'_K \neq S''_K$, $Q'_K \neq Q''_K$ i $T'_K \neq T''_K$, bowiem siły K , działające na obiekt rzeczywisty i na model nie są identyczne, lecz pozostają do siebie w pewnym stosunku. Momenty K_J° i $K_J^{\circ\prime}$, M_J° i $M_J^{\circ\prime}$ oraz N_J° i $N_J^{\circ\prime}$, jakkolwiek wywołane jed-

nakową siłą jednostkową, są jednak różne w obiekcie i modelu z powodu różnicy wymiarów, a tym samym różnicy ramion w jednym i drugim przypadku.

Kąty obrotu φ wyrażają następujące wzory:

$$\begin{aligned} \varphi'_{iK} = & \int \frac{S_J^{\circ} S_K'}{E' A'} ds' + \int \frac{K_J K_K'}{G' C'} ds' + \int \frac{M_J^{\circ} M_K'}{E' I_y'} ds' + \\ & + \int \frac{N_J^{\circ} N_K'}{E' I_z'} ds' + \int \kappa_y' \frac{Q_J^{\circ} Q_K'}{G' A'} ds' + \int \kappa_z' \frac{T_J^{\circ} T_K'}{G' A'} ds', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''_{iK} = & \int \frac{S_J^{\circ} S_K''}{E'' A''} ds'' + \int \frac{K_J K_K''}{G'' C''} ds'' + \int \frac{M_J^{\circ} M_K''}{E'' I_y''} ds'' + \\ & + \int \frac{N_J^{\circ} N_K''}{E'' I_z''} ds'' + \int \kappa_y'' \frac{Q_J^{\circ} Q_K''}{G'' A''} ds'' + \int \kappa_z'' \frac{T_J^{\circ} T_K''}{G'' A''} ds''. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia φ'_{iK} i φ''_{iK} działamy momentem jednostkowym w miejscu i kierunku tych przemieszczeń, zarówno w układzie rzeczywistym, jak modelowym.

W wyrażeniu ostatnim S_J° , Q_J° i T_J° pochodzą od momentu jednostkowego, więc — jak już wspomniano uprzednio — mają one wymiar 1/długość, są wobec tego różne w obydwóch układach. Natomiast momenty K_J° , M_J° i N_J° , jako wywołane niemianowanym momentem jednostkowym, są niemianowane, są zatem jednakowe w obydwóch układach, mimo że wielkości K_K , M_K i N_K są różne dla obiektu i modelu z wiadomego powodu.

Wprowadźmy obecnie podziałkę rozpiętości i ramion

$$\frac{s'}{s''} = n,$$

podziałkę pól przekrojów

$$\frac{A'}{A''} = a,$$

podziałkę momentów bezwładności

$$\frac{I_y'}{I_y''} = i_y, \quad \frac{I_z'}{I_z''} = i_z, \quad \frac{C'}{C''} = c$$

oraz podziałkę tylko sił obciążających (a nie momentów obciążających)

$$\frac{P'}{P''} = f;$$

zatem dla momentów obciążających będzie

$$\frac{P' s'}{P'' s''} = fn.$$

Wprowadźmy również podziałkę stałych sprężystości, ponieważ obiekt rzeczywisty i model sporządzone są na ogół z różnych materiałów,

$$\frac{E'}{E''} = e, \quad \frac{G'}{G''} = g.$$

Wyznamy następnie wartości liczbowe stosunków odpowiadających sobie składników, które występują we wzorach na przemieszczenie w układzie rzeczywistym i modelowym. Otrzymamy następujące wyrażenia, w których pojedyncze kreski ' u góry odnoszą się do obiektu rzeczywistego, a podwójne '' — do modelu:

$$\begin{aligned} \frac{\int \frac{S_J^{\circ} S_K'}{E' A'} ds'}{\int \frac{S_J^{\circ} S_K''}{E'' A''} ds''} &= \frac{fn}{ae}, & \frac{\int \frac{K_J' K_K'}{G' C'} ds'}{\int \frac{K_J'' K_K''}{G'' C''} ds''} &= \frac{fn^3}{gc}, \\ \frac{\int \frac{M_J^{\circ} M_K'}{E' I_y'} ds'}{\int \frac{M_J'' M_K''}{E'' I_y''} ds''} &= \frac{fn^3}{ei_y}, & \frac{\int \frac{N_J^{\circ} N_K'}{E' I_z'} ds'}{\int \frac{N_J'' N_K''}{E'' I_z''} ds''} &= \frac{fn^3}{ei_z}, \\ \frac{\int \kappa_y' \frac{Q_J^{\circ} Q_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_y'' \frac{Q_J'' Q_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{fn}{ag}, & \frac{\int \kappa_z' \frac{T_J^{\circ} T_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_z'' \frac{T_J'' T_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{fn}{ag}, \end{aligned}$$

dla kątów zaś:

$$\begin{aligned} \frac{\int \frac{S_J^{\circ} S_K'}{E' A'} ds'}{\int \frac{S_J'' S_K''}{E'' A''} ds''} &= \frac{f}{ae}, & \frac{\int \frac{K_J K_K'}{G' C'} ds'}{\int \frac{K_J K_K''}{G'' C''} ds''} &= \frac{fn^2}{gc}, \\ \frac{\int \frac{M_J^{\circ} M_K'}{E' I_y'} ds'}{\int \frac{M_J'' M_K''}{E'' I_y''} ds''} &= \frac{fn^2}{ei_y}, & \frac{\int \frac{N_J^{\circ} N_K'}{E' I_z'} ds'}{\int \frac{N_J'' N_K''}{E'' I_z''} ds''} &= \frac{fn^2}{ei_z}, \\ \frac{\int \kappa_y' \frac{Q_J^{\circ} Q_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_y'' \frac{Q_J'' Q_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{f}{ag}, & \frac{\int \kappa_z' \frac{T_J^{\circ} T_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_z'' \frac{T_J'' T_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{f}{ag}. \end{aligned}$$

W badaniach modelowych, jak już stwierdzono, dla przesunięć rzeczywistych i modelowych musi być spełniona równość

$$\frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{gc} = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{fn^3}{ei_z} = \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{fn}{ag} = \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{fn}{ag},$$

a dla kątów obrotu — równość

$$\frac{f}{ae} = \frac{fn^2}{gc} = \frac{fn^2}{ei_y} = \frac{fn^2}{ei_z} = \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{f}{ag} = \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{f}{ag}.$$

Obydwie ostatnie równości sprowadzają się do jednej następującej:

$$(2.2) \quad \frac{1}{ae} = \frac{n^2}{gc} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{1}{ag} = \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{1}{ag}.$$

Jeżeli rozważany układ prętowy jest np. kratownicą, to różny od zera jest tylko składnik pochodzący od siły podłużnej S ; inne składniki nie wchodzi w rachubę. Wobec tego

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = \alpha, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{f}{ae} = \frac{1}{n} \alpha,$$

a stąd

$$(2.3) \quad p'_{iK} = \alpha p''_{iK}, \quad \varphi'_{iK} = \frac{1}{n} \alpha \varphi''_{iK}.$$

Przemieszczenie rzeczywiste obliczamy mnożąc pomierzone przemieszczenie modelowe przez współczynnik wynikający z uwzględnienia przyjętych dla modelu podziałek.

Model jednak musi być tak wykonany, ażeby wszystkie podziały modelowe spełniały warunek (2.2), który można uznać za ogólny warunek odpowiedniości modelowej. Warto podkreślić, że warunek ten jest wynikiem zastosowania wzoru (2.1) do wyrażenia przemieszczeń rzeczywistych i modelowych, a wzór ten wyprowadzono w oparciu o zasadę wzajemności przemieszczeń Bettiego. Zasada wzajemności przemieszczeń okazała się zatem całkowicie przydatna do zbudowania podstaw teoretycznych dla odpowiedniości modelowej układów prętowych, podlegających uogólnionemu prawu Hooke'a. Należało tylko tę ogólnie znaną zasadę wyrazić za pomocą wielkości wewnętrznych, jak to uwidoczniło w równaniu (1.2). Udowodniono zarazem znacznie szerszą uniwersalność zasady wzajemności przemieszczeń, aniżeli jej się to ogólnie przypisuje. Zasada wzajemności przemieszczeń może słusznie współzawodniczyć z najogólniejszą w mechanice zasadą prac przygotowanych. Zwrócenie uwagi na ogólną przydatność omawianej zasady było między innymi także celem niniejszej pracy.

Gdyby chodziło o wielkości statyczne w układach prętowych liniowo sprężystych, to przy badaniach modelowych wyrażamy je przeważnie za pomocą przemieszczeń mierzonych na modelach. W celu uzyskania wielkości statycznych, odnoszących się do obiektów rzeczywistych, należy pomierzone przemieszczenia modelowe przeliczyć na rzeczywiste według wzorów (2.3). Samo wyznaczanie wielkości statycznych za pomocą badań modelowych nie jest objęte zakresem niniejszej pracy, mającej za zadanie głównie podanie warunków, którym powinien czynić zadość model, ażeby nadawał się do wyznaczenia tych wielkości. Rozważania dokładniejsze, dotyczące modelowego określenia wielkości statycznych zarówno dla układów płaskich jak i przestrzennych, zawarte są w obszernej monografii autora [1], a także w pracach [2, 3, 4 i 5]. Krótki zarys obliczania tych wielkości z pomiarów modelowych podano dla orientacji w p. 5 niniejszej pracy.

3. Warunki modelowe dla układów płaskich

Ażeby bardziej szczegółowo podać warunki odpowiedniości modelowej, wynikające z równości (2.1), podzielimy wszystkie zagadnienia na *płaskie i przestrzenne*. W zagadnieniach płaskich jest

$$K = N = Q = 0,$$

wobec tego warunek odpowiedniości przybiera postać następującą:

$$(3.1) \quad \frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \cdot \frac{fn}{ag}.$$

Wpływ siły podłużnej i poprzecznej na wielkości przemieszczeń jest bardzo mały, wskutek czego często go pomijamy, a uwzględniamy tylko wpływ momentu zginającego. Wówczas dla przesunięć będzie

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn^3}{ei_y} = \alpha,$$

dla kątów obrotu zaś

$$\frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{fn^2}{ei_y} = \frac{1}{n} \alpha.$$

Wtedy podziałki f , n , e , i_y przyjmujemy jako od siebie niezależne.

Jeżeli jednak zależy nam na uwzględnieniu większej dokładności, to biorąc np. pod uwagę wpływ siły podłużnej i momentu zginającego musimy tak wykonać model, ażeby jego podziałki spełniały warunek

$$\frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{ei_y}, \quad \text{czyli} \quad n^2 = \frac{i_y}{a} \quad \text{albo} \quad an^2 = i_y = \frac{I'_y}{I''_y} = \frac{A' r_y'^2}{A'' r_y''^2} = a \frac{r_y'^2}{r_y''^2},$$

$$\text{skąd} \quad n^2 = \frac{r_y'^2}{r_y''^2} \quad \text{lub ostatecznie} \quad n = \frac{r'_y}{r''_y},$$

gdzie r'_y i r''_y są głównymi środkowymi ramionami bezwładności przekroju obiektu rzeczywistego i modelu w odniesieniu do osi y (rys. 1). Dla uwzględnienia zatem przy modelowym wyznaczaniu wielkości statycznych wpływu siły podłużnej i momentu zginającego należy tak dobrać przekrój poprzeczny modelu, ażeby stosunek ramion bezwładności przekrojów obiektu i modelu był równy podziałce długości. Podziałkę pól a przyjmujemy niezależnie od n . Wtedy będzie

$$\frac{fn^3}{ei_y} = \frac{fn^3}{aen^2} = \frac{fn}{ae} = \alpha \quad \text{oraz} \quad \frac{fn^2}{ei_y} = \frac{fn^2}{aen^2} = \frac{f}{ae} = \frac{1}{n} \alpha,$$

zatem znowu

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = \alpha \quad \text{i} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n}.$$

Przy równoczesnym uwzględnieniu także siły poprzecznej powinien być dla modelu spełniony warunek

$$\frac{fn}{ae} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \frac{fn}{ag},$$

czyli

$$\frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = \frac{g}{e} = \frac{G'}{G''} \frac{E''}{E'} = \frac{E'}{2(1+\mu')} \cdot \frac{2(1+\mu'')}{E''} \frac{E''}{E'} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'},$$

gdzie μ' jest współczynnikiem Poissona materiału obiektu, a μ'' materiału modelu. W celu uwzględnienia również wpływu siły poprzecznej przekrój poprzeczny modelu powinien być zatem tak dobrany, ażeby był spełniony ostatni warunek. Wtedy także $g = e\kappa'_z/\kappa''_z$, czyli

$$\frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \frac{fn}{ag} = \frac{fn}{ae} = a.$$

Ponieważ stosunek $(1+\mu'')/(1+\mu')$ jest w praktyce zawsze różny od κ'_z/κ''_z , przeto dla spełnienia ostatniego warunku musimy zmienić nieco kształt przekroju poprzecznego w modelu, przy czym również spełniać się musi warunek $r'_y/r''_y = n$; nie trzeba jednak zważać zupełnie na stosunek pól a , albowiem wielkość ta nie występuje w omawianym warunku.

Podano w ten sposób zależności, jakie muszą zachodzić pomiędzy podziałkami modelu płaskiego układu prętowego, ażeby spełniony był ogólny warunek odpowiedniości modelowej, wyrażony w (2.2). Gdy przyjmiemy podziałkę n dla rozpiętości i ramion, podziałkę pól a i podziałkę sił f , to podziałka momentów bezwładności musi mieć postać $i_y = an^2$, co będzie miało miejsce zawsze przy zachowaniu warunku $r'_y/r''_y = n$. Jednakże podziałki n , a i f można zawsze przyjmować jako dowolne i od siebie niezależne. Inaczej nieco przedstawia się sprawa podziałki modułów sprężystości podłużnej e , o ile pragniemy uwzględnić wpływ siły poprzecznej. Podziałka e musi wtedy spełniać warunek $\kappa'_z/\kappa''_z = g/e = (1+\mu'')/(1+\mu')$, nie zależy zatem od poprzednich, nie jest już jednak dowolna. Nie zachodzi potrzeba zwracania na to uwagi, gdy godzimy się na opuszczenie nieznacznego zresztą wpływu siły poprzecznej. Wtedy podziałki n , a , f i e mogą być uważane za dowolne i niezależne. Dowolność podziałki e jest szczególnie dogodna, gdyż nie musimy krępować się wówczas zależnością $\kappa'_z/\kappa''_z = (1+\mu'')/(1+\mu')$, nie musimy tym samym korygować poprzecznego przekroju modelowego ani też dobierać dla modelu specjalnego materiału.

W praktyce badań modelowych dla płaskich układów prętowych z reguły zatem opuszczamy wpływ siły poprzecznej, gdyż daje on różnice, które kwalifikują się do rzędu wielkości pomijalnych. Najczęściej uwzględniamy wyłącznie wpływ momentu zginającego i mamy wówczas $a = fn^3/ei_y$. Dla zwiększenia dokładności możemy uwzględnić wpływ siły podłużnej przy $r'_y/r''_y = n$. W tym ostatnim przypadku wygodnie będzie, gdy odpowiedniość modelową

$$\frac{fn^3}{ei_y} = \frac{fn}{ae}$$

niewielko zmodyfikujemy i założymy $a = n^2$ oraz $i_y = n$. Otrzymamy więc

$$\frac{fn^3}{en^4} = \frac{f}{an},$$

co oczywiście jest równoznaczne ze spełnieniem warunku modelowego dla równoczesnego uwzględnienia wpływu momentu zginającego i siły podłużnej. Postępowanie takie ułatwia praktyczny dobór grubości modelu.

4. Przykłady liczbowe

Przykład 1. Dana jest belka rzeczywista o kształcie dźwigara stalowego INP10. Zaprojektować odpowiedni przekrój modelu z płyty celuloidowej. Przekrój belki rzeczywistej charakteryzują następujące wartości: pole $A' = 10,6 \text{ cm}^2$, moment bezwładności $I'_y = 174 \text{ cm}^4$, ramię bezwładności $r'_y = 4,01 \text{ cm}$.

Przyjmijmy podziałkę długości $n = 10$. Przekrój modelu przy podziałce pól $a = n^2$ i podziałce momentów bezwładności $i_y = n^4$ wyznaczmy następująco:

$$\text{powierzchnia przekroju } A'' = \frac{A'}{a} = \frac{A'}{n^2} = \frac{10,6}{100} = 0,106 \text{ cm}^2,$$

$$\text{moment bezwładności } I''_y = \frac{I'_y}{i_y} = \frac{I'_y}{n^4} = \frac{174}{10\,000} = 0,0174 \text{ cm}^4.$$

Przyjmujemy prostokątny przekrój modelu, zatem $A'' = b''h''$, zaś $I''_y = \frac{b''h''^3}{12} = \frac{A''h''^2}{12}$. Wobec tego $h'' = \sqrt{\frac{12I''_y}{A''}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,0174}{0,106}} = 1,4 \text{ cm}$,

więc

$$b = \frac{A''}{h''} = \frac{0,106}{1,4} = 0,0734 \text{ cm}.$$

Ramię bezwładności przekroju modelowego wynosi $r''_y = 0,401 \text{ cm}$, zatem w odniesieniu do $r'_y = 4,01 \text{ cm}$ wypada w skali długości $n = 10$, jak być powinno dla równoczesnego uwzględnienia wpływu momentu zginającego i siły podłużnej. Jednakże model należy wykonać z płyty celuloidowej o grubości 0,0734 nie spotykanej w handlu, albowiem płyty te wyrabia się o grubościach co 0,5 mm.

Trudność tę omiemy, gdy przyjmiemy z góry grubość modelu b'' , a podziałkę długości n obliczymy odpowiednio. Mamy w tym celu do dyspozycji następujące zależności:

$$b''h''n^2 = A', \quad A'h''^2n^2 = 12I'_y$$

o niewiadomych h'' i n . Niewiadome te wyznaczmy w postaci:

$$h'' = \frac{12I'_y \cdot b''}{A'^2}, \quad n = \sqrt{\frac{A'}{b'' \cdot h''}}.$$

Zakładając $b'' = 0,1 \text{ cm}$ wyznaczmy wysokość przekroju modelu

$$h'' = \frac{12 \cdot 174 \cdot 0,1}{10,6^2} = 1,86 \text{ cm}, \quad n = \sqrt{\frac{10,6}{0,1 \cdot 1,86}} = 7,55.$$

Przykład 2. Wyznaczyć modelową skalę ugięć belki jak na rys. 2.

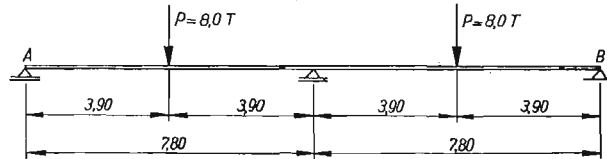
Belka wzdłuż całej długości ma stały moment bezwładności $I'_y = 15\,700 \text{ cm}^4$. Jest wykonana ze stali o stałej sprężystości $E' = 2\,100\,000 \text{ kG/cm}^2$.

Model belki wykonano z celuloidu o grubości 2 mm, skalę długości zastosowano 1 : 20, moment bezwładności przekroju modelowego $I''_y = 1,6 \text{ cm}^4$, stała sprężystości modelu $E'' = 25\,000 \text{ kG/cm}^2$, model obciążono siłą 1,0 kG.

Podziałki modelowe mają następujące wartości: dla długości $n = 20$, dla stałej sprężystości $e = \frac{2 \cdot 100\,000}{25\,000} = 84$, dla momentu bezwładności $i_y = \frac{15\,700}{1,6} = 9\,820$, dla sił $f = \frac{8000}{1} = 8000$.

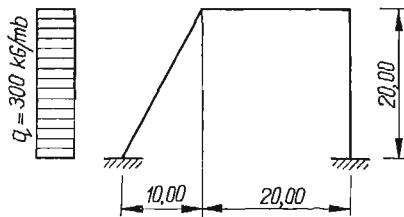
Uwzględniając tylko wpływ momentu zginającego otrzymamy

$$a = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{8000 \cdot 20^3}{84 \cdot 9820} = 77,6.$$



Rys. 2

Przykład 3. Wyznaczyć modelową skalę ugięć dla ramy jak na rys. 3 z uwzględnieniem wpływu momentu zginającego i siły podłużnej. Zastosowano następujące podziałki modelowe: dla sił $f = 1$, dla długości $n = 50$, dla stałych sprężystości podłużnych $e = 84$, dla powierzchni przekrojów $a = 215$. Podziałki te musiały być tak dobrane, ażeby skala ramion bezwładności dla przekrojów była równa skali długości dla modelu.



Rys. 3

Model wykonano z celulojdu o grubości 0,3 cm i wysokości 0,9 cm. Moment bezwładności prętów ramy jest stały i jednakowy. Podziałka ugięć ma wartość

$$a = \frac{fn}{ae} = \frac{1 \cdot 50}{215 \cdot 84} = 0,00277.$$

Przykłady powyższe zaczerpnięte zostały z pracy O. DĄBROWSKIEGO [3].

5. Warunki modelowe dla układów przestrzennych

Przechodząc z kolei do przestrzennych układów prętowych należy stwierdzić na wstępie, że ogólny warunek odpowiedniości modelowej (2.2)

$$\frac{1}{ae} = \frac{n^2}{gc} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} \cdot \frac{1}{ag} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \cdot \frac{1}{ag}$$

nie zawsze musi być brany w całości pod uwagę. Jeżeli mamy np. do czynienia z kratownicą, w której prętach występują tylko siły podłużne, wtedy wymagania wynikające z uwzględnienia momentu skręcającego, momentów zginających i sił poprzecznych odpadają, wobec tego

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a.$$

Jeżeli np. nie działają w układzie siły podłużne i momenty skręcające i nie uwzględniamy wpływu sił poprzecznych, wówczas model musi spełnić warunek

$$\frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z},$$

co zachodzi wtedy, gdy $i_y = i_z$, czyli $I'_y/I''_y = I'_z/I''_z$ albo $A'r'_y{}^2/A''r''_y{}^2 = A'r'_z{}^2/A''r''_z{}^2$, lub $a(r'_y{}^2/r''_y{}^2) = a(r'_z{}^2/r''_z{}^2)$, a więc ostatecznie gdy

$$(5.1) \quad \frac{r'_y}{r''_y} = \frac{r'_z}{r''_z} = \varrho.$$

Model w takim przypadku musi być tak sporządzony, ażeby stosunki głównych centralnych ramion bezwładności przekrojów poprzecznych w obiekcie i modelu były sobie równe. Wówczas będzie także

$$i_y = i_z = a\varrho^2, \quad \frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn^3}{ae\varrho^2} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{fn^2}{ae\varrho^2} = \frac{1}{n} a.$$

Gdybyśmy chcieli uwzględnić przy nieistniejącym ciągle momencie skręcającym oraz przy uwzględnieniu wpływu sił poprzecznych jeszcze siłę podłużną, to zgodnie z poprzednimi rozważaniami musiałoby być $r'_y/r''_y = r'_z/r''_z = \varrho = n$, a wtedy $fn^3/ae\varrho^2 = fn/ae$, czyli

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a.$$

Stosunki ramion bezwładności przekrojów poprzecznych w obiekcie rzeczywistym i modelu musiałyby być nie tylko równe, ale ponadto równe skali długości modelu.

Dla uwzględnienia wpływu sił poprzecznych przy nieistniejącym momencie skręcającym musiałby być spełniony warunek

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = k = \frac{g}{e} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'}.$$

Najlepiej byłoby przyjąć $k = 1$, czyli sporządzić model jako wierne pomniejszenie geometryczne obiektu rzeczywistego, tzn. w jednakowej skali dla rozpiętości i wymiarów poprzecznych, a tym samym zachować ten sam kształt przekroju, jaki ma on w obiekcie rzeczywistym. Byłoby to możliwe, gdyby obiekt i model sporządzone były z tego samego materiału. Skoro jednak w rzeczywistości $\mu' \neq \mu''$, to można uzyskać racjonalny model dla uwzględnienia wpływu sił poprzecznych na wyznaczane wielkości statyczne przez odpowiednie skorygowanie kształtu prze-

kroju modelu, zachowując jednak $\varrho = n$, a nie zważając na skalę przekroju poprzecznego a .

Gdy spełniony będzie warunek

$$k = \frac{1 + \mu''}{1 + \mu'},$$

wtedy także $g = ek$, a zatem znowu

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = \alpha, \quad \text{zaś} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{f}{ae} = \frac{1}{n} \alpha.$$

Rozważmy wreszcie wpływ momentu skręcającego. Najprościej przedstawia się ta sprawa w przypadku przekroju kołowego lub pierścieniowego, ponieważ wówczas wchodzi w grę biegunowy moment bezwładności, zaś $c = C'/C''$ jest wtedy stosunkiem biegunowych momentów bezwładności przekroju poprzecznego w obiekcie i modelu. Dla przekroju kołowego jest wtedy

$$c = \frac{\pi D'^4}{32} \cdot \frac{32}{\pi D''^4} = \frac{\pi D'^2}{4} \cdot \frac{D'^2}{D''^2} = \frac{A'}{A''} \cdot \frac{D'^2}{D''^2}.$$

Jeżeli dla wszelkich wymiarów poprzecznych zastosujemy tę samą skalę długości, wtedy $D'^2/D''^2 = n^2$, więc $c = an^2$.

Gdy po uwzględnieniu wszystkich omówionych do tej pory wpływów stosunek odpowiadających sobie przemieszczeń na obiekcie i modelu wynosił fn/ae , to powinno być i obecnie tak samo, wobec czego musiałyby zachodzić równość

$$\frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{gc} = \frac{fn^3}{agn^2} = \frac{fn}{ag}.$$

Z ostatniego wzoru widoczne jest, iż musiałyby być wtedy także

$$e = g, \quad \text{czyli} \quad \frac{e}{g} = \frac{1 + \mu'}{1 + \mu''} = 1$$

i model musiałyby być sporządzony z tego samego materiału co obiekt rzeczywisty. Wówczas uwzględnienie siły poprzecznej przedstawiałoby się również bardzo prosto. Wystarczyłoby zachować podobieństwo przekroju rzeczywistego do przekroju modelowego, ażeby był spełniony warunek konieczny przy uwzględnianiu wpływu siły poprzecznej

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = k = 1,$$

gdyż dla obiektu rzeczywistego i modelu z tego samego materiału jest zawsze

$$\frac{g}{e} = \frac{1 + \mu''}{1 + \mu'} = 1,$$

a wartość tego stosunku, jak to uprzednio stwierdzono, jest także równa wartości k .

W postępowaniu laboratoryjnym niemożliwe jest jednak sporządzanie modelu z tego samego materiału, z którego ma się wykonać naturalny obiekt budowlany. Materiał nadający się do sporządzania modeli powinien być łatwy do obróbki, przecinania i ponownego sklejania. Może to być pleksiglas, celulooid, ostatecznie dobra tektura, ale nie np. kamień naturalny, beton lub stal. Widać z tego, że wykonanie modelu nadającego się do uwzględnienia wszystkich wpływów jest dosyć kłopotliwe.

Jednakże w badaniach modelowych, podobnie zresztą jak w analitycznych sposobach wyznaczania wielkości statycznych, niektóre wpływy uważamy za przeważające i te uwzględniamy, a inne jako mniej ważne pomijamy, wtedy zaś wymiarowanie modelu znacznie się upraszcza.

W dążeniu do uzyskania możliwie najogólniejszych warunków modelowania przestrzennych układów prętowych uwzględnijmy równoczesne działanie momentu skręcającego K oraz dwóch momentów zginających M i N , a inne wpływy na razie pomijamy. Model spełniać musi wtedy warunek

$$\frac{n^2}{gc} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z},$$

albo

$$(5.2) \quad gc = ei_y = ei_z.$$

W tym przypadku musi zachodzić równość $i_y = i_z$, czyli $I'_y/I''_y = I'_z/I''_z$ albo $r'_y{}^2/r''_y{}^2 = r'_z{}^2/r''_z{}^2$, to zaś daje znany już warunek (5.1) w postaci $r'_y/r''_y = r'_z/r''_z = \varrho$.

Wiadomo, że $c = C'/C''$, jednakże dla przekrojów niekołowych C nie jest biegunowym momentem bezwładności, lecz pewną wartością zastępczą o tym samym wymiarze (według Saint-Venanta), mianowicie

$$C = \frac{A^4}{4\pi^3 J_0} = \frac{A^4}{4\pi^2 (I_y + I_z)} = \frac{A^3}{4\pi (r_y^2 + r_z^2)}.$$

W takim razie

$$c = \frac{A'^3}{A''^3} \frac{r_y''^2 + r_z''^2}{r_y'^2 + r_z'^2} = a^3 \frac{r_y''^2 + r_z''^2}{\varrho^2 (r_y'^2 + r_z'^2)} = \frac{a^3}{\varrho^2}.$$

Wstawiając ostatnią wartość do równania (5.2) i uwzględniając, że $i_y = i_z = a\varrho^2$, otrzymamy $gc = ga^3/\varrho^2 = ea\varrho^2$, a stąd $a = \varrho^2 \sqrt{e/\varrho}$, czyli

$$(5.3) \quad a = \varrho^2 \sqrt{\frac{1+\mu'}{1+\mu''}}.$$

Gdy model czyni zadość warunkom (5.1) i (5.3), wtedy zachodzi równość (5.2), natomiast

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn^3}{ae\varrho^2} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{fn^2}{ae\varrho^2} = \frac{1}{n} a.$$

W ostatnim rozważaniu charakterystyczne jest to, że dla uwzględnienia momentu skręcającego łącznie z dwoma momentami zginającymi należy zastosować specjalną podziałkę pól, zależną od materiału obiektu i modelu.

Gdyby chodziło o równoczesne uwzględnienie jeszcze wpływu siły podłużnej, to zgodnie z poprzednią uwagą musiałyby być

$$\varrho = n, \quad \text{czyli} \quad a = n^2 \sqrt{\frac{1+\mu'}{1+\mu''}},$$

wobec czego

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a.$$

Ażeby, na koniec, łącznie z wymienionymi wpływami mógł być jeszcze uwzględniony wpływ siły poprzecznej, powinien spełniać się dodatkowo znany już zresztą warunek

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = \frac{g}{e} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'},$$

co z powodu $\mu' \neq \mu''$ realizujemy przez odpowiednią korektę kształtu przekroju poprzecznego w modelu.

W celu wyznaczenia zatem pewnej wielkości statycznej za pomocą badań modelowych dla jakiegoś przestrzennego układu prętowego, podlegającego uogólnionemu prawu Hooke'a, przy uwzględnieniu wszystkich wpływów wewnętrznych, jak siły podłużnej, momentu skręcającego, dwóch momentów zginających i dwóch sił poprzecznych, należy wykonać model, który powinien wykazywać następujące własności:

Skala pól przekroju poprzecznego modelu określona jest stosunkiem

$$a = n^2 \sqrt{\frac{1+\mu'}{1+\mu''}},$$

gdzie n oznacza dowolnie przyjętą skalę długości, μ' jest współczynnikiem zwięzienia poprzecznego dla materiału, z którego ma być wykonany obiekt rzeczywisty, a μ'' współczynnikiem dla materiału, z którego ma być sporządzony model.

Stosunki głównych centralnych ramion bezwładności przekroju poprzecznego w obiekcie rzeczywistym i modelu powinny czynić zadość równaniu

$$\frac{r'_y}{r''_y} = \frac{r'_z}{r''_z} = \varrho = n.$$

Kształt przekroju poprzecznego w modelu ma być tak dobrany, aby zachodziła równość

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = \frac{g}{e} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'},$$

gdzie κ'_y i κ''_y oznaczają tzw. «współczynniki kształtu», wynikające z uwzględnienia siły poprzecznej Q (rys. 1), zaś κ'_z i κ''_z są takimi współczynnikami dla siły poprzecznej T . Wszelkie zmiany kształtu przekroju poprzecznego w modelu, dokonywane ze względu na zachowanie ostatniego warunku, nie mogą spowodować zmiany wartości $\varrho = n$, albowiem obecnie musi być koniecznie przestrzegana wyżej określona skala pól a .

Z chwilą spełnienia wymienionych warunków stosunek przemieszczeń rzeczywistych do modelowych wyraża się znanym już związkiem

$$\frac{p'_{iK}}{p_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi_{iK}} = \frac{1}{n} a,$$

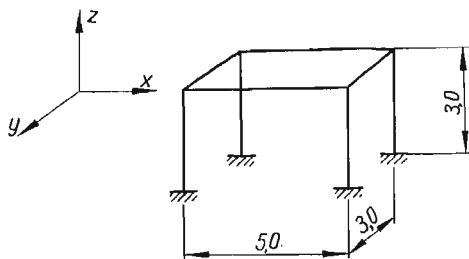
w którym f jest dowolnie przyjętą podziałką sił, zaś e podziałką stałych sprężystości podłużnej, określoną materiałem obiektu rzeczywistego i modelu, a związaną ze skalą stałych sprężystości poprzecznej równaniem

$$\frac{e}{g} = \frac{1 + \mu'}{1 + \mu''}.$$

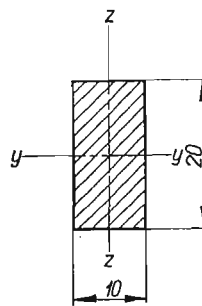
W ten sposób ustalono warunki modelowe dla najogólniejszego przypadku przestrzennego układu prętowego.

6. Przykłady liczbowe

Przykład 1. Zaprojektować model dla jednokomorowej ramy o węzłach przesuwnych, podanej na rys. 4. Przekrój prętów poziomych ma wymiary 10×25 cm z bokiem dłuższym równoległym do osi z . Przekrój słupów ma wymiary 10×20 cm i bok dłuższy równoległy do osi x .



Rys. 4



Rys. 5

W tym przypadku przy projektowaniu modelu wystarczy uwzględnić wyłącznie wpływ momentu zginającego, gdyż jest to wpływ dominujący. Jak wiadomo, wpływ ten będzie uwzględniony, gdy spełniać się będzie warunek $i_y = i_z$, tzn. gdy podziałki głównych centralnych momentów bezwładności przekroju dla obiektu rzeczywistego i modelu będą sobie równe.

a) Słupy. Dla obiektu:
moment bezwładności względem osi y

$$I'_y = \frac{10 \times 20^3}{12} = 6600 \text{ cm}^4,$$

moment bezwładności względem osi z

$$I'_z = \frac{20 \times 10^3}{12} = 1666 \text{ cm}^4.$$

Przyjęto przekrój słupa w modelu o wymiarach $0,4 \times 0,8$ cm. Wobec tego

$$I_y'' = \frac{0,4 \cdot 0,8^3}{12} = 0,017067 \text{ cm}^4, \quad I_z'' = \frac{0,8 \cdot 0,4^3}{12} = 0,004267 \text{ cm}^4.$$

Podziałki modelowe dla momentów bezwładności w słupach mają wobec tego wartości:

$$i_y = \frac{I_y'}{I_y''} = \frac{6600}{0,0171} = 390\,625, \quad i_z = \frac{I_z'}{I_z''} = \frac{1666}{0,00426} = 390\,625.$$

Wymagany zatem warunek modelowy dla słupów jest spełniony.

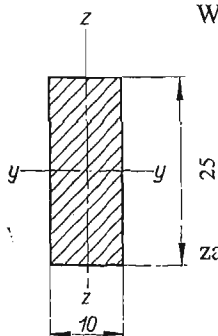
b) Pręty poziome:

Momenty bezwładności w obiekcie rzeczywistym

$$I_y' = \frac{10 \cdot 25^3}{12} = 13\,000 \text{ cm}^4, \quad I_z' = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2082 \text{ cm}^4.$$

Przyjęto przekrój prętów poziomych w modelu $0,4 \times 1,0$ cm, zatem

$$I_y'' = \frac{0,4 \times 1^3}{12} = \frac{1}{30} \text{ cm}^4, \quad I_z'' = \frac{1 \times 0,4^3}{12} = \frac{16}{3000} \text{ cm}^4,$$



Rys. 6

natomiast

$$i_y = \frac{I_y'}{I_y''} = \frac{13\,000}{0,0334} = 390\,625, \quad i_z = \frac{I_z'}{I_z''} = \frac{2082}{0,00534} = 390\,625,$$

czyli $i_y = i_z$.

Przy sposobności należy wyjaśnić, że warunek $i_y = i_z$ musi się spełniać dla wszystkich prętów układu nie tylko w ten sposób, że wielkości te będą jednakowe dla poszczególnych prętów z osobna, ale również wartości liczbowe stosunków $i_y = I_y'/I_y''$, $i_z = I_z'/I_z''$ muszą być sobie równe i jednakowe dla wszystkich prętów.

Podziałkę długości przyjęto $n = 12,5$, model wykonano z celuloиду o stałej sprężystości podłużnej $E'' = 18\,000$ kG/cm². Jeżeli przyjmiemy $E' = 2\,100\,000$ kG/cm², to podziałka $e = E'/E'' = 116,6$. Zakładając ponadto skalę sił $f = 1000$, otrzymamy następującą podziałkę przemieszczeń modelowych

$$\alpha = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{1000 \times 12,5^3}{116,6 \times 390\,625} = 0,00365.$$

Przykład 2. Wyznaczyć podziałkę przemieszczeń modelowych dla kratownicy przestrzennej z węzłami sztywnymi jak na rys. 7.

Wymiarowanie modelu kratownicy musi się odbyć z uwzględnieniem momentu zginającego, albowiem kratownica ma węzły sztywne, a także z uwzględnieniem siły podłużnej, gdyż ta ma poważny wpływ w prętach kratownicy.

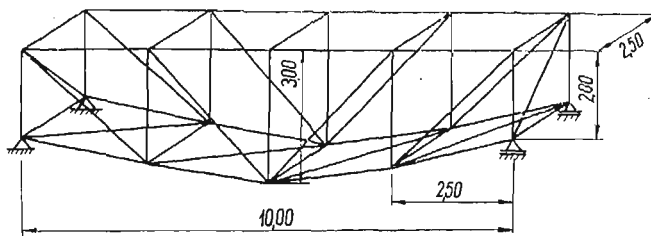
Spełniony zatem musi być warunek $fn/ae = fn^3/ei' = fn^3/ei''$, co zajdzie, gdy $i_y = i_z$ a ponadto, gdy $r_y'/r_y'' = r_z'/r_z'' = \varrho = n$, tzn. gdy wartości liczbowe stosunków

głównych centralnych ramion bezwładności przekroju w obiekcie rzeczywistym i modelu będą sobie równe i równe skali długości. Ten ostatni warunek spełni się, jeżeli do wymiarów przekroju modelowego zastosujemy skalę długości. Wtedy będzie

$$a = n^2 \quad \text{oraz} \quad i_y = i_z = n^4,$$

zatem

$$fn/n^2e = fn^3/n^4e = f/ne = a.$$



Rys. 7

Przyjmując $f = 1000$, $n = 50$, $e = 116,6$ otrzymamy

$$\alpha = \frac{1000}{50 \times 116,6} = 0,17.$$

Ostatnie przykłady liczbowe przytoczono z pracy T. KOLENDOWICZA [4].

7. Obliczanie wielkości statycznych. Zakończenie

Głównym celem niniejszej pracy było wykazanie przydatności zasady wzajemności przemieszczeń Bettiego do wyprowadzenia odpowiedniości modelowej, a następnie podanie warunków, którym model musi czynić zadość, ażeby w ogóle nadawał się do modelowego wyznaczania wielkości statycznych. Jak już wspomniano w p. 2, ograniczono się z góry do takiego zakresu pracy, a pominięto rozumowania prowadzące do wzorów służących do modelowego ustalania samych wielkości statycznych. Jednakże dla tym lepszej ilustracji podanych warunków modelowych przejdziemy obliczanie wielkości wewnętrznych w oparciu o gotowe wzory, omówione dokładnie w pracy [1].

Mózna udowodnić również za pomocą zasady Bettiego, że moment zginający M , siłę poprzeczną T i siłę podłużną S można wyznaczyć za pomocą badań modelowych według wzorów:

$$M = P \frac{m}{\beta}, \quad T = P \frac{t}{w}, \quad S = P \frac{s}{u}.$$

Wzory te wynikają z tzw. metody przemieszczeń wymuszonych (por. [1]). We wzorach tych P jest siłą wywołującą poszukiwane wielkości statyczne, zaś m , t i s są to przemieszczenia odpowiadające sile P , a wywołane w modelowym układzie pomocniczym wskutek wymuszenia specjalnymi deformatoremami przemieszczeń β , w i u jako odpowiadających poszukiwanym wielkościom statycznym.

Wielkości statyczne, wyrażone przytoczonymi przykładowo wzorami, można odnieść do rzeczywistego obiektu budowlanego; będą to wielkości rzeczywiste. Można je odnieść także do modelu, wówczas będą to wielkości modelowe. Dla zaznaczenia tej różnicy wyrazimy wielkości rzeczywiste wzorami

$$M' = P' \frac{m'}{\beta'}, \quad T' = P' \frac{t'}{w'}, \quad S' = P' \frac{s'}{u'},$$

a modelowe

$$M'' = P'' \frac{m''}{\beta''}, \quad T'' = P'' \frac{t''}{w''}, \quad S'' = P'' \frac{s''}{u''}.$$

W praktyce chodzi tylko o wielkości rzeczywiste, a do ich obliczenia znamy jedynie obciążenie rzeczywiste P' . Potrzebne natomiast przemieszczenia rzeczywiste otrzymamy mnożąc pomierzone przemieszczenia modelowe przez odpowiedni współczynnik α , gdy mamy na myśli przesunięcia, oraz przez α/n , jeśli mamy na myśli obroty. Wobec tego można napisać.

$$M' = P' \frac{\alpha m''}{\frac{\alpha}{n} \beta''} = P' \frac{m''}{\beta''} n, \quad T' = P' \frac{\alpha t''}{\alpha w''} = P' \frac{t''}{w''}, \quad S' = P' \frac{\alpha s''}{\alpha u''} = P' \frac{s''}{u''}.$$

Moment zginający rzeczywisty obliczamy mnożąc siłę rzeczywistą P' przez $m''n/\beta''$, gdzie m'' i β'' są przemieszczeniami pomierzonymi na modelu, n zaś jest skalą długości modelu. Liczba $m''n/\beta''$ ma wymiar długości.

Podobnie postępujemy przy obliczaniu drugiego momentu zginającego i momentu skręcającego w układzie przestrzennym.

Siłę poprzeczną lub podłużną obliczamy mnożąc siłę rzeczywistą P' przez t''/w'' albo przez s''/u'' , gdzie t'' , w'' , s'' i u'' są znanymi przemieszczeniami modelowymi. Wielkości t''/w'' i s''/u'' są niemianowane.

Wynika stąd, że jedynie podziałka długości n wchodzi bezpośrednio do obliczania wielkości statycznych. Wpływ innych podziałek jest pośredni i kryje się w warunkach modelowych. Nie należy jednak sądzić, że stosunek $e = E'/E''$ albo $g = G'/G''$ jest tu w ogóle bez znaczenia. Gdyby chodziło o uwzględnienie wpływu momentu skręcającego lub siły poprzecznej, to należałoby właściwie wykonać model z tego samego materiału co obiekt rzeczywisty, gdyż potrzebna wówczas równość $e = g$ zachodziłaby dla $\mu' = \mu''$. Ponieważ w praktyce laboratoryjnej jest to niemożliwe, przeto wykonując model z innego materiału musimy zmienić kształt przekroju poprzecznego w modelu w ten sposób, aby spełniła się równość $\kappa'_y/\kappa''_y = \kappa'_z/\kappa''_z = g/e = (1+\mu'')/(1+\mu')$, a zmiana ta zależy zarówno od e jak i g .

W ten sam sposób obliczalbymy wielkości statyczne i w oparciu o tak samo zbudowaną odpowiedniość modelową stosując jakąkolwiek inną metodę badań modelowych, np. metodę przegubową (por. praca 1), byle tylko poszukiwane wielkości statyczne wyrażane były za pomocą przemieszczeń mierzonych na modelu obiektu rzeczywistego.

Przedstawiona metoda modelowego obliczania wielkości statycznych dla układów prętowych może być rozszerzona na układy płytowe i powierzchniowe. Pozytywne wyniki w tym zakresie ma również T. KOLENDOWICZ.

Badania modelowe obejmować mogą zarówno układy obciążone siłami uogólnionymi, jak i narażone na działanie wpływów niemechanicznych, np. na wpływ zmiany temperatury, osiadania podpór, skurczu betonu itp. Stronę praktyczną tych badań modelowych opracował O. MICHEJDA [5] projektując specjalne i precyzyjne przyrządy. O. MICHEJDA ograniczył się jednak w swojej pracy tylko do układów płaskich. Badania modelowe wpływów niemechanicznych na układy przestrzenne w realizacji praktycznej oczekują jeszcze na wszechstronne opracowanie. Strona teoretyczna tychże badań w oparciu o zasadę Bettiego została podana w pracy [1].

Wymienić można wiele jeszcze innych zagadnień z zakresu badań modelowych wymagających praktycznego i laboratoryjnego opracowania. Do nich należy np. bardzo ciekawa metoda przegubowa. Niejeden temat pracy doktorskiej i habilitacyjnej może dotyczyć tej problematyki. Tematów tych unika się niestety u nas głównie ze względu na to, że wymagają one dużego nakładu pracy i są kosztowne. Wynikają stąd oczywiste szkody, gdyż badania na modelach zezwalają na bardziej wnikliwy wgląd w pracę konstrukcji (szczególnie budowlanych), co z kolei rzeczy mogłoby wpłynąć na bardziej ekonomiczne projektowanie, zgodne z istotnym postępem technicznym.

Do sporządzania modeli najlepiej nadaje się celuloid. Jest to materiał wystarczająco izotropowy, o granicy sprężystości około 250 kG/cm^2 , płynności 400 kG/cm^2 , doraźnej wytrzymałości $25\,000 \text{ kG/cm}^2$, współczynnik Poissona wynosi 0,42. Celuloid daje się łatwo obrabiać piłką i nożem, a skleja się łatwo acetonem. Jest to materiał krajowy, a więc dostępny.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. JANUSZ, *Teoria badań modelowych ustrojów statycznie niewyznaczalnych*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1952.

[2] M. JANUSZ, *Z teorii modelowych badań wpływów niemechanicznych w układach prętowych*, Księga Jubileuszowa dla uczczenia zasług naukowych prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.

[3] O. DĄBROWSKI, *Statyka modelowa pełnościennych płaskich układów prętowych*, praca doktorska, nieopublikowana, Wrocław 1958.

[4] T. KOLENDOWICZ, *Statyka modelowa układów prętowych przestrzennych*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1963.

[5] O. MICHEJDA, *Badania modelowe wpływów niemechanicznych w ustrojach prętowych*, praca doktorska, nieopublikowana, Częstochowa 1960.

Резюме

ПРИНЦИП БЕТТИ В КАЧЕСТВЕ ОСНОВЫ ДЛЯ УСЛОВИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью модельного определения статических величин, выступающих в стержневой линейно-упругой системе, изготовляем модель действительного объекта. Эта модель должна иметь осевое начертание геометрически подобное с действительным, а все размеры модели

должны быть так подобраны, чтобы отношение соответствующих перемещений объекта и модели выражалось тем же числом, независимо от места этих перемещений и положения сил. Численное значение этого отношения зависит исключительно от принятых масштабов и учитываемых обобщенных внутренних величин, как влияющих на искомые статические величины.

Тогда тоже значение должны иметь и отношения отдельных слагаемых в выражении на перемещения в действительном объекте и модели. Это касается так перемещений как и углов поворота при деформации.

Выражение для упомянутого перемещения в действительном объекте и модели получено на основе известного принципа взаимности перемещений Бетти.

Отношение соответствующих углов поворота в объекте и модели, в n раз меньше отношения перемещений, где n — масштаб длины осевого начертания модели.

S u m m a r y

BETTI'S PRINCIPLE AS A BASIS OF MODEL CONDITIONS

To determine static quantities of a linear elastic bar system, we make a model of an actual structure. This model must have an axial outline geometrically similar to that of the actual structure and all its dimensions must be so determined that the ratio of the corresponding displacements of the actual structure and the model are the same, independent of the place of those displacements and the position of forces.

This ratio depends on the accepted scale and the generalized static quantities only and should equal the ratio of corresponding quantities of the actual structure and the model. This applies both to the deformations of translations and the rotations.

The expression for the displacement of the actual structure and the model has been obtained on the ground of the well known Betti reciprocal theorem for displacements.

The ratio of the corresponding rotation angles of the actual structure and the model is n times smaller than the ratio of translations where n is the scale of the linear scale of the model.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 maja 1964 r.

ROLA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W ROZWOJU POSTĘPU
TECHNICZNEGO

STEFAN ZIEMBA (WARSZAWA)

1

Założenia do planu gospodarczego na okres 1966–1970 i założenia do planu perspektywicznego na okres 1966–1980 przewidują między innymi wielokrotny wzrost produkcji przemysłowej, ze szczególnym uprzywilejowaniem przemysłu budowy maszyn.

Plany kształcenia kadry przewidują wielokrotny wzrost kadry naukowej, wielokrotny wzrost kadry inżynierskiej oraz poważną rozbudowę instytutów naukowo-badawczych i laboratoriów fabrycznych.

Założenia postępującej mechanizacji, automatyzacji, programowania z zastosowaniem maszyn matematycznych nie tylko do sterowania lecz także do kierowania i podejmowania decyzji, rozwoju systemów adaptacyjnych, maszyn samouczących się, czyli ogólnie rzecz ujmując założenia intensywnego rozwoju cybernetyki technicznej przewidują konieczność wykształcenia projektantów-konstruktorów nowego typu, posiadających z jednej strony dobre przygotowanie w dziedzinie regulacji automatycznej, z drugiej zaś strony mających należytą znajomość technologii procesów produkcyjnych sterowanych automatycznie. W niemniejszym stopniu konstruktorzy powinni umieć uwzględniać technologię procesów wytwarzania samych maszyn, bowiem technologia konstrukcji stanowi podstawowy postulat, bez przestrzegania którego nie można dziś myśleć o postępie technicznym w budowie maszyn.

Obecnie nasze wyższe uczelnie techniczne przygotowują zasadniczo specjalistów dwóch typów: konstruktorów o tradycyjnej konwencjonalnej sylwetce fachowej oraz technologów.

Ekspluatatorów przygotowuje samo życie, tzn. paroletnia praktyka przemysłowa w trakcie pracy po ukończeniu studiów na uczelni. Natomiast ani organizacja studiów, ani programy nauczania nie przewidują przygotowania specjalistów-badaczy (Forschungsingenieur, research-engineers). W praktyce szkoli ich życie w toku pracy po dyplomie czy to w katedrach, czy w instytutach naukowo-badawczych. Tymczasem coraz dotkliwszy brak tego typu specjalistów odczuwają nie tylko zakłady naukowo-badawcze, ale cały rozwijający się przemysł ze swoimi biurami projektowymi i konstrukcyjnymi, jak też powstającymi laboratoriami fabrycznymi.

Podejmowane próby stworzenia wydziałów czy sekcji z programem i profilem bardziej podstawowym w rodzaju sekcji zastosowań matematyki na uniwersyte-

tach, wydziału fizyki technicznej na uczelniach technicznych w rzeczywistości nie wyszły poza sferę projektów lub nieśmiałyh czy niesprecyzowanych prób.

Coraz częściej mówi się o studiach podyplomowych, o rozmaitych kursach doskonalenia kadry inżynierskiej. Za granicą ogromne sumy poświęcane są na tzw. letnie (wakacyjne) doszkalaćanie inżynierów na uczelniach. Rzecz ciekawa, że np. w USA inicjatorem takiego douczania nie są uczelnie, lecz przemysł i jego biura projektowo-konstrukcyjne. Z punktu widzenia dobrze pojętego interesu uczelni i jej składu naukowego jedno wydaje się nie ulegać wątpliwości i nie może być odkładane na dalszą przyszłość, mianowicie organizacja i uruchomienie produkcji i doskonalenia pracowników naukowo-badawczych na własne potrzeby rozwojowe i dydaktyczne. Jak dotychczas większość procesów produkcyjnych będą wykonywały maszyny; będą to nie tylko obrabiarki, maszyny przemysłu przetwórczego, transportu, maszyny górnicze, hutnicze, budowlane, drogowe, ziemne itd., lecz również szeroko rozumiane maszyny elektryczne, aparatura chemiczna itp.

Od maszyn tych wymagać będziemy coraz większej wydajności, coraz lepszej sprawności przy należytej niezawodności pracy i ekonomii ich eksploatacji. Coraz silniej wysuwane są wymagania, żeby nowe konstrukcje cechowała nowoczesność, technologiczność, lekkość i niezawodność.

Z kolei rzeczy warunkiem postępu w budowie maszyn jest opanowanie przez konstruktora na wysokim poziomie mechaniki teoretycznej. Nie przypadkowo powstała w ZSRR oddzielna dyscyplina «teoria maszyn» oparta na wybranych zagadnieniach z mechaniki teoretycznej. W ramach ogólnego systemu produkcyjnego poszczególne układy, urządzenia, konstrukcje, maszyny mają do spełnienia określone czynności produkcyjne. Konstruktor maszyny, projektant urządzenia musi znać dokładnie ich czynności; w tym celu konieczne jest pełne porozumienie z technologiem danego rodzaju produkcji. Stosownie do rodzaju czynności produkcyjnych w oparciu o zasady teorii maszyn i mechanizmów konstruktor wybiera najlepszy schemat geometryczno-kinematyczny danego układu. Dla tego schematu i przewidzianych czynności maszyny konstruktor ustala w sposób przybliżony przebieg obciążeń; znając działanie przedmiotu obrabianego na narzędzie konstruktor wyznacza siły działające na poszczególne ogniwa mechanizmu od narzędzia roboczego aż do napędu. Na tej podstawie konstruktor buduje pierwszą wersję modelu mechanicznego.

Przy rozpatrywaniu maszyny lub konstrukcji jako układu materialnego dla zbadania zachodzących w nim procesów dynamicznych należy uwzględnić następujące etapy:

- 1) konstrukcji modelu mechanicznego,
- 2) konstrukcji schematu strukturalno-funkcjonalnego, w postaci schematu blokowego,
- 3) wyznaczania zastępczych mas, więzów i ich charakterystyk, obciążeń tak od strony organu roboczego jak i od strony napędu, czyli wymuszeń,
- 4) opisu matematycznego układu,

5) badania układu, będącego bądź zadaniem analizy, bądź syntezy kinetycznej, które można prowadzić na drodze teoretyczno-obliczeniowej, eksperymentalnej lub modelowania.

W wyniku badań otrzymujemy przebieg obciążeń i przemieszczeń w czasie; stąd wyznaczamy naprężenia, odkształcenia, stosunki energetyczne, ocenę sztywności statycznej i dynamicznej, charakter stateczności itd. Dokładna znajomość warunków pracy maszyny, zwłaszcza przebiegu obciążeń poszczególnych elementów jej mechanizmów, pozwala ustalić możliwie racjonalny zakres jej pracy, przy którym efekty dynamiczne będą możliwie najniższe, pozwala konstruktorowi zbadać szereg konkretnych rozwiązań konstrukcyjnych w poszukiwaniu tych, przy których obciążenia dynamiczne będą możliwie najmniejsze. Szczególnie dużych nadwyżek dynamicznych w pracy maszyny oczekiwać należy w przypadku zmiany reżimu obciążenia przy puszczeniu maszyny w ruch, przy hamowaniu, przy nawrotach, przy nakładaniu czy odejmowaniu obciążenia, wtedy bowiem na skutek istnienia nieuchronnych luzów w węzłach łańcucha kinematycznego (łożyska, koła zębate) wystąpić mogą udary, a zatem obciążenia o dużej dynamiczności. Złożona na ogół struktura elementów wykonawczych maszyn, w szczególności roboczych maszyn ciężkich, często nie pozwala na bezpośrednie zetawienie prostych równań dla celów obliczeniowych opisujących procesy dynamiczne i ruch. Zmuszeni jesteśmy szukać schematów bardziej uproszczonych; w tym celu pomijamy nieistotne szczegóły mające drugorzędny wpływ na charakter ruchu mechanizmu i zestawiamy możliwie prosty model mechaniczny, który stosunkowo łatwo można opisać układem równań różniczkowych. Ów model mechaniczny przyjmuje się w postaci układu punktów materialnych (dyskretnych mas) połączonych więzami sprężystymi. Oprócz tych ostatnich można wprowadzić więzy dające dysypację energii (tłumiki). Takie przyjęcie oznacza, że w praktyce np. wały sprężyste mają masę, którą można pominąć, a elementy ich w postaci masywnych krążków i walców o małej długości traktuje się jako doskonale sztywne.

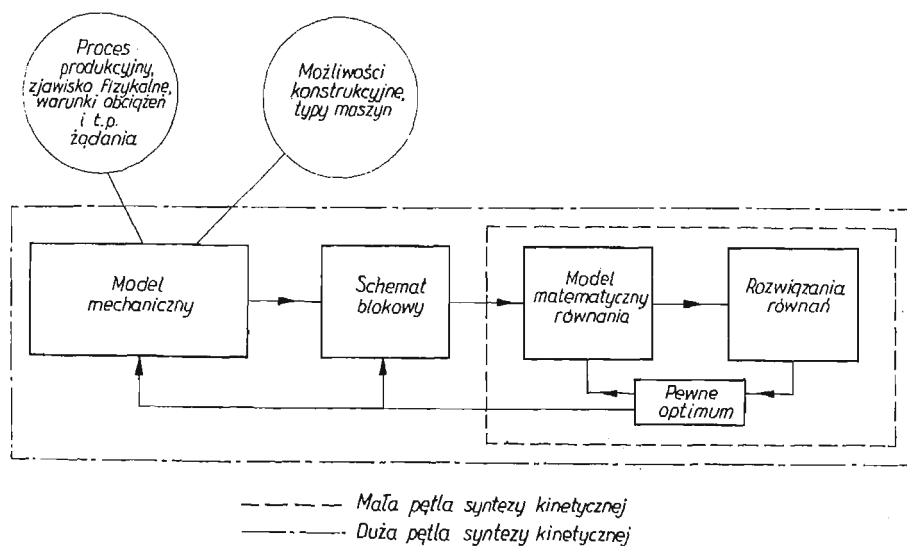
Przy budowie modelu mechanicznego maszyny czy konstrukcji pierwszym krokiem jest wybór miejsca geometrycznego dla mas skupionych i oczywiście liczba tych punktów, która określa liczbę stopni swobody układu. Następnie do tych punktów należy zredukować masy elementów konstrukcji, sprężystości i ewentualnie tłumienie oraz siły przyłożone do elementów konstrukcji.

Dla tak ustawionego modelu nie trudno już napisać układ równań różniczkowych, opisujący własności dynamiczne modelu, a więc pośrednio rozpatrywanej maszyny czy konstrukcji. Tak zwana teoria «maszyn abstrakcyjnych» (abstract machines) zajmuje się badaniem prawdopodobieństwa fizykalnego istnienia ruchu konstrukcji czy maszyny wzdłuż rozwiązań tych równań. W tym sensie nauka ta jest przedłużeniem mechaniki teoretycznej.

Zbudowany model mechaniczny i odpowiedni układ równań różniczkowych dają podstawę do badania procesów zachodzących lub mogących zachodzić w obiekcie rzeczywistym. Istotną sprawą jest kierunek, w jakim mają być prowadzone te badania. Zależy to w pierwszym rzędzie od zadań, do jakich maszyna jest przeznaczona. Oprócz podstawowej sprawy realizacji postawionego zadania produkcyjnego

przy możliwie dokładnym uwzględnieniu warunków eksploatacyjnych niemniej ważne są wymagania dotyczące wytrzymałości, niezawodności pracy, sprawności, wydajności, ekonomii itd.

Ani model mechaniczny reprezentujący rozpatrywaną konstrukcję, ani opisujący układ równań różniczkowych nie ujmują i nie wyrażają tego pełnego splotu zagadnień stojących przed projektantem nowej konstrukcji. Z tych względów bardzo pożyteczne okazuje się sporządzenie schematu *strukturalno-funkcjonalnego*, któryby w sposób umowny, łatwo czytelny, wyrażał zarówno właściwości (charakter) samej konstrukcji, jak też podawał funkcję (zadanie) oraz warunki, w jakich ona powinna być realizowana. Najprościej będzie wzorując się na sposobach stosowanych w teorii regulacji automatycznej zbudować taki obraz w postaci *schematu blokowego*.



Rys. 1

O ile model mechaniczny był wykonany jedynie z punktu widzenia mas i sił, o tyle schemat strukturalny ustawiamy z punktu widzenia czynności «operacji» ujmując w jeden blok zespół mechanizmów realizujących daną operację oraz ze względu na przyczynowo-czasową kolejność tych operacji i wzajemne powiązanie funkcjonalne poszczególnych bloków. Schemat strukturalny pozwala zanotować, które operacje przebiegają jednocześnie (równolegle), które kolejno — jedna po drugiej (szeregowo), a które wreszcie częściowo równolegle i częściowo szeregowo.

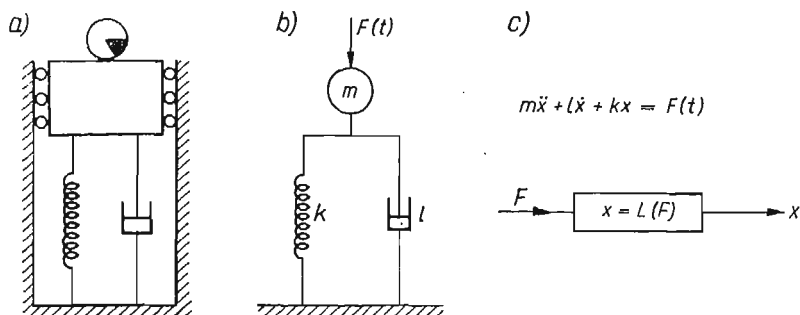
W czynnościach składających się na proces produkcyjny można wyróżnić operacje: a) ściśle robocze, kiedy zachodzi wzajemne oddziaływanie między obrabianym przedmiotem (materiałem) i narzędziem obrabiającym, b) transportowe, tzn. przemieszczanie obrabianego przedmiotu i narzędzia, c) ustalające (ustalenie czyli zamocowanie przedmiotu i narzędzia), d) operacje obsługi (zwykle między- lub wewnątrzcykliczne).

Całe zagadnienie można przedstawić schematycznie, jak to podaje rys. 1.

Tok postępowania zilustrujemy kilku przykładami.

1. Układ o jednym stopniu swobody.

a. Masywny fundament maszyny wirującej, traktowany jako układ drgający o jednym stopniu swobody, przedstawiony jest schematycznie na rys. 2a, przy czym m oznacza masę fundamentu z maszyną, traktowaną jako jedno ciało sztywne, mogące wykonywać jedynie ruch postępowy w kierunku pionowym; k jest współ-



Rys. 2

czynnikiem sprężystości podłoża (ewentualnie z podkładkami sprężysto-tłumiącymi), l współczynnikiem oporu dysypacyjnego podłoża; zarówno element sprężysty jak i tłumik traktujemy jako pozbawione masy.

b. Model mechaniczny układu przedstawia rys. 2b.

c. Schemat strukturalny otwarty jest złożony z jednego bloku. Na wejściu mamy siłę wymuszającą $F = F(t)$, na wyjściu zaś wychylenie $x = x(t)$, rys. 2c.

Operator, który funkcji $F(t)$ przyporządkowuje funkcję $x(t)$, nazywamy charakterystyką bloku i piszemy:

$$x(t) = L(F/t) \quad \text{lub} \quad x = L(F).$$

d. Dla tak zbudowanego modelu układamy równanie różniczkowe drgań fundamentu

$$m\ddot{x} + l\dot{x} + kx = F(t).$$

2. Układ o trzech stopniach swobody.

a. Jest to układ 3 krążków (mogą to być koła zamachowe, pasowe, zębate, wirniki lub zredukowane układy korbowe) osadzonych sztywno na jednym wale. Schemat takiego układu przedstawia rys. 3a. Zakładamy, że

1) krążki traktujemy jako doskonale sztywne, ich momenty bezwładności względem osi obrotu wynoszą odpowiednio, J_0, J_1, J_2 ;

2) pomijamy masę wału; przy odpowiednim ułożyskowaniu przyjmujemy, że sztywność na zginanie jest nieograniczona;

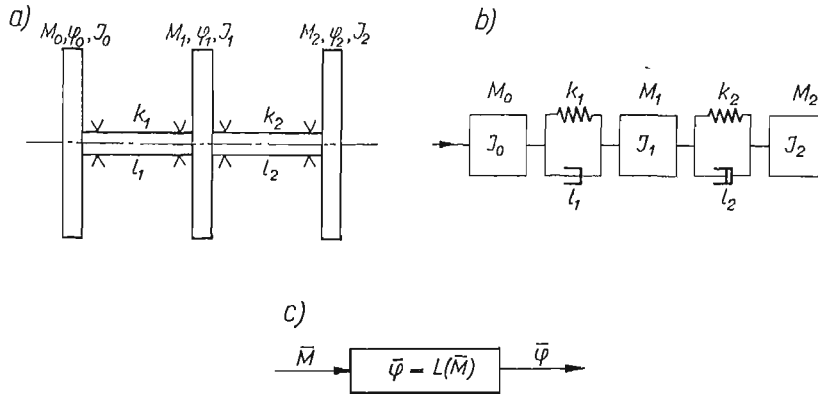
3) uwzględniamy sprężystą podatność wału na skręcanie i dopuszczamy tylko takie odkształcenia;

4) tarcie wewnętrzne w materiale wału skręcanego traktujemy jako czysto wiskotyczne liniowe;

5) przyjmujemy, że do kół mogą być przyłożone wymuszające momenty skręcające, pochodzące zarówno od napędu jak i od obciążenia.

b) Schemat układu można przyjąć w postaci łańcucha punktów o masach uogólnionych J_0, J_1, J_2 , połączeniach sprężystych k_1, k_2 oraz tłumikach względnych l_1, l_2 . Model mechaniczny naszego układu przedstawia rys. 3b.

c) Schemat strukturalny, tj. schemat działania (action-schema) będzie podobny jak w poprzednim przykładzie z tym, że na wejściu będziemy mieli wektor $M/(M_0, M_1, M_2)$, a na wyjściu wektor $\Phi(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)$.



Rys. 3

d) Równania różniczkowe stanu dynamicznego przyjmuje się w postaci

$$J_0 \ddot{\varphi}_0 = -k_1(\varphi_0 - \varphi_1) - l_1(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_1) + M_0(t),$$

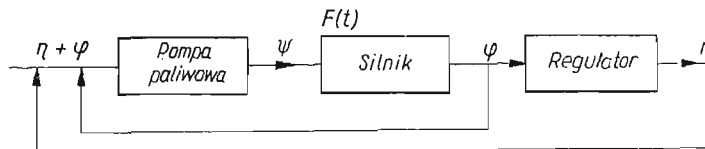
$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -k_1(\varphi_1 - \varphi_0) - l_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) - k_2(\varphi_1 - \varphi_2) - l_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + M_1(t),$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = -k_2(\varphi_2 - \varphi_1) - l_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + M_2(t),$$

gdzie $M_0(t), M_1(t), M_2(t)$ są momentami sił zewnętrznych.

Traktowanie maszyn lub konstrukcji jako układu dynamicznego jest nieodzowne szczególnie wtedy, gdy w maszynie działają różnego rodzaju regulatory.

Obiekt plus układ regulacji należy traktować łącznie jako jeden układ dynamiczny, przy tym tylko dynamiczne traktowanie takiego układu może dać prawidłową odpowiedź na to, jakie są jego właściwości i zachowanie. Objasnimy to na prostym przykładzie w schematycznym ujęciu silnika Diesla z automatyczną regulacją prędkości obrotu.



Rys. 4

Pomijamy schemat techniczny i model mechaniczny; schemat blokowy przedstawiony jest na rys. 4. Przy wyprowadzaniu równań dynamiki i układaniu schematu blokowego zasadnicze znaczenie ma prawidłowe ujęcie kierunku i charakteru działania wszelkiego rodzaju wymuszeń związanych z poszczególnymi ogniwami

łańcucha regulacji. Wymuszenia te mogą być bądź wynikiem działania przyczyn zewnętrznych (obciążenie silnika), bądź też oddziaływać wewnętrznych między ogniwami. Rozpatrywany układ składa się z silnika, pompy paliwowej i regulatora. Nastawianie silnika na różne żądane prędkości obrotu dokonuje się przez zmianę napięcia sprężyny regulatora. Przy budowie schematu strukturalnego uwzględniamy fakt, że przy zmianie obciążenia silnik daje wymuszenie na wejściu do regulatora. Regulator przetwarza wymuszenie i przekazuje na suwak pompy paliwowej. Podaż paliwa do wtryskiwaczy silnika ulega przy tym zmianie odpowiednio do nowego obciążenia silnika. Jednocześnie w procesie regulacji będzie się zmieniać wydajność pompy paliwowej wskutek zmiany prędkości obrotu silnika, który napędza pompę. Na schemacie strukturalnym przyjęto następujące oznaczenia: η jest wychyleniem elementu sterującego regulatora, φ — odchyleniem prędkości obrotu wału silnika, ψ — podażą paliwa.

Działanie silnika na pompę paliwową można traktować jako sprzężenie zwrotne obejmujące dwa ogniwa regulacji. Ruch całego układu, a więc charakter pracy, zmienność obciążeń, będzie zależał nie tylko od zmienności obciążenia zewnętrznego $F(t)$, które również w pewien sposób zależy od tego ruchu, ale od charakterystyki silnika, regulatora i pompy. Dopiero znajomość dynamicznych charakterystyk poszczególnych elementów schematu i analiza ruchu całego układu pozwoli ocenić wartość i charakter zmienności obciążeń, które są podstawą prawidłowego zaprojektowania całego układu, a między innymi wykonania obliczeń konstrukcyjno-wytrzymałościowych jego elementów.

Reasumując powyższe wywody stwierdzamy, że przy rozpatrywaniu konstrukcji pracującej w warunkach dynamicznych trzeba wykonać następujące zadania:

- 1) ustawić schemat dynamiczny ustroju (model mechaniczny),
- 2) wyznaczyć charakterystyki statyczne i dynamiczne całego ustroju i jego poszczególnych ogniw,
- 3) wyznaczyć rzeczywisty przebieg wymuszeń (obciążeń) poszczególnych elementów,
- 4) przeprowadzić odpowiednio do przebiegu obciążeń zaprogramowane badania zmęczeniowe materiałowe i w miarę potrzeby postaciowe,
- 5) zanalizować zachowanie się układu w warunkach przewidzianych obciążeń, w szczególności należy zbadać jego sztywność statyczną i dynamiczną, stateczność statyczną i dynamiczną oraz procesy przejściowe wywołane zmieniającymi się w czasie obciążeniami.

2

W celu dokonania analizy układu fizycznego konieczny jest jego opis matematyczny. Opis ten wymaga zdefiniowania pewnych wielkości w taki sposób, ażeby wartości liczbowe tych wielkości określały jednoznacznie stan układu w każdej chwili. Jeżeli wielkości te zmieniają się w czasie, wówczas czas będzie również wielkością potrzebną do opisanego układu. Dla układów fizycznych czas upływa w sposób ciągły niezależnie od innych zmian w układzie. Dlatego będzie on wielkością

niezależną lub zmienną niezależną. Jeżeli układ jest układem o parametrach skupionych (np. obwodem elektrycznym z elementami impedancyjnymi), czas jest jedyną zmienną niezależną. Jeżeli układ jest układem o parametrach rozłożonych (np. linią transmisyjną), należy uwzględnić drugą zmienną niezależną, którą będzie współrzędna położenia dowolnego punktu na linii.

W układzie fizykalnym istnieją również parametry, których znajomość jest konieczna, lecz które nie zmieniają się lub zmieniają się tylko w sposób określony. Do parametrów tych należy: oporność, indukcyjność, pojemność obwodu elektrycznego i napięcia zasilania doprowadzone do obwodu z generatora o znanej charakterystyce. Pozostałe wielkości opisujące układ zależą od wartości parametrów układu i od zmiennych niezależnych. Wielkości te są zmiennymi zależnymi układu. Układ opisuje się matematycznie za pomocą równań, w których występują wielkości zmienne, ich pochodne lub całki. Współczynniki tych równań są określone przez parametry układu. Opis skomplikowanego układu wymaga większej liczby równań tego typu. Liczba tych równań musi być równa liczbie zmiennych zależnych, które są wielkościami nieznanymi.

Jeżeli do opisu układu wystarczy jedna zmienna niezależna, to w równaniach wystąpią tylko pochodne i całki względem tej zmiennej. Bardzo często całki można wyeliminować różniczkując równanie. Otrzymane tą drogą równanie, posiadające tylko pochodne względem jednej zmiennej niezależnej, będzie równaniem różniczkowym zwyczajnym. Jeżeli w równaniu jest więcej niż jedna zmienna niezależna, wystąpią w nim pochodne cząstkowe względem większej liczby zmiennych niezależnych i równanie będzie równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych.

Jeżeli zmienne zależne lub ich pochodne występują w równaniu tylko w pierwszej potęgce, to równanie będzie liniowe; jeżeli w równaniu wystąpią zmienne zależne w potęgce wyższej niż pierwsza albo iloczyny zmiennych zależnych lub też iloczyny tych zmiennych i ich pochodnych, to równanie będzie nieliniowe. Ponieważ funkcję przestępną można przedstawić w postaci szeregu potęgowego, równanie zawierające funkcję przestępną zmiennej zależnej będzie również równaniem nieliniowym.

W najprostszym przypadku parametry układu są stałe, niezależne od stanu układu. Dla wielu układów parametry nie są wielkościami stałymi. Jeżeli parametry układu będą się zmieniać wraz ze zmianą jednej lub wielu zmiennych zależnych, równanie układu będzie równaniem nieliniowym. Jest to oczywiste, gdyż parametr będący funkcją zmiennej zależnej jest współczynnikiem albo przy tej zmiennej, albo przy innej zmiennej zależnej (względnie przy ich pochodnych). W efekcie pojawi się człon ze zmienną zależną w potęgce różnej od pierwszej albo z iloczynem pewnych zmiennych zależnych.

Parametry układu mogą się również zmieniać w pewien określony sposób ze zmianą zmiennej niezależnej. W tym przypadku równanie układu pozostaje liniowe, lecz jego współczynniki będą zmienne. Może się zdarzyć, że w tym samym równaniu wystąpią zarówno człony nieliniowe, jak i człony liniowe czy nieliniowe o współczynnikach zmiennych z czasem.

Rozwiązaniem układu równań różniczkowych są takie funkcje zmiennej niezależnej, które po podstawieniu do równań pierwotnych przekształcają je w tożsamości.

Znalezienie ogólnego rozwiązania równania różniczkowego jest na ogół bardzo trudne, a często w ogóle niemożliwe. Istnieją jednak pewne typy równań różniczkowych, dla których znalezienie rozwiązań nie nastęrcza trudności. Najczęściej spotykanym typem równania różniczkowego, którego rozwiązanie można znaleźć w prosty sposób, jest *równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych*. Równania tego typu można rozwiązać za pomocą pewnych stosunkowo prostych reguł. W tym celu stosuje się *metody operatorowe*. Jeżeli liczba zmiennych jest duża lub jeżeli równania są skomplikowane, stosowanie tych reguł może wymagać dużego nakładu pracy. Teoretycznie istnieje jednak zawsze możliwość otrzymania rozwiązania ścisłego. Zresztą problem pracochłonności stał się w zasadzie nieistotnym z chwilą wprowadzenia elektronowych maszyn liczących.

Najważniejszą właściwością równań liniowych jest to, że słuszna jest dla nich *zasada superpozycji*. Umożliwia ona otrzymanie skomplikowanego rozwiązania w postaci kombinacji liniowej rozwiązań prostych. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, nie posiadającego członu odpowiadającego funkcji wymuszającej, można otrzymać w postaci sumy kilku funkcji wykładniczych, których liczba zależy od rzędu równania.

Równanie niejednorodne (z funkcją wymuszającą) posiada rozwiązanie ogólne będące sumą rozwiązania ogólnego odpowiedniego równania jednorodnego i pewnej całki szczególnej tego równania niejednorodnego. Skomplikowaną funkcję wymuszającą można rozłożyć na składniki prostsze i obliczać całki szczególne dla każdego z tych składników z osobna. Poszukiwana całka szczególna będzie wówczas sumą poszczególnych całek szczególnych odpowiadających poszczególnym składnikom funkcji wymuszającej. Korzystając z tej zasady można przedstawić skomplikowaną funkcję periodyczną wymuszającą w postaci jej szeregu Fouriera. Całki szczególne odpowiadające składowym szeregowi Fouriera można znaleźć w sposób prosty. Suma tych całek da całkę szczególną odpowiadającą wypadkowej funkcji wymuszającej.

Układy nieliniowe nie posiadają własności superpozycji. Duża część podstawowych teorii układów fizykalnych (technicznych) opiera się na założeniu, że układy te można opisać w sposób adekwatny za pomocą równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Założenie to jest dla wielu układów w pełni uzasadnione. Większa część teorii obwodów elektrycznych opiera się na tym założeniu. Nie będzie jednak przesadą stwierdzenie, że *wszystkie układy fizykalne przy pewnych warunkach pracy stają się nieliniowymi i wymagają opisu za pomocą równań nieliniowych*. Skoro tylko prądy i napięcia w obwodzie elektrycznym stają się zbyt duże, występują efekty nieliniowe, rdzenie magnetyczne nasycają się, własności dielektryczne izolatorów ulegają zmianie, temperatura i oporność przewodników zmienia się, występują efekty prostownicze. Często bardzo małe napięcia i prądy są wystarczająco duże, aby wywołać tego rodzaju zmiany.

Jest rzeczą bardzo dogodną dla badającego, że założenie liniowości i stałości współczynników jest słuszne dla bardzo wielu układów. Niemniej należy pamiętać o tym, że założenie to nie będzie uzasadnione, gdy układ znajdzie się na granicach swego przedziału pracy.

Metody rozwiązywania równań nieliniowych lub równań o współczynnikach zmiennych są na ogół trudniejsze i mniej zadowalające niż metody rozwiązywania równań prostszych. Tylko w nielicznych przypadkach można znaleźć dokładne rozwiązanie równania nieliniowego w postaci zamkniętej (w postaci funkcji znanej). Zazwyczaj możliwe jest rozwiązanie przybliżone, które jest zadowalająco dokładne tylko w pewnym przedziale warunków pracy układu. Analizując układ nieliniowy trzeba uciekać się często do wszelkich możliwych środków pozwalających przewidzieć zachowanie się układu. Często kierujemy się intuicją, opartą na głębokim rozumieniu natury procesów fizycznych zachodzących w układzie. Ogólnie rzecz biorąc opieramy się na *metodach analizy jakościowej układów silnie nieliniowych*. Nie zaleca się natomiast bezkrytycznego stosowania formuł czysto matematycznych. Truizmem jest uwaga, że znajomość odpowiedzi z góry wydatnie pomaga w rozwiązaniu zagadnienia. Dane eksperymentalne charakteryzujące pracę układu mogą mieć dużą wartość użytkową przy jego analizie. Zbędnym jest podkreślanie okoliczności, że omawiane trudności będą wielokrotnie większe przy *syntezie układów nieliniowych*.

Jeżeli nieliniowości nie są zbyt duże lub gdy równania należą do pewnych specjalnych typów, to rozwiązania przybliżone można otrzymać za pomocą *metod analitycznych*. Metody analityczne dają rozwiązania w postaci algebraicznej bez konieczności podstawiania wartości liczbowych parametrów w trakcie obliczeń. Skoro tylko rozwiązanie otrzymano, można do niego wprowadzić wartości liczbowe i łatwo zbadać efekt zmiany wartości pewnych wielkości.

Jeżeli nieliniowości są silniejsze, metody analityczne mogą się okazać nieprzydatne i rozwiązanie równania może być możliwe tylko za pomocą *metod numerycznych* lub *graficznych*. Metody te wymagają korzystania w trakcie obliczeń z wartości liczbowych parametrów równania i warunków początkowych. Stąd rozwiązanie otrzymane tymi metodami odpowiada tylko pewnemu szczególnemu zespołowi warunków. Co więcej, przebieg obliczania jest zwykle pracochłonny (nie mamy na myśli korzystania z elektronowych maszyn matematycznych) i dla uzyskania dostatecznej dokładności wymaga dużej ilości operacji. Aby otrzymać rozwiązanie dla innych wartości liczbowych parametrów, należy całe obliczenie powtórzyć. Ze względu na dużą liczbę operacji potrzebnych do rozwiązania równania metodą numeryczną, w przypadku konieczności rozwiązywania większej liczby takich równań, potrzebna jest odpowiednia cyfrowa maszyna licząca.

Podsumowując powyższe uwagi można w sposób następujący scharakteryzować poszczególne przypadki napotymane przy analizie układów fizykalnych. Równania opisujące pracę wielu układów fizykalnych mogą być sprowadzone do układów równań różniczkowych zwyczajnych. Jeżeli równania te są równaniami liniowymi o stałych współczynnikach, rozwiązanie można otrzymać za pomocą metod powszechnie znanych. W przypadku gdy liczba zmiennych zależnych jest duża lub gdy równania są rzędu wysokiego, stosowanie tych metod może wymagać dużego nakładu pracy. Niemniej jednak rozwiązanie jest zawsze możliwe.

W przypadku równań różniczkowych nieliniowych rozwiązanie metodą analityczną jest możliwe wtedy, gdy nieliniowości nie są zbyt silne. Rozwiązania otrzy-

mane w tym przypadku są zwykle tylko przybliżone. Równania z dużymi nieliniowościami można rozwiązać tylko za pomocą metod numerycznych lub graficznych.

W praktyce wiele ważnych problemów jest tak skomplikowanych, że otrzymanie dokładnego rozwiązania jest w ogóle niemożliwe lub wymagałoby zbyt dużo czasu i pracy. W takich przypadkach konieczne jest pewne uproszczenie problemu, pominięcie cech nieistotnych i skoncentrowanie uwagi na cechach istotnych. Często przez poczynienie pewnych dopuszczalnych założeń upraszczających można równanie uprościć i doprowadzić do postaci łatwej do rozwiązania. Chociaż równania te nie będą opisywały układu dokładnie, mogą jednak opisywać jego własności najważniejsze. Uprozczone równanie można analizować za pomocą odpowiednich metod otrzymując w wyniku pewne informacje o układzie. Powyższe postępowanie jest równoznaczne ze sporządzeniem pewnego *uproszczonego modelu matematycznego* badanego układu w celu poznania jego zachowania się w różnych warunkach. Dane te mogą, co prawda, nie wystarczać do zaprojektowania danego urządzenia, niemniej jednak mogą być bardzo pożyteczne. Podany sposób postępowania okazał się przydatny przy rozwiązywaniu wielu praktycznych problemów. Na przykład generator lampowy drgań elektrycznych jest urządzeniem tak skomplikowanym, że przy jego analizie nie można uwzględnić wszystkich czynników wpływających na jego pracę. Niemniej jednak klasyczne równanie van der Pola opisuje wiele jego właściwości i jest na tyle proste, że może dostarczyć dużo informacji. Analiza równania van der Pola dostarczyła wiele cennych wiadomości o pracy generatorów samowzbudnych.

Każda z przybliżonych metod rozwiązywania problemu nieliniowego wzięta z osobna daje najczęściej rozwiązanie tylko fragmentaryczne. Aby otrzymać pełniejsze informacje, należy to samo zagadnienie rozwiązać kilkoma metodami. Warto zauważyć, że pewne metody stosowane przez matematyków do rozwiązywania poszczególnych problemów na pierwszy rzut oka wydają się bezpodstawne i niezrozumiałe. Na przykład, przy rozwiązywaniu równania różniczkowego rzędu wyższego bardzo często zastępuje się to równanie odpowiednim układem równań pierwszego rzędu. Taki sposób postępowania jest konieczny zazwyczaj wtedy, gdy chce się otrzymać rozwiązanie metodą numeryczną, gdyż większość tych metod można stosować tylko do równania pierwszego rzędu. W przypadku stosowania innych metod analizy rozkład na układ równań rzędu pierwszego jest również bardzo dogodny, gdyż pozwala na lepsze zorganizowanie następujących po sobie etapów rozwiązania. W jeszcze innych przypadkach zachodzi konieczność zastępowania w trakcie rozwiązywania pewnego układu równań jednym równaniem rzędu wyższego.

Innym często stosowanym sposobem jest zamiana zmiennych w równaniu. Często podstawienie zamiast dotychczasowej zmiennej jakiejś innej przekształca równanie z postaci, której nie dało się rozwiązać, w postać łatwiejszą do rozwiązania. Na przykład niekiedy pewne równanie nieliniowe można przez zmianę zmiennej przekształcić w równanie liniowe. W innych znowu przypadkach zamiana zmiennej jest stosowana dla udogodnienia dalszych obliczeń.

Często w pewnych problemach związanych z układami fizycznymi możliwe jest uproszczenie równania przez łączenie w jeden współczynnik kilku parametrów układu. Przez odpowiedni wybór tego współczynnika można doprowadzić równanie wypadkowe do postaci bezwymiarowej. Wielkości zmienne równania nazywa się wówczas zmiennymi znormalizowanymi. Znormalizowane równanie (i jego rozwiązanie) jest często bardziej zwarte i łatwiejsze do analizy niż odpowiednie równanie nieznormalizowane. Znormalizowane równanie nie posiada «niepotrzebnych współczynników», a współczynniki, które pozostały, są istotne dla analizy.

Jest rzeczą zrozumiałą, że metody numeryczne czy graficzne w ich klasycznym ujęciu i wykonaniu są mało przydatne w *zadaniach syntezy* układów fizycznych, technicznych, układów regulacji automatycznej itp., o silnej nieliniowości zwłaszcza wtedy, kiedy dla uzyskania wysokiej jakości syntezerowanego układu celowo wprowadza się elementy o charakterystykach silnie nieliniowych. Elementy te odgrywają coraz większą rolę w budowie układów regulacji automatycznej. Wprowadza się je głównie w celu:

- 1) uzyskania lepszej stabilizacji,
- 2) poprawy jakości działania układów regulacji automatycznej, w szczególności zapewnienia żądanej dynamicznej dokładności,
- 3) przy optymalizacji procesów sterowanych automatycznie,
- 4) przy rozwiązywaniu problemów programowania liniowego, a zwłaszcza dynamicznego.

W takich zadaniach szczególnego znaczenia nabierają *jakościowe metody badania* (zarówno analizy jak i syntezy) *układów nieliniowych*, z których najbardziej typowe są: *metody topologiczne* związane z geometryczną budową struktury przestrzeni fazowej oraz *metody jakościowej teorii równań różniczkowych*.

W badaniach *dynamiki układów fizycznych*, a w szczególności dynamiki maszyn i dynamiki układów regulacji automatycznej, coraz więcej uwagi poświęca się istnieniu i wpływowi *czynników losowych*. W układach fizycznych opisujących się układami równań różniczkowych zwyczajnych losowymi mogą być:

- 1) parametry opisujące charakterystykę układu,
- 2) warunki początkowe,
- 3) działanie zewnętrzne czyli wymuszenia.

O ile czynniki dwóch pierwszych grup możemy wyrazić przez *wielkości* (liczby) *losowe*, o tyle wymuszenia wyrażają się przez *funkcje losowe*. Jest rzeczą jasną, że przy udziale czynników losowych procesy zachodzące w układzie, tj. praca układu będzie procesem losowym, czyli procesem stochastycznym, a parametry opisujące ten proces będą losowymi funkcjami czasu.

Przy badaniu dynamiki układów fizycznych będących pod wpływem czynników losowych wysuwają się dwa zasadnicze zadania:

- 1) zadanie analizy, gdy wg danych statystycznych charakterystyk czynników (wymuszeń) należy podać statystyczne charakterystyki procesu;
- 2) zadanie syntezy, gdy wg statystycznych charakterystyk czynników losowych należy zbudować układ (zaprojektować jego regulację automatyczną) tak, żeby dynamiczna dokładność pracy układu czyniła zadość postawionym wymaganiom.

3

Mechanika teoretyczna stanowi konieczną bazę nie tylko dla nauk i zadań konstrukcyjnych. W naukach technologicznych dynamika realizowanych procesów technologicznych wymaga jej wnikliwej analizy, a przy rozwijającej się automatyzacji procesów produkcyjnych wysuwa coraz bardziej złożone *zadania syntezy dynamicznej*.

W eksploatacji konstrukcji i maszyn konieczne są badania mające za zadanie z jednej strony kontrolę prawidłowości przebiegu realizowanych przez maszyny procesów jak i utrzymania warunków prawidłowej pracy samych maszyn, z drugiej zaś badania dające zarówno wytyczne konstrukcyjne dla polepszenia konstrukcji maszyn, technologiczne dla usprawnienia realizowanego procesu produkcyjnego, wreszcie eksploatacyjno-remontowe dla oceny stanu maszyny, jego zmiany wskutek zużycia itd.

Ale mechanika teoretyczna i stosowana to nie tylko podbudowa pod dyscypliny techniczne, lecz również narzędzie, to zespół metod nieodzownych dla prawidłowej budowy i rozwoju tych dyscyplin technicznych. Przy tym ta rola nie ogranicza się do nauk związanych z budową maszyn czy też konstrukcji, ale dotyczy również bardziej odległych dyscyplin technicznych, jak elektrotechnika, chemia itd.

Wśród nauk podstawowych (ogólno-technicznych) mechanika teoretyczna zajmuje miejsce szczególne. Pod względem ścisłości i stosowanego aparatu logiczno-formalnego nie różni się zasadniczo od matematyki, jednak jeśli chodzi o przedmiot badań, to dopuszcza i buduje modele matematyczne mniej lub bardziej wyidealizowane obiektów konkretnych, procesów rzeczywistych, zjawisk fizycznych. Wynikają stąd zasadnicze postulaty pociągające za sobą duże trudności, których nie spotykamy w czystej matematyce, mianowicie wymagania co do sensu fizycznego, celowości i użyteczności technicznej pojęć wprowadzonych przy budowie i opisie modelu, możliwie jak najdalej posuniętej prostoty opisu, a jednocześnie możliwie dobrej zgodności cech modelu i obiektu rzeczywistego oraz konieczności weryfikacji doświadczalnej zgodności właściwości modelu i obiektu rzeczywistego.

Na gruncie rozważań o ruchach i siłach w nauce mechaniki teoretycznej przyszły inżynier zapoznaje się z możliwością i celowością rozumienia i opisu matematycznego fizykalnych układów i takim prowadzeniem rozważań, obliczeń i spekulacji, które w końcu prowadzą do ostatecznych wyników konkretnych, dających się wcielić w wymiary, parametry, kształty projektowanych układów, konstrukcji i maszyn. Wydaje się, że głównie dzięki tej operatywności, przystosowalności i uniwersalności mechanika teoretyczna nie tylko pozostaje nauką żywą, ale zarazem najlepiej opracowaną dyscypliną dla wdrażania przyszłego inżyniera w nawyki ścisłego technicznego myślenia. Niedoceniając tej roli mechaniki teoretycznej w programach wyższych uczelni technicznych powodować może braki jakościowe w ukształtowaniu umysłowości nowoczesnego inżyniera, w wyrobieniu umiejętności i nawyków do naukowego, odkrywczego podchodzenia do konkretnych problemów napotykanym w praktyce podyplomowej.

Podstawowym działem mechaniki teoretycznej, który przez swoją strukturę logiczną, ogólność i operatywność metod w zastosowaniach daleko przekracza zjawiska czy procesy mechaniczne, a rozciąga się na wszystkie procesy opisujące się parametrami zmiennymi z czasem i powiązanych z sobą i z czasem różniczkowymi równaniami stanu, jest dynamika analityczna. Dynamiką analityczną nazywamy tę gałąź wiedzy, w której bada się za pomocą analizy matematycznej zmiany stanów ciał materialnych (ruchy), wynikające z ich wzajemnego oddziaływania. Przez prawie dwieście lat (1700-1900) fizycy rozwijali tylko jedną teorię dynamiczną. Obecnie mamy trzy teorie dynamiczne, przy czym ostatnia może być jeszcze podzielona na dwie:

- 1) dynamikę newtonowską,
- 2) dynamikę relatywistyczną (wyłącza się z niej teorię kwantów),
- 3a) kwantową dynamikę newtonowską, opartą na bezwzględnej przestrzeni i bezwzględnym czasie Newtona,
- 3b) relatywistyczną dynamikę kwantową, opartą na płaskiej czaso-przestrzeni Minkowskiego lub na zakrzywionej czaso-przestrzeni Einsteina.

We współczesnym rozumieniu dynamika klasyczna oznacza dynamikę punktów materialnych i ciał sztywnych, przy czym specjalne znaczenie przywiązuje się do ogólnej teorii. Obejmuje ona również główne rozdziały kinematyki: teorię przemieszczeń skończonych, geometrię mas a także układ sił i współrzędnych uogólnionych. Co się tyczy dziedziny stosowalności dynamiki klasycznej, to można powiedzieć, że mechanika newtonowska prawidłowo opisuje zjawiska fizyczne w warunkach, które moglibyśmy nazwać zwykłymi «normalnymi», tzn. kiedy ją stosujemy do problemów techniki i w szerokim znaczeniu tego słowa do problemów fizyki, obejmujących układy, które nie są ani zbyt wielkie, ani zbyt małe. Niezgodności między teorią a doświadczeniem w tych dziedzinach są w głównej mierze wynikiem zbyt daleko posuniętego uproszczenia modelu matematycznego (np. pominięcie tarcia, zastąpienie ciała sprężystości odkształcalnego przez ciało doskonale sztywne). Dynamika newtonowska może być z powodzeniem stosowana w kinetycznej teorii gazów, w pewnej mierze również w mechanice nieba. Uchybienia w przewidywaniu zjawisk pojawiają się wtedy, gdy 1) prędkości względne nie są już małe w porównaniu do prędkości światła lub gdy 2) w rozważaniach wprowadza się masę skali atomowej.

Skoro w warunkach laboratoryjnych wysokie prędkości mogą być nadane tylko bardzo lekkim cząstkom, przeto w praktyce te oba warunki pokrywają się. Jednak możemy traktować je oddzielnie, albowiem warunek pierwszy oznacza granicę, powyżej której dynamika newtonowska powinna być zastąpiona przez dynamikę relatywistyczną, warunek zaś drugi oznacza, że poniżej pewnej granicy dynamika newtonowska powinna być zastąpiona przez dynamikę kwantową.

Jednakże wartość naukowa dynamiki klasycznej, w szczególności dynamiki newtonowskiej, nie ogranicza się do fizycznych przewidywań opartych bezpośrednio na jej podstawach. Dynamika newtonowska jest zbudowana ze zbioru matematycznych wywodów i wniosków otrzymanych w rezultacie podporządkowania pewnych prostych pojęć pewnym prostym prawom. W rozwoju matematycznym

tej dyscypliny zostały rozwinięte pewne ogólne schematy (w szczególności metody Lagrange'a i Hamiltona), które pozwalają na zmianę pierwotnych pojęć prymitywnych na bardziej ogólne (np. przestrzeń konfiguracji i przestrzeń fazowa). Okazało się, że te nowe pojęcia matematyczne można użyć do przedstawienia pojęć fizycznych w sposób odmienny od tego, jaki był źródłem pojęć matematycznych.

Zatem dynamika newtonowska zrodziła nowe podstawy fizyczne przez zastosowanie wewnątrz niej odpowiadających idei matematycznych poza granice ich pierwotnego zastosowania. Jako przykład można przytoczyć zastosowanie metod Lagrange'a w teorii obwodów elektrycznych bądź (co dziwniejsze na pozór) zastosowanie metod Hamiltona w rozwoju mechaniki kwantowej. W dalszych rozważaniach nad dynamiką należy zauważyć, że dynamika newtonowska stawia przed nami zadanie rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, zatem z matematycznego punktu widzenia można przedmiot dynamiki newtonowskiej określić jako równania różniczkowe zwyczajne.

Metody Hamiltona wprowadzają równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i przedmiot dynamiki Hamiltona można określić jako równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu. Przejście do teorii kwantów poprzez równanie Schrödingera stanowi przejście do równań cząstkowych rzędu drugiego.

Резюме

РОЛЬ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ В РАЗВИТИИ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

Проводится анализ текущего состояния и перспектив развития теоретической механики в области технических применений. В общем виде обсуждена роль динамики нелинейных систем с сосредоточенными параметрами.

Работа имеет целью постановку и рассмотрение некоторых вопросов механики, имеющих значение с технической точки зрения.

Summary

THE ROLE OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS IN THE TECHNOLOGICAL PROGRESS

The analysis of the present stage of development and the prospects for further progress of theoretical mechanics are discussed in the light of its application to technological systems. The role of the dynamics of nonlinear systems of concentrated parameters are treated in general. The object of the paper is to discuss some problems of mechanics important from the technological point of view.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1964 r.

OSCYLACJE RAKIETY LECĄCEJ PO TORZE FALISTYM W ATMOSFERZE ZIEMI¹

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W wielu pracach rozpatrywane jest zagadnienie powrotu raket na ziemię i wejście raket czy też pojazdów kosmicznych w atmosferę ziemi.

STALONY-DOBRAŃSKI [10] rozpatrując wejście rakiety do atmosfery ziemi stwierdza, że wpływ atmosfery na tor lotu uwidacznia się dopiero poniżej wysokości 97 km. Wysokość tę nazywa «wysokością efektywną» i uważa, że dopiero od niej może być rozpatrywany lot pojazdu kosmicznego jako wejście do atmosfery. Ze względu na tor wejście pojazdów kosmicznych (raket) w atmosferę ziemi dzielimy na: wejście po torze balistycznym, wejście po spirali (szybowanie na wysokości równoważnej) i wejście po torze falistym. Podział ten jest właściwy również dla raket dalekiego zasięgu.

Rakieta szybująca leci lotem ślizgowym na wysokości, która została nazwana przez SANGERA «wysokością równoważną». Wysokość ta maleje ze wzrostem obciążenia jednostkowego powierzchni nośnej i zmniejszeniem prędkości lotu [2]. Siła nośna niezbędna do lotu tej rakiety równoważy różnicę ciężaru i siły odśrodkowej wywołanej krzywoliniowym ruchem wokół ziemi; wtedy lot jest możliwy dla bardzo małych kątów toru.

Tor rakiety lecącej po torze falistym stanowi szereg odcinków toru balistycznego połączonych ze sobą fazą rykoszetowania.

Przy każdym «skoku» minimalna wysokość toru rakiety jest zawsze mniejsza od «wysokości równoważnej», na której mogłaby lecieć rakieta szybująca z taką samą prędkością i z tym samym współczynnikiem siły nośnej. Lot rakiety po torze falistym jest możliwy wtedy, gdy kąt toru na początku skoku nie przewyższa 12° [2] i gdy rakieta dysponuje siłą nośną (ma powierzchnie nośne).

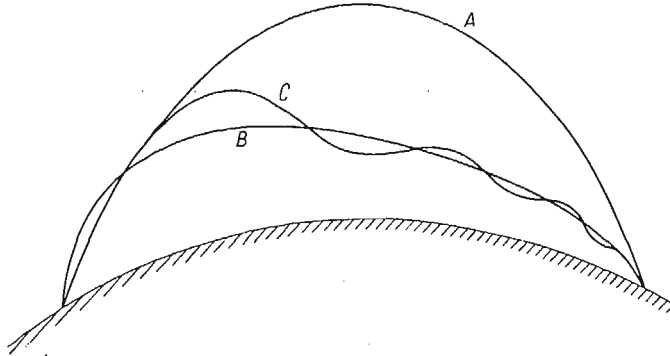
Zagadnieniem raket lecących po torze falistym pierwszy zajmował się SANGER nazywając taką rakieta «rakieta rykoszetująca». W dalszym ciągu nad zagadnieniami lotu «rakiety rykoszetującej» pracowali FRIEDRICH i DORE [1], a następnie TOBAK i ALLEN [3] rozpatrywali stateczność dynamiczną.

Ponieważ «rykoszetowanie» związane jest z ruchem na granicy dwóch ośrodków, a rakieta porusza się właściwie w jednym ośrodku, to jest w atmosferze ziemi

¹ Fragment niniejszej pracy był przedstawiony na IV Ogólnopolskiej Konferencji Techniki Rakietowej i Astronautyki w Katowicach w 1963 r.

o zmiennej gęstości, więc słuszniej jest używać zwrotu «rakieta lecąca po torze falistym».

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę ruchu i oscylacji kąta natarcia rakiety poruszającej się w atmosferze ziemi po torze falistym. Oparto się na założeniach przyjętych przez TOBAKA i ALLENA w pracy [3] i przyjęto ciągłość atmosfery. TOBAK i ALLEN w oparciu o pracę [1] obliczyli współrzędne toru rakiety i oscylacje



Rys. 1. Tory rakiet dalekiego zasięgu. A—rakieta balistyczna, B—rakieta szybująca, C—rakieta lecąca po torze falistym (rakieta rykoszetująca)

kąta natarcia wokół środka ciężkości rakiety. Analizę przeprowadzili na przykładzie rakiety rykoszetującej przyjmując «nieciągły» model atmosfery. Powyższe założenie wprowadza osobliwość w chwili początkowej, co rzutuje na rozwiązanie zagadnienia. Uniknięcie uproszczeń stosowanych w pracy [3] dało w rozwiązaniach znaczne różnice nie tylko ilościowe ale i jakościowe.

Przyjęte oznaczenia

$Cm_\alpha = \frac{\partial Cm}{\partial \alpha}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem kąta natarcia,
$Cm_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial Cm}{\partial (\dot{\alpha} l)}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem prędkości zmiany kąta natarcia,
$Cm_\delta = \frac{\partial Cm}{\partial \delta}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem kąta wychylenia steru,
$Cm_q = \frac{\partial Cm}{\partial \left(\frac{\dot{\theta} l}{V}\right)}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem kątowej prędkości pochylenia,
	C_x współczynnik oporu
	C_z współczynnik siły nośnej,
	C_m współczynnik momentu,
$Cz_\alpha = \frac{\partial Cz}{\partial \alpha}$	pochodna współczynnika siły nośnej względem kąta natarcia,
g [m/sek ²]	przyspieszenie ziemskie,
h [m]	wysokość lotu,
I [kg m sek ²]	moment bezwładności,
l [m]	długość rakiety,

$m \left[\frac{\text{kgsek}^2}{\text{m}} \right]$	masa rakiety,
$Q \text{ [kG]}$	ciężar rakiety,
$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \text{ [kG/m}^2\text{]}$	ciśnienie dynamiczne,
$P_z \text{ [kG]}$	siła nośna,
$P_x \text{ [kG]}$	opór,
P_z/P_x	doskonałość,
$R \text{ [m]}$	promień ziemi,
$S \text{ [m}^2\text{]}$	powierzchnia nośna,
$s \text{ [m]}$	droga (długość toru),
$t \text{ [sek]}$	czas,
$V \text{ [m/sek]}$	prędkość lotu,
$V_E \text{ [m/sek]}$	prędkość lotu początkowa (przy wejściu),
$X \text{ [m]}$	długość mierzona wzdłuż ziemi,
$y \text{ [m]}$	wysokość nad powierzchnią ziemi,
$y_E \text{ [m]}$	wysokość początkowa,
$\alpha \text{ [rad]}$	kąt natarcia,
$\alpha_E \text{ [rad]}$	kąt natarcia początkowy (przy wejściu),
$\alpha_s \text{ [rad]}$	kąt natarcia statyczny,
$\alpha_0 \text{ [rad]}$	kąt natarcia oscylujący,
$\beta \text{ [m}^{-1}\text{]}$	współczynnik gęstości powietrza,
$\gamma \text{ [rad]}$	kąt toru,
$\gamma_E \text{ [rad]}$	kąt toru początkowy (przy wejściu),
$\gamma_s \text{ [rad]}$	kąt toru statyczny,
$\gamma_z \text{ [rad]}$	kąt toru zastępczy,
$\delta \text{ [rad]}$	kąt wychylenia steru,
$\theta \text{ [rad]}$	kąt pochylenia rakiety,
$\rho \left[\frac{\text{kgsek}^2}{\text{m}^4} \right]$	gęstość powietrza,
$\sigma \text{ [m]}$	promień bezwładności.

2. Równania ruchu i założenia ogólne

Ruch rakiety poruszającej się w atmosferze został opisany równaniami przedstawionymi przez TOBAKA i ALLENA [3].

Ogólne równanie ruchu przy założeniu, że w każdym cyklu oscylacji prędkość V i ciśnienie dynamiczne q pozostają niezmiennie, zostały ujęte przez Tobaka i Alle-na w postaci dwóch układów:

pierwszy układ określający tor środka ciężkości rakiety (właściwie układ ten odpowiada wolnym oscylacjom, tzn. charakteryzuje tor falisty rakiety)

$$\begin{aligned}
 & -mV - CxqS + mg \sin \gamma_s = 0, \\
 & mV \dot{\gamma}_s + gSCz_a \alpha_s + m \left(\frac{V^2}{R+y} - g \right) \cos \gamma_s = 0, \\
 & I \ddot{\theta}_s - qSl \left(Cm_a \alpha_s + Cm_q \frac{\dot{\theta}_s l}{V} + Cm_\delta \delta + Cm_{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_s l}{V} \right) = 0, \\
 & \theta_s = \alpha_s - \gamma_s;
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

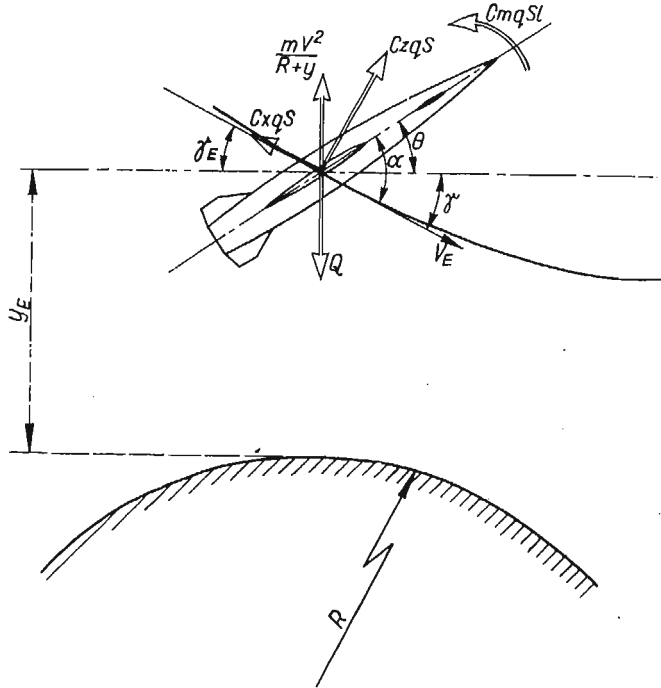
drugi układ określający oscylacje rakiety względem środka ciężkości (układ ten odpowiada oscylacjom szybkim)

$$mV\dot{\gamma}_0 + qSCz_\alpha \alpha_0 = 0,$$

$$(2.2) \quad I\ddot{\theta}_0 - qSl \left(Cm_\alpha \alpha_0 + Cm_q \frac{\dot{\theta}_0 l}{V} + Cm_{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_0 l}{V} \right) = 0,$$

$$\theta_0 = \alpha_0 - \gamma_0.$$

Odpowiednie kąty oznaczono na rys. 2. (por. [3] i [1].)



Rys. 2. Oznaczenia kątów i wielkości początkowych

Przy dalszym rozpatrywaniu ruchu rakiety «rykoszetującej» od atmosfery, której tor przedstawia linię falistą o malejącej amplitudzie, przyjęto następujące założenia upraszczające [3]:

a) współczynniki aerodynamiczne są niezależne od liczby Macha (lot odbywa się z prędkością ~ 4000 m/sek),

b) współczynnik oporu C_x jest niezależny od kąta natarcia i prędkości pochylenia,

c) stosunek siły nośnej do oporu jest wielkością stałą,

d) pominięto składnik $m \left(\frac{V^2}{R+y} - g \right)$ zawierający różnicę siły odśrodkowej i składowej ciężaru rakiety.

Prędkość lotu V i gęstość powietrza ρ wyrazimy za pomocą funkcji kąta toru γ ; gęstość powietrza zmienia się wraz z wysokością

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta y},$$

gdzie

$$\varrho_0 = 0,178 \text{ kG sek}^2/\text{m}^4, \quad \beta = \frac{1}{6700} \text{ m}^{-1}.$$

Drugie równanie układu (2.1) po uproszczeniu ma postać;

$$mV \frac{d\gamma_s}{dt} + \frac{1}{2} \varrho V^2 SCz = 0;$$

podstawiając do powyższego równania zależność na ϱ i zależność kinematyczną

$$V \sin \gamma_s = - \frac{dy}{dt} = - \frac{dy}{d\gamma_s} \frac{d\gamma_s}{dt}$$

po scałkowaniu otrzymamy

$$(2.3) \quad y = - \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{2m\beta}{\varrho_0 SCz} (\cos \gamma_s - \cos \gamma_E) + e^{-\beta y_E} \right].$$

Korzystając z powyższej zależności otrzymamy

$$(2.4) \quad \varrho = \varrho_0 e^{-\beta y} = \frac{2m\beta}{SCz} (\cos \gamma_s - \cos \gamma_E) + \varrho_0 e^{-\beta y_E}.$$

Wyrażenie na zmianę gęstości w funkcji kąta toru (2.4) różni się od przyjętego w pracach [1] i [3] składnikiem $\varrho_0 e^{-\beta y_E}$. Składnik ten został również pominięty wcześniej w pracach SAŃGERA dotyczących rakiety rykoszetującej. Uwzględnienie tego składnika w niniejszej pracy rzutuje na tok rozwiązywania zagadnienia i daje nie tylko zmiany ilościowe, ale i zasadnicze jakościowe.

Prędkość lotu V znajdujemy z pierwszego i drugiego równania (2.1) w postaci

$$(2.5) \quad V = V_E e^{(\gamma_s - \gamma_E)} \frac{Px}{Pz}.$$

3. Tor środka ciężkości rakiety

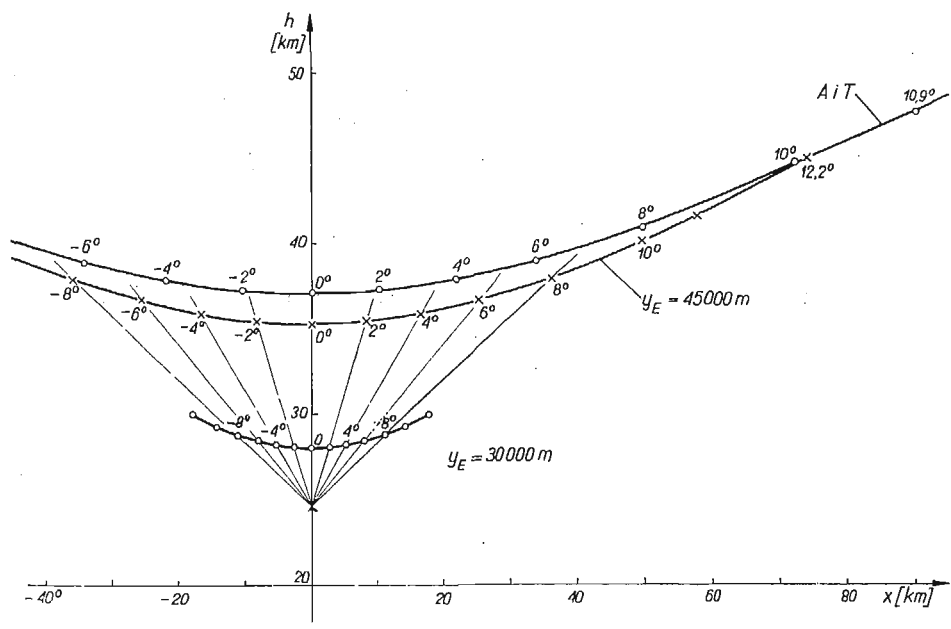
Tor środka ciężkości rakiety w czasie jednego skoku określamy za pomocą współrzędnych x , y i drogi s .

Równanie (2.3) po przekształceniu przyjmie postać:

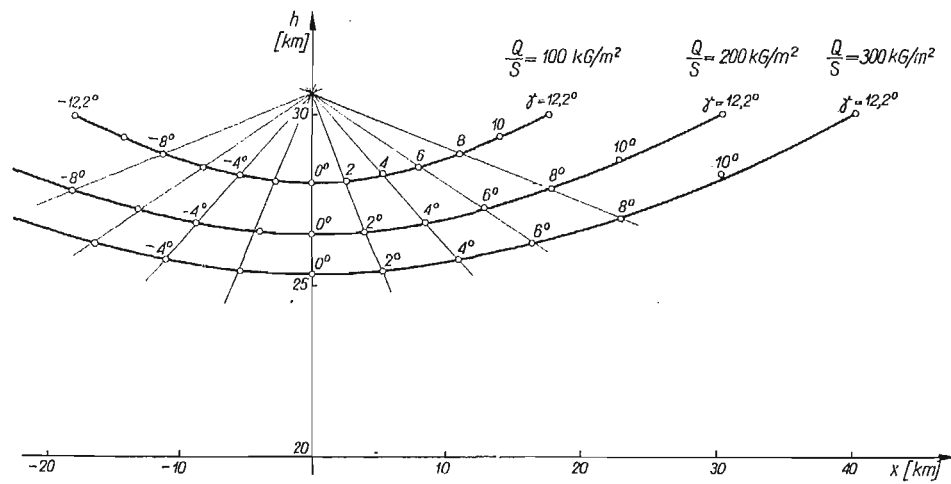
$$y = \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta \left[(\cos \gamma_s - \cos \gamma_E) + \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E} \right]} \right|,$$

ponieważ w powyższym wyrażeniu $\frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E}$ jest wielkością małą i stałą dla danego skoku, więc wprowadzamy kąt zastępczy

$$(3.1) \quad \cos \gamma_z = \cos \gamma_E - \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E},$$



Rys. 3. Tor środka ciężkości rakiety o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kG/m}^2$ lecącej po torze falistym z wysokości początkowej 30 000 m i 45 000 m



Rys. 4. Tor środka ciężkości rakiety o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kG/m}^2$, 200 kG/m^2 i 300 kG/m^2 lecącej po torze falistym z wysokości początkowej 30 000 m

który szczególnie w dalszej części uprości i umożliwi analityczne rozwiązanie zagadnienia.

Współrzędne toru środka ciężkości mają postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} y &= \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta (\cos \gamma_s - \cos \gamma_z)} \right|, \\ X &= \pm \frac{1}{\beta} \left[|\gamma_s| + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_z} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(\gamma_z/2) + \operatorname{tg}(\gamma_s/2)}{\operatorname{tg}(\gamma_z/2) - \operatorname{tg}(\gamma_s/2)} \right| \right], \\ s &= \pm \frac{1}{\beta \sin \gamma_z} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_z}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_s}{2}\right)}{\operatorname{tg}(\gamma_z/2) - \operatorname{tg}(\gamma_s/2)} \right|. \end{aligned}$$

Wielkość składnika $\frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E}$ jest mała, lecz nie może być pomijana w stosunku do różnicy $(\cos \gamma_s - \cos \gamma_E)$. Kąt toru γ_s jest zawarty w granicach $-\gamma_E \leq \gamma_s \leq \gamma_E$, gdzie γ_E jest kątem początkowym (wejścia) na danej wysokości i dla rakiety «rykoszetującej» osiąga wartość $\sim 12^\circ$. Uwzględnienie tego wyrażenia pozwala w odróżnieniu od pracy [3] na obliczenie współrzędnych toru na dowolnej wysokości lotu rakiety o różnych obciążeniach jednostkowych Q/S (rys. 3 i 4).

4. Oscylacje wokół środka ciężkości rakiety

Oscylacje rakiety wokół środka ciężkości opisane są układem równań (2.2), który po uwzględnieniu uproszczeń przyjmuje postać:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} mV\dot{\gamma} + \frac{1}{2}\varrho V^2 C_{z\alpha} \alpha &= 0, \\ I\ddot{\theta} - qSl \left(Cm_\alpha \alpha + Cm_q \frac{\dot{\theta}l}{V} + Cm_{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}l}{V} \right) &= 0, \\ \alpha - \gamma &= \theta. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pomijane są indeksy s i 0 , tak że α oznacza oscylujący kąt natarcia γ zmienny kąt toru środka ciężkości rakiety.

Po przekształceniu układu równań (4.1) otrzymujemy równanie oscylacji kąta natarcia α w funkcji czasu o postaci

$$(4.2) \quad \ddot{\alpha}(t) + f_1(t)\dot{\alpha}(t) + f_2(t)\alpha(t) = 0,$$

gdzie współczynniki $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są niejawnymi funkcjami czasu przez ϱ i V i wyrażają się zależnościami

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f_1(t) &= Cz_\alpha \frac{\varrho VS}{2m} - (Cm_q + Cm_{\dot{\alpha}}) \frac{\varrho VSl^2}{2I}, \\ f_2(t) &= \frac{d}{dt} \left(Cz_\alpha \frac{\varrho VS}{2m} \right) - \frac{Cm_q Cz_\alpha}{Im} \left(\frac{\varrho VSl}{2} \right)^2 - Cm_\alpha \frac{\varrho V^2 Sl}{2I} \end{aligned}$$

W przypadku oscylacji rakiety lecącej po torze falistym wygodniej jest równanie (4.2) przedstawić w funkcji kąta toru γ niż rozpatrywać w funkcji czasu.

Przechodzimy na nowe zmienne γ :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha'(\gamma) \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \alpha''(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \alpha'(\gamma) \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu zależności (4.4) do równania (4.2) otrzymamy

$$(4.5) \quad \alpha''(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \alpha'(\gamma) f_1(\gamma) \left[\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right] + f_2(\gamma) \alpha(\gamma) = 0.$$

Oznaczając przez

$$\begin{aligned} f_3(\gamma) &= \left[\beta V_E e^{(\gamma-\gamma_E)} \frac{Px}{Pz} \right]^{-2} f_1(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right), \\ f_4(\gamma) &= \left[\beta V_E e^{(\gamma-\gamma_E)} \frac{Px}{Pz} \right]^{-2} f_2(\gamma) \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(4.6) \quad \alpha''(\gamma) \left[(\cos \gamma - \cos \gamma_E) + \frac{SCz \varrho_0}{2m\beta} e^{-\beta\gamma_E} \right] + \alpha'(\gamma) f_3(\gamma) + \alpha(\gamma) f_4(\gamma) = 0.$$

Wprowadzamy zależność (3.1) na zastępczy kąt toru γ_z i obliczamy funkcje $f_3(\gamma)$ i $f_4(\gamma)$; otrzymamy

$$(4.7) \quad f_3(\gamma) = (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 (1 - \sin \gamma) \left[\frac{Cz_\alpha}{Cz} - \frac{Cm_q + Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \right] +$$

$$+ (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^3 \left[\frac{Cz_\alpha}{Cz} - \frac{Cm_q + Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$(4.8) \quad f_4(\gamma) = (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 \left[\frac{Px}{Pz} - \frac{Cm_q Cz_\alpha}{Cz^2} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \right] -$$

$$- (\cos \gamma - \cos \gamma_z) \left[\sin \gamma + \frac{Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\beta l} \right].$$

Stosując podstawienie

$$(4.9) \quad \alpha(\gamma) = \bar{\alpha} e^{-\frac{1}{2} \int_{\gamma_E}^{\gamma} f_4(\gamma) d\gamma} = \bar{\alpha} e^{\psi(\gamma)}$$

otrzymamy równanie (4.6) w postaci

$$(4.10) \quad \bar{\alpha}'' (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 + \bar{\alpha} \left[\frac{1}{4} f_3^2(\gamma) - \frac{1}{2} f_3'(\gamma) + f_4(\gamma) \right] = 0,$$

które nie posiada składnika z pierwszą pochodną.

Wprowadzamy oznaczenia

$$(4.11) \quad K_1 = \frac{Cz_\alpha}{Cz} - \frac{Cm_q + Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2,$$

$$(4.12) \quad K_2 = - \frac{Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\beta l},$$

$$(4.13) \quad K_3 = \frac{Px}{Pz} - \frac{Cm_q Cz_\alpha}{Cz^2} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2$$

i obliczamy funkcję przy $\bar{\alpha}$ otrzymując

$$M(\gamma) = \frac{1}{4} f_3^2(\gamma) + f_4(\gamma) - \frac{1}{2} f_3'(\gamma) = (\cos \gamma \cos \gamma_z)^2 \left[\frac{1}{2} \cos \gamma K_1 + K_3 \right] + (\cos \gamma - \cos \gamma_z) [\sin \gamma (1 - \sin \gamma) K_1 - \sin \gamma + K_2].$$

W wyrażeniu na $M(\gamma)$ współczynniki $K_2 \gg K_3 > K_1$, po pominięciu składników małych dostaniemy

$$(4.14) \quad M(\gamma) = (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 K_3 + (\cos \gamma - \cos \gamma_z) K_2.$$

W pracy [3] odpowiednik wyrażenia (4.14) ma postać:

$$M(\gamma) = \frac{K_2}{\cos \gamma - \cos \gamma_E} + \frac{1 - \cos \gamma \cos \gamma_E}{4(\cos \gamma - \cos \gamma_E)},$$

co dla warunków wejścia i wyjścia ze skoku, tzn. gdy $\gamma = \gamma_E$ lub $\gamma = -\gamma_E$ daje osobliwości i rzutuje na rozwiązanie równania.

Równanie (4.10) przyjmie postać

$$(4.15) \quad \bar{\alpha}''(\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 + \bar{\alpha}[(\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 K_3 + (\cos \gamma - \cos \gamma_z) K_2] = 0.$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Ponieważ kąt toru γ jest zawarty między wielkościami: dla fazy wejścia

$$\gamma_E \geq \gamma \geq 0,$$

dla fazy wyjścia

$$0 \geq \gamma \geq -\gamma_E,$$

a kąt $\gamma_E \approx 12^\circ$ oraz $\gamma_z \approx 13,8^\circ$ wyrażenie $(\cos \gamma - \cos \gamma_z)$ przedstawiające sobą gałąź kosinusoidy zastąpiono sieczną

dla fazy wejścia

$$\cos \gamma - \cos \gamma_z \approx (\gamma_z - \gamma) \frac{1}{2} \left(\gamma_z + \frac{1}{2} \gamma_E \right),$$

dla fazy wyjścia

$$\cos \gamma - \cos \gamma_z \approx (\gamma_z + \gamma) \frac{1}{2} \left(\gamma_z + \frac{1}{2} \gamma_E \right).$$

Stosując powyższe uproszczenia równanie (4.15) przyjmie postać

$$\bar{\alpha}''(\gamma_z \mp \gamma) + \bar{\alpha} \left[(\gamma_z \mp \gamma)^2 K_3 + (\gamma_z \mp \gamma) \frac{2K_2}{\gamma_z + \frac{1}{2} \gamma_E} \right] = 0.$$

Stosując zamianę zmiennych $\gamma_z \mp \gamma = \eta$ i oznaczając

$$(4.16) \quad \kappa_2 = -\frac{2K_2}{\gamma_z + \frac{1}{2}\gamma_E}$$

otrzymamy

$$(4.17) \quad \bar{a}''\eta^2 + \bar{a}(\eta^2 K_3 + \eta\kappa_2) = 0.$$

Wielkości liczbowe współczynników w przypadku rozpatrywanej rakiety są następujące: $\kappa_2 = 5560$, $K_3 = 132$. Po rozdzieleniu współczynnika przy \bar{a} na dwie funkcje i zostawieniu po stronie lewej wartości znaczących otrzymamy

$$(4.18) \quad \bar{a}''\eta^2 + \bar{a}\left(\eta\kappa_2 + \frac{1}{4}\right) = \bar{a}\left(\frac{1}{4} - \eta^2 K_3\right).$$

Z rozwiązania powyższego równania przy pominięciu prawej strony otrzymamy pierwsze przybliżenie

$$(4.19) \quad \bar{a}''\eta^2 + \bar{a}\left(\eta\kappa_2 + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Rozwiązanie powyższego równania jest kombinacją liniową funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju zerowego rzędu

$$(4.20) \quad \bar{a}(\eta) = C_1\sqrt{\eta} J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] + C_2\sqrt{\eta} Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}].$$

Dalsze przybliżenia otrzymamy zastępując równanie (4.18) równaniem całkowym Volterry drugiego rodzaju w postaci

$$\begin{aligned} \bar{a}(\gamma) = C_1\sqrt{\gamma_z - \gamma} J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z - \gamma)}] + \\ + C_2\sqrt{\gamma_z - \gamma} Y_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z - \gamma)}] - \int_{\gamma_E}^{\gamma} K(\gamma\xi)\bar{a}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} K(\gamma\xi) = \left(\frac{1}{4} - \eta_2 K_3\right) \pi\sqrt{\eta}\sqrt{\gamma_z \mp \xi} \{ Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z \mp \xi)}] - \\ - J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] Y_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z \mp \xi)}] \} \end{aligned}$$

Dalsze przybliżenia obliczamy rozwiązując równanie całkowe Volterry metodą kolejnych przybliżeń. Już w drugim przybliżeniu wartość całki jest mała i może być pominięta. W przypadku rakiety rozpatrywanej dla przykładu wartość liczbową całki dla $\gamma = 0$ wynosi $-7,3 \cdot 10^{-3}$, co w stosunku do 1,17 wartości $\bar{a}(\gamma)$ obliczonej w pierwszym przybliżeniu stanowi poniżej 1%. Widzimy, że uwzględnienie prawej strony równania daje nieznaczne poprawki i jako rozwiązanie równania (4.17) przyjmujemy pierwsze przybliżenie:

$$(4.21) \quad \alpha(\gamma) = e^{\psi(\gamma)}\sqrt{\eta} \{ C_1 J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] + C_2 Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] \}.$$

Obliczymy teraz wykładnik potęgowy przy e , funkcję $\psi(\gamma)$. Funkcja ta jest scałkowana bez uproszczeń:

$$(4.22) \quad \psi(\gamma) = -\frac{1}{2} \int_{\gamma_E}^{\gamma} K_1 f_3(\gamma) d\gamma = -\frac{1}{2} K_1 \int_{\gamma_E}^{\gamma} [\cos \gamma - \cos \gamma_z]^2 - \\ - \sin \gamma (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 + (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^3] d\gamma, \\ \psi(\gamma) = -\frac{1}{2} K_1 [(\gamma_E - \gamma)\mu_1 + (\gamma_E^2 - \gamma^2)\mu_3 + (\gamma_E^3 - \gamma^3)\mu_5],$$

gdzie po uproszczeniu

$$\mu_1 = -2 + 5 \cos \gamma_z - 4 \cos^2 \gamma_z + \cos^3 \gamma_z, \\ \mu_3 = \frac{3}{2} - \cos \gamma_z + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma_z, \\ \mu_5 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \gamma_z + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma_z.$$

Wykładnik potęgowy $\psi(\gamma)$ przedstawiony przez funkcję (4.22) jest parabolą. Natomiast wykładnik potęgowy uzyskany w pracy [3] ma postać

$$\psi(\gamma)_A = -\frac{1}{2} K_1 (\gamma_E - \gamma),$$

tzn. zmienia się liniowo w zależności od γ i tym samym wywołuje silny wzrost tłumienia w fazie wyjścia, co jest sprzeczne z fizycznym wyjaśnieniem zjawiska.

Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy dla warunków początkowych. W niniejszej pracy rozpatrzono dwa przypadki:

Przypadek A. Rakieta na początku skoku (w fazie wejścia) leci na określonym kącie natarcia α_E i bez prędkości kątowej — odpowiada to warunkom przyjętym w pracy [3].

Przypadek B. Rakieta wchodzi na określonym kącie natarcia α_E i z określoną prędkością kątową q_E .

Przypadek A. Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy dla warunków początkowych: gdy

$$\gamma = \gamma_E, \quad \text{to} \quad \alpha = \alpha_E, \quad da/dt = 0$$

z równania (4.21) po uwzględnieniu (4.22).

Oscylacje kąta natarcia wokół środka ciężkości rakiety w funkcji kąta toru γ wyrażają się zależnością

$$(4.23) \quad \alpha(\gamma) = \alpha_E e^{\psi(\gamma)} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_z - \gamma_E}} [G_1 J_0(2\sqrt{\kappa_2 \eta}) - G_2 Y_0(2\sqrt{\kappa_2 \eta})],$$

gdzie

$$\eta = \gamma_z - \gamma \quad \text{— dla fazy wejścia, tzn. } \gamma_E \geq \gamma \geq 0, \\ \eta = \gamma_z + \gamma \quad \text{— dla fazy wyjścia tzn. } 0 \geq \gamma \geq -\gamma_E, \\ \psi(\gamma) \quad \text{— przedstawione wyrażeniem (4.22),}$$

$$(4.24) \quad G_1 = [1 - (\gamma_z - \gamma_E)(K_1\mu_1 + 2\gamma_E K_1\mu_3 + 3\gamma_E^2 K_1\mu_5)] Y_0(\mu_2) - \mu_2 Y_1(\mu_2)$$

$$(4.25) \quad G_2 = [1 - (\gamma_z - \gamma_E)(K_1\mu_1 + 2\gamma_E K_1\mu_3 + 3\gamma_E^2 K_1\mu_5)] J_0(\mu_2) - \mu_2 J_1(\mu_2),$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z - \gamma_E)}.$$

Prędkość kątową przy wyjściu (na końcu skoku) obliczamy przez zróżniczkowanie wyrażenia (4.24) względem czasu i podstawieniu

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \gamma &= -\gamma_E. \\ q &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\gamma = -\gamma_E} = \left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)_{\gamma = -\gamma_E} \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\gamma = -\gamma_E} = \\ &= \alpha_E V_E \frac{SCz\varrho_0}{2m} e^{-[\gamma_E(K_1\mu_1 + \frac{2P_x}{P_z}) + \gamma_E^3 K_1\mu_3 + \beta\gamma_E]} \end{aligned}$$

Odpowiednie wyniki otrzymane w pracy [3] dla oscylacji kąta natarcia w przypadku A są następujące:

dla fazy wejścia, $\gamma_E \geq \gamma \geq 0$,

$$\alpha(\gamma)_A = \alpha_E e^{\kappa_1(\gamma_E - \gamma)} J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_E - \gamma)}]$$

dla fazy wyjścia, $0 \geq \gamma \geq -\gamma_E$,

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma)_A &= \alpha_E e^{\kappa_1(\gamma_E - \gamma)} \left\{ \left[\frac{J_0(\mu) Y_1(\mu) + J_1(\mu) Y_0(\mu)}{J_0(\mu) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_0(\mu)} \right] J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_E + \gamma)}] + \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{J_0(\mu) J_1(\mu)}{J_0(\mu) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_0(\mu)} \right] Y_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_E + \gamma)}] \right\}, \end{aligned}$$

a prędkość kątową przy wyjściu

$$q_A = -\beta V_E \alpha_E \mu \sin \gamma_E J_0(\mu) J_1(\mu) e^{-2\gamma_E} \left(\frac{P_x}{P_z} - K_1 \right).$$

Różnice w wynikach prac niniejszej i [3], przedstawionych poprzednio, są znaczne i zostaną omówione poniżej.

Przypadek B. Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy dla warunków początkowych:

$$\text{gdy } \gamma = \gamma_E, \quad \text{to } \alpha = \alpha_E, \quad \frac{d\alpha}{dt} = q_E.$$

z równania (4.21) po uwzględnieniu (4.22).

Oscylacje kąta natarcia w przypadku wejścia z określoną prędkością kątową mają postać

(4.27)

$$\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma)_{q=0} + \frac{q_E}{V_E} e^{\psi(\gamma)} \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_z - \gamma_E}} G_3 \{ Y_0(\mu_2) J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] - J_0(\mu_2) Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] \},$$

gdzie $\alpha(\gamma)_{q=0}$ oznacza oscylacje kąta natarcia przedstawione zależnością (4.23) w przypadku A;

$$G_3 = \pi(\gamma_z - \gamma_E) \frac{2m}{SCz\varrho_0} e^{\beta\gamma_E}.$$

Prędkość kątową przy wyjściu ma postać:

$$(4.28) \quad q = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_{\gamma = -\gamma_E} = q_{q=0} + q_E e^{-\gamma_E \left(K_1 \mu_1 + \frac{2Px}{Pz} \right) + \gamma_E^3 K_1 \mu_1}.$$

gdzie $q_{q=0}$ jest prędkością kątową przedstawioną zależnością (4.26) w przypadku A.

5. Przykład liczbowy

Obliczenia przykładowe i porównawcze wykonano dla rakiety o danych geometrycznych i aerodynamicznych przyjętych przez TOBAKA i ALLENA [3].

Rozpatrywano rakietę posiadającą kadłub stożkowy o długości $l = 15$ m, skrzydła delta o małym wydłużeniu, obciążenie jednostkowe powierzchni nośnej $Q/S = 100$ kG/m²; 200 kG/m² i 300 kG/m². Przyjęto kadłub jednolity o momencie bezwładności $I = \frac{1}{22} ml^2$, gdzie $\left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 = 22$.

Dane aerodynamiczne są następujące: doskonałość $P_z/P_x = 6$. Początkowy kąt natarcia $\alpha_E = 5^\circ$, zapas stateczności 3%;

$$\frac{C_{z\alpha}}{C_z} = 10, \quad \frac{C_{m\alpha}}{C_z} = -\frac{1}{10}, \quad \frac{C_{m_q} + C_{m\dot{\alpha}}}{C_z} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{C_{m_q} C_{z\alpha}}{C_z^2} = -6;$$

początkowy kąt toru $\gamma_E = 12,2^\circ$, zasięg ~ 7400 km, prędkość max $V_E \approx 4350$ m/sek.

Obliczenia wykonano dla wyników otrzymanych w niniejszej pracy i na wspólnych wykresach porównano z wynikami otrzymanymi w pracy [3].

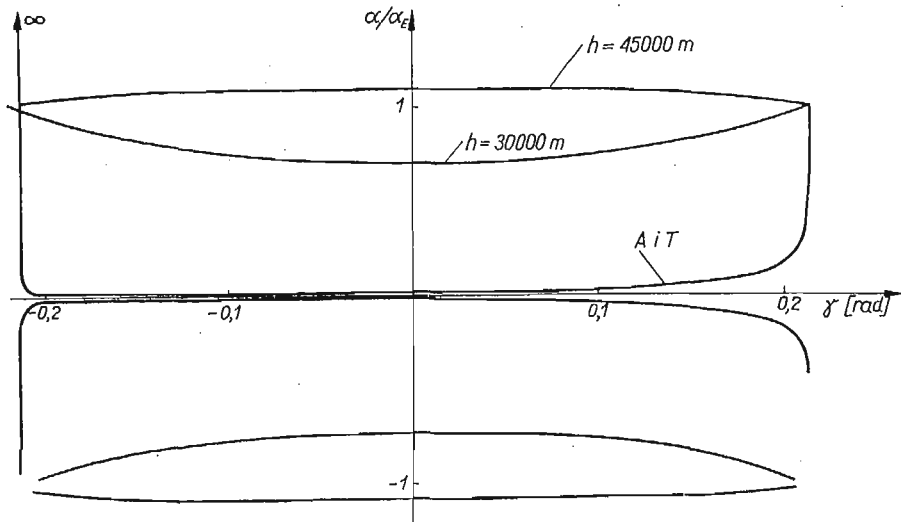
Tor lotu rakiety o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100$ kG/m² obliczono wg wzorów (3.2) dla dwóch wysokości 45 000 m oraz 30 000 m i przedstawiono na rys. 3, na którym wykreślono również tor obliczony ze wzorów Tobaka i Allena [3] oznaczając go na wykresie przez A i T .

Na podstawie wzorów (3.2) obliczono charakter skoku rakiety na wysokości 30 000 m dla trzech obciążeń powierzchni nośnej $Q/S = 100$ kG/m², dla 200 kG/m² i 300 kG/m² i przedstawiono na rys. 4. Jak wynika z obu wykresów różnice spowodowane uwzględnieniem wysokości wejścia są znaczne. Wyniki otrzymane w niniejszej pracy pozwalają na obliczenie toru podczas dowolnego skoku na dowolnej wysokości. Zmniejszenie wysokości wejścia (rys. 3) jak również zmniejszenie obciążenia jednostkowego powierzchni nośnej powodują skrócenie skoku.

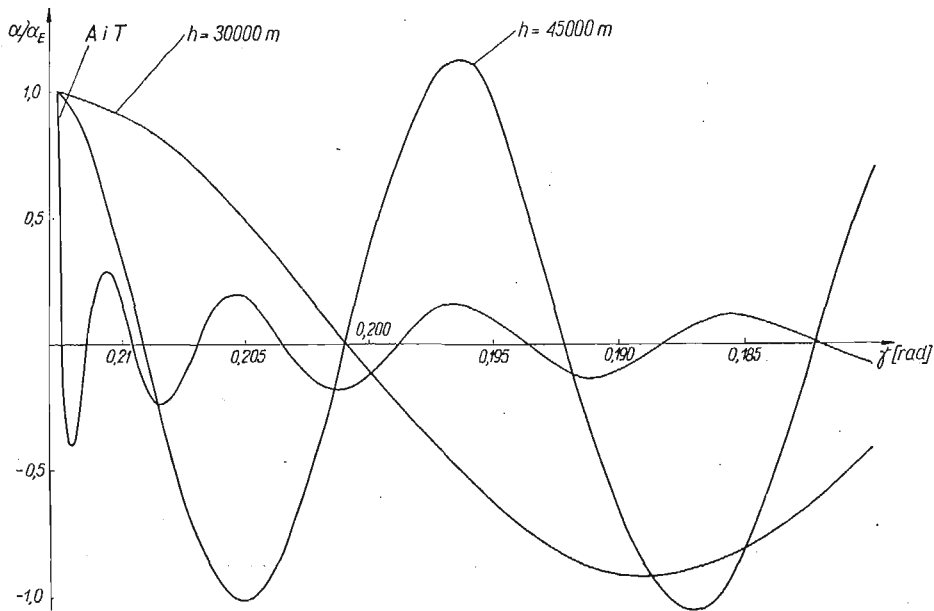
Oscylacje kąta natarcia rakiety lecącej po torze falistym, która przy wejściu nie posiada prędkości kątowej, obliczono ze wzoru (4.23) i zmianę stosunku a/a_E przedstawiono na wykresach.

Na rysunku 5 przedstawiono obwiednie maksymalnych amplitud oscylacji kąta natarcia w czasie jednego skoku dla rakiety lecącej po torze falistym o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100$ kG/m², rozpoczynającej wejście na wysokości $\gamma_E = 45 000$ m i 30 000 m i porównano je z wykresem obwiedni obliczonej ze wzorów Tobaka i Allena w [3].

Charakter oscylacji kąta natarcia dla powyższych warunków przedstawiono na rys. 6 a/a_E w funkcji kąta toru γ i na rys. 7 w funkcji długości skoku x .



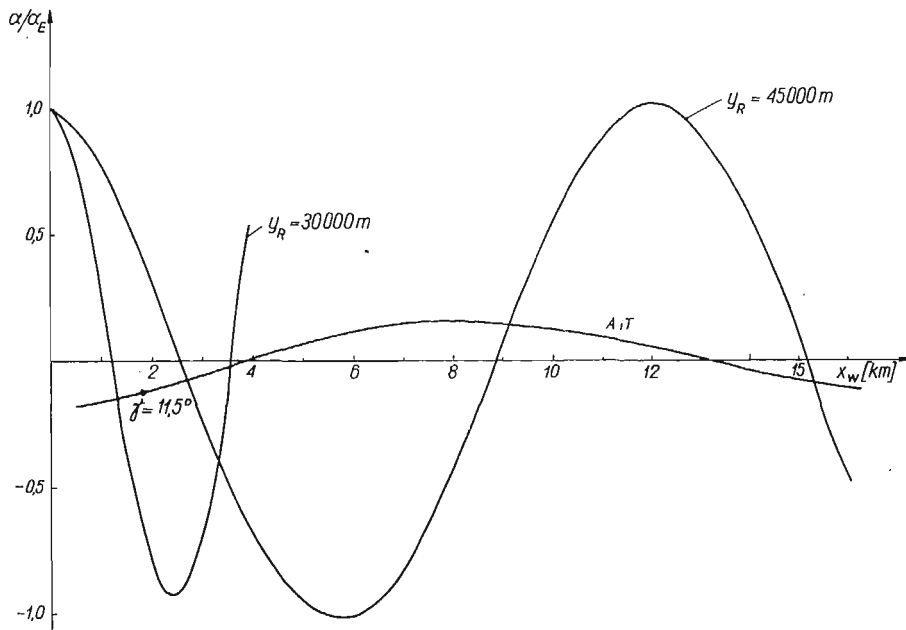
Rys. 5. Obwiednie amplitud oscylacji kąta natarcia wokół środka ciężkości rakiety w funkcji kąta toru dla wysokości początkowej 30 000 m i 45 000 m i w przypadku Tobaka i Allena



Rys. 6. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji kąta toru przy obciążeniu jednostkowym rakiety $Q/S = 100$ kG/m²

Jak widzimy z rys. 5, 6 i 7 różnice wynikające z obliczeń wg pracy niniejszej i pracy [3] nie tylko mają charakter ilościowy, ale różnią się zasadniczo jakościowo (rys. 5). Amplituda oscylacji kąta natarcia wg pracy [3] jest bardzo silnie tłumiona bez względu na wysokość zarówno w fazie wejścia, jak i przy wyjściu.

Według niniejszej pracy amplituda oscylacji kąta natarcia zależy od wysokości i przy wyjściu tłumienie maleje. Na wysokościach powyżej 45 000 m tłumienie jest mało efektywne i wartość oscylującego kąta natarcia przewyższa kąt natarcia przy wejściu. Zmniejszenie wysokości powoduje wzrost tłumienia (rys. 5) i wzrost częstotliwości oscylacji (rys. 7) (wpływa podobnie jak wzrost sztywności zawieszenia w ukła-



Rys. 7. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji przebytej odległości przy obciążeniu jednostkowym rakiety $Q/S = 100 \text{ kg/m}^2$

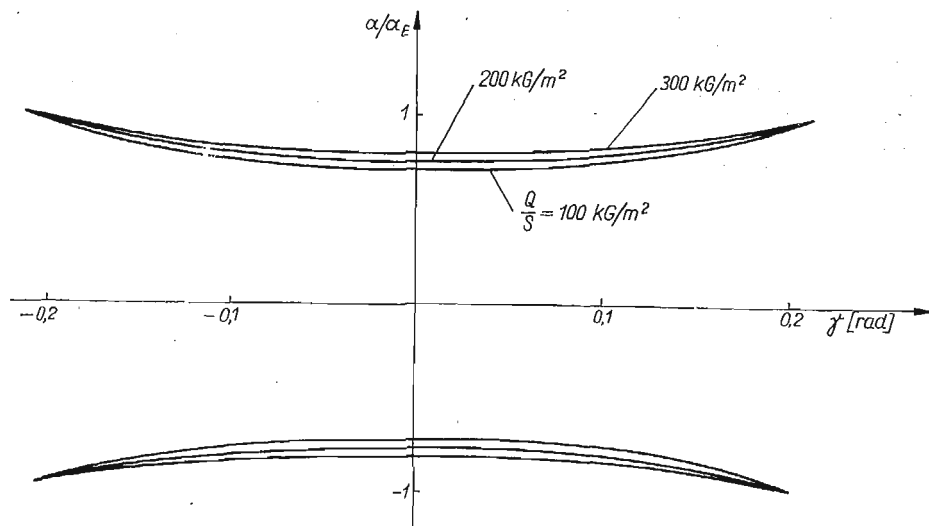
dzie mechanicznym); potwierdza to wyniki otrzymane przez Horiuchi'ego w pracy [7] i zaprzecza wynikom Tobaka i Allena [3]. Dla wysokości 30 000 m wykonano obliczenia przy trzech wartościach obciążenia jednostkowego tzn. $Q/S = 100 \text{ kg/m}^2$ i 300 kg/m^2 .

Na rysunku 8 przedstawiono obwiednie maksymalnych amplitud oscylacji kąta natarcia, na rys. 9 charakter oscylacji w funkcji kąta toru γ .

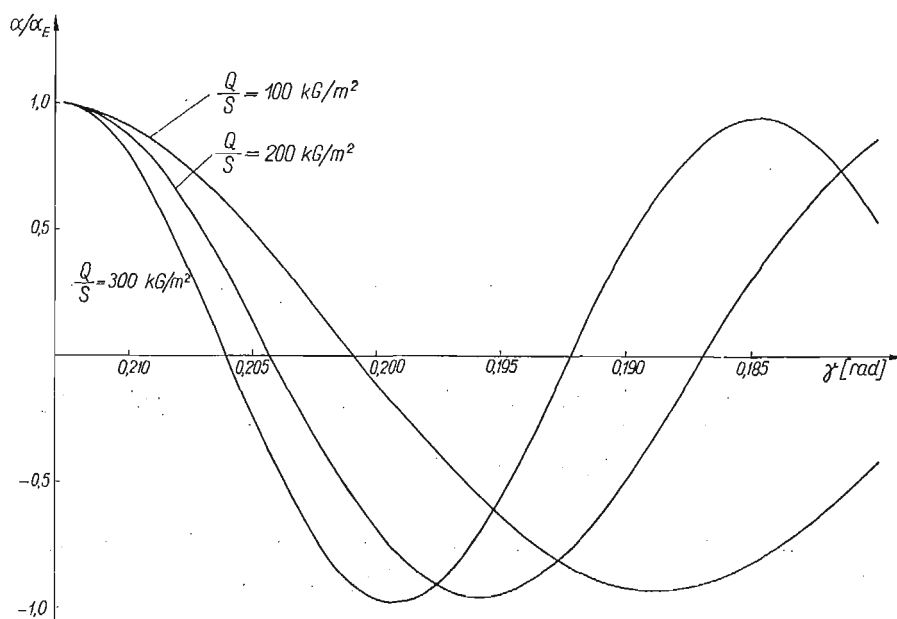
Wzrost obciążenia jednostkowego powoduje niewielkie zmniejszenie tłumienia (rys. 8) i znaczne zmniejszenie częstotliwości oscylacji (wpływa podobnie jak zwiększenie masy przy stałej sztywności zawieszenia w układzie mechanicznym).

Na podstawie wzoru (4.26) przeprowadzono obliczenia kątowej prędkości pochylania w chwili wyjścia z danego skoku, w przypadku gdy rakieta lecąca po torze falistym wchodzi bez prędkości kątowej.

Do ostatecznego obliczenia (da/dt) dla $\gamma = -\gamma_E$ przyjęto prędkości początkowe V_E , odpowiadające lotowi rakiety rykoszetuującej o danym obciążeniu jednostko-



Rys. 8. Obwiednie oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji kąta toru dla wysokości początkowej 30 000 m



Rys. 9. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji kąta toru dla wysokości początkowej 30 000 m

wym na wysokości równoważnej [2]. Początkowy kąt natarcia przyjęto dla wszystkich przypadków $\alpha_E = 5^\circ$. Tak obliczone prędkości kątowne pochylenia mają wartości podane w tablicy 1.

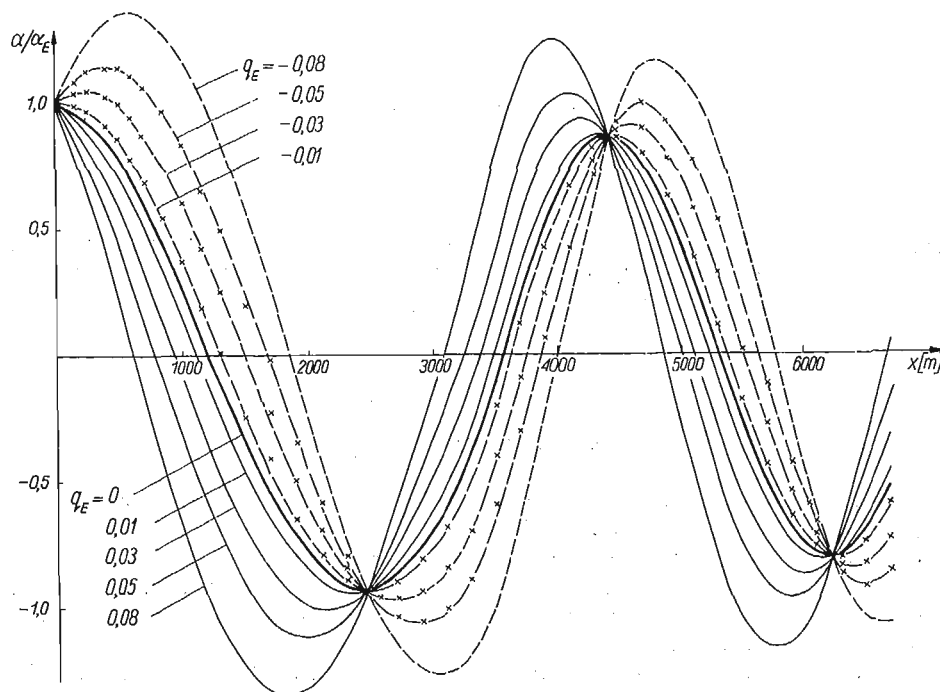
Jak wynika ze wzoru (4.26) i tablicy 1 rakieta lecąca po torze falistym wychodzą z każdego skoku koziołkuje mimo wejścia bez prędkości kątowej. Prędkość kątowa

Tablica 1

h	Q/S	V_E	$q = f(\alpha_E, V_E)$	T Czas jednego obrotu rakiety
m	kG/m ²	m/sek.	1/m	godz.
TOBAK I ALLEN	100	4350		35
		1855		14,9
45 000	100	1855	$1,01 \cdot 10^{-6}$	10,7
30 000	100	695	$9 \cdot 10^{-6}$	3,2
30 000	200	985	$4,76 \cdot 10^{-6}$	4,25
30 000	300	1300	$3,09 \cdot 10^{-6}$	4,97

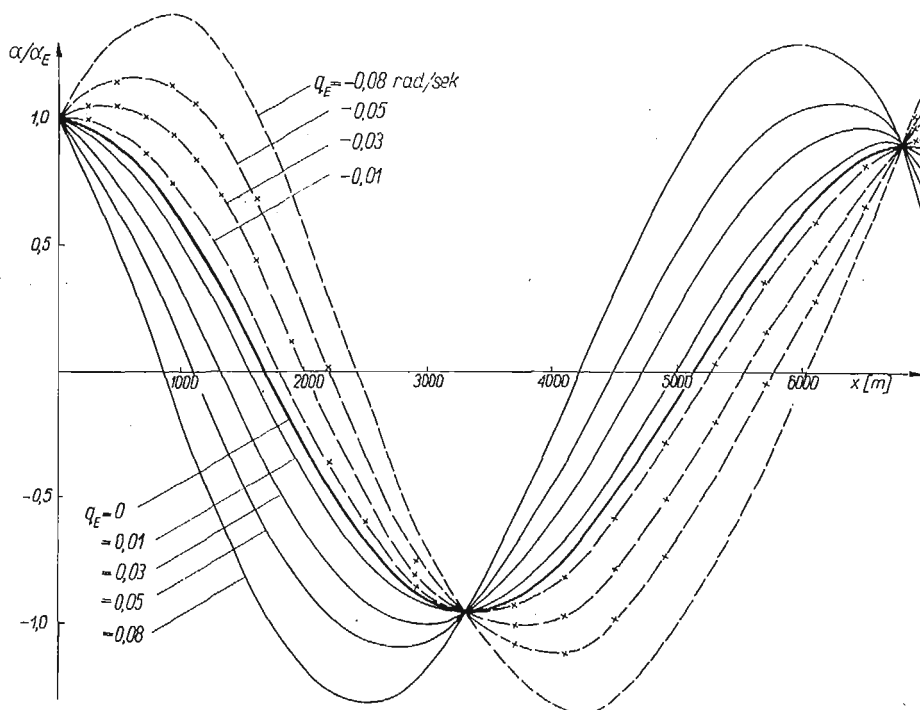
wzrasta w miarę zbliżania się do ziemi, jak również wraz ze zmniejszeniem się obciążenia jednostkowego rakiety.

Słuszne więc było rozpatrzenie przypadku B, gdy rakieta rozpoczyna skok z określoną prędkością kątową. Na podstawie wzoru (4.27) obliczono charakter oscylacji kąta natarcia rakiety rykoszetującej o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kG/m}^2$ i 200 kG/m^2 , rozpoczynającej skok na wysokości 30 000 m. Obliczenia wykonano dla początkowej prędkości kątowej zmieniającej się od $-0,08 \text{ rad/sek}$ do $+0,08 \text{ rad/sek}$ i przedstawiono na rys. 10 i 11.



Rys. 10. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji przebytej odległości dla rakiety rozpoczynającej skok z prędkością kątową na wysokości 30 000 m przy obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kG/m}^2$; $\alpha_E = 5^\circ$ i $V_E = 695 \text{ m/sek}$

Na rysunkach 10 i 11 widzimy, że prędkości kątowe w zakresie do $\pm 0,01$ rad/sek wpływają bardzo mało na charakter oscylacji i praktycznie biorąc wpływ ten można pominąć. Większe prędkości kątowe, tzn. $q_E > |\pm 0,01|$ rad/sek., powodują wzrost amplitudy oscylacji kąta natarcia nie wpływając zasadniczo na częstość oscylacji i charakter tłumienia.



Rys. 11. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji przebytej odległości dla rakiety rozpoczynającej skok z prędkością kątową na wysokości 30 000 m przy obciążeniu jednostkowym $Q/S = 200 \text{ kG/m}^2$; $\alpha_E = 5^\circ$ i $V_E = 985 \text{ m/sek}$

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. R. FRIEDRICH, F. J. DORE, *The dynamic motion of a missile descending through the atmosphere*, Jour. Aero. Sci., vol. 22, Nr 9, 1955 r.
- [2] Г. Я. АЛЛЕН, *Гиперзвуковые полеты и проблемы возвращения*, Проблемы движения главной части ракеты дального действия, Москва 1959. Przedruk z Jour. Aero. Sci., 4, 1958.
- [3] М. ТОВАК, H. J. ALLEN, *Dynamic stability of vehicles traversing ascending or descending paths through the atmosphere*.
- [4] H. J. ALLEN, A. J. EGGERS, *A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the Earth's atmosphere at high supersonic speeds*, NACA Rept. 1381, 1958.
- [5] M. M. МОЕ, *An approximation to the reentry trajectory*, ARS Journal, Nr 1, 1960.
- [6] A. J. EGGERS, T. J. WONG, *Motion and heating of lifting vehicles during atmosphere entry*, ARS J. Nr 10, 1961.

[7] F. Y. HORIUCHI, *A parametric study of the dynamic motion of a spinning and nonspinning re-entry vehicle with non linear aerodynamic characteristics*, Balist. Missile and Aerospace Technol., vol. 4, Reentry. New York-London, Acad. Press 1961.

[8] R. BLUM, *Re-entry trajectories: flat earth approximation*, ARS J. Nr 4, 1962.

[9] B. J. DAYMAN, J. M. BRAYSHAW, D. A. NELSON, T. L. BABINEAUX, *The influence of shape aerodynamic damping of oscillatory motion during planet atmosphere entry and measurement of pitch damping at large oscillation amplitudes* (Inter planetary Miss Conf., 9th Annual Amer. Astronaut. Soc. Meet., Los Angeles, Calif. Jan 15th-17th 1963). Pasadena, Calif., Jet Propuls. lab. California Inst. Technol. 1963.

[10] J. STALONY-DOBZAŃSKI, *Effect of re-entry technique on the design of a space vehicle*, J. Techn. Session Prepr. Amer. Astronaut. Soc. Nr 59.

[11] N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa, 1957.

[12] E. КАМКЕ, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1961.

[13] W. POGORZELSKI, *Równania calkowe i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1953.

Резюме

ОСЦИЛЛЯЦИИ РАКЕТЫ ДВИЖУЩЕЙСЯ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ ПО ВОЛНООБРАЗНОЙ ТРАЕКТОРИИ

В работе проведен анализ движения и осцилляций угла атаки ракеты движущейся в атмосфере Земли по волнообразной траектории. При рассмотрении осцилляции угла атаки ракеты по отношению к центру тяжести получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Первое приближение получено в виде линейной комбинации функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; следующие приближения получены путем замены дифференциального уравнения интегральным уравнением Вольтерры второго рода.

Для заданной ракеты произведены расчеты, а результаты сравнены с результатами ТОВАКА и АЛЛЕНА в работе [3]. На этой основе отмечены значительные, не только количественные, но и качественные, физические обоснованные различия. Полученные результаты справедливы для ракеты движущейся по волнообразной траектории на произвольной высоте.

Summary

OSCILLATORY MOTION OF A SKIP ROCKET IN THE EARTH'S ATMOSPHERE

In the present paper the analysis of the motion and the oscillations of the incidence angle of a skip rocket moving in the earth's atmosphere is examined. An ordinary differential equation of the second order with variable coefficients has been obtained by considering the oscillations of the incidence angle of the rocket with respect to the centre of gravity. The first approximation is given in the form of a linear combination of the Bessel functions of the first and second kind and zero order, the second approximation is obtained replacing the differential equation by the Volterra integral equation of the second kind.

The example calculations has been performed for a given rocket and has been compared with the results of M. ТОВАК and H. J. ALLEN [3].

The results prove considerable quantitative as well as qualitative differences having a physical justification. The obtained results hold for a skip rocket flying along a wavy path on any altitude.

BIULETYN INFORMACYJNY

POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

IX MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI STOSOWANEJ W MONACHIUM W DNIACH 30. VIII – 5. IX: 1964

Międzynarodowe kongresy mechaniki, dające przegląd najnowszych osiągnięć z dziedziny różnych gałęzi mechaniki ciał stałych, cieczy i gazów, odbywają się co cztery lata. Pierwszy obradował w r. 1924 w Delft, ostatnie dwa w Brukseli (1956) i Stresie (1960).

Tegoroczny kongres, jedenasty z rzędu, odbył się w Monachium (NRF) i trwał tydzień. Był on skromniejszy od obu poprzednich zarówno jeżeli chodzi o liczbę uczestników, jak i liczbę wygłoszonych referatów i czas trwania. W myśl sugestii Międzynarodowego Komitetu Kongresów Mechaniki, mających na celu zabezpieczenie odpowiedniej ilości czasu na poszczególne referaty i dyskusję, organizatorzy ograniczyli mianowicie liczbę referatów sekcyjnych do 145 i 9 wykładów ogólnych (wobec ponad 500 w Brukseli i ponad 200 w Stresie). Czas przewidziany na wygłoszenie referatu, dyskusję i przerwę wyniósł przy tym 45 minut, a na wygłoszenie wykładu ogólnego 1 godzinę (bez dyskusji). Również czas trwania całego kongresu został skrócony (w Brukseli wynosił on 9 dni), co w efekcie spowodowało niezamierzone może zmniejszenie liczby uczestników. Podczas gdy liczba biorących udział w dwóch poprzednich kongresach przekraczała 1000, to na kongres w Monachium zgłoszono 830 uczestników, z tego nie przybyło 82. Ponieważ w kongresie wzięło udział bez uprzedniego zgłoszenia 159 osób (głównie z NRF), przeto ostateczna liczba uczestników wyniosła 907. Poza gospodarzami (309 osób) największa liczba uczestników reprezentowała Wielką Brytanię (142), USA (130), Francję (70), Holandię (47) i ZSRR (28). Polska była reprezentowana przez delegację 8-osobową (dla porównania: w Brukseli — 16, w Stresie — 15), mianowicie 6 osób delegowanych przez Polską Akademię Nauk (profesorowie: W. OLSZAK, przewodniczący delegacji, J. MOSAKOWSKI i H. ZORSKI, docenci: P. PERZYNA, A. SAWCZUK i A. SZANIAWSKI) oraz 2 osoby delegowane przez Ministerstwo Szkolnictwa Wyższego (prof. M. ŻYCKOWSKI i dr S. ŁUKASIEWICZ). Ogółem delegacje reprezentowały 34 państwa ze wszystkich pięciu części świata (najmniej Afrykę — jeden delegat, oraz Australię — trzech).

Obrady odbywały się w salach Deutsches Museum na wyspie na rzece Isar równoległe w pięciu sekcjach, przy czym na zmianę 2 sekcje reprezentowały mechanikę ciał stałych, a 3 — mechanikę cieczy i gazów, lub 3 mechanikę ciał stałych a 2 — cieczy i gazów. Największa sala mieściła ponad 2000 osób i oczywiście nie była pełna nawet na obradach plenarnych, natomiast mniejsze sale — 100 do 200 osób i w tych było czasem trudno o miejsce siedzące.

Spośród przyjętych referatów najwięcej wygłosili przedstawiciele Stanów Zjednoczonych (39 + 2 ogólne), ZSRR (25 + 2), W. Brytanii (14 + 1), Francji (14 + 1), NRF (13 + 1), Japonii (7) i Czechosłowacji (5). Polskę reprezentowały 3 referaty (W. OLSZAK i P. PERZYNA, A. SAWCZUK, S. ŁUKASIEWICZ). Taką samą liczbę referatów wygłosili przedstawiciele Holandii i Rumunii, natomiast pozostałe państwa posiadały już mniej przyjętych referatów (1 lub 2). Ogółem referaty wygłosili przedstawiciele 24 państw. Należy tu podkreślić, że liczba zgłoszonych na kongres referatów była około cztery razy większa od liczby referatów przyjętych do wygłoszenia.

Zreferowane prace reprezentowały tak różne dziedziny mechaniki teoretycznej lub stosowanej, że na poszczególne kierunki przypadła bardzo niewielka liczba referatów. Ogólnie biorąc, można by poszczególne referaty zaklasyfikować następująco:

Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych	15
Ogólna teoria przepływów	15
Teoria płyt i powłok	15
Teoria sprężystości	11
Teoria drgań	11
Stateczność hydrodynamiczna	11
Przepływy ponadźwiękowe	10
Teoria warstwy przyściennej	10
Teoria plastyczności	8
Reologia	8
Magnetohydrodynamika i teoria plazmy	8
Fale uderzeniowe	6
Teoria mechanizmów i dynamika ciała sztywnego	5
Problemy kawitacji	5
Przepływy z wymianą ciepła	4
Inne	3
razem	145

Oczywiście, klasyfikacja ta jest jedynie orientacyjna, gdyż tematyka wielu referatów leżała na pograniczu kilku dziedzin. Tak więc można powiedzieć, że liczba referatów w poszczególnych gałęzi mechaniki była bardzo mała. W związku z tym dorobek ostatnich lat nie zawsze mógł być należycie naświetlony poprzez referaty, a korzyści, jakie odnieśli uczestnicy, wypływały często głównie z kontaktów osobistych i bezpośredniej dyskusji.

Kongres rozpoczął się nieoficjalnie w niedzielę wieczorem, 30. VIII.1964., spotkaniem towarzyskim w salach Regina-Palast-Hotel. Oficjalne otwarcie nastąpiło w poniedziałek o godz. 9.30 w wielkiej sali Deutsches Museum. Po odegraniu przez Monachijską Orkiestrę Kameralną «Allegro» z symfonii Es-dur J. Ch. BACHA zabrał głos w imieniu Niemieckiego Komitetu Organizacyjnego prof. H. GÖRTLER, zastępca przewodniczącego, który po powitaniu gości zawiadomił zebranych o niedawnej śmierci przewodniczącego Komitetu, prof. R. GRAMMELA. Na ekranie ukazała się podobizna zmarłego, a jego pamięć uczcili zebrani minutą ciszy. Imieniem Międzynarodowego Komitetu Organizacyjnego Kongresów Mechaniki powitał zebranych prof. G. TEMPLE (Oxford), następnie krótkie przemówienia powitalne wygłosili przedstawiciele rządu federalnego i rządu Bawarii. Część oficjalna otwarcia kongresu została zakończona odegraniem «Allegro con spirito» z symfonii A-dur W. A. MOZARTA.

W poniedziałek przed południem został wygłoszony jeden wykład ogólny (prof. L. SREDOW, Moskwa), a w godzinach 14–17.45 po pięć referatów w pięciu sekcjach. W ciągu następnych czterech dni obrady odbywały się w godzinach 9–17.45 według następującego schematu: 9–9.45 obrady sekcyjne (zawsze w pięciu równoległych sekcjach), 10–12 obrady plenarne (codziennie po dwa referaty przeglądowe), 12–14 przerwa, 14–17.45 obrady sekcyjne (po pięć referatów). W piątek, 4.IX., o godz. 18 nastąpiło oficjalne zamknięcie obrad kongresu przez prof. W. T. KORTERA (Delft), sekretarza Międzynarodowego Komitetu Organizacyjnego, a o 19.30 w sali «Löwenbräukeller» odbył się specjalnie dla uczestników kongresu «wieczorek bawarski», na którym wystąpiło ze śpiewami i tańcami kilka zespołów ludowych, a który ponadto był okazją do wygłoszenia toastów i podziękowania gospodarzom. W sobotę organizatorzy urządzili wycieczkę w okolice Alp Bawarskich.

Przejdziemy do krótkiego omówienia poszczególnych referatów. Najpierw zajmiemy się wykładami przeglądowymi w kolejności ich wygłaszania, a następnie referatami sekcyjnymi, uporządkowanymi tematycznie.

L. I. SREDOW (Moskwa) w wykładzie «Pewne problemy tworzenia nowych modeli ośrodków ciągłych» zajął się typami idealizacji własności, stanów i procesów zachodzących w ośrodkach ciągłych. Omówił on hipotezy symetrii i wynikające stąd konsekwencje w przypadku materiałów fizycznie nieliniowych. Podano również przykłady nowych modeli mechanicznych. Wykład ten, wygłoszony po rosyjsku, był na bieżąco tłumaczony na język angielski przez H. Zorskiego.

E. REISSNER (Cambridge, Mass.) wygłosił referat przeglądowy «O podstawach teorii sprężystych odkształceń powłok». Omówiono w nim bardzo aktualny ostatnio problem wyprowadzania równań teorii powłok z ogólnych równań trójwymiarowej teorii sprężystości. Równania oparte na hipotezie Love'a-Kirchhoffa (nazwanej przez autora hipotezą Eulera-Bernoulliego) stanowią wtedy pierwsze przybliżenie związków ściślejszych.

R. LEGENDRE (Chatillon-sous-Bagneux) w wykładzie «Przepływy niestabilne wokół ciał drgających» naszkicował metody rozwiązywania zadań pozwalających dokładniej określić siły działające na drgające ciało. Ciało drga dostatecznie słabo, aby przepływ pozostawał w przybliżeniu potencjalnym. Podane zostały przykłady analizy oddziaływania między skrzydłami samolotu a kadłubem oraz między łopatkami maszyn wirnikowych.

Wykład I. N. WEKUA (Nowosybirsk) «Nowe metody w matematycznej teorii powłok» dotyczył zastosowania w teorii powłok zmiennej zespolonej. Szczególną uwagę zwrócono na stan błonowy powłok wypukłych.

L. J. F. BROER (Eindhoven) w wykładzie «Nowe osiągnięcia w teorii rozchodzenia się fal» sformułował podstawy ogólnej teorii rozchodzenia się fal jednowymiarowych i niestabilnych oraz przeanalizował wpływ niektórych czynników, takich jak dyspersja lub efekty nieliniowe.

G. F. CARRIER (Cambridge, Mass.) w pracy «Zjawiska w obracających się płynach» rozpatrywał kilka modeli obracających się zbiorników z przepływającym wewnątrz płynem. Podał on również interpretację dla pewnych zjawisk atmosferycznych związanych z ruchem atmosfery i prądami morskimi.

K. MAGNUS (Stuttgart) w wykładzie «Ruchy obrotowe ciał sztywnych w centralnym polu sił ciężkości» zwrócił uwagę na dwa zasadnicze zastosowania przedstawianej teorii: w teorii aparatury nawigacyjnej, opartej na działaniu wahadła lub żyroskopu, oraz przy analizie ruchów obrotowych sztucznych satelitów. Omówiono problem śtateczności ruchu w badanym przypadku.

H. ZIEGLER (Zürich) przedstawił pracę «Termodynamika odkształceń». Zwrócono w niej uwagę na konieczność opierania praw fizycznych ośrodków ciągłych na podstawowych zasadach termodynamiki. Omówiono również zastosowanie teorii Onsagera przy tworzeniu praw liniowych oraz — po dokonaniu stosownych uogólnień — do ośrodków fizykalnie nieliniowych.

T. B. BENJAMIN (Cambridge) w wykładzie przeglądowym «Przepływ z giętkimi brzegami» przedstawił zagadnienia związane ze stabilizującym działaniem odkształcalnych brzegów.

Na omówione powyżej 9 wykładów ogólnych poświęcono 9 pełnych godzin nie przewidując czasu na dyskusję. Obecnie omówimy referaty sekcyjne, które trwały po pół godziny, przy czym na dyskusję nad każdym referatem przeznaczono 10 minut. Trzeba podkreślić, że wyznaczone czasy były zazwyczaj bardzo skrupulatnie przestrzegane przez referentów.

SEKCJA 1. MECHANIKA CIAŁ STAŁYCH

Stosunkowo znaczną liczbę prac poświęcono podstawom mechaniki różnych ośrodków nieklasycznych. Ośrodkami typu Cosserata (wykazującymi «naprężenia momentowe» w wyniku momentów rozłożonych w sposób ciągły) zajmowały się prace E. KRÖNERA (Clausthal-Zellerfeld) «Problem fizykalny naprężeń antysymetrycznych i tak zwanych naprężeń momentowych», R. A. TOUPINA (Yorktown Heights, N. Y.) «Naprężenia momentowe w teorii sprężystości» i H. NEUBERA (Monachium) «O rozwiązaniu ogólnym problemów liniowo-sprężystych w izotropowych i anizotropowych ośrodkach Cosserata». Prace te posiadały charakter czysto teoretyczny, z tym że E. KRÖNER zajmował się głównie podstawami fizykalnymi, R. A. TOUPIN — teorią ogólną, natomiast H. NEUBER — metodami rozwiązań. A. C. ERINGEN (Lafayette, Ind.) w referacie «Mechanika materiałów mikro-morficznych» zajął się ośrodkami, których zachowanie się jako kontinuu zależy od mikrostruktury materiału (cieczki anizotropowe, zawiesiny, ośrodki syplkie i porowate). Podana teoria ogólna obejmuje wiele znanych teorii jako przypadki szczególne. E. H. BROWN (Londyn) przedstawił pracę «Teoria mechanicznego zachowania się piasku»; teoria ta oparta jest na adaptacji do piasku podanej przez Druckera definicji materiałów śtatecznych. Uzyskane prawo fizyczne jest prawem przyrosto-

wym w odniesieniu do dewiatorów, a skończonym dla tensorów kulistych. W. PRAGER (Zurych) w pracy «Ośrodki sprężysto-idealnie utwardzalne» podał kilka dalszych przykładów zastosowań zaproponowanej przed paroma laty teorii takich ośrodków.

Problemami szczelin i pęknięć zajmowali się H. FESSLER i R. W. WILSON (Nottingham) w referacie «Odkształcenia w pobliżu szczelin w płytach aluminiowych» oraz C. MYLONAS (Providence, R.I.) w pracy «Mechanika kruchego pęknięcia». Pierwsza z tych prac miała charakter doświadczalny, częściowo w oparciu o elastooptykę, natomiast druga — doświadczalnie teoretyczny; stwierdzono, iż w pewnych warunkach pęknięcie może się pojawić już przy naprężeniach rzędu 10% granicy plastyczności.

Do prac o charakterze podstawowym można również zaliczyć referaty C. TRUESDELLA (Baltimore, Md.), P. G. HODGE'A (Chicago, Ill.), B. A. BOLEY'A (Nowy Jork), TH. LEHMANN (Hannover), W. S. HEMPA (Cranfield) i H. LEIPHOLZA (Karlsruhe). C. TRUESDELL w referacie «Niestateczności przy czystym ścinaniu idealnie sprężystego materiału izotropowego» omówił takie zjawiska jak płynięcie przy ścinaniu, związane ze zmniejszaniem się modułu ścinania w związku ze skończonymi odkształceniami sprężystymi. P. G. HODGE przedstawił pracę (referowaną przez W. PRAGERA) «Określanie obciążeń granicznych metodami nieliniowego programowania»; w oparciu o ogólne twierdzenia o nośności granicznej sformułowano podstawy teorii i zastosowano ją do belek prostych i o krzywiznie pierwotnej. A. BOLEY w pracy «Błędy przy przybliżonym określaniu temperatury i naprężeń termicznych» podał pewne metody znajdowania kresów górnych i dolnych, a więc i oceny błędów w ogólnych przypadkach trójwymiarowych. TH. LEHMANN wygłosił referat «Odkształcenia klasycznego kontinuum w ujęciu czterowymiarowym»; zaproponowano traktować czas nie jako parametr, lecz jako czwartą zmienną. W. S. HEMP przedstawił pracę «Studia nad teorią układów Michella», w której na prostym modelu kratownicy Michella zobrazował problemy optymalnego kształtowania, linii poślizgu, nośności granicznej itd. Wreszcie H. LEIPHOLZ w referacie «Podstawy teorii stateczności ośrodków sprężystych przy obciążeniu niekonserwatywnym» zajął się — przy zastosowaniu metody Galerkin — oceną możliwości stosowania statycznego kryterium stateczności przy problemach niekonserwatywnych oraz wpływem tłumienia wewnętrznego przy kryterium kinetycznym. Wreszcie H. LE BOITEUX (Paryż) przedstawił pracę «Funkcje przeniesienia w teorii odkształceń», w której zajął się przystosowaniem znanego z elektrotechniki pojęcia funkcji przeniesienia do zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych, w szczególności lepko-sprężystych.

W dziale teorii sprężystości dwie prace poświęcone były naprężeniom cieplnym. J. N. GOODIER i A. L. FLORENCE (Stanford) przedstawili pracę «Lokalne naprężenia cieplne w pobliżu otworów i wtrąceń zaburzających jednorodny przepływ ciepła; rozprzestrzenianie się szczelin cieplnych». Omówiono znane dotychczas rozwiązania i podano kilka nowych; stwierdzono, że w przypadkach obciążeń cieplnych rozprzestrzenianie się szczeliny typu Griffitha nie jest możliwe. M. DARRIEUS (Paryż) w pracy «Odkształcenia cieplne wałów» przedstawił metodę obliczania takich odkształceń w zastosowaniu do maszyn wirnikowych.

Trzy prace poświęcono prętom i ustrojom prętowym. J. H. ARGYRIS (Stuttgart) wygłosił referat «Zastosowanie metody macierzowej do obliczania trójwymiarowych problemów sprężystych ośrodków niejednorodnych i anizotropowych w przypadku przemieszczeń małych lub skończonych». Ciało zastąpiono przez skończony układ czworościanów, a ich sztywność porównano ze sztywnością zastępczej ramy sześcioprętowej. E. WEINEL i W. WALLISCH (Jena) przedstawili pracę «Przyczynek do teorii odkształceń sprężystych prętów przyrządkowych i nieprzyrządkowych», w oparciu o analizę trójwymiarową wyprowadzono wzory na sztywności ścinania prętów w kierunkach głównych. L. G. JAEGER i J. O. MC CUTCHEON (Montreal) w pracy «Analiza odkształceń sprężystych krzywoliniowych rusztów mostowych» zastosowali metodę szeregów Fouriera; badania teoretyczne zostały potwierdzone doświadczalnie.

Z pozostałych prac należy przede wszystkim wymienić pracę N. CH. ARUTUNIANA i B. L. ABRA-MIANA «W sprawie wciskania sztywnego stempla w sprężystą kulę». Przedstawiono rozwiązanie ścisłe przez rozwinięcie w szereg wielomianów Legendre'a; pozostaje do rozwiązania nieskończony układ liniowych równań algebraicznych, który został szczegółowo przedyskutowany. D. RÜDIGER (Freiberg, NRD) w referacie «Zastosowanie metody Trefftza w teorii sprężystości» wykazał, że uzyskane metodą Trefftza szeregi są zbieżne do rozwiązania ścisłego. E. MAZER i G. COUPRY

(Chatillon-sous-Bagneux) przedstawili pracę «Pewna koncepcja niejednorodności ciał stałych pracujących poza granicami sprężystości». Wreszcie V. T. BUCHWALD (Sydney) wygłosił referat «Funkcje własne dyslokacyjnego rozwiązania problemu płaskiego pierścienia»; zastosowano metodę przedłużeń analitycznych i za pomocą całek Fouriera zredukowano problem do równania różniczkowo-różnicowego.

Prace z zakresu teorii plastyczności były, mimo niewielkiej ich liczby, bardzo różnorodne. G. I. BARENBLATT i W. A. GORODCOW (Moskwa) w referacie «O lokalnej strukturze płynięcia plastycznego» ujęli problem mikrostruktury materiału w sposób probabilistyczny i zwrócili uwagę na korelację mikronaprężeń. Hipoteza lokalnej izotropii pola naprężeń odpowiada tu znanej hipotezie Kołmogorowa w teorii ruchu burzliwego. N. ALBERTI (Palermo) wygłosił referat na ciągle aktualny temat «Analiza rozkładu naprężeń w szyjce rozciąganej próbki walcowej». Analizę oparto o warunek plastyczności Stassi'ego, (stanowiący szczególnie przypadek warunku Burzyńskiego); zwrócono uwagę na wpływ temperatury. J. MANDEL (Paryż) przedstawił pracę «Przyczynę teoretyczną do problemu przeróbki plastycznej i praw płynięcia plastycznego». Zbadano wpływ naprężeń własnych na położenie granicy między strefą sprężystą a plastyczną; przedstawiono również bilans energetyczny w przypadku naprężeń własnych. S. W. SERENSEN i R. M. SZNEJDEROWICZ (Moskwa) nadesłali pracę «Wpływ czasu na rozkład naprężeń w przypadku obciążeń cyklicznych»; wobec nieobecności autorów pracę zreferował M. ŻYCZKOWSKI. Zaproponowano pewną teorię odkształceń plastycznych przy obciążeniach cyklicznych, zbliżoną do teorii ośrodków lepkosprężystych. P. S. THEOCARIS (Ateny) zreferował pracę «Określanie rozkładu naprężeń w problemach płaskiego stanu naprężenia w teorii plastyczności». W tej teoretyczno-doświadczalnej pracy badano rozkład naprężeń w pobliżu karbów, zarówno w oparciu o teorię Prandtla-Reussa i warunek plastyczności Hubera-Misesa, jak i doświadczalnie, metodą pokryć i analogii elektrycznych.

Trzy prace poświęcone były odkształceniom plastycznym płyt i powłok. A. SAWCZUK (Warszawa) przedstawił pracę «Teoria skończonych ugięć płyt plastycznych». W oparciu o rozważania energetyczne wyprowadzono związki między obciążeniem i przemieszczeniem oraz zbadano wpływ sił podłużnych na nośność płyty. Rozwiązania o postaci zamkniętej dotyczyły płyt kołowych i prostokątnych. Skończonym ugięciom była również poświęcona praca Y. OHASHI i S. MURAKAMI (Nagoya) «Sprężysto-plastyczne zginanie cienkiej płyty kołowej, utwierdzonej na obwodzie». Autorzy zaproponowali metodę obliczania skończonych ugięć w przypadkach kołowo-symetrycznych, rozwiązali problem płyty kołowej przy uwzględnieniu sił podłużnych i przeprowadzili weryfikację doświadczalną. Wreszcie pracę nieobecnych P. A. KUZINA i G. S. SZAPIRO (Moskwa) «O dynamicznym zachowaniu się konstrukcji plastycznych» zreferował A. SAWCZUK. W pracy zwrócono szczególną uwagę na problem półnieskończonej powłoki walcowej kolistej pod działaniem udarowego obciążenia wzdłuż pierścienia; współrzędna występującej nieciągłości musi być określana w trakcie procesu rozwiązywania.

Podstaw reologii dotyczyły cztery referaty. W. OLSZAK i P. PERZYNA (Warszawa) w pracy «Równania stanu teorii płynięcia przy nieustalonym warunku plastyczności» przedyskutowali podstawowe równania teorii płynięcia plastycznego w przypadku powierzchni plastyczności zależnej od czasu, co może być wynikiem np. promieniowania cząstek elementarnych. Poddano analizie również równania sprężysto/lepkoplastyczności z uwzględnieniem wpływu temperatury, zależnej od czasu. B. R. SETHI (Kharagpur) przedstawił pracę «Pewna koncepcja uogólnionego odkształcenia dla problemów sprężysto-plastycznych, pełzania i relaksacji»; zaproponowana miara jest uogólnieniem obecnie znanych i ma przyczynić się do uproszczenia równań stanu. W. S. NAMIESTNIKOW (Nowosybirsk) wygłosił referat «Pełzanie metali przy złożonym stanie naprężenia». W pracy przedstawiono wyniki doświadczeń nad jednoczesnym skręcaniem i rozciąganiem próbek o kształcie rur cienkościennych i wnioski odnośnie ogólnych, fenomenologicznych teorii pełzania. R. S. RIVLIN (Providence, R.I.) nadesłał pracę «Mechanika nieliniowych ciał sprężysto-lepkich», w której uwzględniono zależność naprężeń nie tylko od szybkości odkształcenia, lecz od całej historii obciążania. Omówiono ważniejsze przypadki szczególne.

Zastosowaniom podstawowych równań reologii poświęcono również cztery referaty. E. H. LEE (Stanford) w referacie «Najnowsze osiągnięcia w zakresie analizy naprężeń w ciałach liniowo lepkosprężystych» przedstawił

sprężystych» poddał krytyce najprostsze modele typu Maxwella i Voigta-Kelvina i ich kombinacje. Najnowsze prace w Stanach Zjednoczonych dotyczą metod rozwiązywania przy najogólniejszych liniowych prawach reologicznych i zmiennej temperaturze. J. BRILLA (Bratislava) nadesłał pracę «Zginanie płyt wykonanych z materiału anizotropowego, liniowo lepko-sprężystego»; została ona przedstawiona przez I. BALLO. Zastosowano transformację Laplace'a i uogólniono wyniki prac Lechnickiego dla anizotropowych płyt sprężystych. Ju. N. RABOTNOW (Nowosybirsk) nadesłał pracę «Pelzanie powłok»; dotyczyła ona głównie powłok walcowych kolistych. Problem zredukowano do całkowania układu dwu symetrycznych równań różniczkowych, a następnie całkowanie to przeprowadzono numerycznie. Wreszcie N. CRISTESCU (Bukareszt) wygłosił referat «Pewne problemy dynamiczne jednowymiarowych ciał sprężysto/lepko-plastycznych»; dotyczył on rozprzestrzeniania się zaburzeń w strunach i cienkich prętach.

Stosunkowo największą liczbę prac poświęcono teorii płyt i powłok. Oprócz omówionych już kilku prac w dziale teorii plastyczności i reologii należy tu wymienić kilkanaście innych, poświęconych odkształceniom sprężystym i stateczności.

Podstaw teorii płyt i powłok dotyczyły cztery prace: A. L. GOLDENWEJZERA (Moskwa), P. M. NAGHDİ'EGO (Berkeley), W. FLÜGGEGO (Stanford) i S. ŁUKASIEWICZA (Warszawa). A. L. GOLDENWEJZER w referacie «Zasady redukcji trójwymiarowych problemów teorii sprężystości do dwuwymiarowych problemów teorii płyt i powłok» zajął się tematyką zbliżoną do omówionej w wykładzie ogólnym E. Reissnera. Omówiono metodę iteracji i metodę rozwinięć na szeregi potęgowe oraz zwrócono uwagę na pewne wewnętrzne sprzeczności tej ostatniej. P. M. NAGHDİ wygłosił referat «O równaniach różniczkowych liniowej teorii powłok sprężystych»; dotyczył on również redukcji problemów trójwymiarowych do dwuwymiarowych i zastosowania zmiennej zespolonej. W. FLÜGGE i S. ŁUKASIEWICZ wygłosili referaty pod takim samym tytułem «Działanie sił skupionych na powłoki». W. FLÜGGE zajął się działaniem sił skupionych i skupionych źródeł ciepła zarówno w punktach regularnych, jak i osobliwych powłoki. S. ŁUKASIEWICZ przedstawił rozwiązanie w postaci sumy rozwiązania osobliwego, słusznego w otoczeniu siły skupionej, i rozwiązania regularnego; podano również przykłady weryfikacji doświadczalnej.

Odrębny charakter posiadała praca M. A. SAVE i R. T. SHIELDA «Kształtowanie na minimum ciężaru powłok warstwowych pod działaniem obciążeń stałych i ruchomych». Kształtowanie podano przy założeniu ustalonej nośności granicznej; wykazano twierdzenie odnośnie superpozycji kształtów powłok, uzyskanych dla poszczególnych typów obciążeń z osobna.

Koncentracji naprężeń poświęcono trzy referaty. G. N. SAWIN (Kijów) przedstawił pracę «Koncentracja naprężeń wokół krzywoliniowych otworów w płytach i powłokach». Dotyczyła ona ogólnych metod rozwiązania w przypadku krzywoliniowych otworów regularnych (bez punktów osobliwych) przy założeniu liniowości fizycznej i geometrycznej albo nieliniowości, jednak tylko jednego z tych typów. Podano również przykłady rozwiązań w zakresie sprężysto-plastycznym. J. G. LEKKERKERKER (Delft) wygłosił referat «Koncentracja naprężeń wokół otworów kołowych w powłokach walcowych»; do rozwiązania zastosowano metodę Łuriego polegającą na rozwinięciach asymptotycznych, podano również weryfikację doświadczalną. Czysto doświadczalną była praca CH. A. LERCHENTHALA (Haifa) «Elastoptyczne badania koncentracji naprężeń wokół wzmocnionych otworów w tarczach» — stwierdzono nieco wyższe wartości naprężeń, niż wynika to z prostych rozważań teoretycznych.

Znaczną liczbę prac poświęcono problemom stateczności płyt i powłok. Szczególnie interesująco wygłoszona praca N. J. HOFFA (Stanford) «Wpływ warunków brzegowych na wyboczenie cienkościennych powłok walcowych kolistych przy ściskaniu osiowym» dowodziła, iż znane duże rozbieżności między wynikami teorii liniowej i wynikami doświadczeń dadzą się poważnie zmniejszyć przez przyjęcie nieco innych warunków brzegowych przy rozwiązywaniu problemu w ujęciu liniowym. N. J. HOFF przedstawił również pracę nieobecnego M. UEMURA (Tokio) «Pokrytyczne zachowanie się powłoki walcowej kolistej lokalnie wyboczonej wskutek ściskania osiowego»; przy przyjęciu nieperiodycznej, «tłumionej» funkcji obrazującej ugięcia powłoki w oparciu o analizę energetyczną wykazano, iż zakłębienia powłoki mają kształt zbliżony do kwadratowego. G. G. POPE (Farnborough) wygłosił referat «Wyboczenie długich, słabo zakrzywionych paneli przy ściskaniu osiowym».

Przyjęto trójparametrowe równanie powierzchni ugięcia i rozwiązano problem w ujęciu nieliniowym przy brzegach swobodnie podpartych lub utwierdzonych. J. KEMPNER i YOUL-NAN CHEN (Brooklyn) przedstawili pracę «Skończone ugięcia osiowo ściskanej powłoki walcowej owalnej». Opierając się na metodzie energetycznej stwierdzono, iż obciążenia odpowiadające danym ugięciom (a więc i krytyczne) są zawsze wyższe niż dla powłoki walcowej kolistej o tej samej powierzchni poboczniczy. M. YOSHIKI i T. KAWAI (Tokio) w pracy «W sprawie zastosowania metody energetycznej do problemów płyt sprężystych» usystematyzowali tę metodę w odniesieniu do zginania, wyboczenia i drgań płyt o złożonych kształtach przy różnych warunkach brzegowych. B. BUDIANSKY i J. W. HUTCHINSON (Cambridge, Mass.) przedstawili pracę «Wyboczenie dynamiczne ustrojów czułych na niedokładności geometryczne»; w oparciu o ogólną teorię Koitera zbadano zachowanie się wąskich paneli i zamkniętych powłok walcowych pod działaniem nagle przyłożonego obciążenia osiowego.

Działaniu obciążeń cieplnych na powłoki poświęcono trzy prace. M. GRADOWCZYK (Buenos Aires) wygłosił referat «Naprężenia cieplne w cienkich powłokach sprężystych». Zastosowano analogię pomiędzy obciążeniami ciepłymi i siłami masowymi i sformulowano teorie «ciepłego stanu błonowego» i «ciepłego stanu czysto giętnego». S. A. AMBARCUMIAN i S. M. DURGARIAN (Jerywań) przedstawili pracę «Pewne problemy drgań i stateczności sprężystych ortotropowych powłok i płyt w zmiennym polu temperatury». Założono, iż rozkład temperatury jest znany, a mechaniczne własności płyty lub powłoki zależą od temperatury; stwierdzono, iż wpływ tych zmian na własności płyty może być bardzo istotny. Wreszcie E. H. MANSFIELD (Farnborough) w referacie «Zginanie, wyboczenie i zwijanie się ogrzanej cienkiej płyty eliptycznej» podał nieliniową geometryczną analizę tego problemu przy temperaturze liniowo zmiennej wzdłuż grubości.

Pięć prac można by zaliczyć do działu mechaniki ciał sztywnych. Należą tu przede wszystkim dwie prace radzieckie, dotyczące ruchu sztucznych satelitów: W. A. SARYCZEWA (Moskwa) «Dynamika układu stabilizacji satelity przy uwzględnieniu oporu atmosferycznego» oraz D. E. OCHOCIMSKIEGO, W. A. ZLATOUSTOWA, W. A. SARYCZEWA i A. P. TORŻEWSKIEGO (Moskwa) «Periodyczne rozwiązania problemu dwuwymiarowych drgań satelity na orbicie eliptycznej». W pierwszej pracy podano równania ruchu satelity oraz warunki konieczne i wystarczające asymptotycznej stateczności drgań, natomiast w drugiej — zbadano problem liczby rozwiązań periodycznych i stateczności ruchu w zależności od mimośrodowości orbity i parametrów charakteryzujących bezwładność satelity. W. W. RUMIANCEW (Moskwa) przedstawił pracę «Nieliniowe metody w teorii stateczności ruchu ciał stałych posiadających otwory wypełnione cieczą». Podano dwie metody: jedna nawiązuje do podejścia LAPUNOWA, natomiast druga polega na minimalizacji pewnego wyrażenia; praca zawiera również przykłady zastosowań. L. MAUNDER i J. CRAWLEY (Newcastle upon Tyne) w pracy «Znoszenie drgającego żyroskopu o zawieszeniu kardanowym» zwrócili uwagę na wpływ tarcia w łożyskach zawieszenia; rozważania teoretyczne zostały potwierdzone doświadczalnie. F. FREUDENSTEIN i L. DOBRJANSKYJ (Nowy Jork) przedstawili pracę «Pewna teoria syntezy mechanizmów», w której podali pewien ogólny schemat tablicowy przystosowany do nowoczesnej techniki obliczeniowej.

Z dziedziny teorii drgań wygłoszono pięć referatów o charakterze podstawowym. R. CHALÉAT (Besançon) w referacie «Pierwsze trzy przybliżenia teorii zakłóceń i ich zastosowania» zajął się sposobami możliwe szybkiego uzyskiwania kolejnych wyrazów metody zakłóceń w przypadku wymuszonych, tłumionych drgań nieliniowych. J. G. PANOWKO (Ryga) przedstawił pracę «Przegląd zastosowań metody bezpośredniej linearyzacji»; metoda ta została podana przez autora w r. 1952 i jest w przypadku drgań nieliniowych bardziej efektywna, niż np. Kryłowa-Bogolubowa. R. M. ROSENBERG (Berkeley) wygłosił referat «O ruchach wykazujących punkt spoczynku i istnieniu drgań o postaci normalnej układów nieliniowych». Zredukowano nieliniowy, konserwatywny układ o dwóch stopniach swobody do problemu masy jednostkowej poruszającej się w płaskim polu sił. Ujęcie probabilistyczne reprezentowały dwa referaty. W. W. BOŁOTIN (Moskwa) przedstawił pracę «O przypadkowych drganiach sprężystych o szerokim pasmie»; podano pewne oszacowania całkowite przemieszczeń i naprężeń w oparciu o metodę asymptotyczną autora. H. CRANDALL (Cambridge, Mass.) wygłosił referat «Widmo drgań przypadkowych układu nieliniowego», w którym podano trzy metody

odnoszące się do układów o słabej nieliniowości: metodę perturbacji, równoważnej linearyzacji i uśredniania.

Z dalszych prac poświęconych teorii drgań należy wymienić przede wszystkim pracę R. M. DAVIESA i T. H. LAMBERTA (Londyn) «Drgania układów o dwóch stopniach swobody przy tłumieniu kulombowskim». Zastosowano metodę delta i interpretację w czterowymiarowej przestrzeni fazowej; praca podaje również weryfikację doświadczalną. W. O. KONONENKO (Moskwa) przedstawił pracę «Wymuszone drgania nieliniowych układów quasiharmonicznych». Za pomocą funkcji Mathieu ułamkowego rzędu zbadano prawie periodyczne drgania układów o periodycznych współczynnikach i przy periodycznym wymuszeniu, przy czym uwzględniono duże zmiany parametrów, aż do wartości ujemnych. O. DANÉK i L. SPACEK (Praga) w referacie «Określanie częstości i amplitud belek prostych» zbadali wpływ nieciągłej zmiany przekroju belki na częstości i amplitudy. L. FRÝBA (Praga) wygłosił referat «Dynamika belki z nałożoną warstwą sprężynującą o zmiennej sztywności pod działaniem ruchomego układu sił». Problem sprowadza się do układu trzech równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach, który rozwiązano za pomocą metody Runge-Kutta-Nyströma na maszynie Ural 2. F. WEIDENHAMMER (Karlsruhe) przedstawił pracę «Niedokładności mechanicznych i elektrycznych przyrządów pomiarowych podlegających drganiom skrętnym»; zbadano nieliniowe drgania takich przyrządów, charakteryzujące się tym, iż położenie średnie układu nie daje właściwego obrazu wielkości mierzonej.

Problemom rozchodzenia się fal i zakłóceń w ciałach stałych poświęcono trzy prace. J. MIKLOWITZ (Pasadena, Cal.) wygłosił referat «Rozpraszanie płaskiego impulsu sprężystego przez otwór walcowy»; zastosowano metodę Friedlandera i podwójną transformację całkową stwierdzając w wyniku istnienie w tym przypadku periodycznych fal Rayleigha. S. S. GRIGORIAN (Moskwa) przedstawił pracę «Rozprzestrzenianie się fal sprężystych przy eksplozjach podziemnych». Wykorzystano podane poprzednio przez autora równania różniczkowe opisujące zachowanie się gruntów pod działaniem krótkotrwałych obciążeń i zredukowano problem do zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych zwyczajnych. Wreszcie B. J. LAZAN (Minneapolis, Minn.) w referacie «Mechanizmy i fenomenologia tłumienia w materiałach» podał klasyfikację tłumienia i rozważył tłumienie w metalach, polimerach, elastomerach i innych materiałach niemetalowych.

SEKCJA 2. MECHANIKA CIECZY I GAZÓW

Wśród problemów mechaniki płynów na jednym z czołowych miejsc znajdują się oczywiście tematy dynamiki gazów. W ich ramach w zakresie przepływów naddźwiękowych trójwymiarowych wygłoszone zostały dwa wykłady: K. I. BABENKI (Moskwa), rozpatrującego przepływy dokoła ciał stożkowych oraz V. V. RUSANOWA (Moskwa), rozpatrującego opływy ciał zatępiionych z odsuniętą falą uderzeniową, przy czym rozpatrzone zostały również przypadki niesymetryczne z niezerowym kątem natarcia. Do otrzymania rozwiązań zastosowano tu metody numeryczne. Przepływowi hipersonicznemu poświęcone były trzy referaty. G. G. CZERNYJ (Moskwa) przedstawił obszerny wyniki badań opływu cienkich skrzydeł pod dużymi kątami natarcia, a W. D. HAYES (Princeton) i F. K. MOORE (Buffalo, N. Y.) zajmowali się przepływami zbliżonymi do przepływu Newtona, przy czym W. D. HAYES zajmował się przypadkiem, gdy stosunek gęstości przed i za falą uderzeniową jest mały, zaś F. K. MOORE — przypadkiem, gdy wykładnik adiabatyczny jest bardzo bliski jedności. Przepływ przydźwiękowy był reprezentowany dwoma pracami. Pierwsza z nich R. HETHERINGTONA i M. E. SILVESTERA (Derby) dotyczyła numerycznego wyznaczenia przepływu w poddźwiękowym obszarze gardzieli dyszy, w drugiej E. A. MÜLLER i K. MATSCHAT (Gotynga) rozpatrywali pewne samopodobne rozwiązania równań przepływu okołodźwiękowego.

Na równi z tematami dynamiki gazów (bez uwzględnienia w przepływie zjawisk dysypatywnych) czołowe miejsca zajmują jeszcze liczniej reprezentowane tematy dotyczące uwzględnienia dysypacji w cienkich warstwach, mianowicie w laminarnych i turbulentnych warstwach granicznych oraz w falach uderzeniowych i detonacyjnych.

Prace J. L. PEUBE (Orsay), L. G. ŁOJCJANSKIEGO poświęcone były teorii warstwy przyściennej laminarnej, prace S. KAPLUNA (Pasadena, Cal.), C. BOURQUE (Quebec) — zagadnieniom oderwania i obszaru przejściowego, a prace N. ROTT i W. S. LEWELLEN (Los Angeles) oraz M. A. SINBEL (Kair) — zagadnieniom warstwy przyściennej w obracających się płynach i w rurach stożkowych. Analizą początkowej fazy powstawania warstwy przyściennej na krawędzi płaskiej płytki zajmował się I. IMAI (Tokio). A. FAVRE, J. GAVIGLIO i J. P. FOHR (Chatillon-sous-Bagneux); J. A. B. WILLS (Teddington) oraz M. PICHAL (Praga) przedstawili rezultaty pomiarów przepływu wewnątrz turbulenta warstwy przyściennej, a F. SCHULTZ-GRUNOW i P. SAND (Akwizgran) przedstawili analizę procesów sedymentacji w takich warstwach. Problemy wpływu warstw przyściennych na wymianę ciepła zostały przedstawione w pracy L. N. HOWARDA (Cambridge, Mass.) o przewodnictwie przy dużych liczbach Reynoldsa, w pracy H. KATO, N. NISHIWAKI i M. HIRATA (Tokio) o przepływach przy dużych liczbach Prandtla oraz w pracy R. MICHEL i N. DUC-LAM (Chatillon-sous-Bagneux) o tarciu i przewodnictwie ciepła w turbulentnych warstwach przyściennych dwu- i trójwymiarowych. O wymianie ciepła w przepływie między dwoma ściankami mówił M. E. ERDOGAN (Istambuł). Wykorzystanie pomiarów warstwy przyściennej do określenia wydatku dyszy przedstawili F. COCHO GIL i A. L. JAUMOTTE (Bruksela).

Badania fal uderzeniowych były prezentowane w kilku pracach. S. A. CHRISTIANOWICZ (Nowosybirsk) oraz J. P. GURAUD (Chatillon-sous-Bagneux) zajmowali się teorią słabych fal uderzeniowych, ich asymptotycznymi własnościami przy odbiciu oraz w pobliżu linii kaustycznej. H. W. LIEPMANN, R. NARASIMHA i M. CHAHINE (Pasadena, Cal.) przedstawili pracę dotyczącą badań struktury fali uderzeniowej z zastosowaniem metod kinetycznych modeli zderzeń; otrzymane wyniki dla grubości fali mieszczą się między rozwiązaniami Mott-Smitha a rozwiązaniami równań Navier-Stokesa. Podobnie na modelu molekularnym oparła swoje rozważania C. S. MORAWETZ (Nowy York) w pracy o falach bezuderzeniowych w plazmie, to znaczy o takich falach, których grubość może być mniejsza niż średnia droga swobodna. Strukturę fali uderzeniowej z uwzględnieniem promienionowania przedstawili R. GOULARD i BOGOTTE (Lafayette, Ind.). Referat dotyczący wybuchów podwodnych przedstawił J. H. HAYWOOD (Durfermline).

W dziedzinie badań stabilności przepływów i powstawania turbulencji w pracach W. VELTE'A (Freiburg), H. LUDWIEGA (Getynga), J. W. MILESA (Canberra), D. FULTZA i T. S. MURTY'EGO (Chicago) oraz F. X. WORTMANNA (Stuttgart) przedstawiona została analiza warunków powstawania niestabilności, a w pracach C. C. LINA i D. J. BENNEY'A (Cambridge, Mass.), R. C. DI PRIMA i J. T. STUARTA (Troy, N. Y.) oraz A. MICHALKE'EGO i R. WILLE'A (Berlin) zwrócono uwagę na przypadki szczególne przepływów z silnymi poprzecznymi gradientami prędkości. Analizę wpływu niestabilności powierzchni nieciągłości prędkości na przepływy w średnim ustalonym zajął się A. FORTIER (Orsay).

Dziedziną rozwijającą się w ostatnich czasach bardzo intensywnie jest magnetohydrodynamika i dynamika plazmy. Omówienie zagadnień związanych z jej zastosowaniem w generatorach m.h.d. do bezpośredniej przemiany energii paliwa w energię elektryczną podał S. WAY (Pittsburg, Pa.). J. FABRI i TH. MOULIN (Chatillon-sous-Bagneux) zajmowali się oddziaływaniem pola magnetycznego na przepływ, mogącym mieć zastosowanie np. w pompach dla płynnych metali. Analizę oddziaływania pola magnetycznego na strugę przedstawił A. CRAYA i R. MOREAU (Grenoble). Pewne przypadki ruchu płynu przewodzącego pod wpływem przyłożonych pól elektrycznego i magnetycznego rozpatrywał H. K. MOFFAT (Cambridge). O własnościach plazmy wysokociśnieniowej (rzędu ciśnienia atmosferycznego) mówił H. W. EMMONS (Cambridge, Mass.), a L. S. G. KOVASZNY (Baltimore) mówił o turbulencji plazmy. Dwie prace: A. KILDAL i T. TJETTA (Bergen) oraz E. CRAUSSE, Y. POIRIER i C. VIVÉS (Avignon) poświęcone były problemom akustycznym, wreszcie E. MARTENSEN i K. v. SENGBUSCH (Monachium) rozpatrywali obszary stabilności i niestabilności przy wyładowaniu toroidalnym.

Poza wymienionymi wyżej dziedzinami mechaniki płynów, obejmującymi większe grupy referatów, mniej licznie reprezentowanymi były następujące dziedziny.

W teorii strug przedstawiona została praca doświadczalna I. TANI i Y. KOMATSU (Tokio) dotycząca strugi powietrza padającej na prostopadłą ściankę oraz prace teoretyczne: S. UCHIDA i K. WA-

TANABE (Nagoya) o rozwiązaniach podobnych dla strumienia zakrzywionego; J. T. DIEZ ROCHE (Madryt) o dwuwymiarowych przepływach potencjalnych osiowo-symetrycznych mogących w przybliżeniu opisać ruch powietrza w pojeździe poduszki. Obszarem mieszania się strugi naddźwiękowej powietrza z otaczającą atmosferą zajmowali się P. CARRIÈRE i M. SIRIEIX (Chatillon-sous-Bagneux).

Przepływy z kawitacją były reprezentowane w trzech pracach. M. TULIN (Laurel, Md.) analizował różne czynniki wpływające na postać kawitacji w superkawitacyjnym przepływie, J. A. GEURST (Eindhoven) przedstawił pewne wyniki badań opływu z kawitacją a L. VAN WIJNGAARDEN (Wageningen) rozpatrzył przypadek zwiększenia ciśnienia pod wpływem niwielkiego zaburzenia działającego na warstwę drobnych pęcherzyków kawitacyjnych.

Dynamice gazów rozrzedzonych poświęcone były dwa referaty. H. GRAD (Nowy York) przedstawił referat (wygłoszony przez C. S. MORAWETZ) dotyczący asymptotycznych własności pewnych rozwiązań równania Boltzmanna, a F. S. SHERMAN, G. J. MASLACH i D. R. WILLIS (Berkeley, Cal.) przedstawili zestawienie pomiarów oporu kilku brył (walca, kuli, pasma) z wynikami badań teoretycznych, opartych o uproszczone kinetyczne modele zderzeń.

Matematycznymi własnościami równań dynamiki płynów, prowadzącymi do uogólnienia pojęcia fali prostej, zajmował się L. W. OWSJANNIKOW (Nowosybirsk), a D. DUMITRESCU, D. G. IONESCU i C. CRACIUN (Bukareszt) przedstawili metodę numerycznego całkowania równań Navier-Stokesa.

W kilku pracach znalazły odbicie procesy towarzyszące mieszaninom dwufazowym. Analizie powstawania powierzchni stożkowych na kropki umieszczonej w polu elektrycznym lub w pewnym opływie lepkiem poświęcona była praca G. I. TAYLORA (Cambridge), a badanie szybkości rozpadania się oddzielnych kropli w opływającym powietrzu przedstawił D. C. JENKINS (Farnborough). Przepływy w gardzieli dyszy z kondensacją i z uwzględnieniem relaksacji rozpatrywał F. BARTLMÁ (Akvizgran).

Przepływy z filtracją rozpatrywano były w dwóch referatach. S. I. GHEORGHITZA (Bukareszt) podał pewne rozwiązania równań przepływu w osrodku porowatym z jamami, a W. N. NIKOŁAJEWSKI (Moskwa) rozpatrywał pewne zjawiska relaksacyjne związane z niejednorodnością przepływu.

Dotychczas nie wymienione referaty zaliczymy łącznie do specjalnych problemów mechaniki płynów. Tak więc M. VAN DYKE (Stanford, Cal.) przedstawił pracę na temat opływu kuli przy małej liczbie Reynoldsa, w której stara się uzupełnić niepełne wyniki otrzymane przez Stokesa, Oseena i Kapluna. Rozchodzenie się fal w tętnicach i związane z tym tłumienie i dyspersję rozpatrywał E. MOLLO-CHRISTENSEN (Cambridge, Mass.). Z zakresu mechaniki statku C. WIGLEY (Londyn) przedstawił analizę sił i momentów działających na statek odchylony od kursu, a zastosowanie mechaniki gazów do określania prognoz krótkoterminowych przedstawił I. A. KIBEL (Moskwa). Z. MORAVEC (Praga) przedstawił pracę na temat wpływu parametrów aerodynamicznych na hałas syreny, a S. B. BERNDT (Sztokholm) zastosował liniową teorię perturbacji do pewnych zagadnień drgań opływanych ciał.

Podany przegląd prac jest oczywiście bardzo pobieżny i może co najwyżej być pomocny dla ogólnego zorientowania się w przedstawionej na Kongresie tematyce bez wchodzenia w liczne i często istotne szczegóły. Nieco bliższe zapoznanie się z tymi pracami pozwala chyba na wyciągnięcie pewnych wniosków mających nieco ogólniejszy charakter.

Przede wszystkim daje się zauważyć zmniejszenie zainteresowania «klasycznymi» problemami mechaniki, takimi jak np. teoria sprężystości czy hydromechanika przy jednoczesnym rozszerzeniu tematyki i zakresu zastosowań przedstawionych prac. Poszczególne tematy były bardzo rozproszone wśród różnych grup problemowych, często związanych z innymi dziedzinami nauki, takimi jak fizyka, termodynamika (np. w tematach dotyczących naprężeń cieplnych, przebiegów relaksacyjnych, kawitacji parowania), meteorologia a nawet medycyna (np. praca E. MOLLO-CHRISTENSENA). To rozproszenie tematyczne wynika chyba w znacznej mierze z potrzeb praktyki, która stawia coraz to nowe pytania, stojące często na pograniczu kilku dziedzin nauki.

Bardzo wszechstronnie rozwijają się również metody badań doświadczalnych i teoretycznych. W szeregu prac zestawione zostały wyniki doświadczeń dla uzasadnienia przedstawionych teorii. W badaniach teoretycznych, jak się wydaje, częściej rezygnuje się obecnie z poszukiwania rozwiązań ścisłych przy rozwijaniu różnego rodzaju metod przybliżonych. Na czoło wysuwają się tu chyba

metody numeryczne stosowane do rozwiązywania bardzo wielu konkretnych zagadnień. Spośród innych metod przybliżonych można wymienić metody poszukiwania rozwiązań asymptotycznych, przybliżających z jednej strony rozwiązania rzeczywiste w prawie całym obszarze (outer expansion), z drugiej — dających przybliżony opis w niewielkim otoczeniu pewnych powierzchni lub punktów (inner expansion). Metody te są stosowane do pewnych zagadnień specjalnych, takich jak struktura fali uderzeniowej czy nieliniowa akustyka (np. w pracy J. P. GUIRAUD).

Stosowanie metod przybliżonych i poszukiwanie wyników możliwie jak najbardziej efektywnym sposobem odbywa się często kosztem zmniejszenia wymagań odnośnie matematycznej precyzji. Taką właśnie rezygnację z precyzji przez podawanie schematu iteracyjnego lub rozwinięcia w szereg bez analizy zbieżności można było zauważyć w wielu pracach. Również można chyba powiedzieć, że problemy matematyczne istnienia i jednoznaczności rozwiązań czy oceny błędów otrzymanych rozwiązań przybliżonych były prawie całkowicie pomijane milczeniem.

Zresztą tematami szeregu prac teoretycznych były nie problemy otrzymania rozwiązań dla istniejących równań, ale uzyskanie nowych równań, lepiej opisujących rzeczywistość przez szersze uwzględnienie praw fizycznych we wprowadzonych modelach ośrodków ciągłych. Szczególnie dużo uwagi poświęcono ogólnym modelom ośrodków ciągłych z uwzględnieniem różnych fizycznych własności oraz przemian termodynamicznych odwracalnych i nieodwracalnych.

Strona organizacyjna kongresu stała na bardzo wysokim poziomie z wyjątkiem może rozplanowania referatów z poszczególnych dziedzin. Tak np. referaty z teorii plastyczności były w ciągu tego samego popołudnia rozrzucone po kilku różnych salach, natomiast w ciągu innych dni nie było ich prawie zupełnie.

Interesujące jest porównanie XI Międzynarodowego Kongresu Mechaniki z II Wszzechzwiązkowym Zjazdem Mechaniki, który odbył się w Moskwie w lutym 1964 r. Podczas gdy w Monachium wygłoszono 145 referatów, to w Moskwie ponad 500 w dużej liczbie równoległych sekcji i podsekcji, przekraczającej niekiedy nawet 20. Wydaje się, że najkorzystniejsza byłaby pewna pośrednia liczba równoległych sekcji, 8 do 10, i zwiększenie na kongresach międzynarodowych liczby komunikatów względnie referatów zbiorczych, tak by liczba referowanych prac wyniosła około 300. Takie ujęcie pozwoliłoby na znacznie pełniejsze przedstawienie dorobku ostatnich lat, jednak bez rozczłonkowania na zbyt drobne podsekcje.

Następny, XII Międzynarodowy Kongres Mechaniki odbędzie się w Stanford (California, USA); głównym organizatorem Kongresu jest prof. N. J. Hoff, a termin Kongresu wyznaczono na ostatni tydzień sierpnia 1968 r.

Andrzej Szaniawski (Warszawa)

Michał Życzkowski (Kraków)

KONFERENCJA NAUKOWA ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH W ZAKOPANEM

PRZEGLĄD REFERATÓW

W dniach 11–20 września 1964 r. odbyła się w Zakopanem kolejna, ósma z rzędu konferencja naukowa zorganizowana przez Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. Konferencja zgromadziła tym razem pokaźną liczbę uczestników — ponad 120 — przy czym aż 20% tej liczby stanowili goście zagraniczni przybyli z 12 krajów (ZSRR, CSRS, Bułgaria, Rumunia, Jugosławia, NRD, NRF, Włochy, Francja, W. Brytania, USA oraz Chiny). Z ogólnej liczby ponad 80 wygłoszonych referatów około 20 przedstawił goście zagraniczni, co — wobec faktu, że do udziału w konferencji zaproszono na ogół wybitnych przedstawicieli mechaniki stosowanej — przyczyniło się w dużym stopniu do wysokiej rangi naukowej konferencji.

Ponad połowę uczestników konferencji z Polski stanowili pracownicy nauki Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT, na resztę zaś złożyło się około 40 gości zaproszonych z różnych ośrodków politechnicznych i uniwersyteckich, jak również przedstawicieli instytutów naukowo-badawczych i resortowych z całego kraju.

Tematykę konferencji podzielić można z grubsza na następujące dziedziny.

1. Teoria sprężystości — zarówno klasyczna infinitesimalna, jak również pewne jej problemy nieliniowe oraz termosprężystość (10 referatów). W ostatnich latach obserwuje się wyraźny spadek zainteresowania klasycznymi zagadnieniami teorii sprężystości.

2. Teoria plastyczności — zagadnienia podstawowe i ogólne, operujące modelem sztywno-plastycznym oraz sprężysto-plastycznym (20 referatów). Zwraca tu uwagę pewien nieznaczny wzrost udziału prac podstawowych o charakterze eksperymentalnym.

3. Zagadnienia podstawowe teorii pól sprzężonych oraz fizyki ciała stałego, połączone z poszukiwaniem nowych modeli zastępujących klasyczny model ośrodka ciągłego (20 referatów). Zarówno u nas jak i na całym świecie obserwuje się wyraźny wzrost zainteresowania tą tematyką.

4. Zagadnienia rozchodzenia się fal sprężystych i sprężysto-plastycznych w ciałach stałych (7 referatów). Prace te mają u nas w dalszym ciągu charakter przeważnie teoretyczny.

5. Analiza sprężystych i sprężysto-plastycznych dźwigarów powierzchniowych (15 referatów). Można tu zauważyć pewne przesunięcie się zainteresowań od teorii płyt w kierunku teorii powłok.

6. Zastosowania wyników klasycznej teorii sprężystości i plastyczności w teorii konstrukcji, zwłaszcza żelbetowych (10 referatów).

Bardzo pobieżne omówienie wygłoszonych na konferencji referatów przeprowadzimy w oparciu o przedstawiony wyżej podział. Nie jest naszym zamiarem ani omówienie wszystkich referatów, ani — tym bardziej — ich merytoryczna ocena; jedno i drugie zadanie przekracza możliwości tego rodzaju artykułu. Na przykładzie pewnych prac pragniemy jedynie wskazać charakterystyczne kierunki rozwojowe naszej mechaniki stosowanej na tle kierunków nauki światowej, reprezentowanej w Zakopanem przez szereg wybitnych jej przedstawicieli.

1. *Prace z zakresu ogólnej teorii sprężystości i termosprężystości.* P. P. TEODORESCU (Rumunia) przedstawił próbę rozważenia stanu naprężenia w ósmej części przestrzeni sprężystej z uwzględnieniem zjawisk zachodzących w narożu i nastęrczających pewne trudności natury matematycznej. Zagadnieniami o nieciągłych warunkach brzegowych zajęli się A. HANUŠKA (CSRS) i Z. OLESIAK omawiając problemy osiowo-symetryczne działania stempli na półprzestrzeni sprężystą. W obu przypadkach zaproponowano pewne przybliżone metody rozwiązania tych zagadnień. J. KURLANDZKI przedstawił pracę omawiającą rozwiązanie eliptycznych i hiperbolicznych zaburzonych problemów brzegowych kładąc przy tym nacisk na oszacowanie błędów zastosowanej metody. Zaburzenie problemu dotyczyć może rozważanego obszaru lub współczynników równania.

Zagadnieniami naprężeń cieplnych w ciałach i konstrukcjach sprężystych zajmowali się J. IGNA CZAK, B. RANIECKI, J. KRZEMIŃSKI, Z. DZIARNOWSKI i Z. BACZYŃSKI. Pierwszy z tych autorów podał rozwiązanie osiowo-symetrycznego pola naprężeń termosprężystych w ośrodku, w którym działa źródło ciepła poruszające się z jednostajną prędkością. B. RANIECKI rozważał zagadnienie dynamiczne związane z uderzeniem cieplnym na powierzchni półprzestrzeni; praca zawierała dyskusję propagacji dwóch fal silnej nieciągłości, związanych z przyjęciem sprężysto-plastycznego modelu półprzestrzeni. Pozostali autorzy podali rozwiązania pewnych statycznych lub quasi-statycznych problemów termosprężystości dla powłok kulistych i cylindrycznych przy klasycznych założeniach liniowości i niezależności stałych materiałowych od temperatury.

S. ZAHORSKI przedyskutował pewne zagadnienie małego dodatkowego ruchu nałożonego na ruch podstawowy nieliniowych ośrodków lepkosprężystych opisanych ogólnymi równaniami typu różniczkowego, podanymi przez RIVLINA i ERICKSENA. Szczegółowo rozważono kołowo-symetryczny przypadek powolnego i ustalonego prostego rozciągania lub ściskania ośrodka nieściśliwego wyprawdzając odpowiedni warunek niestateczności procesu podstawowego.

Jeden z referatów R. TOUPINA (USA) dotyczył pewnych rozważań na temat bardziej racjonalnego sformułowania znanej w teorii sprężystości zasady de Saint-Venanta. Autor proponuje wprowadzenie do tej zasady zamiast naprężeń — wielkości energii sprężystego odkształcenia.

2. *Teoria plastyczności.* W referacie W. OLSZAKA i P. PERZYNY przedstawiono równania stanu teorii płynięcia dla niestacjonarnego warunku plastyczności. Zmienność w czasie granicy plastyczności i innych właściwości materiałów zachodzi w określonych warunkach, wśród których wymienić można napromieniowanie cząstkami elementarnymi, zmianę warunków atmosferycznych, zmianę

temperatury itp. W pracy przeprowadzono analizę teoretyczną zjawiska wykorzystując przy tym pewne wyniki doświadczalne. Referat A. A. ILJUSZINA (ZSRR), dotyczący pewnych oryginalnych założeń podstawowych i zagadnień teorii plastyczności, wywołał ożywioną dyskusję. Zagadnienia te były tematem dalszych wykładów prof. Iljuszina prowadzonych po zakończeniu konferencji na terenie Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Warszawie.

Z. MRÓZ zreferował pracę omawiającą w sposób ogólny prawa deformacji i wzmocnienia dla ciał sprężysto-plastycznych. Dyskusję warunku plastyczności dla całego ciała przeprowadził on w pewnej przestrzeni funkcyjnej, odpowiadającej rozważanej zazwyczaj dziewięcio-wymiarowej przestrzeni naprężeń, stosowanej dla formułowania lokalnego warunku plastyczności. M. ROGZIŃSKI przedstawił swoje uwagi na temat zaproponowanej przed pół wiekiem hipotezy Haara-Kármána.

Pewnych ogólnych zagadnień teorii plastyczności dotyczyły także prace W. SZCZEPIŃSKIEGO, J. RYCHLEWSKIEGO i J. KŁEPACZKI. Pierwszy z autorów rozważał na drodze teoretycznej pewne obciążenia dynamiczne prowadzące do dużych odkształceń w ciałach sprężysto-lepkoplastycznych. Zwrócił przy tym szczególną uwagę na wpływ lepkości i wzmocnienia materiału na przebieg tego procesu w przypadku powłok cienko- i grubościennych; przedyskutował także wpływy dynamiczne w procesie ciągnięcia metali. J. RYCHLEWSKI przedstawił wyniki swych rozważań nad wpływem wariacji pewnych parametrów i stałych materiałowych, odpowiadających lokalnej niejednorodności materiału, na rozwiązanie problemu; szczegółowe rozważania przeprowadził on na uproszczonym modelu ciała sztywno-plastycznego. Ostatni z wymienionych autorów przeprowadził dyskusję zależności przebiegu płynięcia plastycznego od odkształcenia, jego prędkości oraz zwłaszcza od temperatury; rozważania dotyczyły w szczególności pewnych metali.

Dwie prace J. NAJARA i J. KÖNIGA wspólne z J. RYCHLEWSKIM jak również praca J. OSTROWSKIEJ dotyczyły problemów bardziej szczegółowych, związanych z zagadnieniem wpływu niejednorodności materiału sprężysto-plastycznego na proces odkształcenia. Rozważania dotyczyły klina (zagadnienie płaskie) i zginania płyty w przypadku niejednorodności skokowej oraz hydrostatycznego obciążenia kuli uplastyczniającej się wskutek wstępnie założonej niejednorodności sprężysto materiału.

Nośnością graniczną rury grubościennej poddanej jednoczesnemu zginaniu i ciśnieniu wewnętrznemu zajął się M. ŻYCZKOWSKI stosując do rozwiązania metodę małego parametru. Nośność graniczna ośrodka sypanego niejednorodnego była tematem pracy T. PRZEDECKIEGO; rozpatrzył on zagadnienia osiowo-symetryczne oraz przyjął liniową zmienność gęstości i paraboliczną zmienność kąta tarcia wewnętrznego. A. DRESCHER zreferował wyniki swych badań nad wpływem prędkości odkształcenia na zachowanie się próbek gruntu spoistego przy ściskaniu jednoosiowym. Dowodzą one, że badany grunt jest wrażliwy zarówno na prędkość, jak i na historię odkształcenia.

M. GALOS przedstawił pracę na temat skręcania prętów niepryzmatycznych o przekroju kołowym zakładając sprężysto-plastyczny model materiału i stosując do rozwiązania metodę odwrotną, kombinowaną z metodą małego parametru. Bardziej złożony model ciała sprężysto-lepkoplastycznego przyjął T. WIERZBICKI rozważając zginanie płyty kołowej. Dla uzyskania efektywnych wyników autor skorzystał z obliczeń wykonanych na maszynie cyfrowej.

Wśród prac eksperymentalnych wymienić należy także referat J. D. CAMPBELLA i R. J. ASPDENA (Wk. Brytania) pt. «Wpływ prędkości obciążania na zginanie elastoplastycznych bolek stalowych». Autorzy skonstruowali specjalne urządzenie do dynamicznych prób zginania; pozwoliło ono stwierdzić, że zachowanie się materiału przy zginaniu wykazuje cechy, których nie można przewidzieć na podstawie danych uzyskanych w próbie ściskania.

J. MIĄSTKOWSKI i W. SZCZEPIŃSKI przeprowadzili doświadczalną analizę powierzchni uplastycznienia w mosiądzu z uwzględnieniem wpływu odkształceń wewnętrznych. Badania przeprowadzone były na cienkościennych mosiężnych próbkach cylindrycznych poddanych ściskaniu osiowemu i ciśnieniu wewnętrznemu. Dyskutowany wpływ odkształceń wstępnych okazał się znaczny. J. KŁEPACZKO i J. KÖNIG zajęli się zjawiskiem wpływu utwardzenia rury cienkościennej, poddanej ściskaniu i ciśnieniu wewnętrznemu, na stan naprężeń w rurze. Uwzględniono przy tym zarówno sprężystą fazę pracy pręta, jak i fazę plastyczną ze wzmocnieniem.

Przedmiotem doświadczalnych badań Z. WASZCZYŻYNA były sprężysto-plastyczne ugięcia skończonych belek stalowych spoczywających na nieprzesuwnych podporach. Stwierdzono dobrą zgodność wyników doświadczeń z danymi teoretycznymi.

3. *Teoria pól sprężonych i nowe modele ciała rzeczywistego.* A. C. ERINGEN (USA) przedstawił nieliniową dynamiczną teorię ośrodków sprężystych poddanych silnym polom elektromagnetycznym. Autor wyprowadził odpowiednie równania stanu oraz określił warunki skokowe dla poruszającej się nieciągłości. Przedstawiona teoria uogólnia wiele teorii dotychczas rozważanych oraz pozwala wyprowadzić cały szereg sprężeń elektromechanicznych interesujących dla dalszych badań.

S. KALISKI rozważył zjawisko wzmocnienia mechano-elektromagnetycznych fal powierzchniowych w przewodnikach i piezoelektrykach za pomocą strumienia elektronów poruszającego się nad powierzchnią ośrodka sprężystego. W szczególności rozpatrzono idealny przewodnik w polu magnetycznym równoległym do kierunku strumienia elektronów oraz podobne zagadnienie dla piezokwarcu. W. NOWACKI uogólnił znane z mechaniki twierdzenie o wzajemności na przypadek materiałów piezoelektrycznych, zginanie zaś płyt dielektrycznych umieszczonych w polu elektrostatycznym omawiał w swym referacie R. SOLECKI.

Grupę prac z zakresu aerosprężystości reprezentował referat S. A. AMBARCUMIANA i G. E. BAGDASARIANA (ZSRR); przedmiotem ich rozważań było zagadnienie niestateczności płyty nieograniczonej i nieskończonej długiej powłoki walcowej w opływie naddźwiękowym, intensywnie nagrzewanej w procesie występującego tu zjawiska flatteru. W pracy podkreślono istotny wpływ zależności modułu sprężystości materiału od temperatury na przebieg zjawiska. J. NIESYTO rozpatrywał drgania cienkościennej, skończonej rury cylindrycznej o przekroju kołowym, wywołane wewnętrznym, naddźwiękowym przepływem gazu. Uwzględniono przy tym tłumienie wewnętrzne zgodne z modelem Voigta i Sorokina.

Problemem aero-magneto-flatteru rury cienkościennej, wywołanego przepływem gazu przez rurę, zajął się L. SOLARZ kontynuując swe dawniej rozpoczęte badania nad wpływem pola magnetycznego na zjawisko flatteru. Z. DŻYGADŁO rozważył zaś z kolei drgania skończonej płyty opływanej jednostronnie gazem o prędkości naddźwiękowej i poddanej działaniu periodycznych wymuszeń siłami zaczepionymi na krawędziach.

Kilka referatów dotyczyło szczególnych, często nowych modeli ciała odkształcalnego i ich zastosowaniu do opisu zachowania się ciał rzeczywistych. I tak Z. WESOŁOWSKI wyprowadził podstawowe zależności dla nowego typu sprężystego kontinuum materialnego przenoszącego momenty powierzchniowe. Rozważył on dwa przypadki kontinuum (o trzech i sześciu stopniach swobody) istotnie różniące się od kontinuum Cosserat wykazując jednocześnie, że tensor naprężenia momentowego jest tensorem kulistym. Dla kontinuum o trzech stopniach swobody udowodniono, że tensor ten nie wpływa na propagację fal sprężystych.

Praca R. STOJANOVIĆA, S. DJURIĆA i L. VUJOŠEVIĆA (Jugosławia) dotyczyła związków między naprężeniami i odkształceniami dla sprężystego kontinuum typu Cosserat przy trzech kierunkach uprzywilejowanych. Wykazano istnienie szczególnego pola naprężeń związanego z odkształceniem orientacji materiału. C. EIMER dokonał przeglądu i analizy modeli stochastycznych stosowanych w mechanice kontinuum przy określaniu «średnich» własności mechanicznych materiału oraz przedstawił własne wyniki uzyskane dla ośrodka quasi-jednorodnego. Określono ogólnie zależności dla naprężeń i odkształceń, kryterium wytrzymałościowe oraz podano przykłady konkretnych rozwiązań zagadnień jednowymiarowych.

N. CRISTESCU (Rumunia) przedyskutował pewien układ równań stanu mający opisywać ciała wrażliwe na prędkość odkształcenia przy obciążaniu; równania te w przypadku odciążania odpowiadają modelowi ciała sprężystego. Do obliczeń wykorzystano tu w szerokim zakresie maszyny elektroniczne.

Przedmiotem badań J. NALESZKIEWICZA był dobór modelu, który mógłby prowadzić do racjonalnej hipotezy wytrzymałości doraźnej na rozciąganie. Zwrócił on uwagę na fakt, że konstruowanie takiej hipotezy w oparciu o te same kryteria co w przypadku hipotezy uplastycznienia jest nieuzasadnione.

C. WOŹNIAK przedstawił podstawowe układy równań ogólnych dla dwuwymiarowych hiper-sprężystych ośrodków włóknistych. Model tego rodzaju służyć może jako podstawa do rozważania szeregu konstrukcji rzeczywistych, w których oddziaływania elementów mają kierunki tworzące rodzaj siatki. W. KASPRZAK omówił opierając się na wynikach doświadczeń kwestię granicy stosowalności modelu kontinuum materialnego w analizie pewnych pomiarów wytrzymałościowych. Chodziło tu o zjawiska zachodzące w tak małych obszarach ciała rzeczywistego, w których ze względu na jego mikrostrukturę model kontinuum staje się niemożliwy do zastosowania.

R. A. TOUPIN (USA) dokonał interesującego przeglądu ostatnich wyników w teorii sprężystych naprężeń momentowych. Następnie wychodząc z modelu kontinuum sprężystego, dla którego energia odkształcenia zależy nie tylko od samego gradientu odkształcenia, ale i od gradientów wyższych rzędów, wykazał istnienie naprężeń wstępnych i hipernaprężeń dowodząc, że te ostatnie wywołują odkształcenia cienkiej warstwy granicznej powierzchni swobodnej.

H. ZORSKI przedstawił pewne podstawowe zagadnienia polowej teorii ruchu defektów dyskretnych, obejmującej defekty typu dyslokacji, wtrąceń itp. Wyprowadził on równania ruchu defektów izolowanych w ośrodku ciągłym. Praca M. ŻÓRAWSKIEGO dotyczyła metody przemieszczeń w teorii ciągłych defektów siatek krystalicznych. Wykazano możliwość zanurzenia kryształu zdyslokowanego w przestrzeni euklidesowej o większej liczbie wymiarów (6 dla ekstramaterii i 9 dla dyslokacji). Dowiedziono w ten sposób, że w dziewięcio-wymiarowej przestrzeni euklidesowej można stosować równania metody przemieszczeń dla kryształów z defektami sieci.

E. KRÖNER (NRF) bazując na analogii zginania wiązki płytek sprężystych wyprowadził zależność między stanem dyslokacji w kryształach o sieci sześcienniej płasko-centrycznej a rozkładem makroskopowych naprężeń momentowych, których wpływu na energię sprężystą nie można pominąć. Autor wykazał, że w omawianym przypadku stałe występujące w równaniu stanu składają się z części dających się obliczyć metodami teorii sprężystości i teorii siatek.

J. H. WEINER (USA) zanalizował zjawiska pełzania i płynięcia plastycznego w łańcuchowym modelu dyslokacji. Rozważając charakter i wielkości naprężeń w obu przypadkach autor wykazał, że istnieje krytyczny poziom naprężeń (rzędu setnych części naprężenia Peierlsa) oddzielające od siebie zjawiska pełzania i płynięcia plastycznego.

W pracy J. DEPUTATA i Z. PAWŁOWSKIEGO przedstawiono doświadczalny sposób ujawniania gęstości dyslokacji w monokryształach soli kuchennej drogą trawienia. Omówiona technika pomiarowa pozwala na ocenę zależności zarówno gęstości dyslokacji jak i tłumienia fal ultradźwiękowych od stopnia zgniotu badanego kryształu. M. WNUK zaproponował pewną metodę przybliżonego rozwiązywania problemu propagacji szczeliny typu Griffitha w ośrodku idealnie sprężysto-plastycznym.

4. *Zagadnieniem rozprzestrzeniania się fal lepkosprężystych* zajęto się w kilku referatach. Ch. A. RACHMATULIN (ZSRR) dokonał przeglądu metod dynamicznych stosowanych przy badaniu zjawisk rozchodzenia się fal sprężysto-plastycznych. Zaproponował on własną metodę konstruowania równań fizycznych dla ośrodków sprężysto-plastycznych, szczególnie przydatną do eksperymentalnego określania parametrów charakteryzujących właściwości materiału.

E. WŁODARCZYK rozwiązał zagadnienie rozprzestrzeniania się i odbicia płaskiej i kulistej fali uderzeniowej w ośrodku sprężysto-plastycznym i w cieczy barotropowej. Rozważono odbicie fali płaskiej od ruchomej nieodkształcalnej przegrody. Zaproponowaną metodę rozwiązania można stosować w strefie obciążenia dla dowolnej charakterystyki materiału, zaś w strefie obciążenia — tylko przy aproksymacji charakterystyki krzywą łamaną. W. K. NOWACKI rozpatrzył zagadnienie rozprzestrzeniania się i odbicia fal naprężenia w przecie sprężysto-lepko-plastycznym ze wzmocnieniem uwzględniając wpływ prędkości odkształcenia na związki fizyczne. Odbicie się fali od końców pręta rozważono przy różnych warunkach brzegowych.

Celem pracy P. PERZYNY było wykorzystanie metody kolejnych przybliżeń w zagadnieniu rozprzestrzeniania się fal naprężeń w ośrodkach niesprężystych, zarówno plastycznych, jak i lepkosprężystych. Autor przedstawił proponowaną metodę w dwóch ogólnych przypadkach rozpatrując je analitycznie. Referat zawierał również przegląd przypadków szczególnych wraz z ich interpretacją fizyczną. J. BEJDA omówił zagadnienie propagacji fal momentu gnącego oraz siły poprzecznej

w belkach wykonanych z materiału sprężysto-lepkoplastycznego. Uwzględniono przy tym wpływ ścinania i bezwładności obrotu elementów belki.

5. *Tematem teorii płyt i powłok sprężystych i sprężysto-plastycznych* zajęto się w dalszych kilkunastu referatach. Z. MARCINIĄK przedstawił analizę stateczności cienkościennej powłoki w stanie plastycznym, podlegającej rozciąganiu przy kinematycznych warunkach brzegowych. Autor stwierdził występowanie trzech kolejnych faz procesu odkształcenia: statecznej, quasi-statecznej i niestatecznej. Wyniki pracy mogą być wykorzystane przy procesach wytłaczania blach. J. MURZEWSKI omówił wyniki swoich rozważań teoretycznych, popartych przeprowadzonymi doświadczeniami; dotyczyły one niestateczności długich powłok cylindrycznych (ale nieobrotowych) z materiału sprężysto-plastycznego, wzmocnionych żebrami podłużnymi i poprzecznymi.

Praca W. GUTKOWSKIEGO dotyczyła obliczania powłok prętowych o węzłach leżących na pewnej powierzchni obrotowej. Dla analizy tego rodzaju konstrukcji autor zastosował rozwinięty algorytm różnicowego rachunku wektorowego, sprawdzając wyniki doświadczalnie na modelach z drutu. Efektem lokalnym działania sił skupionych na powłoki sprężyste zajmował się S. ŁUKASIEWICZ.

S. BUĆKO omówił ogólny problem stateczności powłok walcowych obciążonych ciśnieniem wewnętrznym i osiowym stosując przy tym metodę uogólnionych szeregów potęgowych. Podobne zagadnienie, ale w przypadku równomiernego ściskania wszechstronnego powłoki wzmocnionej żebrami, przedstawił w ujęciu nieliniowym Z. NOWAK.

Uwzględnieniem pełzania materiałów zajęli się Z. BYCHAWSKI i B. OKOŁÓW. Pierwszy z nich opracował zagadnienie nieliniowego pełzania membran kołowych utwierdzonych na brzegu i poddanych działaniu ciśnienia normalnego. Pewne przybliżone rozwiązania problemu uzyskać można za pomocą metody małego parametru. Drugi z autorów przedyskutował pewne problemy pełzania płyt obciążonych na krawędzi, prowadzące do utraty stateczności po upływie skończonego czasu krytycznego.

Dźwigarami warstwowymi zajęli się V. KOVAŘIK (CSRS) i G. SCHMIDT (NRD). Pierwszy z nich rozpatrywał zginanie płyt warstwowych w ujęciu nieliniowym teorii Reissnera stosując dla otrzymania efektywnych rozwiązań metodę Galerkina. Drugi z autorów omawiał także zagadnienie płyt warstwowych, ale w aspekcie jej stateczności dynamicznej i w zastosowaniu przede wszystkim do konstrukcji sandwiczowej. Wskazał on na możliwość powstawania w takich płytach podwójnego rezonansu — drgań podłużnych powierzchni środkowej i drgań poprzecznych płyty.

Problem stateczności dynamicznej płyt cienkich poruszył także K. BORSUK. Wyboczeniem płyt o grubości zmieniającej się według pewnego prostego prawa zajął się A. GAJEWSKI. J. KOSSECKI rozważał dynamiczne zagadnienie warstwy sprężystej (grubej płyty) wychodząc z ogólnego zagadnienia trójwymiarowego. Ścisłe rozwiązanie takiego problemu dla warstwy późniejskończonoj ma złożoną postać operatorową. Przedmiotem pracy A. FRĄCKIEWICZA była stateczność dynamiczna prętów i płyt z dyskretnie rozłożonymi więzami sprężystymi, w szczególności wpływ tych więzów na zjawisko flatteru, występujące w przypadkach opływania konstrukcji strumieniem gazu.

Na zakończenie tej grupy referatów A. JAWORSKI przedstawił pewien nowy, iteracyjny sposób obliczania wielosegmentowych konstrukcji, tzw. półskorupowych, znajdujących szerokie zastosowanie w konstrukcjach lotniczych.

6. *Zagadnienia konstrukcyjne.* W. MARKS, WANG DU-CHING i W. DZIENISZEWSKI przedstawił grupę referatów z dziedziny kształtowania wytrzymałościowego. Referat A. MARKSA dotyczył zagadnienia wyznaczania kształtu belek sprężonych pod działaniem obciążeń ruchomych. Rozpatrzono takie ustawienia obciążenia ruchomego, które wywołują w określonym przekroju belki maksymalną wartość potencjału jednostkowego oraz wyznaczono funkcję określającą wymiary przekroju poprzecznego belki.

WANG DU-CHING w swym referacie zajął się zagadnieniem kształtowania przekroju zakrzywionego pręta zginanego zarówno w stanie sprężystym, jak i plastycznym. W zakresie sprężystym rozwiązanie otrzymano po wprowadzeniu dodatkowego warunku w postaci średnika równej wytrzymałości. W. DZIENISZEWSKI przedstawił referat dotyczący wyznaczania optymalnych kształtów płyt sprężonych o zmiennej grubości. Po uzyskaniu ogólnych równań takich płyt autor rozwiązał na drodze wariacyjnej zagadnienie kształtowania ilustrując je przykładami zaczerpniętymi z konstrukcji mostowych.

Referat Z. WASIUTYŃSKIEGO, J. KASPERKIEWICZA i A. BRANDTA dotyczył analizy stanu odkształcenia ściskanych elementów betonowych. Na wstępie podano ogólne twierdzenia dotyczące możliwości zastąpienia prawa Hooke'a przez dane doświadczalne. Następnie objaśniono metodę doświadczalnego badania sześciu składowych stanu odkształcenia w betonie. Autorzy przedstawili wyniki pomiarów wałców betonowych ściskanych w granicach proporcjonalności. Wyniki te różnią się znacznie od otrzymywanych na podstawie teorii sprężystości.

Przedmiotem referatu J. SOBIESZCZAŃSKIEGO było rozważenie działania sił łąrcia, traktowanych jako więzy nieliniowe, na statycznie niewyznaczalny płaski układ rurociągu spoczywającego na szorstkim podłożu. Zagadnienie sprowadził autor do numerycznego całkowania pewnego nieliniowego równania różniczkowego czwartego rzędu.

Z. MENDERA wykorzystał ortotropię plastyczną, wprowadzoną przez spoinę czołową, do zbadania nośności połączenia spawanego. Zakładając płaski stan naprężenia i upraszczając warunek plastyczności przez przyjęcie izotropii poprzecznej uzyskał on istotną zależność nośności granicznej spoiny od kąta jej nachylenia.

Doświadczalno-teoretyczną pracę na temat ustalenia obciążenia niszczącego dla osiowo ściskanych prętów cienkościennych o przekroju otwartym przedstawił Z. TERESKOWSKI. J. STUPNICKI zreferował wyniki swych badań elasto-ptycznych na temat wpływu warstwy oleju na kinostatyczne naprężenia kontaktowe w wałcowych łożyskach tocznych stwierdzając, że wpływ ten jest znaczny i sięga 20%. R. ROSMAN (Jugosławia) omówił pewien sposób obliczania wiatrownic (ścian stężających), mogący znaleźć zastosowanie przy projektowaniu budynków wysokościowych.

Pozostałe referaty trudno zaszerzegać do jakiegokolwiek z wymienionych wyżej grup. I tak np. S. JUHASZ (USA), redaktor naczelny Applied Mechanics Reviews, zapoznał zebranych szczegółowo z systemem WADEX stosowanym przez AMR do sporządzania i drukowania zestawień bibliograficznych prac naukowych za pomocą maszyn elektronowych. Tematem referatów L. SOBRERO (Włochy) była teoria i zastosowania funkcji hiper-zespolonych w zagadnieniach płaskich teorii sprężystości, jak również pewne naukowe aspekty nomografii.

Po Konferencji Naukowej w Zakopanem w dniach 22.IX-2.X.1964 kilku gości zagranicznych, którzy zatrzymali się dłużej w naszym kraju, oraz kilka osób, które przyjechały w terminie późniejszym, wygłosili szereg referatów.

Profesor L. SOBRERO z uniwersytetu w Trieście wygłosił cztery wykłady na temat zastosowania funkcji hiper-zespolonych w teorii sprężystości oraz cztery wykłady z teorii nomografii.

Profesor A. A. ILJUSZIN z Uniwersytetu Moskiewskiego wygłosił trzy wykłady o podstawach teorii plastyczności. Z innych wykładów wymienimy:

referaty profesora GIANGRECO z Neapolu o nośności granicznej belek i konstrukcji prętowych, wykład profesora L. M. KACZANOWA z Uniwersytetu w Leningradzie o podstawach teorii pełzania,

profesora N. M. MUSZTARI z Uniwersytetu w Kazaniu, który podał informacje o pracach z dziedziny teorii powłok w Kazańskim Instytucie Fizyko-Technicznym Akademii Nauk ZSRR oraz wygłosił wykład o teorii trójwarstwowych płyt i powłok z nieliniowym wypełniaczem,

profesora M. MIŚCICU z Instytutu Mechaniki w Bukareszcie o teorii mikrostruktur ciał z efektami wyższych rzędów.

kandydat nauk M. J. GUSEJN-ZADE (Moskwa) wygłosiła wykład na temat warunków istnienia zanikających rozwiązań w zagadnieniu płaskim teorii sprężystości.

Marek Sokolowski (Warszawa)

SYMPOZJA NAUKOWE IUTAM

W czasie Kongresu (2 września 1964) odbyło się również Walne Zebranie Międzynarodowego Stowarzyszenia Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej IUTAM. Obradowało ono między innymi nad programem przyszłych Sympozjów z zakresu Mechaniki Stosowanej.

Przewiduje się zorganizowanie następujących Sympozjów:

W kwietniu 1965 w Paryżu Sympozjum na temat ostatnich postępów w zakresie mechaniki drgań liniowych,

w czerwcu 1965 w Paryżu Sympozjum na temat trajektorji sztucznych ciał kosmicznych (impreza organizowana wspólnie przez GOSPAR, IAV, IUTAM),

we wrześniu 1965 w Nicei Sympozjum na temat dynamiki gazów kosmicznych (IAV, IUTAM),

w marcu 1966 w La Jolla (Kalifornia) Sympozjum na temat układów wirujących cieczy,

we wrześniu 1966 w Kyoto (Japonia) Sympozjum na temat warstwy przyściennej i turbulencji (IUGG, IUTAM).

W terminie jeszcze niesprecyzowanym dalsze Sympozja na temat zjawisk nieodwracalnych w mechanice kontinuwów, na temat powłok cienkościennych, na temat zmęczenia oraz na temat mechaniki nieliniowej.

W czasie Walnego Zebrania odbyły się również wybory nowego Zarządu IUTAM. Z uwagi na upływ kadencji ustąpili zeń profesorowie N. I. MUSHELISZWILI, F. K. G. ODQUIST i H. ZIEGLER.

Na ich miejsce wybrani zostali profesorowie L. I. SIEDOW (ZSRR), W. OLSZAK (Polska) i H. PARKUS (Austria).

Następny zeszyt *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* zawiera prace

S. KALISKI, O pewnym uogólnieniu metody ortogonalizacyjnej

W. SZCZEPIŃSKI, Wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesów ciągnięcia metali

W. BOGUSZ, J. SKOWROŃSKI, Synteza kinetyczna ogólnego układu mechanicznego

Z. THRUN, O pewnym sposobie przybliżonego obliczania nieliniowych zagadnień przewodnictwa
cieplnego,

W. GUTKOWSKI, Geometria różnicowa przestrzennej siatki punktów

J. ORKISZ, Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy dużych
odkształceniach niesprężystych

Biuletyn Informacyjny PTMTS

SPIS TREŚCI

ZESZYT 1/1963

- Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jedynym stopniu swobody
- A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych
- Z. DŻYGADŁO, M. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów
- W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962

ZESZYT 2/1963

- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności
- Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych
- E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych
- A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 1/1964

- S. KALIŃSKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia
- R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LITEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastooptycznych materiałów używanych w elastooptyce
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ZESZYT 2/1964

- R. S. DOROSZKIEWICZ, Fotosprężyste badania przekroju poprzecznego zapory filarowej
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym, z uwzględnieniem wpływu podłoża
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań fotosprężystych wirnika generatora dużej mocy
- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych
- W. PIECHOCKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo-brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoshenki
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągłe mniej więcej w odstępach kwartalnych.

Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa

MECHANIKĘ TEORETYCZNĄ I STOSOWANĄ można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (PKiN)

Poprzednie numery MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ można nabyć w Sekretariacie PTMTS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 23-cie, pokój nr 2305
