

y. II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 2 • ZESZYT 1



Pw<sup>a</sup>

WARSZAWA 1964  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## SPIS TREŚCI

S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu Устойчивость движения системы осцилляторов движущихся по балке на упругом основании Stability of the motion of a system of oscillators moving on a beam on elastic foundation	3
Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości Обзор польских работ, касающихся задач с перерывными краевыми условиями в теории упругости Review of the Polish papers concerning the problems with discontinuous boundary conditions in the theory of elasticity	15
Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi Физические уравнения для упругого тела с геометрически-тепловыми связями Constitutive equations for elastic materials with thermo-geometric constraints	25
W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia Определение напряжений на основе замера одной компоненты деформированного состояния Determining of stresses based on measuring of one strain component only	39
R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LIТEWKA, Doraźne badania własności mechanicznych i elastoopływcznych materiałów używanych w elastoоптыке Текущее испытание механических и фотоупругих свойств материалов применяемых в фотоупругости Testing of mechanical and photoelastic properties of the photoelastic materials Biuletyn Informacyjny PTMTS	45 61

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 2 • Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 6 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A  
WITOLD WIERZBICKI—PRZEWODNICZACY  
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ) · JERZY LIT-  
WINISZYN (KRAKÓW) · ADAM MITZEL (WROCŁAW)  
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA) · STANISŁAW  
OCHĘDUSZKO (GLIWICE) · WACŁAW OLSZAK  
WARSZAWA) · MARIAN PIĄTEK (GDAŃSK)  
JAN SZMELTER (ŁÓDŹ)

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y  
A R T U R K A C N E R — R E D A K T O R  
JÓZEF JANICZEK · ZBIGNIEW OLESIAK  
M A R E K S O K O Ł O W S K I

## REDAKCJA

W a r s z a w a, Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 213

---

Nakład 1000(900+100) Arkuszy wydawn. 5,75. Arkuszy drukarskich 4,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 15.I-64 r., druk ukończono w sierpniu 1964 r. Cena zł 18.—

---

Zam. 82/64 Z-85 Druk. im. Rewolucji Październikowej

## STATECZNOŚĆ RUCHU UKŁADU OSCYLATORÓW PORUSZAJĄCYCH SIĘ PO BELCE NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

SYLWESTER KALISKI (WARSZAWA)

### Wstęp

W pracy [1] rozważony został problem drgań samowzbudnych układu oscylatorów mechanicznych poruszających się po powierzchni półprzestrzeni sprężystej. Wyznaczono prędkości krytyczne oraz obszary niestateczności, wewnątrz których drgania oscylatorów mają charakter narastający. Praca [1] niezależnie od jej bezpośredniego znaczenia w mechanice stanowiła wstęp do znacznie ogólniejszego zagadnienia z dziedziny magnetosprężystości, dotyczącego samowzbudnego narastania drgań strumienia elektronów nad doskonałym przewodnikiem sprężystym w pierwotnym polu magnetycznym. Zagadnienie to stanowi temat odrębnej publikacji.

Jednakże w związku z pracą [1] nasuwa się podobne zagadnienie, mianowicie zagadnienie stateczności ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na podłożu sprężystym. Rozwiązanie tego zagadnienia stanowi cel niniejszej pracy.

Podobne zagadnienie było rozważane w pracy [2] przy badaniu ruchu masy poruszającej się po belce na podłożu sprężystym przy działaniu na masę okresowej siły wymuszającej. Rozważono tam również kwestię uresorowania masy jednakże pod kątem drgań wymuszonych, nie rozważano natomiast problemu drgań samowzbudnych. Problem ruchu masy po belce rozpatrzono w wielu pracach, których nie cytujemy tutaj (por. np. [3]).

Sformułowane wyżej zagadnienie posiada liczne bezpośrednie aspekty praktyczne, wspomnimy tutaj chociażby problem stateczności pojazdów uresorowanych na szynach itp. Prędkości krytyczne ruchu statecznego są w takich przypadkach dość wysokie, jednakże biorąc pod uwagę coraz to większe stosowane prędkości eksploatacyjne zagadnienie to nabiera coraz większej wagi praktycznej.

W pracy zastosujemy metodykę rozwiązania opracowaną w [1]. Poza tym ograniczymy się gwooli przejrzystości wywodów oraz otrzymania prostych wyników do przypadku najprostszego, tj. układu liniowych oscylatorów bez tłumików, rozłożonych równomiernie oraz poruszających się ze stałą prędkością  $U$ . Oczywiście uogólnienie rezultatów na przypadek oscylatorów rozłożonych gęsto na odcinku bądź oscylatora skupionego, jak również uwzględnienie tłumie-

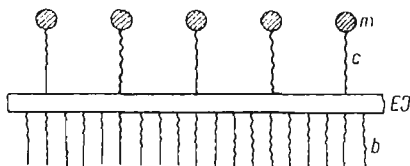
nia nie przedstawia przy stosowanej metodzie rozwiązania żadnych trudności. Wyniki jakościowe nie ulegają w zasadzie zmianie, pewne osobliwości wprowadza jedynie tłumienie, jeśli osiąga pewne wartości krytyczne.

Inaczej ma się oczywiście sprawa z oscylatorami nieliniowymi; tutaj pojawiają się trudności dodatkowe natury zasadniczej. Niektóre jednak przypadki szczególnie zarówno w [1] jak i w rozpatrywanym obecnie problemie można rozwiązać; odkładamy je do dalszych prac.

W punkcie drugim niniejszej pracy podajemy równania wyjściowe, w punkcie trzecim konstruujemy rozwiązania otrzymanych równań oraz dyskutujemy warunki niestateczności, w punkcie czwartym obliczamy parametry krytyczne i obszary niestateczności dla różnych przebiegów parametrów wyjściowych zadania, wreszcie w punkcie piątym podajemy uogólnione sformułowanie problemu na przypadek oscylatorów złożonych o kilku stopniach swobody.

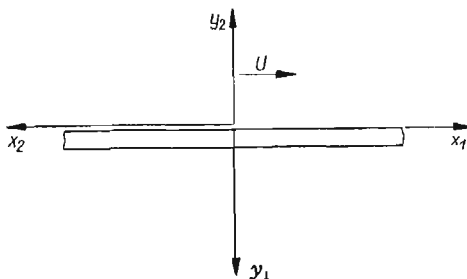
## 2. Równania ruchu

Rozważmy belkę na podłożu sprężystym, po której porusza się gęsto równomiernie rozłożony układ oscylatorów mechanicznych (rys. 1) o masie  $m$  oraz stałej sprężystej  $c$ , odniesionych do jednostki długości belki.



Rys. 1

Układ oscylatorów porusza się w kierunku  $x_1$  ze stałą prędkością  $U$ . Rozważmy dwa układy współrzędnych, jeden związany z ruchomym układem oscylatorów, drugi z belką (rys. 2).



Rys. 2

Niech na belkę działa ruchome okresowe ciśnienie

$$(2.1) \quad p_1(x_1, t) = p e^{ik_1(x_1 - v_1 t)},$$

analogicznie na układ oscylatorów

$$(2.2) \quad p_2(x_2, t) = p e^{ik_2(x_2 - v_2 t)}.$$

Ciśnienie działające na układ oscylatorów działa na sprężyny oscylatorów w płaszczyźnie kontaktu z belką (rys. 1).

Równanie ruchu belki przyjmie w związku z tym postać

$$(2.3) \quad EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} + \rho \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b y_1 = p_1(x_1, t),$$

gdzie  $EI$  oznacza sztywność belki,  $\rho$  masę belki na jednostkę długości,  $b$  stałą sprężystą podłoża na jednostkę długości belki.

Równania ruchu układu oscylatorów mają postać

$$(2.4) \quad m \ddot{y}_2 + c(y_2 - y_{20}) = 0,$$

gdzie  $y_{20}$  jest przemieszczeniem punktu styku oscylatora z belką. Funkcje  $y_2$  oraz  $y_{20}$  zależą od  $x_2$  i  $t$ .

Przy drganiach okresowych  $y_2$  wyrazi się oczywiście przez  $y_{20}$  za pomocą warunku brzegowego

$$(2.5) \quad c(y_2 - y_{20}) = -p_2(x_2, t).$$

Jeżeli oba układy współrzędnych, tj. dla belki i oscylatorów są związane ze sobą, wtedy muszą dodatkowo zachodzić związki zgodności przemieszczeń  $y_1$  i  $y_{20}$  oraz zgodności ciśnień  $p_1$ ,  $p_2$ :

$$(2.6) \quad p_1 = p_2, \quad y_1 = -y_{20}.$$

Warunki (2.6) są już zapisane w jednolitym układzie współrzędnych (związanym z belką).

Związki pomiędzy obu układami współrzędnych (rys. 2) są następujące:

$$(2.7) \quad x_1 + x_2 = Ut, \quad y_1 + y_2 = 0,$$

gdzie  $U$  jest prędkością przemieszczania się układu oscylatorów po belce.

Przytoczone wyżej oba układy równań oraz związki (2.6) i (2.7) określają w pełni nasz problem. Będziemy poszukiwali takich obszarów zmiany  $U$ , przy których rozwiązania zagadnienia w postaci fal bieżących przestaną być stateczne, tj. przy których amplitudy drgań będą narastać w czasie.

Przejdźmy obecnie do dyskusji rozwiązań powyższych równań oraz warunku niestateczności drgań.

### 3. Rozwiązanie równań i warunki niestateczności drgań

Rozwiązań równań (2.3) i (2.4) poszukiwać będziemy w postaci:

$$(3.1) \quad y_1 = A e^{ik_1(x_1 - v_1 t)}, \quad y_{20} = B e^{ik_2(x_1 - v_2 t)}, \quad y_2 = C e^{ik_3(x_2 - v_3 t)}.$$

Podstawiając (3.1) do układu równań (2.3) i (2.4) znajdujemy wykorzystując (2.1) i (2.2) oraz (2.5)

$$(3.2) \quad A = \frac{p}{EI k_1^4 - \rho k_1^2 v_1^2 + b} = \frac{p}{\rho k_1^2 (R - v_1^2)},$$

gdzie

$$R = \frac{1}{\rho} \left( EI k_1^2 + \frac{b}{k_1^2} \right)$$

oraz

$$(3.3) \quad B = - \frac{\alpha_0^2 - v_2^2}{v_2^2} \frac{p}{c} = - \frac{p}{m k_2^2} \frac{\alpha_0^2 - v_2^2}{\alpha_0^2 v_2^2},$$

$$(3.4) \quad C = - \frac{p}{c} \frac{\alpha_0^2}{v_2^2} = - \frac{p}{m k_2^2} \frac{1}{v_2^2},$$

gdzie  $\alpha_0^2 = c/mk_2^2$ .

Rozwiązania niestateczne, a więc drgania samowzbudne, wystąpią wtedy, gdy

$$(3.5) \quad \text{Im}(k_i v_i) > 0.$$

Dla otrzymania równania charakterystycznego, z którego wyznaczmy parametry krytyczne  $U$ , zwiążemy oba układy rozwiązań (3.2), (3.3) i (3.4) z warunkami (2.6) i (2.7). Mianowicie z pierwszego z warunków (2.6) przy wykorzystaniu również pierwszego z warunków (2.7) znajdujemy w jednolitym układzie współrzędnych

$$(3.6) \quad k_1 + k_2 = 0,$$

skąd przyjmujemy

$$(3.7) \quad k_1 = k, \quad k_2 = -k$$

oraz

$$(3.8) \quad v_1 + v_2 = U.$$

Następnie na podstawie drugiego z warunków (2.6) oraz (2.7) otrzymamy po wykorzystaniu (3.7) oraz pierwszego z warunków (2.6)

$$(3.9) \quad \frac{1}{\rho k^2 (R - v_1^2)} = \frac{1}{m k^2} \frac{\alpha_0^2 - v_2^2}{\alpha_0^2 v_2^2},$$

lub

$$(3.10) \quad v_1^2 = R - \frac{1}{\eta} \frac{\alpha_0^2 v_0^2}{\alpha_0^2 - v_2^2},$$

gdzie  $\eta = \rho/m$ .

Układ równań (3.8) i (3.10) stanowi ostateczny układ równań charakterystycznych względem  $v_1, v_2$ , z którego obliczyć możemy  $U_{kr}$  oraz obszary niestacności.

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.11) \quad \bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{R}}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\sqrt{R}}, \quad \alpha^2 = \frac{\alpha_0^2}{R}$$



możemy układy (3.8) i (3.10) sprowadzić do postaci następującej:

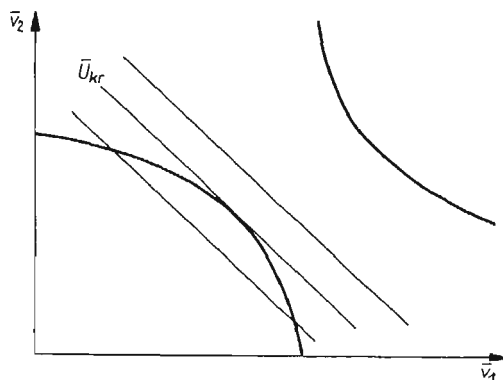
$$(3.12) \quad \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{U}, \quad \bar{v}_1^2 = 1 - \frac{1}{\eta} \frac{\alpha^2 \bar{v}_2^2}{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}.$$

Układ (3.12) można eliminując np.  $\bar{v}_1$  sprowadzić do równania względem  $\bar{v}_2$  zależnego od parametru  $U$ , mianowicie

$$(3.13) \quad \bar{v}_2^4 - 2\bar{U}\bar{v}_2^3 + \left( \bar{U}^2 - \alpha^2 - 1 - \frac{\alpha^2}{\eta} \right) \bar{v}_2^2 + 2\alpha^2 \bar{U}\bar{v}_2 + \alpha^2(1 - U^2) = 0.$$

Ze względu na fakt, że dyskusja równania (3.13) jest bardzo uciążliwa, będziemy w dalszym ciągu posługiwali się równaniami (3.12) oraz stosowali numeryczną metodę rozwiązania.

Aby rozstrzygnąć problem drgań samowzbudnych układu oscylatorów, należałoby rozwiązać układ równań (3.12) bądź równanie (3.13) i znaleźć takie zakresy zmiany  $\bar{U}$ , przy których otrzymalibyśmy dla  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  rozwiązania zespolone czyniąc zadość warunkom (3.5). Ponieważ jednakże rozwiązanie równania (3.13) w postaci jawnej, aczkolwiek teoretycznie możliwe, napotyka praktycznie na znaczne trudności rachunkowe, postąpimy inaczej. Mianowicie ponieważ wspólny obszar istnienia możliwych rzeczywistych rozwiązań  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  drugiego z równań (3.12) nie jest ograniczony, zatem kreśląc w płaszczyźnie  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  krzywe przedstawiające drugie z równań (3.12), będziemy szukali przecięć tych krzywych z prostą  $\bar{v}_2 = \bar{U} - \bar{v}_1$ .



Rys. 3

Jeżeli przy danym  $\bar{U}$  będą istniały pierwiastki rzeczywiste, to będą one odpowiadały drganiom statecznym. Jeżeli zaś począwszy od pewnego  $\bar{U} = \bar{U}_{kr}$  pierwiastki rzeczywiste  $\bar{v}_i$  przestaną istnieć, wtedy rozpocznie się obszar niestateczności — obszar drgań samowzbudnych układu oscylatorów (rys. 3)<sup>1</sup>.

Fakt ten można uzasadnić bezpośrednio stosując rachunek zaburzeń. Do-

<sup>1</sup> Obszar niestateczności dla  $\bar{U}$  nazywać będziemy w dalszym ciągu zredukowanym obszarem niestateczności, zaś obszar dla samego  $U$  bezpośrednio obszarem niestateczności.

wodu tego nie przytoczymy tutaj, gdyż został on przedstawiony w pracy [1], sposób zaś postępowania w naszym przypadku będzie identyczny. Gdy  $\bar{U}$  wzrastając osiągnie ponownie wartości, przy których pojawiają się pierwiastki rzeczywiste, to będzie to górna granica  $\bar{U}$  przedziału (obszaru) niestateczności drgań.

Obszar badania rozwiązań we współrzędnych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  można ograniczyć dla  $\bar{v}_1$  do pierwszej ćwiartki płaszczyzny zespolonej, zaś dla  $\bar{v}_2$  do czwartej.

Z pierwszego z równań (3.12) wynika, że rozwiązania dla  $\bar{v}_i$  muszą mieć postać

$$(3.14) \quad \bar{v}_1 = r_1 + i\varepsilon, \quad \bar{v}_2 = r_2 - i\varepsilon.$$

Poza tym z drugiego z równań (3.12) wynika, że wielkości

$$(3.15) \quad \bar{v}_1 = -r_1 + i\varepsilon, \quad \bar{v}_2 = -r_2 - i\varepsilon$$

jak również

$$(3.16) \quad \bar{v}_1 = r_1 - i\varepsilon, \quad \bar{v}_2 = r_2 + i\varepsilon$$

czynią zadość układowi równań (3.12), przy czym dla (3.15) należy zamiast  $\bar{U}$  przyjmować  $-\bar{U}$ . Stąd więc wynika poprawność przyjętego uproszczenia i w dalszym ciągu będziemy badali układ dla postaci rozwiązań (3.14) przy  $r_1, r_2 > 0$  oraz  $\varepsilon > 0$ , tzn. stosując opisaną wyżej metodę określania  $\bar{U}_{kr}$  poprzez poszukiwanie krzywej  $\bar{v}_1 = f(\bar{v}_2)$  dla rzeczywistych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  i punktów przecięcia z prostą  $\bar{v}_2 = \bar{U} - \bar{v}_1$ . Ograniczymy się do dodatnich  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ , tj. do pierwszej ćwiartki w płaszczyźnie zmiennych rzeczywistych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ .

Przejdziemy obecnie do określenia liczbowego krytycznych prędkości oraz obszarów niestateczności rozwiązań dla różnych zakresów zmiany parametrów naszego układu, co wyczerpie możliwe praktyczne warianty rozwiązań problemu.

#### 4. Parametry krytyczne — obszary niestateczności

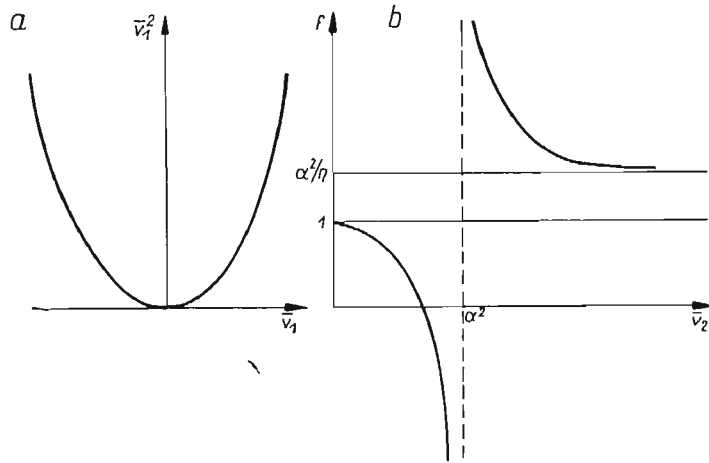
W celu liczbowego wyznaczenia prędkości krytycznych oraz obszarów niestateczności przy różnych parametrach zadania przeprowadzimy tabelaryzację równania (3.12) (drugiego) dla różnych  $a^2, k$  oraz  $\eta$ , co pozwoli wyznaczyć numerycznie przebieg krzywych  $\bar{v}_1 = f(\bar{v}_2)$ , gdzie  $f^2(\bar{v}_2)$  jest prawą stroną drugiego z równań (3.12). Przy sporządzaniu tabeli stosowano dokładność możliwą do otrzymania na suwaku. Dane powyższe zestawione zostały w tablicy 1.

Zgodnie z dyskusją, przeprowadzoną w poprzednim punkcie, drgania układu oscylatorów są niestateczne w obszarze, w którym układ równań (3.12) nie posiada rozwiązań rzeczywistych. Granice tego obszaru wyznaczamy badając układ równań (3.12) dla zmiennych rzeczywistych  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  i poszukując takich  $\bar{U} = \bar{U}_{kr}$ , przy których prosta  $\bar{v}_2 = \bar{U} - \bar{v}_1$  jest styczną do krzywej  $\bar{v}_1 = f(\bar{v}_2)$ . Zauważmy jeszcze, że po wyznaczeniu na podstawie układu równań (3.12)  $\bar{U}_{kr}$ , samo  $U_{kr}$  obliczamy ze stosunku (3.11), pamiętając że  $R$  zależy również od  $k$ ,

Tablica 1

$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$										
	$a^2 = 1,0$ $R = 10^8$ $\eta = 10^{-1}$	1,0 $10^8$ 10,0	1,0 $10^8$ 10,0	1,0 $10^8$ 10,0	10,0 $10^8$ 1,0	$10^2$ $10^8$ 1,0	$EI = 2 \cdot 10^{11}$	$b = 20$	$c = 2 \cdot 10^2$	$q = 2 \cdot 10^{-2}$	
0,1	0	0,89	0,99	1,0	0,89	0,90	$k^2 = 10^{-7}$ 0,89	$10^{-6}$ 0,89	$10^{-5}$ 0,90	$10^{-4}$ $\infty$	$10^{-3}$ 1,0011
0,2		0,75	0,97	0,998	0,80	0,80	0,80	0,79	0,79	$10^{-1}$ 1,20	$10^{-3}$ 1,20
0,3		0,57	0,96	0,996	0,69	0,70	0,69	0,68	0,68	$10^8$ 1,15	$10^{10}$ 1,15
0,4		0,33	0,93	0,993	0,58	0,60	0,58	0,58	0,58	1 1,13	1 1,13
0,5		0,0	0,90	0,99	0,48	0,50	0,48	0,45	0,45	1 1,125	1 1,125
0,6			0,85	0,985	0,36	0,40	0,36	0,32	0,32	1,12 1,116	1,12 1,116
0,7			0,77	0,979	0,25	0,30	0,25	0,19	0,19	1,114 1,112	1,114 1,112
0,8			0,60	0,96	0,13	0,20	0,13	0,05	0,05	1,111 1,111	1,111 1,111
0,9			0,10	0,91	0,10	0	0,10				
1,0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$						
2,0	21,0	3,0	1,2	1,02	0,89	0,90	0,89				
3,0	16,0	2,5	1,15	1,015							
4,0	14,3	2,33	1,13	1,013							
5,0	13,5	2,25	1,12	1,012					$\infty$		
10,0	12,1	2,11	1,11	1,011	$\infty$		$\infty$	11,0	11,0		
20,0	11,5	2,05	1,05	1,05	21,0	101,0	21,0	7,66	7,66		
$\infty$	11,0	2,0	1,1	1,01	11,0	101,0	11,0	6,0	6,0	1,1	1 001

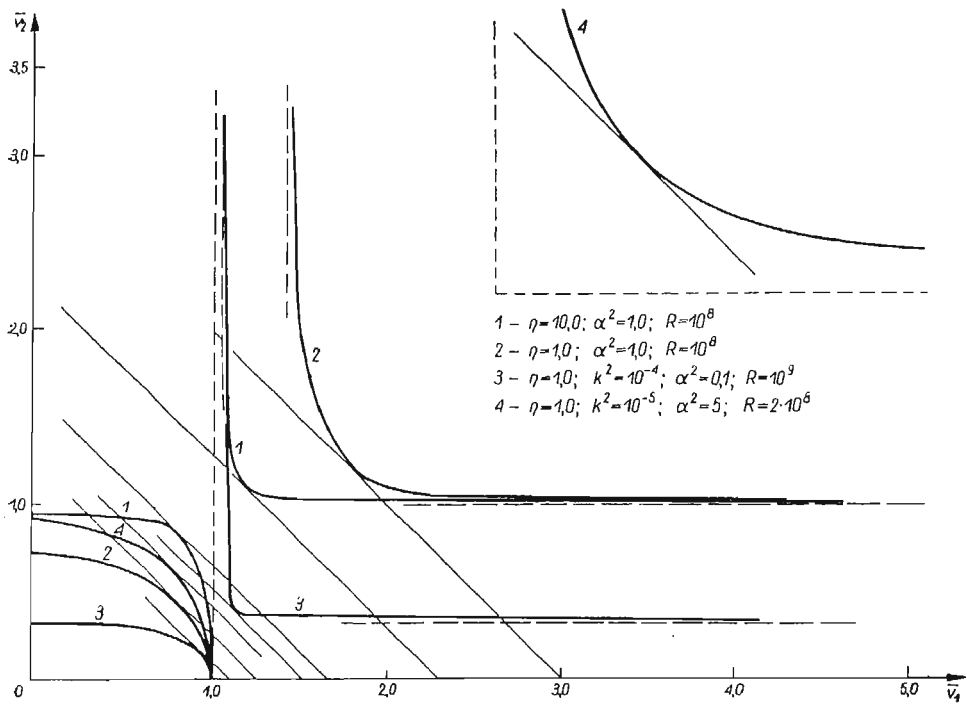
tn. od długości fali. Ogólna postać wykresów lewej i prawej strony drugiego z równań (3.12) podana jest na rys. 4.



Rys. 4

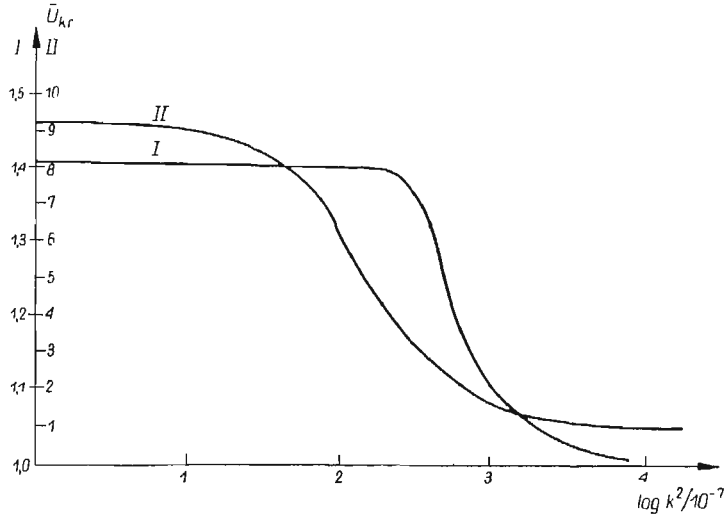
Przebieg krzywych  $\bar{v}_1 = f_1(\bar{v}_2)$  oraz wartości  $\bar{U}_{kr}$  dla kilku wybranych układów parametrów  $\alpha^2$ ,  $k$  i  $\eta$  z tablicy 1 przedstawiony jest na rys. 5.

Jeżeli powtórzyć konstrukcję wyznaczania  $\bar{U}_{kr}$  przedstawioną na rys. 5 dla zagęszczonych wartości parametrów  $k$ , przy ustalonym  $\eta$  oraz danych  $c$ ,  $EI$ ,  $b$ ,



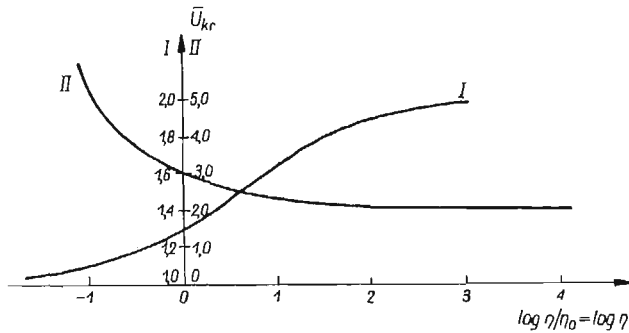
Rys. 5

wtedy można zbudować wykres zależności dolnej ( $\bar{U}_{kr}$ ) i górnej granicy zredukowanego obszaru niestateczności od  $k$ . Wykres taki w skali logarytmicznej przedstawiony został na rys. 6, przy czym przyjęto różną skalę pionową dla dolnej



Rys. 6

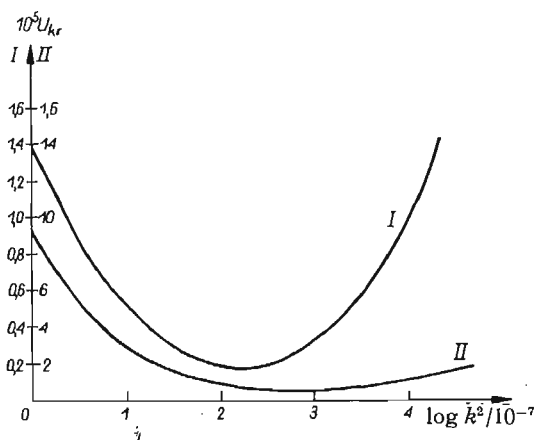
i górnej granicy zredukowanego obszaru niestateczności. Poza tym przyjęto pewne  $k^2$  charakterystyczne, mianowicie  $k^2 = 10^{-7}$  jako wielkość odniesienia. Wielkość ta została przyjęta dowolnie, tak aby odpowiadała pewnym typowym danym praktycznym.



Rys. 7

Wykres na rys. 6 sporządzono dla ustalonego  $\eta$ , mianowicie  $\eta_0 = 1$ . Aby mieć pełny obraz przebiegu zjawiska na rys. 7, sporządzono wykresy przebiegu obu granic zredukowanego obszaru niestateczności w funkcji  $\eta$  (w skali logarytmicznej) przy ustalonych  $c$ ,  $EI$ ,  $b$  i  $k$  lub inaczej przy ustalonych wartościach  $a^2$  i  $R$ . Budując wykresy przy danych parametrach  $a^2$  i  $R$  nie trzeba specyfikować wzajemnych związków pomiędzy  $c$ ,  $EI$ ,  $b$  i  $k$ . Jednakże dla wyznaczenia przebiegu  $\bar{U}_{kr}$  jako funkcji  $k$  (rys. 6) trzeba było przyjąć ustalone wartości

$c$ ,  $EI$ ,  $b$ . Wykresów oddzielnych dla różnych wzajemnych stosunków  $c$ ,  $EI$ ,  $b$  nie przytaczamy, mieszczą się one w tablicy 1 przy uzależnianiu  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  według parametrów  $\alpha^2$  oraz  $R$ . Z rysunku 7 wynika, że przy rosnącym  $\eta$  (przy ustalonych pewnych wartościach pozostałych parametrów) dolna i górna granica zredukowanego obszaru niestateczności zbiegają się, tzn. obszar niestateczności maleje do zera, przy malejącym natomiast  $\eta$  na odwrót rośnie do nieskończoności. Nie omawialiśmy rys. 6, gdyż przedstawia on  $\bar{U}_{kr}$  dolne i górne w zależności od  $k$ , nie zaś samo  $U_{kr}$ . Korzystając ze związku (3.11) sporządzono na rys. 8 wykres przebiegu  $U_{kr}$  dolne i górne jako funkcję  $k$ , tj. zmianę w funkcji  $k$  dolnej i górnej granicy obszaru niestateczności. Wykres sporządzono w oparciu o wykres i dane z rys. 6. Z rysunku 8 wynika, że przy zmiennych  $k$



Rys. 8

i pewnych ustalonych wartościach pozostałych parametrów  $U_{kr}$  dolne i górne posiadają minima, przy czym oba minima na ogół nie pokrywają się, leżą natomiast blisko siebie.

Na podstawie tablic i wykresów przytoczonych w niniejszym punkcie można w zasadzie prześledzić przebieg  $U_{kr}$  i obszaru niestateczności w zależności od zmiany i wzajemnego stosunku wchodzących w rozwiązanie parametrów w zakresach ich praktycznej zmienności. Z rozwiązań tych wynikają następujące wnioski:

1. Przy ustalonych  $k$ ,  $EI$ ,  $b$ ,  $c$  w zależności od  $\eta = m/q$  dolna granica obszaru niestateczności rośnie z  $\eta$  do pewnej asymptoty, górna zaś rośnie z malejącym  $\eta$  począwszy od pewnej wartości asymptotycznej do nieskończoności. Obszar niestateczności maleje przy rosnącym  $\eta$  do zera i rośnie przy malejącym do nieskończoności.

2. Przypadek ruchu sztywnej masy po belce otrzymamy przy danych  $\eta$ ,  $k$ ,  $EI$ ,  $b$ , jeżeli przyjąć  $c \rightarrow \infty$ , tj.  $\alpha^2 \rightarrow \infty$ . Wtedy

$$(4.1) \quad \bar{v}_1^2 = 1 - \frac{\bar{v}_2^2}{\eta}$$

i górna granica obszaru niestateczności dąży do nieskończoności, dolna zaś zmierza do asymptoty zależnej od pozostałych parametrów (por. tablica 1). Stąd wniosek, że przy przekroczeniu  $U_{kr}$  ruch będzie niestateczny dla dolnego  $U$ .

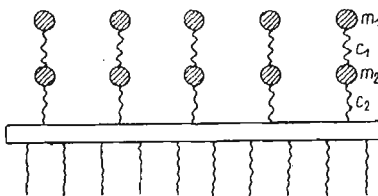
3. Przy ustalonych  $\eta, EI, b, c$  górna i dolna granica obszaru niestateczności posiadają minimum względem  $k$ . Minima te są na ogół położone blisko siebie, nie pokrywają się jednak.

### 5. Oscylatory o kilku stopniach swobody

Na zakończenie niniejszej pracy rozważmy jeszcze pokrótce przypadek bardziej złożonego układu oscylatorów poruszających się po belce, mianowicie układu złożonego z oscylatorów o kilku stopniach swobody. Tok ogólny rozwiązania pozostaje taki sam jak poprzednio, zmieni się jedynie postać prawej strony równania (3.9). Na przykład dla oscylatora o dwóch stopniach swobody (rys. 9) przyjmie ona postać

$$(5.1) \quad \frac{1}{\rho k^2 (R - v_1^2)} = \frac{1}{c_2} \frac{1}{\frac{(c_1 - k^2 v_2^2 m_1) c_2}{(c_1 - k^2 v_2^2 m_1) (c_1 + c_2 - k^2 v_2^2 m_2 - c_1)}}$$

Obraz jakościowy rozwiązań zachowuje się w tym przypadku podobnie jak dla układu oscylatorów o jednym stopniu swobody z tym, że obecnie dojdą pewne osobliwości związane z dodatkowymi częstościami drgań własnych oscylatorów. Poza tym przy specjalnie dobranych związkach pomiędzy parametrami zadania wynika szereg specjalnych związków dotyczących wzajemnego stosunku amplitud mas i belki itp. Zagadnienia tego nie będziemy rozważali oddzielnie, ponieważ w toku rozwiązania nie zachodzą żadne istotne zmiany.



Rys. 9

To samo dotyczy kwestii tłumienia (tłumiki oscylatorów i tłumienie w belce) oraz ograniczonego układu oscylatorów bądź oscylatora pojedynczego. Przy uwzględnieniu tłumienia metoda konstrukcji rozwiązania pozostaje niezmienną, natomiast zmianie ulegają wyniki ilościowe. Jakościowe różnice otrzymuje się przy pewnych (stosunkowo bardzo dużych) krytycznych wartościach tłumienia. Aby nie komplikować obrazu dodatkowymi parametrami, w pracy rozważaliśmy najprostszy układ. Tok rozwiązania, jak stwierdziliśmy, nie ulega zmianie. Rozwiązanie komplikuje się w sposób istotny i zmienia się metoda postępowania, gdy mamy do czynienia z oscylatorami nieliniowymi.

Niektóre jednakże przypadki nieliniowych oscylatorów poruszających się po belce dają się stosunkowo prosto rozwiązać. Zagadnienie to będzie tematem osobnego komunikatu.

#### Literatura cytowana w tekście

[1]. S. KALISKI, *Self-excited vibrations of an oscillator system moving on the surface of an elastic half-space*, Proc. Vibr. Probl., w druku.

[2]. Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, А. П. ФИЛИПОВ, *Установившиеся колебания балки на упругом основании при движении груза с постоянной скоростью*, Тр. Лабор. гидравл. машин, АН УССР, в. 10, 1962.

[3]. В. М. МУЧНИКОВ, *Некоторые методы расчёта упругих систем на колебания при подвижной нагрузке*, Издат. Лит. Стр. Арх., Москва 1953.

#### Резюме

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДВИЖУЩИХСЯ ПО БАЛКЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассмотрена задача о движении системы линейных осцилляторов по балке покоящейся на упругом основании. Показано, что в этом случае существуют области скоростей движения системы осцилляторов, при которых появляются колебания с самовозбуждением, следовательно движение неустойчиво. Определены критические скорости для нижней и верхней границы области неустойчивости. Даны диаграммы зависимости критических скоростей от разных переменных параметров системы. Обсужден ряд предельных случаев, напр. движение жесткой, неупруго подвешенной массы, весьма большой массы и т. п.

#### Summary

### STABILITY OF THE MOTION OF A SYSTEM OF OSCILLATORS MOVING ON A BEAM ON ELASTIC FOUNDATION

In the paper the problem of the motion of a system of linear oscillators moving on a beam on elastic foundation has been considered. It is shown that for such a motion there exist domains of velocity of the motion of a system of oscillators for which selfvibrations appear, thus the motion is unstable. The critical velocities are determined for the upper and lower boundaries of the unstable domain. The diagrams of the critical velocities as the functions of different parameters of the system are plotted and several limit cases as, for example, a motion of a rigid mass without springing or a motion of a very large mass are discussed.

ZAKŁAD BADAŃ DRGAŃ  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 października 1963 r.*



PRZEGLĄD POLSKICH PRAC DOTYCZĄCYCH ZAGADNIEŃ Z MIESZANYMI  
WARUNKAMI BRZEGOWYMI W TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

W niniejszym przeglądzie omówimy pewną klasę zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi, nazywaną czasem klasą zagadnień o nieciągłych warunkach brzegowych. Omawiać będziemy więc takie rodzaje mieszanych warunków brzegowych, przy których punkty nieregularne brzegu (załomy) nie pokrywają się z punktami rozgraniczającymi różne warunki brzegowe. Jednym z licznych przykładów zagadnień, których w tym przeglądzie nie będziemy rozpatrywać, będą płyty prostokątne o różnych warunkach brzegowych na poszczególnych bokach brzegu płyty, ale jednakowe na danym boku prostokąta.

Rozpatrywać będziemy zagadnienia z mieszanymi warunkami brzegowymi w mechanice ciała stałego w podanym powyżej sensie, opublikowane przez autorów polskich w czasopismach krajowych i zagranicznych. Prace te można grupować przyjmując za punkt wyjścia różne kryteria, a więc na przykład według działów mechaniki stosowanej jak teoria tarcz, płyt, powłok, klasyczna teoria sprężystości, termosprężystość itp. Można je również omawiać w porządku chronologicznym ich powstawania. W naszym przeglądzie odnośne prace będziemy rozpatrywać według zastosowanych metod matematycznych. Wymieńmy główne metody, którymi posługiwali się autorzy prac, a więc:

- 1) sprowadzenie zagadnienia do równań całkowych pierwszego rodzaju i następnie przybliżone lub ściśle (w pewnych prostszych przypadkach) ich rozwiązanie;
- 2) sprowadzenie zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju;
- 3) zastosowanie metody równań całkowych singularnych;
- 4) zastosowanie całek Fouriera lub Hankela lub metody transformacji całkowych z następującym rozwiązaniem układu dualnych równań całkowych lub wyznaczeniem współczynników w układzie dualnych szeregów;
- 5) zastosowanie metody Wienera-Hopfa.

Pracą, która w Polsce zapoczątkowała badania nad zagadnieniami o mieszanym warunkach brzegowych, był artykuł W. NOWACKIEGO [1]. Zastosowana metoda sprowadzała zagadnienia płyty z mieszanymi warunkami brzegowymi do równania całkowego pierwszego rodzaju lub układu równań całkowych pierwszego rodzaju w zależności od tego, ile jest odcinków o różnych warunkach brzegowych. Autor wymienionej pracy zajmuje się więc, w danym

konkretnym przypadku, rozwiązaniem równania biharmonicznego z następującymi warunkami brzegowymi:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \quad \text{na części brzegu płyty,} \\ w = 0, \quad \nabla^2 w = 0 & \quad \text{na pozostałej części brzegu płyty.} \end{aligned}$$

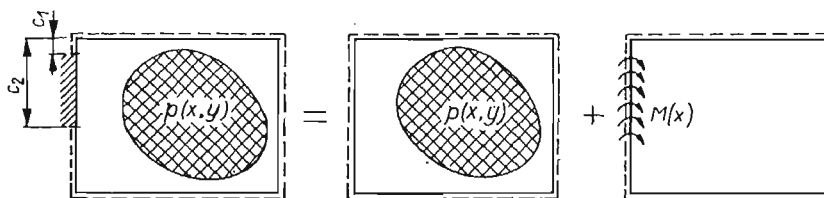
Powyższe warunki brzegowe odpowiadają płycie na części brzegu swobodnie podpartej, a na pozostałej—utwierdzonej zupełnie. Na wstępie rozważań został przyjęty tak zwany «układ podstawowy», jakim jest płyta na całym obwodzie swobodnie podparta. Dobór takiego, a nie innego układu podstawowego jest uwarunkowany znajomością prostego rozwiązania zagadnienia dla płyty swobodnie podpartej. Korzystając z zasady superpozycji ugięcie płyty można przedstawić jako sumę ugięcia od działającego obciążenia  $w_p$  dla układu podstawowego oraz ugięcia od momentów utwierdzenia. Oznacza to, że wymagana jest znajomość funkcji Greena, w tym przypadku ugięcia płyty spowodowanego działaniem skupionego momentu jednostkowego na brzegu płyty—układu podstawowego. Otrzymujemy następujące wyrażenie na ugięcie płyty:

$$(1.2) \quad w(x, y) = w_p(x, y) + \int_{c_1}^{c_2} M(\xi) w_1(\xi, 0; x, y) d\xi,$$

gdzie  $w_1$  jest funkcją Greena od momentu jednostkowego, a  $M(x)$  momentem na utwierdzonej części brzegu płyty. Nieznany rozkład momentu utwierdzenia zostanie wyznaczony z warunku, że kąt ugięcia na utwierdzonej części brzegu jest równy zero, czyli z następującego równania całkowego pierwszego rodzaju:

$$(1.3) \quad \int_{c_1}^{c_2} M(\xi) \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial n} d\xi + \frac{\partial w_p}{\partial n} = 0.$$

W innych przypadkach mieszanych warunków brzegowych, w szczególności dla podpór liniowych wewnątrz obszaru płyty, równanie posiada tę samą po-



Rys. 1

stać. Na ogół powyższe równania całkowe rozwiązuje się w sposób przybliżony sprowadzając je do układu liniowych równań algebraicznych. W pracy [1] przykład i dyskusję rozwiązania podano dla półpasma płytowego, w którym część krótszego brzegu jest utwierdzona zupełnie.

Metodę tę W. NOWACKI i inni autorzy rozszerzyli na szereg innych przypadków. Rozszerzenie to poszło w trzech kierunkach: pierwszy dotyczy innych kształtów płyt, drugi uwzględnia drgania i wyboczenie, wreszcie trzeci przenosi metodę na inne zagadnienia, mianowicie na teorię powłok, tarcz i klasyczne zagadnienia teorii sprężystości. Wymienimy prace W. NOWACKIEGO [2, 3] dotyczące płyt prostokątnych i płyt o kształtach, które można złożyć z prostokątów. Rozpatrzono tu między innymi przypadek płyty na części brzegu swobodnej, a na części swobodnie podpartej. Proste przykłady mieszanych warunków brzegowych w przypadku działania temperatury rozpatruje Z. THRUN [4]. Zagadnienia dynamiczne i utraty stateczności dla płyty prostokątnej zostały rozpatrzone w pracach [5 i 6], a dla płyty kołowej w pracach [7 i 8]. Zagadnieniami drgań i stateczności płyt podpartych w przeszłości i o nieciągłych warunkach brzegowych zajmuje się S. KALISKI w pracach [11 i 12]. Z innych prac wymienimy [13 i 14], w których rozpatrzono podpory liniowe w obszarze płyty kołowej oraz pracę [15], w której zagadnienie zostało rozszerzone na przypadek mieszanych warunków brzegowych w powłoce walcowej. Rozszerzenie metody równań całkowych pierwszego rodzaju na mieszane zagadnienia brzegowe teorii sprężystości ma miejsce w pracach W. NOWACKIEGO [9 i 10].

Przez zastosowanie tego samego toku rozumowania co poprzednio do płyt ze sprężystym utwierdzeniem i podparciem oraz płyt spoczywających na sprężystym podłożu winklerowskim W. NOWACKI i S. KALISKI [16 i 17] uzyskali nowe rozszerzenie samej metody. Tym razem zagadnienie zostało sprowadzone do równania całkowego drugiego rodzaju lub układu tych równań. Referat na ten temat został wygłoszony na IX Kongresie Mechaniki Stosowanej (Bruksela, 1956).

Przypuśćmy dla przykładu, że tak jak poprzednio mamy do czynienia z płytą prostokątną, swobodnie podpartą jako układem podstawowym. Załóżmy obecnie, że na odcinku  $o-c$  płyta jest sprężysto utwierdzona (lecz sztywnie podparta); możemy wtedy przyjąć, że kąt nachylenia stycznej do powierzchni na zamocowanym odcinku jest proporcjonalny do momentów utwierdzenia. Otrzymujemy więc z tego warunku następujące równanie całkowe drugiego rodzaju

$$(1.4) \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{1}{r} M(x) = \frac{\partial w_0}{\partial n} + \int_0^c M(\xi) \frac{\partial w_1(\xi, 0; x, 0)}{\partial n} d\xi,$$

skąd zostanie wyznaczony nieznan rozkład momentów sprężystego utwierdzenia.

A. KACNER, wykorzystując powyższy sposób sprowadzenia zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju, uzyskał rozwiązanie zamknięte dla półpasma płytowego w pewnym szczególnym przypadku nieciągłości warunków podparcia i ustalił osobliwości poszukiwanej funkcji momentu brzegowego. Otrzymał on rozwiązanie przechodząc do granicy z wartością współczynnika podatliwości [18, 19, 20]. W pracy [21] rozwiązując odpowiednie równanie

całkowe A. KACNER podał sposób eliminowania wpływu osobliwości jądra na dokładność wyniku. Prace [22, 23 i 24] tego autora oparte są na koncepcji dwóch układów podstawowych, z których uzyskuje się dwie grupy sprzężonych związków zawierających wszystkie nieznanne wielkości brzegowe, zarówno statyczne, jak i geometryczne. Związki te pozwalają na ustalenie charakteru osobliwości funkcji rozwiązujących i na sprowadzenie zagadnienia do równań całkowych drugiego rodzaju.

Sformułowanie zagadnienia dla mieszanych warunków brzegowych w teorii sprężystości w oparciu o twierdzenie Bettiego z wykorzystaniem funkcji Greena podał W. NOWACKI w pracy [25].

H. ZORSKI [26–29] przedyskutował charakter osobliwości powstających przy różnych kombinacjach warunków brzegowych dla płyt w kształcie półpłaszczyzny, ćwiartki płaszczyzny i półpasma płytowego, uwzględniając również płyty anizotropowe [28]. Sposób rozwiązania zagadnień jest następujący: autor wprowadza dwa potencjały biharmoniczne, za pomocą których można wyrazić ugięcie i kąt nachylenia stycznej do powierzchni ugięcia płyty:

(1.5)

$$P_1(x, y) = \frac{y^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{y^2 + (\xi - x)^2}, \quad P_2(x, y) = \frac{2y^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi) d\xi}{[y^2 + (\xi - x)^2]^2},$$

gdzie

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial n} w(x, 0), \quad \psi(x) = w(x, 0).$$

W podobny sposób wprowadzono dwa potencjały w przypadku, gdy na brzegu znane jest ugięcie i laplasjan ugięcia:

(1.6)

$$P_3(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi) d\xi}{y^2 + (\xi - x)^2}, \quad P_4(x, y) = \frac{y}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [y^2 + (\xi - x)^2] \mu(\xi) d\xi,$$

gdzie

$$\mu(x) = \nabla^2 w(x, 0).$$

Po zbadaniu wartości brzegowych wprowadzonych potencjałów i ich pochodnych znalezione zostały odpowiednie wyrażenia na wielkości statyczne. W oparciu o otrzymane wzory na odcinku, na którym dane jest ugięcie i jego laplasjan, dobrano w ten sposób kąt ugięcia, aby był spełniony warunek na laplasjan ugięcia. W wyniku otrzymano równanie całkowe silnie osobliwe pierwszego rodzaju z jądrem Cauchy'ego:

$$(1.7) \quad \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{\xi - x} = f(x), \quad x \in L.$$

Ponieważ jądro zawiera jedynie część charakterystyczną, równanie rozwiązuje się w postaci całek określonych. W podobny sposób H. ZORSKI otrzymał roz-

wiązanie dla brzegu na części utwierdzonego, a na pozostałej części swobodnego. Otrzymane wyniki pozwoliły na wyjaśnienie szeregu kwestii związanych z występującymi osobliwościami. Przytoczono szereg zamkniętych wyrażeń na wielkości statyczne i geometryczne. W przypadku ćwierćpłaszczyzny rozpatrzono zagadnienia, gdy jeden brzeg jest swobodnie podparty, a drugi podparty w sposób nieciągły. Wyniki pozwalają również na wyjaśnienie osobliwości w rogu płyty. Metodę równań całkowych singularnych wykorzystano jeszcze w pracy W. PIECHOCKIEGO i H. ZORSKIEGO dotyczącej termosprężystego zagadnienia klina [33].

W. NOWACKI [31] wykorzystując własności całek Hankela i przedstawiając rozkład temperatury w postaci takiej całki rozwiązał zagadnienie termosprężystości dla półprzestrzeni, w której na płaszczyźnie ograniczającej temperatura  $T = T_0$  dla  $r < a$ , natomiast jej gradient  $\partial T / \partial z = 0$  dla  $r > a$ . Metoda transformacji całkowych została zastosowana w wielu pracach. Sprowadzenie zagadnienie brzegowe do rozwiązywania dualnych równań całkowych zastosowano w kilku przypadkach zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi; i tak zagadnienie termosprężystości dla szczeliny osiowo-symetrycznej w przestrzeni termosprężystej rozwiązano w pracy [35]. Na powierzchni szczeliny dana była temperatura albo jej gradient. Układ dualnych równań całkowych otrzymujemy w sposób następujący. Przypuśćmy, że rozpatrujemy przypadek półprzestrzeni sprężystej ogrzanej na powierzchni ograniczającej na kole  $r < 1$  i izolowanej dla  $r > 1$ . Rozwiązanie zagadnienia stacjonarnego sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a z warunkami brzegowymi

$$T(r, 0) = v(r), \quad \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = 0.$$

Po wykonaniu transformacji Hankela zerowego rzędu na równaniu Laplace'a otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \bar{T} = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

$$\bar{T}(\xi, z) = A(\xi) e^{-\xi z}.$$

Po wstawieniu powyższego wyrażenia jako funkcji podcałkowej do wzoru na transformację odwrotną i wykorzystaniu warunków brzegowych otrzymamy następujące równania, zwane dualnymi równaniami całkowymi, z których wyznacza się nieznaną funkcję  $A(\xi)$ :

$$(1.8) \quad \int_0^{\infty} \xi A(\xi) \mathcal{Y}_0(r\xi) d\xi = C_1 y(r), \quad r < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \xi^2 A(\xi) \mathcal{Y}_0(r\xi) d\xi = 0, \quad r > 1.$$

Ponieważ rozwiązanie tego typu równań jest znane, wystarczy obecnie, przynajmniej z punktu widzenia formalnego, wstawić obliczone  $A(\xi)$  do wzoru na  $\bar{T}(\xi, z)$  i wykonać transformację odwrotną otrzymując rozkład temperatury. Podobny tok postępowania ma miejsce w innych przypadkach. Przykładem wykorzystania tej metody jest zastosowanie jej do zagadnień płytowych [34] oraz osiowo-symetrycznego zagadnienia w teorii sprężystości [36]. Prace Z. ORŁOSIA [37 i 38] również traktują o zagadnieniu szczeliny i naprężeniach w jej pobliżu.

R. SOLECKI [39] otrzymał rozwiązanie dla izotropowych płyt prostokątnych ze szczeliną równoległą do jednego z brzegów płyty. W pracy tej rozpatrzono drgania i zginanie płyty i podano przykłady oraz odpowiednie wykresy.

W ciągu ostatnich trzech lat rozwiązano szereg zagadnień dotyczących nieciągłych warunków brzegowych przez sprowadzenie ich do równania całkowego typu Wienera-Hopfa, które następnie rozwiązuje się w sposób przybliżony. Wykonanie transformacji Fouriera na równaniu różniczkowym cząstkowym sprowadza je na ogół do następującego problemu. Należy znaleźć nieznanne funkcje  $\Phi_+(a)$  i  $\Psi_-(a)$  związane równaniem funkcjonalnym

$$(1.9) \quad A(a) \Phi_+(a) + B(a) \Psi_-(a) + C(a) = 0,$$

które jest spełnione w pasmie  $\tau_- < \tau < \tau_+$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$  płaszczyzny zespolonej  $a = \sigma + iz$  (parametr transformacji). Przy tym  $\Phi_+(a)$  powinna być regularna w półpłaszczyźnie  $\tau > \tau_-$ , a  $\Psi_-(a)$  w półpłaszczyźnie  $\tau < \tau_+$ ; funkcje  $A(a)$ ,  $B(a)$  i  $C(a)$  są znanymi funkcjami  $a$  regularnymi w rozpatrywanym pasmie. Podstawowe przyjęcie przy rozwiązywaniu powyższego równania, będącego przypadkiem szczególnym zagadnienia Riemanna-Hilberta, polega na tak zwanej faktoryzacji, to znaczy znalezieniu funkcji  $K_+(a)$  regularnej i nie posiadającej punktów zerowych w półpłaszczyźnie  $\tau > \tau_-$  oraz funkcji  $K_-(a)$  regularnej i nie posiadającej zer w półpłaszczyźnie  $\tau < \tau_+$  i spełniających związek:

$$\frac{A(a)}{B(a)} = \frac{K_+(a)}{K_-(a)}.$$

W prostszych przypadkach funkcje  $K_+(a)$  i  $K_-(a)$  udaje się odgadnąć. Istnieją również inne metody ich wyznaczania. W wielu zagadnieniach można posłużyć się sposobem przybliżonym polegającym na zastąpieniu funkcji  $K_+(a)$  i  $K_-(a)$  prostszymi spełniającymi następujące wymagania:

- 1) nowe funkcje  $\bar{K}_+(a)$  i  $\bar{K}_-(a)$  nie różnią się znacznie od  $K_+(a)$  i  $K_-(a)$  wzdłuż linii, względem których dokonujemy faktoryzacji,
- 2) zachowują się tak samo dla  $|a| \rightarrow 0$  i  $|a| \rightarrow \infty$ ,
- 3) są prostsze, jeżeli chodzi o rozkład pierwiastków równania  $\bar{K}_+(a) = 0$ ,  $\bar{K}_-(a) = 0$ .

Stosując powyższą metodę M. SOKOŁOWSKI [40] podał rozwiązanie dla nieskończonego pasma płytowego swobodnie podpartego na szerokości  $2b$ , a na pozostałej części brzegu zamocowanego sprężysto. Z innych prac wymienimy pracę

M. SOKOŁOWSKIEGO [41]; rozwiązano w niej zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla długiej warstwy, której krawędź dolna utrzymywana jest w stałej temperaturze, krawędź górna jest częściowo termicznie izolowana, a na pozostałej części wypływ ciepła jest proporcjonalny do temperatury brzegu warstwy. Praca [42] tego samego autora dotyczy nieciągłego zagadnienia brzegowego tarczy o kształcie klina na części brzegu podgrzanego, a na części izolowanego (zagadnienie przewodnictwa cieplnego). Naprężenia w sztywnie utwierdzonej warstwie sprężystej znaleziono w pracy [43]. Nieskończona warstwa sprężysta jest swobodna na części  $x < 0$  i jest ściskana doskonale sztywnymi blokami o krawędziach ostrych lub zakrzywionych na części  $x > 0$ . Podobne zagadnienie warstwy sprężystej swobodnej dla  $x < 0$  i ściskanej w ten sposób, że przemieszczenia  $u$  i  $v$  są odpowiednio proporcjonalne do naprężeń stycznych i normalnych rozwiązał M. MATCZYŃSKI [44]; ten sam autor rozwiązał również zagadnienie klina sprężystego z danymi przemieszczeniami na części brzegu [45]. M. MATCZYŃSKI i M. SOKOŁOWSKI rozwiązyli ponadto zagadnienie pasma płytowego na części brzegu sprężystości utwierdzonego, a na części swobodnego [46].

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. NOWACKI, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., 3, 1951, 419.
- [2] W. NOWACKI, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych (II)*, Arch. Mech. Stos., 5, 1953, 193.
- [3] W. NOWACKI, *The problem of rectangular plates with mixed boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 1, 1953, 10.
- [4] Z. THRUN, *Termiczne stany odkształcenia i naprężenia w cienkich płytach*, Arch. Mech. Stos. 6, 1954, 555.
- [5] W. NOWACKI, *Zagadnienia dynamiki i stateczności płyty prostokątnej o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., 7, 1955, 226.
- [6] W. NOWACKI, *Free vibrations and buckling of a rectangular plate with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 3, 1955, 159.
- [7] W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Płyta kołowa na obwodzie częściowo utwierdzona zupełnie i częściowo swobodnie podparta*, Arch. Mech. Stos., 8, 1956, 233.
- [8] W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Vibrations buckling and bending of a circular plate clamped along part of its periphery and simply supported on the remaining part*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 5, 1956, 247.
- [9] W. NOWACKI, *O pewnych zagadnieniach brzegowych teorii sprężystości*, Arch. Mech. Stos. 7, 1955, 483.
- [10] W. NOWACKI, *On certain boundary problems of the theory of elasticity*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 3, 1955, 175.
- [11] S. KALISKI, *Drgania płyt podpartych w przeszłe i o nieciągłych warunkach brzegowych*, Biul. WAT, 28, 1954.
- [12] S. KALISKI, *Stateczność płyt podpartych w przeszłe i o nieciągłych warunkach brzegowych*, Biul. WAT, 35, 1954.
- [13] Z. OLESIAK, *A bent circular plate with linear supports inside the plate region*, Arch. Mech. Stos., 9, 1957, 227.

- [14] Z. OLESIAK, *Gebogene Kreisplatte mit linearen Stützen innerhalb der Platte*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 5, 1957, 129.
- [15] Z. OLESIAK, *Discontinuous boundary conditions and linear supports in statical problems of cylindrical shells*, Arch. Mech. Stos., 9, 1957, 549.
- [16] W. NOWACKI, S. KALISKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 4, 1956, 235.
- [17] S. KALISKI, W. NOWACKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 8, 1956, 413.
- [18] A. KACNER, *A closed solution in the case of a semi-infinite plate strip with discontinuous boundary conditions (I)*, Arch. Mech. Stos., 9, 1957, 371.
- [19] A. KACNER, *A closed solution in the case of bending of a semi-infinite plate strip with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 6, 1958, 7.
- [20] A. KACNER, *A closed solution in the case of a semi-infinite plate with discontinuous boundary conditions (II)*, Arch. Mech. Stos., 10, 1958, 57.
- [21] A. KACNER, *Metoda Nyströma-Gaussa w zastosowaniu do zagadnienia zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Inżyn. Łądown., 4, 1958, 55.
- [22] A. KACNER, *The method of successive approximations applied to bending of plates with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 6, 1958, 251.
- [23] A. KACNER, *Metoda kolejnych przybliżeń w zastosowaniu do zginania płyt o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Inżyn. Łądown., 4, 1958, 397.
- [24] A. KACNER, *Bending of semi-infinite plate strips with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 12, 1960, 451.
- [25] W. NOWACKI, *Formulation of boundary problem of the theory of elasticity with mixed boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 10, 1962, 71.
- [26] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech. Stos., 10, 1958, 271.
- [27] H. ZORSKI, *A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 10, 1958, 371.
- [28] H. ZORSKI, *Some cases of bending of anisotropic plates*, Arch. Mech. Stos., 11, 1959, 71.
- [29] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports (I)*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 6, 1958, 127.
- [30] H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports (II)*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 6, 1958, 133.
- [31] W. NOWACKI, *A three-dimensional thermoelastic problem with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 9, 1957, 319.
- [32] W. NOWACKI, *A boundary problem of heat conduction*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 5, 1957, 205.
- [33] W. PIECHOCKI, H. ZORSKI, *Thermoelastic problem for a wedge*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 7, 1959, 555.
- [34] Z. OLESIAK, *Some cases of infinite isotropic plates with mixed boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., 12, 1960, 109.
- [35] Z. OLESIAK, I. N. SNEDDON, *The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 1960, 238.
- [36] G. SZEFER, *Osiowo-symetryczny problem teorii sprężystości z mieszanymi warunkami brzegowymi*, Konferencja Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy w r. 1962, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Nr 2, 1946.
- [37] Z. ORŁOŚ, *Szczelina przykrędwidziowa w półplaszczyźnie sprężystej*, Arch. Inżyn. Łądown., 6, 1960, 93.
- [38] Z. ORŁOŚ, *Arbitrary inclined crack intersecting the edge of an elastic semi-plane*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, 10, 1962, 371.
- [39] R. SOLECKI, *Bending and vibration of an isotropic rectangular plate with a hinged slot*, Acta Polytechnica Scandinavia, 318/1962.



- [40] M. SOKOŁOWSKI, *Some problems of a plate strip with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 239.
- [41] M. SOKOŁOWSKI, *A thermoelastic problem for a strip with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 337.
- [42] M. SOKOŁOWSKI, *Heat flow in a wedge with discontinuous boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 433.
- [43] M. SOKOŁOWSKI, *Stresses in a rigidly clamped plate strip*, Arch. Mech. Stos., **14**, 1962, 271.
- [44] M. MATCZYŃSKI, *Plane state of stress in a plate strip with discontinuous boundary conditions*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **10**, 1962, 261.
- [45] M. MATCZYŃSKI, *Klin sprężysty o nieciągłych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., **15**, (1963), 833.
- [46] M. MATCZYŃSKI, M. SOKOŁOWSKI, *On polynomial solutions of a certain discontinuous boundary value problem*, Biul. Pol. Akad. Nauk, seria IV, **12**, 1963

## Резюме

ОБЗОР ПОЛЬСКИХ РАБОТ КАСАЮЩИХСЯ ЗАДАЧ С ПЕРЕРЫВНЫМИ  
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дается обзор приблизительно 50-ти работ польских авторов. Работы дискутируются в согласии с математическими методами, при помощи которых решены задачи.

REVIEW OF THE POLISH PAPERS CONCERNING THE PROBLEMS WITH  
DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY

About 50 recent papers by Polish authors on the above problem are discussed. Some mathematical methods of solutions are presented.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 października 1963 r.*



ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA MATERIAŁU SPRĘŻYSTEGO  
Z WIĘZAMI GEOMETRYCZNO-TERMICZNYMI

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

Wiele materiałów zachowujących własności sprężyste również przy dużych odkształceniach wykazuje bardzo nieznaczną ściśliwość odpowiadającą współczynnikowi Poissona bliskiemu 0,5. Są to przede wszystkim tzw. materiały gumopodobne. Przy ich rozpatrywaniu wyprowadza się zwykle założenie o nieściśliwości, co zresztą znacznie upraszcza obliczenia.

Większość rozpatrzonych dotychczas zagadnień dotyczy przypadku, gdy proces odkształcenia jest izotermiczny. Przejście do innych procesów nie narządza trudności, jeśli przyjąć, że rozpatrywany nieściśliwy materiał nie wykazuje rozszerzalności termicznej. Jest to jednak założenie dość sztuczne. Jeśli natomiast materiał wykazuje rozszerzalność termiczną, to związki fizyczne przyjmują inną postać i zachodzą istotne różnice między procesem izotermicznym, a procesem nieizotermicznym.

W niniejszej pracy wskażemy na te różnice jak również na pewne wynikające z nich konsekwencje.

1. Geometria odkształcenia i związki fizyczne

Oznaczmy przez  $\mathring{P}$  typowy punkt ciała nieodkształconego  $\mathring{B}$ . W procesie odkształcenia ciało  $\mathring{B}$  przechodzi w ciało odkształcone  $B$ , a typowy punkt  $\mathring{P}$  w punkt  $P$ . Temperaturę punktu  $\mathring{P}$  oraz  $P$  oznaczmy odpowiednio przez  $\mathring{T}$  oraz  $T$ . Wprowadźmy ustalony kartezjański układ współrzędnych oraz współrzędne konwekcyjne  $\theta^i$ . Oznaczając przez  $x_i$  oraz  $y_i$  kartezjańskie współrzędne punktu  $\mathring{P}$  oraz  $P$  mamy

$$(1.1) \quad \mathring{g}_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x_m}{\partial \theta^j}, \quad g_{ij} = \frac{\partial y_m}{\partial \theta^i} \frac{\partial y_m}{\partial \theta^j},$$

$$(1.2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \mathring{g}_{ij}),$$

gdzie  $\mathring{g}_{ij}$  oraz  $g_{ij}$  oznaczają tensory metryczne w  $\mathring{B}$  oraz  $B$ , a  $\varepsilon_{ij}$  jest tensorem odkształcenia. Symetryczny tensor drugiego rzędu  $\varepsilon_{ij}$  ma 3 niezmienniki.

Dla naszych celów najdogodniejsze jest zdefiniowanie tych niezmienników związkami

$$(1.3) \quad I_1 = \mathring{g}^{rs} g_{rs}, \quad I_2 = \mathring{g}_{rs} g^{rs} I_3, \quad I_3 = g/\mathring{g}.$$

Pierwiastek z niezmiennika  $I_3$  jest stosunkiem gęstości  $\mathring{\rho}$  ciała  $\mathring{B}$  do gęstości  $\rho$  ciała  $B$ .

Stan naprężenia ciała  $B$  scharakteryzowany jest tensorem naprężenia  $\tau^{ij}$  (odniesionym do jednostki powierzchni w ciele odkształconym  $B$ ). Współrzędne siły  $\mathbf{P}$  działającej na jednostkę powierzchni o normalnej  $\mathbf{n}$  wyrażają się przez tensor  $\tau^{ij}$  wzorem

$$(1.4) \quad P^j = \tau^{ij} n_i.$$

Rozpatrujemy ciało sprężyste o dowolnej nieliniowej charakterystyce fizycznej. Stan ciała sprężystego określa siedem niezależnych parametrów stanu. Jak pokazano np. w [1], parametry te mogą być wybrane w sposób w zasadzie dowolny spośród 14 wielkości: sześciu współrzędnych tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ , sześciu współrzędnych tensora naprężenia  $\tau^{ij}$ , temperatury bezwzględnej  $T$  oraz odniesionej do jednostki masy ciała entropii  $S$ .

Do celów niniejszej pracy najdogodniejsze jest przyjęcie za niezależne parametry stanu współrzędnych tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  oraz temperatury  $T$ . Zgodnie z pierwszą i drugą zasadą termodynamiki mamy tożsamość (por. np. [1])

$$(1.5) \quad \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\tau^{ij}}{\rho} \right) d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial F}{\partial T} + S \right) dT = 0, \quad F = F(\varepsilon_{ij}, T),$$

gdzie funkcja  $F(\varepsilon_{ij}, T)$  jest energią swobodną, odniesioną do jednostki masy rozpatrywanego ciała.

Różniczki  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $dT$  można formalnie traktować jako wektory siedmiowymiarowej przestrzeni wektorowej  $V_7$ . W przypadku gdy różniczki te są wzajemnie niezależne, z (1.5) wynika

$$(1.6) \quad \frac{\tau^{ij}}{\rho} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad S = - \frac{\partial F}{\partial T}.$$

Związki (1.6) obowiązują w przypadku, gdy każda zmiana wielkości  $\varepsilon_{ij}$  oraz  $T$  jest kinematycznie dopuszczalna. Współrzędne tensora naprężenia  $\tau^{ij}$  oraz entropia  $S$  są wtedy jednoznacznie<sup>1</sup> określone przez współrzędne tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  i temperaturę  $T$ . Tak jednak nie jest, jeśli współrzędne te i temperatura nie są niezależne.

Założmy, że w rozpatrywanym ciele istnieją więzy geometryczno-termiczne. W szczególnych przypadkach mogą one wyrażać warunek nieściśliwości, ograniczenie odkształcenia przez struny zanurzone w materiale itp. Przyjmijmy, że więzy te wyrażają się związkami

$$(1.7) \quad \begin{aligned} f_K(\varepsilon_{ij}, T, \tau^{ij}, S) &= 0, & K &= 0, 1, 2, \dots, M, & M < 7, \\ f_0(\varepsilon_{ij}, T, \tau^{ij}, S) &\equiv 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Pewnemu stanowi odniesienia, np. stanowi  $\mathring{B}$ , przypisujemy entropię  $\mathring{S} = 0$ . W ten sposób przechodzimy do operowania tylko przyrostami entropii.

Sześć współrzędnych tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  oraz temperaturę  $T$  traktujemy jako zmienne niezależne, a  $\tau^{ij}$  oraz  $S$  jako ich funkcje. Związki (1.7) stanowią więc pewne więzy narzucone na  $\varepsilon_{ij}$  oraz  $T$ . To usprawiedliwia nazwę *więzy geometryczno-termiczne*. Obliczając różniczkę zupełną (1.7) mamy

$$(1.8) \quad \left( \frac{\partial f_K}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}} \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial f_K}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial f_K}{\partial T} + \frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}} \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial T} + \frac{\partial f_K}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} \right) dT = 0.$$

W tym przypadku różniczek  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $dT$  nie można więc traktować jako wektory niezależne. Rozwiązaniem (1.5) jest teraz<sup>2</sup>

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \frac{\tau^{ij}}{\varrho} &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} + \sum_{K=1}^M p_K \left( \frac{\partial f_K}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}} \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial f_K}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \right), \\ S &= - \frac{\partial F}{\partial T} - \sum_{K=1}^M p_K \left( \frac{\partial f_K}{\partial T} + \frac{\partial f_K}{\partial \tau^{rs}} \frac{\partial \tau^{rs}}{\partial T} + \frac{\partial f_K}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} \right). \end{aligned}$$

Związki (1.9) pozwalają wyznaczyć współrzędne tensora naprężenia  $\tau^{ij}$  oraz entropię  $S$  jako funkcje współrzędnych tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  oraz temperatury  $T$ , określone są z dokładnością do  $M$  skalarnych parametrów  $p_K$ , które mogą być interpretowane jako mnożniki Lagrange'a. Dla  $M=0$  związki (1.9) przechodzą w związki dla materiału bez więzów (1.6).

W następnych rozdziałach zostaną rozpatrzone pewne przypadki szczególne związków (1.7) i wynikających z nich związków fizycznych (1.9).

## 2. Przypadek szczególny więzów geometryczno-termicznych

Zajmiemy się tutaj pewnym szczególnym przypadkiem więzów geometryczno-termicznych (1.7). Założymy mianowicie, że temperatura i odkształcenie są związane związkiem jawnym, a nie za pośrednictwem naprężenia i entropii.

<sup>2</sup> Równanie wektorowe

$$\sum_k x_k \mathbf{r}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

przy spełnionych  $N < n$  niezależnych związkach

$$\sum_k a_{\cdot k}^K \mathbf{r}^k = 0, \quad K = 1, 2, \dots, N,$$

ma rozwiązanie

$$x_k = \sum_K p_K a_{\cdot k}^K,$$

gdzie  $p_K$  są wzajemnie niezależnymi skalarnymi mnożnikami.

Podczas gdy więzy (1.7) zależały od prawa fizycznego, więzy rozpatrywane w niniejszym rozdziale od tego prawa nie zależą.

Dla uproszczenia rozważań chwilowo założymy, że konwekcyjny układ współrzędnych  $\theta^i$  pokrywa się w  $\mathring{B}$  z układem  $x_i$ . Zgodnie z (1.1) oraz (1.2) jest

$$(2.1) \quad \hat{g}_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{ij} = \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right).$$

Powstaje pytanie, jaką postać ma najogólniejszy związek pomiędzy temperaturą a odkształceniem. Ograniczając się do przypadku, gdy temperatura zależy tylko od odkształcenia (a nie od prędkości odkształcenia, przyspieszenia itd.), taką najogólniejszą postacią jest

$$(2.3) \quad T = H(\partial y_i / \partial x_j).$$

Zależność (2.3) jest naturalnym uogólnieniem wprowadzanych często więzów geometrycznych, których najprostszym przykładem jest równanie nieściśliwości. W szczególnym przypadku więzy (2.3) mogą wyrażać rozszerzalność objętościową zależną tylko od temperatury. Funkcja  $H$  może w sposób istotny zależeć od położenia ciała  $\mathring{B}$  względem układu  $x_i$ . Tak jest np. w przypadku, gdy ciało  $\mathring{B}$  wykazuje anizotropię.

Gradyenty odkształcenia zgodnie z (2.2) określają całkowicie tensor odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ . Tensor odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  nie określa jednak jednoznacznie gradientów odkształcenia. Zdawać by się więc mogło, że postulowana zależność (2.3) jest ogólniejsza od zależności  $T = T(\varepsilon_{ij})$ . Niżej wykazemy, że tak nie jest.

Założmy, że ciało  $B$  doznało pewnego sztywnego obrotu określonego ortogonalną macierzą  $a_{ij}$  dokoła początku układu. W ustalonym poprzednio ortogonalnym kartezjańskim układzie współrzędnych punkt  $P$  po obrocie ciała  $B$  ma współrzędne, które oznaczymy przez  $\bar{y}_i$ . Zachodzą związki

$$(2.4) \quad \bar{y}_i = a_{ij} y_j, \quad \partial \bar{y}_i / \partial x_k = a_{ij} \partial y_j / \partial x_k,$$

$$(2.5) \quad a_{ir} a_{jr} = \delta_{ij}.$$

Podczas sztywnego obrotu temperatura punktu  $P$  nie ulega zmianie. Jest więc

$$(2.6) \quad H(\partial y_i / \partial x_k) = H(a_{ij} \partial y_j / \partial x_k).$$

Przedstawimy macierz  $\partial y_i / \partial x_k$  jako iloczyn macierzy ortogonalnej  $q_{ij}$  oraz macierzy symetrycznej  $s_{ij}$ . Takie przedstawienie jest zawsze możliwe (por. np. [3, 4]). Jest więc

$$(2.7) \quad \partial y_i / \partial x_k = q_{ir} s_{rk},$$

$$(2.8) \quad \partial \bar{y}_i / \partial x_k = a_{ip} q_{pr} s_{rk}.$$

Zawsze można tak wybrać obrót ciała  $B$  określony ortogonalną macierzą  $a_{ij}$ , że  $a_{ir} q_{rk} = \delta_{ik}$ . W tym przypadku gradienty odkształcenia  $\partial \bar{y}_i / \partial x_k$  tworzą macierz symetryczną i jest

$$(2.9) \quad \partial \bar{y}_i / \partial x_k = s_{ik}.$$

Przyjmując to położenie ciała  $B$  za położenie wyjściowe zgodnie z (2.3) oraz (2.6) mamy

$$(2.10) \quad T = H(s_{ik}) = H(a_{ij} s_{jk}).$$

Dla dowolnego materiału temperatura nie jest więc funkcją niesymetrycznej macierzy gradientów odkształcenia  $\partial y_i / \partial x_k$ , a funkcją symetrycznej macierzy  $s_{ij}$ . Chociaż dalsze rozważania można prowadzić w oparciu o macierz  $s_{ij}$ , wygodniejsze jest inne podejście. Z (2.7) wynika mianowicie

$$(2.11) \quad s_{ir} s_{rk} = 2\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}.$$

Kwadrat macierzy  $s_{ij}$  jest więc określony jednoznacznie przez macierz tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ . Określone są też jednoznacznie kwadraty wartości własnych macierzy  $s_{ij}$  (równe wartościom własnym macierzy  $s_{ij}^2$ ). Same wartości własne określone są jednak tylko z dokładnością do znaku. Niejednoznaczność ta wynika stąd, że rozkład (2.7) nie jest rozkładem jedynym. Można jednak tak dobrać obrót ciała  $B$ , aby macierz  $s_{ij}$  była dodatnio określona. W tym przypadku wszystkie trzy wartości własne macierzy  $s_{ij}$  są dodatnie i sama macierz  $s_{ij}$  jest określona jednoznacznie przez macierz tensora odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ . W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że zachodzi ten właśnie przypadek.

Zgodnie z powyższymi uwagami nie zawężając ogólności można przyjąć

$$(2.12) \quad T = T(\varepsilon_{ij}).$$

Więzy geometryczno-termiczne (2.12) równoważne są więzom postulowanym w (2.3) dla wszystkich materiałów, w tym również sprężystych anizotropowych. Bliższe określenie postaci (2.12) możliwe jest dopiero po określeniu typu anizotropii. W dalszych wzorach określimy (2.12) dla materiału izotropowego.

Ograniczamy się teraz do rozpatrywania materiału izotropowego. Dla takiego materiału obrót ciała  $\hat{B}$  względem ustalonego układu  $x_i$  nie może spowodować zmiany postaci związku (2.12). Niech ciało  $\hat{B}$  dozna obrotu sztywnego określonego ortogonalną macierzą  $\hat{a}_{ij}$ . Nowe współrzędne punktu  $\hat{P}$  i nowe współrzędne tensora  $\varepsilon_{ij}$  wyznaczone z (2.2) mają postać

$$(2.13) \quad \bar{x}_i = \hat{a}_{ij} x_j,$$

$$(2.14) \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \hat{a}_{ip} \hat{a}_{jq} \varepsilon_{pq}.$$

Zgodnie z przeprowadzoną wyżej analizą mamy

$$(2.15) \quad T(\varepsilon_{ij}) = T(\bar{\varepsilon}_{ij}),$$

$$(2.16) \quad T(\varepsilon_{ij}) = T(\hat{a}_{ip} \hat{a}_{iq} \varepsilon_{pq}).$$

Funkcja  $T(\varepsilon_{ij})$  jest więc skalarową funkcją macierzy  $\varepsilon_{ij}$ , niezmienniczą względem przekształcenia ortogonalnego tej macierzy. Stąd wynika, że  $T$  może być funkcją tylko niezmienników macierzy  $\varepsilon_{ij}$ . Skorzystamy teraz z niezmienników odkształcenia  $I_1, I_2, I_3$  określonych związkami (1.3). Dla ciała izotropowego jest więc ostatecznie

$$(2.17) \quad T = T(I_1, I_2, I_3)$$

lub po rozwiązaniu względem  $I_3$

$$(2.18) \quad \sqrt{I_3} = \varphi(I_1, I_2, T).$$

Związek (2.18) będziemy interpretowali jako uogólnione prawo rozszerzalności termicznej. W ogólnym przypadku prawo to określa objętość jako funkcję temperatury i pierwszych dwóch niezmienników stanu odkształcenia. W szczególnym przypadku  $\varphi(I_1, I_2, T) = \varphi(T)$  wzór (2.18) opisuje rozszerzalność termiczną niezależną od odkształcenia. Dla procesu izotermicznego mamy  $T = \overset{\circ}{T}$  i niezmiennik  $I_3$  określony jest przez czysto geometryczny związek  $\sqrt{I_3} = \varphi(I_1, I_2, \overset{\circ}{T})$ , który w przypadku  $\varphi(I_1, I_2, \overset{\circ}{T}) \equiv 1$  przechodzi w warunek nieściśliwości. Ponieważ przy  $T = \overset{\circ}{T}$ ,  $I_1 = I_2 = 3$  mamy  $I_3 = 1$  (ciało  $\overset{\circ}{B}$ ), musi być

$$(2.19) \quad \varphi(3, 3, \overset{\circ}{T}) = 1.$$

Ze względu na swój tensorowy charakter związki (2.12) i (2.17) są prawdziwe w każdym układzie współrzędnych.

### 3. Przypadki szczególne

**3.1. Uogólnione prawo rozszerzalności termicznej.** Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia związków fizycznych dla ciała izotropowego w przypadku, gdy obowiązuje uogólnione prawo rozszerzalności termicznej (2.18). Zgodnie z (1.7) mamy

$$(3.1) \quad f = I_3 - \varphi^2(I_1, I_2, T) = 0.$$

W ogólnym przypadku ciała sprężystego izotropowego energia swobodna  $F$  jest funkcją trzech niezmienników stanu odkształcenia  $I_1, I_2, I_3$  oraz temperatury  $T$ . W przypadku rozpatrywanym tutaj ze względu na istnienie związku (3.1) można, nie zważając ogólności, przyjąć  $F = F(I_1, I_2, T)$ . Zgodnie z (1.9) i (3.1) mamy więc

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tau^{ij} &= \left( \Psi_1 - 4p' \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} \right) \overset{\circ}{g}^{ij} + \left( \Psi_2 - 4p' \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \right) b^{ij} + p' \Psi_3 \overset{\circ}{g}^{ij}, \\ S &= \Psi_0 + 2p' \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \end{aligned}$$

gdzie  $p'$  jest dowolną funkcją skalarną, podczas gdy funkcje  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_0$  oraz  $b^{ij}$  określone są związkami.

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Psi_0 &= -\frac{\partial F}{\partial T}, & \Psi_1 &= 2\varrho \frac{\partial F}{\partial I_1}, & \Psi_2 &= 2\varrho \frac{\partial F}{\partial I_2}, & \Psi_3 &= 2\varrho \frac{\partial F}{\partial I_3}, \\ b^{ij} &= (\overset{\circ}{g}^{ij} \overset{\circ}{g}^{rs} - \overset{\circ}{g}^{ir} \overset{\circ}{g}^{js}) g_{rs}. \end{aligned}$$



Oznaczając  $p = 2\dot{\rho}p'\varphi$  mamy ostatecznie

$$(3.4) \quad \tau^{ij} = \left( \Psi_1 - \frac{2p}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} \right) \dot{g}^{ij} + \left( \Psi_2 - \frac{2p}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \right) b^{ij} + pg^{ij},$$

$$(3.5) \quad S = \Psi_0 + \frac{p}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial T}.$$

**3.2. Rozszerzalność objętościowa niezależna od odkształcenia.** Załóżmy obecnie, że materiał wykazuje termiczną rozszerzalność objętościową niezależną od odkształcenia

$$(3.6) \quad \dot{\varrho}/\varrho = \sqrt{I_3} = \varphi(T), \quad \varphi(T^0) = 1.$$

Związek ten przedstawia jedno równanie więzów. Zapisując je w postaci takiej jak (3.1) mamy

$$(3.7) \quad f = I_3 - \varphi^2(T) = 0.$$

Związek (3.7) będziemy traktować jako szczególny przypadek związku (3.1). Zgodnie z (3.2) jest więc

$$(3.8) \quad \tau^{ij} = \Psi_1 \dot{g}^{ij} + \Psi_2 b^{ij} + p' \Psi_3 g^{ij}, \quad S = \Psi_0 + 2p' \varphi \frac{d\varphi}{dT}.$$

Oznaczając  $p = \Psi_3 p'$  mamy ostatecznie

$$(3.9) \quad \tau^{ij} = \Psi_1 \dot{g}^{ij} + \Psi_2 b^{ij} + pg^{ij},$$

$$(3.10) \quad S = \Psi_0 + p \frac{1}{\dot{\varrho}} \frac{d\varphi}{dT}.$$

Przy  $\varphi(T) \equiv 1$  równanie (3.7) przechodzi w warunek nieściśliwości. W tym przypadku  $d\varphi/dT = 0$  i entropia  $S$  określona jest przez (3.10) jednoznacznie. Zaskakujący fakt, że przy  $d\varphi/dT \neq 0$  entropia (ściślej — przyrost entropii) określona jest z dokładnością do pewnej funkcji skalarnej, można łatwo wyjaśnić w przypadku, gdy do rozpatrywanego ciała o jednostkowej masie przyłożone jest tylko stałe ciśnienie hydrostatyczne  $q = \text{const}$ . Przy wzroście temperatury o  $dT$  ciało wykonuje pracę zależną od ciśnienia  $q$ , doprowadzone ciepło musi więc też od tego ciśnienia zależeć. Stąd wynika, że wzrost entropii spowodowany wzrostem temperatury zależy od ciśnienia  $q$ .

Z faktem tym wiąże się bezpośrednio kwestia jednoznaczności energii wewnętrznej  $U(I_1, I_2, I_3, S)$  oraz energii swobodnej  $F(I_1, I_2, I_3, T)$ . Obie te funkcje są jednoznacznie określone przez parametry stanu  $I_1, I_2, I_3$  oraz  $S$  lub też  $I_1, I_2, I_3$  oraz  $T$ . Jednak wtedy gdy energia swobodna  $F$  nie zależy od funkcji  $p$ , to energia wewnętrzna zależy od funkcji  $p$  za pośrednictwem entropii  $S$ .

Sytuacja podobna do opisanej zachodzi w rozpatrzonym wyżej przypadku, gdy obowiązują uogólnione prawo rozszerzalności termicznej.

## 4. Inflacja i rozciągnięcie rury walcowej

4.1. Założenia i związki ogólne. Przejdziemy obecnie do rozwiązywania przykładu. Rura walcowa o promieniu wewnętrznym  $\hat{a}$ , zewnętrznym  $\hat{b}$  i o długości  $\hat{l}$ , określona dalej jako ciało  $\hat{B}$ , wykonana jest z izotropowego i jednorodnego materiału sprężystego. O materiale tym zakładamy, że jest nieściśliwy i że wykazuje objętościową rozszerzalność termiczną zależną tylko od temperatury.

Rozpatrywana rura doznaje skończonego rozciągnięcia w kierunku swojej osi oraz inflacji, tj. zwiększenia promienia wewnętrznego i zewnętrznego. Na skutek tego odkształcenia przechodzi ona w rurę o wymiarach odpowiednio  $a$ ,  $b$  oraz  $l$  określaną dalej jako ciało  $B$ . Wprowadźmy parametry  $\lambda$  oraz  $\mu$  zdefiniowane równościami

$$(4.1) \quad \lambda = l/\hat{l}, \quad \mu = a/\hat{a}.$$

W przypadku materiału nieściśliwego (rozpatrzonym np. w [2]) parametry  $\lambda$  oraz  $\mu$  określają całkowicie geometrię odkształcenia niezależnie od charakteru procesu  $\hat{B} \rightarrow B$  i niezależnie od związków fizycznych. W przypadku materiału wykazującego rozszerzalność termiczną parametry te nie określają jednoznacznie geometrii odkształcenia. Przy rozpatrywaniu takiego materiału konieczna jest znajomość charakteru procesu  $\hat{B} \rightarrow B$ , rozkładu temperatur itp., jak również znajomość związków fizycznych. W dalszym ciągu pracy przy przejściu do efektywnego rozwiązania określać będziemy zarówno charakter procesu jak i związki fizyczne.

W ciele  $B$  budujemy walcowy układ współrzędnych  $\theta^i = (r, \vartheta, z)$ . Współrzędne te uważać będziemy za współrzędne konwekcyjne.

Tensor metryczny  $g_{ij}$  w  $B$  jest

$$(4.2) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = |g_{ij}| = r^2.$$

Zakładamy, że odkształcenie jest osiowo-symetryczne i a) przemieszczenie promieniowe typowego punktu  $P$  jest tylko funkcją  $r$ , b) przemieszczenie osiowe punktu  $P$  jest tylko funkcją  $z$ .

Zgodnie z powyższymi założeniami mamy

$$(4.3) \quad x_1 = rQ \cos \vartheta, \quad x_2 = rQ \sin \vartheta, \quad x_3 = z/\lambda, \quad Q = Q(r),$$

przy czym

$$(4.4) \quad Q(a) = 1/\mu,$$

gdzie  $Q(r)$  jest pewną na razie nieokreśloną funkcją zmiennej  $r$ .

Tensor metryczny  $\hat{g}_{ij}$  w ciele  $\hat{B}$  określony jest związkiem (1.1). Korzystając z (4.3) mamy

$$(4.5) \quad \hat{g}_{ij} = \begin{bmatrix} (Q + rQ_r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 Q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{g} = |\hat{g}_{ij}| = \frac{r^2}{\lambda^2} Q^2 (Q + rQ_r)^2.$$

Tensor metryczne  $\mathring{g}_{ij}$  oraz  $g_{ij}$  określają stan odkształcenia ciała  $B$ . Tensor odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  i jego niezmienniki  $I_1, I_2, I_3$  mają postać

$$(4.6) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \mathring{g}_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 - (Q + rQ_r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2(1 - Q^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/\lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$(4.7) \quad \begin{aligned} I_1 &= \mathring{g}^{rs} g_{rs} = (Q + rQ_r)^{-2} + Q^{-2} + \lambda^2, \\ I_2 &= \mathring{g}^{rs} g^{rs} I_3 = \lambda^2(Q + rQ_r)^{-2} + \lambda^2 Q^{-2} + Q^{-2}(Q + rQ_r)^{-2}, \\ I_3 &= g/\mathring{g} = \lambda^2 Q^{-2}(Q + rQ_r)^{-2}. \end{aligned}$$

Przejdziemy teraz do ułożenia równania różniczkowego, jakie spełnia funkcja  $Q(r)$  oraz do wyznaczenia stanu naprężenia w rozpatrywanym walcu. Zgodnie z założeniem, że materiał wykazuje rozszerzalność objętościową zależną tylko od temperatury  $T$ , mamy

$$(4.8) \quad \mathring{\rho}/\rho = \varphi(T).$$

Trzeci niezmiennik stanu odkształcenia  $I_3$  jest kwadratem stosunku gęstości ciała  $\mathring{B}$  do gęstości ciała  $\mathring{B}$ . Wykorzystując (4.7) oraz (4.8) mamy ostatecznie

$$(4.9) \quad I_3 - \varphi^2(T) = 0 \quad \text{czyli} \quad Q(Q + rQ_r)\varphi = \lambda.$$

Dla materiału nieściśliwego  $\varphi \equiv 1$  i równanie (4.9) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, które łącznie z warunkiem brzegowym (4.4) określa całkowicie funkcję  $Q(r)$ . Również w przypadku, gdy dany jest rozkład temperatury jako funkcja  $r$ , czyli  $T = T(r)$ , związek (4.9) łącznie z (4.4) określa całkowicie funkcję  $Q(r)$ . Jak dalej pokażemy, w ogólnym przypadku równanie (4.9) jest tylko jednym z układu równań różniczkowych, w których niewiadomymi są  $Q(r)$ ,  $T(r)$  oraz ewentualnie inne funkcje zmiennej  $r$ .

Zgodnie z (3.8), (3.9), (4.2) oraz (4.5) jest

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tau^{11} &= \Psi_1(Q + rQ_r)^{-2} + \Psi_2(Q + rQ_r)^{-2}(\lambda^2 + Q^{-2}) + p, \\ r^2\tau^{22} &= \Psi_1 Q^{-2} + \Psi_2 Q^{-2}[\lambda^2 + (Q + rQ_r)^{-2}] + p, \\ \tau^{33} &= \Psi_1 \lambda^2 + \Psi_2 \lambda^2[Q^{-2} + (Q + rQ_r)^{-2}] + p, \\ \tau^{23} &= \tau^{31} = \tau^{12} = 0. \end{aligned}$$

Równania równowagi ciała  $B$ , mające postać

$$(4.11) \quad \nabla_i \tau^{ij} = 0,$$

gdzie  $\nabla_i$  oznacza różniczkowanie kowariantne względem  $\mathring{\theta}^i$  w  $B$ , ze względu na osiową symetrię rozpatrywanego zagadnienia sprowadzają się do jednego równania

$$(4.12) \quad \frac{d}{dr} \tau'' + \frac{1}{r}(\tau'' - r^2 \tau^{22}) = 0.$$

Podstawiając (4.10) do (4.12) mamy

$$(4.13) \quad \frac{d}{dr} \{ (Q + rQ_r)^{-2} [\Psi_1 + (\lambda^2 + Q^{-2})\Psi_2 + p] \} + \\ + \frac{1}{r} [(Q + rQ_r)^{-2} - Q^{-2}] (\Psi_1 + \lambda^2 \Psi_2) = 0.$$

Przyjmujemy, że zewnętrzna powierzchnia rozpatrywanego cylindra  $r=b$  jest wolna od obciążenia, a powierzchnia wewnętrzna  $r=a$  jest obciążona obciążeniem ciągłym  $q$  (ciśnieniem hydrostatycznym). Warunki brzegowe sprowadzają się do

$$(4.14) \quad \tau^{11}|_{r=a} = -q, \quad \tau^{11}|_{r=b} = 0.$$

Podane w tym punkcie związki pozwalają wyznaczyć efektywnie stan odkształcenia i naprężenia, jeżeli tylko określony jest termiczny charakter procesu  $\mathring{B} \rightarrow B$ . W następnych punktach skoncentrujemy uwagę na dwu skrajnie różnych przypadkach. W przypadku pierwszym zachodzi ustalony przepływ ciepła spowodowany różnicą temperatur na powierzchni  $r=a$  oraz powierzchni  $r=b$ . W przypadku drugim proces  $\mathring{B} \rightarrow B$  jest procesem adiabatycznym.

**4.2. Ustalony przepływ ciepła.** Niech na powierzchniach  $r=a$  oraz  $r=b$  panują stałe temperatury  $T_a$  oraz  $T_b$ . Po dostatecznie długim czasie wewnątrz rozpatrywanego ciała ustali się rozkład temperatury określony równaniem przewodnictwa

$$(4.15) \quad \nabla_r R^r = 0,$$

gdzie  $R^i$  są współrzędnymi wektora strumienia cieplnego odniesionego do jednostki powierzchni ciała odkształconego. Wektor ten, jak pokazano np. w [3], dla ciała izotropowego można przedstawić w następującej postaci:

$$(4.16) \quad R^i = (C_1 \delta_j^i + C_2 \varepsilon_j^i + C_3 \varepsilon_r^i \varepsilon_j^r) \nabla^j T,$$

gdzie  $\nabla^j$  oznacza różniczkowanie kontrawariantne w  $B$ , a  $C_1$ ,  $C_2$  oraz  $C_3$  są funkcjami trzech niezmienników (1.7) oraz trzech niezmienników termiczno-odkształceniowych

$$(4.17) \quad I_4 = \nabla^i T \nabla_i T, \quad I_5 = \varepsilon_j^i \nabla_i T \nabla^j T, \quad I_6 = \varepsilon_r^i \varepsilon_j^r \nabla_i T \nabla^j T.$$

Podstawiając (4.16) do (4.15) otrzymujemy ostatecznie

$$(4.18) \quad \nabla_i [(C_1 \delta_j^i + C_2 \varepsilon_j^i + C_3 \varepsilon_r^i \varepsilon_j^r) \nabla^j T] = 0.$$

Równania (4.9), (4.13) oraz (4.18) tworzą układ trzech równań różniczkowych z trzema niewiadomymi funkcjami  $T(r)$ ,  $Q(r)$  oraz  $p(r)$ . W celu rozwiązania tego układu najwygodniej jest korzystając z (4.9) wyrazić temperaturę  $T(r)$  przez funkcję  $Q(r)$ ,  $T = T(Q(r), r)$  i otrzymany wynik podstawić do (4.18). Otrzymuje się w ten sposób równanie różniczkowe zwyczajne z jedną tylko niewiadomą  $Q(r)$ . Po wyznaczeniu z tego równania funkcji  $Q(r)$  można podstawiając  $Q(r)$  do (4.13) wyznaczyć funkcję  $p(r)$ .

Równania różniczkowe (4.9), (4.13) oraz (4.18) są na ogół nieliniowe. Z tego powodu rozwiązań można na ogół poszukiwać tylko na drodze numerycznej. Wskażemy tutaj na prosty przykład, który udaje się rozwiązać analitycznie. Przyjmiemy mianowicie

$$(4.19) \quad \varphi(T) = \exp \nu(T - \overset{\circ}{T}),$$

$$(4.20) \quad C_1 = \text{const}, \quad C_2 = C_3 = 0,$$

gdzie  $\nu$  jest pewną stałą. Założenie (4.20) równoważne jest założeniu, że rozkładem temperatur rządzi klasyczne równanie ustalonego przepływu ciepła  $\nabla^2 T = 0$ .

Równanie (4.18) zawiera teraz jedną tylko niewiadomą  $T(r)$ . Po przyjęciu, że temperatury na powierzchni  $r = a$  oraz  $r = b$  są odpowiednio równe  $T_a$  oraz  $T_b$ , mamy

$$(4.21) \quad T = 2\alpha \ln r + \beta,$$

$$(4.22) \quad 2\alpha = \frac{T_a - T_b}{\ln a - \ln b}, \quad \beta = -\frac{T_a \ln b - T_b \ln a}{\ln a - \ln b}.$$

Podstawiając (4.19) oraz (4.21) do (4.9) otrzymujemy równanie różniczkowe, w którym jedyną niewiadomą jest  $Q(r)$ :

$$(4.23) \quad Q(Q + rQ_r)r^{2\nu\alpha} = \lambda \exp \nu(\overset{\circ}{T} - \beta).$$

Postać rozwiązania tego równania zależy od wartości współczynnika  $\alpha$  charakteryzującego termiczne obciążenie rozpatrywanego cylindra. Istnieją mianowicie trzy różne rozwiązania odpowiadające przypadkom  $\nu\alpha = 0$ ,  $\nu\alpha = 1$  oraz  $\nu\alpha \neq 0; 1$ . Dla  $\nu\alpha \neq 0; 1$  mamy

$$(4.24) \quad Q^2 = Ar^{-2\alpha\nu} + Br^{-2},$$

gdzie

$$(4.25) \quad A = \frac{\lambda}{1 - \nu\alpha} \exp \nu(\overset{\circ}{T} - \beta), \quad B = a^2 \left[ \frac{1}{\mu^2} - \frac{\lambda}{1 - \nu\alpha} a^{-2\nu\alpha} \exp \nu(\overset{\circ}{T} - \beta) \right].$$

Dla  $\nu\alpha = 1$  jest

$$(4.26) \quad Q^2 = \bar{A}r^{-2} \ln r + \bar{B}r^{-2},$$

gdzie

$$(4.27) \quad \bar{A} = 2\lambda \exp \nu(\overset{\circ}{T} - \beta), \quad \bar{B} = \frac{a^2}{\mu^2} - 2\lambda \exp \nu(\overset{\circ}{T} - \beta).$$

Dla  $\nu\alpha = 0$ ,  $\nu \neq 0$  jest

$$(4.28) \quad Q^2 = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}}r^{-2},$$

gdzie

$$(4.29) \quad \bar{\bar{A}} = \lambda \exp \nu(\overset{\circ}{T} - T_a), \quad \bar{\bar{B}} = a^2 \left[ \frac{1}{\mu^2} - \lambda \exp \nu(\overset{\circ}{T} - T_a) \right].$$

Ostatni przypadek odpowiada równomiernemu ogrzaniu rury  $T = T_a = T_b$ . Przy  $T_a = \dot{T}$ , jak również przy  $\nu = 0$ , odpowiada on rozwiązaniu dla ciała nieściśliwego [2].

Dla każdego z rozpatrzonych wyżej przypadków funkcja  $Q(r)$  jest jednoznacznie określona. Zgodnie z uwagami zawartymi w pierwszej części punktu geometria odkształcenia jest więc całkowicie określona. Pozostaje jeszcze wyznaczyć funkcję  $p(r)$  oraz ciśnienie  $q$ . Występujące w równaniu (4.13) wielkości  $\Psi_1$  oraz  $\Psi_2$  jako funkcje niezmienników  $I_1, I_2$  oraz temperatury  $T$  są zgodnie z (4.22) i (4.24) [ewentualnie (4.26) lub (4.27)]—znanymi funkcjami zmiennej  $r$ . Równanie (4.13) zawiera więc tylko jedną niewiadomą  $p(r)$ . Na podstawie związków (4.13) i (4.14) mamy więc

$$(4.30) \quad p(r) = \int_b^r \frac{1}{r} [Q^{-2} - (Q + rQ_r)^{-2}] (\Psi_1 + \lambda^2 \Psi_2) dr - \\ - (Q + rQ_r)^{-2} [\Psi_1 + (\lambda^2 + Q^{-2}) \Psi_2],$$

$$(4.31) \quad q = - \int_b^a \frac{1}{r} [Q^{-2} - (Q + rQ_r)^{-2}] (\Psi_1 + \lambda^2 \Psi_2) dr.$$

Ostatnie dwa związki zamykają rozwiązanie rozpatrywanego tutaj przykładu. Należy podkreślić, że związek (3.10) nie był wcale wykorzystany. Stanowi on odrębne równanie pozwalające przy pomocy związków (4.21), (4.24) lub (4.26) albo (4.28) oraz (4.30) wyznaczyć entropię  $S$ .

**4.3. Odkształcenie adiabatyczne.** W granicznym przypadku, gdy wektor przepływu ciepła dąży do zera, proces  $\dot{B} \rightarrow B$  dąży do procesu adiabatycznego. Takim procesem dla rury grubościennej zajmować się będziemy w niniejszym punkcie.

Jeśli materiał jest nieściśliwy, to obliczenia dla procesu adiabatycznego przebiegają identycznie jak dla procesu izotermicznego. Wystarczy mianowicie oprzeć rozważania nie na energii swobodnej  $F = F(I_1, I_2, T)$ , a na energii wewnętrznej  $U = U(I_1, I_2, S)$ . Prowadzi to do identycznych w zasadzie ostatecznych rezultatów z tym, że w końcowych wzorach dla procesu adiabatycznego występuje  $U$ , a dla procesu izotermicznego—funkcja  $F$ . Jak wykazemy niżej, w przypadku materiału wykazującego rozszerzalność termiczną obliczenia dla procesu adiabatycznego są zasadniczo różne od obliczeń dla procesu izotermicznego.

Na podstawie (3.10) mamy mianowicie

$$(4.32) \quad s = \text{const}, \quad p = \dot{\varrho} \left( \dot{S} + \frac{\partial F}{\partial T} \right) \left( \frac{d\varphi}{dT} \right)^{-1},$$

$$(4.33) \quad \dot{S} = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{T=\dot{T}, I_1=I_2=3}$$

Funkcja  $p(r)$  nie może więc w tym przypadku być wybrana dowolnie. Podstawiając (4.32) do równania równowagi (4.13) mamy

$$(4.34) \quad \frac{d}{dr} \left\{ (Q + rQ_r)^{-2} [\Psi_1 + (\lambda^2 + Q^{-2})\Psi_2] + \dot{e} \left( \dot{S} + \frac{\partial F}{\partial T} \right) \left( \frac{d\varphi}{dT} \right) \right\} + \\ + \frac{1}{r} [(Q + rQ_r)^{-2} - Q^{-2}] (\Psi_1 + \lambda^2 \Psi_2) = 0.$$

Równanie (4.33) łącznie z równaniem (4.9) stanowi układ dwu równań różniczkowych z niewiadomymi  $Q(r)$  oraz  $T(r)$ . Za pomocą tych funkcji wyrazić można w rozpatrywanym przypadku wszystkie pozostałe funkcje, a więc  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\partial F/\partial T$  oraz  $d\varphi/dT$ .

W celu rozwiązania układu równań (4.9) oraz (4.32) najdogodniej jest wyznaczyć ze związku (4.9) temperaturę  $T(r)$  w zależności od funkcji  $Q(r)$  oraz zmiennej  $r$ , czyli  $T = T(Q(r), r)$ . Funkcje  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\partial F/\partial T$  oraz  $d\varphi/dT$  można teraz przedstawić jako funkcje zmiennej  $r$  oraz funkcji  $Q(r)$ . Po podstawieniu tych rezultatów do (4.34) równanie to zawiera tylko jedną nieznaną funkcję mianowicie  $Q(r)$ . Łącznie z warunkiem brzegowym (4.4) równanie to określa całkowicie funkcję  $Q(r)$ , a więc geometrię odkształcenia. Mając funkcję  $Q(r)$  można z kolei łatwo określić zgodnie z (4.9) funkcję  $q(r)$ , a więc i  $T(r)$ , a następnie za pomocą (4.10) tensor  $\tau^{ij}$ .

Jak się zdaje, dotychczas nie zaproponowano żadnej postaci funkcji  $F(I_1, I_2, T)$  dla materiałów sprężystych wykazujących rozszerzalność termiczną. Uniemożliwia to wykonanie konkretnych obliczeń dla takiego materiału.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1]. И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Москва 1955.
- [2] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
- [3] A. E. GREEN, J. E. ADKINS, *Large Elastic Deformations*, Oxford 1960.
- [4] C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The Classical Field Theory*, Flugge's Encyclopedia of Physics. Vol. III/1, Berlin 1960.

#### Резюме

#### ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА С ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-ТЕПЛОВЫМИ СВЯЗЯМИ

Условие несжимаемости является частным случаем геометрически-тепловых связей в виде  $f(\varepsilon_{ij}, \tau^{ij}, S, T) = 0$ . В работе выведены физические уравнения для упругого материала, характеризующегося такими связями (в общем случае и в случае изотропного материала), а затем решена задача о конечном растяжении и инфляции толстостенной трубы из материала проявляющего свойство тепловой расширяемости. Решение дано для изэнтропной деформации при стационарном потоке тепла.

## S u m m a r y

CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR ELASTIC MATERIALS  
WITH THERMO-GEOMETRIC CONSTRAINTS

The incompressibility condition constitutes a particular case of thermo-geometric constraints of the form  $f(\varepsilon_{ij}, v^{ij}, S, T) = 0$ . In the paper the constitutive equations are established which correspond to elastic bodies characterized by such constraints (for both the general case and the case of isotropic bodies); moreover, the solutions are given to the problem of finite stretching and inflation of a thick-walled cylinder made of thermally expanding materials. The solutions apply to adiabatic deformations and to deformations with steady radial heat flow.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1963 r.*

---



WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ NA PODSTAWIE POMIARÓW TYLKO JEDNEJ  
SKŁADOWEJ ODKSZTAŁCENIA

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

Dla pełnego wyznaczenia na drodze doświadczalnej rozkładu naprężeń w elementach płaskich dokonuje się zwykle pomiaru trzech składowych odkształcenia. Najczęściej stosowaną metodą jest naklejanie w szeregu punktów badanego obszaru tzw. *rozetek tensometrów oporowych*. Każda z rozetek składa się z trzech tensometrów różnie skierowanych na płaszczyźnie. W przypadkach bardziej złożonych, gdy w badanym obszarze występują otwory lub wprowadzane są skupione siły zewnętrzne, zachodzi konieczność użycia wielkiej liczby tensometrów, co znacznie podnosi koszt badania i przedłuża czas pomiarów. W niniejszej pracy zaproponowano nową metodę wyznaczania rozkładu naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej tensora odkształcenia, na przykład  $\varepsilon_x$ .

W rozpatrywanym obszarze przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich  $(x, y)$ . Następnie obieramy odpowiednio gęstą prostokątną siatkę linii  $x = \text{const}$  i  $y = \text{const}$  i w jej węzłowych punktach naklejamy tensometry oporowe skierowane równoległe do osi  $x$ . Zamiast zwykle stosowanych trzech tensometrów w węzłach siatki mamy zatem tylko jeden.

Stan naprężenia w każdym punkcie określony jest trzema składowymi naprężeniami  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau$ , które muszą spełniać warunki równowagi:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0.$$

Znając z pomiarów wielkość składowej odkształcenia  $\varepsilon_x$ , która związana jest z naprężeniami  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  zależnością

$$(2) \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y),$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga, a  $\nu$  współczynnikiem Poissona, możemy niewiadomą  $\sigma_x$  wyrazić przez  $\varepsilon_x$  i  $\sigma_y$ :

$$(3) \quad \sigma_x = E\varepsilon_x + \nu\sigma_y.$$

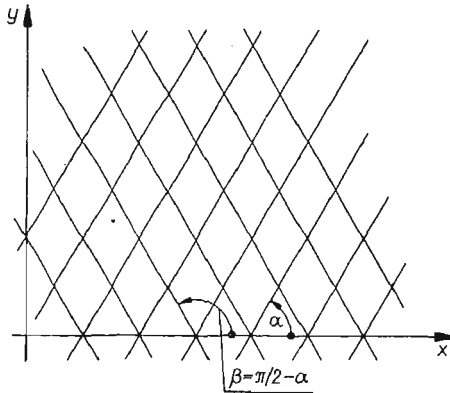
Podstawiając wyrażenie (3) do pierwszego z równań równowagi otrzymujemy liniowy układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych z dwiema niewiadomymi funkcjami  $\sigma_y$  i  $\tau$ :

$$(4) \quad \nu \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -E \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0.$$

Układ ten jest zawsze hiperboliczny, a więc ma dwie rodziny charakterystyk rzeczywistych, określonych równaniami

$$(5) \quad y = +\frac{x}{\sqrt{\nu}} + C, \quad y = -\frac{x}{\sqrt{\nu}} + C.$$

Charakterystyki są więc prostoliniowe i tworzą sieć złożoną z dwóch rodzin równoległych prostych. Kąt ich nachylenia względem osi  $x$  zależy od wartości współczynnika Poissona  $\nu$ . Dla  $\nu=1/3$  charakterystyki pierwszej rodziny, określonej równaniem (5), tworzą z osią  $x$  kąt  $\alpha = 60^\circ$ , a charakterystyki drugiej rodziny—kąt  $\beta = 180^\circ - \alpha = 120^\circ$  (rys. 1).



Rys. 1

Wzdłuż charakterystyk muszą być spełnione zależności różniczkowe

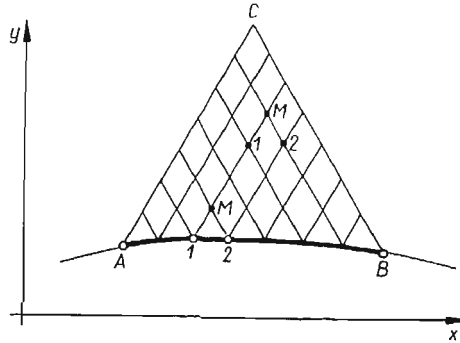
$$(6) \quad \begin{aligned} \nu d\sigma_y + \sqrt{\nu} d\tau &= -E \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dx, \\ \nu d\sigma_y - \sqrt{\nu} d\tau &= -E \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Górna zależność odnosi się do pierwszej rodziny, a dolna do drugiej rodziny charakterystyk.

Obliczenie rozkładu naprężeń w konkretnych przypadkach polega na rozwiązywaniu zagadnień brzegowych typu Cauchy'ego lub mieszanych dla równań (6). Omówimy tu bardziej szczegółowo zagadnienie typu Cauchy'ego.

Jeżeli rozpatrywany obszar ma swobodną nieobciążoną krawędź, to najwygodniej jest rozpoczynać obliczenia od tej krawędzi. Załóżmy, że na odcinku  $AB$  (rys. 2) nieobciążonej krawędzi zmierzono naprężenia za pomocą naklejonych wzdłuż niej tensometrów. Znane są więc na tym odcinku wartości naprężeń  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau$ . Dla określenia tych naprężeń w dowolnym punkcie krawędzi wystarczy oczywiście tylko jeden tensometr, gdyż jedno z naprężeń głównych jest z założenia równe zero, a kierunek drugiego naprężenia głównego pokrywa się z kierunkiem krawędzi.

Należy jednak podkreślić, że odcinek  $AB$ , od którego rozpoczynamy rozwiązywanie zagadnienia Cauchy'ego, może leżeć również wewnątrz badanego obszaru. W takim przypadku należy w poszczególnych punktach tego odcinka



Rys. 2

przyklejać rozetki tensometrów w celu wyznaczenia wszystkich trzech składowych  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau$ . Jeżeli wybrany odcinek  $AB$  jest osią symetrii, to wystarczy wzdłuż niego przyklejać po dwa tensometry w poszczególnych punktach, gdyż kierunki główne są na nim oczywiście znane.

W przyjętym układzie współrzędnych prostokątnych  $x$  i  $y$  prowadzimy z punktu  $A$  charakterystykę pierwszej rodziny, a z punktu  $B$  charakterystykę drugiej rodziny aż do przecięcia się w punkcie  $C$ . Kąty nachylenia charakterystyk są określone wartością współczynnika Poissona  $\nu$ . Następnie rysujemy wewnątrz pola  $ABC$  siatkę charakterystyk w taki sposób, aby jej punkty węzłowe stanowiące jeden szereg leżały na wspólnej prostej  $y = \text{const}$ . Wzdłuż otrzymanych w ten sposób prostych  $y = \text{const}$  naklejamy w odpowiednio dobranych odległościach tensometry, a następnie po obciążeniu mierzymy wielkości odkształcenia  $\varepsilon_x$ . Wartości pochodnej  $\partial\varepsilon_x/\partial x$  w punktach węzłowych siatki wyznaczamy przez różniczkowanie wykreślne krzywych  $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x)$ . Znajomość tych pochodnych w polu  $ABC$  oraz wielkości naprężeń  $\sigma_y$  i  $\tau$  na linii  $AB$  wystarczają do wyznaczenia naprężeń w całym trójkącie  $ABC$  przez numeryczne całkowanie równań (6).

Przypuśćmy, że w dwóch sąsiednich punktach węzłowych 1 i 2 siatki charakterystyk znamy wielkości naprężeń  $\sigma_{y1}$  i  $\tau_1$  oraz  $\sigma_{y2}$  i  $\tau_2$ . Podamy teraz sposób wyznaczenia wielkości naprężeń  $\sigma_{yM}$  i  $\tau_M$  w punkcie węzłowym  $M$  sąsiadującym z punktami 1 i 2 (rys. 2).

Zastępując w równaniach (6) różniczki przez różnice skończone otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi  $\sigma_{yM}$  i  $\tau_M$

$$(7) \quad \begin{aligned} \nu(\sigma_{yM} - \sigma_{y1}) + \sqrt{\nu}(\tau_M - \tau_1) &= -\varepsilon'_{x1}(x_M - x_1), \\ \nu(\sigma_{yM} - \sigma_{y2}) - \sqrt{\nu}(\tau_M - \tau_2) &= -\varepsilon'_{x2}(x_M - x_2). \end{aligned}$$

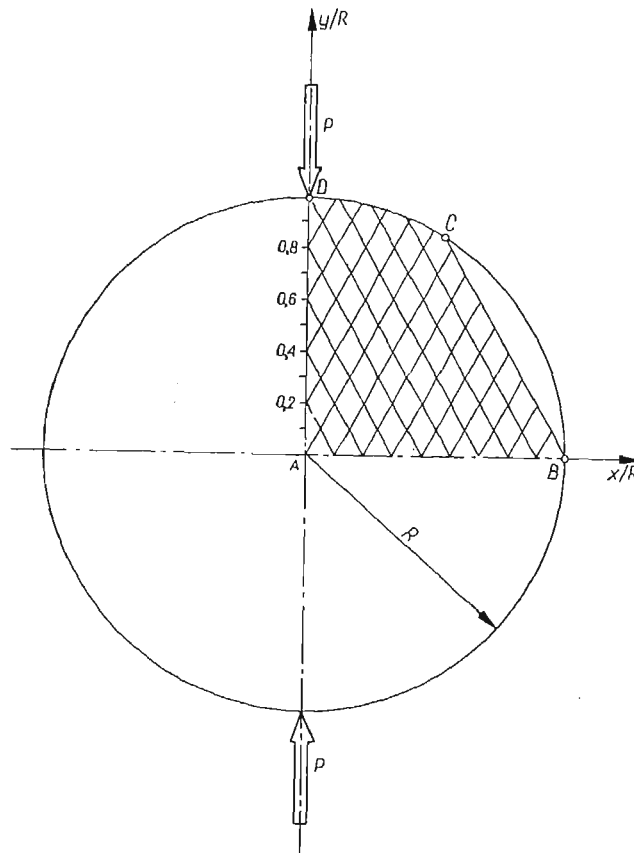
Przez  $\varepsilon'_{x1}$  i  $\varepsilon'_{x2}$  oznaczono wartości, jakie przyjmuje pochodna  $\partial\varepsilon_x/\partial x$  odpowiednio w punktach 1 i 2. W celu uzyskania większej dokładności należy w równaniach

(7) podstawić zamiast  $\varepsilon'_{x1}$  i  $\varepsilon'_{x2}$  średnie wartości pochodnej  $\partial\varepsilon_x/\partial x$  odpowiednio pomiędzy punktami 1 i  $M$  oraz 2 i  $M$ .

Wartości naprężeń w punkcie  $M$  obliczamy rozwiązując układ (7) względem  $\sigma_{yM}$  i  $\tau_M$ . Składową naprężenia  $\sigma_{xM}$  wyznaczamy ze wzoru (3).

Obliczenia rozpoczynamy obierając kolejno pary punktów 1 i 2 na odcinku  $AB$ . Za pomocą równań (7) otrzymujemy wartości naprężeń w węzłach wewnętrznych siatki, sąsiadujących z linią  $AB$ . Tworzą one punkt wyjścia do obliczenia następnych punktów węzłowych również za pomocą równań (7). W ten sposób można otrzymać rozwiązanie w całym trójkącie  $ABC$ .

W celu sprawdzenia dokładności proponowanej metody obliczono przykład dla przypadku płaskiego krążka ściskanego dwiema siłami wzdłuż średnicy (rys. 3). Ze względu na symetrię rozpatrzono tylko ćwiartkę ograniczoną do-



Rys. 3

datnimi pólosiami  $x$  i  $y$ . Jako podstawę obliczenia przyjęto teoretyczne wartości  $\varepsilon_x$  wzdłuż linii  $y = \text{const}$  otrzymane dla wartości  $y/R$  wzrastających od 0 do 1 co 0,1. Wzdłuż odcinka  $AB$  osi symetrii krążka przyjęto teoretyczny rozkład naprężenia  $\sigma_r$ . Naprężenie styczne  $\tau$  jest na odcinku  $AB$  równe zero. Dane

te wystarczają do obliczenia naprężeń w całym obszarze ograniczonym charakterystyką drugiej rodziny  $BC$  oraz osiami symetrii  $AB$  i  $AD$ .

Rachunki przeprowadza się w podany powyżej sposób za pomocą równań różnicowych (7). Wartości  $\sigma_{yM}$  dla punktów położonych na osi symetrii  $AD$  znajdujemy bezpośrednio z drugiego z równań (7), gdyż dla punktów tych  $\tau_M = 0$ . Obliczenia wykonano przyjmując gęstość siatki charakterystyk jak na rys. 3. Dla zwiększenia dokładności obliczano średnie wartości pochodnej  $\partial \varepsilon_x / \partial x$  pomiędzy poszczególnymi węzłami siatki. Obliczenia doprowadzono do prostej  $y/R = 0,6$ .

Porównanie otrzymanych w ten sposób naprężeń z ich wielkościami teoretycznymi wykazuje, że proponowana metoda jest bardzo dokładna. Różnice nie przekraczają 3%.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАМЕРА ОДНОЙ КОМПОНЕНТЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Представлен метод определения напряженного состояния на основе замера только одной компоненты тензора деформации, напр.  $\varepsilon_x$ . Основная система уравнений всегда гиперболического типа и имеет два семейства прямолинейных характеристик, описанных уравнениями (5) и (6). Напряжения определяются из решения соответствующей краевой задачи для характеристик. Дается численный пример, подтверждающий хорошую точность метода.

#### Summary

#### DETERMINING OF STRESSES BASED ON MEASURING OF ONE STRAIN COMPONENT ONLY

The method of determining the state of stress is presented when measurements of only one strain component, e.g.  $\varepsilon_x$  are known. The fundamental system of equations (4) is always of a hyperbolic type and has two families of rectilinear characteristics determined by Eqs. (5) and (6). The stresses are found from the solution of the corresponding boundary value problem for characteristics. Good accuracy of the employed method is confirmed by a numerical example.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 sierpnia 1963 r.*



DORAŻNE BADANIA WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH I ELASTOOPTYCZNYCH  
MATERIAŁÓW UŻYWANYCH W ELASTOOPTYCE

R. S. DOROSZKIEWICZ (WARSZAWA), A. LITEWKA (POZNAŃ)

1. Uwagi wstępne

Przebieg pierwszego krajowego Sympozjum na temat «Elastoptyka i jej zastosowania», zorganizowanego w 1962 r. przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, uwypuklił dużą przydatność metod elastoptyki do rozwiązywania różnorodnych zadań techniki. Wygłoszone referaty, dyskusja i przyjęte wnioski wykazały między innymi, że:

1. Istnieją liczne przypadki techniczne, w których metody analizy doświadczalnej naprężeń, w szczególności metody elastoptyki, dają możliwość najekonomiczniejszego kształtowania i szybkiego wyznaczenia stanu naprężenia z wystarczającą dla praktyki dokładnością. Metody te mogą okazać się niezastąpione przy kształtowaniu części maszyn oraz konstrukcji inżynierskich i cienkościennych (z zakresu budownictwa wodnego [1] i lądowego [2]), rozwiązywaniu zadań dynamicznych i mechaniki górotworu, zagadnień termosprężystości [3], plastyczności i ciał sypkich, rozpatrywaniu zagadnień konstrukcji zbrojonych, metalurgii i wielu innych dziedzin techniki.

2. Szybkość rozwoju elastoptyki w kraju ograniczona jest z powodu trudności w zaopatrywaniu się w nowoczesne materiały elastoptyczne.

Przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych metodami elastoptycznymi istnieje konieczność posiadania dostatecznie dokładnej wartości elastoptycznej stałej materiałowej  $K$  materiału użytego do badań, przy czym wymagana dokładność jej wartości uzależniona jest od charakteru i przeznaczenia badań. Dla wyznaczenia współczynnika jakości<sup>1</sup> materiału oraz w przypadku prowadzenia badań modeli niejednorodnych potrzebna jest również wartość współczynnika sprężystości podłużnej  $E$ .

W większości przypadków technicznych nie jest wymagana większa dokładność wyników ostatecznych niż 5%, możemy więc zadowolić się odpowiednio niską dokładnością wartości stałej  $K$  i współczynnika  $E$ . W praktyce dokładność rzędu 1-2% jest zupełnie wystarczająca zarówno dla stałej materiałowej jak i dla współczynnika sprężystości  $E$ .

Literatura z dziedziny elastoptyki [4-7] podaje wiele metod wyznaczania

<sup>1</sup> Współczynnikiem jakości materiału elastoptycznego nazywamy stosunek współczynnika  $E$  do elastoptycznej stałej materiałowej  $K$ .

stałej materiałowej  $K$ . Sprowadzają się one do wytworzenia w modelu o nieskomplikowanym kształcie albo jednorodnego stanu naprężenia (ściskanie lub rozciąganie osiowe), albo też stanu naprężenia niejednorodnego, ale znanego z rozwiązań teoretycznych (czyste zginanie, tarcza kołowa ściskana wzdłuż średnicy, półpłaszczyzna obciążona siłą skupioną), a następnie do wyliczenia stałej  $K$  z zależności

$$K = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)g}{n},$$

gdzie  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oznaczają naprężenia główne,  $g$  grubość modelu,  $n$  rząd izochromy odpowiadający danej różnicy naprężeń głównych.

Celem badań przeprowadzonych w Pracowni Analizy Naprężeń było przyjęcie jednej z tych metod, która umożliwiałaby jednoczesne wyznaczenie elastooptycznej stałej materiałowej oraz współczynnika sprężystości podłużnej. W związku z tym badania te nie miały charakteru szczegółowej analizy naukowej elastooptycznych i mechanicznych własności materiałów używanych w elastooptyce. Ograniczono się również, na razie, do badań w temperaturze pokojowej. W dalszych etapach będą prowadzone badania omawianych własności w temperaturze «zamrażania naprężeń» oraz badania zjawisk reologicznych zarówno dla temperatury pokojowej, jak i temperatury «zamrażania naprężeń».

W pierwszym etapie przeprowadzonych badań zostały wypróbowane doświadczalnie na materiale VP-1527 wszystkie znane z literatury metody wyznaczenia stałej  $K$ . Następnie w wyniku analizy uzyskanych rezultatów pomiarów wybrano dwie spośród nich, które okazały się najprostsze i najdokładniejsze. Są to metody posługujące się osiowym rozciąganiem oraz półpłaszczyzną obciążoną siłą skupioną. W dalszym etapie już tylko za pomocą tych dwóch metod wyznaczono własności pozostałych materiałów elastooptycznych, którymi rozporządza Pracownia, tzn. żywic epoksydowych polimeryzowanych w pracowni oraz materiałów importowanych: BT-61893, CR-39 i dekoritu.

## **2. Metoda jednoczesnego wyznaczenia współczynnika sprężystości i elastooptycznej stałej materiałowej przez rozciąganie**

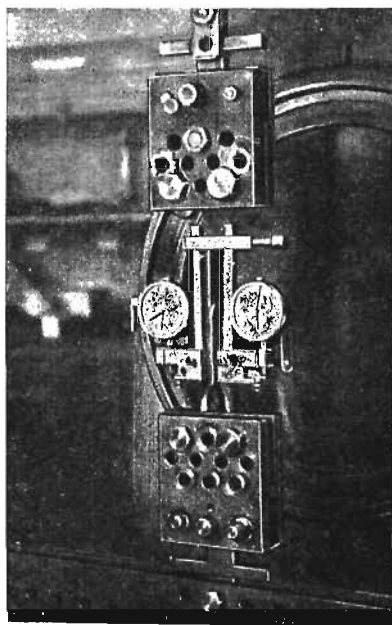
**2.1. Sposób wykonania pomiaru.** Stosując tę metodę posługiwano się dwoma rodzajami modeli przedstawionymi na rys. 1, przy czym ze względu na mniejsze wymiary w dalszych badaniach używano tylko modeli z rys. 1b. Modele wycinano wyłącznie z płyt o grubościach fabrycznych zbliżonych do 10 mm. Gotowy model bezpośrednio po wycięciu montowany był w układzie obciążającym polaryskopu w sposób umożliwiający jego osiowe rozciąganie, a następnie do modelu przymocowywano tensometry. W przeprowadzonych badaniach do pomiaru odkształceń modelu używano tensometrów czujnikowych produkcji WPM-Leipzig o najmniejszej działce 0,01 mm. Baza pomiarowa tensometrów dla modeli przedstawionych na rys. 1a i 1b wynosiła odpowiednio 8,0 i 4,0 cm.





czasu (jednej minuty) od momentu zwiększenia siły rozciągającej. W ten sposób poszczególne odczyty dokonywane były w warunkach zbliżonych.

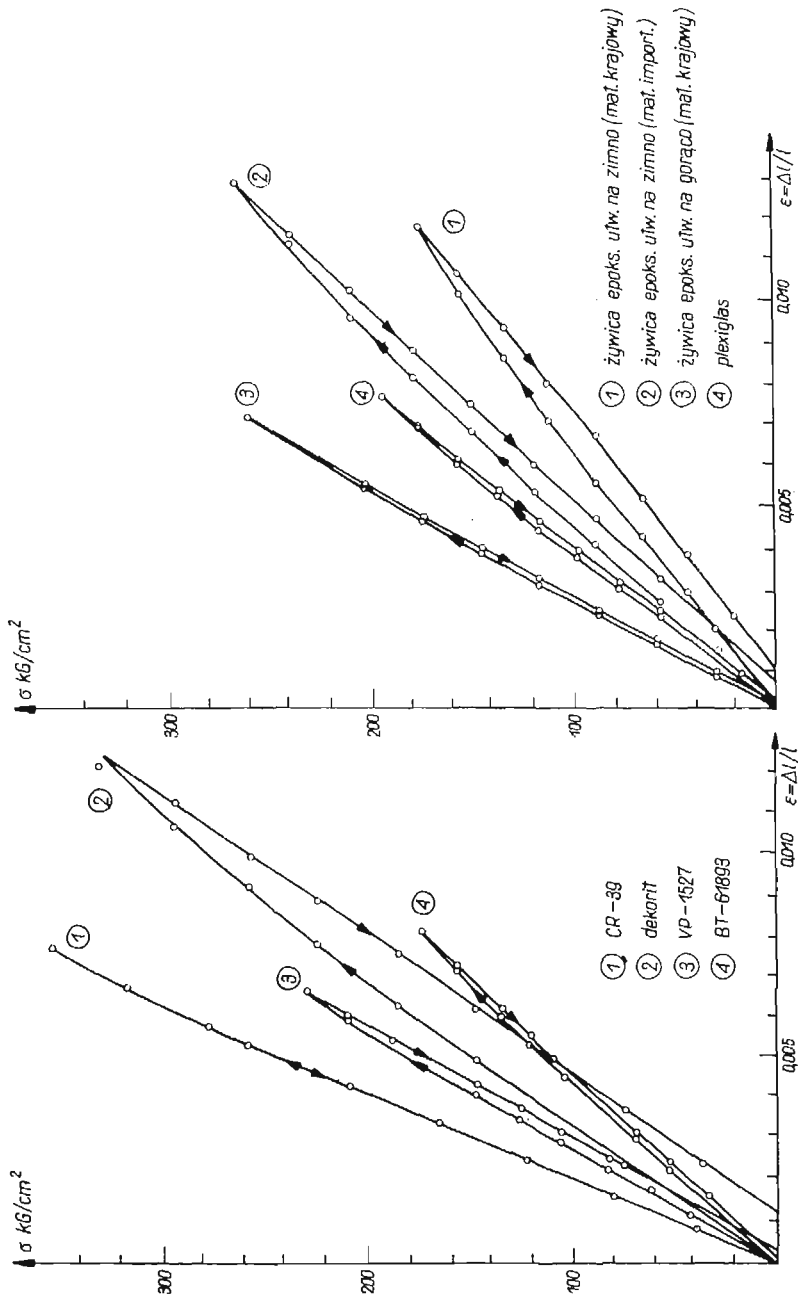
2.2. Wyniki pomiarów. Jak już wspomniano modele obciążano do naprężenia nie przekraczającego wartości dopuszczalnej podawanej w literaturze, otrzymywano więc w wyniku pomiarów wykres obciążenia i odciążenia. Oprócz wyznaczenia współczynnika sprężystości celem pomiarów było znalezienie przebiegu



Rys. 2

wykresów  $\varepsilon$ - $\sigma$  i określenie granicy proporcjonalności. Niektóre materiały, szczególnie materiały kruche jak CR-39, dekorit, BT-61893, nie mogły być obciążane nawet do dopuszczalnej wartości naprężenia, gdyż często zupełnie nieoczekiwanie pękały przy dość niskiej sile rozciągającej. Poza tym ze względu na brak możliwości regulacji temperatury pomieszczenia badania nie były wykonywane przy ustalonej temperaturze 20 °C. Temperatura więc pomieszczenia wahała się, jednak wahania te zamykały się w granicach od 24,5 do 27,5 °C.

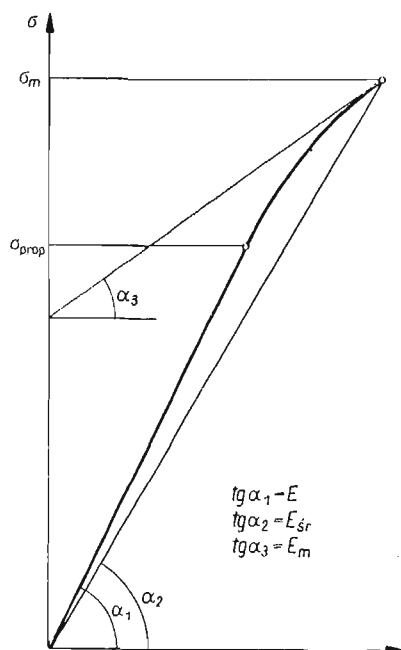
Na rysunku 3 przedstawiono wykresy obrazujące zależność odkształcenia względnego od naprężenia przy obciążeniu i odciążeniu badanych materiałów. Wykresy te mają bardzo ciekawy przebieg: tylko pewna część wykresu obciążenia posiada przebieg wyraźnie liniowy, następnie wykres wyraźnie pochyla się, wykres zaś odciążenia jest praktycznie biorąc liniowy z tym, że prosta obrazująca przebieg odciążenia jest prawie idealnie równoległa do prostej obrazującej przebieg obciążenia w granicach proporcjonalności. Na podstawie tych wykresów wyznaczono wartości współczynników sprężystości oraz granicy



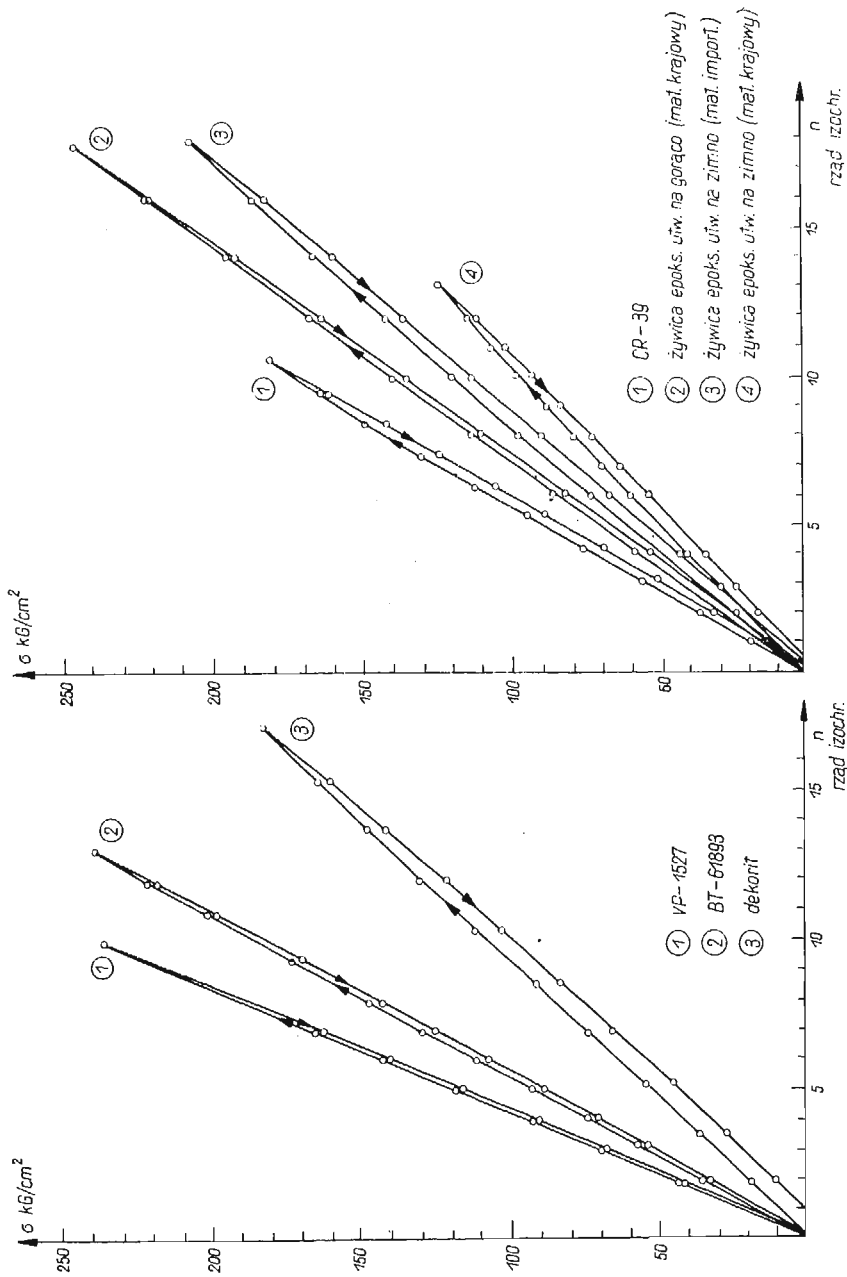
Rys. 3

Tablica 1

P. L.	Materiał	Wartości podawane w literaturze [4]	Wartości uzyskane z badań własnych					
			$F$	$\sigma_{dop}$	$\sigma_{prop}$	$E_{prop}$	$\sigma_m$	$E_m$
kG/cm <sup>2</sup>								
1	VP-1527	38000-42000	250	125	38400	233	32800	36900
2	BT-61893	42000-48000	400	200	49700	358	39800	47600
3	Dekorit	25000-38000	400	150	30100	315	20200	28400
4	CR-39	17000-22000	200	100	23400	175	18600	22100
5	Plexiglas	28000-32000	200	120	26500	194	21800	25100
6	Żywica epoksydowa utwardzona na zimno; materiał krajowy	—	—	90	16500	178	12200	14900
7	Żywica epoksydowa utwardzona na gorąco; materiał krajowy	—	—	150	38300	260	31400	36500
8	Żywica epoksydowa utwardzona na zimno; materiał importowany	—	—	110	22800	268	17100	20700
9	Żywica epoksydowa utwardzona na gorąco; materiał importowany	—	—	190	32700	282	30400	32000



Rys. 4



Rys. 5

proporcjonalności poszczególnych materiałów. Wyniki zostały zestawione w tablicy 1, rys. 4 zaś wyjaśnia poszczególne oznaczenia użyte w zestawieniu.

Przy sporządzaniu wykresów nie brano pod uwagę zmniejszenia się wymiarów przekroju poprzecznego. Wydłużenia względne modeli rozciąganych dla zakresu proporcjonalności nie przekraczały w żadnym przypadku wartości  $\epsilon = 0,01$ , co przy współczynniku Poissona  $\nu = 0,4$  daje zmniejszenie pola przekroju poprzecznego o około 0,8%.

Z analizy rezultatów pomiarów wynika, że dla wszystkich materiałów granica proporcjonalności jest dużo niższa od naprężenia dopuszczalnego. W celu więc otrzymania ścisłych wyników pomiarów w badaniach wymagających znajomości współczynnika sprężystości nie można obciążać modelu do naprężenia dopuszczalnego, gdyż rozbieżności średniej wartości modułu Younga, odpowiadającej cięciwie wykresu, od rzeczywistych wartości w poszczególnych punktach wykresów są znaczne. Wartość  $E$  odpowiadająca prostoliniowej części wykresu jest większa od wartości średniej o 4-9%, wartość zaś odpowiadająca maksymalnemu naprężeniu jest mniejsza o 12-40%. Dla żywic epoksydowych nie umieszczono w tablicy wartości podawanych w literaturze, gdyż wszystkie te materiały produkowane były w Pracowni Analizy Naprężeń (na gruncie surowców zarówno krajowych jak i zagranicznych). Wobec różnic w technologii i składzie chemicznym nie można ich własności porównywać z własnościami żywic produkowanych fabrycznie zagranicą.

Tablica 2

L. p.	Material	Stała materiałowa		Granica proporcjonalności efektu elastoplastycznego $\sigma_{plop}$	$\sigma_{prop}$	$E$
		z literatury	z pomiarów		K	K
		kG/cm rząd		kG/cm	rząd	
1	VP-1527	23,5-25,5	24,1	180	7-8	1590
2	BT-61893	14-15,5	18,6	200	11	2670
3	Dekorit	12-14	11,1	150	13	2710
4	CR-39	14-15	17,6	110	6	1330
5	Żywica epoksydowa utwardzona na zimno; materiał krajowy	—	9,8 <sup>1)</sup>	90	9	1685
6	Żywica epoksydowa utwardzona na gorąco; materiał krajowy	—	14,0	180	12	2740
7	Żywica epoksydowa utwardzona na zimno; materiał importowany	—	11,9	120	10	1920
8	Żywica epoksydowa utwardzona na gorąco; materiał importowany	—	11,0	160	14-15	3060

1) Dokładność 3%

W czasie badań zauważono zjawisko polegające na zmianie wartości współczynnika sprężystości w wyniku narastania w modelu tzw. efektu brzegowego czasu. Po zbadaniu tych samych modeli po kilkunastu dniach stwierdzono dość znaczne zwiększenie wartości  $E$ , które dla różnych materiałów wahało się od 9-25%, przy czym materiały, w których efekt brzegowy narastał szybciej, wykazywały odpowiednio większą różnicę. Wynika stąd, że strefa objęta efektem brzegowym jest znacznie «sztywniejsza» od reszty materiału, a mierzona wartość współczynnika sprężystości jest wartością średnią. Zjawisko to nie ma jednak istotnego znaczenia w praktyce, gdyż modele elastoptyczne badane są bezpośrednio po ich wykonaniu. Mimo to prowadzone będą dalsze badania w tym kierunku, gdyż zaobserwowane zjawisko jest ciekawe z teoretycznego punktu widzenia. Celem tych badań będzie dokładna analiza zmienności współczynnika sprężystości w czasie i ewentualnie znalezienie funkcji określającej tę zmienność.

Wartości pomierzonych elastoptycznych stałych materiałowych odnoszą się do żółtego światła lampy sodowej o długości fali świetlnej  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$  oraz do jednostkowej grubości materiału wynoszącej 1 cm.

W wyniku pomiarów sporządzono wykresy (rys. 5) zależności rzędu izochromy od naprężenia rozciągającego, jakiemu poddano model o wymiarach przekroju poprzecznego  $1,0 \times 1,0 \text{ cm}$ . Wykresy te mają bardzo podobny przebieg do zwykłych wykresów rozciągania, obrazujących zależność wydłużenia względnego od naprężenia. Część wykresu odpowiadająca obciążeniu ma tylko początkowo przebieg liniowy, część zaś odpowiadająca odciążeniu przebiega liniowo od początku do końca z tym, że obie proste są praktycznie biorąc równoległe. Do wyznaczenia elastoptycznej stałej materiałowej brano pod uwagę tylko część wykresu praktycznie prostoliniową. Wyniki pomiarów zestawione są w tablicy 2. Jak łatwo zauważyć, granice proporcjonalności efektu elastoptycznego od naprężenia niewiele różnią się od granicy proporcjonalności wykresu rozciągania  $\epsilon - \sigma$ . Znajomość tej granicy ma duże znaczenia w badaniach elastoptycznych, gdyż w przypadku jej przekroczenia pomiędzy izochromami wyższych rzędów nie będzie tej samej różnicy naprężeń głównych. W takim przypadku w celu wyznaczenia naprężeń na podstawie obrazu izochrom należałoby posługiwać się miejscowymi wartościami stałej materiałowej.

Wyznaczone doświadczalnie wartości stałych  $K$  wykazują dość znaczne odchylenia od podawanych w literaturze. Obniżenie wartości stałej materiałowej dla dekoritu można wytłumaczyć tym, że temperatura w czasie wykonywania pomiarów była wyższa od normalnej o około  $7^\circ \text{C}$ . Znaczne podwyższenie stałej dla BT-61893 i CR-39 można wyjaśnić jedynie pewnymi trwałymi zmianami własności tych materiałów w wyniku długotrwałego przechowywania. Wartości stałej  $K$  mogą się znacznie różnić dla tych samych materiałów przechowywanych w różnych warunkach. Podobne rozbieżności dają się zauważyć w wartościach współczynnika sprężystości dla poszczególnych materiałów. O ile dla dekoritu i VP-1527 wyznaczone doświadczalnie wartości  $E$  są bliskie dolnej granicy podawanej w literaturze, co spowodowane jest nieco wyższą

temperaturą, to dla BT-61893 i CR-39 obserwujemy znaczny ich wzrost trudny do wytłumaczenia.

Wynika stąd, że nie można traktować wyznaczonych własności jako stałych w czasie i dlatego istnieje konieczność sprawdzania ich co pewien czas, a w przypadku dokładniejszych badań niezbędne jest równoległe wyznaczanie stałej materiałowej i współczynnika sprężystości.

### 3. Półpłaszczyzna obciążona siłą skupioną

Metoda powyższa jest szczególnie godna zalecenia, gdyż nie wymaga wykonywania modeli, co daje znaczne oszczędności na drogich materiałach elastooptycznych. Pomiaru dokonujemy na całych płytach odpowiednio zamocowanych i obciążonych. W praktyce izochromy nie są idealnymi kołami (rys. 6), co spowodowane jest niespełnieniem założeń teorii sprężystości, gdyż

- 1) materiał nie jest idealnie sprężysty i jednorodny,
- 2) płyty posiadają nieco inne grubości w różnych punktach,
- 3) płyty mają wymiary skończone.

Jednak przy doborze odpowiednich wymiarów płyt oraz obciążenia można otrzymać wystarczająco dokładne wyniki pomiarów.

**3.1. Sposób wykonania pomiaru elastooskopycznej stałej materiałowej.** Metodę tę wypróbowano na trzech materiałach, mianowicie na BT-61893, CR-39 i VP-1527. W ocenie przydatności tej metody chodziło głównie o określenie, czy metoda ta daje dokładne wyniki w przypadku, gdy płyty wykazują efekt brzegowy czasu, oraz o znalezienie najmniejszych wymiarów płyt, dla których można otrzymać tą metodą obraz izochrom jeszcze nie zniekształcony.

Mogłoby się wydawać, że wymiary płyty nie mają istotnego znaczenia, gdyż przyłożony odpowiednio mniejszą siłę otrzymuje się obraz izochrom dostatecznie foremny. W rzeczywistości okazuje się, że przy mniejszych wartościach siły niwelujemy wprawdzie wpływ skończonych wymiarów, izochromy jednak są zniekształcone z powodu niejednorodności materiału przy brzegach płyty i niejednakowej grubości płyty. Należy więc dla danego wymiaru płyty znaleźć takie optymalne obciążenie, dla którego otrzymuje się przynajmniej kilka izochrom możliwie zbliżonych do kształtu kołowego. W praktyce wyglądało to w ten sposób, że stopniowo zwiększano obciążenie aż do momentu ukazania się izochrom zbliżonych do okręgów kół i wtedy wykonywano zdjęcie. Następnie w dalszym ciągu zwiększano obciążenie i o ile obraz izochrom nie był jeszcze zniekształcony, ponownie go fotografowano. W ten sposób otrzymano kilka zdjęć dla różnych wartości siły obciążającej. Z każdego zdjęcia wybierano najforemniejsze koła izochrom, mierzono ich średnice, określano rząd, a następnie obliczano dla każdej izochromy oddzielnie stałą  $K$  z zależności  $K = 2P/\pi dn$ , gdzie  $P$  jest siłą obciążającą krawędź półpłaszczyzny,  $n$  rzędem izochromy o średnicy  $d$ . Z otrzymanej w ten sposób serii wyników, w której wartość najmniejsza



z reguły nie różniła się od największej o więcej niż 3,0%, wyznaczano średnią arytmetyczną.

Zupełnie dokładne wyniki można otrzymać mierząc średnicę izochrom bezpośrednio na obciążonym modelu bez wykonywania zdjęć, dzięki czemu uzyskujemy znaczne oszczędności na czasie.

W opisany sposób wykonywano serię pomiarów na płytach z efektem brzegowym czasu, następnie przez obcięcie usuwano strefę objętą efektem i ponownie wyznaczano stałą  $K$ .

**3.2. Wyniki badań stałej materiałowej.** W tabelicy 3 zestawiono wymiary badanych płyt, zakresy obciążenia, w których uzyskiwano foremne obrazy izochrom, oraz wartości stałych, otrzymane dla płyt z efektem brzegowym czasu oraz bez efektu. Z porównania tych dwóch wartości stałej  $K$  można wywnioskować, że błąd, jaki popełniamy badając płytę z efektem brzegowym, jest bardzo mały i waha się w granicach 0-1%. Jak więc widać, dla wyznaczenia stałej  $K$  tą metodą nie ma potrzeby ścinania warstwy objętej efektami brzegowymi, gdyż otrzymywane wyniki są dostatecznie dokładne dla celów praktycznych. Ma to bardzo duże znaczenie, ponieważ płyty wskutek długotrwałego przechowywania prawie z reguły wykazują dość znaczny efekt brzegowy czasu. Rysunek 6 przedstawia obraz izochrom w płycie o wymiarach  $35 \times 30$  cm z materiału VP-1527, objętej efektem brzegowym i obciążonej siłą  $P = 292$  kG.

Tabela 3

Materiał	Wymiary płyty	Grubość płyty	Zakres stosowanego obciążenia	Stała $K$ dla płyty	
				z efektami	bez efektów
	cm	cm	kG	kG/cm rząd	
BT-61893	30×18	0,96	175-300	18,8	19,0
CR-39	45×30	0,98	120-240	17,3	17,5
VP-1527	35×30	1,01	120-300	24,0	24,1

Ta metoda cechowania materiału daje poważne korzyści, gdyż nie wymaga wycinania modeli skalujących, stwarzając tym samym możliwości wyznaczenia stałej  $K$  dla poszczególnych płyt bez ich naruszania, jest więc metodą niszczącą.

**3.3. Możliwości dokonywania pomiaru współczynnika sprężystości:** Rozważono również możliwości wyznaczenia współczynnika sprężystości  $E$  przez pomiar przemieszczeń punktów półpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną, leżących na przedłużeniu kierunku działania siły. Jak wiemy [8], różnica przemieszczeń  $\Delta u$  dwóch punktów  $A$  i  $B$  leżących na przedłużeniu kierunku działania siły, znajdujących się w odległościach odpowiednio  $a$  i  $b$  od krawędzi półpłaszczyzny wynosi

$$u_A - u_B = \Delta u = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{b}{a},$$

skąd

$$E = \frac{2P}{\pi \Delta u} \ln \frac{b}{a}$$

Widzimy więc, że zależność, z której można by obliczyć współczynnik sprężystości, jest dość prosta.

Metoda ta nie została jeszcze sprawdzona doświadczalnie, lecz istnieje duże prawdopodobieństwo, że po odpowiednim jej opracowaniu może być bardzo użyteczna w praktyce (przynajmniej dla wyznaczania  $E$  żywic miękkich



Rys. 6

a żywic twardych w temperaturze «zamrażania»). W celu pomierzenia różnicy przemieszczeń należałoby dokładnie oznaczyć położenie punktów  $A$  i  $B$  przez nacięcie lub naklejenie krzyża z bardzo cienkich linii. Samego pomiaru przemieszczeń można by dokonać za pomocą np. katetometru dającego dokładność pomiaru 0,001 mm. Taka dokładność pomiaru przemieszczeń jest zupełnie wystarczająca, gdyż wielkość  $u$  dla  $b = 10$  cm,  $a = 1,0$  cm,  $E = 35000$  kG/cm<sup>2</sup> oraz  $P = 300$  kG jest rzędu 0,2 mm.

#### 4. Wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów wartości elastoptycznej stałej materiałowej  $K$  i współczynnika sprężystości  $E$  wyciągnięto wnioski, które zostaną tu krótko omówione.

1. Wartości elastoptycznej stałej materiałowej i współczynnika sprężystości uzależnione są w znacznym stopniu od wahań temperatury nie przekraczających nawet kilku stopni Celsjusza. W związku z tym wartości stałych podanych w poszczególnych tablicach nie można traktować jako ustalonych ostatecznie, gdyż odnoszą się one do temperatury zmieniającej się w zakresie od 24,5 do 27,5 °C.

Przewidziane są dalsze badania nad zmiennością  $E$  i  $K$  spowodowaną wahaniami temperatury w zakresie od 15 do 30 °C, których celem będzie stabelaryzowanie lub znalezienie funkcji wyrażającej ich zmienność. Jak już wspomniano w p. 2.2 przewiduje się również badania nad zmiennością współczynnika sprężystości  $E$ , spowodowaną narastaniem w modelu efektu brzegowego czasu.

2. Oprócz zmienności wartości tych stałych, spowodowanej wahaniami temperatury, zauważono również, że poszczególne płyty tego samego materiału posiadają często nieco inne własności. Rozbieżności te mogą być spowodowane pochodzeniem płyt z różnych partii produkcji lub też różnicami w ich przechowywaniu. Łatwo więc zauważyć, że własności materiałów elastoptycznych zależne są od wielu czynników na ogół mało uchwytnych, w związku z czym istnieje konieczność bieżącego ich badania.

3. Opisane w p. 3 i 4 metody opracowano pod tym właśnie kątem, przy czym wskazane jest wyznaczanie własności materiału metodą półpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną bezpośrednio przed wycięciem modeli elastoptycznych. W przypadku opracowania sposobu wyznaczania współczynnika sprężystości przez pomiar przemieszczenia punktów półpłaszczyzny, obciążonej siłą skupioną, metoda ta nabrałaby szczególnego znaczenia ze względu na możliwość jednoczesnego pomiaru obu stałych.

4. Dzięki równoległemu prowadzeniu badań różnymi metodami własności próbek pobranych z tej samej części tego samego arkusza VP-1527 mogliśmy potwierdzić znaną z literatury opinię, że metodyka badań ma również wpływ na otrzymywane wyniki.

5. Jak wiadomo, w tworzywach sztucznych zachodzą zjawiska reologiczne<sup>2</sup>. W związku z tym w opisie przeprowadzonych badań staraliśmy się podawać czasy, w jakich obciążaliśmy i robiliśmy odczyty. Miało to na celu jednoznaczne określenie wpływu czasu.

6. W przeprowadzonych badaniach nie uwzględniono wpływu zmniejszenia się pola przekroju poprzecznego modelu rozciąganego, gdyż jak wykazano w p. 2.2 zmniejszenie to nie przekraczało 0,8%. Uwzględnianie tego nie było celowe, gdyż błąd popełniany przy określeniu pola przekroju poprzecznego, spowodowany niedokładnościami wykonania modelu, był tego samego rzędu. W badaniach dokładniejszych konieczne jest jednak obliczanie naprężeń dla przekrojów rzeczywistych a nie początkowych.

<sup>2</sup> Podstawowe wiadomości z zakresu reologii zebrał J. T. PINDERA [9], który analizował również zagadnienie badań reologicznych własności tworzyw sztucznych, między innymi żywicy produkcyjnej angielskiej CR-39, stosowanej w elastoptyce.

7. Przeprowadzone badania potwierdziły zalety żywic epoksydowych, które w ostatnich latach są tworzywami sztucznymi najszerzej stosowanymi do wykonywania modeli elastoptycznych. Wyparły one całkowicie inne materiały, nawet tak szeroko stosowany dawniej w USA BT-61893.

8. W przypadku braku materiału elastoptycznego o własnościach dostatecznie stałych w czasie oraz braku dokładnego opisu ich własności należy stosować równolegle z badanym modelem — model kompensacyjny wykonany z tego samego materiału co badany model. Bardzo korzystny kształt takiego kompensatora (w formie klina) zaproponowali COKER i FILON [4]. Taki model kompensujący daje automatycznie skalę naprężeń wzdłuż jego długości dla danych warunków termicznych, wilgotnościowych i czasowych, w jakich był badany model właściwy.

9. Czyniono również próby opracowania metody wyznaczania elastoptycznej stałej materiałowej żywic miękkich, dla których wartość stałej jest rzędu  $K = 0,2 \text{ kG/cm}$  rząd izochromy. Ze względu na znaczne odkształcenia szczególnie przy badaniach żywic bardzo miękkich zawodziły niemal wszystkie metody znane z literatury. Dość dobrą dokładność otrzymywano jedynie za pomocą metody polegającej na ściskaniu tarczy kołowej wzdłuż średnicy. W niektórych przypadkach badanie można przeprowadzić metodą półpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną. W Pracowni Analizy Naprężeń IPPT PAN będą prowadzone dalsze badania w tym kierunku.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] R. S. DOROSZKIEWICZ, *Zastosowanie elastoptycznych badań w budownictwie wodnym*, Gospodarka Wodna, 8, 1961.
- [2] R. S. DOROSZKIEWICZ, *Zastosowanie elastoptycznych badań w budownictwie*, Inżyn. Budown., 11, 1960.
- [3] C. GERARD, A. C. GILBERT, *Photothermoelasticity. An exploratory study*, J. Appl. Mech., 3, 24 (1957).
- [4] E. G. COKER, L. N. G. FILON, *A treatise on photo-elasticity*, Cambridge University Press, 1957.
- [5] M. HETENYI, *Handbook of experimental stress analysis*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1950.
- [6] H. T. JESSOP, *Photoelasticity: principles and methods*, Cleaver-Hume Press, London 1949.
- [7] H. WOLF, *Spannungsoptik*, Springer-Verlag, Berlin (Göttingen), Heidelberg 1961.
- [8] S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1961, 92.
- [9] J. T. PINDERA, *Reologiczne własności materiałów modelowych*, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa 1962.
- [10] L. FÖPL, E. MÖNCH, *Praktische Spannungsoptik*, Springer Verlag, 1958.

#### Резюме

#### ТЕКУЩЕЕ ИСПЫТАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ФОТОУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИМЕНЯЕМЫХ В ФОТОУПРУГОСТИ

Целью работы является адаптация одного из известных по литературе методов испытания механических и фотоупругих свойств материалов для одновременного определения фотоупругой константы материала  $K$  и модуля продольной упругости  $E$ .

Эти методы были проверены экспериментально, причем были исследованы смолы эпокси полимеризованные в Лаборатории Анализа Напряжений Института Основных Вопросов Техники Польской Академии Наук, а также смолы VP-1527, BT-61893, CR-39 и декорит.

Для перечисленных материалов даны графики и таблицы, показывающие зависимость относительной деформации и константы  $K$  от напряжения.

На основе проведенных замеров сделаны следующие выводы:

1. Значения константы  $K$  и модуля  $E$  в значительной степени зависят от: а) изменений температуры, б) условий хранения материала и его происхождения (из разных производственных серий), в) возраста материала, г) выбранного метода испытания.

2. В связи с этим существует необходимость текущей проверки свойств фотоупругих материалов определенным, выбранным методом.

3. Особой рекомендации заслуживает способ определения константы  $K$ , называемый методом «полуплоскости» т. к. этот метод: а) отличается малой трудоемкостью и не требует вырезки моделей, б) не связан с разрушением образца и дает возможность определения константы  $K$  для отдельных плит без необходимости их повреждения, в) дает возможность определения также модуля  $E$ .

В части определения модуля  $E$ , метод еще не проверен на опыте, но можно предполагать, что он будет практически пригоден, по крайней мере, для определения  $E$  при температуре «замораживания» и для смол с малыми модулями упругости.

#### Summary

#### TESTING OF MECHANICAL AND PHOTOELASTIC PROPERTIES OF THE PHOTOELASTIC MATERIALS

The object of the present tests is the adoption of one of a known method of investigation the mechanical and photoelastic properties to the simultaneous determination of the photoelastic constant  $K$  and the Young modulus  $E$ .

The experimental methods have been tested on the epoxy resins (polymerized in the Laboratory of Stress Analysis of the Institute of the Fundamental Engineering Research of the Polish Academy of Sciences), VP-1527, BT-61893, CR-39, and Dekorit.

The diagrams and tables show the dependence of the unit strain and  $K$  on stresses for the tested materials.

The following conclusions result from the above experiments:

1. The values of constant  $K$  and modulus  $E$  considerably depend upon: a) the change of temperature, b) the differences in the conditions in which the material is stored and on the given lot of material, c) time, d) the assumed method of testing.

2. In this connection the necessity presents itself of the properties of photoelastic materials.

3. The method of «half-plane» is particularly useful for the determination of  $K$ , because: a) it is not tedious and does not require cutting of any scaling model, b) is non-destructive, c) the Young modulus  $E$  can be determined simultaneously.

As regard, the determination of  $E$  this method has not yet be verified experimentally but one can suppose that it will be useful in practice, at least for the determination of  $E$  in the temperature of «freezing» and for the resins with low values of  $E$ .

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 sierpnia 1963 r.*



---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

---

### VI ZJAZD DELEGATÓW PTMTS

Doroczny Zjazd Delegatów PTMTS odbył się dnia 23 maja 1964 r. w Warszawie w Pałacu Kultury i Nauki.

Porządek dzienny obejmował następujące punkty:

1. Otwarcie Zjazdu
2. Przyjęcie protokołu z V-go Zjazdu Delegatów PTMTS
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa w okresie od dnia 1 kwietnia 1963 r. do dnia 30 kwietnia 1964 r.
5. Złożenie sprawozdania finansowego
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem
8. Wybory:
  - a) przewodniczącego,
  - b) uzupełniające członków Zarządu Głównego,
  - c) Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres
10. Przyjęcie projektu proponowanych poprawek do Statutu Towarzystwa
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Na przewodniczącego obrad Zjazdu Delegatów został powołany przewodniczący Oddziału Warszawskiego prof. dr J. MUTERMILCH, na zastępców przewodniczącego wybrano prof. dr E. KARAŚKIEWICZA z Poznania i prof. R. KAZIMIERCZAKA z Gdańska, na sekretarzy obrad powołano dr Z. ENGELA (z Krakowa) i dr K. GROSSMANA (z Łodzi). Następnie zebrani powołali Komisję Matkę i Skrutacyjną w składzie: prof. dr M. JANUSZ, prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, prof. dr M. ŻYCZKOWSKI i doc. dr Z. PARSZEWSKI.

Sprawozdanie Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej za okres kadencji od dnia 1 kwietnia 1963 r. do dnia 15 maja 1964 r. (dane sprawozdawcze z Oddziałów do końca pierwszego kwartału 1964 r., tzn. do dnia 31 marca r.b.) omówił prof. dr Z. OLEŚIAK.

W okresie ostatniej kadencji podobnie jak poprzednio Towarzystwo rozwijało swą działalność w oparciu o ustalone wytyczne, stanowiące już dla PTMTS pewne tradycyjne formy. Realizacja wytycznych V Zjazdu Delegatów przebiegała następująco:

## 1. Rozwijanie działalności naukowej w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej

1. Zebrania naukowe w Oddziałach PTMETS pod względem liczbowym przedstawia tablica 1.

**Tablica 1.**

Oddział	Liczba zebrań					Liczba referatów	Uczestników		Dyskutantów	
	Kwartał				razem		łącznie	przeciętna na 1 zebr.	łącznie	przeciętna na 1 zebr.
	II 1963	III 1963	IV 1963	I 1964						
Gdańsk	—	—	3	1	4	4	83	20,7	52	13,0
Gliwice	3	—	3	3	9	12	517	57,4	100	11,1
Kraków	2	1	2	1	6	7	179	29,8	64	10,6
Łódź	3	—	3	2	8	8	147	18,3	55	6,8
Poznań	1	—	2	2	5	5	190	38,0	43	8,6
Szczecin	3	—	4	3	10	10	158	15,8	45	4,5
Warszawa	5	—	3	2	10	11	218	21,8	77	7,7
Wrocław	1	—	3	3	7	7	143	20,4	35	5,0
Razem	18	1	23	17	59	64	1.635	27,7	471	7,9

Po raz pierwszy od początku istnienia Towarzystwa liczba zebrań naukowych w porównaniu z ubiegłą kadencją nie wzrosła, lecz zmalała z 63 do 59, liczba uczestników jednak pomimo to wzrosła z 1233 do 1635, a liczba dyskutantów wzrosła z 351 do 471. Świadczyłyby to o mniej przypadkowym i bardziej interesującym doborze tematyki wygłaszanych referatów.

### 2. Sympozja i konferencje naukowe dotyczące wybranych działów specjalnych

W okresie sprawozdawczym odbyło się 5 sympozjów, a mianowicie:

a) Oddział we Wrocławiu zorganizował w dniu 25 kwietnia 1963 r. Sympozjum na temat «Badania modelowe dźwigarów powierzchniowych» z udziałem 100 osób.

b) Oddział w Łodzi zorganizował w dniu 25 maja 1963 r. Sympozjum na temat «Zagadnienia stateczności» z udziałem 27 osób.

c) Oddział w Poznaniu zorganizował w dniach 13-14 września 1963 r. Sympozjum na temat «Teoria drgań nieliniowych» z udziałem 70 osób.

d) Oddział w Krakowie zorganizował w dniach 17-19 października 1963 r. Sympozjum na temat «Mechanika górotworu» z udziałem 100 osób, w tym 28 gości zagranicznych z Bułgarii, CSRS, NRD, NRF, Węgier i ZSRR.

e) Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach 8-14 lutego 1964 r. w Szczyrku Konwersatorium pt. «Spotkanie techniki nuklearnej z techniką konwencjonalną».

### 3. Konkursy naukowe

Akcja organizowania konkursów naukowych zahamowana została ograniczeniem dotacji przez PAN i brakiem niezbędnych funduszy na nagrody zaplanowanych już konkursów. W tej sytuacji zorganizowano tylko 1 konkurs (w Warszawie, ogłoszony jeszcze przed przyznaniem dotacji), natomiast z projektowanych 6 innych, m. in. również konkursu Zarządu Głównego na pracę z zakresu doświadczalnej analizy naprężeń, trzeba było na razie zrezygnować. Omówienie wyników konkursu podaliśmy w zeszycie 2/1963 Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

4. Udział w konferencjach i kongresach naukowych krajowych i zagranicznych omówiony został w Biuletynie PTMETS w zeszycie 2/1963 Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

### 5. Wymiana naukowa z zagranicą.

W ramach wymiany naukowej z zagranicą poszczególne Oddziały organizowały zebrania naukowe, na których referaty wygłaszali prelegenci zagraniczni.



Oddział w Krakowie zorganizował 3 zebrania tego rodzaju, a mianowicie:

- 1) 5 kwietnia 1963 r. SCHMIDT GUNSER z Berlina wygłosił referat pt. «Stateczność dynamiczna powłok o małej wyniosłości»,
- 2) 25 września 1963 r. prof. A. MARTIN z Francji wygłosił referat pt. «Teoria i technika metody kruchych pokryć»,
- 3) 25 września 1963 r. dr C. MORETTI z Francji wygłosił referat pt. «Dwie metody wyznaczania naprężeń własnych».

Ponadto Oddział w Krakowie zorganizował Sympozjum na temat «Mechaniki górotworu», na które przybyło na zaproszenie PTMTS 28 gości zagranicznych, z których 21 wygłosiło referaty (Biuletyn PTMTS w zeszytcie 2/1963 Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej).

Oddział w Łodzi zorganizował sympozjum na temat «Zagadnienia stateczności», na którym Go-CZUN-HEN z Chin wygłosił referat pt. «Stateczność układów niezachowawczych w teorii sprężystości».

## 2. Rozpowszechnianie mechaniki teoretycznej i stosowanej

### 1. Kontynuacja i rozwój akcji wydawniczej Towarzystwa

#### a) Organ PTMTS «Mechanika Teoretyczna i Stosowana»

Zgodnie z inicjatywą podjętą w latach poprzednich w 1963 roku po długim okresie starań i przygotowań przystąpiono do praktycznej realizacji wydawnictwa ciągłego «Mechanika Teoretyczna i Stosowana».

Główny ciężar pracy spoczął na Komitecie Redakcyjnym w składzie: Redaktor Naczelny — prof. dr A. KACNER oraz członkowie — prof. dr Z. OLESIAK, prof. dr M. SOKOŁOWSKI i mgr J. JANICZEK. W ciągu 1963 roku przygotowano do druku 3 zeszyty wydawnictwa.

Na treść zeszytów składają się zgodnie z założeniami programowymi prace przeglądowe oryginalne, prace teoretyczne i doświadczalne, biuletyn PTMTS, sprawozdania z działalności Towarzystwa.

Komitet Redakcyjny czyni starania, aby rozszerzyć tematykę publikowanych prac.

#### b) W związku z przeprowadzonymi Sympozjami Oddziały w Gliwicach, Krakowie, Poznaniu i Wrocławiu wydały bardzo starannie materiały konferencyjne, co przy szczupłych środkach finansowych i małym aparacie administracyjnym wymagało wiele wysiłków i trudów. Za przygotowanie tych wydawnictw należy się wymienionym wyżej oddziałom specjalne podziękowanie.

### 2. Popularyzacja w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów

#### a) Kursy

Oddział w Gdańsku rozpoczął prowadzenie kursu z zakresu «Matematycznej Teorii Sprężystości». Wykłady prowadzone są przez dr PIOTRA WILDEGO.

#### b) Seminaria

Oddział w Gdańsku zorganizował 6 seminariów z zakresu zastosowań matematyki do zagadnień technicznych.

Oddział w Łodzi zorganizował w dniach od 15 maja do 20 lipca 1963 r. seminarium na temat «Belka Timoszenki», które prowadził mgr K. WILMAŃSKI.

## 3. Rozwój liczbowy członków PTMTS ilustruje tablica 2.

Tablica 2

Oddział	Rok 1963				Rok 1964	Przybyło w okresie sprawozdawczym	
	K w a r t a ł				I	liczba	%
	I	II	III	IV			
Gdańsk	40	40	40	40	41	+ 1	+ 2,5
Gliwice	51	51	51	51	45*)	- 6*)	-11,7
Kraków	52	52	52	52	53	+ 1	+ 1,9
Łódź	23	25	25	25	25	+ 2	+ 8,7
Poznań	38	38	38	38	38	—	—
Szczecin	20	20	20	21	22	+ 2	+10,0
Warszawa	108	104	108	115	118	+10	+ 9,2
Wrocław	46	46	46	46	47	+ 1	+ 2,1
Razem	378	376	380	388	389	+11	+ 2,9

\*) Ubytek członków w Oddziale Gliwickim nastąpił na skutek śmierci jednego członka oraz skreślenia pięciu zalegających z opłatami składek.

4. Kontakt z przemysłem i jego problematyką w okresie sprawozdawczym ograniczył się do zapraszania na Sympozja i zebrania naukowe organizowane przez PTMTS inżynierów zatrudnionych w przemyśle.

## 3. Różne

## 1. Statut

Wobec stwierdzenia (przez czynniki kontrolujące i przez Zarząd Główny PTMTS) konieczności dostosowania Statutu PTMTS do faktycznych możliwości działalności Towarzystwa V-ty (poprzedni) Zjazd Delegatów Towarzystwa podjął uchwałę w sprawie opracowania odpowiednich poprawek statutowych oraz powołał w tym celu specjalną Komisję pod przewodnictwem prof. dr I. KISIELA. Projekt nowego brzmienia Statutu opracowany przez Komisję na podstawie uwag zgłoszonych przez Oddziały został powielony i rozesłany Członkom Zarządu Głównego oraz Oddziałom. Wkrótce potem wpłynęło pismo Sekretarza Naukowego PAN zawierające sugestie, dotyczące zmian statutów towarzystw naukowych dotowanych przez PAN. W związku z nowymi zaleceniami Komisja Statutowa ponownie zebrała się (we Wrocławiu) i opracowała dodatkowe poprawki statutowe.

## 2. Zebrania organizacyjne

Liczba zebrań organizacyjnych w okresie sprawozdawczym przedstawia się następująco:

		Zebrania Zarządów Oddziałów:	
Zjazd Delegatów	1	w Gdańsku	5
Zebrania Zarządu Głównego	4	w Gliwicach	10
Prezydium Zarządu Głównego	1	w Krakowie	7
Głównej Komisji Rewizyjnej	1	w Łodzi	11
Komisji Statutowej	2	w Poznaniu	5
Walnych Zgromadzeń Oddziałów	8	w Szczecinie	4
		we Wrocławiu	15
		w Warszawie	8

Razem odbyły się 82 zebrania organizacyjne.

(Liczba ta nie obejmuje zebrań jury konkursów, zebrań Komitetów Organizacyjnych odbytych Sympozjów ani zebrań Komitetu Redakcyjnego Mech. Teoret. i Stos.

W porównaniu z ubiegłą kadencją liczba zebrań organizacyjnych wzrosła z 61 do 82.

W punkcie 5 Zjazdu Delegatów sprawozdanie finansowe złożył skarbnik doc. dr A. SAWCZUK.

### Rok 1963

#### I. 1. D o c h o d y

Planowane dochody na rok 1963

a) dotacja PAN na cele statutowe (popularyzacja wiedzy i administracja)	zł 127.000.—
b) planowana wpłata składek członkowskich	25.345.—
c) dotacja na wydawnictwo	125.000.—
d) planowane dochody ze sprzedaży wydawnictwa	5.000.—
r a z e m	zł 282.345.—

Początkowo dotacja na cele statutowe wynosiła zł 107.000.— W ciągu 1963 r. Towarzystwo zostało dofinansowane przez Władze PAN kwotą w wysokości zł. 20.000.—

#### I.2. Wykonanie planu dochodów

a) dotacja PAN — łączna	zł 252.000.—
b) wpływy ze składek członkowskich	zł 21.745.—
c) sprzedaż wydawnictw	—
r a z e m	zł 273.745.—

Wpływ ze składek członkowskich w stosunku do planowanych wyniósł 85,8%. Tylko Oddziały Gdańsk, Szczecin i Wrocław całkowicie zrealizowały plan wpłat. Największe zaległości wykazują Oddziały w Gliwicach, Krakowie i Warszawie.

Zarząd Główny przypomina, że terminowe wpłacanie składek członkowskich jest warunkiem dalszych dotacji Zarządu Głównego.

#### II.1. R o z c h o d y

Mając do dyspozycji kwoty planowanych dochodów tj.	zł. 282.345.—
plus pozostałość funduszu z 1962 r.	zł 127.672.14
r a z e m	zł. 410.017.14

Zarząd Główny w oparciu o projekty preliminarzy budżetowych Oddziałów i Zarządu Głównego zaplanował wydatki na rok 1963:

Wydatki ogółem	zł. 404.600.—
w tym: a) na popularyzację wiedzy	zł. 117.440.—
b) na cele administracyjne	zł. 157.160.—
c) na wydawnictwo	zł. 130.000.—

#### II.2. Wykonanie planu rozchodów

Wydatki ogółem	zł. 298.731.73
w tym: a) na popularyzację wiedzy	zł. 112.339.50
co stanowi 95,7% planu	
b) na cele administracyjne	zł. 143.613.63
co stanowi 91,4% planu	
c) na wydawnictwo (częściowe koszty zeszytów 1/63 i 2/63)	zł. 42.778.60
co stanowi 32,9% planu	
Pozostałość środków na rok 1964 wyniosła:	
a) na zadania statutowe (popularyzacja wiedzy)	zł. 23.148.05
b) na wydawnictwo	zł. 82.221.40

Analizując sprawozdanie finansowe Towarzystwa za 1963 rok należy zwrócić uwagę na wydatne zmniejszenie funduszy własnych na koniec okresu sprawozdawczego (odnośnie do zadań statutowych).

Pozostałość funduszu na 31.XII. 1962 wynosiła	zł. 127.672.14
Pozostałość funduszu na 31.XII. 1963 wynosiła	zł. 23.148.05
Oszczędności lat poprzednich w wysokości zostały wydatkowane w 1963 r.	zł. 104.524.09

#### Rok 1964 — od 1 stycznia do 30 kwietnia 1964

##### I.1. Planowane dochody na działalność statutową (popularyzacja wiedzy i administracja) w 1964 r.

a) dotacja PAN	zł. 110.000.—
b) planowany wpływ ze składek członkowskich	zł. 26.720.—
c) odpłatność za materiały konferencyjne (Warszawa i Wrocław)	zł. 17.000.—
r a z e m	zł. 153.720.—
Pozostałość z roku ubiegłego	zł. 23.148.05
Do dyspozycji na wykonanie zadań 1964 r.	zł. 176.868.05

##### II.1. Planowane rozchody w 1964 roku:

Pierwotny plan wydatków, sporządzony na podstawie projektów preliminarzy budżetowych Oddziałów i Zarządu Głównego, wynosił zł. 293.711.—

Plenum Zarządu Głównego dysponując limitem tylko w wysokości zł. 176.868.05. po zanalizowaniu wydatków planowanych przez Oddziały musiało je dostosować do istniejących możliwości i postanowiło przedłożyć do zatwierdzenia władzom PAN preliminarz budżetowy w wysokości zł. 172.000.— w tym: na popularyzację wiedzy zł. 37.600.—, na administrację zł. 134.400.—

Biuro Finansowe PAN po zanalizowaniu preliminarza budżetowego z Wydziałem IV i po odrzuceniu proponowanego przetrucenia wynagrodzeń pracowników administracyjnych z funduszu plac na fundusz prac zleconych zatwierdziło preliminarz w wysokości zł. 174.891.—

##### II.2. Dochody za działalność wydawniczą

a) dotacja PAN	zł. 160.000.—
b) planowana sprzedaż wydawnictw	zł. 60.000.—
r a z e m	zł. 220.000.—
c) pozostałość z 1963 r.	zł. 82.241.40
r a z e m	zł. 302.241.40

Po otrzymaniu zawiadomienia o przyznaniu dotacji Zarząd Główny wystąpił do Sekretarza Naukowego PAN o przyznanie dodatkowych kredytów i w dniu 31 marca 1964 r. został powiadomiony o przyznaniu dodatkowej dotacji w wysokości zł. 80.000.— w tym: na cele statutowe z zastrzeżeniem, że mogą być użyte wyłącznie na cele popularyzacji wiedzy —zł. 50.000.—, na wydawnictwo zł. 30.000.—

Ponieważ termin złożenia preliminarza budżetowego upływał w dniu 5.III.1964 r., a dodatkowy kredyt został przyznany w dniu 31.III.64 r., przeto nie ma jeszcze odzwierciedlenia tego dofinansowania w wyżej podanych kwotach preliminarza budżetowego na 1964 rok.

Dochody w okresie od 1.I. do 30.IV 1964 r. wyniosły:

a) dotacja PAN	zł. 60.000.—
b) wpłata składek członkowskich	zł. 14.315.—
c) sprzedaż wydawnictw	zł. 1.711.80
r a z e m	zł. 76.026.80

Wydatki w okresie 1.I. — 30.IV. 1964 wyniosły zł. 41.188.55, w tym Zarząd Główny zł. 19.040.45, Oddziały zł. 22.148.10.

Wydatki na wydawnictwo wyniosły w tym okresie zł. 46971.35.

Sprawozdanie finansowe za I kwartał 1964 r. zostało przyjęte przez Biuro Finansowe PAN bez zastrzeżeń.

Z kolei przewodniczący Komisji prof. dr Z. WASIUTYŃSKI przedstawił sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej PTMTS, w którym dokonano wnikliwej analizy działalności Zarządu Głównego i Oddziałów Towarzystwa. W zakończeniu sprawozdania Główna Komisja Rewizyjna stwierdza, że w wyniku dokonanego przeglądu postanowiła wystąpić na Zjazd Delegatów z wnioskiem o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i wyrażenia mu podziękowania za owocną pracę. Następnie odbyła się dyskusja nad sprawozdaniami, w której głos zabierali profesorowie: J. MÜTERMILCH (dwukrotnie), A. MITZEL, J. DIETRZYCH (dwukrotnie), I. KISIEL, M. SĄSIADK, E. KARASIEWICZ, R. CIESIELSKI, W. WIERZBIKI i Z. OLESIK (dwukrotnie).

W wyniku dyskusji Zjazd Delegatów zaakceptował wniosek Głównej Komisji Rewizyjnej udzielając Zarządowi Głównemu absolutorium.

W następnym punkcie porządku obrad przewodniczący Komisji Matki zakomunikował, że zgodnie ze Statutem kończą swoją kadencję: przewodniczący PTMTS prof. dr W. WIERZBIKI oraz członkowie Zarządu Głównego PTMTS: prof. dr W. OLSZAK, prof. dr Z. OLESIK, doc. dr A. SAWCZUK; zastępcy członków Zarządu Głównego: dr M. SĄSIADK, doc. dr T. PUCHAŁKA oraz członkowie Głównej Komisji Rewizyjnej: prof. dr Z. WASIUTYŃSKI, prof. dr S. ZIEMBA i dr E. BIELEWICZ.

Komisja Matka zaproponowała wybór na przewodniczącego PTMTS prof. dr W. WIERZBIKIEGO, na członków Zarządu Głównego profesorów: W. OLSZAKA, Z. OLESIKA i doc. W. SZCZEPIŃSKIEGO, na zastępców członków Zarządu Głównego — prof. J. SIELSKIEGO (z Gdańska) i dr J. KORJANA (ze Szczecina) oraz Głównej Komisji Rewizyjnej w dotychczasowym składzie. W wyniku głosowania wszystkie wymienione osoby zostały wybrane do władz Towarzystwa zgodnie z propozycjami Komisji Matki.

Generalne wytyczne działalności na następny okres zreferował prof. dr Z. OLESIK. Proponowane wytyczne nie odbiegają zasadniczo od uchwalonych przez poprzednie Zjazdy Delegatów i zawierają wypracowane formy działalności, które należy kontynuować. Sprowadzają się one do

I. Rozwijania działalności naukowej w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej przez:

- 1) Organizowanie regularnych zebrań naukowych w Oddziałach Towarzystwa.
- 2) Organizowanie sympozjów i konferencji naukowych dotyczących wybranych działów specjalnych, przy czym akcja ta powinna mieć charakter ciągły o równomiernym nasileniu.

Plan sympozjów na najbliższą kadencję przedstawia się następująco:

- a) Sympozjum Dynamiki Maszyn Hutniczych organizowane przez Oddział PTMTS w Krakowie wspólnie z dwiema Katedrami AGH i Stowarzyszeniem Inżynierów i Techników Przemysłu Hutniczego (14 i 15 maja 1964).
- b) Sympozjum Reologii organizowane przez Oddział PTMTS we Wrocławiu w październiku 1964. Referaty będą przedstawione w trzech działach: 1) reologia metali i polimerów, 2) reologia betonu, 3) reologia gruntów.
- c) II Sympozjum elastooptyki organizowane przez Oddział Warszawski PTMTS w pierwszym kwartale 1965. Pierwotnie Sympozjum było zaplanowane na listopad 1964 (komunikat w zeszycie 2/1963 *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*).
- d) Konwersatorium Oddziału Gliwickiego PTMTS, które odbędzie się w lutym lub marcu 1965.

- 3) Organizowanie konkursów naukowych z nagrodami (szczególnie w dziedzinach, których rozwój Towarzystwo chce pobudzić).
- 4) Udział w konferencjach i kongresach naukowych krajowych i zagranicznych.
- 5) Organizowanie wymiany naukowej z zagranicą.

II. Rozpowszechnianie mechaniki teoretycznej i stosowanej przez:

- 1) Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej Towarzystwa, w szczególności przez wydawanie organu PTMTS «Mechanika Teoretyczna i Stosowana» oraz materiałów na sympozja organizowane przez Oddziały.

2) Popularyzację w postaci organizowania kursokonferencji oraz wykładów popularyzujących.

3) Dążenie do zwiększenia liczby członków PTMETS.

4) Szerszy kontakt z przemysłem i jego problematyką.

Po dyskusji, w której zabierali głos doc. W. BOGUSZ, doc. Z. PARSZEWSKI (dwukrotnie), profesorowie R. KAZIMIERCZAK, Z. OLESIAK, O. POPOWICZ zebrani postanowili uchwalić wytyczne zgodnie z propozycją Zarządu Głównego.

W kolejnym punkcie porządku dziennego prof. dr I. KISIEL przedstawił sprawę nowego brzmienia statutu PTMETS. W dyskusji głos zabierali profesorowie I. KISIEL, Z. OLESIAK, M. SĄSIADK (dwukrotnie), Z. PARSZEWSKI, Z. KĄCZKOWSKI i J. MUTERMILCH.

Podjęto uchwałę zatwierdzającą statut z poprawkami przedłożonymi przez Komisję pod kierunkiem prof. I. KISIELA i poprawkami wprowadzonymi przez uczestników Zjazdu Delegatów.

Na zakończenie Zjazdu przewodniczący PTMETS podziękował zebranym za zaufanie i ponowny jego wybór na przewodniczącego Towarzystwa, prof. J. MUTERMILCHOWI za sprawne prowadzenie obrad, kolegom, którzy ustąpili z Zarządu Głównego, za ich pracę nad rozwojem PTMETS oraz paniom H. ROSIŃSKIEJ i H. GOELDNEROWEJ za ich pełną poświęcenia, owocną pracę.

### ZEBRANIE KONSTYTUCYJNE ZARZĄDU GŁÓWNEGO

Dnia 23 maja r.b. odbyło się zebranie konstytucyjne, w wyniku którego w obecnej kadencji Zarząd Główny przedstawia się następująco:

przewodniczący prof. dr W. WIERZBICKI, zast. przewodniczącego prof. dr W. NOWACKI oraz prof. dr Z. BRZOSKA, sekretarz generalny prof. dr Z. OLESIAK, skarbnik doc. dr. W. SZCZEPIŃSKI, zast. sekretarza generalnego i skarbnika dr Z. PEŁKA, członek Zarządu Głównego prof. dr W. OLSZAK, zast. członka Zarządu Głównego: prof. J. SIELSKI i dr J. KORJAN.

### NOWE ZARZĄDY ODDZIAŁÓW PTMETS

W wyniku Walnych Zgromadzeń Oddziałów dokonano wyboru nowych członków Zarządów Oddziałów, które ukonstytuowały się następująco:

#### Gdańsk

Przewodniczący prof. dr R. KAZIMIERCZAK, członkowie: doc. J. Więckowski, dr inż. M. WĘGRZYNA, doc. P. WILDE

#### Gliwice

Przewodniczący prof. dr O. POPOWICZ, zast. przewodniczącego doc. dr W. KRÓL, sekretarz dr inż. J. ŚWIERZAWSKI, skarbnik dr inż. J. MAMES, członkowie: prof. dr J. SZARGUT, dr inż. A. JAKUBOWICZ, zast. członka doc. dr B. SKALMIERSKI.

#### Kraków

Przewodniczący doc. dr W. BOGUSZ, zast. przewodniczącego prof. dr R. CIESIELSKI, sekretarz dr Z. ENGEL, skarbnik doc. dr S. KORMAN, członkowie: prof. dr M. ŻYCKOWSKI, doc. dr K. SZPUNER, doc. dr J. MURZEWSKI.

#### Łódź

Przewodniczący doc. dr Z. PARSZEWSKI, sekretarz dr K. GROSSMAN, skarbnik dr J. GLUZA.

#### Poznań

Przewodniczący prof. dr E. KARAŚKIEWICZ, sekretarz mgr inż. S. JONIAK, skarbnik mgr inż. A. KĘBŁOWSKI, członkowie Zarządu: doc. dr W. KRĘGLEWSKI, dr W. SZYGUŁA, dr W. DĘBSKI.

#### Szczecin

Przewodniczący prof. dr. K. LISOWSKI, zastępca przewodniczącego doc. dr L. MARTINI, sekretarz dr inż. J. KORJAN, skarbnik dr inż. WIESŁAW OLSZAK.

Wrocław

Przewodniczący prof. dr M. SĄSIĄDEK, członkowie Zarządu: dr inż. S. FULIŃSKI, doc. dr A. NEG-RUSZ, dr inż. E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI, dr inż. J. STAŃDA, dr inż. S. DMITRUK.

Warszawa

Przewodniczący prof. dr J. MUTERMILCH, zastępca przewodniczącego prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, sekretarz doc. dr. Z. OSIŃSKI, skarbnik doc. dr J. SKOWROŃSKI, zastępca sekretarza doc. dr W. SZCZEPIŃSKI, zast. skarbnika doc. dr R. SOLECKI.

## KONKURS ZARZĄDU GŁÓWNEGO POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Zarząd Główny PTMETS ogłasza konkurs na prace doświadczalne z dziedziny mechaniki.

Za najlepsze prace spełniające warunki konkursu będą przyznane trzy nagrody pieniężne w wysokości

I nagroda	8000 zł.
II nagroda	4000 zł.
III nagroda	2000 zł.

Prace należy nadsyłać do Sekretariatu PTMETS, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki p. 2305 w nieprzekraczalnym terminie 31 października 1964 r. Praca nie może być przed tą datą opublikowana. Konkurs jest ograniczony, dostępny dla członków PTMETS.

## II SYMPOZJUM TERMODYNAMIKI TECHNICZNEJ

### «ZASTOSOWANIA TECHNICZNE ENTROPII I EGZERGII»

W dniach od 7 do 14 lutego 1963 r. odbyło się w Szczyrku II Sympozjum Termodynamiki pod hasłem «Zastosowania techniczne entropii i egzergii». Sympozjum zostało zorganizowane przez Oddział Gliwicki PTMETS. W skład komitetu organizacyjnego wchodził: prof. dr inż. JAN SZARGUT i dr inż. RYSZARD PETELA. Około 80 uczestników sympozjum reprezentowało Politechnikę w Warszawie, Łodzi, Wrocławiu, Gdańsku, Poznaniu, Krakowie, Gliwicach i Częstochowie, Akademię Górniczo-Hutniczą, Wojskową Akademię Techniczną, Centralny Ośrodek Chłodziactwa, Instytut Metali Nieżelaznych, Hutę Lenina, Biprohut, Energopomiar i inne zakłady i instytuty naukowe. W sympozjum wzięli również udział goście z NRD: Dr Ing. W. FRATZSCHER i Dipl. Ing. G. GRUHN z Politechniki w Dreźnie.

Na sympozjum zgłoszono 19 referatów w tym 7 z Politechniki Śląskiej, 3 z Politechniki Drezdeńskiej, 2 z Akademii Górniczo-Hutniczej, 1 z Instytutu Metali Nieżelaznych w Gliwicach, 1 z Centralnego Ośrodka Chłodziactwa, 1 z Politechniki Warszawskiej, 1 z Politechniki Łódzkiej, 1 z Politechniki Poznańskiej, 1 ze Zjednoczenia Hutnictwa Żelaza i Stali. Wygłoszono i przedyskutowano 18 referatów. Część referatów opublikowano w całości w nr 11 (1962) czasopisma Energetyka Przemysłowa (zeszyt poświęcony egzergii). Streszczenia wszystkich referatów są zawarte w specjalnym zeszycie wydanym przez Oddział Gliwicki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Referaty podzielono na dwie grupy. Grupa pierwsza obejmowała 5 referatów omawiających zagadnienia entropii. Referaty grupy drugiej w liczbie 14 dotyczyły zagadnień egzergii.

Pierwszą grupę referatów zapoczątkował B. STANISZEWSKI (Warszawa), który mówił na temat «Entropia a teoria informacji». W referacie tym autor przedstawił powiązanie teorii informacji z termodynamiką, występujące na gruncie stosowania metod statystyki. Dużo uwagi poświęcił autor zastosowaniu formalistyki Jaynesa w termodynamice podkreślając, że w niektórych uczelniach technicznych metoda ta jest już stosowana w normalnych wykładach dla studentów.

J. SIKORA (Gliwice) omówił różne sposoby ujęcia entropii w termodynamice. Referat T. ŚWIERZAWSKIEGO (Gliwice) był poświęcony zagadnieniom przyrostu entropii podczas moderacji neutronów w reaktorze jądrowym. H. HELLER i Z. KOLENDĄ (Kraków) omówili zasadę wzrostu entropii w pod-

stawowych modelach kosmologicznych. W szczególności zajęli się oni teorią stałego wszechświata, podług której obraz świata jest nie tylko niezależny od pozycji obserwatora w przestrzeni, lecz również od jego umiejscowienia w czasie. Teoria ta prowadzi do hipotezy nieustannego powstawania materii. Zgodnie z tą teorią zasada zachowania energii jest słuszna tylko w granicach błędu doświadczalnego, zasada zaś wzrostu entropii jest całkowicie słuszna.

W ostatnim referacie grupy pierwszej Z. KOLENDĄ (Kraków) omówił statystyczne ujęcie relacji Onsagera.

W referacie wprowadzającym grupy drugiej J. SZARGUT (Gliwice) omówił definicję i znaczenie pojęcia egzergii, naświetlił różnice pomiędzy egzergią a energią i wyjaśnił możliwości stosowania egzergii. Oprócz zastosowań klasycznych polegających na badaniu stopnia doskonałości procesów cieplnych i ustalaniu przyczyn obniżenia tej doskonałości łącznie z ilościową ich oceną, autor wskazał na nową dziedzinę zastosowań egzergii, mianowicie na zastosowania ekonomiczne.

W następnym referacie W. FRATZSCHER (Drezno) omówił różnice pomiędzy egzergetyczną i termiczną analizą obiegów prawobieżnych.

Przedmiotem rozważań autora był obieg uogólniony wymieniający ciepło z dowolnymi źródłami ciepła. W klasycznych obiegach silników cieplnych ciepło oddane przez czynnik obiegowy odpływa do otoczenia. Obiegi rozpatrywane przez FRATZSCHERA nie spełniają tego warunku. Można więc uważać, że rozumowanie Fratzschera dotyczy cząstkowej sprawności egzergetycznej obiegów występujących w procesach skojarzonych, służących do równoczesnej produkcji ciepła i pracy. Zagadnieniom analizy egzergetycznej procesów skojarzonych był poświęcony w całości referat G. GRUHNA (Drezno), który wprowadził pojęcia sprawności cząstkowych oddzielnie dla produkcji ciepła i oddzielnie dla wykonywania pracy w procesie skojarzonym. Wskaźniki charakteryzujące procesy skojarzone zostały ujęte za pomocą bezwymiarowych charakterystyk. Oba referaty zapoczątkowały ożywioną dyskusję, w której J. SZARGUT wyraził pogląd, że obliczanie cząstkowych sprawności egzergetycznych w procesach złożonych nie jest celowe. W procesach takich powinno się analizować tylko sprawność egzergetyczną całego zespołu oraz straty egzergii występujące w poszczególnych ogniwach.

Pracę R. NITSCHA (Drezno) w związku z nieobecnością autora referował W. FRATZSCHER. Omówiono w niej zagadnienie analizy egzergetycznej procesów siłowni jądrowej. Rozważania swoje oparł autor na założeniu, że spadek egzergii paliwa jądrowego w procesie rozszczepienia jest równy ilości wyzwolonej energii.

J. PIENKA (Poznań) omówił zagadnienia analizy egzergetycznej siłowni parowej. Analizując poszczególne straty egzergii naświetlił autor czynniki, od których straty te są zależne. Na podstawie wyników analizy egzergetycznej 12 nowoczesnych siłowni parowych autor omówił wpływ parametrów pary i przegrzania międzystopniowego na główne straty w siłowni.

J. SZARGUT i R. PETELA (Gliwice) wskazali możliwość zastosowania egzergii do obliczania strat ekonomicznych występujących przy dławieniu czynnika płynącego rurociągami. Rozważania autorów dotyczyły procesów, w których dławienie i sprężanie kompensujące przebiegają w temperaturze wyższej od temperatury otoczenia. W dyskusji W. FRATZSCHER zgłosił postulat rozszerzenia rozważań autorów na dowolne temperatury.

T. BES (Gliwice) mówił o analizie egzergetycznej procesów, w których występuje powietrze wilgotne. Autor sformułował definicję sprawności egzergetycznej procesu klimatyzacji oraz zdefiniował wskaźnik jednostkowego zużycia egzergii w procesie suszenia. Obliczanie egzergii powietrza wilgotnego jest bardzo żmudne, w związku z czym autor opracował pożyteczny i dobrze ujęty nomogram do wyznaczania tej funkcji.

E. KOSTOWSKI (Gliwice) naświetlił problemy analizy egzergetycznej procesów ziębienia. K. MACZEK (Kraków) omówił bilans egzergetyczny ziębiarki absorpcyjnej. Wielkości występujące w tym bilansie wyznaczał autor metodą wykresną za pomocą wykresu entalpia—udział gramowy, entropia—udział gramowy.

A. GUZIK (Gliwice) opracował wykresy do uproszczonego wyznaczania egzergii gazów technicznych otrzymywanych z powietrza. Na wykresach tych uzależniono egzergię od stopnia czystości gazów technicznych.



T. STYRYLSKA (Kraków) omówiła zagadnienie egzergii paliw stałych i ciekłych. Rozważania autorki były poświęcone głównie krytyce definicji egzergii spotykanych w literaturze. Definicje te prowadzą niejednokrotnie do niezgodności stanów odniesienia przy obliczaniu egzergii substratów i produktów spalania, niektóre zaś metody uzgadniania stanów odniesienia prowadzą do wielkości nie posiadających sensu technicznego egzergii. Autorka poddała również krytyce znane dotąd metody obliczania egzergii paliw.

P. WEISS (Gliwice) wyjaśnił wpływ podgrzania powietrza na straty egzergii przy spalaniu. Skuteczność tej metody zilustrował autor za pomocą wyprowadzonego przez J. SZARGUTA mnożnika zmniejszenia strat egzergii. Autor sporządził wykresy tego mnożnika dla spalania kilku typowych składników paliw. W ostatnim referacie B. KACZAN (Łódź) omówił wykresy opracowane w Politechnice Łódzkiej do wyznaczania entalpii, entropii i egzergii powietrza oraz spalin.

*Jan Szargut (Gliwice)*

## DRUGI WSZECHZWIĄZKOWY ZJAZD MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W MOSKWIE. 29.I.-5.II. 1964

Wszechzwiązkowe zjazdy mechaniki, organizowane przez Instytut Mechaniki Akademii Nauk ZSRR (tym razem wspólnie z Uniwersytetem im. Łomonosowa), należą do największych zjazdów z zakresu mechaniki w skali światowej. Są one organizowane co 4 lata podobnie jak zjazdy Międzynarodowej Unii Mechaniki IUTAM, lecz liczbą referatów i uczestników nawet przewyższają te ostatnie. W drugim zjeździe mechaniki, który odbył się w Moskwie w dniach 29.I.-5.II.1964 r., brało udział ponad 1500 uczestników nie tylko ze Związku Radzieckiego, lecz również z zagranicy.

Najliczniejszą delegacją zagraniczną była delegacja polska. Obejmowała ona 14 osób, w tym 9 delegowanych przez Polską Akademię Nauk lub w ramach wymiany między akademiami (S. KALISKI, P. KUCHARCZYK, M. ŁUNC, W. NOWACKI, W. K. NOWACKI, W. OLSZAK, A. SZANIAWSKI, S. ZIEMBA, H. ZORSKI), 4 osoby delegowane przez Ministerstwo Szkolnictwa Wyższego lub prywatnie za zgodą MSzW (J. BONDER, Z. BRZOSKA, J. BUKOWSKI, M. ŻYCZKOWSKI) oraz 1 przebywająca na długoterminowym wyjeździe szkoleniowym w ZSRR (J. ORKISZ). Delegacja Stanów Zjednoczonych obejmowała 13 osób, z których wymienimy W. PRAGERA, D. C. DRUCKERA, W. NASHA i R. M. ROSENBERGA; delegacja NRD — 8 osób (należy podkreślić wyjątkowo niską średnią wieku uczestników tej delegacji); w 5-osobowej delegacji Francji wziął udział I. KRAVTCHEKOW, 5-osobowe delegacje reprezentowały również Rumunię (głównie w zakresie mechaniki płynów) i Czechosłowację. Pozostali uczestnicy zagraniczni reprezentowali Wielką Brytanię (2 osoby — M. J. LIGHTHILL i G. K. BATCHELOR), Holandię (2), Bułgarię (2), NRF (1) i Izrael (1). Tak więc ogólna liczba gości zagranicznych wynosiła 58.

Na zjazd zgłoszono 529 referatów, z których wygłoszono 415 w charakterze oddzielnych referatów (20-40 minut, wygłaszane przez autorów), a pozostałe 114 ujęto jako krótkie komunikaty (2-5 minut, podawane przez przewodniczącego podsekcji). Oczywiście, przy tej ogromnej liczbie prac niezbędny był podział na sekcje, przy czym podział ten szedł wyjątkowo daleko. Wyodrębniono mianowicie trzy zasadnicze sekcje (mechaniki ogólnej i stosowanej; mechaniki cieczy i gazów; mechaniki ciał stałych), każda z sekcji dzieliła się na 6 podsekcji, tak że było ich w sumie 18, a ponadto jeszcze niektóre podsekcje, o bogatej tematyce, odbywały obrady w pod-podsekcjach. Dla ułatwienia orientacji uczestników wydano specjalny harmonogram prac poszczególnych podsekcji

Omówimy obecnie krótko poszczególne podsekcje, podając nazwiska przewodniczących i liczbę wygłoszonych referatów.

W skład sekcji mechaniki ogólnej i stosowanej wchodziły podsekcje:

1. Mechaniki analitycznej i teorii stateczności ruchu (przewodniczący A. I. ŁURIE, 23 referaty).
2. Balistyki (przewodniczący D. E. OCHOCIMSKI, 24 ref.).
3. Drgań i regulacji automatycznej (przewodniczący Ju. A. MITROPOLSKI, 38 ref., dwie podsekcje),
4. Żyroskopii (przewodniczący A. Ju. ISZLINSKI, 21 ref.),
5. Teorii mechanizmów i maszyn (przewodniczący I. I. ARTOBOLEWSKI, 13 ref.),

6. Problemów dydaktyki mechaniki (na przewodniczącego przewidywano G. JU. DZANIELIDZE; wobec jego zgonu tuż przed rozpoczęciem kongresu zastąpił go W. N. SZCZELKACZEW; 3 ref.).

Oprócz wymienionych referatów, w zasadzie 20-minutowych, na wspólnych posiedzeniach całej sekcji wygłoszono 12 referatów 40-minutowych.

W skład sekcji mechaniki cieczy i gazów wchodziły podsekcje:

1. Hydromechaniki ogólnej (przewodniczący P. JA. KOCZINA, 30 ref., 9 komun),
2. Aerodynamiki i dynamiki gazów (przewodniczący A. A. NIKOLSKI, 26 ref., 7 komun.),
3. Teorii plazmy i gazów rozrzedzonych (przewodniczący G. G. CZERNYJ, 24 ref., 16 komun.)
4. Ruchu cieczy lepkiej, warstwy przyściennej, ruchu burzliwego i przewodnictwa ciepłego, (przewodniczący L. G. ŁOJCJANSKI, 28 ref., 19 komun., 2 pod-podsekcje),
5. Hydrodynamiki układów wieloskładnikowych (przewodniczący L. A. GALIN, 26 ref.),
6. Hydroaerodynamiki stosowanej (przewodniczący G. N. ABRAMOWICZ, 22 ref., 8 komun.).

Ponadto na wspólnych posiedzeniach sekcji wygłoszono 12 referatów 40-minutowych, w tym dwa zagraniczne (M. J. LIGHTRILL i G. W. LIPPMANN).

W skład sekcji mechaniki ciał stałych wchodziły podsekcje:

1. Teorii sprężystości (przewodniczący D. I. SZERMAN, 28 ref., 18 komun., 2 pod-podsekcje),
2. Teorii plastyczności (przewodniczący Ł. M. KACZANOW, 21 ref., 4 komun.),
3. Teorii płyt i powłok (przewodniczący A. L. GOLDENWEJZER, 16 ref., 20 komun, 2 pod-podsekcje),
4. Reologii i teorii pełzania (przewodniczący JU. N. RABOTNOW, 24 ref.),
5. Mechaniki budowy (przewodniczący I. M. RABINOWICZ, 21 ref., 13 komun., 2 pod-podsekcje),
6. Mechaniki gruntów (przewodniczący W. W. SOKOŁOWSKI, 31 ref., 2 pod-podsekcje).

Ponadto na wspólnych posiedzeniach sekcji wygłoszono 12 referatów 40-minutowych, w tym 4 zagraniczne (W. PRAGER, D. C. DRUCKER, W. NOWACKI i W. OLSZAK).

Przewodniczącymi sekcji byli: mechaniki ogólnej i stosowanej — A. JU. ISZLANSKI, mechaniki cieczy i gazów — L. I. SIEDOW, mechaniki ciał stałych — N. I. MUSCHIELISZWILI.

Obrady były prowadzone w salach Uniwersytetu im. Łomonosowa. Niestety, największa z sal tego uniwersytetu nie mogła pomieścić wszystkich uczestników; na uroczystość otwarcia wydano 1500 zaproszeń (nie wszyscy chętni mogli je otrzymać), chociaż aula uniwersytetu posiada tylko 1200 miejsc, tak że spora część uczestników brała udział w tej uroczystości na stojąco. Także sale, przewidziane na obrady sekcyjne, a mieszczące po 500 osób, były zbyt małe: już na 10 minut przed rozpoczęciem obrad wszystkie miejsca siedzące były zajęte. Sale, przewidziane na obrady podsekcji, miały po około 100 miejsc — podczas niektórych referatów można tu było znaleźć miejsce bez trudu, ale podczas innych zajęte były nawet wszystkie miejsca stojące.

Kongres rozpoczął swe obrady w środę 29 stycznia o godz. 11.30 w auli uniw. Łomonosowa. Słowo wstępne wygłosił przewodniczący komitetu organizacyjnego zjazdu N. I. MUSCHIELISZWILI. Naszkicował on ważniejsze aktualne problemy w zakresie różnych gałęzi mechaniki. Następnie, po krótkim powitaniu uczestników przez rektora uniwersytetu Łomonosowa, L. I. SIEDOW zainaugurował obrady zjazdu referatem «Galileusz a podstawy mechaniki» (w związku z 400-leciem urodzin Galileusza). Bardzo obszerny referat, trwający ponad godzinę, nawiązywał często do współczesności, zawierał pewne akcenty polityczne i mógł stanowić symbol międzynarodowej współpracy w dziedzinie mechaniki.

Od godz. 16 dnia 29 stycznia do godz. 14 dnia 5 lutego trwały obrady w sekcjach i podsekcjach (w zasadzie po 8 godzin dziennie, 10-14 i 16-20). Oprócz referatów wprowadzono również pewną specjalną formę dyskusji, tzw. dyskusje okrągłego stołu. Dyskusje te na najbardziej aktualne kontrowersyjne tematy poprzedzone były tylko krótkim wprowadzeniem; podczas dyskusji można było zabierać głos nie dłuższej niż 10 minut. Ogółem odbyły się cztery dyskusje okrągłego stołu: na sekcji mechaniki cieczy i gazów jedna, mianowicie «Interesujące zagadnienia i metody teoretycznej hydroaerodynamiki» (przewodniczący L. I. SIEDOW), oraz na sekcji mechaniki ciał stałych trzy, mianowicie «Stateczność płyt i powłok» (przewodniczący W. I. FIEDOSJEW), «Stateczność w warunkach pełzania» (przewodniczący JU. N. RABOTNOW) oraz «Modele fizyczne i równania stanu gruntów» (przewodniczący N. A. CYROWICZ). Oczywiście, nazwa «dyskusja okrągłego stołu» była czysto formalna, gdyż trudno byłoby znaleźć stół na kilkaset osób, toteż dyskusje odby-

wały się z reguły w 500-osobowych audytoriach, a ciesząca się niesłychanym zainteresowaniem dyskusja «Stateczność płyt i powłok», podczas której miało dojść do zasadniczej wymiany poglądów pomiędzy W. I. FIEODOSJEWEM i W. W. BOŁOTINEM — nawet w auli. Jakkolwiek do spodziewanej wymiany poglądów nie doszło, gdyż W. W. BOŁOTIN ostatecznie nie zabrał głosu, to jednak dyskusja, trwająca blisko trzy godziny, może być oceniona jako bardzo wartościowa. W ogóle problemy stateczności konstrukcji były podczas zjazdu poruszane bardzo często, co dowodzi stale rosnącej ich aktualności.

Niestety, wobec dużej liczby podsekcji i referowanych prac zarówno podsumowanie całości obrad, jak i omówienie choćby tylko ważniejszych referatów jest niemal niemożliwe. Trudno byłoby nawet omówić szczegółowo obrady jednej podsekcji, ponieważ interesujące referaty były z reguły umieszczone w różnych podsekcjach, a czasem śledzenie obrad było utrudnione przez podział na pod-podsekcje. Pewną orientację o tematyce obrad może dać wydany przez Komitet Organizacyjny Zjazdu komplet krótkich streszczeń referatów (w języku rosyjskim, tytuły również w języku angielskim) — obejmuje on 250 stron druku, przy czym streszczenia ułożone są alfabetycznie według nazwisk autorów. Osobno wydano wykaz tytułów referatów z podziałem na podsekcje (szczegółowy program kongresu).

Obrady Zjazdu zakończono uroczystym posiedzeniem w auli w środę 5 lutego o godz. 17. Po krótkiej informacji o pracach poszczególnych podsekcji uczestnicy przyjęli rezolucję dotyczącą zwołania III Wszzechzwiązkowego Zjazdu Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Przyjęcie gości zagranicznych przez organizatorów kongresu było niezmiernie serdeczne. Wszyscy goście zagraniczni otrzymali pokoje w hotelu «Ukraina», skąd codziennie odchodził autobus do gmachu uniwersytetu. W dniu otwarcia obrad prezydium Akademii Nauk ZSRR wydało bankiet na cześć gości. Należy jednak podkreślić, że delegacja polska była szczególnie serdecznie przyjmowana dzięki może najsilniejszym kontaktom osobistym, łączącym poszczególnych jej uczestników z organizatorami Zjazdu. Mamy nadzieję, że będziemy się mogli zrewanżować podczas najbliższych konferencji międzynarodowych, organizowanych z zakresu mechaniki teoretycznej i stosowanej w Polsce.

*Michał Życzkowski (Kraków)*

**Następny zeszyt Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zawiera prace:**

- A. CZUBAK, Dobór parametrów ruchu przenośników wibracyjnych  
Подбор параметров вибрационных конвейров  
Selection of the motion parameters for vibratory conveyors
- W. PIĘCНОSKI, Analiza skończonych ugięć słabo wypukłej membrany kulistej obciążonej lokalnie  
Анализ конечных прогибов пологой локально загруженной сферической мембраны  
Finite deflections of shallow spherical membrane locally loaded
- Z. THRUN, Metoda przybliżonego obliczania problemów początkowo brzegowych w zastosowaniu do niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa ciepłego  
Метод приближенного решения начально-краевых задач в применении к нестационарно-краевым задачам теплопроводности  
Method of approximate solution of initial and boundary problems of non-stationary heat conduction  
Method of approximate solution of initial and boundary problems of non-stationary heat conduction
- K. WILMAŃSKI, Obciążenia dynamiczne belek — belka Timoshenki  
Динамическая нагрузка балок. Балка Тимошенко  
Dynamical loadings of beams — Timoshenko beam
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Z badań elasto optycznych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym, z uwzględnieniem wpływu podłoża  
Photo-elastic investigation of the state of stress produces by own weight in a triangle resting on elastic foundation
- R. S. DOROSZKIEWICZ, Elastooptyczne badania przekroju poprzecznego zapory filarowej  
Исследования в поляризованном свете поперечного сечения контрфорсной плотины  
Photoelastic investigation of the cross-section of buttress dam
- R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, Z badań elasto optycznych wirnika generatora dużej mocy  
Исследование методом фотоупругости ротора генератора большой мощности  
On the photoelastic investigation of a generator motor

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągle mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa*

*MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (PKiN)*

---