

7 II 720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

TOM 1 • ZESZYT 2



Pw<sup>a</sup>

WARSZAWA 1963  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## SPIS TREŚCI

P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności Основные вопросы вязко-пластичности Fundamental problems in visco-plasticity	3
Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych Обзор новейших работ по устойчивости тонкостенных оболочек Recent achievements in the field of stability of thin-walled shells	31
E. STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych Термические напряжения в вязко-упругих телах On the analysis of thermal stresses in visco-elastic solids	67
A. WILCZYŃSKI, Zależność «naprężenie-odkształcenie» w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek Зависимость «напряжение-деформация» в случае осевого растяжения материала цепного молекулярного строения Stress-strain relation for chain structure molecule materials in case of simple tension	105
H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń Электрическая модель тензора напряжений Electrical model of the stress tensor	115
Biuletyn Informacyjny Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej	137

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 6 3

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A  
WITOLD WIERZBICKI—PRZEWODNICZACY  
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ). JERZY LIT-  
WINISZYN (KRAKÓW). ADAM MITZEL (WROCŁAW).  
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA). STANISŁAW  
OCHEŁDUSZKO (GLIWICE). WACŁAW OLSZAK  
(WARSZAWA). MARIAN PIĄTEK (GDAŃSK)  
JAN SZMELTER (ŁÓDŹ).

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y  
A R T U R K A C N E R — R E D A K T O R  
J Ó Z E F J A N I C Z E K · Z B I G N I E W O L E S I A K  
M A R E K S O K O Ł O W S K I

## REDAKCJA

W a r s z a w a, Świętokrzyska 21, tel. 612-81, wewn. 213.

---

Nakład 1000(900+100) Arkuszy wydawn. 11,75. Arkuszy drukarskich 9+2 kol. Papier druk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 10.VIII.1963 r., druk ukończono w marcu 1964 r. Cena zł 36.

---

Zam. 1104/63 Z-85 Druk. im. Rewolucji Październikowej

## PODSTAWOWE ZAGADNIENIA LEPKOPLASTYCZNOŚCI

P. PERZYNA (WARSZAWA)

### Wstęp

W wielu istniejących teoriach plastyczności zakłada się, że związki fizyczne między tensorem naprężenia a tensorem odkształcenia są niezależne od czasu. Założenie to jest celowo przyjętym ograniczeniem. Jest ono główną przyczyną trudności, jakie się wyłoniły przy opisywaniu własności materiałów rzeczywistych.

Trudności te wystąpiły zwłaszcza w ostatnich latach, które przyniosły duży rozwój dynamicznych zagadnień teorii plastyczności. Podstawowe założenie wszystkich teorii plastyczności o niezależności równań stanu od czasu uniemożliwia jednoczesny opis własności plastycznych materiału i jego własności reologicznych.

Nie trzeba chyba popierać przykładami twierdzenia, że w wielu zagadnieniach praktycznych o rzeczywistym zachowaniu się materiału mogą decydować w równym stopniu efekty plastyczne jak i efekty reologiczne. Można nawet pójść dalej i powiedzieć, że dla wielu konstrukcyjnie ważnych materiałów efekty reologiczne występują znacznie wyraźniej po osiągnięciu przez materiał stanu plastycznego.

Truizmem stało się twierdzenie, że każdy materiał wykazuje w mniejszym lub większym stopniu własności lepkie. Wpływ własności lepkich materiału w pewnych zagadnieniach może być całkowicie nieistotny, natomiast wpływ ten dla tego samego materiału ale dla innego zagadnienia może okazać się decydujący.

Obydwie dyscypliny — reologia i teoria plastyczności — zajmują się opisem bardzo ważnych własności mechanicznych materiałów konstrukcyjnych. Każda z nich stworzyła właściwe dla swych celów sposoby badań i rozwinęła się w ramach pewnych założeń, które niestety nie zawsze w praktyce mogą być spełnione. Wyniki badań reologii są ograniczone tylko do takich przypadków, w których odkształcenia plastyczne nie mają decydującego znaczenia. Natomiast wyniki badań teorii plastyczności pozwalają na właściwy opis tylko takich zagadnień, w których wpływ efektów reologicznych można uważać za nieistotny. Mówiąc inaczej, przy stosowaniu metod reologii należy ograniczyć się tylko do badania stanów naprężenia, które nie wywołują plastycznego płynięcia materiału, sto-

sując zaś metody teorii plastyczności trzeba się ograniczyć do zagadnień quasi-statycznych, których przebieg w czasie jest jednak na tyle krótki, aby nie wystąpiły wyraźnie efekty pełzania czy relaksacji.

Ostatnie badania w zakresie opisu dynamicznych własności materiałów wykazały, że stosowanie metod teorii plastyczności nie uwzględniających efektów reologicznych prowadzi do zbyt dużych rozbieżności między wynikami teoretycznymi a rezultatami doświadczalnymi<sup>1</sup>.

Po tym krótkim wstępie nie trzeba będzie chyba wskazywać na korzyści, jakie uzyskamy opisując jednocześnie efekty reologiczne i plastyczne. Właśnie lepkoplastyczność postawiła sobie takie szerokie zadanie. Zanim przejdziemy do bliższego przedstawienia metod badań lepkoplastyczności, chcemy podkreślić, że nie będą to metody ani reologii, ani teorii plastyczności. Przekonamy się, że specyfika zagadnienia i skomplikowany charakter sprzężenia efektów reologicznych i plastycznych wymagają specjalnych metod opartych na wnikliwej analizie fizyki materiałów oraz własnych oryginalnych opisów matematycznych.

Łączne traktowanie zjawisk reologicznych i zjawisk plastycznych stwarza jednak ogromne trudności. Uwzględnienie lepkości materiału wprowadza zależność stanów naprężenia i odkształcenia od czasu, natomiast własności plastyczne materiału uzależniają te stany od drogi obciążenia. Uwzględniając jednocześnie własności lepkie i plastyczne otrzymujemy więc zależność od drogi i czasu. Wszystkie procesy odkształcania w lepkoplastyczności będą zależne od historii, która jest zdeterminowana drogą obciążenia i czasem. Na różnych drogach i dla różnych czasów przebiegu danego procesu otrzymywać będziemy w lepkoplastyczności różne rezultaty.

Celem tego przeglądu jest wskazanie nowych zagadnień, które charakteryzują się sprzężonym traktowaniem zjawisk reologicznych i plastycznych oraz przedstawienie głównych kierunków, w jakich rozwijają się metody badań lepkoplastyczności.

Nie można jeszcze w tej chwili mówić o teorii lepkoplastyczności jako o ukształtowanej i rozwiniętej dyscyplinie naukowej. Można już jednak wyodrębnić w niej pewne kierunki badań, które różnią się ogólnością podejścia do zagadnienia i stawiają sobie odmienne zadania.

Podstawowym problemem lepkoplastyczności jest określenie odpowiedniego kryterium uplastycznienia dla materiału sprężystolepkiego. Zagadnienie następne to sformułowanie równań konstytutywnych czyli związków fizykalnych między tensorem naprężenia a tensorem odkształcenia.

Aby przedstawić bliżej powyższe zagadnienia, wprowadzimy wyraźne rozróżnienie między materiałem sprężysto-lepkoplastycznym a sprężysto/lepko-

---

<sup>1</sup> Stwierdzenie to odnosi się zarówno do różnego rodzaju teorii płynięcia, jak i teorii odkształceniowych. Trzeba zaznaczyć, że nie brak prac, które starają się opisywać zagadnienia dynamiczne posługując się związkami fizykalnymi teorii odkształceniowej, słusznej tylko w przypadku obciążenia proporcjonalnego. W żadnym zagadnieniu dynamicznym, w którym występuje rozprzestrzenianie się fal naprężenia, założenie o proporcjonalnym obciążeniu nie może być spełnione.

plastycznym. *Sprężysto-lepkoplastycznym* będziemy nazywać taki materiał, który wykazuje wyraźne własności lepkie zarówno w obszarach sprężystych, jak również w obszarach uplastycznionych. Natomiast *sprężysto/lepkoplastycznym* będziemy nazywać taki materiał, który posiada własności lepkie tylko w obszarach plastycznych.

Rozróżnienie to wprowadzili P. M. NAGHDI i S. A. MURCH w pracy [18].

Jest oczywiste, że pojęcie materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest celową idealizacją, która pozwala na daleko idące uproszczenie rozważań. Wystarczy tu zwrócić uwagę na zagadnienie doboru odpowiedniego kryterium uplastycznienia.

Określenie warunku plastyczności dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego będzie niezmiernie trudne i do chwili obecnej problem ten nie został całkowicie rozwiązany. Przyjęcie materiału sprężysto/lepkoplastycznego rozwiązuje natychmiast to zagadnienie, bo początkowy warunek plastyczności można przyjąć taki sam jak w teorii płynięcia. Trudności powstają dopiero przy rozważaniu zmiany powierzchni płynięcia w czasie procesu odkształcenia ciała sprężysto/lepkoplastycznego.

Wprowadzone rozróżnienie sugeruje podział naszych rozważań na dwie części. W części pierwszej przedyskutujemy metody opisu zachowania się materiałów sprężysto-lepkoplastycznych. Część druga będzie dotyczyła materiałów sprężysto/lepkoplastycznych i pokaże wykorzystanie tego modelu do opisu dynamicznych własności materiałów plastycznych.

W obydwu częściach rozważania będą prowadzone przy założeniu, że gradienty przemieszczenia rozpatrywanych procesów odkształcenia są nieskończenie małe (por. definicja w monografii C. TRUESDELLA i R. TOUPINA [39]). Ograniczymy się ponadto do studiowania tylko izotermicznych procesów odkształcenia i będziemy zakładać, że materiał jest izotropowy i jednorodny.

## I. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO-LEPKOPLASTYCZNY

### 1. Zachowanie się materiału w obszarach sprężysto-lepkich

W układzie ortogonalnych współrzędnych kartezjańskich oznaczymy tensor odkształcenia przez  $\varepsilon_{ij}$ , a tensor naprężenia przez  $\sigma_{ij}$ . Będziemy zakładać, że tensor odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  dla ciała sprężysto-lepkoplastycznego można przedstawić w postaci sumy

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^p,$$

gdzie  $\varepsilon_{ij}^e$  oznaczają składowe odkształcenia sprężystego,  $\varepsilon_{ij}^v$  składowe lepkie i  $\varepsilon_{ij}^p$  składowe plastyczne.

Trzeba wyraźnie podkreślić, że równanie (1.1) nie jest w ogólności spełnione. Będziemy je traktowali jako podstawowe założenie upraszczające.

W dalszym ciągu będziemy posługiwać się zdefiniowanymi następująco dewiatorami odkształcenia i naprężenia

$$(1.2) \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}, \quad e = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii},$$

$$(1.3) \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - s\delta_{ij}, \quad s = \frac{1}{3}\sigma_{ii},$$

gdzie  $\delta_{ij}$  oznacza symbol Kroneckera.

Składowe tensora prędkości zmiany odkształcenia i naprężenia oznaczymy odpowiednio przez  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  i  $\dot{\sigma}_{ij}$  (kropka oznacza tu różniczkowanie względem czasu).

Zagadnienia liniowej teorii lepkosprężystości są szeroko opracowane w wielu monografiach i artykułach przeglądowych. Wymienimy tu tylko kilka ostatnich prac podstawowych, które przynoszą systematyczną analizę związków fizykalnych między tensorem naprężenia i tensorem odkształcenia dla ciał sprężystolepkich w ramach założeń teorii liniowej. Są to prace D. R. BLANDA [3], B. D. COLEMANA i W. NOLLA [6] oraz M. E. GURTINA i E. STERNBERGA [9]. Tam też można znaleźć obszerną literaturę dotyczącą tych zagadnień.

Przyjmując oznaczenia z pracy [9] związki fizykalne między tensorem odkształcenia i tensorem naprężenia w obszarach sprężystolepkich można zapisać w postaci

$$(1.4) \quad e_{ij}^{(e+v)} = \dot{s}_{ij}(x)\mathcal{F}_1(t) + \int_0^t \mathcal{F}_1(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$(1.5) \quad e^{(e+v)} = \dot{s}(x)\mathcal{F}_2(t) + \int_0^t \mathcal{F}_2(t-\tau) \frac{\partial s(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

gdzie  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$  oznaczają odpowiednio postaciową i dylatacyjną funkcję pełzania. Wprowadzono tu ponadto oznaczenie  $s_{ij}(x, t)$  zamiast  $s_{ij}(x_k, t)$  oraz  $\dot{s}_{ij}(x)$  zamiast  $\dot{s}_{ij}(x_k, 0+)$ .

Równania fizykalne (1.4)-(1.5), uzależniają aktualny stan odkształcenia w chwili  $t$  od historii zmiany stanu naprężenia w całym okresie przebiegu danego zjawiska, od 0 do  $t$ .

Autorzy pracy [9] wykazali, że początkowym stanem ciała sprężystolepkiego, określonego związkami fizykalnymi (1.4)-(1.5) jest stan sprężysty odpowiadający uogólnionemu prawu Hooke'a:

$$(1.6) \quad e_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} s_{ij}, \quad e^e = \frac{1}{3K} s,$$

gdzie  $\mu$  i  $K$  oznaczają odpowiednie stałe sprężyste materiału, tj. moduł odkształcenia postaciowego i objętościowy.

Wykorzystując to spostrzeżenie możemy w prosty sposób wydzielić lepkie składowe odkształcenia. Na podstawie związków (1.4)-(1.5) otrzymamy (por. P. M. NAGHDI i S. A. MURCH, [18]),



$$(1.7) \quad e_{ij}^v = \left\{ \dot{s}_{ij}(x) \mathcal{F}_1(t) + \int_0^t \mathcal{F}_1(t-\tau) \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} -$$

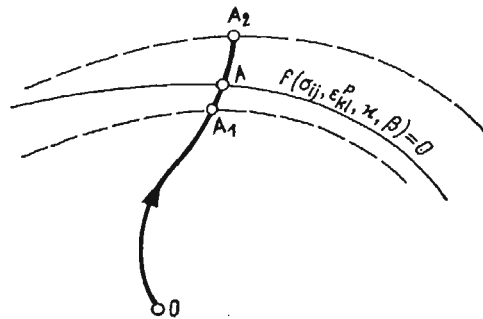
$$- \left\{ \dot{\mathcal{F}}_1 \left[ \dot{s}_{ij}(x) + \int_0^t \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \right\} = \dot{s}_{ij}(x) [\mathcal{F}_1(t) - \dot{\mathcal{F}}_1] + \int_0^t [\mathcal{F}_1(t-\tau) - \dot{\mathcal{F}}_1] \frac{\partial s_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$(1.8) \quad e^v = \dot{s}(x) [\mathcal{F}_2(t) - \dot{\mathcal{F}}_2] + \int_0^t \mathcal{F}_2(t-\tau) - \dot{\mathcal{F}}_2 \frac{\partial s(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

**2. Kryterium uplastycznienia dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego**

W celu wyjaśnienia różnic między zagadnieniem uplastycznienia materiału sprężystego i sprężystolepkiego rozważmy drogę obciążenia w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń (rys. 1).

Jeżeli rozważamy materiał sprężysty, to niezależnie od czasu, w jakim osiągamy stan reprezentowany punktem A, przy tej samej drodze zawsze otrzymamy stan uplastycznienia w tym samym punkcie. Natomiast gdy rozważamy materiał sprężystolepki, to idąc po tej samej drodze obciążenia możemy uzyskać uplastycznienie w innym punkcie np.  $A_1$  lub  $A_2$  na rys. 1 w zależności od czasu, w jakim realizowała się droga obciążenia OA. Zmiana ta wywołana jest lepkością materiału, zależnością historii obciążenia od czasu. Jest oczywiste, że przebiegając drogę OA w tym samym czasie sumarycznym, ale z różnymi prędkościami odkształcenia w odpowiednich punktach drogi uzyskamy również inne granice plastyczności.



Rys. 1

P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [18] w celu opisanego skomplikowanego zagadnienia uplastycznienia materiału sprężystolepkiego wprowadzili pojęcie powierzchni płynięcia:

$$(2.1) \quad f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa, \beta),$$

takie, że stan sprężysto-lepkoplastyczny określony jest warunkiem  $f = 0$ , a stan sprężystolepkim odpowiada warunek  $f < 0$ . Funkcja  $f$  zależy od stanu naprężenia  $\sigma_{ij}$ , od stanu odkształcenia plastycznego  $\epsilon_{ij}^p$ , od parametru  $\beta = \beta(\epsilon_{kl}^v)$  reprezentującego efekty lepkie i od parametru wzmocnienia  $\kappa$ , który zależy z kolei od odkształceń plastycznych i jest zdefiniowany podobnie jak w teorii plastycznego płynięcia, opisującej izotropowe wzmocnienie materiału (por. P. M. NAGHDI [17]).

Rozważmy zmianę powierzchni płynięcia w czasie. Obliczając pochodną względem czasu funkcji  $f$  otrzymamy

$$(2.2) \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}.$$

Jeżeli rozpatrywany stan jest stanem sprężysto-lepkoplastycznym i ulega zmianie takiej, że  $\dot{f} < 0$ , to zmiana taka prowadzi do stanu sprężystolepkiego, ponieważ  $f + \dot{f}dt$  daje nową wartość funkcji  $f$  mniejszą od zera. Taką zmianę stanu naprężenia będziemy nazywać *procesem odciażania*. W czasie takiego procesu nie ma przyrostów odkształcenia plastycznego, a więc  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ , a to pociąga za sobą równość  $\dot{\kappa} = 0$ , gdyż nie może być zmiany parametru wzmocnienia, jeżeli  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ .

Ponieważ  $\dot{\beta}$  może być wyrażone za pomocą związków fizykalnych (1.7)-(1.8) jako funkcja prędkości zmiany naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij}$ , przeto można wprowadzić następujący operator

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}.$$

Możemy obecnie zapisać matematyczny warunek dla *procesu odciażania* w postaci

$$(2.4) \quad f = 0, \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) < 0.$$

Zmianę stanu naprężenia od pewnego stanu sprężysto-lepkoplastycznego do innego stanu sprężysto-lepkoplastycznego, której nie towarzyszą żadne przyrosty odkształcenia plastycznego, będziemy nazywać *procesem neutralnym*. Stan neutralny będzie się realizował, jeżeli

$$(2.5) \quad f = 0, \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) = 0.$$

Aktywny *proces obciążania*, któremu towarzyszy przyrost odkształceń plastycznych, występuje, jeżeli

$$(2.6) \quad f = 0, \quad \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) > 0.$$

Rozpatrując powierzchnię płynięcia w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń zauważymy łatwo, że neutralny proces nie odpowiada kierunkowi przyrostu naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij}dt$  stycznym do powierzchni płynięcia w rozpatrywanym punkcie, co miało miejsce w teorii płynięcia.

Stan neutralny będzie się obecnie realizował, jeżeli wektor przyrostu naprężenia  $\dot{\sigma}_{ij}dt$  będzie odchylony od kierunku normalnego do powierzchni płynięcia o kąt  $\vartheta$ , który określa równanie

$$(2.7) \quad \vartheta = \arccos \frac{-\frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}}{\left| \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right| |\dot{\sigma}_{ij}|}.$$

Wyrażenie (2.7) wskazuje na przyczynę zmiany kryteriów obciążania dla lepkoplastyczności w porównaniu z kryteriami klasycznej teorii plastyczności. Przyczyną tą jest wpływ lepkości materiału na warunek plastyczności.

Znane jest również zjawisko wpływu prędkości odkształcenia na warunek plastyczności. Będzie ono szczegółowo wyjaśnione w drugiej części pracy.

M. REINER [34] przedyskutował osiągnięcie stanu plastycznego przy stałym obciążeniu, a więc zbadał możliwości uplastycznienia się materiału w procesie pełzania.

Oryginalną koncepcję zbadania kryteriów uplastycznienia lub ogólniej kryteriów osiągnięcia stanu krytycznego zaproponowali W. OLSZAK i Z. BYCHAWSKI w pracach [21], [22]. Podstawą tej koncepcji jest spostrzeżenie, że o zniszczeniu niektórych ciał sprężystolepkich decyduje nie tylko energia sprężysta, ale również prędkość zmiany energii dysypacji.

Zanalizowano przykłady modeli, które ulegają zniszczeniu, kiedy prędkość zmiany energii dysypacji osiąga pewną określoną wartość. Dla takich modeli decydujący jest wpływ prędkości odkształcenia.

Dla przeprowadzenia analizy dość szerokiej klasy ciał rzeczywistych autorzy pracy [22] zaproponowali następujący warunek osiągnięcia stanu krytycznego<sup>2</sup>

$$(2.8) \quad W_E + W_D = k^2 \quad \text{lub} \quad (\omega_E + \omega_D)W = k^2,$$

jeżeli

$$(2.9) \quad \omega_E W = W_E, \quad \omega_D W = W_D,$$

gdzie  $W_E$  jest zredukowaną energią sprężystą odkształcenia czysto postaciowego, a  $W_D$  prędkością zmiany energii dysypacji, ale wyrażoną w wymiarze energii. Wielkości  $\omega_E$ ,  $\omega_D$  i  $k$  są pewnymi stałymi właściwymi dla rozważanego materiału.

W pracy [22] rozważono kilka przypadków modeli i zanalizowano dla nich szczegółowo postać kryterium (2.8).

### 3. Definicja materiału statecznego

Wydaje się, że najogólniejszym podejściem do zagadnienia opisu własności ciał sprężysto-lepkoplastycznych jest koncepcja D. C. DRUCKERA przedstawiona w pracy [7].

D. C. DRUCKER wykorzystał pewne spostrzeżenia z teorii plastyczności. Wskazał on na to, że chcąc dać jednolity i jednoznaczny opis własności lepkich i plastycznych trzeba wprowadzić pewne podstawowe postulaty, które są celowo przyjętymi ograniczeniami.

Okazuje się, że wprowadzając postulat o *materiale statecznym* można otrzymać podstawowe warunki, których spełnienie pozwala na logiczne wyprowa-

<sup>2</sup> Należy jednak zaznaczyć, że pojęcie osiągnięcia stanu krytycznego jest w pracy [22] rozumiane ogólniej niż osiągnięcie stanu plastycznego. Stan plastyczny może być jednym z przypadków szczególnych stanu krytycznego.

dzenie związków fizykalnych. Warunki te ograniczają rozważania do pewnej klasy materiałów, ale jednocześnie umożliwiają konsekwentny opis matematyczny klasy wybranej.

Rozważmy ciało o objętości  $V$  ograniczone regularną powierzchnią  $S$ , poddane działaniu sił powierzchniowych  $T_i$  i sił masowych  $P_i$ , które są funkcjami czasu. Wywołane tymi warunkami brzegowymi stany przemieszczenia  $u_i$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  i naprężenia  $\sigma_{ij}$ , są również funkcjami czasu.

Przyjmijmy, że warunki brzegowe ulegają pewnym wariacjom i są określone siłami powierzchniowymi  $T_i + \Delta T_i$  i siłami masowymi  $P_i + \Delta P_i$ , którym odpowiadają: stan przemieszczenia  $u_i + \Delta u_i$ , stan odkształcenia  $\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}$  i stan naprężenia  $\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$ .

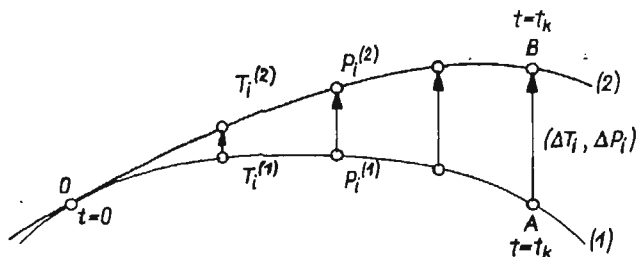
Podstawową definicję *statecznego materiału* niesprężystego (sprężysto-lepkoplastycznego) można wyrazić jako następujący postulat Druckera:

*Praca wykonana przez przyrost sił zewnętrznych na odpowiednich przyrostach składowych wektora przemieszczenia musi być nieujemna.*

Definicję tę można przedstawić w następującej postaci matematycznej:

$$(3.1) \quad \int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_S \Delta T_i \Delta \dot{u}_i dS + \int_V \Delta P_i \Delta \dot{u}_i dV \right\} dt \geq 0,$$

jeżeli  $t = 0$  oznacza chwilę przyłożenia przyrostów sił zewnętrznych.



Rys. 2

Często wygodniej jest wprowadzić dwie różne drogi obciążenia  $T_i^{(1)}$ ,  $P_i^{(1)}$  i  $T_i^{(2)}$ ,  $P_i^{(2)}$ , które zaczynają się różnić od chwili  $t = 0$  (rys. 2). Wtedy definicję (3.1) zapisać można w postaci:

$$(3.2) \quad \int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_S [T_i^{(2)} - T_i^{(1)}] [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}] dS + \int_V [P_i^{(2)} - P_i^{(1)}] [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}] dV \right\} dt \geq 0.$$

Jeżeli w wyrażeniach (3.1) i (3.2) czas  $t_k$  nie jest ograniczony żadnym dodatkowym warunkiem i może być założony dowolnie wielki, wtedy mówimy o «stateczności w dużym», natomiast ograniczając czas  $t_k$  do bardzo bliskiego sąsiedztwa chwili  $t = 0$  otrzymujemy matematyczną postać wyrażającą «stateczność w małym».

Wykorzystując zasadę prac przygotowanych można siły powierzchniowe, siły objętościowe i prędkość zastąpić naprężeniami i prędkościami odkształcenia.

Zasada prac przygotowanych stwierdza, że dla dowolnych ciągłych prędkości  $\dot{u}_i$  zachodzi równość

$$(3.3) \quad \int_S T_i \dot{u}_i dS + \int_V P_i \dot{u}_i dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV,$$

gdzie  $T_i$ ,  $P_i$ ,  $\sigma_{ij}$  reprezentują układ wielkości statycznych będących w równowadze, a  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  są zgodnym układem kinematycznym. Należy podkreślić, że układy wielkości statycznych i kinematycznych nie są z sobą związane.

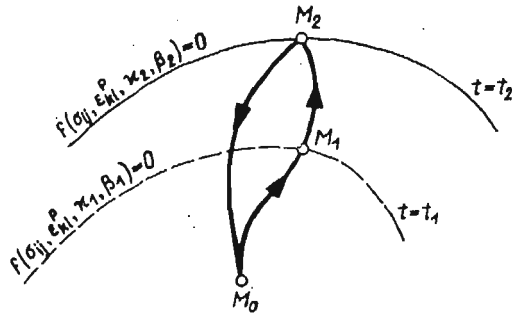
Zakładając, że rozpatrujemy tylko jednorodny stan naprężenia i odkształcenia i wykorzystując zasadę prac przygotowanych (3.3), na podstawie (3.2) otrzymamy warunek

$$(3.4) \quad \int_0^{t_k} [\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}][\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}] dt \geq 0.$$

#### 4. Wypukłość powierzchni płynięcia

W celu wykazania, że w teorii ciał sprężysto-lepkoplastycznych przyjmować należy wypukłą powierzchnię płynięcia, wykorzystujemy warunek (3.4) wynikający z postulatu Druckera.

Załóżmy, że stan  $\sigma_{ij}^{(1)}$  jest identyczny ze stanem stacjonarnym  $\sigma_{ij}^*$  w chwili  $t = 0$ , a stan  $\sigma_{ij}^{(2)}$  będzie stanem zmiennym w czasie i stan ten oznaczmy przez  $\sigma_{ij}$ . Zanalizujemy następujący zamknięty cykl obciążenia. W chwili  $t = 0$  aktualny stan obciążenia  $\sigma_{ij}$  pokrywa się ze stanem stacjonarnym  $\sigma_{ij}^*$ , następnie stan bieżący  $\sigma_{ij}$  zmienia się wzdłuż drogi  $M_0M_1$  (rys. 3) osiągając w chwili  $t = t_1$  punkt  $M_1$  odpowiadający stanowi uplastycznionemu. Na drodze  $M_1M_2$  istnieją przyrosty odkształcenia plastycznego. Stan  $M_2$  osiągnięty zostaje w chwili  $t = t_2$ . Poczynając od chwili  $t_2$  następuje odciążanie wzdłuż drogi  $M_2M_0$ . W chwili  $t = t_k$  stan aktualny pokrywa się ze stanem początkowym i wtedy  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$ .



Rys. 3

Warunek (3.4) dla zamkniętego cyklu  $M_0M_1M_2M_0$  w czasie  $0 \leq t \leq t_k$  daje

$$(4.1) \quad \int_0^{t_k} [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*][\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_{ij}^*] dt \geq 0,$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_{ij}$  i  $\dot{\epsilon}_{ij}^*$  zastępują odpowiednio  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}$  i  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(1)}$ .

Uwzględniając, że  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p*} = 0$  oraz że  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e+v)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ , wyrażenie (4.1) można zapisać w postaci (por. P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [18]):

$$(4.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*] \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt + \{Y[\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(e+v)}]\}_0^{t_2} \geq 0,$$

gdzie

$$(4.3) \quad \{Y\}_0^{t_k} = \int_0^{t_k} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(e+v)} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e+v)*}) dt.$$

Rozwijając pierwszy składnik wyrażenia (4.2) w szereg Taylora w punkcie  $t = t_1$  i zachowując tylko pierwszy wyraz, otrzymamy

$$(4.4) \quad [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p]_{t=t_1} \Delta t + \{Y\}_0^{t_k} \geq 0.$$

Jeżeli założymy, że  $\Delta t = t_2 - t_1$  jest dostatecznie małe (ograniczamy się bowiem do żądania «stateczności w małym»), wtedy nierówność (4.4) wystarcza do spełnienia nierówności (4.2).

Aby przeprowadzić pełną dyskusję zagadnienia dotyczącego wypukłości powierzchni płynięcia, wprowadzimy zgodnie z pracą P. M. NAGHDI'EGO i S. A. MURCHA [18] pojęcie *szybkiej drogi obciążenia* i *chwilowej powierzchni płynięcia*.

*Szybką drogą obciążenia* w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń będziemy nazywać taki przebieg skończonej zmiany stanu naprężenia, który realizuje się w czasie nieskończenie krótkim i podczas którego parametr  $\beta(\varepsilon_{kl}^v)$  pozostaje niezmienny

$$(4.5) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \beta(\varepsilon_{kl}^v) = 0.$$

Dla szybkiej drogi obciążenia zachowanie się powierzchni płynięcia jest dokładnie takie samo jak w klasycznej teorii płynięcia dla zwykłej drogi.

*Chwilową powierzchnię płynięcia* zdefiniujemy następująco. Załóżmy, że w danym czasie  $t_a \geq 0$  mamy stan, który charakteryzują zmienne  $\sigma_{ij}^{(a)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{p(a)}$ ,  $\varkappa^{(a)}$ ,  $\beta^{(a)}$ , taki że ciało jest sprężystolepkie

$$(4.6) \quad f(\sigma_{ij}^{(a)}, \varepsilon_{kl}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \varkappa^{(a)}) < 0.$$

Równanie

$$(4.7) \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \varkappa^{(a)}) = 0$$

będziemy nazywać chwilową powierzchnią płynięcia odpowiadającą stanowi, który reprezentowany jest w przestrzeni naprężenia punktem  $A$  (rys. 4). Trzeba zaznaczyć, że stan  $A$  zależy nie tylko od składowych tensora naprężenia, ale określony jest również wielkościami  $(\varepsilon_{ij}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \varkappa^{(a)})$ , które opisują historię obciążenia charakteryzującą się drogą obciążenia, wzdłuż której była realizowana zmiana aktualnego stanu, oraz czasem, w którym punkt  $A$  został osiągnięty.

Założmy, że realizowane jest obciążanie w czasie  $t > t_a$  i od chwili  $t_1 > t_a$  towarzyszy mu przyrost odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_{ij}^p dt$ , następnie rozpoczyna się odciążanie i w chwili  $t = t_k$  stan naprężenia wraca do stanu wyjściowego  $\sigma_{ij}^{(a)}$ . Zastosowanie nierówności (4.4) do zamkniętego cyklu obciążenia w czasie  $t_a \leq t \leq t_k$  prowadzi do nierówności

$$(4.8) \quad [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(a)}] \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{1}{\Delta t} \{\Psi\}_{t_a}^{t_k} \geq 0.$$

Dla dowolnego szybkiego cyklu obciążenia na podstawie (4.5) powierzchnia płynięcia jest identyczna z chwilową powierzchnią płynięcia

$$(4.9) \quad \lim_{(t_1 - t_a) \rightarrow 0} f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^{p(a)}, \beta^{(a)}, \kappa^{(a)}) = f_a.$$

Jeżeli przyjmiemy, że wielkość  $\{\Psi\}_{t_a}^{t_k}$  jest funkcją ciągłą w punkcie  $t = t_a$ , wtedy wprowadzając oznaczenie

$$(4.10) \quad \{\Psi\}_{t_a}^{t_k} = \int_{t_a}^{t_k} \psi(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dt$$

można łatwo wykazać, że w przypadku granicznym  $t_k \rightarrow t_a$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta\beta \rightarrow 0$  mamy

$$(4.11) \quad \lim_{t_k \rightarrow t_a} \frac{\{\Psi\}_{t_a}^{t_k}}{\Delta t} = \psi(t_a) = 0.$$

Stąd wnioskujemy, że nierówność (4.8) dla szybkich dróg obciążenia można przyjąć w takiej samej postaci jak w klasycznej teorii płynięcia. W szczególności jeżeli przyjmiemy  $t_a$  równe zeru i  $\sigma_{ij}^{(a)}$  potraktujemy jako dowolny punkt w obszarze sprężystolepkim identyczny z  $\sigma_{ij}^*$ , wtedy mamy

$$(4.12) \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0.$$

Dla szybkich dróg obciążenia kierunek  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  jest ustalony i niezależny od czasu.

Rozważając wszystkie możliwe szybkie drogi obciążenia od dowolnego punktu  $\sigma_{ij}^*$  w obszarze sprężystolepkim do punktu  $\sigma_{ij}$  na chwilowej powierzchni płynięcia  $f_a = 0$ , można w oparciu o nierówności (4.12) udowodnić wypukłość chwilowej powierzchni płynięcia.

Kierunek  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  dla wszystkich szybkich dróg obciążenia jest ortogonalny do chwilowej powierzchni płynięcia.

Ponieważ powyższe uzasadnienie wypukłości chwilowej powierzchni płynięcia jest słuszne dla każdego punktu i dla każdej drogi w przestrzeni naprężeń, to wynika stąd wniosek, że powierzchnia płynięcia  $f = 0$  musi być również wypukła. Prowadzi to z kolei do wniosku, że wypukłość powierzchni płynięcia nie jest zależna ani od drogi, ani od czasu.

Podobnej konkluzji nie można wypowiedzieć odnośnie ortogonalności wektora  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ . Wektor  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  jest ortogonalny do powierzchni płynięcia tylko dla szyb-

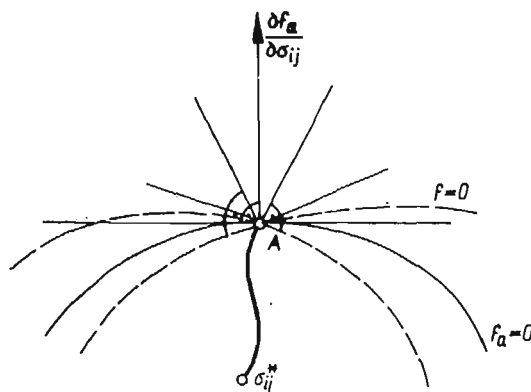
kich dróg obciążenia. Dla rzeczywistych dróg obciążenia kierunek wektora  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  pozostaje kwestią dyskusyjną.

### 5. Kierunek wektora prędkości odkształcenia plastycznego

Rozważmy obecnie drogę obciążenia w przestrzeni naprężeń. Załóżmy, że punkt reprezentujący aktualny stan naprężenia porusza się po tej samej drodze z różnymi prędkościami. Czasy całego procesu obciążenia wzdłuż tej samej drogi będą różne, co powoduje również inne efekty reologiczne. Badając zagadnienie osiągnięcia stanu plastycznego zauważymy, że będzie się on realizował w różnych punktach drogi i będzie określony różnymi powierzchniami płynięcia. W wyniku różnych efektów reologicznych na tej samej drodze obciążenia otrzymujemy pewną rodzinę powierzchni płynięcia zależną od parametru  $\beta$ .

W celu uproszczenia rozważań założmy, że wszystkie powierzchnie płynięcia rozważanej rodziny przechodzą przez ten sam punkt, np. punkt  $A$  na rys. 4. Wtedy łatwo zauważymy, że rzeczywisty kierunek wektora prędkości odkształcenia plastycznego może być odchylony od kierunku normalnego do chwilowej powierzchni płynięcia i zawiera się w stożku, którego rozwartość zależna jest od wielkości  $\{\Psi\}_0^{t,k}$ .

Wykorzystując nierówność (4.4) do rozważanego obecnie przypadku z rys. 4 i zakładając, że dla  $t = 0$  zachodzi równość  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$  wnioskujemy, że maksymalny kąt rozwarcia stożka jest funkcją  $\{\Psi\}_0^{t,k}$ .



Rys. 4

Wpływ efektów reologicznych na zmianę powierzchni płynięcia prowadzi do pewnej nieoznaczoności. Położenie aktualnej powierzchni płynięcia w przestrzeni naprężeń nie jest bowiem znane i nie wiadomo, w którym punkcie drogi obciążenia nastąpi uplastycznienie. Kierunek hiperpłaszczyzny stycznej do aktualnej powierzchni płynięcia w rozważanym punkcie nie jest ściśle określony.



Pełną dyskusję tych kwestii przyniosła praca P. N. NAGHDI'EGO i S. A. MURCHA [18].

Autorzy pracy [18] zwrócili również uwagę na pewne wnioski dotyczące teorii plastyczności nie uwzględniającej efektów reologicznych, ale dopuszczającej istnienie nieregularnych powierzchni płynięcia. W takiej teorii wektor prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  leży wewnątrz wachlarza utworzonego przez normalne do gładkich powierzchni tworzących «naroże plastyczne». Eksperymentator, który zauważy, że badany wektor przyrostu odkształcenia plastycznego ma różny kierunek od kierunku normalnego do oczekiwanej powierzchni płynięcia lub że kierunek ten zmienia się w pewnych granicach, wyprowadzi w oparciu o klasyczną teorię plastyczności wniosek, że w rozważanym punkcie istnieje tzw. «naroże plastyczne», podczas gdy w świetle teorii lepkoplastyczności powierzchnia płynięcia jest regularna.

### 6. Związki fizyczne między tensorem naprężenia i tensorem odkształcenia

Zakładając, że wektor prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  jest skierowany wzdłuż normalnej zewnętrznej do chwilowej powierzchni płynięcia  $f = 0$ , P. M. NAGHDI i S. A. MURCH [18] zaproponowali następujący związek:

$$(6.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Określając  $A$  z warunku  $\dot{f} = 0$  otrzymamy

$$(6.2) \quad A = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \dot{\beta}}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\kappa} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right)}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(6.3) \quad h = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial x} \bar{\kappa} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right)}$$

i biorąc pod uwagę kryteria dla obciążania dostajemy

$$(6.4) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } f < 0, \\ h \langle \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{ij}) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{jeżeli } f = 0, \end{cases}$$

przy czym symbol  $\langle x \rangle$  jest zdefiniowany następująco:

$$(6.5) \quad \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \leq 0, \\ x, & \text{jeżeli } x > 0. \end{cases}$$

W wyprowadzonych związkach (6.4) nie uwzględniono trudności wynikających z nieokreśloności kierunku wektora  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  do aktualnej powierzchni płynię-

cia w czasie procesu odkształcenia. Przyczyną tej nieoznaczoności jest wpływ efektów reologicznych na postać powierzchni płynięcia.

Efekty te można uwzględnić wprowadzając następującą zależność (por. P. M. NAGHDI i S. A. MURCH, [18]):

$$(6.6) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \left[ L \frac{\partial f_0}{\partial \sigma_{ij}} + M \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right] \langle \mathcal{L}(\dot{\sigma}_{kl}) \rangle,$$

w której funkcja  $f_0$  jest powierzchnią płynięcia, opisującą tylko izotropową zmianę warunku plastyczności, a druga funkcja  $g$  określa taką zmianę kierunku wektora  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ , jaka jest dopuszczalna i która wynika z poprzednio diskutowanych przyczyn. Wielkości  $L$  i  $M$  są skalarnymi funkcjami zależnymi od  $\{\Psi\}_{i_a}^4$ .

## 7. Dyskusja i wnioski

Kończąc opis metod pierwszego kierunku chcemy zwrócić uwagę na kilka podstawowych zagadnień, wykazać jego zalety i wady oraz zanalizować nie rozwiązane do tej pory problemy.

Trzeba zaznaczyć, że metody opisujące zachowanie się ciał sprężysto-lepkoplastycznych nie stanowią jeszcze narzędzia, za pomocą którego można rozwiązywać praktycznie ważne problemy brzegowe. Kierunek ten postawił sobie bardzo ogólne zadanie, wymagające jeszcze wielu badań i prac. Wiele kwestii pozostało nie wyjaśnionych, niektóre są tylko zasygnalizowane.

Zaletą tego kierunku jest jego głęboka wartość poznawcza, wskazanie na podstawowe trudności i stworzenie ogólnie chyba słusznej i konsekwentnej drogi postępowania. Jego niezaprzeczalnym sukcesem jest zbudowanie ogólnych podstaw szeroko rozumianych zagadnień lepkoplastyczności.

Śledząc rozwój podstaw tego kierunku widzimy wyraźnie, ile problemów pozostało jeszcze do rozwiązania.

Jako zagadnienie podstawowe należy wymienić przede wszystkim szczegółową dyskusję i zbadanie kryterium uplastycznienia ciał sprężystolepkich, sprecyzowanie postaci funkcji reprezentującej warunek plastyczności i pokazanie jej zależności od efektów reologicznych. Z tym zagadnieniem wiąże się kwestia zmiany powierzchni płynięcia w zależności od różnych czasów trwania drogi obciążenia. Rozwiązanie tego zagadnienia usunie nieoznaczoność, o której poprzednio była mowa. Pełne wyjaśnienie i dyskusja kwestii ortogonalności wektora przyrostu odkształcenia plastycznego, zbadanie charakteru równań stanu dla bardziej konkretnych przykładów materiałów rzeczywistych — oto dalsze zagadnienia.

Do zagadnień podstawowych zaliczyć trzeba również dyskusję słuszności podstawowej hipotezy, którą wyraża związek (1.1).

Można tu również wymienić problemy, które pozwolą na rozszerzenie słuszności rozważań i wyników już uzyskanych.

Pierwszym z nich będzie uogólnienie lub zbadanie na nowo tych samych problemów przy założeniu odkształceń skończonych i rozszerzenie rozważań na procesy nieizotermiczne.

Do tej pory nie ma pełnego opracowania podstawowych zagadnień dotyczących termodynamiki odkształceń sprężysto-lepkoplastycznych. Wydaje się, że jest to kwestia również podstawowa, gdyż jej rozstrzygnięcie pozwoli oprzeć wszystkie rozważania natury fenomenologicznej na bardziej ścisłych podstawach fizykalnych.

Pozostaje też otwarta kwestia jednoznaczności rozwiązania podstawowego problemu brzegowego lepkoplastyczności.

Nie opracowano również do tej pory twierdzeń wariacyjnych, które pozwoliłyby na konsekwentne stosowanie metod przybliżonych.

## II. MATERIAŁ SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNY

### I. Podstawowe założenia

Badania tego kierunku były zapoczątkowane wcześniej niż badania kierunku poprzedniego. Ogólne podstawy rozwoju zagadnień lepkoplastycznych w ramach tego kierunku dała praca K. HOHENEMSERERA i W. PRAGERA [11] w roku 1932 (patrz również W. PRAGER [31, 32]).

Nie od razu jednak praca ta spotkała się z pełnym zrozumieniem. Wydaje się, że długo była niedoceniana. Zainteresowano się nią dopiero w latach 1948-1950, kiedy to W. W. SOKOŁOWSKI [36, 38] a następnie L. E. MALVERN [16] wykazali, że w oparciu o założenie K. Hohenemserera i W. Pragera można opisać pewne własności dynamiczne materiałów wrażliwych na prędkość odkształcenia. Dotyczyło to jednak tylko problemów jednowymiarowych.

Szersze rozwinięcie idei K. Hohenemserera i W. Pragera przyniosły prace [26, 27, 29].

Dzięki przyjęciu założenia, że materiał posiada cechy lepkie dopiero po uplastycznieniu, a w obszarach sprężystych cechy te są nieistotne, podstawowe koncepcje opisu własności lepkoplastycznych różnią się od metod kierunku poprzedniego.

Założymy, że prędkość odkształcenia można rozłożyć na część sprężystą i niesprężystą:

$$(1.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p.$$

Część niesprężysta prędkości odkształcenia oznaczona przez  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  reprezentuje sprzężenie efektów lepkich i plastycznych.

### 2. Ogólne związki fizykalne

Ponieważ w obszarach sprężystych materiał nie posiada cech lepkich, to dobór odpowiedniego kryterium uplastycznienia będzie znacznie prostszy niż dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego.

Początkowy warunek plastyczności, który nazwiemy *statycznym kryterium uplastycznienia*, nie będzie się różnił od znanych kryteriów plastyczności w klasycznej teorii plastyczności.

Aby nasze rozważania miały charakter dostatecznie ogólny, wprowadzimy statyczną funkcję uplastycznienia w następującej postaci:

$$(2.1) \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \frac{f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)}{\kappa} - 1,$$

gdzie funkcja  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$  zależy od stanu naprężenia  $\sigma_{ij}$  i od stanu odkształcenia plastycznego  $\varepsilon_{ij}^p$ . Parametr  $\kappa$  jest zdefiniowany wyrażeniem

$$(2.2) \quad \kappa = \kappa(W_p) = \kappa \left( \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \right).$$

Wielkość ta nazywana jest parametrem wzmocnienia (dokładny opis dwóch podstawowych definicji parametru  $\kappa$  można znaleźć w książce R. HILLA [10] lub w pracy P. M. NAGHDI [17]).

O powierzchni płynięcia  $F = 0$ , rozważanej w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń, zakładamy, że jest regularna i wypukła.

W pracy [29] zaproponowano następujące związki fizyczne opisujące materiał sprężysto/lepkoplastyczny

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma^0 \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned}$$

Funkcja  $\Phi(F)$  powinna być dobrana na podstawie rezultatów badań doświadczalnych, dotyczących dynamicznych własności materiałów. Odpowiedni dobór funkcji  $\Phi(F)$  pozwala na opis wpływu prędkości odkształcenia na granicę plastyczności materiału. Zagadnienie wyboru funkcji  $\Phi(F)$  w oparciu o wyniki doświadczeń zostało szczegółowo przedyskutowane w pracy [27].

Wygodniej będzie zapisać związki fizyczne w trochę innej postaci

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned}$$

gdzie obecnie  $\gamma = \gamma^0/\kappa$  oznacza stałą materiału.

Równania stanu (2.4) wprowadzają założenie, że prędkość odkształcenia niesprężystego jest funkcją stanu naprężenia będącego różnicą między stanem rzeczywistym, a stanem odpowiadającym statycznemu warunkowi uplastycznienia. Funkcja różnicy stanu naprężenia wytwarza prędkość odkształcenia niesprężystego zgodnie z prawem lepkości Maxwella. Sprężyste składowe tensora odkształcenia są niezależne od prędkości odkształcenia.

Związki fizyczne (2.4) opisują również wzmocnienie materiału. Dzięki wprowadzonej funkcji  $F$  można opisać wzmocnienie zarówno izotropowe jak i anizotropowe.

Aby dać bliższą dyskusję związku (2.4), rozważmy tylko niesprężystą część prędkości odkształcenia:

$$(2.5) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \gamma \Phi(F) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Po prostych przekształceniach z równania (2.5) otrzymamy

$$(2.6) \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \kappa(W_p) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{(I_2^p)^{1/2}}{\gamma} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1/2} \right] \right\},$$

gdzie  $I_2^p = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p$  jest drugim niezmiennikiem niesprężystego tensora prędkości odkształcenia.

Związek (2.6) przedstawia dynamiczny warunek plastyczności dla ciała sprężysto/lepkoplastycznego, które wykazuje izotropowe i anizotropowe wzmocnienie. Opisuje jednocześnie zależność kryterium plastyczności od prędkości odkształcenia.

Równanie (2.6) określa zmianę aktualnej powierzchni płynięcia w czasie dynamicznego procesu odkształcenia niesprężystego. Zmiana ta jest spowodowana izotropowym i anizotropowym wzmocnieniem materiału oraz wpływem efektów reologicznych, które w analizowanym przypadku oddziałują przez wpływ prędkości odkształcenia.

Na podstawie równań (2.4) można łatwo wykazać, że prędkość odkształcenia niesprężystego, traktowana jako wektor w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń, jest zawsze skierowana wzdłuż normalnej do aktualnej, dynamicznej powierzchni płynięcia.

### 3. Szczególne przypadki związków fizykalnych

Zbadamy obecnie kilka przypadków szczególnych związków fizykalnych (2.4). Jako pierwszy przykład zanalizujemy relacje opisujące zachowanie się materiału sprężysto/lepkoplastycznego wykazującego wzmocnienie izotropowe. W tym celu założmy, że funkcja  $F$  ma postać

$$(3.1) \quad F = \frac{f(\sigma_{ij})}{\kappa} - 1,$$

gdzie funkcja  $f(\sigma_{ij})$  zależy obecnie tylko od stanu naprężenia. Jeżeli ograniczymy nasze rozważania do warunku plastyczności Hubera-Misesa, tzn. przyjmiemy  $f(\sigma_{ij}) = (J_2)^{1/2}$ , gdzie  $J_2$  jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, wtedy związki (2.4) dają<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Podobną postać związków fizykalnych badał ostatnio S. KALISKI w pracy przygotowanej do druku. Różnica między równaniami (3.2) i zależnościami S. Kaliskiego polega tylko na definicji parametru wzmocnienia  $\kappa$ .

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\sqrt{J_2}}{\varkappa} - 1 \right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}. \end{aligned}$$

Zgodnie z (2.6) dynamiczny warunek plastyczności ma obecnie postać

$$(3.3) \quad \sqrt{J_2} = \varkappa (W_p) \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right].$$

Dla stanu jednowymiarowego równania konstytutywne (3.2) prowadzą do następującego prawa:

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left\langle \Phi \left[ \frac{\sigma}{q(\varepsilon^p)} - 1 \right] \right\rangle,$$

gdzie  $\gamma^* = 2\gamma/\sqrt{3}$ ,  $q(\varepsilon^p) = \sqrt{3}\varkappa(W_p)$ ,  $\varepsilon$  oznacza odkształcenie,  $\sigma$  naprężenie i  $E$  moduł Younga.

Prawo (3.4) było po raz pierwszy wprowadzone przez L. E. MALVERNA [16].

Wyrażenie (3.3) w przypadku zagadnienia jednowymiarowego daje związek

$$(3.5) \quad \sigma = \varphi(\varepsilon^p) \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right],$$

gdzie  $\sigma = \varphi(\varepsilon^p)$  jest statyczną charakterystyką materiału dla prostego rozciągania.

Jako drugi przypadek zbadamy związki fizyczne opisujące sprężysto-lepko-idealnie plastyczny materiał. Przypadek ten otrzymamy przez wprowadzenie założenia, że funkcja  $F$  nie zależy od odkształceń, czyli

$$(3.6) \quad F = \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1,$$

gdzie  $J_3$  jest trzecim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, a  $c$  oznacza stałą materiału.

Równania (2.4) można obecnie zapisać następująco:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[ \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii}, \end{aligned}$$

gdzie  $\gamma = \gamma^0/c$ . Związki (3.7) były po raz pierwszy wprowadzone i szczegółowo zbadane w pracy [26].

Dynamiczny warunek plastyczności wynikający ze związków (3.7) ma postać

$$(3.8) \quad f(J_2, J_3) = c \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

Zakładając dalej

$$(3.9) \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1,$$

otrzymujemy odpowiednio następujące równania konstytutywne i dynamiczny warunek plastyczności (por. [26]):

$$(3.10) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right] \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}},$$

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii},$$

$$(3.11) \quad \sqrt{J_2} = k \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right].$$

Kiedy odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z odkształceniami niesprężystymi, wtedy równania (3.10) dla funkcji liniowej  $\Phi(F) = F$  dają związki fizyczne zaproponowane przez K. HOHENEMSERERA i W. PRAGERA [11].

Uwzględniając odkształcenia sprężyste i zakładając nadal liniową postać funkcji  $\Phi(F) = F$  otrzymujemy na podstawie równań (3.10) równania fizyczne, które były szczegółowo badane przez A. M. FREUDENTHALA [8].

Dla stanów jednowymiarowych równania (3.10) i (3.11) dają odpowiednio związki

$$(3.12) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left\langle \Phi \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \right\rangle,$$

$$(3.13) \quad \sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right].$$

Związek (3.12) opisuje zależności dynamiczne zachodzące między naprężeniami i odkształceniami w materiale sprężysto-lepko-idealnie plastycznym. Prawo to w przypadku liniowej funkcji  $[\Phi(\sigma/\sigma_0) - 1]$  zostało wykorzystane przez W. W. SOKOŁOWSKIEGO [36, 38] do rozwiązania zagadnienia rozprzestrzeniania się fal naprężenia w pręcie.

W. PRAGER w książce [32] wykazał, że równania stanu dla ciała lepko-idealnie plastycznego i dla ciała idealnie plastycznego są względem siebie w takim samym związku jak równania stanu cieczy lepkiej i idealnej.

W pracy [29] przedstawiono ogólną metodę otrzymania równań klasycznej teorii płynięcia z równań opisujących materiał sprężysto/lepkoplastyczny.

Aby to wykazać bliżej założymy, że  $\gamma \rightarrow \infty$ . Fizycznie założenie to oznacza pozbawienie ciała własności lepkich. Wtedy zgodnie z równaniem (2.6) otrzymujemy

$$(3.14) \quad f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = \alpha \quad \text{lub} \quad F = 0.$$

Warunek (3.14) jest klasycznym kryterium plastyczności w teorii opisującej izotropowe i anizotropowe wzmocnienie materiału. Z warunku (3.14) i na

podstawie definicji funkcji  $\Phi(F)$  [por. równania (2.4)] w przypadku granicznym, kiedy  $\gamma \rightarrow \infty$  mamy  $\Phi(F) \rightarrow 0$ . Wtedy iloczyn  $\gamma\Phi(F) = \Lambda$  jest nieokreślonym parametrem i otrzymujemy następujący związek:

$$(3.15) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Parametr  $\Lambda$  można określić z warunku, że punkt, który w przestrzeni naprężeń obrazuje aktualny stan obciążenia, musi się znajdować na powierzchni płynięcia

$$(3.16) \quad F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0.$$

Stąd

$$(3.17) \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0.$$

Po uwzględnieniu związku (3.15) i spełnieniu równania (3.17) dostajemy wzór znany z teorii płynięcia (patrz P. M. NAGHDI [17])

$$(3.18) \quad \Lambda = \left| - \frac{(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}}{(\partial F / \partial \varepsilon_{kl}^p)(\partial F / \partial \sigma_{kl})} \right|.$$

W przypadku materiału sprężysto/lepkko-idealnie plastycznego przez podstawienie rezultatu (3.11) do związków fizykalnych (3.10) dostajemy

$$(3.19) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sqrt{I_2^p} \frac{s_{ij}}{k \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right]}.$$

Przyjmując następnie w (3.19)  $\gamma = \infty$  otrzymujemy równania stanu

$$(3.20) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\sqrt{I_2^p}}{k} s_{ij},$$

opisujące zachowanie się nieściśliwego materiału idealnie plastycznego (por. W. PRAGER [32]). Równania (3.20) są słuszne tylko wtedy, kiedy prędkość odkształcenia nie znika.

#### 4. Dynamiczny warunek stateczności dla materiału niesprężystego

Głównym celem wyprowadzonych związków fizykalnych dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego była możliwość opisu pewnych własności dynamicznych. Dlatego warto się zastanowić nad modyfikacją definicji materiału statecznego z uwzględnieniem sił bezwładności.

Zagadnienie to rozwiązał D. C. DRUCKER w pracy [7]. Rozszerzona definicja prowadzi do następującego warunku (por. z definicją [I-(3.4)]):

$$(4.1) \quad \int_{t=0}^{t_k} \left\{ \int_V [\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}] [\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}] dV \right\} dt + \left\{ \int_V \frac{1}{2} \rho [\dot{u}_i^{(2)} - \dot{u}_i^{(1)}]^2 dV \right\}_{t=0}^{t_k} \geq 0,$$

gdzie przez  $\rho$  oznaczono gęstość materiału.



Wyraz drugi w nierówności (4.1) jest różnicą wartości całki objętościowej liczonej dla chwili  $t = t_k$  i dla chwili początkowej  $t = 0$ .

Oczywiście, w każdym przypadku prędkość  $\dot{u}_i^{(2)}$  dla dowolnego punktu ciała jest w chwili  $t = 0$  taka sama jak prędkość  $\dot{u}_i^{(1)}$ , stąd drugi wyraz w nierówności (4.1) jest nieujemny dla dowolnego czasu  $t = t_k$ . Dlatego nierówność [I-(3.4)] ma większe znaczenie.

W konkluzji widać, że uwzględnienie sił bezwładności nie wpływa na wnioski wynikające z warunku o materiale statecznym odnośnie związków fizykalnych.

### 5. Wybór funkcji $\Phi(F)$ i określenie stałych

Pełna analiza doboru funkcji  $\Phi(F)$  w związkach fizykalnych sprężysto/lepkoplastycznych oparta na podstawie badań doświadczalnych dotyczących dynamicznych własności materiału przeprowadzona została w pracy [27]. Jednocześnie określone zostały fizykalne stałe materiału.

Zanalizowano szczegółowo pięć różnych funkcji

$$(5.1) \quad \Phi(F) = F^{\delta},$$

$$(5.2) \quad \Phi(F) = F,$$

$$(5.3) \quad \Phi(F) = \exp F - 1,$$

$$(5.4) \quad \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha} [\exp F^{\alpha} - 1],$$

$$(5.5) \quad \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_{\alpha} F^{\alpha}.$$

Trzeba podkreślić, że nie prowadzono doświadczalnych badań dynamicznych dla złożonych stanów naprężenia. Wszystkie dotychczasowe rezultaty eksperymentalne były otrzymane przy spełnieniu warunków dla stanu jednowymiarowego.

W celu umożliwienia analizy różnych funkcji  $\Phi(F)$  [wzory (5.1)-(5.5)] i określenia odpowiednich stałych wprowadzono hipotezę o podobieństwie krzywych  $\sigma - \dot{\epsilon}$  i  $\sqrt{J_2} - \sqrt{I_2^*}$ .

Hipoteza ta pozwoliła na określenie stałych w zależnościach opisujących złożony stan naprężenia w oparciu o wyniki dla prostego rozciągania lub ściskania.

### 6. Proces relaksacji dla złożonego stanu naprężenia

Aby przedyskutować proces relaksacji dla złożonego stanu naprężenia, rozważymy ciało sprężysto/lepkoplastyczne o objętości  $V$ , ograniczone regularną powierzchnią  $S$ . Zbadajmy najpierw proces obciążania, w którym siły powierzchniowe  $T_i$  są dane na powierzchni  $S_1$ , a na pozostałej części powierzchni

$S_2 = S - S_1$  siły powierzchniowe znikają. Po procesie obciążania następuje *proces relaksacji*, w którym prędkości  $v_i$  zerują się na powierzchni  $S_1$ , a siły powierzchniowe nadal znikają na pozostałej części powierzchni  $S_2$ .

Aby taki proces mógł dostarczyć pewnych informacji dotyczących zachowania się materiału i mógł być pomocny przy analizie związków fizykalnych, należy doświadczalną próbę relaksacyjną przeprowadzić tak, żeby stan naprężenia i odkształcenia były jednorodne. Tak zdefiniowany proces relaksacji nazywać będziemy *A-procesem* (patrz [26]).

Zbadajmy tensor  $\Gamma_{ij}$  zdefiniowany następująco:

$$(6.1) \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \int (T_i v_j + T_j v_i) dS.$$

Podczas *A-procesu* tensor  $\Gamma_{ij}$  znika. Stąd

$$(6.2) \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \int (T_i v_j + T_j v_i) dS = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} n_k v_j + \sigma_{jk} n_k v_i) dS = \\ = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) dV = 0.$$

Ponieważ stany naprężenia i odkształcenia założone były jednorodne, to mamy

$$(6.3) \quad \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki}) = 0.$$

Warunki (6.3) pozwalają określić stan naprężenia w procesie relaksacji jako funkcję czasu.

Przyjmując w (6.3)  $i = j$  dostajemy

$$(6.4) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0.$$

Mnożąc równanie (6.3) przez  $\sigma_{ij}$  mamy warunek

$$(6.5) \quad \sigma_{ij} \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ki} = 0.$$

Rozważmy następnie prostszy problem brzegowy, w którym *proces obciążania* charakteryzuje się danymi siłami powierzchniowymi  $T_i$  na całej powierzchni  $S$ , podczas gdy w *procesie relaksacji* prędkości  $v_i$  znikają również na całej powierzchni ciała  $S$ . Taki rodzaj procesu relaksacji będziemy nazywać *B-procesem*.

Ponieważ stany naprężenia i odkształcenia są z założenia jednorodne, to otrzymujemy warunek

$$(6.6) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = 0.$$

Warunek (6.6) prowadzi do następujących dwóch warunków skalarnych

$$(6.7) \quad s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0,$$

$$(6.8) \quad s_{ij} s_{jk} \dot{\epsilon}_{ik} = 0.$$

Warto podkreślić, że te dwa warunki są również słuszne dla *A-procesów* w materiałach nieściśliwych.

W pracy [26] zanalizowano szczegółowo całkowanie równań otrzymanych na podstawie warunków (6.3) i (6.6), które pozwalają na określenie stanu naprężenia w dowolnej chwili podczas procesu relaksacji. W celu bliższego scharakteryzowania metody postępowania zbadamy równania relaksacyjne dla drugiego niezmiennika  $J_2$ .

Podczas *A-procesu* dla materiału nieściśliwego lub podczas *B-procesu* dla dowolnego materiału mamy w oparciu o związki fizyczne (3.10) następujące równanie

$$(6.9) \quad \dot{J}_2 + 4\mu\gamma\Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)\sqrt{J_2} = 0.$$

Załóżmy, że podczas procesu obciążania został osiągnięty pewien stan naprężenia  $\sigma_{ij}^{(0)}$  (lub  $s_{ij}^{(0)}$  i  $\sigma_{kk}^{(0)}$ ) taki, że  $J_2^{(0)} = \frac{1}{2}s_{ij}^{(0)}s_{ij}^{(0)} > k^2$ . Przyjmijmy następnie, że proces relaksacji zaczyna się w chwili  $t = 0$ . Wtedy równanie różniczkowe (6.9) może być zastąpione nieliniowym równaniem całkowym Volterry drugiego rodzaju

$$(6.10) \quad J_2 = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \sqrt{J_2(\xi)}\Phi\left[\frac{\sqrt{J_2(\xi)}}{k} - 1\right]d\xi.$$

Zakładając, że wyrażenie podcałkowe  $\sqrt{J_2}\Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right)$  spełnia warunek Lipschitza

$$(6.11) \quad \left| \sqrt{J_2}\Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1\right) - \sqrt{J_2''}\Phi\left(\frac{\sqrt{J_2''}}{k} - 1\right) \right| < N_0 |J_2 - J_2''|,$$

gdzie  $N_0$  jest dodatnią stałą, można otrzymać rozwiązanie równania (6.10) za pomocą metody iteracji wykorzystując następujący wzór rekurencyjny:

$$(6.12) \quad J_2^{(n+1)} = J_2^{(0)} - 4\mu\gamma \int_0^t \sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}\Phi\left[\frac{\sqrt{J_2^{(n)}(\xi)}}{k} - 1\right]d\xi.$$

Można łatwo wykazać, że szereg

$$(6.13) \quad J_2^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} [J_2^{(n+1)}(t) - J_2^{(n)}(t)]$$

jest absolutnie i jednostajnie zbieżny i jego suma

$$(6.14) \quad J_2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_2^{(n)}(t)$$

jest rozwiązaniem równania całkowego (6.10), a stąd i równania różniczkowego (6.9). Oczywiście rozwiązanie (6.14) jest słuszne tylko w obszarze odkształceń niesprężystych, to znaczy jeżeli  $J_2 > k^2$ .

W pracy [26] zbadano rozwiązania równań relaksacyjnych dla różnych funkcji  $\Phi(F)$ . Udowodniono również, że nierówność Lipschitza jest spełniona dla wszystkich funkcji (5.1)-(5.5).

### 7. Rozwiązania problemów brzegowych

Mimo skomplikowanego charakteru związków fizykalnych opisujących zachowanie się materiału sprężysto/lepkoplastycznego udało się rozwiązać kilka ważnych problemów brzegowych dla złożonego stanu naprężenia.

Zagadnieniami jednowymiarowymi zajmowano się wcześniej i istnieje już kilka prac przeglądowych, w których można znaleźć krytyczną ocenę wyników (patrz np. [12, 30]).

Nie podamy tu również pełnego przeglądu rozwiązań uzyskanych dla złożonego stanu naprężenia. Przedstawimy tylko pewne wyniki podstawowe.

Pełną dyskusję zagadnienia rozprzestrzeniania się fal naprężenia w ośrodku sprężysto/lepkoplastycznym w oparciu o związki fizykalne (3.10) dla wszystkich wprowadzonych funkcji  $\Phi(F)$ , (5.1)-(5.5) podają prace [24, 25, 28]. Wykazano, że cztery rodzaje fal: fala sferyczna, cylindryczna fala promieniowa, cylindryczna fala ścinania i fala płaska w półprzestrzeni dają się sprowadzić do jednego zagadnienia matematycznego. Naturalnie metody rozwiązania tego zagadnienia są różne w obszarach sprężystych i w obszarach niesprężystych.

Rozwiązanie problemu rozprzestrzeniania się sferycznych i cylindrycznych fal naprężenia w ośrodku opisanym związkami (3.10), ale dla liniowej funkcji  $\Phi(F)$  przedyskutowano w pracach [20, 23]. Podobnym zagadnieniem dla fali cylindrycznej zajmował się L. W. NIKITIN [19].

Okazało się, że stosowanie równań fizykalnych ciała sprężysto/lepkoplastycznego do zagadnień brzegowych płyt jest zbyt skomplikowane. Nie można uzyskać rozwiązań, które mogłyby być wykorzystane w praktyce inżynierskiej. Dlatego W. PRAGER zaproponował w pracy [33] pewną linearyzację równań stanu, polegającą na zastąpieniu warunku plastyczności Hubera-Misesa warunkiem odcinkami liniowym, tzn. warunkiem Treski. Linearyzacja ta dotyczy przypadku, kiedy

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \text{ i } \Phi(F) = F.$$

W oparciu o tę koncepcję E. J. APPLEBY i W. PRAGER [1] rozwiązali zagadnienie zginania płyty kołowej lepko-sztywnoplastycznej, swobodnie podparte na brzegu i równomiernie obciążonej.

Krytyczną ocenę wyników uzyskanych dla belek w oparciu o model lepko-sztywnoplastyczny dają prace P. S. SYMONDSA i S. R. BODNERA [4, 5], w których również porównano wyniki teoretyczne z rezultatami doświadczalnymi.

Rozwiązania innych zagadnień dynamicznych bądź quasi-statycznych dla ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego przyniosły prace, [2, 13, 14, 15, 37, 40, 41].

### 8. Wnioski końcowe

Oceniając krytycznie dorobek kierunku drugiego chcemy zwrócić uwagę na kilka podstawowych kwestii dyskusyjnych.

Poważne zastrzeżenia budzi podstawowe założenie, że materiał w obszarach nieuplastycznionych nie posiada własności lepkich. Na obronę tej hipotezy można przytoczyć przykłady metali, które wykazują wyraźniejsze własności lepkie po uplastycznieniu niż przed uplastycznieniem. Dobrymi przykładami mogą tu być miękka stal i czyste żelazo. Nie znaczy to jednak, że metale te nie posiadają zupełnie własności lepkich w obszarach nieuplastycznionych.

Dalszą kwestią dyskusyjną jest założenie, że wektor prędkości odkształcenia niesprężystego  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  jest ortogonalny do aktualnej powierzchni płynięcia, co prowadzi w efekcie do koncepcji potencjału plastycznego. Założenie to ogranicza wpływ efektów reologicznych na warunek plastyczności.

W rozwoju kierunku drugiego brak opracowań podstaw opartych na termodynamice nieodwracalnych procesów odkształcenia lub na fizyce metali. Ostatnie badania wskazują, że wiele zjawisk dynamicznych można wyjaśnić na bazie teorii dyslokacji (por. np. [35]).

Nie została również dotychczas zbadana jednoznaczność rozwiązania podstawowego zagadnienia brzegowego dla ośrodka sprężysto/lepkoplastycznego. Nie ma też ogólnych opracowań metod przybliżonych opartych o twierdzenia wariacyjne.

Zaletą tego kierunku jest oparcie teoretycznych rezultatów o bazę wyników doświadczalnych. Przeprowadzona konfrontacja wyników wskazuje na możliwość dobrego opisu wielu zjawisk dynamicznych.

Uzyskane już rozwiązania problemów brzegowych stwarzają perspektywy zastosowania metod tego kierunku do rozwiązywania ważnych dla praktyki zagadnień.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] E. J. APPELBY and W. PRAGER, *A problem in visco-plasticity*, J. Appl. Mech., **29** (1962), 381.
- [2] J. BEJDA, *Analysis of deformation in a short visco-plastic cylinder striking a rigid target*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963).
- [3] D. R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, New York 1960.
- [4] S. R. BODNER and P. S. SYMONDS, *Plastic deformations in impact and impulsive loading of beams*, w: «Plasticity», (Ed. by E. H. Lee and P. S. Symonds), Pergamon Press, New York, Oxford, London and Paris 1960, 488.
- [5] S. R. BODNER and P. S. SYMONDS, *Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beams subjected to impulsive loading*, J. Appl. Mech., **29** (1962), 719.
- [6] B. D. COLEMAN and W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Reviews of Modern Physics, **33** (1961), 239.
- [7] D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 101.
- [8] A. M. FREUDENTHAL, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Handbuch der Physik, VI (1958), Springer-Verlag, Berlin.
- [9] M. GURTIN and E. STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **11** (1962), 20.
- [10] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford 1950.
- [11] K. HOHNEMSER and W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*, Z. A. M. M., **12** (1932), 216.
- [12] H. G. HOPKINS, *Dynamic anelastic deformations of metals*, Appl. Mech. Reviews, **14** (1961).

- [13] В.Н. Кукуджанов, Л.В. Никитин, *Распространение волн в стержне из неоднородного упруго-вязко-пластического материала*, Изв. Акад. Наук СССР, ОТН, Мех, Мат., 1960, 53.
- [14] В.Н. Кукуджанов, *Распространение цилиндрических ударных волн напряжения в пластике за пределом текучести*, Иссл. Физ. Радиом., 1961.
- [15] H. G. LANDAU, J. H. WEINER and E. E. ZWICKY, *Thermal stress in viscoelastic-plastic plate with temperature—dependent yield stress*, J. Appl. Mech., 27 (1960), 297.
- [16] L. E. MALVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect*, J. Appl. Mech., 18 (1951), 203.
- [17] P. M. NAGHDİ, *Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity*, w: «Plasticity» (Ed. by E. H. Lee and P. S. Symonds), Pergamon Press, New York, Oxford, London and Paris 1960, 121.
- [18] P. M. NAGHDİ and S. A. MURCH, *On the mechanical behavior of viscoelastic/plastic solids*, Technical Report, University of California, Berkeley 1963.
- [19] Л.В. Никитин, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в толстостенной трубе*, Изв. ВУЗ-ов, Машиностроение, 3 (1958), 14.
- [20] W. OLSZAK and P. PERZYNA, *Propagation of spherical waves in a non-homogeneous elastic-visco-plastic medium*, Colloque International C.N.R.S., Marseille 1961, 67; Bull. Acad. Polon. Sci., Sérié Sci. Tech., 9, (1961), 509.
- [21] W. OLSZAK, *On critical states in viscoelasticity*, [w wydawn.] Progress in Applied Mechanics-The Prager Anniversary Volume, Mac Millan, New York 1963.
- [22] W. OLSZAK, Z. BYCHAWSKI, *Kryterium zniszczenia ciał sprężystolepkich*, w druku.
- [23] P. PERZYNA, *Stress waves in a homogeneous elastic-visco-plastic medium*, Arch. Mech. Stos., 11 (1959), 441.
- [24] P. PERZYNA, *Propagation of shock waves in non-homogeneous elastic-visco-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 13 (1961), 851.
- [25] P. PERZYNA, *Propagation of shock waves in elastic-visco-plastic medium of a definite non-homogeneity type*, Arch. Mech. Stos. 14 (1962), 93.
- [26] P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., 20 (1963), 321.
- [27] P. PERZYNA, *The study of the dynamical behavior of rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., 15 (1963), 113.
- [28] P. PERZYNA, *On the propagation of stress waves in a rate sensitive plastic medium*, Z.A.M.P., 14 (1963), 241.
- [29] P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Prob., 4 (1963), 281.
- [30] H. J. PLASS and E. A. RIPPERGER, *Current research on plastic wave propagation at the University of Texas*, Parts I and II, w: «Plasticity» (Ed. by E. M. Lee and P. S. Symonds). Pergamon Press. New York, Oxford, London and Paris 1960, 453.
- [31] W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au dela du domaine élastique*, Memorial Sci. Math., 87 (1937).
- [32] W. PRAGER, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, Boston 1961.
- [33] W. PRAGER, *Linearization in visco-plasticity*, Österr. Ing. Archiv., 1961, 152.
- [34] M. REINER, *Plastic yielding in anelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 8 (1960), 255.
- [35] J. A. SIMMONS, F. HAUSER and J. E. DORN, *Mathematical Theories of Plastic Deformation under Impulsive Loading*, University of California, Publications in Engineering, vol. 5, 1962, 177.
- [36.] В.В. Соколовский, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, Докл. АН СССР, 60 (1948), 775.
- [37] В.В. Соколовский, *Распространение цилиндрических волн сдвига в упруго-вязко-пластической среде*, Докл. АН СССР, 60 (1948), 1325.
- [38] В.В. Соколовский, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, Прикл. Мат. Мех., 12 (1948), 3.

[39] C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, w: Handbuch der Physik, III/1 (1960), Springer-Verlag, Berlin.

[40] T. WIERZBIŃSKI, *A thick-walled elasto-visco-plastic spherical container under stress and displacement boundary value conditions*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963), 297.

[41] T. WIERZBIŃSKI, *Impulsive loading of a spherical container with rigid-plastic and strain-rate sensitive material*, Arch. Mech. Stos., **15** (1963).

## Р е з ю м е

### ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОСТИ

Главной целью работы является представление основных направлений развития вязко-пластичности, новой отрасли механики сплошной среды, пытающейся дать совместное описание реологических и пластических свойств материала.

Широко обсуждены основы теории, критерий пластичности и физические зависимости между тензором напряжения и тензором деформации.

В первой части дан анализ свойств упруго-вязко-пластических тел, которые проявляют реологические эффекты до и после возникновения пластических деформаций.

Обсуждено условие пластичности в зависимости от вязких свойств и исследованы критерии нагрузки.

Путем введения постулата Дракера об устойчивом материале доказана выпуклость поверхности текучести и выведены условия разрешающие исследовать напряжения и деформации и выявить различия вытекающие из одновременного влияния реологических и пластических эффектов.

Во второй части работы дан обзор методов описания упруго/вязко-пластических материалов, которые проявляют ясно выраженные реологические свойства только лишь в пластических областях, а также обзор феноменологических физических зависимостей, описывающих влияние скорости деформации на предел пластичности.

Обсуждены динамические условия пластичности и четко выявлен характер зависимости этих условий от скорости деформации. Показано, что из общих физических зависимостей, описывающих изотропное и анизотропное упрочнение и влияние скорости деформации, можно получить много интересных частных случаев.

Доказано также, что в предельном случае, когда постоянная материала  $\gamma \rightarrow \infty$ , получают известные теории пластического течения.

Подробно проанализирован процесс релаксации для сложного напряженного состояния и показаны методы интегрирования релаксационных уравнений.

В конце второй части проведен краткий обзор решений краевых задач.

В заключительной части дан критический анализ основных упрощающих положений и нерешенных задач, а также общий набросок перспектив дальнейшего развития исследований.

## S u m m a r y

### FUNDAMENTAL PROBLEMS IN VISCO-PLASTICITY

The aim of the paper is to show the fundamental trends of visco-plasticity, representing a new branch of continuous media mechanics, which attempts to describe simultaneously the rheological and plastic properties of materials.

Fundamental problems, like the yield criterion and the constitutive equations have been extensively discussed in the paper.

In the first part of the paper the properties of elasto-visco-plastic bodies are described, the rheological effects appearing both before and after the yield point, the yield condition depending on viscous properties is discussed.

Introducing the Drucker postulate concerning stable materials, the convexity of the yield surface can be proved, and some conditions are derived which enable us to determine the direction of the rate of plastic deformation vector.

General constitutive equations have been shown, and differences resulting from simultaneous rheological and plastic influences have been stressed.

The second part of the paper presents a review of some properties of elasto/visco-plastic materials, i.e. materials which reveal explicit rheological properties in the plastic region only.

Phenomenological constitutive equations describing the influence of the strain rate on the yield limit are given. Dynamical yield conditions are discussed, and their dependence on the strain rate is emphasized. It has been proved that from the general constitutive equations describing the isotropic and anisotropic work hardening and the influence of the strain rate, numerous interesting special cases can be derived. It can be shown, furthermore, that the case, when the material constant  $\gamma$  tends to infinity, corresponds to the well known theory of plastic flow.

Detailed analysis of the relaxation process in the case of a general state of stress is followed by the demonstration of effective methods of integration of the relaxation equations. A short review of solutions of the boundary value problems concludes this part of the paper.

Final remarks are devoted to a critical analysis of basic assumptions, to the unsolved problems of visco-plasticity and to general outlines of the probable future development in this field of mechanics.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1963 r.*

---



PRZEGLĄD NOWSZYCH PRAC Z DZIEDZINY STATECZNOŚCI  
POWŁOK CIENKOŚCIENNYCH

ZBIGNIEW NOWAK i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Powłoki cienkościenne, zarówno otwarte jak i zamknięte, znajdują szerokie i ważne zastosowania w rozmaitych gałęziach przemysłu, a przede wszystkim w budownictwie, lotnictwie, przemyśle maszynowym itp.

W literaturze światowej ukazało się bardzo dużo prac teoretycznych i doświadczalnych, zajmujących się analizą stateczności powłok o różnych kształtach geometrycznych, poddanych działaniu rozmaitych obciążeń. Do roku 1934 wszystkie prace teoretyczne opierały się na tzw. teorii klasycznej (liniowej), przedstawionej przez LOVE'A [1.1], u której podstaw leży założenie, że wszystkie składowe  $u$ ,  $v$  i  $w$  wektora przemieszczenia dowolnego punktu powierzchni środkowej powłoki są małe w porównaniu z jej grubością. Podstawowe równania i zależności teorii klasycznej stanowią jedynie modyfikacje odpowiednich równań i zależności liniowej teorii sprężystości.

Wyliczone na bazie teorii liniowej wartości obciążeń krytycznych, których minima noszą nazwę górnych obciążeń krytycznych, były z reguły znacznie wyższe niż wartości otrzymane na drodze eksperymentalnej. Fakt ten był dowodem, że teoria klasyczna stateczności powłok jest niedoskonała i wymaga daleko idących korekt i uzupełnień.

W r. 1934 ukazała się fundamentalna praca L. H. DONNELLA [1.2], w której przedstawiono podstawy nowej teorii tzw. odkształceń skończonych (t.j. rzędu grubości powłoki) małowyniosłych powłok cienkościennych. Od tego czasu datuje się żywiłowy rozwój teorii stateczności powłok, którego owocem jest szereg prac bazujących na niej, nazywanej również teorią geometrycznie nieliniową lub krótko *nieliniową*, ponieważ podstawowe równania tej teorii są nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Obliczone w tych pracach wartości obciążeń krytycznych, których minima noszą nazwę dolnych obciążeń krytycznych, okazały się w większości przypadków niemal zgodne z wartościami otrzymanymi na drodze eksperymentalnej. W ostatnich latach odbyło się kilka sympozjów, poświęconych teorii powłok (Delft 1959, Lwów 1961, Amsterdam 1962), na których główną uwagę koncentrowano na problemach stateczności powłok.

Przedstawione na tych sympozjach prace wykazują, że w chwili obecnej duże zainteresowanie wzbudzają takie stosunkowo młode dziedziny teorii stateczności powłok, jak stateczność powłok bimetalicznych, wyboczenie sprężysto-plastyczne i pętlające oraz stateczność dynamiczna powłok, aczkolwiek w dalszym ciągu wiele jeszcze uwagi poświęca się tradycyjnym problemom stateczności sprężystej powłok izotropowych i ortotropowych o różnych kształtach geometrycznych, poddanych działaniu obciążeń złożonych.

Celem niniejszej pracy jest zwięzły ale wyczerpujący przegląd nowszych prac, przede wszystkim z zakresu nieliniowej teorii stateczności małowyniosłych powłok cienkościennych z uwzględnieniem prac eksperymentalnych, weryfikujących obliczenia teoretyczne, oraz zestawienie najważniejszych pozycji bogatej, a mało u nas znanej literatury tego zagadnienia.

Warto nadmienić, że w ostatnich latach opublikowane zostały 4 prace przeglądowe z dziedziny stateczności powłok, mianowicie A. S. WOLMIRA [1.3], W. A. NASHA [1.4], M. O. ALUMIAEGO [1.5] i Ł. M. KURSZINA [1.6].

W pracy [1.3] zamieszczono 174 pozycje literatury i omówiono obszernie publikacje traktujące o stateczności płyt i powłok, które ukazały się w latach 1941-1956. Właściwy przegląd poprzedzony jest wstępem teoretycznym. Praca wysuwa na pierwszy plan publikacje badaczy radzieckich, aczkolwiek wiele miejsca poświęca również omówieniu ważniejszych prac uczonych zachodnich.

Publikacja przeglądowa [1.4] omawia najważniejsze prace teoretyczne i eksperymentalne, traktujące tylko o stateczności powłok cienkościennych, które ukazały się do roku 1957. Autor podaje 59 pozycji literatury i omawia głównie prace badaczy zachodnich cytując zaledwie kilka prac uczonych radzieckich. Prace [1.5 i 1.6] mają charakter specjalny. Pierwsza z nich omawia jedynie liniowe problemy stateczności sprężystej i drgań własnych powłok cienkościennych (156 pozycji literatury), druga zaś zajmuje się bardzo obszernie zagadnieniami stateczności trójwarstwowych płyt i powłok (277 pozycji literatury).

Szczegółowy przegląd wielu prac teoretycznych i doświadczalnych z bogatej dziedziny stateczności powłok o różnych kształtach geometrycznych, przy rozmaitych rodzajach obciążeń prostych i złożonych, można znaleźć w doskonałych, ale trudno dostępnych monografiach G. GERARDA i H. BECKERA [1.7] oraz G. GERARDA [1.8]. Również stosunkowo niedawno wydane monografie K. GIRKMANNNA [1.9], A. S. WOLMIRA [1.10], H. M. MUSZTARIEGO i K. Z. GALIMOWA [1.11], O. D. ONIASZWILIEGO [1.12] i W. FLUGGEGO [1.13] prezentują bogaty materiał teoretyczny i doświadczalny z wielu dziedzin stateczności powłok.

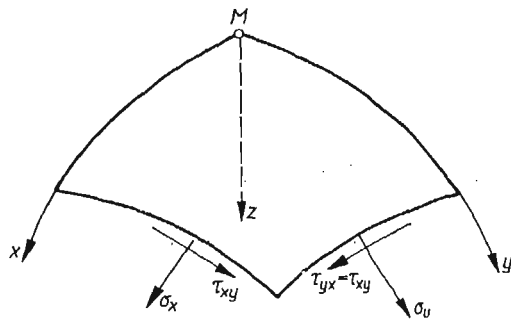
Liczba ukazujących się prac poświęconych stateczności powłok jest ostatnio tak duża, że niniejszy przegląd nie może być pełny. Wystarczy wspomnieć, że w pięciu rocznikach czasopisma «Riefieratiwnyj Żurnal», 1957-1961, omówiono łącznie 298 prac z tego zakresu. Dlatego też postaramy się omówić jedynie

pozycje ważniejsze, co do których można przypuszczać, że będą miały znaczenie dla dalszego rozwoju teorii stateczności powłok. Prace polskie będą przy tym wyodrębnione w osobnym rozdziale.

## 2. Podstawy geometrycznej liniowej teorii małowyniosłych powłok cienkościennych

Rysunek 1 przedstawia element powierzchni środkowej małowyniosłej powłoki cienkościennych. Niech  $x$  i  $y$  będą osiami współrzędnych krzywoliniowych, pokrywającymi się z liniami głównych krzywizn powierzchni w punkcie  $M$ , a  $z$  — osią normalną do powierzchni środkowej w tym punkcie.

Oznaczmy przez  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  wydłużenia względne w kierunkach stycznych do osi  $x$  i  $y$ ;  $\gamma_x$  — odkształcenie postaciowe powierzchni środkowej wywołane naprężeniami błonowymi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ ;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  są składowymi wektora przemieszczenia punktu  $M$  odpowiednio w kierunkach osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .



Rys. 1

U podstaw nieliniowej teorii małowyniosłych powłok cienkościennych leżą następujące relacje [1.10]:

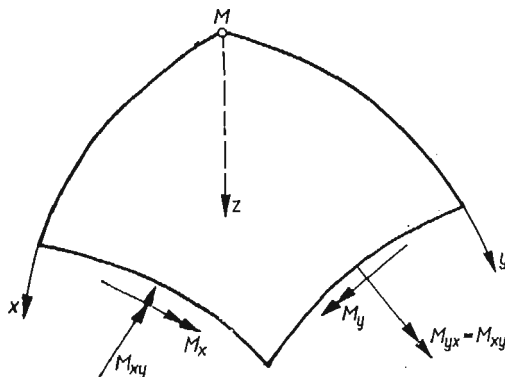
$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

gdzie  $k_x$ ,  $k_y$  są głównymi krzywiznami powierzchni środkowej powłoki w punkcie  $M$ .

Zmiany krzywizn  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  i  $\kappa_{xy}$  powierzchni środkowej, wywołane momentami zginającymi  $M_x$ ,  $M_y$  i momentem skręcającym  $M_{xy}$  (momenty te odniesione są do jednostek długości linii  $x$ ,  $y$  powierzchni środkowej, rys. 2), określa się w nieliniowej teorii powłok małowyniosłych analogicznymi zależnościami jak

dla płyt:

$$(2.2) \quad \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$



Rys. 2

Związki między naprężeniami błonowymi i odkształceniami liniowymi powierzchni środkowej ustala uogólnione prawo Hooke'a, które dla powłok izotropowych można przedstawić w postaci:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga,  $\nu$  współczynnikiem Poissona. Podobne zależności wiążą momenty zginające i skręcające ze zmianami krzywizn powierzchni środkowej:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} M_x &= D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \\ M_y &= D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \\ M_{xy} &= D(1-\nu)\kappa_{xy}, \end{aligned}$$

gdzie  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  jest sztywnością walcową powłoki, a  $h$  jej grubością.

Z równań (2.1) otrzymuje się podstawowe równanie zwartości wewnętrznej:

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Wprowadzając funkcję naprężeń  $\Phi(x, y)$  związaną z naprężeniami błonowymi relacjami

$$(2.6) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

otrzymujemy z (2.5), przy uwzględnieniu (2.3) i (2.6), pierwsze podstawowe

równanie nieliniowej teorii małowyniosłych, izotropowych powłok cienkościennych:

$$(2.7) \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

gdzie

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2.$$

Drugie równanie podstawowe, wiążące funkcje  $\Phi$  i  $w$ , otrzymuje się z równań równowagi wewnętrznej elementu powłoki. Ma ono postać:

$$(2.8) \quad \frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h},$$

gdzie  $q$  oznacza obciążenie przypadające na jednostkę pola powierzchni środkowej.

Dla walcowej powłoki kolistej o promieniu  $R$  równania (2.7) i (2.8) przyjmują formę uproszczoną,  $k_x = 0$ ;  $k_y = 1/R$ :

$$(2.9) \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$(2.10) \quad \frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h}.$$

Równania (2.7) i (2.8) są słuszne dla małowyniosłych powłok izotropowych o idealnym początkowym kształcie geometrycznym. W przypadku gdy powłoka posiada tzw. «ugięcia wstępne», opisane funkcją  $w_0(x, y)$ , to przy założeniu  $w_0/w = \text{const}$ , a więc gdy pierwotna powierzchnia ugięcia odpowiada ugięciom po wyboczeniu, zamiast (2.1) otrzymujemy uogólnione związki:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{K}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{K}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + K \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

a równania (2.7) i (2.8) przybierają postać:

$$(2.12) \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = K \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$(2.13) \quad \frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{K+1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \\ + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h},$$

gdzie

$$(2.14) \quad K = 1 + \frac{2w_0}{w} = \text{const.}$$

Ścisłe rozwiązanie układu równań (2.7) i (2.8) lub (2.12) i (2.13) względem funkcji  $w$  i  $\Phi$  nie jest możliwe. Pozostają więc jedynie metody przybliżone (kolejnych przybliżeń, różnic skończonych, małego parametru, energetyczne, ortogonalizacyjne itp.).

Ponieważ przy analizie stateczności powłok walcowych kolistych (a często i stożkowych) w oparciu o teorię nieliniową przyjmuje się przybliżoną postać funkcji ugięcia  $w(x, y)$  przy utracie stateczności, spełniającą najczęściej jedynie geometryczne warunki brzegowe, zatem dla określenia dolnych obciążeń krytycznych stosuje się metodę Ritza (minimum całkowitej energii układu). Idea przewodnia tej metody jest następująca.

a) Przyjmujemy przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności z reguły w formie wielomianu trygonometrycznego

$$(2.15) \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i(x, y),$$

gdzie  $\varphi_i(x, y)$  są funkcjami trygonometrycznymi, spełniającymi geometryczne warunki brzegowe, a  $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$  są na razie nieokreślonymi parametrami.

b) Obliczamy całkowitą energię odkształcenia sprężystego powłoki

$$(2.16) \quad \mathfrak{a} = U_b + U_g - W,$$

gdzie  $U_b$  jest energią odkształcenia związaną z naprężeniami błonowymi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $U_g$  energią odkształcenia związaną z momentami zginającymi  $M_x$ ,  $M_y$  i skręcającym  $M_{xy}$ ,  $W$  pracą wszystkich obciążeń działających na powłokę.

W przypadku izotropowych powłok walcowych, kolistych, o idealnym kształcie wyprowadza się następujące wzory:

$$U_b = \frac{h}{2E} \iint_S \left\{ (\nabla^2 \Phi)^2 + 2(1+\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy,$$

$$U_g = \frac{D}{2} \iint_S \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy,$$

gdzie

$$S \begin{cases} 0 \leq x \leq L, \\ 0 \leq y \leq 2\pi R; \end{cases}$$

$L$  oznacza długość powłoki.

c) Z warunków koniecznych istnienia minimum całkowitej energii powłoki

$$(2.19) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

otrzymuje się układ  $n$  nieliniowych, algebraicznych równań, zawierających  $n$  niewiadomych  $f_i$  oraz poszukiwane obciążenie krytyczne  $p$ . Z równań tych określa się minimalną wartość ciśnienia  $p$ , czyli tak zwane dolne ciśnienie krytyczne.

U w a g a 1. W przypadkach gdy przyjęta przybliżona postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności spełnia zarówno geometryczne jak i statyczne warunki brzegowe, najczęściej stosowaną przy analizie stateczności jest metoda Bubnowa-Galerkina.

U w a g a 2. Bogaty materiał teoretyczny dotyczący teorii nieliniowej powłok cienkościennych oraz przybliżonych metod rozwiązywania nieliniowych problemów stateczności powłok można znaleźć w monografiach [1.10 i 1.11] oraz w pracach specjalnych, podanych w spisie literatury do p. 2.

### 3. Stateczność statyczna walcowych powłok kolistych w zakresie sprężystym

**3.1. Powłoki ściskane osiowo.** W ostatnim dwudziestolecu bardzo szeroki krąg badaczy stosował podstawy nieliniowej teorii do obliczenia obciążeń krytycznych w izotropowych, sprężystych, jednowarstwowych powłokach walcowych, poddanych działaniu różnych obciążeń przy rozmaitych warunkach brzegowych. W przypadku ściskania osiowego równomiernie rozłożonego na brzegach powłoki pionierską była klasyczna już dzisiaj praca T. KÁRMÁNA i H. S. TSIENA [3.1]. Rozpatrzyli oni powłokę długą i przyjęli następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności:

$$(3.1.1) \quad w(x, y) = f_0 + f_1 \cos \frac{mx}{R} \cos \frac{ny}{R} + f_2 \cos \frac{2mx}{R} + f_3 \cos \frac{2my}{R},$$

gdzie  $m, n$  oznaczają liczby półfal odpowiednio w kierunku tworzących i obwodowym [funkcja (3.1.1) odpowiada rombowej postaci fal]. Zakładając  $f_2 = f_3$  i  $m = n$  (fale kwadratowe) oraz stosując metodę Ritz'a (wariacja  $\mathfrak{E}$  względem dwóch parametrów  $f_1$  i  $f_2$ ) otrzymali oni wartość dolnego ciśnienia krytycznego

$$p_d = 0,195 \frac{Eh}{R},$$

wtedy gdy według teorii klasycznej górne ciśnienie krytyczne wynosi

$$p_g = 0,606 \frac{Eh}{R} \quad (\text{przy } \nu = 0,3).$$

Dla  $m = n$  obliczenie  $p_d$  nie było możliwe.

Następnie ukazała się praca H. F. MICHIELSENA [3.2], w której przyjęto przybliżoną postać funkcji  $w(x, y)$ , analogiczną do zastosowanej w pracy [3.1],

ale warunki (2.19) ułożono względem czterech parametrów  $f_1, f_2, m$  i  $n$ . MI-CHIELSEN otrzymał  $p_d = 0,194 Eh/R$  przy  $m/n = 0,4$  (t.j. dla przypadku, gdy fale są silnie wydłużone wzdłuż obwodu). J. KEMPNER [3.3] odrzucił założenie  $f_2 = f_3$  i ułożył warunek (2.19) w odniesieniu do pięciu parametrów  $f_1, f_2, f_3, n$  i  $m/n$ . Otrzymał on  $p_d = 0,182 Eg/R$  przy  $m/n = 0,362$ . Bardzo oryginalnie podszedł do omawianego problemu L. KIRSTE [3.4]. Przyjął on mianowicie, że przy utracie stateczności powłoka przechodzi w wielościan, który można porównać z powierzchnią rozwijalną. Elementarne obliczenia doprowadziły do wartości  $p_d = 0,187 Eh/R$ .

Problem utraty stateczności ściskanej osiowo, zamkniętej powłoki walcowej kolistej z uwzględnieniem odkształceń wstępnych został zanalizowany szczegółowo (również w oparciu o teorię nieliniową) przez L. H. DONNELLA i C. C. WANA [3.5]. Wykazali oni, że ściskane osiowo walcowe powłoki koliste wykazują dużą wrażliwość na ugięcia wstępne. Stateczność osiowo ściskanej powłoki walcowej w ujęciu nieliniowym badał również szczegółowo S.W. ALEKSANDROWSKI [3.6]. Wreszcie w stosunkowo niedawno opublikowanej pracy E. D. GOLICYNSKIEJ [3.7] obliczono wartość dolnego ciśnienia krytycznego dla omawianej powłoki stosując metodę wariacyjną W. Z. Własowa. Otrzymana wartość  $p_d = 0,202 Eh/R$  niewiele różni się od uzyskanych w wyżej cytowanych pracach. Warto również wspomnieć, że W. THIELEMANN i H. J. DREYER [3.8] stwierdzili istnienie w obszarze pozakrytycznym (ściskanej osiowo walcowej powłoki kolistej) drugiej postaci równowagi, różniącej się znacznie od postaci analizowanej w pracy [3.3].

Przypadek osiowo ściskanej powłoki walcowej o zmiennej grubości ścianki rozwiązał metodą małego parametru W. WAGNER [3.9].

**3.2. Powłoki pod ciśnieniem zewnętrznym.** Problem stateczności zamkniętych walcowych powłok kolistych, poddanych działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego, został rozwiązany na drodze teoretycznej w oparciu o teorię nieliniową prawie równocześnie przez F. S. ISANBAJEWA [3.10] i W. A. NASHA [3.11]. Przyjęli oni następującą postać przybliżoną funkcji ugięcia przy utracie stateczności:

$$(3.2.1) \quad w(x, y) = f_0 + f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R} + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L}$$

i stosowali metodę Ritza z tym, że w pracy [3.11] uwzględniono ponadto wpływ ugięć wstępnych. NASCH wykazał, że parametr  $f_0$ , charakteryzujący równomierne odkształcenie promieniowe powłoki, wywiera bardzo nieznaczny wpływ na wielkość dolnego ciśnienia krytycznego. Stwierdził on ponadto, że wrażliwość powłoki na odkształcenia wstępne jest w przypadku wszechstronnego ciśnienia znacznie mniejsza niż przy ściskaniu osiowym, co zostało następnie potwierdzone w pracy L. H. DONNELLA [3.12].

Omawiany problem był później podjęty przez J. KEMPNERA, K. A. V. PANDALAI'EGO, S. A. PASTELA i J. CROUZET-PASCALA (por. [3.13]). Przyjęli oni nastę-



pującą przybliżoną funkcję ugięcia przy utracie stateczności:

$$w = f_1 \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{\lambda_y} + f_2 \cos \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{\lambda_y} + f_3 \cos \frac{\pi x}{L} + f_4 \cos \frac{3\pi x}{L} + f_0,$$

gdzie  $\lambda_y$  oznacza długość półfali w kierunku obwodowym.

W odróżnieniu od (3.2.1) tutaj początek osi  $x$  został przyjęty w środku powłoki. Warunek minimum całkowitej energii układu ułożono w odniesieniu do czterech parametrów ( $f_1, f_2, f_3, f_4$ ).

Warto nadmienić, że w przypadku wszechstronnego ciśnienia wartości dolnych obciążeń krytycznych różnią się stosunkowo niewiele od wartości górnych ciśnień krytycznych ( $p_d = 0,75 p_g$ ). Jedynie w pracy [3.13] stwierdzono, że w niektórych przypadkach  $p_d = 0,97 p_g$ . E. WENK, R. C. SLANKARD i W. A. NASH [3.14] oraz W. A. NAGAJEW [3.15] przeprowadzili serie doświadczeń nad statecznością walcowych powłok kolistych, poddanych działaniu wszechstronnemu ciśnieniu. Rezultaty ich badań pokrywają się niemal dokładnie z wynikami otrzymanymi w pracach [3.10 - 3.12]. We wszystkich cytowanych w tym punkcie pracach teoretycznych zakładano przegubowo-przesuwne podparcie brzegów powłoki. Nie rozpatrzono dotychczas przypadku brzegów utwierdzonych. Tylko W. A. NASH [3.16] obliczył wartość górnego ciśnienia krytycznego walcowej powłoki kołistej o brzegach utwierdzonych, poddanej działaniu wszechstronnemu ciśnieniu zewnętrznego. Przyjmując

$$w = f \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R}$$

i stosując metodę Ritza w odniesieniu do parametru  $f$  otrzymał on wzór:

$$p_R = \frac{\frac{D}{2} \left[ 8 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 + 4 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + 3 \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] + \frac{4E \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 h}{\left[ 4 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 R^2}}{\frac{3}{4} R \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} R \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - \frac{3}{4R}}$$

Godne uwagi są stosunkowo niedawno przeprowadzone przez W. E. MI-  
NIEJEWĄ [3.17] bardzo szczegółowe badania eksperymentalne nad wpływem odkształceń wstępnych na stateczność walcowych powłok kolistych, poddanych działaniu wszechstronnemu ściskaniu. Rezultaty jego badań pokrywają się z wnioskami zamieszczonymi w pracach [3.11, 3.12].

**3.3. Inne typy obciążeń i przypadki złożone.** Utrata stateczności izotropowych walcowych powłok kolistych przy czystym skręcaniu została po raz pierwszy zanalizowana w oparciu o teorię nieliniową i przy zastosowaniu metody Ritza przez T. LOO [3.18] i N. J. KRIWOSZEJEWĄ [3.19], a następnie przez W. A. NASHĄ [3.20]. Wszyscy cytowani autorzy uwzględnili wpływ ugięć wstępnych na wielkość dolnego naprężenia krytycznego i wykazali, że walcowa powłoka kołista jest przy skręcaniu mniej wrażliwa na odkształcenia wstępne

niż w przypadku ściskania osiowego. W pracach [3.18 i 3.19] przyjęto dla brzegów swobodnie podpartych:

$$(3.3.1) \quad w(x, y) = f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y + \gamma x)}{R} + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L},$$

gdzie  $\gamma$  jest tangensem kąta nachylenia osi fal śrubowych do tworzącej, i wykorzystano warunek (2.19) w odniesieniu do dwóch parametrów  $f_1$  i  $f_2$ , przy czym wartości  $\gamma$  i  $n$  przyjęto w oparciu o teorię klasyczną. W pracy [3.20] natomiast rozpatrzono zarówno przypadek brzegów utwierdzonych jak i swobodnie podpartych przyjmując w pierwszym przypadku

$$w(x, y) = f_0 + f_1 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y + \gamma x)}{R} + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L}.$$

w drugim zaś

$$w(x, y) = f'_0 + f'_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n(y + \gamma x)}{R} + f'_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L}.$$

Stosując metodę Ritz'a Nash ułożył warunek (2.19) w odniesieniu do wszystkich parametrów  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $\gamma$ ,  $n$ , a otrzymany układ nieliniowych równań algebraicznych rozwiązał za pomocą maszyny cyfrowej IBM-602A. Ten sam badacz przeprowadził serię doświadczeń [3.21] nad statecznością skręcanych walcowych powłok kolistych. Badania te wykazały zadowalającą zgodność między teorią a doświadczeniem. Nieliniowe ujęcie stateczności powłok walcowych przy czystym skręcaniu zawiera również praca Y. YOSHIMURY i J. NISAWY [3.22]. Przyjęli oni funkcję ugięcia  $w(x, y)$  w postaci zbliżonej do (3.3.1). Dolne naprężenie krytyczne wyznaczone w tej pracy wynosiło przy pewnych parametrach geometrycznych powłoki i określonym sposobie przyłożenia obciążenia 80% wartości naprężenia górnego.

W przypadku stateczności walcowych powłok kolistych przy skręcaniu istnieje jeszcze jedna dotychczas nieuwzględniona sprzeczność między teorią a doświadczeniem. W pracach teoretycznych zakłada się mianowicie, że powstające przy utracie stateczności fale śrubowe rozciągają się na całą długość powłoki, podczas gdy badania [3.21] wykazują, iż ma to miejsce jedynie dla powłok bardzo krótkich.

Badania teoretyczne przeprowadzone przez H. LOO, H. CRATE'A i E. B. SCHWARTZA [3.23] wykazują, że wpływ równomiernie rozłożonego ciśnienia wewnętrznego na stateczność ściskanych osiowo cienkościennych walcowych powłok kolistych zależy przede wszystkim od bezwymiarowego parametru:

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^2,$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają:  $q$  natężenie ciśnienia wewnętrznego,  $E$  moduł Younga,  $R$  średni promień powłoki,  $h$  grubość powłoki.

Cytowani wyżej autorzy stosując teorię nieliniową wykazali, że osiowe ciśnienie krytyczne powinno wzrastać od wartości  $\bar{p}_k = 0,376$  przy  $\bar{q} = 0$ , do wartości  $\bar{p}_k = 0,606$  przy  $\bar{q} = 0,169$ , a po przekroczeniu jej osiowe ciśnienie krytyczne pozostaje stałe i równe  $\bar{p}_k = 0,606$ , tj. wartości górnego ciśnienia krytycznego. Tymczasem badania doświadczalne przeprowadzone przez Y. C. FUNGA i E.E. SECHLERA [3.24] na powłokach ze stopów aluminium wykazały, że ciśnienia krytyczne  $\bar{p}_k$  są znacznie niższe niż obliczone na drodze teoretycznej, aczkolwiek ogólny charakter zmienności  $\bar{p}_k$  jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. Jeżeli jednak sporządzimy wykres zależności

$$\Delta\bar{p}_k = f(q),$$

gdzie  $\Delta\bar{p}_k = \bar{p}_k - \bar{p}_{k0}$  ( $\bar{p}_{k0}$  wielkość  $\bar{p}_k$  przy  $\bar{q} = 0$ ), to jak się okazuje, rezultaty badań doświadczalnych zgadzają się zadowalająco z wynikami teoretycznymi.

Równoczesne działanie ściskania osiowego i poprzecznego ciśnienia zewnętrznego rozpatrzone zostało w pracach O. N. LEŃKI [3.26] i Ł. R. ISPRAWNIKOWA [3.25]. Leńko wybrał następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności:

$$w(x, y) = f_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \sin^2 \frac{ny}{R}$$

i minimalizował całkowitą energię odkształcenia sprężystego względem trzech parametrów. Ponadto cytowani autorzy badali wpływ sprężystych wręgów na wielkość dolnego ciśnienia krytycznego, umieszczonych w kilku równo oddalonych przekrojach.

Przypadek utraty stateczności walcowych powłok kolistych przy równoczesnym działaniu skręcania i ściskania osiowego analizowany był w cytowanej już pracy T. T. LOO [3.18], a także przez O. I. TIERIEBUSZKĘ [3.27], przy czym ten ostatni przeprowadził serię doświadczeń weryfikujących jego rezultaty teoretyczne.

W 1959 r. ukazała się praca O. I. TIERIEBUSZKI [3.27], w której autor w oparciu o teorię nieliniową rozwiązał problem stateczności izotropowej walcowej powłoki kolistej, poddanej równoczesnemu działaniu ściskania osiowego, skręcania i zewnętrznego ciśnienia radialnego. W pracy przyjęto przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności w postaci:

$$w = f_0 + f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{m(y + \gamma x)}{R} + f_2 \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} + f_3 \sin^2 \frac{\pi x}{L},$$

gdzie  $m$  oznacza liczbę fal spiralnych w kierunku obwodowym przy utracie stateczności przy skręcaniu,  $n$  liczbę półfal w kierunku obwodowym przy utracie stateczności wywołanej ściskaniem osiowym lub ciśnieniem poprzecznym,  $i$  liczbę półfal wzdłuż tworzącej.

Autor zastosował do określenia dolnego ciśnienia krytycznego metodę Ritza minimalizując całkowitą energię sprężystą układu względem 3 parametrów ( $f_1, f_2, f_3$ ). Otrzymane nieliniowe równania algebraiczne pozwalają obliczyć

którekolwiek z trzech naprężeń krytycznych przy danych wartościach dwóch pozostałych.

W. M. DARIEWSKI [3.28], R. I. KSZNIAKIN [3.29] i W. A. MARIN [3.30] zbadali stateczność powłok walcowych kolistych przy równoczesnym działaniu skręcania i ciśnienia wewnętrznego. MARIN stwierdził, że realne wartości krytycznego momentu skręcającego stanowią przy niezbyt dużej wartości ciśnienia wewnętrznego 70-80% wartości momentu wyznaczonego na podstawie teorii klasycznej.

W. M. DARIEWSKI [3.31] i P. G. BURDIN [3.32] rozpatrzyli stateczność walcowej powłoki kolistej poddanej zginaniu siłą lub parą sił. Stwierdzili oni, że dla powłok krótkich, zginanych siłą, utrata stateczności wywołana jest działaniem naprężeń stycznych i ma miejsce w pobliżu włókna neutralnego. Drugi z cytowanych autorów przeprowadził ponadto serię doświadczeń nad powłokami różnej długości, poddanymi działaniu zginania z równoczesnym ciśnieniem zewnętrznym o różnym natężeniu. Przypadek łącznego działania zginania, skręcania i ciśnienia wewnętrznego rozpatrzył W. M. DARIEWSKI [3.33].

Bardzo ciekawe doświadczenia modelowe nad statecznością walcowych powłok kolistych wykonanych z papieru i błony fotograficznej przy różnych obciążeniach przeprowadzili W. M. CZEBANOW [3.34] i P. G. BURDIN [3.32]. Wreszcie Ł. R. ISPRAWNIKOW [3.35] przeprowadził eksperymentalne badanie stateczności powłok walcowych przy równoczesnym ściskaniu osiowym, skręcaniu i ciśnieniu poprzecznym. Pokrewny problem stateczności membrany walcowej, osiowo rozciąganej a radialnie ściskanej, badali w zakresie ugięć skończonych A. H. CORNELIÛSSEN i R. T. SHIELD [3.36].

#### 4. Stateczność statyczna powłok kulistych w zakresie sprężystym

Nieliniowa teoria powłok cienkościennych została również z powodzeniem zastosowana do analizy stateczności sprężystej małowyniosłych powłok kulistych otwartych (łupin kulistych), poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego równomiernie rozłożonego na powierzchni. Pionierska na tym polu była praca K. FRIEDRICHSA [4.1] opublikowana w r. 1942. Przyjął on, że w momencie utraty stateczności tworzy się niewielkie osiowo-symetryczne wybrzuszenie i założył w jego obrębie następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia:

$$(4.1) \quad w = Ra(1 - \varrho^4),$$

gdzie  $\varrho$  wyraża stosunek bieżącego kąta środkowego do połowy kąta środkowego, obejmującego wybrzuszenie,  $\varrho = \alpha/\beta$ . Stosując metodę Ritza FRIEDRICHS otrzymał w jednym z wariantów rozwiązania:

$$p_a = 0,136 \frac{Eh}{R} \quad \text{i} \quad p_{\vartheta} = 0,157 \frac{Eh}{R}$$

( $p_{\vartheta}$  — tzw. naprężenie «równoważnych energii», por. [4.1]) wobec rezultatu

teorii klasycznej

$$p_a = 0,606 \frac{Eh}{R}.$$

Przybliżone wyniki dla  $p_a$  w omawianym przypadku stateczności otrzymali również M. I. BABICZEWA [4.2] i W. I. FIEODOSJEW [4.3 i 4.4].

Ten sam problem podjęli następnie H. M. MUSZTARI i S. G. SURKIN [4.5, 4.6] rozwiązując go w dwóch wariantach, mianowicie

a) przyjmowali przybliżone postacie funkcji przemieszczenia południkowego  $u$  i ugięcia  $w$  w obrębie wybruszenia, po czym stosowali metodę Ritza minimalizując  $\mathfrak{a}$  względem trzech parametrów (amplitudy,  $u$  i  $w$  oraz  $\beta$ );

b) przyjmowali pewną «gasnącą» funkcję ugięcia  $w$  rozłożonego na całej powierzchni powłoki. Cytowani autorzy otrzymali:

$$p_a = 0,17 \frac{Eh}{R}, \quad p_b = 0,20 \frac{Eh}{R}.$$

W późniejszej pracy W. I. FIEODOSJEW [4.7] przyjęto w obszarze wybruszenia ( $\varrho \leq 1$ ) funkcję ugięcia

$$w = Ra(1 - \varrho^2)^2,$$

dla  $\varrho > 1$  zaś wykorzystano równania zaburzenia brzegowego przy użyciu funkcji hiperboliczno-trygonometrycznych. Stosując metodę Bubnowa-Galerkina znaleziono  $p_a < 0$ . H. M. MUSZTARI [4.8] wykazał, że przy tym wyborze funkcji  $w$  można również otrzymać  $p_a > 0$  pod warunkiem zastosowania równania Bubnowa-Galerkina tak, aby odpowiadało ono zasadzie możliwych przesunięć. Ten sam problem rozwiązany został następnie w pracy U. MASUJI i Y. YOSHIMURY [4.9] (otrzymali oni  $p_b = 0,184 Eh/R$ ). W 1955 r. problem stateczności powłoki kulistej pod działaniem ciśnienia zewnętrznego podjęli A. KAPLAN i Y. C. FUNG [4.10], którzy zastosowali metodę małego parametru do rozwiązania nieliniowych równań stateczności. Za pomocą tej metody otrzymali oni wartość dolnego ciśnienia krytycznego, zgodną z ich własnymi doświadczeniami dla bardzo małowyniosłych powłok kulistych o brzegach utwierdzonych. Następnie R. R. ARCHER [4.11] rozszerzył te badania na powłoki kuliste o większej wyniosłości. Ten sam problem został również rozwiązany przy użyciu szeregów potęgowych z następnym wykorzystaniem maszyn cyfrowych przez E. L. REISSA, H. J. GREENBERGA i H. B. KELLERA [4.12]. Otrzymali oni wartości ciśnień krytycznych zgodne z danymi doświadczalnymi dla szerokiego zakresu wartości parametrów geometrycznych powłoki.

Wreszcie E. L. REISS [4.13] przedstawił przybliżone rozwiązanie omawianego zagadnienia w oparciu o dwie zlinearyzowane odmiany pierwotnych nieliniowych równań stateczności.

Wszystkie wymienione wyżej prace dotyczyły stateczności łupin kulistych (powłok kulistych otwartych) i zakładały osiowo-symetryczny stan odkształcenia przy utracie stateczności. Przypadek asymetrycznego wyboczenia takiej powłoki

został zbadany przez E. I. GRIGOLUKA [4.14], który wykazał możliwość takiego wyboczenia dla pewnych wartości parametrów geometrycznych powłoki. Obliczył on wartość dolnego ciśnienia krytycznego rozwiązując nieliniowe równania stateczności metodą Bubnowa-Galerkina. Zagadnienie stateczności sprężystej zamkniętej powłoki kulistej z uwzględnieniem «ugięć wstępnych», poddanej działaniu równomiernego ciśnienia zewnętrznego, rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową L. H. DONNELL [4.15]. Przeprowadzona przez niego analiza otrzymanych rezultatów wykazuje, że powłoka kulista jest stosunkowo bardzo mało wrażliwa na odkształcenia wstępne. W. Z. CHIEN i H. C. HU [4.16] przedstawili półempiryczną analizę statycznej stateczności małowyniosłej powłoki kulistej pod działaniem koncentrycznie przyłożonego obciążenia pierścieniowego, normalnego do powierzchni środkowej powłoki. D. G. ASHWELL [4.17] rozwiązał problem wyboczenia takiej samej powłoki, ale obciążonej siłą skupioną skierowaną do środka. Wreszcie F. J. MURRAY i F. W. WRIGHT [4.18] podali analizę stateczności powłoki kulistej rozwiązując na drodze numerycznej podstawowe równania nieliniowej teorii powłok kulistych Kármána-Tsiena.

Systematyczne badania eksperymentalne nad statecznością łupin kulistych poddanych działaniu normalnego ciśnienia zewnętrznego zostały przeprowadzone przez P. G. SURKINA [4.19]. Opracował on oryginalne metody przygotowania modeli i badania ich utraty stateczności. Inna seria doświadczeń została przeprowadzona przez G. A. GIENJEWĄ i N. S. CZAUSOWĄ [4.20]. Wreszcie K. KLÖPPEL i O. JUNGLUTH [4.21] zbadali doświadczalnie utratę stateczności gładkich i wzmocnionych żebrami powłok kulistych metodą przyspieszonych zdjęć filmowych.

Pokrewny problem stateczności membrany kulistej w zakresie ugięć skończonych i przy uwzględnieniu fizykalnej nieliniowości materiału badał GUO ZHONG-HENG [4.22]. Stwierdzono stateczność przy ciśnieniu wewnętrznym i niestateczność przy zewnętrznym.

##### 5. Stateczność statyczna powłok stożkowych w zakresie sprężystym

Z krótkiego przeglądu prac p. 3 i p. 4 widać, że teoria nieliniowa może być z powodzeniem stosowana do analizy stateczności sprężystej cienkościennych powłok zarówno walcowych, jak i kulistych, poddanych działaniu różnego rodzaju obciążeń prostych i złożonych przy rozmaitych warunkach brzegowych. We wszystkich przypadkach wyniki zastosowania tej teorii pozostają w lepszej zgodności z danymi doświadczalnymi aniżeli wyniki analiz opartych na teorii klasycznej. Znacznie gorzej przedstawia się sprawa, jeżeli chodzi o stateczność powłok stożkowych w zakresie sprężystym. Olbrzymia większość opublikowanych dotychczas na ten temat prac opiera się na teorii klasycznej. Pierwszą z tej serii wydaje się być praca A. PFLÜGERA [5.1]. W późniejszej pracy H. M. MUSZTARIEGO i A. W. SACZENKOWA [5.2] określono metodą Bubnowa-Galerkina wartość górnego ciśnienia krytycznego dla powłoki stożkowej kulistej, poddanej

działaniu ciśnienia osiowego, równomiernie rozłożonego na brzegach powłoki oraz poprzecznego ciśnienia zewnętrznego. Problem stateczności powłoki stożkowej kolistej, poddanej działaniu jedynie poprzecznego ciśnienia hydrostatycznego, został rozwiązany w oparciu o teorię klasyczną przez C. E. TAYLORA [5.3] oraz N. J. HOFFA i J. SINGERA [5.4], dla przypadku zaś ściskania osiowego przez P. SEIDE'A [5.5]. Pierwszą pracą o stateczności powłok stożkowych w ujęciu geometrycznie nieliniowym jest praca A. W. SACZENKOWA [5.6]. Wykazał on, że rozwiązanie MICHIELSENA [3.2] dotyczące osiowego ściskania walcowej powłoki kolistej może być przeniesione na stożkową powłokę kolistą. Wyprowadził on następujący wzór dla dolnej wartości krytycznej całkowitej osiowej siły ściskającej:

$$P_d = 0,195 \cdot 2\pi E h^2 \cos^2 \gamma ,$$

gdzie  $\gamma$  jest równe połowie wierzchołkowego kąta stożka.

W pracy [5.7] rozwiązano również w oparciu o teorię nieliniową zagadnienie stateczności powłoki stożkowej o brzegach utwierdzonych pod działaniem ciśnienia zewnętrznego, równomiernie rozłożonego na pobocznicy. Autor zastosował metodę małego parametru do rozwiązania nieliniowych równań stateczności. Podobny przypadek stateczności w ujęciu geometrycznie nieliniowym został rozpatrzony przez R. K. RIAJAMETA [5.8]. Doszedł on do wniosku, że w przypadku ciśnienia zewnętrznego różnica między górnym a dolnym ciśnieniem krytycznym jest znacznie mniejsza niż w przypadku ściskania osiowego. Ten sam autor rozpatrzył również ogólny przypadek zachowania się stożkowych powłok kolistych w stanie pozakrytycznym [5.9]. Stateczność powłoki stożkowej pełnej pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego równomiernie rozłożonego na pobocznicy rozpatrzył w ujęciu liniowym I. I. TRAPIEZIN [5.10]. Ten sam autor określił na drodze doświadczalnej wielkości ciśnień krytycznych dla powłok stożkowych pełnych przy różnych wartościach ich parametrów geometrycznych [5.11].

L. M. BUNICZ, O. M. PALIJ i I. A. PISKOWITINA [5.12] rozwiązali w oparciu o teorię klasyczną za pomocą metody Ritza zagadnienie stateczności gładkiej i wzmocnionej żebrami powłoki w kształcie stożka ściętego pod działaniem równomiernego ciśnienia zewnętrznego. Ten sam problem został również rozwiązany w pracach [5.13-5.16]. Oryginalną metodę asymptotycznego całkowania ogólnych równań równowagi powłoki stożkowej przedstawiono w pracy [5.17]. Niestety do chwili obecnej nie rozwiązano w oparciu o teorię nieliniową problemu stateczności stożkowej powłoki kolistej przy obciążeniu złożonym.

Dużą serię badań nad statecznością powłok stożkowych ze stopów aluminium przeprowadził W. D. JORDAN [5.18]. W oparciu o wyniki swych doświadczeń ustalił on pewną formułę empiryczną na wartości obciążeń krytycznych, która wykorzystywana jest z powodzeniem przy projektowaniu i konstruowaniu powłok stożkowych.

## 6. Stateczność powłok wzmocnionych i anizotropowych

Jednym z zagadnień o bardzo dużym znaczeniu praktycznym jest przypadek tzw. «ogólnej utraty stateczności» powłok wzmocnionych żebrami, czyli przypadek gdy powłoka i żebra usztywniające tracą stateczność jednocześnie. Problem ten dla walcowych powłok kolistych wzmocnionych żebrami pierścieniowymi i poddanych działaniu zewnętrznego ciśnienia hydrostatycznego został po raz pierwszy rozwiązany w serii trzech prac V. L. SALERNO i B. LEVINE'A [6.1-6.3]. W oparciu o teorię klasyczną obliczyli oni wartość górnego ciśnienia krytycznego przy ograniczającym jednakże założeniu, że pierścienie usztywniające muszą mieć przekroje otwarte (szczegółowo zanalizowano przekrój dwuteowy). To samo zagadnienie podjęli następnie H. A. ALFUTOW [6.4] i S. KENDRICK [6.5] ograniczając się do przypadku obciążenia powłoki równomiernym ciśnieniem poprzecznym oraz opierając się przy określaniu ciśnienia krytycznego również na teorii liniowej. Wartości ciśnień krytycznych wyznaczone w tej ostatniej pracy odchylają się mniej niż o 20% od wyników starannie przeprowadzonych badań eksperymentalnych w David Taylor Model Basin. Należy jednakże zauważyć, że warunki brzegowe przyjęte w pracy [6.5] nie odpowiadają sposobowi podparcia powłok w tych badaniach doświadczalnych. Jeżeli teorię klasyczną zastosować do warunków brzegowych zrealizowanych we wspomnianych doświadczeniach, to okazuje się, że otrzymane teoretycznie wartości ciśnień krytycznych przekraczają o 70% wartości doświadczalne. Pewnym uogólnieniem prac [6.1-6.5] jest praca W. A. NASHA [6.6], w której autor w przeciwieństwie do swych poprzedników: 1) przyjmuje funkcje przemieszczeń  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  i  $w(x, y)$  w oparciu o rzeczywisty kształt powierzchni środkowej przy utracie stateczności; 2) wyprowadza nowy, bardziej ogólny wzór na pracę sił zewnętrznych; 3) rozpatruje ogólniejszy przypadek działania ciśnienia hydrostatycznego w kierunku radialnym i osiowym oraz 4) zakłada dowolny przekrój i ograniczoną sztywność pierścieni wzmacniających.

Teoria liniowa została ponadto zastosowana przez K. D. TURKINA [6.7] do analizy stateczności długiej wzmocnionej walcowej powłoki kolistej poddanej działaniu ściskania osiowego i czystego zginania przez S. R. BODNERA [6.8] do badania ogólnej niestateczności walcowych powłok kolistych, usztywnionych żebrami pierścieniowymi, wywołanej ciśnieniem hydrostatycznym, wreszcie przez I. JA. AMIRO [6.9] do analizy podłużnie i poprzecznie żebrowanej powłoki walcowej przy ściskaniu osiowym. Ogólna utrata stateczności walcowych powłok kolistych wzmocnionych pierścieniami i poddanych działaniu ciśnienia osiowego została zbadana eksperymentalnie na modelach z mas plastycznych przez J. C. Mc COYA [6.10]. Badania te wykazują, że decydującym parametrem usztywnienia powłoki jest sztywność skręcania pierścieni usztywniających. P. SEIDE [6.11] zastosował teorię klasyczną do analizy stateczności sprężystej walcowych powłok kolistych wzmocnionych równo oddalonymi żebrami podłużnymi i ściskanych osiowo. Rezultaty tej analizy są w zadowalającej zgodności z wynikami serii doświadczeń, przeprowadzonych przez H. T.



PONSFORDA [6.12] przy założeniu, że  $R/h < 335$ . Wykazują one ponadto, że przy określonych parametrach geometrycznych powłoki obecność żeber podłużnych nie zwiększa wartości ciśnienia krytycznego w porównaniu z powłokami nieusztywnionymi. Cenne badania modelowe nad wzmocnionymi powłokami walcowymi opisane są w pracy [6.13].

Duża seria badań doświadczalnych nad powłokami kulistymi o dużej krzywiznie, wzmocnionych żebrami promieniowymi i pierścieniowymi i obciążonych równomiernie rozłożonym ciśnieniem zewnętrznym, została przeprowadzona przez K. KLÖPPELA i O. JUNGBLUTHA [6.14]. Wreszcie H. EBNER [6.15] w oparciu o teorię klasyczną wyjaśnił zachowanie się tych modeli, które wybaczają się osiowo-symetrycznie. Jednakże pewna liczba modeli odkształca się asymetrycznie, przy czym utrata stateczności nastąpiła tylko w pobliżu brzegów.

Wszystkie cytowane wyżej prace teoretyczne były oparte na teorii klasycznej. Dopiero w ostatnich latach uczonej radzieckiej udało się z powodzeniem zastosować teorię nieliniową również i do analizy stateczności powłok wzmocnionych.

O. I. TIERIEBUSZKO [6.16] rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową zagadnienie utraty ogólnej stateczności ściskanej osiowo zamkniętej powłoki walcowej wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi. Przeprowadził on ponadto ciekawą analizę współpracy powłoki z żebrami. Ten sam autor rozwiązał również na podstawie teorii nieliniowej problem stateczności zamkniętej walcowej powłoki kolistej, ściskanej osiowo i usztywnionej żebrami podłużnymi i pierścieniowymi podając w zakończeniu pracy cenne wytyczne dla projektowania takich powłok [6.17].

A. B. KORDASZENKO [6.18] rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową problem stateczności powłoki o podwójnej krzywiznie, wzmocnionej żebrami.

Jeżeli żebra podłużne i poprzeczne wzmacniają powłokę rozłożone są bardzo «gęsto», to powłokę można uważać w przybliżeniu za ortotropową. W konsekwencji tego wyniki prac, traktujących o stateczności powłok ortotropowych, można przenieść na powłoki wzmocnione. A oto zestawienie najważniejszych prac z tej dziedziny w ujęciu geometrycznie liniowym.

1. S. N. KUKUDŻANOW [6.19] rozwiązał zagadnienie stateczności ortotropowej walcowej powłoki kolistej poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego poprzecznego i rozciągania osiowego oraz skręcania wraz z osiowym rozciąganiem.

2. W. M. DARIEWSKIJ i S. N. KUKUDŻANOW [6.20] rozwiązyli problem stateczności ortotropowej walcowej powłoki kolistej przy skręcaniu i ciśnieniu zewnętrznym poprzecznym.

Podobne zagadnienie rozpatrzył również W. W. SERDIUKOW [6.21].

3. E. I. GRIGOLUK [6.22] zbadał stateczność ortotropowych i wielowarstwowych powłok walcowych i stożkowych poddanych działaniu ściskania osiowego i zewnętrznego ciśnienia normalnego.

Pierwszym uczonym i jedynym do chwili obecnej, który rozwiązał zagadnienie stateczności powłok ortotropowych w ujęciu geometrycznie nieliniowym, jest O. N. LEŃKO. W pracy [6.23] określił on metodą Ritza wartość dolnego ciśnienia krytycznego dla ortotropowej walcowej łupiny kolistej ściskanej osiowo, w pracy zaś [6.24] rozwiązał zagadnienie ortotropowej walcowej powłoki kolistej, poddanej działaniu ściskania osiowego i zewnętrznego ciśnienia normalnego do powierzchni środkowej.

### 7. Stateczność statyczna powłok dwu- i trójwarstwowych

Z uwagi na bardzo obszerną, cytowaną w p. 1 pracę przeglądową Ł. M. KURSZA o stateczności powłok trójwarstwowych, ograniczymy się poniżej do zwięzłego omówienia jedynie najważniejszych publikacji traktujących o tym zagadnieniu.

Podobnie jak stateczność dynamiczna zagadnienie stateczności statycznej powłok wielowarstwowych przyciągnęło uwagę badaczy stosunkowo niedawno. W dotychczas opublikowanych pracach autorzy ograniczają się do analizy stateczności jedynie powłok dwu- lub trójwarstwowych zakładając, że grubość każdej warstwy jest stała oraz że warstwy nie mogą się ślizgać po sobie wzdłuż powierzchni ich styku.

Pierwszym, który przeprowadził badania stateczności dwuwarstwowych powłok walcowych i stożkowych, obciążonych równomiernie rozłożonym ciśnieniem zewnętrznym, był E. I. GRIGOLUK [7.1-7.2]. W oparciu o teorię nieliniową obliczył on wartości ciśnień krytycznych przyjmując jako powierzchnię odniesienia powierzchnię styku obu warstw. Rewizja tych analiz, w której powierzchnię odniesienia określono przez przyrównanie do zera momentu pierwszego stopnia modułów Younga materiałów obu warstw, została przedstawiona przez P. P. RADKOWSKIEGO [7.3-7.4]. Dla obliczenia ciśnień krytycznych zastosował on metodę Ritza opierając się jednak na teorii klasycznej. Niestety, do chwili obecnej nie przeprowadzono poważniejszych badań doświadczalnych nad statecznością powłok dwuwarstwowych. We wstępie do niniejszej pracy nadmieniono, że w przypadku jednowarstwowych, jednorodnych i izotropowych powłok teoria klasyczna daje wartości obciążeń krytycznych na ogół wyższe niż otrzymane z doświadczeń. Tymczasem w przypadku trójwarstwowych powłok walcowych kolistych z rdzeniami o małym module Kirchhoffa teoria klasyczna przewiduje wartości ciśnień krytycznych niemal zupełnie dokładnie. Badania teoretyczne nad statecznością powłok trójwarstwowych zapoczątkowała seria prac opublikowanych przez C. T. WANGA i współpracowników [7.5-7.9], w których rozwiązano problemy stateczności takich powłok przy ściskaniu osiowym, skręcaniu, zginaniu i równoczesnym zginaniu i ściskaniu osiowym. W pracy [7.10] C. T. WANG i D. F. SANTO rozwiązali problem sprężystej stateczności trójwarstwowej walcowej powłoki kolistej przy równoczesnym działaniu ściskania osiowego, skręcania i zginania. Zastosowali oni

metodę Bubnowa–Galerkina, wychodząc z uogólnionego równania różniczkowego ósmego rzędu, wyprowadzonego przez L. H. DONNELLA [7.11]. Stwierdzili oni, że np. dla przypadku ściskania osiowego ciśnienie krytyczne nie zależy od długości fali i wyraża się wzorem

$$\sigma_k = \frac{(h+t)G_c}{2t},$$

gdzie  $h$  oznacza grubość rdzenia,  $t$  grubość okładzin,  $G_c$  moduł Kirchhoffa dla rdzenia.

Wyniki badań doświadczalnych tych autorów nad statecznością powłok trójwarstwowych o okładzinach ze stopów aluminium i rdzeniach z porowatej acetylocelulozy potwierdzają słuszność podanego wyżej wzoru. W przypadku obciążeń złożonych autorzy sporządzili szereg krzywych we współrzędnych bezwymiarowych, z których można odczytać wartości obciążeń krytycznych. W Forest Products Laboratory przeprowadzono doświadczalne badania stateczności powłok trójwarstwowych o okładzinach ortotropowych. Potwierdziły one analizy teoretyczne wykonane w oparciu o teorię nieliniową dla ściskania osiowego [7.12], a w oparciu o teorię klasyczną dla przypadku skręcania [7.13] i równomiernie rozłożonego poprzecznego ciśnienia zewnętrznego [7.14]. W pracy [7.15] S. Y. LU i W. A. NASH rozwiązali na bazie teorii nieliniowej zagadnienie stateczności cienkiej powłoki walcowej wzmocnionej miękkim sprężystym rdzeniem, poddanej działaniu ściskania osiowego i zginania. Problemy stateczności powłok trójwarstwowych w ujęciu liniowym i nieliniowym rozwiązane zostały również w pracach [7.16-7.24].

#### 8. Stateczność statyczna powłok w zakresie sprężysto–plastycznym

Jakkolwiek dziedzinę niesprężystego wyboczenia powłok można by uznać za stosunkowo młodą, to jednak już w chwili obecnej obejmuje ona kilkadziesiąt prac. Szczegółowe omówienie prac opublikowanych do roku 1957 można znaleźć w rozprawie E. I. GRIGOLUKA [8.1], w związku z czym o badaniach z tego okresu podamy jedynie krótkie wzmianki.

Autorem pierwszej pracy dotyczącej niesprężystego wyboczenia powłok (1928 r.) był J. GECKELER [8.2]. Badał on ściskane powłoki walcowe. Podobne problemy rozważał nieco później W. KAUFMANN [8.3, 8.4]. Fundamentalnymi dla rozwoju teorii stateczności powłok w zakresie sprężysto–plastycznym były prace A. A. ILIUSZINA [8.5] i P. P. BIJLAARDA [8.6]. Opierają się one na teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych Hencky’ego–Iliuszina. Jakkolwiek na ogół uważa się, że teoria płynięcia plastycznego Prandtl’a–Reussa w ogólnym przypadku lepiej odpowiada zachowaniu się materiałów konstrukcyjnych, to jednak przy analizie stateczności płyt i powłok wielu badaczy stwierdziło lepszą zgodność z doświadczeniami teorii odkształceniowej niż teorii płynięcia plastycznego. Niektórzy autorzy (zwłaszcza E. I. GRIGOLUK) rozwiązywali

badane zagadnienia równoległe w oparciu o obie teorie nie tylko dla uzyskania szerszego poglądu na dane zagadnienie, lecz również w celu dostarczenia danych porównawczych eksperymentatorom.

Autorem największej liczby prac z dziedziny niesprężystego wyboczenia powłok jest E. I. GRIGOLUK. Z jego badań o charakterze ogólnym wymienimy — oprócz wspomnianej już pracy [8.1] — pracę [8.7], która w oparciu o teorię Prandtla–Reussa analizuje stateczność powłoki kolistej i walcowej w kilku najważniejszych przypadkach, dalej pracę [8.8] poświęconą wyprowadzeniu ogólnych równań dla powłok obrotowych w oparciu o obie teorie oraz [8.9] poruszającą problem wpływu ściśliwości materiału na obciążenie krytyczne powłok. Ta ostatnia praca poddaje krytyce metodę uwzględniania ściśliwości materiału, zaproponowaną przez G. GERARDA [8.10, 8.11]. Problem skończonych ugięć sprężysto–plastycznych po sprężystym wyboczeniu powłok sformułował M. F. JERSZOW [8.12].

Dużą ilość prac poświęcono powłokom walcowym przy różnych przypadkach obciążenia. Wspomniane już prace W. KAUFMANNA [8.3, 8.4] rozwinęli H. NEUBER i G. LANDGRAF [8.13]. Przypadek osiowego ściskania badali metodą energetyczną A. PUGSLEY i M. MACAULAY [8.14] oraz W. G. ZUBCZANINOW [8.15], a w ujęciu nieliniowym L. H. N. LEE [8.16], który rozwiązał problem w oparciu o obie teorie plastyczności oraz uzyskał potwierdzenie doświadczalne teorii płynięcia plastycznego. Przypadek ciśnienia radialnego lub wszechstronnego badali N. S. GANIJEW [8.17, 8.18], E. I. GRIGOLUK [8.19] przy uwzględnieniu ściśliwości materiału oraz M. E. LUNCHICK [8.20] przy uwzględnieniu uźebrowania. Przypadek skręcania badali w ujęciu nieliniowym L. H. LEE i C. S. ADES [8.21]. Prace G. GERARDA [8.22], S. RADHAKRISHNANA [8.23, 8.24] i E. I. GRIGOLUKA [8.25] obejmują przypadki ściskania osiowego, radialnego i skręcania oraz przypadki obciążeń złożonych.

Stateczność powłok stożkowych o zmiennej grubości w zakresie sprężysto–plastycznym badał A. W. SACZENKOW [8.26] stosując metodę Bubnowa–Galerkina.

Sporo uwagi poświęcono również sprężysto–plastycznej stateczności powłok wielowarstwowych. Ogólne równania dla powłok trójwarstwowych (sandwiczowych) o dowolnym kształcie sformułował E. I. GRIGOLUK w pracach [8.27 i 8.28], a dla powłok bimetalicznych w pracy [8.29] w oparciu o obie teorie plastyczności. Stateczności wielowarstwowych powłok walcowych poświęcone są prace N. S. GANIJEWA [8.30] (równomierne ciśnienie zewnętrzne), L. M. KURSZINA [8.31] oraz W. I. KOROLEWA, I. G. SMIRNOWA i R. P. STOMMY [8.32] (ściskanie osiowe).

Ogólnie biorąc należy podkreślić, że jakkolwiek przy analizie stateczności powłok obciążenie elementu odbiega zazwyczaj znacznie od obciążenia prostego i należałoby spodziewać się lepszej zgodności z doświadczeniami wyników otrzymanych na podstawie teorii Prandtla–Reussa niż Hencky’ego–Iliuszina, to jednak większość dotychczasowych wyników doświadczalnych potwierdza

raczej tę ostatnią. Problem ten niewątpliwie wymaga jeszcze ostatecznego wyjaśnienia.

### 9. Stateczność termiczna i wyboczenie pełzające powłok

Stosunkowo niedawno opublikowane prace umożliwiły obliczenie maksymalnej temperatury, do której można podgrzać walcową powłokę kolistą, zanim nastąpi utrata stateczności termicznej przy założeniu, że temperatura zmienia się tylko w kierunku obwodowym. S. Y. LU wykazał [9.1], że decydującym czynnikiem w tym przypadku jest obwodowy gradient temperatury. Stwierdził on jednocześnie, że maksymalna temperatura nie jest jedynym kryterium stateczności termicznej. Cytowana praca oparta jest na uogólnieniu liniowego równania różniczkowego 8 rzędu wyprowadzonego przez L. H. DONNELLA, przy czym LU do rozwiązania postawionego problemu stosuje metodę Bubnowa–Galerkina. Jednocześnie LU przeprowadził serię doświadczeń z powłokami mosiężnymi, poddanymi działaniu zmiennej wzdłuż obwodu temperatury i stwierdził, że wyniki pokrywają się niemal dokładnie z rezultatami jego analizy teoretycznej dla powłok, w których  $R/h > 500$ . Pewną modyfikację pracy LU, prowadzącą w przybliżeniu do tych samych wyników, przedstawili D. ABIR i S. V. NARDO [9.2]. Następnie ABIR i inni [9.3] rozpatrywali stateczność termiczną powłok stożkowych gładkich i usztywnionych żebrami. Te ostatnie były podgrzewane równomiernie, przy czym stwierdzono, że czas, po upływie którego następuje utrata stateczności, jest dłuższy, niż to przewiduje teoria klasyczna.

Cytowani autorzy wykazali następnie, że istnieje bardzo małe prawdopodobieństwo utraty stateczności termicznej przez nieusztywnioną powłokę stożkową, podgrzewaną osiowo–symetrycznie przy założeniu, że temperatura zmienia się tylko w kierunku osiowym.

Zagadnienie stateczności termicznej płyt i małowyniosłych powłok w ponaddzwiękowym strumieniu gazu zostało rozwiązane (w ujęciu liniowym i nieliniowym) przez W. W. BOŁOTINA [9.4]. Stateczność termiczną trójwarstwowej walcowej powłoki kolistej rozpatrzono w ujęciu liniowym w pracy [9.5]. Wreszcie J. SINGER [9.6] rozwiązał problem termicznej stateczności dla stożkowej powłoki kolistej przy założeniu osiowo–symetrycznego pola temperatur.

Jednym z bardzo ważnych zagadnień związanych z wpływem temperatury na zachowanie się różnych elementów konstrukcyjnych jest wyboczenie pełzające. Problem ten można również traktować odrębnie, ponieważ np. przy równomiernym nagrzaniu wpływ temperatury uwidacznia się tylko poprzez zmianę stałych materiałowych (zmniejszenie modułów pełzania). Z uwagi na duże trudności matematyczne związane z analizą izotropowej walcowej powłoki kolistej, narażonej na zginanie, udało się rozwiązać jedynie problem wyboczenia pełzającego dla trójwarstwowej powłoki walcowej w przypadku, gdy warstwy zewnętrzne poddane są działaniu obciążenia normalnego, warstwa wewnętrzna zaś pracuje na ścinanie. Jeżeli zastosować kubiczne prawo pełzania,

to można wyprowadzić równanie, opisujące zmianę kształtu przekroju poprzecznego w czasie długiej walcowej powłoki kolistej, poddanej działaniu równomiernego zewnętrznego ciśnienia poprzecznego. W pracy [9.7] N. J. HOFF, W. E. JAHSMAN i W. NACHBAR przedstawili pełne rozwiązanie podobnego problemu otrzymując ponadto zależność między czasem krytycznym a amplitudą początkowych ugięć. Praca E. SUNDSTRÖMA [9.8] uwzględnia obok ciśnienia poprzecznego również i ściskanie osiowe, jednakże rozwiązanie otrzymano w formie uwikłanej. Model powłoki trójwarstwowej łącznie z prawem dwuosiowego pełzania został niedawno wykorzystany przez F. W. FRENCHA i S. A. PATELA [9.9] dla analizy osiowo-symetrycznego wyboczenia pełzającego walcowej powłoki kolistej, ściskanej osiowo. W wyniku badań doświadczalnych przeprowadzonych przez E. E. MATHAUSERA i A. BERKOWITSA [9.10] autorzy ci podali półempiryczną metodę analizy wyboczenia pełzającego walcowych powłok kolistych, narażonych na czyste zginanie. W pracy [9.11] przedstawiono rozwiązania pewnych problemów wyboczenia pełzającego powłok (oraz płyt) ściskanych osiowo. G. LIANIS [9.12] w oparciu o twierdzenie wariacyjne Sandersa rozwiązał zagadnienie wyboczenia pełzającego otwartych rur cienkościennych przy skręcaniu zakładając nieograniczony wzrost kąta skręcania. Analiza wyboczenia pełzającego długich walcowych powłok kolistych pod działaniem wysokiej temperatury i ciśnienia zewnętrznego była przedmiotem pracy [9.13]. Ogólne równanie wariacyjne dla stateczności przy pełzaniu powłok (i płyt) w oparciu o teorię nieliniową wyprowadził I. G. TIERIEGUŁOW [9.14]. W pracy [9.15] rozwiązano zagadnienie utraty stateczności małowyniosłej powłoki kulistej z materiału lepkosprężystego (ujęcie nieliniowe).

#### 10. Stateczność dynamiczna powłok

Zagadnienie utraty stateczności powłok, poddanych działaniu obciążeń dynamicznych, wzbudziło zainteresowanie dopiero w ostatnich latach. Należy do niego sprawa stateczności powłok, poddanych działaniu obciążenia udarowego oraz problem stateczności drgań, wywołanych obciążeniem okresowo zmiennym.

W serii badań doświadczalnych opisanych w pracy [10.1] nieusztynione powłoki aluminiowe poddano obciążeniom dynamicznym w procesie uderzenia w kierunku osiowym masą o dużej prędkości początkowej. Badania te wykazały, że charakter utraty stateczności jest tutaj nieco odmienny niż w przypadku obciążeń statycznych, mianowicie że powierzchnia środkowa powłoki po utracie stateczności posiada wprawdzie wybrzuszenia w kształcie romboidalnym (jak w przypadku stateczności statycznej), jednakże rozciągają się one równomiernie na całą powierzchnię powłoki, przy czym długości wybrzuszeń maleją wraz ze wzrostem prędkości uderzenia. Ponadto energia pochłonięta w przypadku wyboczenia dynamicznego jest większa niż w przypadku wyboczenia statycznego.

Pierwsze badania teoretyczne nad statecznością dynamiczną powłok zarówno walcowych jak i kulistych przeprowadził W. W. BOŁOTIN [10.2 i 10.9]. Zastosował on teorię klasyczną do określenia dynamicznych obciążeń krytycznych dla ściskanej osiowo powłoki walcowej i dla powłoki kulistej, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego okresowo zmiennego ciśnienia radialnego. Dopiero stosunkowo niedawno W. Ł. AGAMIROW i A. S. WOLMIR [10.3] rozszerzyli i uzupełnili te badania stosując teorię nieliniową. WOLMIR [10.4] rozwiązał ponadto, również w oparciu o teorię nieliniową, problem stateczności dynamicznej małowyniosłej łupiny walcowej poddanej działaniu ciśnienia osiowego.

Nowoczesne ujęcie niektórych zagadnień stateczności powłok sprężystych, poddanych działaniu obciążeń dynamicznych, w oparciu o teorię nieliniową przy zastosowaniu metody Bubnowa–Galerkina i maszyn matematycznych przedstawione zostało w pracy [10.5].

J. C. YAO [10.5] rozwiązał problem stateczności dynamicznej dla walcowej powłoki kolistej poddanej ciśnieniu poprzecznemu. Zagadnieniu stateczności dynamicznej walcowej powłoki kolistej znajdującej się pod działaniem obciążenia ruchomego (rozwiązanie oparte jest na teorii klasycznej) poświęcona jest praca [10.7]. Wreszcie W. W. BOŁOTIN [10.8] rozwiązał zagadnienie nieustalonego flatteru małowyniosłych powłok (i płyt) w strumieniu gazu. Monografia [10.10] omawia również literaturę zagadnienia. Niestety, do chwili obecnej brak jest dostatecznej liczby badań doświadczalnych, aby potwierdzić słuszność tej czy innej teorii przyjętej w wyżej cytowanych pracach.

### 11. Statystyczne ujęcie teorii stateczności powłok

Przed kilku laty w Związku Radzieckim powstał nowy kierunek w teorii stateczności powłok, związany z zastosowaniem metod statystycznych. Pionierem na tym polu był W. M. BOŁOTIN [11.1], który badał wpływ «wstępnych niedoskonałości» kształtu na stateczność powłok rzeczywistych. Idea przewodnia jego pracy jest następująca. Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej powłok określa się za pomocą niewielkiej liczby niezależnych parametrów, przy czym początkowe wartości tych parametrów przyjmuje się jako wielkości losowe. Zakładając, że znana jest postać funkcji rozkładu dla tych wielkości oraz zależność od nich górnego obciążenia krytycznego, można określić prawo rozkładu prawdopodobieństwa dla samego obciążenia krytycznego. BOŁOTIN rozpatrzył konkretny przykład stateczności łupiny walcowej ściskanej wzdłuż tworzących. Scharakteryzował on «wstępne ugięcie» łupiny jednym parametrem (ugięciem środka łupiny), po czym przyjąwszy dla tego parametru normalne prawo rozkładu znalazł funkcję rozkładu dla górnego ciśnienia krytycznego. Można również, w ogólniejszym przypadku, określić prawdopodobieństwo wystąpienia tzw. «stanu niebezpiecznego» łupiny, przy czym przez to ostatnie rozumiemy albo utratę stateczności łupin, albo wystąpienie maksymalnych ugięć bez utraty stateczności. Tym sposobem możliwe jest uwzględnienie

nie nie tylko wstępnych niedoskonałości kształtu, lecz również i innych czynników, np. warunków brzegowych. I. I. WOROWICZ [11.2, 11.3], rozpatrzył inną stronę tego problemu przyjmując w charakterze wielkości przypadkowej obciążenie, któremu powłoka jako element konstrukcyjny poddana jest w okresie eksploatacji. I w tym przypadku można rozwiązać zagadnienie prawdopodobieństwa utraty stateczności powłoki. Cytowany badacz jest również autorem dwóch następnych prac, [11.4, 11.5], analizujących niektóre inne problemy nieliniowej teorii statystycznej wyboczenia powłok sprężystych. Wreszcie w 1962 r. ukazały się trzy prace W. M. GONCZARENKI, [11.6-11.8], które stanowią również poważny przyczynek do teorii statystycznego ujęcia problemów stateczności powłok sprężystych.

## 12. Prace polskie

Literatura polska z dziedziny stateczności powłok jest stosunkowo uboga. Przeważająca większość opublikowanych dotychczas prac oparta jest na teorii klasycznej. Oto najważniejsze pozycje, oparte na teorii liniowej. A. LISOWSKI [12.1] zbadał metodą różnic skończonych wyboczenie kopuł obrotowych pod działaniem ciężaru własnego i parcia poziomego. S. WIŚNIEWSKI [12.2] rozwiązał zagadnienie długiej, izotropowej walcowej powłoki kolistej poddanej działaniu ściskania osiowego i skręcania. W. NOWACKI [12.3] rozpatrzył problem stateczności walcowej łupiny kolistej o brzegach swobodnie podpartych i utwierdzonych, poddanej działaniu ściskania i ścinania. Ten sam autor wraz z Z. OLESIAKIEM [12.4] zbadał stateczność walcowej powłoki kolistej wzmocnionej żebrami.

Z. PARSZEWSKI [12.5, 12.6] rozwiązał ważne technicznie zagadnienie stateczności dla zamkniętej ortotropowej walcowej powłoki kolistej, o dużej i średniej długości, w przypadku skręcania. Z. NOWAK [12.7] określił wielkość górnego ciśnienia krytycznego dla powłoki walcowej o przekroju owalnym, zbliżonym do kołowego, ściskanej osiowo. M. ŻYCZKOWSKI [12.8] zastosował metodę uogólnionych szeregów potęgowych do określenia ilości półfal, odpowiadających minimum obciążenia przy promieniowym ściskaniu, a następnie określił minimalne ciśnienie i podał wzory na konieczną grubość powłoki w tym przypadku. J. LEYKO [12.9] rozwiązał metodą Galerkiną problem stateczności ściskanej ortotropowej powłoki stożkowej. K. BORSUK [12.10] badał niesymetryczne postacie wyboczenia powłoki walcowej o zmiennej grubości.

Pierwszą pracą polską, traktującą o stateczności walcowych powłok kolistych w ujęciu geometrycznie nieliniowym, jest praca S. WIŚNIEWSKIEGO [12.11] dotycząca ściskanej powłoki stożkowej. Praca [12.12] podaje wyniki doświadczalnego sprawdzenia teorii. J. LEYKO w pracy [12.13] rozwiązał zagadnienie stateczności walcowej łupiny kolistej o brzegach swobodnie podpartych, poddanej działaniu ścinania i ciśnienia zewnętrznego. Autor przyjął następującą



przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności

$$w(x, y) = f_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b},$$

gdzie  $a$ ,  $b$  oznaczają wymiary powłoki w kierunku tworzącej i obwodowym. Do rozwiązywania nieliniowych równań stateczności zastosował on metodę Bubnowa–Galerkina. To samo zagadnienie, ale przy uwzględnieniu «ugięć wstępnych», rozwiązał, również w ujęciu nieliniowym, A. JARECKI [12.14].

Wyboczenie pełzające łupiny walcowej badał Z. BYCHAWSKI, [12.15]. Rozwiązał on w ujęciu liniowym i nieliniowym problem osiowo ściskanej powłoki walcowej przy założeniu, że przy utracie stateczności tworzy się tylko jedna półfala zarówno w kierunku osiowym, jak i obwodowym.

Podstawy teoretyczne i wyniki dużej serii badań modelowych nad statecznością powłok cienkościennych podał w pracach [12.16–12.18] A. LISOWSKI.

#### Literatura cytowana w tekście

##### 1

- [1.1] A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, New York 1944 (pierwsze wyd. 1892).
- [1.2] L. H. DONNELL, *A new theory for the buckling of thin cylinder under axial compression and bending*, Trans. ASME 56 (1934), 795–806.
- [1.3] А.С. Вольмир, *Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 по 1957 г.*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», т. IV, Москва 1958, 451–475.
- [1.4] W. A. NASH, *Recent advances in the buckling of thin shells*, Appl. Mech. Rev. 3, 13 (1960).
- [1.5] М.О. Алумиае, *Линейные задачи теории статической стійкости и власных колебань тонких пружинных оболочек (огляд)*, Прикл. Механика I, 4 (1958), 3–18.
- [1.6] Л.М. Курцин, *Обзор по расчету трехслойных пластин и оболочек*, Сборник „Расчет пространственных конструкций”, т. VII, Москва 1962, 163–192.
- [1.7] G. GERARD, H. ВЕСКЕР, *Handbook of structural stability*, part III, buckling of curved plates and shells, NASA TN 3783, 1957.
- [1.8] G. GERARD, *Handbook of structural stability*, supplement to part III, Buckling of curved plates and shells, NASA TND 163, 1959.
- [1.9] K. GIRMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957 (tłum. z niem.).
- [1.10] А.С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат., Москва 1956.
- [1.11] Г.М. Мушгари, К.Э. Галимов, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигиздат, Казань 1957.
- [1.12] О.Д. Онияшвили, *Динамические задачи теории оболочек*, Изд. АН СССР, Москва 1957.
- [1.13] W. FLÜGGE, *Stresses in shells*, Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960.

##### 2

- [2.1] И.И. Воревич, *Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом*, Докл. АН СССР, I, 72 (1958).
- [2.2] М.А. Колтунов, *Учет конечных перемещений в задаче об изгибе и устойчивости пластинок и пологих оболочек*, Вестн. Моск. Госуд. Унив., 5, 1952.

- [2.3] F. I. N. NIORDSON, *On the linear theory of stability of thin elastic shells*, Byggnstat. Medd. 1, **32** (1961), 46-54.
- [2.4] В.В. Петров, *Дослідження напруженого стану пластин и пологих оболонок при скінченних прогибах методом послідовних навантажень*, Прикл. Механика, 4, **8** (1962), 352-358.
- [2.5] В.В. Болотин, *Нелинейная теория упругости и устойчивости «в большом»*, Сборник «Расчеты на прочность», т. 3, Москва 1958, 310-354.
- [2.6] И.И. Ворович, *О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек*, Прикл.Мат.Мех. 4, **20**, (1956), 449-474.
- [2.7] П.А.Алумнае, *Основные энергетические соотношения при деформации тонкостенных упругих оболочек*, Сборник «Исследования по вопросам устойчивости и прочности», Киев 1956, 70-74.

## 3.1

- [3.1] T. KÁRMÁN, H. S. TSIEN, *The buckling of thin cylindrical shells under axial compression*, J. Aero. Sci., 8, **8** (1941), 303-312.
- [3.2] H. F. MICHIELSEN, *The behavior of thin cylindrical shells after buckling under axial compression*, J. Aero. Sci., 12, **15** (1948), 738-744.
- [3.3] J. KEMPNER, *Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells*, J. Aero. Sci., 5, **21** (1954), 329-335.
- [3.4] L. KIRSTE, *Abwickelbare Verformung dünnwandiger Kreiszyylinder*, Öster. Ing.-Archiv, 2-3, **8** (1954).
- [3.5] L. H. DONNELL, C. C. WAN, *Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression*, J. Appl. Mech. 1, 1950.
- [3.6] С.В. Александровский, *Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах*, Сборник „Расчет пространственных конструкций“, т. III, Москва 1955, 453-492.
- [3.7] В.Д. Голицынская, *Устойчивость тонких замкнутых оболочек*, Труды Белорусск. Акад. **31** (1959), 75-82.
- [3.8] W. THIELEMANN, H. J. DREYER, *Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger axial gedrückter Kreiszyylinder*, Deutsche Versuchsanstalt Luftfahrt., Ber. 17, 1956.
- [3.9] H. WAGNER, *Die Stabilität der axial gedrückten Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke*, Oster. Ing.-Archiv 4, **13** (1960), 235-257.

## 3.2

- [3.10] Ф.С. Исанбаева, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, 7 (1955), 51-58.
- [3.11] W. A. NASH, *Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 4, **22** (1955).
- [3.12] L. H. DONNELL, *Effect of imperfections on buckling of thin cylinders under external pressure*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 569-575.
- [3.13] J. KEMPNER, K. A. V. PANDALAI, S. A. PATEL, J. CROUZET-PASCAL, *Postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 4, **24** (1957), 253-264.
- [3.14] E. WENK, R. C. SLANKARD, W. A. NASH, *Experimental analysis of the buckling of cylindrical shells subject to external hydrostatic pressure*, Proc. Soc. Exper. Stress Anal., 1, **12** (1954).
- [3.15] В.А. Нагаев, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при внешнем поперечном давлении*, Машиностроение, 6, (1958), 46-53.
- [3.16] W. A. NASH, *Buckling of thin cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 1, **19** (1954).
- [3.17] В.Е. Минеев, *Экспериментальное исследование влияния начальных неправильностей на устойчивость цилиндрических оболочек при всестороннем сжатии*, Труды ВВИА им. Жуковского, 1958.

## 3.3

- [3.18] T. LOO, *Effects of large deflections and imperfections on the elastic buckling of cylinders under torsion and axial compression*, Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME 1955, 345-357.
- [3.19] Н.И. Кривошеев, *Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении*, Изв. Казан. Фил. АН СССР, С. Физ.-Мат. и Техн. Наук, **10** (1956), 69-80.
- [3.20] W. A. NASH, *Buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to torsion*, J. Appl. Mech., **1**, **24** (1957).
- [3.21] W. A. NASH, *An experimental analysis of the buckling of initially imperfect cylindrical shell subject to torsion*, Proc. Soc. Exper. Stress Anal., **2**, **16** (1959), 55-68.
- [3.22] Y. YOSHIMURA, J. NIISAWA, *Lower buckling stress of circular cylindrical shells subjected to torsion*, J. Aero. Sci., **3**, **24** (1957).
- [3.23] H. LOO, H. CRATE, E. B. SCHWARTZ, *Buckling of thin-walled cylinders under axial compression and internal pressure*, NASA Rep. 1027.
- [3.24] Y. C. FUNG, E. E. SECHLER, *Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure*, J. Aero. Sci., **24** (1957), 351-356.
- [3.25] Л.Р. Исправников, *Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии и поперечном давлении*, Труды Харк.Выс.Авиац.Уч. **66**, 1957.
- [3.26] О.Н. Ленько, О.И. Теребушко, *Устойчивость гладких и подкрепленных круговых цилиндрических оболочек при совместном действии сжатия, поперечного давления и кручения*, Труды Рижского Выс. Авиац. Уч. 1958.
- [3.27] О.И. Теребушко, *Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении, внешнем давлении и сжатии*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», т. V, Москва 1959, 502-522.
- [3.28] В.М. Даревский, *Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии крутящих моментов и нормального давления*, Известия АН СССР, Отд.Техн.Наук, 1957/11.
- [3.29] Р.И. Кшнякин, *Влияние осевой растягивающей силы на устойчивость цилиндрических оболочек при кручении и при внешнем нормальном давлении*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, Оборонгиз., 55-71.
- [3.30] В.А. Марин, *Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и внутреннем давлении*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», т. V, Москва 1959, 475-484.
- [3.31] В.М. Даревский, *Оценка устойчивости цилиндрических оболочек, «средней длины»*, Тезисы докл. на совещании по теории упругости, Изд. АН СССР, 1954.
- [3.32] П.Г. Бурдин, *Исследование устойчивости цилиндрических оболочек при совместном действии изгиба и внешнего давления*, Автореф. Канд. Дисс. 1955.
- [3.33] В.М. Даревский, *Устойчивость консольной цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутреннем давлением*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, Оборонгиз, 72-94 и Сборник «Расчет пространственных конструкций» т. V, Москва 1959, 431-449.
- [3.34] В.М. Чебанов, *Исследование устойчивости тонкостенных оболочек при помощи моделей из бумаги*, Инжен.Сборник **22** (1955).
- [3.35] Л.Р. Исправников, *Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, кручении и поперечном давлении*, Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, вып. 535, 1955.
- [3.36] A. H. CORNELLUSSEN, R. T. SHIELD, *Finite deformation of elastic membranes with application to the stability of an inflater and extended tube*, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, **7** (1961).

## 4

- [4.1] K. FRIEDRICHS, *On the minimum buckling load for spherical shells*, Th. Kármán Anniv., V. 1, 1942.

- [4.2] М.И. Бабичева, *Об устойчивости сферических оболочек*, Канд. дисс., МГУ, 1950.
- [4.3] В.И. Феодосьев, *Устойчивость оболочек*, глава книги «*Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*», под ред. С.В. Пономарева, Машгиз, 1952.
- [4.4] В.И. Феодосьев, *Исследование устойчивости упругих систем «в большом»*, Труды конф. по расч. гибких пластин и оболочек, изд. ВВИА, им. Жуковского, 1952.
- [4.5] Н.М. Мушгари, Р.Г. Суркин, *О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия сферической оболочки*, Прикл.Мат.Мех., 6, 14 (1950).
- [4.6] Р.Г. Суркин, *К теории устойчивости и прочности сферических и эллипсоидальных днищ и мембран*, Канд. дисс. 1953.
- [4.7] В.И. Феодосьев, *Об устойчивости сферической оболочки*, Прикл.Мат.Мех., I, 18 (1954), 35-42.
- [4.8] Г.М. Мушгари, *К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления*, Прикл.Мат.Мех. 2, 19 (1955), 251-254.
- [4.9] V. MASUJA, Y. YOSHIMURA, *The buckling of spherical shells*, Proc. 2-nd Jap. Nat. Congr Appl. Mech., Tokyo 1953.
- [4.10] A. KARLAN, Y. C. FUNG, *A non-linear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells*, NASA TN 3212, 1954.
- [4.11] R. E. ARCHER, *Stability limits for a clamped spherical shell segment under uniform pressure*, Doct. diss., AMR, 11 (1958), rev. 2539.
- [4.12] E. L. REISS, H. J. GREENBERG, H. B. KELLER, *Non-linear deflections of shallow spherical shells*, J. Aero. Sci., 24 (1957).
- [4.13] E. L. REISS, *Axially symmetric buckling of shallow spherical shells under external pressure*, J. Appl. Mech., 25 (1958), 556-560.
- [4.14] Е.И. Григорюк, *Об асимметричном прощелкивании оболочек вращения*, Symp. Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft 1959.
- [4.15] L. H. DONNELL, *Shell theory*, Proc. 4-th Midwest Conf. on Solid Mech., Univ. of Texas, 1959.
- [4.16] W. Z. CHIEN, H. C. HU, *On the snapping of thin spherical cap*, 9-th Congr. Int. Mech. Appl., Bruxelles, vol. 6, 1956, 309-320.
- [4.17] D. G. AINWELL, *The behaviour of a thin shallow spherical cap with a central load*, Techn. Inf., Ministry of Supply, London, 1958/13.
- [4.18] F. J. MURRAY, E. W. WRIGHT, *The buckling of thin spherical shells*, J. Aerosp. Sci., 3, 28 (1961), 223-236.
- [4.19] Р.Г. Суркия, *Экспериментальное изучение устойчивости сферических оболочек*, Доклад на научной Сессии Казанского Фил. АН. СССР, 1957.
- [4.20] Г.А. Геньев, Н.С. Чаусов, *Экспериментальное исследование устойчивости металлических оболочек*, Сборник «Исслед. по вопросам строит. механики», Москва, Госстройиздат, 1956.
- [4.21] K. KLÖPPER, O. JUNGBLUTH, *Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger Kugelschalen*, Stahlbau 6, 22 (1953).
- [4.22] GUO ZHONG-HENG, *Problem of spherical membrane in the theory of large deformation*, Arch. Mech. Stos., 6, 14 (1962), 921-936.

- [5.1] A. PFLÜGER, *Stabilität dünner Kegelschalen*, Ing.-Archiv, 3, 8 (1937), 151-172.
- [5.2] Г.М. Мушгари, А.В. Саченков, *Устойчивость цилиндрических и конических оболочек кругового поперечного сечения при одностороннем действии осевого сжатия и внешнего давления*, Прикл.Мат. и Мех., 6, 18 (1954), 667-674.
- [5.3] C. E. TAYLOR, *Elastic stability of conical shells loaded by uniform external pressure*, Proc. 3-rd Midw. Conf. Solid Mech., Ann. Arbor 1957, 86-89.
- [5.4] N. J. HOFF, J. SINGER, *Buckling of conical shells under hydrostatic pressure*, Symp. on Theory of Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft 1959.

- [5.5] P. SEIDE, *Axisymmetrical buckling of circular cones under axial compression*, J. Appl. Mech. **23** (1956), 625-628.
- [5.6] А.В. Саченков, *Приближенное определение нижней границы критической нагрузки при продольном сжатии тонкой конической оболочки*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, **7** (1955).
- [5.7] WAN DUO, *O utracie stateczności przy skończonych ugięciach powłoki stożkowej pod działaniem równomiernego ciśnienia normalnego* (w jęz. chińskim), Harbin gongye daxue xuebao, **3/1958**, 135-143.
- [5.8] Р.К. Ряжет, *Критическая нагрузка конической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления*, Труды Таллинского Полит. Института, **65** (1955).
- [5.9] Р.К. Ряжет, *Равновесие тонкостенных упругих конических оболочек в послекритической стадии*, Труды Таллинского Полит. Института, **82** (1956).
- [5.10] И.И. Трапезин, *Устойчивость тонкостенной конической оболочки, замкнутой в вершине, нагруженной боковым гидростатическим давлением*, Сборник «Расчеты на прочность», **5** (1960), 249-258.
- [5.11] И.И. Трапезин, *Экспериментальное определение величин критических давлений для конических оболочек*, Сборник «Расчеты на прочность», **6** (1960), 217-230.
- [5.12] Л.М. Бунич, О.М. Палий, И.А. Писковитина, *Устойчивость усеченной конической оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления*, Инжен. Сборник **23** (1956), 89-93.
- [5.13] И.И. Трапезин, *Об устойчивости конической оболочки, находящейся под гидростатическим давлением*, Сборник «Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания», Москва 1955, 231-236.
- [5.14] А.В. Саченков, *Об устойчивости конических оболочек кругового сечения под действием равномерного внешнего давления*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, Сер. Физ.-Мат. и Техн. Наук. **12** (1958), 107-125.
- [5.15] J. SINGER, *Buckling of circular conical shells under axisymmetric external pressure*, Tech. Res. Develop. Found., Haifa 1960.
- [5.16] J. SINGER, *The effect of axial constraint on the instability of thin conical shells under external pressure*, Tech. Res. Develop. Found., Haifa 1961.
- [5.17] Н.А. Алумиае, *Асимптотическое интегрирование уравнений статической устойчивости конической оболочки вращения*, Прикл. Мат.-Мех. **1**, **21** (1957), 83-88.
- [5.18] W. D. JORDAN, *Buckling of thin conical shells under uniform external pressure*, Techn. Rep. Univ. Alabama 1955.

## 6

- [6.1] V. L. SALERNO, B. LEVINE, *Buckling of circular cylindrical shells with evenly spaced equal strength circular ring frames*, I and II, PIBAL Rep. 167 and 169, 1950.
- [6.2] V. L. SALERNO, B. LEVINE, J. G. PULOS, *Charts for the determination of the upper and lower limit of hydrostatic buckling pressures for reinforced circular cylindrical shells*, PIBAL Rep. 177, 1950.
- [6.3] V. L. SALERNO, B. LEVINE, *The determination of the hydrostatic buckling pressures for circular cylindrical shells reinforced with rings*, PIBAL Rep. 182, 1951.
- [6.4] Г.А. Алфутов, *Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечными ребрами жесткости и подвергающейся равномерному внешнему давлению*, Инжен. Сборник **23** (1956), 36-46.
- [6.5] S. KENDRICK, *The buckling under external pressure of circular cylindrical shells with evenly spaced equal strength circular ring frames*, part III, Naval Constr. Res. Establish., Great Britain, Rep. 244, 1953.
- [6.6] W. A. NASH, *Buckling of multiple — bay ring-reinforced cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Appl. Mech. **4**, **20** (1953), 469-474.

- [6.7] К.Д. Туркин. *Устойчивость подкрепленной круговой цилиндрической оболочки при сжатии и чистом изгибе*, Сборник „Расчет пространственных конструкций” 4 (1958), 477-498.
- [6.8] S. R. BODNER, *General instability of a ringstiffened circular cylindrical shell under hydrostatic pressure*, J. Appl. Mech., 2, 24 [1957].
- [6.9] И.Я. Амиро, *Дослідження стійкості ребристої циліндричної оболочкі при поздовжньому тиску*, Прикл. Мех. 3, 6 (1960), 272-281.
- [6.10] J. C. MCCOY, *An experimental investigation of the general instability of ring-stiffened, unpressurized, thin-walled cylinders under axial compression*, Doct. Diss., Calif. Inst. Technol., 1958.
- [6.11] P. SEIDE, *Compressive buckling of longitudinally stiffened circular cylinders*, Ramo-Walldridge Corp. Rep. No AM 6-11, 1956.
- [6.12] H. T. PONSFORD, *The effects of stiffeners on the buckling of cylinders with moderate wall thickness*, Doct. Diss., Calif. Inst. Technol., 1953.
- [6.13] L. A. HARRIS, H. S. SUER, W. T. SKENE, *Model investigations of unstiffened and stiffened circular shells*, Exper. Mech., 7, 1 (1961), 1-9.
- [6.14] K. KLÖPPPEL, O. JUNGLUTH, *Contribution to the problem of buckling in thin-walled spherical shells*, Stahlbau, 22 (1953), 121-130.
- [6.15] H. EBNER, *Näherungsweise Bestimmung der Tragfähigkeit radial Versteifter Kugelschalen unter Druckbelastung*, Symp. Theory of Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft 1959.
- [6.16] О.И. Теребушко, *Расчет несущей способности круговой цилиндрической панели подкрепленной ребрами*, Сборник «Расчет пространств. конструкций», 4 (1958), 531-554.
- [6.17] О.И. Теребушко, *К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических подкрепленных оболочек*, Сборник «Расчет пространств. конструкций», 7 (1962), 119-134.
- [6.18] А.В. Кордащенко, *Об устойчивости оболочек усиленных ребрами жесткости*, Изв. АН СССР, Механика и Машиностроение, 1962/1, 115-120.
- [6.19] С.Н. Кукуджанов, *Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при внешнем поперечном давлении с осевым растяжением и при кручении с осевым растяжением*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, 109-117.
- [6.20] В.М. Даревский, С.Н. Кукуджанов, *Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, 95-108.
- [6.21] В.В. Сердюков, *Устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек при некоторых нагрузках*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, 118-130.
- [6.22] Е.И. Григолюк, *Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», 3, Москва, 1955, 375-420.
- [6.23] О.Н. Ленько, *Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», 4, Москва 1958, 499-524.
- [6.24] О.Н. Ленько, *Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми силами и внешними давлением*, Сборник «Расчет пространственных конструкций» 5, Москва 1959, 523-536.

- [7.1] Э.И. Григолюк, *Прочность и устойчивость цилиндрических биметаллических оболочек*, Инжен. Сборник, 16 (1953), 119-148.
- [7.2] Э.И. Григолюк, *О потере устойчивости при больших прогибах замкнутой слоистой конической оболочки под действием равномерного нормального давления*, Инжен. Сборник, 22 (1955), 111-119.
- [7.3] P. P. RADKOWSKI, *Elastic stability of thin single- and multilayer conical and cylindrical shells subjected to external pressure*, AVCO Rep. 1957.
- [7.4] P. P. RADKOWSKI, *Buckling of thin single- and multilayer conical and cylindrical shells with rotationally symmetric stresses*, AVCO Rep. 1957.

- [7.5] F. K. TEICHMAN, CHI-TEH WANG, G. GERARD, *Buckling of sandwich cylinder under axial compression*, J. Aero. Sci., 18, [1951] 398-406.
- [7.6] G. GERARD, *Torsional instability of a long sandwich cylinder*, Proc. First Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, 1952, 391-394.
- [7.7] CHI-TEH WANG, D. P. SULLIVAN, *Buckling of sandwich cylinders under bending and combined bending and axial compression*, J. Aero. Sci., 19, (1952), 468-471.
- [7.8] F. K. TEICHMAN, CHI-TEH WANG, *Finite deflections of curved sandwich plates and sandwich cylinders*, Sherman M. Fairchild Fund Paper NEF-4, Institute of Aero. Sci., January 1951.
- [7.9] CHI-TEH WANG, G. V. RAO, *A study of an analogous model giving the non-linear characteristics in the buckling of sandwich cylinders*, J. Aero. Sci., 19, (1952), 93-94.
- [7.10] CHI-TEH WANG, R. J. VACCARO, D. F. SANTO, *Buckling of sandwich cylinders under combined compression, torsion and bending loads*, J. Appl. Mech., 3, 22 (1955).
- [7.11] L. H. DONNELL, *Stability of thin-walled tubes under torsion*, NACA Tech. Rep. 479, 1934.
- [7.12] H. W. MARCH, E. W. KUENZI, *Buckling of cylinders of sandwich construction in axial compression*, For. Prod. Lab. Bull. 1830, 1952.
- [7.13] H. W. MARCH, E. W. KUENZI, *Buckling of sandwich cylinders in torsion*, For. Prod. Lab. Bull. 1840, 1953.
- [7.14] M. E. RAVILLE, *Buckling of sandwich cylinders of finite length under uniform external lateral pressure*, For. Prod. Lab. Bull. 1844-B, 1955.
- [7.15] S. Y. LU, W. A. NASH, *Buckling of thin cylindrical shells stiffened by a soft elastic core*, Proc. Coll. «Simplified Calc. Meth. Shell Structures», Amsterdam 1962, 475-481.
- [7.16] Э. И. Григолюк, *К расчету на устойчивость биметаллических цилиндрических оболочек*, Инжен. Сборник, 23 (1956), 28-35.
- [7.17] G. GERARD, *Buckling of a sandwich cylinder under uniform axial compressive load*, J. Appl. Mech., 4, 18 (1951).
- [7.18] M. STEIN, J. MAYERS, *Compressive buckling of simply supported curved plates and cylinders of sandwich construction*, NACA Techn. Note 2601, 1952.
- [7.19] A. C. ERINGEN, *New numerical results of the theory of buckling of sandwich cylinders*, J. Appl. Mech., 3, 23 (1956), 476.
- [7.20] P. P. VIJLAARD, *Buckling of sandwich cylinders under combined compression, torsion and bending loads*, J. Appl. Mech., 1, 23, (1956), 157-158.
- [7.21] Л. М. Куршин, *Об устойчивости трехслойной пологой цилиндрической оболочки при сжатии*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 1958/6.
- [7.22] Т. Н. Вязькина, *К вопросу о кончных прогибах трехслойных оболочек*, Изв. АН СССР, Механ. и Машин., 1961/5, 135-141.
- [7.23] Т. Н. Вязькина, *Устойчивость трехслойной цилиндрической панели с легким заполнителем при продольном сжатии*, Изв. АН СССР, Механ. и Машин., 1962/4, 137-139.
- [7.24] С. Н. Кич, *Сплискость и вильчи коллизия круговых трехслойных цилиндрических оболочек*, Прикл. Мех. 2, 8 (1962), 120-132.

- [8.1] Э. И. Григолюк, *О вынужденном течении тонких оболочек за пределом упругости*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 10, 1957, 3-11.
- [8.2] J. GECKELER, *Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen in Schalen und Blechen*, ZAMM, 8 (1928), 341-352.
- [8.3] W. KAUFMANN, *Plastisches Knicken dünnwandiger Hohlzylindern infolge axialer Belastung*, Ing.-Archiv, 5, 6 (1935), 334-337.
- [8.4] W. KAUFMANN, *Bemerkungen zur Stabilität dünnwandiger kreiszylindrischer Schalen oberhalb der Proportionalitätsgrenze*, Ing.-Archiv, 6, 6 (1935), 419-430.

- [8.5] А.А. Ильюшин, *Устойчивость пластин и оболочек за пределами упругости*, Прикл. Мат. Мех., 5, 8 (1944).
- [8.6] P.P. VIJLAARD, *On the plastic stability of thin plates and shells*, Proc. Nederl. Akad. Wet., 7, 50 (1947), 765-775.
- [8.7] С.И. Григолюк, *Чистопластическая потеря устойчивости тонких оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 6, 21 (1957), 846-849.
- [8.8] Э.И. Григолюк, *Пластическое выпучивание оболочек вращения*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук 1958/2, 130-132.
- [8.9] Э.И. Григолюк, *Об учете сжимаемости материала при определении низших критических нагрузок*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук 1958/5, 104-105.
- [8.10] G. GERARD, *Plastic stability theory of thin shells*, J. Aero. Sci., 4, 24 (1957), 269-274.
- [8.11] G. GERARD, *Plastic stability theory of thin shells under external pressure*, Actes IX Congr. Mec. Appl., v. 6, Bruxelles 1957, 225-234.
- [8.12] М.Ф. Ершов, *Равновесие гнучных пружино-пластичных оболочек и пластин*, Прикл. Мех. 5, 8 (1962), 489-499.
- [8.13] H. NEUBER, G. LANDGRAF, *Plastische Knickung der Kreiszyinderschale*, Bauingenieur, 2, 34 (1959), 44-48.
- [8.14] A. PUGSLEY, M. MACAULEY, *The large-scale crumpling of thin cylindrical columns*, Q. J. Mech. Appl. Math., 1, 13 (1960), 1-9.
- [8.15] В.Г. Зубчанинов, *Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Изв. АН СССР, Мех. и Машин., 1961/5, 131-132.
- [8.16] L. H. N. LEE, *Inelastic buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to axial compression*, J. Aerosp. Sci., 1, 29 (1962), 87-95.
- [8.17] Н.С. Ганиев, *Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении*, Изв. Казанского Фил. АН СССР, Серия Физ.-Мат. и Техн. Н. 1955/7, 59-75.
- [8.18] Н.С. Ганиев, *Определение верхней границы критического всестороннего давления короткой цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Труды Казанского Хим.-Техн. Инст. 1955, вып. 19-20, 317-324.
- [8.19] Э.И. Григолюк, *О смятии цилиндрической трубы за пределом упругости*, Изв. Сибирского Отд. АН СССР, 1960/8, 24-28.
- [8.20] M. E. LUNSHICK, *Plastic axisymmetric buckling of ringstiffened cylindrical shells fabricated from strain-hardening materials and subjected to external hydrostatic pressure*, David W. Taylor Mod. Basin Rep. 1393, 1961.
- [8.21] L. H. LEE, C. S. ADES, *Plastic torsional buckling strength of cylinders including the effects of imperfections*, J. Aero. Sc., 4, 24 (1957), 241-248.
- [8.22] G. GERARD, *Compressive and torsional buckling of thin-walled cylinders in yield region*, NASA TN 3726, 1956.
- [8.23] S. RADHAKRISHNAN, *Plastic buckling of circular cylinders*, Aero. Sci., 9, 23 (1956), 892-894.
- [8.24] S. RADHAKRISHNAN, *Plastic buckling of cylindrical shells*, Aircraft Engineering, 31 (1959), 365-372.
- [8.25] Э.И. Григолюк, *Касательно-модульная нагрузка круговых цилиндрических оболочек при комбинированной нагрузке*, Вест. Моск. Унив., Серия Мат.-Мех. I, (1958), 53-54.
- [8.26] А.В. Саченков, *Об устойчивости оболочек за пределом упругости*, Изв. Казанск. Филиала АН СССР, Серия, Физ.-Мат. и Техн., 10 (1956), 81-100.
- [8.27] E. I. GRIGOLUK, *Buckling of sandwich constructions beyond the elastic limit*, J. Mech. Phys. Solids, 4, 6 (1958), 253-266.
- [8.28] Э.И. Григолюк, *Об устойчивости трехслойных оболочек и пластин за пределом упругости*, Изв. АН СССР, ОТН, 6, 1958, 68-72.
- [8.29] Э.И. Григолюк, *Устойчивость упруго-пластических неоднородных оболочек*, Докл. АН СССР, 4, 119 (1958), 663-666.



[8.30] Н.С. Ганиев, *Устойчивость биметаллической цилиндрической оболочки под действием равномерного внешнего давления за пределом упругости*, Труды Казанск. Хим.-Техн. Инст., вып. 22, 1957.

[8.31] Л.М. Куршин, *Устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Сборник «Вопросы расчета элементов авиационных конструкций», 2, Оборонгиз, 1959.

[8.32] В.И. Королев, И.Г. Смирнов, Р.П. Стомма, *Исследование устойчивости биметаллических цилиндрических оболочек при осевом сжатии за пределами упругости*, Инжен. Журнал 1, 2 (1962), 98-110.

## 9

[9.1] S. Y. LU, *Thermal stresses and thermal buckling of cylindrical shells*, Doct. Diss., Carnegie Inst. Techn., 1959.

[9.2] D. ABIR, S. V. NARDO, *Thermal buckling of circular cylindrical shells under circumferential gradients*, J. Aerosp. Sci., 26 (1959), 803-808.

[9.3] D. ABIR i inni. *Thermal buckling of circular cylindrical and conical thin-walled shells*, WADC Tech. Rep., 1958, 58-104.

[9.4] В.В. Болотин, *Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа*, Сборник «Расчеты на прочность» 6 (1960), 190-216.

[9.5] С.Н. Кан, *Термоупругость и устойчивость трехслойной круговой цилиндрической оболочки*, Сборник «Расчет простр. констр.» 7 (1962), 73-100.

[9.6] J. SINGER, *Buckling of thin circular conical shells subjected to axisymmetrical temperature distributions*, Bull. Res. Council Israel 9C, 1/2, 1961, 49-50.

[9.7] N. J. HOFF, W. E. JAHSMAN, W. NACHBAR, *A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell under uniform external pressure*, J. Aerosp. Sci., 26, 1959, 663-669.

[9.8] E. SUNDSTRÖM, *Creep buckling of cylindrical shells*, Trans. Roy. Inst. Technol. 115, Stockholm 1957.

[9.9] F. W. FRENCH, S. A. PATEL, *Creep buckling of cylindrical shells subjected to uniform axial compression*, PIBAL Rep. 489, Brooklyn 1959.

[9.10] E. E. MATHAUSER, A. BERKOVITS, *Determination of static strength and creep buckling of unstiffened circular cylinders subjected to bending and elevated temperatures*, NASA Memo. 6-14-59L, 1959.

[9.11] А.П. Кузнецов, Л.М. Куршин, *Решение некоторых задач устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести по теории упрочнения*, Журн. Прикл. Мех. и Техн. Физики 1960/4, 84-89.

[9.12] G. LIANIS, *Torsional creep buckling of thin-walled open tubes with a cross-section having an axis of symmetry*, J. Appl. Mech., 1, 29 (1962), 99-107.

[9.13] T. WAN, R. K. GREGORY, *Creep collapse of long cylindrical shells under high temperatures and external pressure*, J. Aerosp. Sci., 3, 28 (1961), 177-188.

[9.14] И.Г. Терегулов, *К вариационным методам решения задач установившейся ползучести пластин и оболочек в случае конечных перемещений*, Прикл. Мат. Мех. 3, 26 (1962), 735-739.

[9.15] E. TUNGL, *Durchschlagen einer flachen Kugelschale aus viskoelastischem Material*, Öster Ing.-Archiv 3, 16 (1962), 286-298.

## 10

[10.1] A. F. SCHMITT, *Dynamic buckling testes of aluminium shells*, Aero. Engng. Rev., 9, 15 (1956), 54-58.

[10.2] В.В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1956.

- [10.3] В.Л. Агамиров, А.С. Вольмир, *Поведение цилиндрических оболочек при динамическом приложении всестороннего давления или осевого сжатия*, Известия АН СССР, Мех. и Машин., 3, 1959, 78-83.
- [10.4] А.С. Вольмир, *Об устойчивости цилиндрических оболочек при динамическом нагружении*, Докл. АН СССР, 5, 123 (1958), 806.
- [10.5] J. C. Yao, *Stability of a cylinder under dynamic radial pressure*, ARS J., 12, 31 (1961), 1705-1708.
- [10.6] В.В. Болотин, Г.А. Бойченко, *Исследование прощелкивания тонких упругих оболочек под действием динамических нагрузок*, Сборник «Расчеты на прочность» 5 (1960), 259-272.
- [10.7] В.Л. Присекин, *Устойчивость цилиндрической оболочки под действием движущейся нагрузки*, Изв. АН СССР, Мех. и Машин. 1961/5, 133-134.
- [10.8] В.В. Болотин, *Нестационарный флаттер пластин и пологих оболочек в потоке газа*, Изв. АН СССР, Механика и Маш. 1962/3, 106-113.
- [10.9] В.В. Болотин, *Устойчивость тонкостенной сферической оболочки при действии периодического давления*, Сборник «Расчеты на прочность» 2 (1958), 284-289.
- [10.10] В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Г.И.Ф. М.Л., Москва 1961.

## 11

- [11.1] В.В. Болотин, *Статистические методы в нелинейной теории оболочек*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 1958/3.
- [11.2] И.И. Ворovich, *О статистическом методе в задачах устойчивости оболочек; оценка точности приближенных решений нелинейной теории оболочек прямыми методами*, Доклады на конф. по теории оболочек, Тарту 1957.
- [11.3] И.И. Ворovich, *О существовании решений в нелинейной теории оболочек*, Докл. АН СССР, 2, 117 (1957).
- [11.4] И.И. Ворovich, *Статистический метод в теории устойчивости оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 5, 23 (1959), 885-892.
- [11.5] И.И. Ворovich, *Некоторые асимптотические соотношения в статистической теории устойчивости оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 4, 26 (1962), 735-739.
- [11.6] В.М. Гончаренко, *К определению вероятности потери устойчивости оболочкой*, Изв. АН СССР, Мех. и Маш. 1962/1, 159-160.
- [11.7] В.М. Гончаренко, *Исследование вероятности хлопка удлиненной цилиндрической панели под действием случайного давления*, Прикл. Мат. Мех. 4, 26 (1962), 740-744.
- [11.8] В.М. Гончаренко, *Применение марковских процессов в статической теории устойчивости оболочек*, Украин. Мат. Журнал, 2, 14 (1962).

## 12

- [12.1] A. LISOWSKI, *Wyboczenie kół obrotowych*, Arch. Mech. Stos., 4 (1952), 1-22
- [12.2] S. WIŚNIEWSKI, *Utrata stateczności powłoki cylindrycznej, poddanej jednocześnie skręcaniu i ścisłaniu*, Arch. Bud. Maszyn, 4, 3 (1956), 437-469.
- [12.3] W. NOWACKI, *Z zagadnień stateczności powłoki walcowej*, Arch. Mech. Stos., 4, 8 (1956), 705-724.
- [12.4] W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Stateczność powłoki walcowej wzmocnionej żebrami*, Rozpr. Inżyn., 1, 4 (1956), 5-22.
- [12.5] Z. PARSEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powłoki ortotropowej o dużej długości*, Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej, Mechanika 2 (1954), 3-28.
- [12.6] Z. PARSEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powłoki ortotropowej o skończonej długości*, Arch. Mech. Stos., 3, 7 (1955), 375-402.
- [12.7] Z. NOWAK, *Wpływ owalizacji przekroju poprzecznego powłoki walcowej na wielkość górnego ciśnienia krytycznego*, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, Mechanika, Kraków 1962.

[12.8] M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie stateczności powłok walcowych metodą uogólnionych szeregów potęgowych* (w druku).

[12.9] J. LEYKO, *Stateczność ortotropowej powłoki o postaci wycinka stożkowego, ściskanej wzdłuż tworzących*, Arch. Bud. Maszyn, 4, 8 (1961), 447-460.

[12.10] K. BORSUK, *Non-symmetric buckling of circular cylindrical shells with variable thickness*, Proc. Coll. «Simplified Calc. Methods of Shell Structures», North-Holland, Amsterdam 1962, 469-474.

[12.11] S. WIŚNIEWSKI, *Nieliniowe zagadnienie dotyczące ugięć powłoki o postaci stożka ściętego, ściskanej silami równomiernie rozłożonymi na brzegach*, Arch. Bud. Maszyn, 4, 6 (1959).

[12.12] S. WIŚNIEWSKI, *Badania dużych ugięć powłoki o postaci stożka ściętego, ściskanej silami równomiernie rozłożonymi na brzegach*, Arch. Bud. Maszyn, 1, 8 (1961), 73-79.

[12.13] J. LEYKO, *Nieliniowe zagadnienie równowagi powłoki o postaci wycinka walcowego, poddanej ścinaniu i obciążeniu normalnemu do jej powierzchni*, Arch. Bud. Maszyn, 2, 7 (1960), 199-211.

[12.14] A. JARECKI, *Powłoka walcowa, wykazująca odstępstwa od idealnego kształtu, poddana ścinaniu i obciążeniu normalnemu*, Arch. Bud. Maszyn, 1, 9 (1962), 113-122.

[12.15] Z. BYCHAWSKI, *Investigation of creep buckling of a cylindrical sheet panel in the range of small and large deflections*, Proc. World Conf. Shell Structures, S. Francisco 1962.

[12.16] A. LISOWSKI, *Określenie postaci wybożenia powłok cienkościennych*, Inżyn. Budown., 1, 13 (1956), 22-29.

[12.17] A. LISOWSKI, *Wybożenie kopuł kulistych w świetle badań modelowych*, Rozpr. Inżyn., 1, 5 (1957), 97-116.

#### Резюме

#### ОБЗОР НОВЕЙШИХ РАБОТ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В работе проведена систематика и дано обсуждение более 200 публикаций из различных областей устойчивости оболочек. Особое внимание уделено анализу устойчивости оболочек в нелинейной постановке и в п. 2 приведены соответствующие основные уравнения.

В остальных пунктах работы рассмотрены следующие вопросы: (3) — статическая устойчивость цилиндрических оболочек в упругой области, (4) — устойчивость сферических оболочек, (5) — устойчивость конических оболочек, (6) — устойчивость усиленных и анизотропных оболочек, (7) — устойчивость двух- и трехслойных оболочек, (8) — устойчивость оболочек в упругопластической области, (9) — потеря устойчивости от изменения температуры и устойчивость с учетом ползучести, (10) — динамическая устойчивость оболочек, (11) — статистический метод в теории устойчивости оболочек.

В последнем пункте (12) дается краткий обзор польских работ по устойчивости оболочек.

#### Summary

#### RECENT ACHIEVEMENTS IN THE FIELD OF STABILITY OF THIN-WALLED SHELLS

More than 200 publications on various problems of shell stability are discussed and systematized. Particular attention is paid to the non-linear approach to the shell stability, and the corresponding fundamental equations are given in Sec. 2.

The following problems are discussed in the subsequent sections of the paper: (3) — static stability of cylindrical shells; (4) — stability of spherical shells; (5) — stability of conical shells;

(6) — stability of reinforced and anisotropic shells; (7) — stability of layered shells; (8) — stability of shells in plastic domain; (9) — thermal stability and creep buckling; (10) — dynamical stability of shells; (11) — statistical approach to the theory of stability of shells.

Sec. (12) contains a short review of Polish papers dealing with the problems of stability of shells.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1963 r.*

---

## NAPRĘŻENIA CIEPLNE W CIAŁACH LEPKOSPĘŻYSTYCH

ELI STERNBERG (PROVIDENCE)

### 1. Wstęp

Wiele przyczyn technicznych złożyło się w ostatnich latach na wzrost zainteresowania zagadnieniami naprężeń i odkształceń w ciałach lepkospężystych. Praca nasza, poświęcona wyłącznie ciałom, które wykazują przy warunkach izotermicznych i dla odkształceń infinitezymalnych własności liniowej lepkospężystości, ma służyć dwom zadaniom. Po pierwsze, zamierzamy podać w niej systematyczny przegląd ostatnich wyników w tej dziedzinie, a po drugie — zapoznać Czytelnika z zagadnieniami szczegółowymi i z literaturą przedmiotu.

Opracowanie nasze ogranicza się głównie do analizy quasi-statycznych naprężeń cieplnych w ciałach jednorodnych, izotropowych i wykazujących lepkospężystość liniową. Zagadnienia dotyczące ciał niejednorodnych i anizotropowych, wpływu sił bezwładności i sprzężenia termo-mechanicznego są jedynie wymienione przy końcu pracy (p. 7).

W pierwszej części pracy (p. 2, 3 i 4) omawiamy teorię termo-lepkospężystości przy założeniu, że mechaniczne własności materiału nie zależą od temperatury. Ponieważ prędkość zachodzenia procesów lepkospężystych jest bardzo wrażliwa na zmiany temperatury, założenie to jest dalekie od rzeczywistości fizycznej. Mimo to teoria materiałów o własnościach niezależnych od temperatury może być użyteczna jako wstęp do bardziej realistycznego potraktowania zagadnienia, tym bardziej że przy tych założeniach otrzymano wiele rozwiązań szczególnych.

Następna część pracy (p. 5 i 6) dotyczy ciał lepkospężystych o własnościach zależnych od temperatury, przy czym szczególny nacisk położono na teorię materiałów o prostych własnościach termo-reologicznych. Teoria ta opiera się na hipotezie, że równomierna zmiana temperatury całego ciała wpływa na zmianę jego własności mechanicznych powodując tylko równomierne zniekształcenie skali czasu. Należy zaznaczyć, że szczupłość miejsca poświęconego tu wpływowi własności mechanicznych zależnych od temperatury nie oznacza, że wpływ ten ma niewielkie znaczenie, lecz że zagadnienie jest bardziej złożone.

Mimo że w naszych rozważaniach dużo uwagi poświęcamy związkowi różniczkowemu pomiędzy naprężeniami i odkształceniami, stwierdzić należy, że

ogólniejsza od nich całkowita postać tych związków jest odpowiedniejsza w zastosowaniu do ciał o ciągłym widmie czasów relaksacji lub opóźnienia. Można to uzasadnić dobrze znanym faktem, że modele skończone, podlegające operatorowym prawom różniczkowym (pomimo ich wartości poznawczej i tradycyjnej popularności), nie dają ściślej podstawy do opisanie i przewidywania zachowania się rzeczywistego ciała lepkosprężystego w znacznym przedziale czasu lub częstości. Brak ten jest jeszcze bardziej widoczny dla modeli zależnych od temperatury.

Rozważania nasze dotyczące teorii termo-lepkosprężystości opierają się w dużym stopniu na wynikach otrzymanych we wcześniejszej pracy [1], dotyczącej teorii izotermicznej. W szczególności szerokie wykorzystanie własności splotu Stieltjesa, o których była mowa w pracy [1], ułatwia operowanie funkcjami nieciągłymi w czasie. W pracy [1] podkreśliliśmy, że algebra i rachunek splotu stanowią najwłaściwsze narzędzie matematyczne w przypadku teorii liniowej lepkosprężystości. Natomiast nadmierne poleganie na transformacjach całkowych powoduje czasami zaciemnienie odnośnych rozważań.

Wydaje się, że pewne podane w pracy wyniki teoretyczne, mimo że posiadają charakter elementarny, nie są jeszcze znane. W tym sensie praca nasza ma charakter pracy nie tylko przeglądowej.

## 2. Mechaniczne własności niezależne od temperatury. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

W przypadku braku efektów sprzężenia termo-mechanicznego podstawowy układ równań teorii pola, rządzących teorią quasi-statystycznych liniowych ciał lepkosprężystych, sprowadza się do zlinearyzowanych związków pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami, do naprężeniowych równań równowagi i do odpowiednich liniowych praw dziedziczenia. Odniesiemy nasz układ równań do kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych  $x_i$  i zastosujemy zwykłą notację wskaźnikową<sup>1</sup>.

Niech  $u_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  będą wartościami składowych przemieszczenia, infinitezymalnego odkształcenia oraz naprężenia w punkcie o promieniu wodzącym  $\mathbf{x}$  w chwili  $t$ . Wtedy *związki pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami* przyjmują postać

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

natomiast *równania równowagi* mają postać następującą:

$$(2.2) \quad \sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad \sigma_{ji} = \sigma_{ij},$$

przy czym  $F_i$  są składowymi sił masowych.

<sup>1</sup> O ile nie będzie to osobno zaznaczone, wskaźniki łacińskie będą przybierać wartości 1, 2 i 3; stosujemy konwencję sumacyjną względem powtarzających się indeksów, a przecinek poprzedzający indeks oznacza różniczkowanie cząstkowe względem odpowiedniej współrzędnej układu kartezjańskiego.

W celu uproszczenia równań stanu lepkospężystych ciał izotropowych wprowadzimy składowe dewiatora odkształcenia i naprężenia

$$(2.3) \quad \begin{aligned} e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \end{aligned}$$

gdzie  $\delta_{ij}$  jest symbolem Kroneckera. Następnie przez  $T(\mathbf{x}, t)$  oznaczymy lokalną chwilową temperaturę, a przez  $T_0$  dowolnie przyjętą temperaturą odniesienia. Funkcję  $\Theta$  zdefiniowaną związkiem

$$(2.4) \quad \Theta = T - T_0,$$

będziemy nazywali historią pola temperatury. Wreszcie przez  $\alpha$  oznaczymy współczynnik rozszerzalności cieplnej zakładając, że jest on stały. Jeżeli  $\alpha$  będzie funkcją temperatury, to wszystkie poprzednie rozważania ulegną zupełnie elementarnemu uogólnieniu: należy wtedy po prostu  $\alpha$  zastąpić przez  $\alpha_0 = \alpha(T_0)$ , a związek (2.4) przez zależność

$$(2.5) \quad \Theta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{T_0}^{T(\mathbf{x}, t)} \alpha(T') dT'.$$

Odpowiednie liniowe, izotropowe związki dziedziczenia pomiędzy odkształceniami i naprężeniami w postaci całkowego prawa relaksacji przybiorą następującą postać:

$$(2.6) \quad s_{ij} = e_{ij} * dG_1, \quad \sigma_{kk} = (\varepsilon_{kk} - 3\alpha\Theta) * dG_2.$$

Tutaj  $G_1$  i  $G_2$  oznaczają odpowiednie moduły relaksacji dla ściskania izotropowego. Moduły te są obecnie wyłącznie funkcjami czasu, ponieważ ograniczamy się do ciał jednorodnych i zakładamy, że własności mechaniczne materiału nie zależą od temperatury.

Zapisując związki (2.6) zastosowaliśmy skrócony zapis splotu Stieltjesa, wprowadzony uprzednio w pracy [1] w związku z teorią izotermiczną. A więc jeżeli  $f$  i  $g$  są funkcjami położenia i czasu, to  $\omega = f * dg$  będzie funkcją zdefiniowaną przez całkę Stieltjesa

$$(2.7) \quad \omega(\mathbf{x}, t) = [f * dg](\mathbf{x}, t) = \int_{t'=-\infty}^t f(\mathbf{x}, t-t') dg(\mathbf{x}, t')$$

pod warunkiem, że całka ta ma sens.

Zauważmy, że zgodnie ze związkami (2.6) tensor naprężenia w każdej ustalonej chwili jest liniowym, ciągłym i izotropowym funkcjonalem całej poprzedzającej lokalnej historii temperatury i odkształcenia; co więcej, odwzorowanie historii temperatury i odkształcenia na stowarzyszoną historię naprężenia jest niezmiennikiem względem przesunięcia skali czasu oraz posiada tę własność, że naprężenia spowodowane swobodnym rozszerzeniem termicznym znikają

tożsamościowo. Można wykazać<sup>2</sup> (przy odpowiednich założeniach o regularności), że (2.6) jest najogólniejszym związkiem pomiędzy odkształceniami i naprężeniami spełniającymi powyższe wymagania.

Równania pola (2.1), (2.2) i (2.6) muszą być spełnione w czaso-przestrzeni<sup>3</sup>  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ , to znaczy dla wszystkich  $(\mathbf{x}, t)$  takich, że  $\mathbf{x}$  należy do otwartego obszaru  $\mathcal{R}$  wypełniającego wnętrze ciała, a  $t$  leży w przedziale  $(-\infty, \infty)$ . Bez zasadniczego zmniejszenia ogólności możemy na powyższe równania pola nałożyć warunek, aby ciało znajdowało się pierwotnie w stanie niezaburzonem w sensie *warunków początkowych*:

$$(2.8) \quad u_i = \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} = F_i = \Theta = 0 \quad \text{dla } R \times (-\infty, 0),$$

gdzie  $R$  jest domknięciem  $\mathcal{R}$ , to znaczy obszarem  $\mathcal{R}$  wraz z jego brzegiem. Wreszcie w przypadku zagadnienia z mieszanymi warunkami brzegowymi mamy następujące *warunki brzegowe*:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u_i &= u_i^b \quad \text{na } B_1 \times (-\infty, \infty), \\ S_i &= \sigma_{ij} n_j = S_i^b \quad \text{na } B_2 \times (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Tutaj  $B_1$  i  $B_2$  są dopełniającymi podzbiorami brzegu  $B$  obszaru  $\mathcal{R}$ ,  $n_i$  jest zewnętrzną jednostkową normalną do  $B$ , natomiast  $u_i^b$  i  $S_i^b$  są odpowiednio danymi przemieszczeniami i naprężeniami powierzchniowymi.

W braku wyraźnego stwierdzenia że jest inaczej, będziemy odtąd zakładać, że zbiory punktów  $R$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  nie zależą od czasu. Będziemy także przyjmować, że  $R$  jest ograniczonym regularnym obszarem przestrzeni<sup>4</sup> oraz że  $B_1$  i  $B_2$  są całkowalne.

Tak więc rozważany problem polega na wyznaczeniu funkcji  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ , które dla danych  $R$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , znanych  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $a$  i danych  $F_i$ ,  $\Theta$ ,  $u_i^b$ ,  $S_i^b$  spełniają równania pola (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) w  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$  oraz ponadto — warunki początkowe (2.8) i warunki brzegowe (2.9). Historię pola temperatury  $\Theta$  można w szczególności określić jako rozwiązanie niezależnego zagadnienia przewodnictwa cieplnego.

Wprowadzimy następującą definicję stanu *lepkosprężystego*. Mówimy, że *uporządkowany układ wielkości  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  należy do klasy stanów lepkosprężystych na  $R \times (-\infty, \infty)$ , odpowiadających danym  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $a$ ,  $F_i$ ,  $\Theta$  i zapisujemy*

$$(2.10) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V} [G_1, G_2, a, F_i, \Theta] \quad \text{na } R \times (-\infty, \infty),$$

*jeżeli*

a)  $G_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ) *znika na  $(-\infty, 0)$ , jest dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły na  $[0, \infty)$ , oraz  $G_\beta(0) > 0$ ;*

<sup>2</sup> Por. [1] p. 2, gdzie przedstawiono odpowiednie wyniki w przypadku teorii izotermicznej.

<sup>3</sup> Kartezjański iloczyn zbioru  $A$  i zbioru  $B$  będziemy oznaczać w sposób konwencjonalny  $A \times B$ .

<sup>4</sup> Przez «regularny obszar przestrzeni» rozumiemy obszar, którego brzeg składa się ze skończonej liczby nie przecinających się zamkniętych powierzchni regularnych; z kolei ten termin użyty jest w sensie podanym przez Kellogga [2].



b)  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, F_i, \Theta$  znikają na  $R \times (-\infty, 0)$  i są ciągłe na  $R \times [0, \infty)$ .  $\Theta$  jest jednokrotnie, a  $u_j$  — trzykrotnie różniczkowalne w sposób ciągły na  $R \times [0, \infty)$ ;

c) równania (2.1), (2.2) (2.3), (2.6) są spełnione w  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ . Jeżeli w szczególności  $\Theta = 0$  na  $R \times (-\infty, \infty)$ , to mówimy, że stan  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  jest izotermiczny i piszemy

$$(2.11) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V}_I [G_1, G_2, F_0] \text{ na } R \times (-\infty, \infty).$$

Postulaty a), b), c), choć częściowo się pokrywają, to są jednak niesprzeczne. Również założenia dotyczące gładkości, zawarte w a), b), mogą być osłabione (szczególnie gdy dotyczy to zależności od czasu) kosztem bardziej wypracowanych hipotez regularności. Jednak takie ulepszenia wymagałyby wprowadzenia w dalszych twierdzeniach dodatkowych założeń ubocznych dotyczących gładkości, które odwiodyłyby nas jednak od głównego celu naszej pracy.

Należy podkreślić, że funkcje występujące w poprzedniej definicji stanu lepkospężystego mogą wykazywać nieciągłości o skończonym skoku w punkcie  $t = 0$ . Chociaż tego rodzaju osobliwości są fizycznie nierealne, szczególnie w kontekście teorii quasi-statycznej, to — dzięki zasadzie Duhamela — grają one ważną rolę w teorii całkowania podstawowych równań pola. Jedną z korzyści wynikających ze sformułowania równań stanu (2.6) w postaci splotu Stieltjesa jest możliwość systematycznego rozpatrzenia wspomnianych nieciągłości i uniknięcia zwykłych, czysto formalnych manipulacji z funkcją delta Diraca.

Jeżeli równanie (2.10) jest spełnione, to związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami przedstawić można w sposób konwencjonalny za pomocą całki Riemanna (por. [1], twierdzenie 3.4) ważnej dla  $(\mathbf{x}, t)$  z obszaru  $R \times [0, \infty)$

$$(2.12) \quad \begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{x}, t) &= G_1(t) \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}) + \int_0^t G_1(t-t') \dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}, t') dt', \\ \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) &= G_2(t) [\overset{\circ}{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x}) - 3\alpha \overset{\circ}{\Theta}(\mathbf{x})] + \int_0^t G_2(t-t') [\dot{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x}, t') - 3\alpha \dot{\Theta}(\mathbf{x}, t')] dt'. \end{aligned}$$

Zarówno tu jak i w dalszym ciągu pracy  $\dot{f}$  oznacza pierwszą pochodną czasową funkcji miejsca i czasu  $f$ , natomiast

$$(2.13) \quad \overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, 0).$$

Rozpatrzmy teraz przypadek ciała sprężystego. W tym celu zdefiniujemy jednostkową funkcję Heaviside'a  $h(t)$  w sposób następujący

$$(2.14) \quad \begin{aligned} h(t) &= 0 \quad \text{dla} \quad -\infty < t < 0, \\ h(t) &= 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Ze związków (2.12) wynika natychmiast, że gdy przyjmiemy

$$(2.15) \quad G_1 = 2\mu h, \quad G_2 = 3Kh,$$

gdzie  $\mu$  i  $K$  są stałymi, to związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.6) przyjmą postać

$$(2.16) \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha\Theta).$$

Uwzględniając (2.3) widzimy, że równania (2.16) są równoważne prawu Hooke'a (uzupełnionemu członami termicznymi),  $\mu$  jest modułem odkształcenia postaciowego, a  $K$  modułem rozszerzalności objętościowej materiału sprężystego. Powyższa uwaga wskazuje na to, że klasyczna, *quasi-statyczna* teoria sprężystości jest przypadkiem szczególnym rozpatrywanej tu termo-lepkosprężystości. Podamy następującą definicję *quasi-statycznego stanu sprężystego*. Jeżeli warunek (2.10) jest spełniony, a funkcje relaksacji spełniają związki (2.15), przy czym  $\mu$  oraz  $K$  są stałymi (dodatnimi), to mówimy, że układ  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  należy do klasy *quasi-statycznych stanów sprężystych* na  $R \times (-\infty, \infty)$  odpowiadających danym  $\mu, K, \alpha, F_i, \Theta$  i piszemy

$$(2.17) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{C} [\mu, K, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty).$$

Z powyższej definicji jasno wynika, że quasi-statyczny stan sprężysty, który nie znika tożsamościowo na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ , nie może być niezależny od czasu w całej rozważanej czasoprzestrzeni. Z (2.17) wynika natomiast, że  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  muszą spełniać warunki początkowe (2.8). Ponieważ będziemy mieli do czynienia również z rozwiązaniami podstawowych równań pola termosprężystego, zależnymi tylko od miejsca, wygodne będzie wprowadzenie pojęcia *stacjonarnego (ustalonego) stanu sprężystego*. Mówimy, że  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  należy do klasy *stacjonarnych stanów sprężystych* na  $R$ , odpowiadających danym  $\mu, K, \alpha, F_i, \Theta$  i zapisujemy

$$(2.18) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{C} [\mu, K, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad R$$

gdy:

- a)  $\mu$  i  $K$  są stałymi (niekoniecznie rzeczywistymi),
- b)  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, F_i, \Theta$  są funkcjami miejsca ciągłymi na  $R$ , przy czym  $\Theta$  jest jednokrotnie, a  $u_i$  — trzykrotnie różniczkowalne w sposób ciągły na  $R$ ,
- c) równania (2.1), (2.2), (2.3), (2.16) są spełnione w  $\mathcal{R}$ .

Powód, dla którego w obecnej chwili nie żądamy, aby stałe  $\mu$  i  $K$  były rzeczywiste, wyjaśni się w końcu p. 4. Na razie zauważmy, że dla każdego ustalonego  $t$  w przedziale  $(-\infty, \infty)$  z równania (2.17) wynika<sup>5</sup>

$$(2.19) \quad [u_i(\cdot, t), \varepsilon_{ij}(\cdot, t), \sigma_{ij}(\cdot, t)] \in \mathcal{C} [\mu, K, \alpha, F_i(\cdot, t), \Theta(\cdot, t)] \quad \text{na} \quad R.$$

Tak więc każdy quasi-statyczny stan sprężysty na  $R \times (-\infty, \infty)$  uważać można za jednoparametrową rodzinę (z czasem spełniającym rolę parametru) stacjonarnych stanów sprężystych na  $R$ , odpowiadającą tym samym stałym sprężystym oraz odpowiedniej rodzinie sił masowych i rozkładów temperatury.

<sup>5</sup> Jeżeli  $f$  jest funkcją miejsca i czasu zdefiniowaną na  $R \times (-\infty, \infty)$ , to przez  $f(\cdot, t)$  oznaczamy funkcję miejsca zdefiniowaną na  $R$ , otrzymaną jako wynik odwzorowania  $f$  przy ustalonym czasie z przedziału  $(-\infty, \infty)$ .

Spostrzeżenie to odzwierciedla fakt, że w quasi-statycznej teorii sprężystości czas spełnia tylko rolę parametru, natomiast quasi-statyczna teoria lepkospężystości zależy od czasu w sposób istotny.

Dotychczas sformułowaliśmy zagadnienia brzegowe w teorii termo-lepkospężystości w oparciu o prawo relaksacji (2.6). Zakładając, że  $G_\beta(\beta = 1, 2)$ ,  $\epsilon_{ij}$  i  $\sigma_{ij}$  spełniają warunki a) i b) podane w definicji stanu lepkospężystego, możemy odwrócić związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.6). Prowadzi to (por. [1], twierdzenie 3.3) do równoważnego *całkowego prawa pełzania*:

$$(2.20) \quad e_{ij} = s_{ij} * dJ_1, \quad \epsilon_{kk} = \sigma_{kk} * dJ_2 + 3\alpha\theta,$$

gdzie  $J_1$  i  $J_2$  oznaczają odpowiednio funkcje pełzania przy ścinaniu i przy ścisaniu izotropowym. Ponadto dwie pary funkcji  $G_\beta$  i  $J_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ) połączone są związkiem

$$(2.21) \quad G_\beta * dJ_\beta = h \quad \text{na } (-\infty, \infty);$$

stosując zaś oznaczenia przyjęte w [1] (twierdzenie 1.3) dla «odwrotności Stieltjesa» funkcji czasu otrzymujemy

$$(2.22) \quad J_\beta = G_\beta^{-1} \quad \text{na } (-\infty, \infty).$$

Z równania (2.21) wynika dalej, że

$$(2.23) \quad \dot{G}_\beta J_\beta(t) + \int_0^t \dot{G}_\beta(t-t') J_\beta(t') dt' = 1 \quad \text{dla } 0 \leq t < \infty.$$

Z równania (2.12) i odpowiadającego mu wzoru dotyczącego pełzania otrzymuje się natychmiast znane fizyczne znaczenie funkcji relaksacji i pełzania. Tak więc

$$(2.24) \quad e_{ij} = h \quad \text{na } R \times (-\infty, \infty) \quad \text{oznacza, że } s_{ij} = G_1 \quad \text{na } R \times (-\infty, \infty),$$

$$(2.25) \quad s_{ij} = h \quad \text{na } R \times (-\infty, \infty) \quad \text{oznacza, że } e_{ij} = J_1 \quad \text{na } R \times (-\infty, \infty).$$

Analogiczna interpretacja odnosi się do  $G_2$  i  $J_2$ .

Jeżeli  $f$  jest funkcją miejsca i czasu, posiadającą transformację Laplace'a względem czasu, to fakt ten zapisujemy następująco:

$$(2.26) \quad \bar{f}(\mathbf{x}, \eta) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{x}, t); \eta\} = \int_0^\infty f(\mathbf{x}, t) \exp(-\eta t) dt,$$

gdzie  $\eta$  oznacza parametr transformacji. Przyjmując, że  $G_\beta$  i  $J_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ) są rzędu wykładniczego dla  $t \rightarrow \infty$ , możemy z (2.23) oraz z twierdzenia o splocie transformacji Laplace'a wyciągnąć następujący wniosek:

$$(2.27) \quad \bar{G}_\beta(\eta) \bar{J}_\beta(\eta) = \frac{1}{\eta^2}, \quad \beta = 1, 2.$$

Wreszcie zajmiemy się związkami pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w postaci równań różniczkowych, noszących tradycyjnie nazwę *operatorowych praw różniczkowych* liniowej lepkospężystości. W tym celu wprowadzimy

najpierw następujące oznaczenia. Jeżeli  $f$  jest (odpowiednio gładką) funkcją miejsca i czasu zdefiniowaną na  $R \times (-\infty, \infty)$ , to jej  $n$ -tą pochodną cząstkową względem czasu oznaczymy przez

$$(2.28) \quad f^n \equiv D^n f, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie  $D$  jest operatorem różniczkowania względem czasu. Dalej oznaczymy przez  $\dot{f}^{(n)}$  funkcję miejsca zdefiniowaną następująco:

$$(2.29) \quad \dot{f}^{(n)}(\mathbf{x}) = f^{(n)}(\mathbf{x}, 0+) \quad \text{dla } \mathbf{x} \text{ w } R.$$

Operatorowe prawo różniczkowe przyjmie więc postać:

$$(2.30) \quad P_1(D)s_{ij} = Q_1(D)e_{ij}, \quad P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)[\varepsilon_{kk} - 3\alpha \Theta],$$

przy czym  $P_\beta(D), Q_\beta(D)$  ( $\beta = 1, 2$ ) są liniowymi operatorami różniczkowymi

$$(2.31) \quad P_\beta(D) = \sum_{n=0}^{N_\beta} p_{\beta;n} D^n,$$

$$Q_\beta(D) = \sum_{n=0}^{N_\beta} q_{\beta;n} D^n, \quad \beta = 1, 2.$$

Tutaj  $N_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ) są liczbami naturalnymi, a współczynniki  $p_{\beta;n}, q_{\beta;n}$  są stałymi parametrami dla danego (niezależnego od temperatury) materiału. Możemy oczywiście założyć, że albo  $p_{\beta;n} \neq 0$ , albo  $q_{\beta;n} \neq 0$ , gdy  $n = N_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ), tak że dla ustalonego  $\beta$  co najmniej jeden z operatorów w (2.31) jest stopnia  $N_\beta$ . Równania różniczkowe (2.30) posiadają rozwiązania w  $\mathcal{R} \times (0, \infty)$  oraz muszą spełniać następujące warunki początkowe na  $R$ :

$$(2.32) \quad \sum_{n=r}^{N_1} p_{1;n} s_{ij}^{(n-r)} = \sum_{n=r}^{N_1} q_{1;n} e_{ij}^{(n-r)}, \quad r = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$\sum_{n=r}^{N_2} p_{2;n} \sigma_{kk}^{(n-r)} = \sum_{n=r}^{N_2} q_{2;n} [\varepsilon_{kk}^{(n-r)} - 3\alpha \Theta^{(n-r)}], \quad r = 1, 2, \dots, N_2.$$

Z elementarnego uogólnienia twierdzenia 4.1 w [1] jest oczywiste, że równania (2.30) i (2.32) wynikają z warunku (2.8) oraz z całkowego prawa relaksacji (2.6) lub całkowego prawa pełzania (2.20), o ile tylko  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$  i  $\Theta$  są dostatecznie gładkie i podobnie jak funkcje relaksacji i pełzania wykazują zdegenerowane charakterystyki skończonego widma czasów relaksacji i opóźnienia. W pierwszym przypadku  $p_{n;\beta} \neq 0$  dla  $n = N_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ), natomiast w drugim przypadku  $q_{n;\beta} \neq 0$  dla  $n = N_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ).

Dla przypadku izotermicznego fizykalne znaczenie warunków brzegowych (2.32) zostało ustalone w pracy [1] (twierdzenie 4.1<sup>6</sup>).

<sup>6</sup> Por. również BOLEY i WERNER [3], p. 15.6.

Przypuśćmy więc, że  $\Theta$  znika tożsamościowo, a  $\mathbf{x}$  jest ustalone. Wtedy warunki (2.32) są konieczne i dostateczne na to, aby każda para funkcji  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \cdot)$ ,  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \cdot)$  która znika na  $(-\infty, 0)$ , spełnia (2.30) na  $(0, \infty)$  i wykazuje nieciągłości o skończonym skoku w chwili  $t = 0$ , była granicą pary ciągów, które znikają na  $(-\infty, 0)$ , spełniają te same związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.30) i posiadają pochodne czasowe [ciągle na  $(-\infty, \infty)$ ] tych samych rzędów co równania (2.30).

Jeżeli prawo całkowe (2.6) daje się sprowadzić do różniczkowego prawa operatorowego (2.30), to wtedy transformacje Laplace'a funkcji relaksacji istnieją, są wymierne i wyrażają się ([1], twierdzenie 4.8) wzorem

$$(2.33) \quad \bar{G}_\beta(\eta) = \frac{Q_\beta(\eta)}{\eta P_\beta(\eta)}, \quad \beta = 1, 2.$$

Przekształcając w podobny sposób całkowe prawo pełzania (2.20) otrzymujemy

$$(2.34) \quad J_\beta(\eta) = \frac{P_\beta(\eta)}{\eta Q_\beta(\eta)}, \quad \beta = 1, 2.$$

Dodatkowe wyniki dotyczące przejścia od operatorowych praw całkowych do praw różniczkowych i odwrotnie znaleźć można w pracy [1] (p. 4).

Ponieważ materiały posiadające skończone widma relaksacji lub opóźnienia przedstawiać można w znany sposób za pomocą modeli złożonych z siatki o skończonej liczbie sprężyn i tłumików, to w większości prac z zakresu lepkospężystości stosuje się związki między naprężeniami i odkształceniami w postaci różniczkowej, a nie całkowej. Należy jednak pamiętać, że takie podejście nie jest ani uzasadnione względami ogólności, ani usprawiedliwione z punktu widzenia praktyki, ponieważ ścisły opis zachowania się rzeczywistych ciał lepkospężystych dla dużych zakresów czasu (lub częstości) wymaga zastosowania operatorów różniczkowych stosunkowo wysokiego rzędu.

### 3. Mechaniczne własności materiału niezależne od temperatury. Związki ogólne

Obecnie zajmiemy się ogólnymi wynikami dotyczącymi podstawowych równań teorii pola i zagadnień brzegowych rozpatrzonych w poprzednim punkcie. W związku z tym nasze rozważania ograniczymy do materiałów, którymi rządzi całkowe prawo relaksacji (2.6); analogiczne wnioski można jednak zastosować do całkowego prawa pełzania (2.20) oraz do operatorowego prawa różniczkowego (2.30).

W celu ułatwienia naszego zadania sformułujemy najpierw związek między omawianą teorią termo-lepkospężystości i odpowiednią teorią izotermiczną. Związek ten wyraża *analogia sił masowych*. Przypuśćmy, że

$$(3.1) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V} [G_1, G_2, a, F_i, \Theta] \text{ na } R \times (-\infty, \infty)$$

oraz że

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_i &= u_i^b \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty), \\ S_i &= S_i^b \text{ na } B_2 \times (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Następnie niech  $\tilde{u}_i, \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{F}_i$  będą zdefiniowane na  $R \times (-\infty, \infty)$  w następujący sposób:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, & \tilde{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}, \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} + a\delta_{ij}\theta * dG_2, \\ \tilde{F}_i &= F_i - a\theta_{,i} * dG_2; \end{aligned}$$

wtedy

$$(3.4) \quad [\tilde{u}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}] \in \mathcal{V}_I [G_1, G_2, \tilde{F}_i] \text{ na } R \times (-\infty, \infty),$$

oraz

$$(3.5) \quad \tilde{u}_i = u_i^b \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty),$$

$$\tilde{S}_i = S_i^b + a n_i \theta * dG_2 \text{ na } B_2 \times (-\infty, \infty).$$

Na odwrót, jeżeli  $\theta$  posiada te same własności jak w definicji stanu lepkosprężystego, to wtedy równania (3.3), (3.4), (3.5) pociągają za sobą (3.1) i (3.2).

Prawdziwość powyższego twierdzenia można łatwo stwierdzić wychodząc z definicji dotyczących stanu lepkosprężystego oraz izotermicznego lepkosprężystego i wykorzystując znany wynik ([1] twierdzenie 1.6) odnoszący się do przestrzennego różniczkowania splotów Stieltjesa. Jako szczególny przypadek otrzymamy dobrze znaną w termosprężystości<sup>7</sup> analogię sił masowych, gdy funkcje relaksacji spełniać będą (2.15).

Chociaż rozpatrywana uogólniona analogia sprowadzająca mieszane zagadnienia brzegowe termo-lepkosprężystości do zwykłego mieszanego zagadnienia teorii izotermicznej nie posiada praktycznej wartości użytkowej w przypadku, gdy poszukujemy konkretnych rozwiązań zagadnień szczegółowych, to jednak ma ona poważne znaczenie teoretyczne. Analogia ta pozwala bowiem uogólnić twierdzenia znane z teorii izotermicznej na warunki nieizotermiczne. Wykażemy obecnie pewne ważniejsze wnioski osiągnięte w ten właśnie sposób.

Z twierdzenia Volterry [4]<sup>8</sup> dotyczącego jednoznaczności rozwiązania mieszanego zagadnienia izotermicznego w związku z powyższą analogią sił masowych otrzymujemy natychmiast *twierdzenie o jednoznaczności*.

*Przypuśćmy, że*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] &\in \mathcal{V} [G_1, G_2, a, F_i, \theta] \text{ na } R \times (-\infty, \infty), \\ [u'_i, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}] &\in \mathcal{V} [G_1, G_2, a, F_i, \theta] \text{ na } R \times (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

oraz niech

$$(3.7) \quad u_i = u'_i \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty), \quad S_i = S'_i \text{ na } B_2 \times (-\infty, \infty),$$

<sup>7</sup> Por. np. [3], p. 3.3.

<sup>8</sup> Por. [1] p. 8; znaleźć ram można nieco ogólniejszą wersję i bardziej szczegółowy dowód wyniku Volterry w szczególnym przypadku ciała izotropowego.

wtedy

$$(3.8) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = [u'_i, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}] + [w_i, 0, 0] \text{ na } R \times (-\infty, \infty),$$

przy czym  $w_i = 0$  na  $R \times (-\infty, 0)$  oraz  $w_i$  przedstawia (infinitesimalny) sztywny ruch całego ciała na  $R [0, \infty]$ .

Zgodnie z warunkiem a) w definicji stanu lepkospęrzystego funkcje relaksacji występujące w (3.6) powinny spełniać nierówności

$$(3.9) \quad \mathring{G}_\beta > 0, \quad \beta = 1, 2.$$

Oznacza to, że muszą one posiadać dodatnie wartości początkowe. Interesujące jest to, że (oprócz założenia o gładkości) dla zagwarantowania jednoznaczności nie potrzeba nakładać żadnych ograniczeń na przyszłe zachowanie się  $G_\beta$ .

Następujące twierdzenie, które jest elementarnym wnioskiem z twierdzenia 6.1 w [1] i z analogii o siłach masowych, podaje charakterystykę początkowego stanu pola odpowiadającego stanowi lepkospęrzystemu.

*Warunki początkowe. Niech  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  spełnia (2.10). Wtedy*

$$(3.10) \quad [u_i^\circ, \varepsilon_{ij}^\circ, \sigma_{ij}^\circ] \in \mathcal{C} [\mu, K, a, F_i^\circ, \theta^\circ] \text{ na } R,$$

gdzie

$$\mu = \frac{1}{2} \mathring{G}_1, \quad K = \frac{1}{3} \mathring{G}_2.$$

W kontekście teorii termo-lepkospęrzystości wynik powyższy posiada określoną interpretację fizyczną, jest bowiem równoważny znanemu twierdzeniu, że w chwili początkowej ciało lepkospęrzyste zachowuje się tak jak ciało sprężyste. Oprócz tego powyższe twierdzenie pozwala bezpośrednio wyznaczyć początkowe przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia należące do rozwiązania mieszanego zagadnienia teorii termo-lepkospęrzystości, z rozwiązania stacjonarnego zagadnienia termosprężystości; z kolei tym zagadnieniem rządzą *początkowe* siły masowe, temperatura i dane powierzchniowe problemu pierwotnego oraz stałe sprężystości (3.11). Podobnie twierdzenie 6.2 w [1] daje nam analogiczną charakterystykę początkowych (prawostronnych) pochodnych czasowych wszystkich rzędów należących do poszukiwanego stanu lepkospęrzystego. Te początkowe pochodne czasowe  $\dot{u}_i^{(n)}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)}, \dot{\sigma}_{ij}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) można znaleźć bezpośrednio z odpowiednich danych początkowych rozwiązując kolejno ciąg stacjonarnych zagadnień termosprężystych, z których każde jest również związane ze stałymi sprężystymi określonymi w (3.11). Ponieważ zgodnie z twierdzeniem o jednoznaczności w klasycznej teorii termosprężystości bez sprzężenia nierówności  $\mu > 0, K > 0$  wystarczają dla zagwarantowania jednoznaczności odpowiednio regularnego rozwiązania zagadnienia mieszanego, to kryterium Volterry o jednoznaczności (3.9) nie stanowi już niespodzianki.

Dodatkowy wniosek dotyczący zależności stanów lepkospęrzystych od czasu i pozwalający wnosić o gładkości stanu względem czasu na podstawie odpowiedniej gładkości funkcji pola i danych powierzchniowych można wyprowadzić z twierdzenia 6.4 w [1].

Przejdziemy obecnie do twierdzenia wyrażającego zależność stanów lepkosprężystych od miejsca.

Niech układ  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  spełnia równanie (2.10); przyjmijmy ponadto, że

$$(3.12)^0 \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{F} = 0, \quad \nabla^2 = 0 \quad \text{na} \quad \mathcal{R} \times (-\infty, \infty).$$

Wtedy w całym  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$  spełnione są równania

$$(3.13) \quad \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad \nabla^2(\nabla \wedge \mathbf{u}) = 0,$$

$$(3.14) \quad \nabla^4 u_i = 0, \quad \nabla^4 \varepsilon_{ij} = 0, \quad \nabla^4 \sigma_{ij} = 0.$$

A więc tak jak w termosprężystości wzór (3.12) oznacza, że dylatacja i rotacja przemieszczenia są harmonicznymi, a odkształcenia biharmonicznymi funkcjami miejsca. Wszystkie powyższe funkcje posiadają ciągle pochodne przestrzenne dowolnych rzędów. Twierdzenie powyższe jest następstwem twierdzenia 6.6 w [1].

Na mocy analogii sił masowych, przekształcenia Greena oraz twierdzeń 1:2 i 1.6 w [1] odpowiednik twierdzenia Bettiego o wzajemności w izotermicznej teorii lepkosprężystości (por. [1], twierdzenie 7.4) prowadzi do następującego twierdzenia o wzajemności.

Przypuśćmy, że

$$(3.15) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty),$$

$$[u'_i, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F'_i, \Theta'] \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty),$$

wtedy na  $(-\infty, \infty)$  mamy:

$$(3.16) \quad \int_B S_i * du'_i dA + \int_R F_i * du'_i dV + \alpha \int_R \Theta * d\varepsilon'_{ii} * dG_2 dV = \\ = \int_B S'_i * du_i dA + \int_R F'_i * du_i dV + \alpha \int_R \Theta' * d\varepsilon_{ii} * dG_2 dV = \\ = \int_R \sigma_{ij} * d\varepsilon'_{ij} dV + \alpha \int_R \Theta * d\varepsilon'_{ii} * dG_2 dV = \\ = \int_R \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} dV + \alpha \int_R \Theta' * d\varepsilon_{ii} * dG_2 dV.$$

Należy podkreślić, że związki wzajemności otrzymane z powyższego twierdzenia przez przyjęcie  $G_\beta (\beta = 1, 2)$  zgodnie z (2.15) oraz założenie  $\Theta = 0$  na  $R \times (-\infty, \infty)$  będą się różnić od quasi-statycznej wersji związków wzajemności Bettiego w przypadku sprężystości izotermicznej. Różnica ta znika, gdy siły masowe i historia pól temperatury oraz dane powierzchniowe obu stanów w (3.15) są rozdzielными funkcjami miejsca i czasu o wspólnej zależności od czasu. W tym szczególnym przypadku można wykazać<sup>10</sup>, że sploty wchodzące do (3.16) (np.  $S_i * du'_i$ ) redukują się do zwykłych iloczynów (tzn.  $S_i u'_i$ ).

<sup>0</sup> Tutaj i w dalszym ciągu  $\nabla$  oznacza zwykły, przestrzenny operator gradientu, natomiast  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla^2$  są odpowiednio dywergencją, rotacją i operatorem Laplace'a.

<sup>10</sup> Por. twierdzenie 7.5 w [1].



a w wyniku otrzymujemy związki wzajemności identyczne ze związkami otrzymywanymi z uogólnienia twierdzenia Bettiego na quasi-statyczną teorię termosprężystości.

Powyższe twierdzenie o wzajemności może posłużyć do wyprowadzenia wzorów na odkształcenia średnie (niezależne od temperatury) wywołane w ciele lepkospęrzystym danymi siłami objętościowymi, historią pola temperatury oraz siłami powierzchniowymi<sup>11</sup>. Ograniczymy się tu jedynie do podania wzoru na całkowitą zmianę objętości. Wzór ten można wyprowadzić bezpośrednio z twierdzenia 7.6 w [1] za pomocą analogii sił masowych i twierdzenia Greena.

*Zmiana objętości. Ze wzoru (2.10), dla  $t$  z przedziału  $(-\infty, \infty)$  wynika, że*

$$(3.17) \quad \nabla V(t) = [A * dJ_2](t) + 3\alpha \int_R \Theta(\mathbf{x}, t) dV,$$

przy czym  $J_2$  jest funkcją pełzania odpowiadającą modułowi relaksacji  $G_2$ , a ponadto

$$(3.18) \quad \Delta V(t) = \int_R \varepsilon_{ii}(\mathbf{x}, t) dV,$$

$$(3.19) \quad A(t) = \int_B x_j S_i(\mathbf{x}, t) dA + \int_R x_i F_i(\mathbf{x}, t) dV.$$

Trzeba zauważyć, że wzór (3.17) można również wyprowadzić<sup>12</sup> wyłącznie z (3.18), (2.2) i z drugiego ze wzorów (2.6) bez potrzeby uciekania się do (2.21) i twierdzeń 1.2 oraz 1.6 w pracy [1]. A zatem wzór (3.17) jest ważny dla dowolnego ciała będącego w stanie odkształceń infinitesimalnych, którego lepkospęrzysta liniowa dylatacja jest niezależna od temperatury i to bez względu na charakter odkształceń postaciowych. Jeżeli w szczególności  $S_i = 0$  na  $B(-\infty, \infty)$  oraz  $F_i = 0$  na  $R(-\infty, \infty)$ , to (3.17) pociągnie za sobą równość

$$(3.20) \quad \Delta V(t) = 3\alpha \int_R \Theta(\mathbf{x}, t) dV \quad \text{dla } t \text{ w } (-\infty, \infty).$$

Ten sam wniosek otrzymał W. NOWACKI ([7], Rozdział XI) opierając się na mniej bezpośrednim dowodzie. A więc w przypadku braku sił powierzchniowych i objętościowych całkowita zmiana objętości jest taka sama jak przy swobodnym rozszerzeniu się termicznym. Widać stąd, że ten dobrze znany wynik klasycznej termosprężystości<sup>13</sup> pozostaje ważny bez zmiany przy obecnych ogólniejszych założeniach.

Następne twierdzenie dotyczące również braku sił powierzchniowych i objętościowych otrzymujemy przez odpowiednie przystosowanie wyniku podanego w [6] do klasy materiałów lepkospęrzystych zależnych od temperatury.

<sup>11</sup> Wyprowadzenie analogicznych wyników w izotermicznej teorii ciał lepkospęrzystych anizotropowych Czytelnik znajdzie w [5].

<sup>12</sup> Por. [6]. Znaleźć tam można takie wyprowadzenie w przypadku szczególnym, gdy materiał wykazuje czysto sprężystą dylatację.

<sup>13</sup> Por. np. [3], p. 9.15. Wynik ten otrzymał Hieke [8], który oparł swój dowód na uogólnionym twierdzeniu Bettiego o wzajemności w teorii termosprężystości.

*Historia beznaprężeniowych pól temperatury. Przyjmijmy, że równanie (2.10) jest spełnione oraz przypuśćmy, że  $S_i = 0$  na  $B \times [0, \infty)$ ,  $F_i = 0$  na  $R \times [0, \infty)$ .*

*Równość  $\sigma_{ij} = 0$  na  $R \times (-\infty, \infty)$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(3.21) \quad \Theta(\mathbf{x}, t) = a_0(t) + a_i(t)x_i \quad \text{dla } (\mathbf{x}, t) \text{ w } R[0, \infty),$$

*gdzie  $a_0, a_i$  są funkcjami ciągłymi na  $[0, \infty)$ .*

Wskazówka dotycząca dowodu konieczności warunku (3.21) w przypadku, gdy ciało ma być swobodne od naprężeń, ukazała się wcześniej od [6] w pracy HILTONA [9]. Analogiczne twierdzenia dla przypadku dwuwymiarowego, gdy rozkład temperatury nie wywołuje naprężeń termicznych (dla płaskiego stanu odkształcenia i uogólnionego płaskiego stanu naprężenia), można również znaleźć w pracy [6].

Odpowiednie rezultaty trójwymiarowej i dwuwymiarowej teorii termosprężystości, wynikające z rozpatrywanych obecnie twierdzeń, znaleźć można w [3], pp. 3.9 i 4.9.

Na zakończenie tego rozdziału wymienimy jeszcze kilka dodatkowych wniosków wynikających z analogii sił masowych. Można np. rozszerzyć zasadę Duhamela znaną z teorii izotermicznej (por. [1], p. 5) na naprężenia i odkształcenia termiczne. Podobnie otrzymać można analogiczne uogólnienie zasad wariacyjnych izotermicznej teorii lepkosprężystości<sup>14</sup>. Wreszcie całkowite przedstawienie za pomocą funkcji Greena rozwiązań izotermicznych zagadnień brzegowych podane w [11] można w ramach omawianej teorii łatwo uogólnić przez uwzględnienie efektów termicznych.

Kilka dalszych wniosków z analogii sił masowych spotykamy w p. następnym, w którym zajmiemy się wynikami mającymi bezpośredni związek z rozwiązaniami zagadnień brzegowych tego typu co sformułowane w p. 2.

#### 4. Materiały o własnościach niezależnych od temperatury.

##### Metody całkowania, dostępne rozwiązania

W celu odmiennego sformułowania zagadnień brzegowych danych w p. 2 podamy obecnie przemieszczeniowe równania równowagi i równania zgodności odkształceń w naprężeniach. Równania te można otrzymać z podstawowego układu równań pola przez eliminację naprężeń i odkształceń lub przemieszczeń i odkształceń. Poszukiwane uogólnienia równań równowagi Cauchy'ego i równań Beltramiego–Michella otrzymuje się natychmiast za pomocą analogii sił masowych z ich odpowiedników w przypadku izotermicznym (twierdzenia 5.5 i 5.7 w [1]).

*Przemieszczeniowe równania równowagi. Z równania (2.10) wynika na  $R \times (-\infty, \infty)$*

$$(4.1) \quad u_{i,jj} * dG_1 + \frac{1}{3} u_{j,ji} * d(G_1 + 2G_2) + 2F_i = 2\alpha \Theta_{,i} * dG_2$$

<sup>14</sup> Uogólnienie klasycznych zasad wariacyjnych teorii sprężystości na przypadek teorii lepkosprężystości można znaleźć w pracy [10].

lub

$$(4.2) \quad \nabla^2 \mathbf{u} * dG_1 + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} * d(G_1 + 2G_2) + 2\mathbf{F} = 2\alpha \nabla \Theta * dG_2.$$

Równania zgodności odkształceń w naprężeniach. Z równania (2.10) wynika na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$

$$(4.3) \quad \nabla^2 \sigma_{ij} * dJ_1 + \frac{1}{3} \sigma_{kk,ij} * d(2J_1 + J_2) = \Phi_{ij},$$

gdzie  $J_\beta$  jest funkcją pełzania odpowiadającą  $G_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ),

$$(4.4) \quad \Phi_{ij} = \delta_{ij} F_{k,k} * d\Omega - (F_{i,j} + F_{j,i}) * dJ_1 - \alpha \delta_{ij} \nabla^2 \Theta * dG_2 * d(\Omega + J_1) - \alpha \Theta_{,ij}$$

oraz

$$(4.5)^{15} \quad \Omega = J_1 * d(J_2 - J_1) * d(J_1 + 2J_2)^{-1}.$$

Zagadnienie mieszane sformułowane wyłącznie w przemieszczeniach polega na znalezieniu rozwiązania równania (4.1) na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$  takiego, że  $u_i = 0$  na  $R \times (-\infty, 0)$  i spełniającego warunki brzegowe

$$u_i = u_i^b \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty),$$

$$(4.6) \quad \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) * dG_1 + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{k,k} * d(G_2 - G_1) - \alpha \delta_{ij} \Theta * dG_2 \right] n_j = S_i^b$$

$$\text{na } B_2 \times (-\infty, \infty),$$

wynikające z (2.9) przy uwzględnieniu (2.1), (2.3) i (2.6). Z drugiej strony, jeżeli obszar  $R$  jest jednorodny i  $B_2 = B$  (siły powierzchniowe dane są na całym brzegu), to nie znane naprężenia są w zupełności określone wzorami (2.2), (4.3) i drugim z warunków brzegowych (2.9).

Naszym następnym zadaniem jest pokazanie rozwiązania *szczególnego* równania (4.2), odpowiadającego brakowi sił masowych i danej historii pola temperatury, drogą uogólnienia znanego potencjału termosprężystego, który — jak się zdaje — został po raz pierwszy wprowadzony przez BORCHARDTA [12].

*Potencjal termo-lepkospężysty.* Niech  $G_\beta$  ( $\beta = 1, 2$ ) i  $\Theta$  spełniają warunki a) i b) definicji stanu lepkospężystego. Przypuśćmy, że  $\Theta$  jest dostatecznie gładką funkcją o wartościach rzeczywistych, zdefiniowaną na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$  znikającą na  $\mathcal{R} \times (-\infty, 0)$  i spełniającą w  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$  równanie

$$(4.7) \quad \nabla^2 \theta = 3\alpha \Theta * dG_2 d(2G_1 + G_2)^{-1}.$$

Wtedy w całym obszarze funkcja  $u$  zdefiniowana wzorem

$$(4.8) \quad \mathbf{u} = \nabla \theta$$

spełnia (4.2), jeśli tylko  $\mathbf{F} = 0$  na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ .

Aby udowodnić to twierdzenie, należy po prostu podstawić (4.8) do (4.2), zastosować (4.7), przekształcenia algebraiczne i rachunek splotów Stieltjesa<sup>16</sup>.

<sup>15</sup> Tu i w dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenia na odwrotność całki Stieltjesa wprowadzone w [1], twierdzenie 1.3. Por. (2.21) i (2.22).

<sup>16</sup> Rozwiązania szczególne (4.2) można znaleźć w książkach H. Parkusa [13], Rozdział VI, i W. Nowackiego [7], Rozdział XI.

Odpowiednio regularne rozwiązanie równania Poissona (4.7) można otrzymać z kolei za pomocą potencjału Newtona. Jest to widoczne z lematu 9.1 w [1]. I rzeczywiście, jeżeli  $\varrho$  oznacza prawą stronę równania (4.7), to rozwiązanie takie dane jest przez

$$(4.9) \quad \theta(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_R \frac{\varrho(\boldsymbol{\xi}, t)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}}$$

dla wszystkich  $(\mathbf{x}, t)$  w  $R \times (-\infty, \infty)$ .

Ostatnie twierdzenie dostarcza oczywiście jeszcze innych środków do sprowadzenia zagadnienia brzegowego z p. 2 do zagadnienia mieszanego teorii izotermicznej. Twierdzenie to w połączeniu z twierdzeniem 9.2 w [1] prowadzi do następującego uogólnienia funkcji Papkowicza–Neubera znanej z klasycznej teorii sprężystości na przypadek teorii termo-lepkosprężystości.

*Uogólnione rozwiązanie Papkowicza–Neubera.* Niech  $G_{\beta}$  ( $\beta = 1, 2$ ),  $\Theta, \theta$  spełniają założenia poprzedniego twierdzenia oraz niech  $F$  spełnia warunek b) w definicji stanu lepkosprężystego. Przypuśćmy, że  $\varphi$  i  $\psi$  są (dostatecznie gładkimi) funkcjami zdefiniowanymi na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ , znikającymi na  $\mathcal{R} \times (-\infty, 0)$  i spełniającymi równanie

$$(4.10) \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{2} \mathbf{H},$$

gdzie

$$(4.11) \quad \mathbf{H} = \mathbf{F} * dG_1^{-1} * d(2G_1 + G_2)^{-1}$$

w obszarze w  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ . Wtedy funkcja  $\mathbf{u}$  zdefiniowana przez

$$(4.12) \quad \mathbf{u} = \nabla \theta + \nabla(\varphi + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\psi}) * d(G_1 + 2G_2) - 4\boldsymbol{\psi} * d(2G_1 + G_2)$$

spełnia równanie (4.2) w obszarze  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ .

Z uwagi na twierdzenie 9.4 w [1] powyższe rozwiązanie przemieszczeniowych równań równowagi jest zupełne w tym samym sensie, że każde odpowiednio regularne rozwiązanie (4.2) można przedstawić w postaci (4.7), (4.10), (4.12). Tak więc wprowadzenie potencjałów przemieszczenia (funkcji naprężeń)  $\theta, \varphi$  oraz  $\boldsymbol{\psi}$  sprowadza mieszane zagadnienie brzegowe do wyznaczenia odpowiednich rozwiązań równania Poissona. Z drugiej strony, ponieważ sploty Stieltjesa w równaniu (4.12) zawierają funkcje  $\varphi$  i  $\boldsymbol{\psi}$  oraz ze względu na budowę drugiego z równań (4.6), zastosowanie warunków brzegowych do funkcji naprężeń prowadzi zwykle do układu równoczesnych równań całkowych.

Przejdziemy obecnie do dobrze znanej zasady odpowiedniości łączącej liniowe teorie lepkosprężystości i sprężystości. Zasadę tę, posiadającą kapitalne znaczenie dla rozwiązań omawianej klasy zagadnień brzegowych, wyrazić można w następującej zwięzłej postaci za pomocą definicji stanu podanych w p. 2.

*Zasada odpowiedniości.* Przypuśćmy, że

$$(4.13) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad \mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$$

oraz

$$(4.14) \quad u_i = u_i^b \quad \text{na} \quad B_1 \times (-\infty, \infty), \quad S_i = S_i^b \quad \text{na} \quad B_2 \times (-\infty, \infty).$$

Przyjmijmy, że funkcje  $G_p(t)$  ( $\beta = 1, 2$ ),  $u_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ,  $F_i(\mathbf{x}, t)$  oraz  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  dla wszystkich  $\mathbf{x}$  w  $R$  są rzędu wykładniczego  $0(\exp(s_0 t))$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , przy czym  $s_0$  jest stałą (rzeczywistą). Wtedy dla każdego  $\eta$  takiego, że  $\operatorname{Re}(\eta) > s_0$ , mamy

$$(4.15)^{17} \quad [\bar{u}_i(\cdot, \eta), \varepsilon_{ij}(\cdot, \eta), \bar{\sigma}_{ij}(\cdot, \eta)] \in \mathcal{C}[\mu(\eta), K(\eta), \alpha, \bar{F}_i(\cdot, \eta), \bar{\Theta}(\cdot, \eta)] \text{ na } R,$$

gdzie

$$(4.16) \quad \mu(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\bar{G}_1(\eta)), \quad K(\eta) = \frac{1}{3}\eta\bar{G}_2(\eta)$$

i ponadto

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \bar{u}_i(\cdot, \eta) &= \bar{u}_i^b(\cdot, \eta) \text{ na } B_1, \\ \bar{S}_i(\cdot, \eta) &= \bar{S}_i^b(\cdot, \eta) \text{ na } B_2. \end{aligned}$$

Z powyższego twierdzenia oczywiście wynika, że jeżeli na rozwiązaniu termolepkosprężystego zagadnienia opisanego przez (4.13) i (4.14) można dokonać transformacji Laplace'a, to rozwiązanie to musi być zgodne z odwrotną transformacją rozwiązania jednoparametrowej rodziny stacjonarnych, termo-sprężystych zagadnień brzegowych scharakteryzowanych związkami (4.15), (4.16), (4.17). Wobec tego zasada odpowiedności sprowadza zagadnienie pierwotne do ustalonego problemu teorii termosprężystości.

W celu udowodnienia powyższej zasady należy po prostu pozbyć się zależności od czasu w równaniach pola i w odpowiednich warunkach brzegowych stanu lepkosprężystego przez zastosowanie transformacji Laplace'a do (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.9), a następnie porównać otrzymany układ równań z równaniami (2.1), (2.2), (2.3), (2.16) i (2.9). W szczególności, ponieważ ze związków pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.6) na mocy (2.8) wynika (2.12), to z twierdzenia o splocie transformacji Laplace'a otrzymamy

$$(4.18) \quad \begin{cases} \bar{s}_{ij}(\cdot, \eta) = \eta\bar{G}_1(\eta)\bar{e}_{ij}(\cdot, \eta), \\ \bar{\sigma}_{kk}(\cdot, \eta) = \eta\bar{G}_2(\eta)[\bar{\varepsilon}_{kk}(\cdot, \eta) - 3\alpha\bar{\Theta}(\cdot, \eta)]. \end{cases}$$

Równania te na podstawie (2.16) wyjaśniają znaczenie określenia «stałe sprężyste» (4.16).

Przypuśćmy obecnie, że sformułowanie pierwotnego (termo-lepkosprężystego) zagadnienia brzegowego opiera się na różniczkowym prawie operatorowym (2.30) i warunkach brzegowych (2.32), a nie na całkowym prawie relaksacji (2.6). W takim przypadku wyniki (4.15) i (4.16) pozostają w dalszym ciągu ważne (przy założeniu regularności rozpatrywanych historii pól), o ile tylko (4.16) zostanie zastąpione przez

$$(4.19) \quad \mu(\eta) = \frac{1}{2} \frac{Q_1(\eta)}{P_1(\eta)}, \quad K(\eta) = \frac{1}{3} \frac{Q_2(\eta)}{P_2(\eta)}$$

zgodnie z (2.33). Bezpośredni dowód zasady odpowiedności w przypadku operatorowego prawa różniczkowego można otrzymać w zupełnie analogiczny

<sup>17</sup> Por. odnośnik do wzoru (2.19) i oznaczenia transformacji Laplace'a, wprowadzone we wzorze (2.26).

sposób do nakreślonego powyżej dowodu odnoszącego się do przypadku całkowego prawa relaksacji. Zauważmy jednak, że wykonując transformację Laplace'a na (2.30) otrzymamy

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \bar{s}_{ij}(\cdot, \eta) &= \frac{Q_1(\eta)}{P_1(\eta)} \bar{e}_{ij}(\cdot, \eta), \\ \bar{\sigma}_{kk}(\cdot, \eta) &= \frac{Q_2(\eta)}{P_2(\eta)} [\bar{e}_{kk}(\cdot, \eta) - 3\alpha \bar{\Theta}(\cdot, \eta)] \end{aligned}$$

na  $R$  dla wszystkich  $\eta$  o dostatecznie dużej części rzeczywistej *pod warunkiem* spełnienia warunków początkowych (2.32)<sup>18</sup>. W ten sposób równania (2.32), których znaczenie fizykalne omówiono w p. 2, są dokładnie warunkami koniecznymi, uzasadniającymi formalne stosowanie transformacji Laplace'a do operatorowych praw różniczkowych. W prawach takich nieciągłości skokowe  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  (oraz ich odpowiednie pochodne czasowe) w chwili  $t = 0$  są albo milcząco wykluczane, albo również milcząco przyjmuje się, że równanie (2.32) jest spełnione. Kwestia ta została najpierw rozpatrzona przez CORNELIUSSENA i LEE [14], następnie wyjaśniona przez BOLEYA i WEINERA [3] w p. 15.6, a ściśle i szczególnie rozważona w pracy [1].

Poprzednia analogia pomiędzy zagadnieniami brzegowymi liniowych teorii lepkosprężystości i sprężystości została zapoczątkowana w pracach Alfreya [15]. Zasada odpowiedności w postaci Alfreya opiera się na różniczkowym prawie operatorowym i ogranicza się do ciał nieściśliwych i warunków izotermicznych. Pewne rozszerzenie analogii Alfreya na przypadek ciał ściśliwych pochodzi od TSIENA [16], który zarzucił założenie nieściśliwości postulując sztuczne (z punktu widzenia fizyki — nierealne) związki pomiędzy dewiatorowymi i dylatacyjnymi charakterystykami materiału.

Transformacje całkowe zastosował po raz pierwszy do problemu postawionego w pracy [15] W. T. READ [17], który za pomocą transformacji Fouriera sprowadził zagadnienie lepkosprężystości dla ciała ściśliwego do problemu teorii sprężystości. Chociaż związki pomiędzy odkształceniami i naprężeniami zastosowane w [17] zawierają tylko trzy niezależne operatory różniczkowe, to te nieistotne ograniczenia nie wpływają na ogólność rozumowania Reada. BRULL [18] doszedł do analogicznej zasady odpowiedności dla ośrodka o ciągłym widmie czasów relaksacji za pomocą transformacji Laplace'a opierając się na całkowym prawie relaksacji. W pracy [17] prawo zmiany objętości jest (niepotrzebnie) założone jako sprężyste. LEE [19] wyprowadził odpowiednik wersji Brulla zasady odpowiedności w przypadku ogólnego operatorowego prawa różniczkowego. HILTON, HASSAN i RUSSEL [20] uwzględnili w ramach analogii Alfreya rozszerzalność termiczną<sup>19</sup>, natomiast LEE w podobny sposób uogólnił zagadnienie na przypadek teorii termo-lepkosprężystości.

<sup>18</sup> Szczegóły znajdzie Czytelnik w twierdzeniu 4.7 w [1].

<sup>19</sup> Ściśle mówiąc włączenie członu związanego z rozszerzalnością cieplną nie pozostaje w zgodzie z założeniem o nieściśliwości.

Dalsze wyniki omówimy później. Dodatkowo zauważymy tylko, że warunki początkowe (2.32), które muszą uzupełniać operatorowe prawo różniczkowe (2.30), nie są wspomniane w [15, 16, 17, 19] ani w [20]; szczególne warunki początkowe przyjęte w [21] są nieściśle.

Rozszerzona zasada odpowiedniości została zastosowana w pracy [21] do rozwiązania szczególnego przestrzennego zagadnienia brzegowego i odtąd wykorzystywana w quasi-statycznej analizie naprężeń i odkształceń termicznych dla ciał o liniowej lepkospężystości i własnościach niezależnych od temperatury. Przypadki szczególne oraz odpowiednie pozycje bibliograficzne można znaleźć w [3, 7 i 13]. Monografia W. NOWACKIEGO [7] stanowić może przewodnik w dziedzinie ostatnich polskich prac dotyczących zagadnień typu sformułowanego w p. 2. Spośród nich zacytujemy prace W. NOWACKIEGO [22, 23] i M. SOKOŁOWSKIEGO [24]. W obecnym kontekście należy również wymienić pracę B. W. SHAFFERA i M. LEVITSKY'EGO [25]. Dodatkowe badania dotyczące przede wszystkim dynamicznych efektów cieplnych w liniowych ciałach lepkospężystych z własnościami niezależnymi od temperatury wymienimy w p. 7.

#### 5. Materiały o własnościach zależnych od temperatury. Sformułowanie zagadnień brzegowych dla ciał termo-reologicznie prostych

Z poprzedniego punktu jasno wynika, że quasi-statyczna analiza naprężeń i odkształceń w ramach liniowej teorii jednorodnych izotropowych ciał lepkospężystych, przy braku sprzężenia termo-mechanicznego, nie przedstawia podstawowych trudności, jeśli tylko założy się, że mechaniczne własności materiału nie zależą od temperatury. Niestety, jak to już podkreśliliśmy we wstępie, tego rodzaju podejście do zagadnienia jest dalekie od fizycznej rzeczywistości, chyba że zakres zmiany temperatury jest niezmiernie mały. Pozostała część naszej pracy dotyczy głównie modyfikacji powstających w rozpatrywanej teorii, jeżeli moduł relaksacji w (2.6), funkcja pełzania w (2.20) oraz parametry określające mechaniczne własności materiału w (2.30) i (2.31) zależą od temperatury.

Waga efektów, które wynikają z zależności własności lepkospężystych od temperatury, została podkreślona i zilustrowana dość wcześnie przez FREUDENTHALA [26, 27, 28, 29]. Zagadnienia szczególne dotyczące liniowych ciał lepkospężystych o własnościach zależnych od temperatury rozpatrywali H. H. HILTON, H. A. HASSAN i H. G. RUSSEL [20], H. H. HILTON [30], L. RONGVED [31], J. H. WEINER i H. MECHANIC [32], H. G. LANDAU, J. H. WEINER i E. E. ZWICKY [33] oraz B. D. AGGARWALA [34].

Wszystkie zagadnienia rozpatrzone w wymienionych publikacjach dotyczą albo płyt nieskończonych, albo (pełnych lub wydrążonych) kul i walców kołowych, przy czym zagadnienia i warunki brzegowe są tego rodzaju, że nie występuje w nich więcej niż jedna współrzędna przestrzenna. Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami są zdegenerowane do operatorowego prawa

różniczkowego. W istocie rozpatrywane ciała zachowują się jak modele Maxwella, Kelvina lub model standartowy, jeśli idzie o ścinanie, natomiast przyjmuje się, że zmiany objętościowe są albo sprężyste, albo ciało jest nieściśliwe.

W końcu, zależność własności materiału od temperatury we wszystkich przypadkach z wyjątkiem [34] ogranicza się do parametrów lepkości, a ich wybór jest zwykle częściowo kwestią wygody.

Szczególnie interesujące jest rozwiązanie L. Rongveda [31] (w zamkniętej, elementarnej postaci) zagadnienia nieustalonych naprężeń cieplnych w sprężystości ściśliwej kuli z materiału Maxwella. Rozwiązanie to uwzględnia dowolną osiowo-symetryczną historię pola temperatury i nie zakłada żadnych ograniczeń na zależność lepkości ścinania od temperatury.

Systematyczne badania uwzględniające wpływ temperatury na własności ciała lepkosprężystego w analizie naprężeń termicznych zostały zapoczątkowane przez L. W. MORLANDA i E. H. LEE [35], którzy za podstawę swoich rozważań wzięli temperaturowo-czasową hipotezę równoważności, zaproponowaną pierwotnie przez H. LEADERMANA [36], a następnie w nieco zmienionej postaci wprowadzoną przez T. D. FERRIEGO [37]. Zgodnie z tym postulatem równomierna zmiana temperatury posiada wpływ na mechaniczne własności materiału powodując jedynie równomierną zmianę skali czasu; następuje więc równomierne przyspieszanie lub opóźnianie reakcji materiału w zależności od wzrostu lub obniżenia się temperatury.

Materiały spełniające postulat równoważności temperaturowo-czasowej nazywane są «termo-reologicznie prostymi» według terminologii F. Schwarzla i A. J. Stavermana [38], którzy w swoim przeglądowym artykule [39] podają doświadczenia potwierdzające ten postulat. Okazuje się, że wykazuje on godną uwagi zgodność z doświadczeniami wykonanymi na szeregu polimerów przy znacznych zakresach temperatury. Analityczne ujęcie zagadnienia rozwinięto w pracy [35], a następnie w [40].

Przystąpimy obecnie do krótkiego streszczenia teorii termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. W tym celu rozpatrzmy najpierw poszukiwane uogólnienie całkowego prawa relaksacji (2.6). Niech więc odtąd  $G_\beta(t)$  ( $\beta = 1, 2$ ) oznaczają wartości modułów relaksacji w chwili  $t$  mierzonych przy podstawowej temperaturze  $T_0$ ; oznaczmy ponadto przez  $\mathcal{G}_\beta(t, T)$  odpowiednie wartości mierzone przy (ustalonej) temperaturze  $T$ . Mamy zatem

$$(5.1) \quad \mathcal{G}_\beta(t, T_0) = G_\beta(t), \quad \beta = 1, 2.$$

Hipotezę równoważności temperaturowo-czasowej można wtedy wyrazić analitycznie w sposób następujący:

$$(5.2) \quad \mathcal{G}_\beta(t, T) = G_\beta(\xi), \quad \xi = t\varphi(T), \quad \text{dla } (t, T) \text{ w } [-\infty, \infty] \times [T_1, T_2],$$

gdzie  $[T_1, T_2]$  jest zakresem temperatury, dla której hipoteza termo-reologicznie prostego zachowywania się będzie spełniona. Tutaj  $\xi$  jest «zredukowanym czasem», a  $\varphi$  przedstawia charakterystyczną «funkcję przesunięcia» materiału



określając skrócenie (lub rozciągnięcie) skali czasu, które spowodowane jest zmianą temperatury  $T - T_0$ . Mamy oczywiście

$$(5.3) \quad T_0 = 1, \quad \varphi(T) > 0, \quad T_1 \leq T \leq T_2,$$

przy czym  $\varphi$  jest funkcją stale rosnącą.

Obecnie ważność równania stanu (2.6) jest ograniczona do materiałów, które są utrzymywane w równomiernej temperaturze  $T_0$ . W tych warunkach przyjmując  $\Theta = 0$  w (2.6), uwzględniając (2.7) oraz wykorzystując prawo przemienności splotów Stieltjesa otrzymujemy

$$(5.4) \quad s_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{t'=-\infty}^t G_1(t-t') de_{ij}(\mathbf{x}, t'),$$

$$\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = \int_{t'=-\infty}^t G_2(t-t') d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t').$$

Jeżeli materiał jest utrzymywany stale w równomiernej temperaturze  $T$ , to zgodnie z (5.2) wielkości  $G_p(t-t')$  w (5.4) należy zastąpić przez  $G_p(\xi-\xi')$ , gdzie  $\xi' = t'\varphi(T)$ . Jeżeli wreszcie materiał znajduje się pod wpływem *zmiennego* (zależnego od czasu i miejsca) rozkładu temperatury  $T$  o wartościach z przedziału  $[T_1, T_2]$ , to wtedy trzeba wprowadzić do (5.4) dwie dodatkowe poprawki: 1) należy w ten sposób uogólnić definicję czasu zredukowanego  $\xi$ , aby uwzględniła ona wpływ nakładania się kolejnych zmian temperatury; 2) należy raz jeszcze uwzględnić wpływ rozszerzalności cieplnej. Prowadzi to do *zmodyfikowanego całkowitego prawa relaksacji*

$$(5.5) \quad s_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{t'=-\infty}^t G_1(\xi-\xi') de_{ij}(\mathbf{x}, t'),$$

$$\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) = \int_{t'=-\infty}^t G_2(\xi-\xi') d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t') - 3\alpha \int_{t'=-\infty}^t G_2(\xi, -\xi') d\Theta(\mathbf{x}, t'),$$

gdzie

$$(5.6)^{20} \quad \xi = \varrho(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \varphi(T(\mathbf{x}, t')) dt', \quad \xi' = \varrho(\mathbf{x}, t').$$

Zauważmy, że temperatura występuje w równaniu (5.5) bezpośrednio i przez  $\xi, \xi'$ . W przeciwieństwie do (2.6) ze związków pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (5.5) wynika nieliniowa zależność lokalnych chwilowych naprężeń od lokalnej historii temperatury. Ze związków (5.6) i (5.3) widać, że  $\varrho(\mathbf{x}, \cdot)$  jest monotonicznie wzrastającą funkcją czasu w przedziale  $(-\infty, \infty)$ , której odwrotność oznaczamy przez  $\omega(\mathbf{x}, \cdot)$ . Mamy stąd

$$(5.7) \quad t = \omega(\mathbf{x}, \xi).$$

<sup>20</sup> Chociaż to uogólnienie czasu zredukowanego wprowadzone w [35] jest oparte na pewnych podstawach fizycznych, to jednak brak ścisłego wyprowadzenia wzoru (5.5) ze związków (5.4) i postulatu równoważności temperaturowo-czasowej.

Jeżeli  $f$  jest funkcją miejsca i czasu, to konsekwentnie będziemy oznaczać przez  $\hat{f}$  funkcję

$$(5.8) \quad \hat{f}(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x}, \omega(\mathbf{x}, \xi)).$$

Poddając zmienną całkowania w (5.5) transformacji  $t' = \omega(\mathbf{x}, \xi')$  można wyeliminować z (5.5) każdą bezpośrednią zależność od czasu fizykalnego, wprowadzając czas zredukowany. W ten sposób stosując oznaczenia przyjęte w (2.7) i (5.8) i korzystając raz jeszcze z prawa przemienności splotów Stieltjesa dochodzimy do następującej szczególnie dogodnej wersji zmodyfikowanego całkowego prawa relaksacji:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \hat{s}_{ij}^{\bar{m}} &= \hat{e}_{ij} * dG_1, \\ \hat{\sigma}_{kk} &= (\hat{e}_{kk} - 3\alpha\hat{\Theta}) * dG_2. \end{aligned}$$

Widać z (5.8), że sploty w (5.9) są obliczane względem czasu zredukowanego, a nie fizykalnego. Zauważmy ponadto, że wzory (5.9) mają tę samą strukturę co (2.6).

Dokładnie takie same rozważania stosuje się do uogólnienia równań (2.20), co prowadzi ostatecznie do *zmodyfikowanego całkowego prawa pełzania w postaci*

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \hat{e}_{ij} &= \hat{s}_{ij} * dJ_1, \\ \hat{e}_{kk} &= \sigma_{kk} * dJ_2 + 3\alpha\hat{\Theta}. \end{aligned}$$

Związki te można również wyprowadzić bezpośrednio z (5.9).

Wreszcie za pomocą uproszczeń tego samego typu co stosowane w powyższym rozumowaniu, które prowadziło od praw całkowych (2.6) lub (2.20) do związków (2.30), otrzymamy obecnie *zmodyfikowane operatorowe prawo różniczkowe*

$$(5.11) \quad \begin{aligned} P_1(\hat{D})\hat{s}_{ij} &= Q_1(\hat{D})\hat{e}_{ij}, \\ P_2(\hat{D})\hat{\sigma}_{kk} &= Q_2(\hat{D})[\hat{e}_{kk} - 3\alpha\hat{\Theta}]. \end{aligned}$$

Tutaj  $\hat{D}$  oznacza pochodną względem czasu zredukowanego, tzn.

$$(5.12) \quad \hat{D} = \frac{\partial}{\partial \xi},$$

natomiast wielomianowe operatory  $P_\beta, Q_\beta (\beta = 1, 2)$  zachowują swoje poprzednie znaczenie. Do (5.11) należy dołączyć warunki brzegowe (2.32), które nie ulegają zmianie.

Odnosząc (5.11) do czasu fizykalnego  $t$  za pomocą (5.6), (5.7) i (5.8) otrzymamy oczywiście dwa równania różniczkowe o tej samej strukturze co (2.30) z tą tylko różnicą, że poprzednio stałe parametry  $p_{\beta;n}, q_{\beta;n}$  będą obecnie funkcjami temperatury. Jest również rzeczą jasną, że funkcje te nie mogą być dane w sposób dowolny dla termo-reologicznie prostego ciała lepkosprężystego, ponieważ całą zależność od temperatury takiego ciała określa jedna funkcja przesunięcia  $\varphi$ . Co więcej, dowolny rozkład zależnych od temperatury parametrów w (2.30) jest nie tylko niezgodny z postulatem równoważności temperaturowo-czasowej, ale, jak łatwo stwierdzić, niedopuszczalny z powodów energetycznych.

Wnioski z postulatu równoważności dla ciał sprężystych, ciał Maxwella oraz Kelvina zbadano w pracy [40]. Ze wzoru (2.15) widać od razu, że materiały sprężyste o modułach zależnych od temperatury nie należą do klasy termo-reologicznie prostych ciał lepkospężystych. Z drugiej strony, prawo ścinania dla termo-reologicznie prostego ciała Maxwella przyjmuje postać

$$(5.13) \quad \dot{s}_{ij} + \frac{1}{\tau} s_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij},$$

gdzie  $\mu$  i  $\tau$  są modułem ścinania i czasem relaksacji danego ciała;  $\mu$  pozostaje stałe w obecnej chwili, natomiast  $\tau$  spełnia związek

$$(5.14) \quad \tau(T) = \frac{\tau_0}{\varphi(T)}, \quad (T_1 \leq T \leq T_2), \quad \tau_0 = \tau(T_0),$$

jest więc monotonicznie malejącą funkcją temperatury.

Analogiczne wnioski można zastosować do prawa dylatacji i do ciał typu Kelvina. Warto zauważyć, że założenia przyjęte dość dowolnie w pracach [26] oraz [33] i dotyczące zależności pewnych parametrów od temperatury są w rzeczywistości ścisłymi konsekwencjami hipotezy równoważności temperaturo-czasowej.

Zanim zakończymy omawianie tego tematu, zauważmy za E. H. LEE i T. G. ROGERSEM [41], że braki operatorowego prawa różniczkowego (tzn. modeli o widmie skończonym) wyjdą jeszcze bardziej na jaw, jeśli weźmiemy pod uwagę (termo-reologicznie prostą) zależność materiału od temperatury, a to z uwagi na towarzyszące skrócenie skali czasu.

Obecnie jesteśmy w stanie rozpatrzyć mieszane zagadnienie brzegowe quasi-statycznej liniowej teorii termo-reologicznie prostych ciał lepkospężystych. Sformułowanie oparte na zmodyfikowanym całkowym prawie relaksacji można wyrazić w sposób następujący: poszukujemy historii pól  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ , które dla danych  $R$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , znanych  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $\alpha$ ,  $T_0$ ,  $\varphi$  i danych  $F_i$ ,  $T$ ,  $u_i^b$ ,  $S_i^b$  spełniają zależności (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (5.5), 5.6 na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$  oraz warunki początkowe (2.8) jak i warunki brzegowe (2.9). Zagadnienie to sugeruje wprowadzenie poniższego uogólnienia definicji stanu lepkospężystego wprowadzonego w p. 2.

*Termo-reologicznie prosty stan lepkospężysty.* Mówimy, że  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  należą do klasy termo-reologicznie prostych stanów lepkospężystych na  $R \times (-\infty, \infty)$  odpowiadających danym  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $\alpha$ ,  $T_0$ ,  $\varphi$ ,  $F_0$ ,  $T$  dla zakresu temperatury  $[T_1, T_2]$  i piszemy

$$(5.15) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{T}[G_1, G_2, \alpha, T_0, \varphi, F_i, T] \text{ na } R \times (-\infty, \infty)$$

jeżeli:

a)  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  oraz  $F_i$  spełniają warunki a), b) definicji stanu lepkospężystego;

b) funkcja  $\varphi$  jest ciągła na  $[T_1, T_2]$  i spełnia (5.3);

c) funkcja  $T = T_0$  na  $R \times (-\infty, 0)$  jest ciągła na  $R \times [0, \infty)$  oraz posiada wartości zawarte w przedziale  $[T_1, T_2]$ ;

d) równania (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (5.5), (5.6) są spełnione na  $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ .

Oczywiście warunek (5.15) w połączeniu z warunkiem  $\varphi(T) = 1$  dla  $T$  z przedziału  $[T_1, T_2]$  pociąga za sobą związek (2.10), skąd wynika, że tego rodzaju ograniczenie funkcji przesunięcia sprowadza obecną teorię do teorii materiałów niezależnych od temperatury, rozpatrywanych poprzednio.

## 6. Wnioski z termo-reologicznie prostego zachowania się ciał. Zastosowania

Zestawimy teraz kilka ogólnych wniosków odnoszących się do termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Większość twierdzeń, które tu podamy, to uogólnienia analogicznych tez p. 3; po odpowiednim przyjęciu funkcji  $\varphi$  sprowadzają się one do wymienionych tez.

*Twierdzenie o jednoznaczności. Przypuśćmy, że*

$$(6.1) \quad \begin{cases} [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{T} [G_1, G_2, a, T_0, \varphi, F_i, T] \text{ na } R \times (-\infty, \infty), \\ [u'_i, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}] \in \mathcal{T} [G_1, G_2, a, T_0, \varphi, F_i, T] \text{ na } R \times (-\infty, \infty); \end{cases}$$

*niech ponadto*

$$(6.2) \quad u_i = u'_i \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty), \quad S_i = S'_i \text{ na } B_2 \times (-\infty, \infty),$$

*wtedy*

$$(6.3) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = [u'_i, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}] + [w_i, 0, 0] \text{ na } R \times (-\infty, \infty),$$

gdzie  $w_i = 0$  na  $R \times (-\infty, 0)$ , a  $w_i$  przedstawia (infinitesimalny) ruch sztywny całego ciała na  $R \times [0, \infty)$ .

Wynik ten jest przypadkiem szczególnym twierdzenia o jednoznaczności udowodnionego w [42], które można również stosować do *topniejących* ciał lepkosprężystych. Warto zauważyć, że oprócz warunku ciągłości i warunku (5.3) nie nakłada się w obecnych warunkach na funkcję przesunięcia żadnych ograniczeń w celu zagwarantowania jednoznaczności.

Następne twierdzenie można wyprowadzić z definicji stacjonarnego, sprężystego oraz termo-reologicznie prostego stanu lepkosprężystego za pomocą (5.8), (5.9) i twierdzenia 1.2 w [1].

*Warunki początkowe. Niech układ  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  spełnia warunek (5.15), wtedy*

$$(6.4) \quad [\dot{u}_i, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}] \in \mathcal{C} [\mu, K, a, \dot{F}_i, \dot{\Theta}] \text{ na } R,$$

gdzie

$$(6.5) \quad \mu = \frac{1}{2} \dot{G}_1, \quad K = \frac{1}{3} \dot{G}_2.$$

A zatem stan początkowy jest znowu stacjonarnym stanem sprężystym, który można wyznaczyć bezpośrednio z warunków początkowych i danych powierzchniowych.

Rozpatrzmy obecnie tezę wynikającą z rezultatów podanych<sup>21</sup> w p. 3.

*Zmiana objętości.* Niech układ  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  spełnia warunek (5.15) i przypuśćmy, że

$$(6.6) \quad G_2 = 3Kh \text{ na } (-\infty, \infty),$$

gdzie  $K$  jest stałą (modułem sprężystości objętościowej). Wtedy zmiana objętości dana jest wzorami (3.17) i (3.19).

Niżej podany wynik został wyprowadzony w [6] i stanowi uogólnienie wcześniejszego spostrzeżenia H. H. HILTONA [9].

*Pola historii temperatury wolne od naprężeń.* Przyjmijmy, że (5.15) jest spełnione i przypuśćmy, że  $S_i = 0$  na  $B \times [0, \infty)$  oraz  $F_i = 0$  na  $R \times [0, \infty)$ . Równość  $\sigma_{ij} = 0$  zachodzi na  $R \times (-\infty, \infty)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(6.7) \quad \Theta(\mathbf{x}, t) = a_0(t) + a_i(t)x_i \quad \text{dla } (\mathbf{x}, t) \text{ w } R \times (0, \infty),$$

gdzie  $a_0, a_i$  są funkcjami ciągłymi na  $[0, \infty)$ .

Pokrewne twierdzenia dotyczące pól temperaturowych wolnych od naprężeń i zastosowane do płaskiego stanu odkształcenia oraz uogólnionego płaskiego stanu naprężenia znaleźć można w [6], gdzie zbadano szczegółowo dwuwymiarową teorię termo-reologicznie prostych ciał lepkospęrzystych. Rozważania dotyczące przypadków dwuwymiarowych w [6] prowadzą również do związków pomiędzy rozwiązaniami dla płaskiego stanu odkształcenia i uogólnionego płaskiego stanu naprężenia związanymi z tym samym zagadnieniem<sup>22</sup> płaskim.

Poważne trudności analityczne wynikające wskutek wprowadzenia zależności zachowania się materiału lepkospęrzystego od temperatury powstają przy rozwiązywaniu rzeczywistych zagadnień brzegowych. Niestety, teorii całkowania przedstawionej w p. 4 nie można przenieść na przypadek termo-reologicznie prostych ośrodków lepkospęrzystych. W szczególności dotyczy to ważnej zasady odpowiedniości rozpatrzonej w końcu p. 4, zasady, za pomocą której zagadnienie lepkospęrzystości (dla ciał z własnościami zależnymi od temperatury) sprowadzić można do ustalonego zagadnienia termosprężystości.

W celu wykazania trudności, z jakimi mamy tu do czynienia, zauważmy najpierw, że całki występujące w zmodyfikowanym prawie relaksacji (5.5) nie są już całkami typu splotu. Tym samym zastosowanie transformacji Laplace'a (względem czasu fizycznego) do równań (5.5) nie doprowadzi już do związków algebraicznych pomiędzy transformatami naprężeń i odkształceń.

Druga wersja zmodyfikowanego prawa relaksacji (5.9) o wymaganej budowie w postaci splotów sugeruje możliwość sprowadzenia za pomocą nowych zmiennych niezależnych  $(\mathbf{x}, \xi)$  również i pozostałych równań pól oraz warunków brzegowych do takiej postaci, z której — dzięki transformacji Laplace'a — można będzie wyeliminować czas zredukowany. W ogólności tego rodzaju tok postępowania nie powoduje godnego uwagi uproszczenia zagadnienia. Istotnie,

<sup>21</sup> Por. odnośnik za wzorem (3.19).

<sup>22</sup> Analogiczne związki w przypadku dwuwymiarowej teorii termosprężystości znaleźć można w książce Mindlina i Salvadori [43], s. 762.

zastosujemy do (5.6) i (5.8) proponowaną zmianę zmiennych i oznaczymy przez  $\hat{f}_i$  i  $\hat{f}$  odpowiednio pochodną przestrzenną i pochodną względem czasu zredukowanego funkcji  $f$ . Wtedy związki pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami (2.1) przyjmą postać

$$(6.8) \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \frac{1}{2}(\hat{u}_{i\varrho,j} + \hat{u}_{j\varrho,i}),$$

a równania równowagi (2.2) postać

$$(6.9) \quad \hat{\sigma}_{i,j} + \hat{\sigma}_{i\varrho,j} + \hat{F}_i = 0, \quad \hat{\sigma}_{ji} = \hat{\sigma}_{ij}.$$

Z powodu występowania członów zawierających  $\varrho_i$ , transformacje (6.8) i (6.9) (wzięte względem czasu zredukowanego) nie zachowują pożądanej budowy (2.1) i (2.2), chyba że  $\varrho_i$  znika. Ze wzoru (5.6) wynika, że będzie to miało miejsce wtedy, gdy  $T$  jest wyłącznie funkcją czasu. Wobec tego w tym szczególnym przypadku otrzymujemy ważne uogólnienie zasady odpowiedności.

W celu uniknięcia zbytecznie zawilej notacji wprowadzimy następujące oznaczenie

$$(6.10) \quad \tilde{f}(\mathbf{x}, \eta) = \int_0^{\infty} \hat{f}(\mathbf{x}, \xi) \exp(-\eta\xi) d\xi$$

na transformację Laplace'a funkcji  $\hat{f}(\mathbf{x}, \xi)$  względem czasu zredukowanego.

*Zasada odpowiedności dla historii temperatury zależnych wyłącznie od czasu. Przypuśćmy, że*

$$(6.11) \quad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \pi[G_1, G_2, \alpha, T_0, \varphi, F_i, T] \text{ na } R \times (-\infty, \infty),$$

gdzie  $T$  jest funkcją tylko czasu; następnie niech

$$(6.12) \quad u_i = u_i^b \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty), \quad S_i = S_i^b \text{ na } B_2 \times (-\infty, \infty).$$

*Przyjmijmy, że  $G_\beta(\xi)$  ( $\beta = 1, 2$ ),  $\hat{u}_i(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $\hat{F}_i(\mathbf{x}, \xi)$  oraz  $\hat{T}(\xi)$  są rzędu wykładniczego 0 ( $\exp(s_0 \xi)$ ) dla każdego  $\mathbf{x}$  w  $R$  gdy  $\xi \rightarrow \infty$ , przy czym  $s_0$  jest stałą (rzeczywistą). Wtedy dla każdego  $\eta$ , spełniającego warunek  $\text{Re}(\eta) > s_0$ , mamy*

$$(6.13) \quad [\tilde{u}_i(\cdot, \eta), \tilde{\varepsilon}_{ij}(\cdot, \eta), \tilde{\sigma}_{ij}(\cdot, \eta)] \in \mathcal{B}[\mu(\eta), K(\eta), \alpha, \tilde{F}_i(\cdot, \eta)], \quad \tilde{\Theta}(\eta) \text{ na } R,$$

gdzie

$$(6.14) \quad \mu(\eta) = \frac{1}{2}\eta\tilde{G}_1(\eta), \quad K(\eta) = \frac{1}{3}\eta\tilde{G}_2(\eta)$$

oraz

$$(6.15) \quad \tilde{u}_i(\cdot, \eta) = \tilde{u}_i^b(\cdot, \eta) \text{ na } B_1, \quad \tilde{S}_i(\cdot, \eta) = \tilde{S}_i^b(\cdot, \eta) \text{ na } B_2.$$

Analogia ta staje się trywialna, gdy  $B = B_2$ ,  $F_i = 0$  na  $R \times (-\infty, \infty)$  oraz  $S_i = 0$  na  $B \times (-\infty, \infty)$ . W tym przypadku analogia po prostu po-

twierdza nasz poprzedni wniosek<sup>23</sup>, że  $\sigma_{ij} = 0$  na  $R \times (-\infty, \infty)$  zgodnie z dobrze znanym twierdzeniem o polach temperatury wolnych od naprężeń w teorii termosprężystości ([3], p. 3.9).

Przypuśćmy następnie, że dla czasów nieujemnych temperatura  $T$  jest funkcją tylko miejsca. W tym drugim zdegenerowanym przypadku zmodyfikowane całkowe prawo relaksacji (5.5) można znowu zapisać w postaci splotów względem czasu fizykalnego, jak to widać z (5.6). Mamy obecnie

$$(6.16) \quad s_{ij} = H_1 * de_{ij}, \quad \sigma_{kk} = H_2 * d(\varepsilon_{kk} - 3\alpha\theta),$$

pod warunkiem, że

$$(6.17) \quad H_\beta(\mathbf{x}, t) = G_\beta(t\varphi(T(\mathbf{x}))) \quad \text{dla} \quad (\mathbf{x}, t) \text{ w } R \times [0, \infty).$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a na (6.16) otrzymujemy

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \bar{s}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) &= 2\mu(\mathbf{x}, \eta)\bar{e}_{ij}(\mathbf{x}, \eta), \\ \bar{\sigma}_{kk}(\mathbf{x}, \eta) &= 3K(\mathbf{x}, \eta)[\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, \eta) - 3\alpha\bar{\theta}(\mathbf{x}, \eta)]. \end{aligned}$$

Wzory te są ważne dla każdego ustalonego  $\eta$  o dostatecznie dużej części rzeczywistej i dla wszystkich  $\mathbf{x}$  w  $R$ , jeżeli

$$(6.19) \quad \mu(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{2}\eta\bar{H}_1(\mathbf{x}, \eta), \quad K(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{3}\eta\bar{H}_2(\mathbf{x}, \eta).$$

Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w postaci (6.18) odpowiadają *niejednorodnemu* liniowemu ciału sprężystemu. W takim razie *jeżeli temperatura zależy tylko od miejsca, to pierwotne zagadnienie brzegowe w teorii termolepkospężystości można sprowadzić do ustalonego zagadnienia termosprężystego dla ośrodka niejednorodnego*. To uogólnienie zasady odpowiedniości posiada niestety bardzo ograniczone znaczenie praktyczne z powodu złożoności zagadnienia sprowadzonego, którego trudność jest porównywalna z trudnością problemu pierwotnego.

Analogiczne rozszerzenie zasady odpowiedniości na przypadek materiałów zależnych od temperatury dla operatorowych praw różniczkowych zostało rozpatrzone wcześniej przez H. H. HILTONA i H. G. RUSSELA w pracy [44] opartej na poprzednim komunikacie z H. A. HASSANEM [20]. Analiza przeprowadzona w pracy [44] ogranicza się do operatorowych praw różniczkowych dla materiałów o parametrach zależnych od temperatury i zakłada ośrodek o skończonym widmie czasów relaksacji i opóźnienia.

Analogia wyprowadzona w [44] dla rozkładów temperatury zależnych tylko od czasu jest ograniczona do ciał mechanicznie nieściśliwych (aczkolwiek uwzględnia rozszerzalność cieplną) i jest uogólnieniem<sup>24</sup> zasady T. Alfrey'a [15].

<sup>23</sup> Zauważmy, że  $\theta$  spełnia (6.7), ponieważ  $T$  nie zależy obecnie od miejsca.

<sup>24</sup> W związku z tym rozszerzeniem analogii Alfrey'a autorzy uważają, że można wyznaczyć oddzielnie wpływ sił masowych i sił powierzchniowych, a następnie nałożyć je na otrzymane naprężenia i odkształcenia termiczne. Tego rodzaju superpozycja dla materiałów zależnych od temperatury nie jest w rzeczywistości dopuszczalna. Jak już wykazano, pole temperatury zależne tylko od czasu przy braku obciążeń zawsze wywołuje zanikające naprężenia cieplne.

Z drugiej strony, w pracy [44] nie nakłada się żadnych ograniczeń na liniowo lepkosprężyste prawo zmiany objętości w przypadku, gdy pole temperatury zależy wyłącznie od miejsca; zasada odpowiedniości otrzymana dla tego przypadku jest elementarnym uogólnieniem pracy W. T. READA [17] dla teorii izotermicznej. Wreszcie w pracy [44] podano szkic przybliżonego podejścia do przypadku ogólnego, gdy historia pola temperatury zależy od czasu i miejsca, oparty na założeniu, że materiał jest odcinkami niezależny od temperatury (w czasie). Zakres, w którym taki przybliżony schemat jest rachunkowo wykonalny, pozostaje do oszacowania.

Obecnie rozpatrzmy dostępne zastosowania quasi–statycznej liniowej teorii termo–reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Jak wspomnieliśmy poprzednio, wszystkie (z wyjątkiem jednego) przykłady wymienione na początku p. 5 dotyczą modeli lepkosprężystych zależnych od temperatury i należą do omawianej tu kategorii, mimo że nie zostały one specjalnie dobrane dla ilustracji rozpatrywanej teorii ogólnej.

Postulat równoważności temperaturowo–czasowej został zastosowany przez L. W. MORLANDA i E. H. LEE [35] do analizy płaskiego stanu odkształcenia w nieściśliwym, wydrążonym walcu kołowym, poddanym działaniu promieniowego rozkładu temperatury oraz nagle przyłożonego, równomiernego ciśnienia wewnętrznego.

W pracy [40] rozpatrzono rozkład temperatury zależny zarówno od miejsca jak i czasu; podano tam ściśle rozwiązania dwóch zagadnień przestrzennych tego rodzaju. Pierwsze z nich dotyczy swobodnych drgań poprzecznych nieskończonej płyty przy założeniu, że historia pola temperatury wywołującego naprężenia w płycie zmienia się dowolnie ze współrzędną grubości i z czasem. Drugie zagadnienie dotyczy naprężeń i odkształceń termicznych wywołanych w kuli dowolnym, chwilowym, promieniowym rozkładem temperatury. Oba rozwiązania zakładają dowolną (termo–reologicznie prostą) zależność materiału od temperatury i stosują się do ciał o ciągłych widmach relaksacji z tym wyjątkiem, że w przypadku drugiego zagadnienia przyjęto sprężyste prawo zmiany objętości <sup>25</sup>.

Powrócimy tu krótko do przykładu płyty rozpatrzonej w [40], ponieważ pewne aspekty tego zagadnienia posiadają szersze znaczenie. Rozpatrzmy więc nieskończoną płytę o stałej grubości  $2a$  i dobierzmy w ten sposób układ współrzędnych, aby płaszczyzna  $x_3 = 0$  pokrywała się z płaszczyzną środkową płyty. Wtedy  $R$  będzie obszarem określonym nierównością  $-a \leq x_3 \leq a$ , a  $B$  stanowić będą dwie ograniczające płaszczyzny  $x_3 = \pm a$ .

Poszukujemy obecnie termo–reologicznie prostego stanu lepkosprężystego <sup>26</sup>  $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$  na  $R \times (-\infty, \infty)$  odpowiadającego danym  $G_1, G_2, a, T_0, \varphi, F_i, T$

<sup>25</sup> Chociaż założenie to bardzo rozpowszechnione w analizie naprężeń ciał lepkosprężystych w ogólności zgadza się z doświadczeniami, to jednak wstępne jakościowe dane dotyczące efektów lepkości objętościowej wydają się niewystarczające.

<sup>26</sup> Zauważmy, że w przeciwieństwie do poprzedniego założenia  $R$  w tym przykładzie nie jest ograniczone.



i spełniającego warunki brzegowe

$$(6.20) \quad \sigma_{31} = 0 \quad \text{na} \quad B \times (-\infty, \infty).$$

Przyjmujemy dalej, że  $T$  i  $u_3$  są funkcjami tylko  $(x_3, t)$  oraz że

$$(6.21) \quad F_i = u_1 = u_2 = 0 \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty).$$

Wprowadzone wyżej założenia ograniczające są zgodne z równaniami pola i warunkami brzegowymi, co — jak można obecnie łatwo stwierdzić<sup>27</sup> — powoduje zależność historii pola tylko od  $(x_3, t)$ , natomiast

$$(6.22) \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty)$$

$$(6.23) \quad \sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty).$$

oraz

$$(6.24) \quad \hat{\sigma} = -\hat{\varepsilon} * dG_1, \quad 2\hat{\sigma} = (\hat{\varepsilon} - 3a\hat{\Theta}) * dG_2 \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty),$$

gdzie dla ułatwienia napisaliśmy odpowiednio  $\sigma$  i  $\varepsilon$  zamiast  $\sigma_{11}$  i  $\varepsilon_{33}$ .

Po eliminacji  $\hat{\varepsilon}$  z pary równań całkowych (6.24) i wykorzystaniu własności splotów Stieltjesa (p. 1 w [1]) otrzymamy

$$(6.25) \quad \bar{\sigma} = -3aA * d\hat{\Theta} \quad \text{na} \quad \mathcal{R} \times (-\infty, \infty),$$

gdzie  $A$  jest funkcją pomocniczą zdefiniowaną następująco:

$$(6.26)^{28} \quad A = G_1 * dG_2 * d(2G_1 + G_2)^{-1} \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty).$$

Biorąc pod uwagę (2.7), (5.6), (5.7), (5.8) i podstawiając  $x_3 = x$  dochodzimy na podstawie (6.25) do wniosku, że poszukiwane naprężenia  $\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{22}$  przedstawić można za pomocą całki

$$(6.27) \quad \sigma(x, t) = -3a \int_{t'=-\infty}^t A(\xi - \xi') d\Theta(x, t') \quad \text{dla} \quad (x, t) \quad \text{w} \quad R \times (-\infty, \infty),$$

gdzie

$$(6.28) \quad \xi = \varrho(x, t) = \int_0^t \varphi(T(x, t')) dt', \quad \xi' = \varrho(x, t').$$

Oprócz tego stosując twierdzenia 1.2, 1.3 [1] dla  $t$  z przedziału  $[0, \infty)$  stwierdzamy, że wzór (6.26) jest równoważny następującemu wzorowi:

$$(6.29)^{29} \quad \mathring{G}A(t) + \int_0^t \mathring{G}(t-t')A(t') dt' = L(t),$$

gdzie

$$(6.30) \quad \begin{aligned} G(t) &= 2G_1(t) + G_2(t), \\ L(t) &= \mathring{G}_2G_1(t) + \int_0^t G_1(t-t')\mathring{G}_2(t') dt'. \end{aligned}$$

<sup>27</sup> Szczegóły można znaleźć w pracy [40].

<sup>28</sup> Ta sama funkcja gra decydującą rolę w zagadnieniu kuli [40].

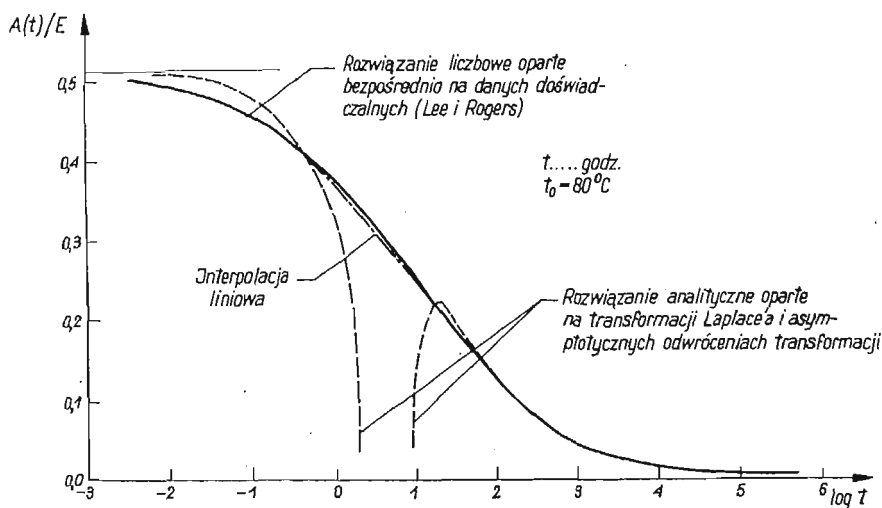
<sup>29</sup> Przypominamy wzór (2.13).

Widać stąd, że  $A$  spełnia liniowe równanie całkowe typu Voltery. Wreszcie, jeżeli odpowiednia transformacja Laplace'a istnieje, to otrzymujemy z (6.29) i (6.30) zależność

$$(6.31) \quad \bar{A}(\eta) = \frac{\bar{G}_1(\eta)\bar{G}_2(\eta)}{2\bar{G}_1(\eta) + \bar{G}_2(\eta)}.$$

Wzór (6.27) otrzymano w pracy [40] przez zastosowanie transformacji Laplace'a do pary równań całkowych (6.24), a następnie odwrócenie otrzymanej w wyniku pary równań algebraicznych. Jak później zauważyli LEE i ROGERS [41] i co jest jasne z poprzednich rozważań, nie ma tu potrzeby wprowadzania transformacji całkowych.

Podobna uwaga odnosi się do obliczeń numerycznych w rozpatrywanym rozwiązaniu, które wykonano w pracy [40] dla handlowego polimetakrylanu metyloвого opierając się na dostępnych danych dotyczących relaksacji i na pomiarach funkcji przesunięcia  $\varphi$ . W związku z tym funkcja pomocnicza  $A$  została wyznaczona z (6.31).



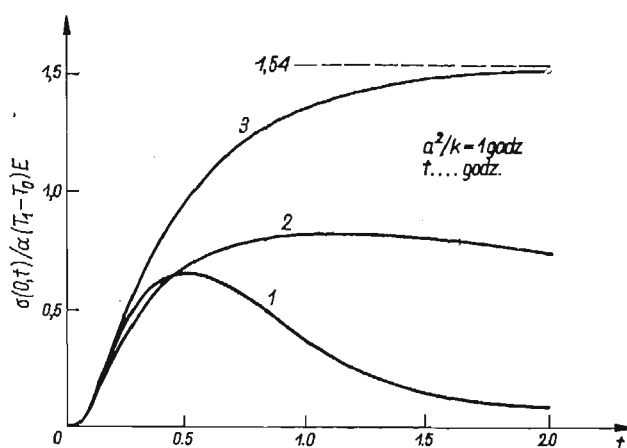
Rys. 1  $A(t)$  dla polimetakrylanu

Wymagający dużej pracy tok postępowania zastosowany w pracy [40] polega, po pierwsze, na dobraniu odpowiedniego przybliżenia analitycznego dla funkcji relaksacji umożliwiającą analityczne obliczenie  $\bar{A}$ , a następnie na znalezieniu poszukiwanych wartości  $A$  za pomocą dwóch wzorów asymptotycznych na transformacje odwrotne: jednego dla dużych, drugiego dla małych wartości czasu.

Inaczej postąpili E. H. LEE i T. G. ROGERS [41] obliczając  $A$  przez rozwiązanie równania całkowego (6.29) wprost na matematycznej maszynie elektronicznej. Ich sposób postępowania jest bardziej bezpośredni i okazał się dokładniejszy.

Wartości  $A$  otrzymane za pomocą przedstawionych wyżej dwóch sposobów porównano na rys. 1, na którym przez  $E$  oznaczono moduł Younga odpowiadający sprężystej reakcji ciała w chwili początkowej. Rysunek 2 zaczerpnięto z pracy [40] i przedstawiono na nim zależność naprężenia normalnego  $\sigma$  w płaszczyźnie środkowej od czasu dla płyty wykonanej z polimetakrylanu metyloвого. W obliczeniach przyjęto, że  $a^2/k = 1$  godz.,  $k$  jest termiczną dyfuzyjnością materiału; takie założenie odpowiada płycie o grubości  $2a$  równej w przybliżeniu 5,7 cm. W zadaniu tym historia pola temperatury jest rozwiązaniem elementarnego zagadnienia przewodnictwa cieplnego: cała płyta znajdowała się w stanie początkowym w równomiernej temperaturze  $T_0 = 80^\circ\text{C}$ ; w chwili  $t = 0$  powierzchnie płyty zostały nagle poddane działaniu temperatury,  $T_1 = 110^\circ\text{C}$ , i następnie utrzymane w tej temperaturze.

Krzywa 1 na rys. 2 podaje wartości naprężeń otrzymane ze wzoru (6.27). Krzywa 2 przedstawia zachowanie się materiału w przypadku pominięcia za-



Rys. 2. Zagadnienie płyty. Zależność  $\sigma$  od czasu w płaszczyźnie środkowej dla polimetakrynu.

1. Własności materiałowe zależne od temperatury  $T_0 = 80^\circ\text{C}$ ,  $T_1 = 110^\circ\text{C}$ .
2. Własności materiałowe niezależne od temperatury oparte na zachowaniu się w temperaturze  $95^\circ\text{C}$ .
3. Własności sprężyste oparte na zachowaniu się początkowym.

leżności parametrów fizycznych ciała od temperatury, a cała analiza oparta jest na danych dotyczących relaksacji dla średniej temperatury powierzchni wynoszącej  $95^\circ\text{C}$ . Wreszcie krzywa 3 podaje wyniki w przypadku, gdy pominię się wpływ lepkości i wyznaczy naprężenia  $\sigma$  zakładając czysto sprężyste zachowanie się materiału i przyjmując stałe sprężystości odpowiadające stanowi początkowemu ciała lepkospężystego. Widać z rysunków, że te trzy krzywe prawie pokrywają się w okresie początkowym wynoszącym około 10 minut, to znaczy wtedy, gdy «rzeczywiste» własności materiału są bliskie sprężystym i dzięki temu są niezależne od temperatury. W przybliżeniu przez pierwszych 20 minut krzywa 2 daje wartości naprężeń nieco niższe od przewidzianych

krzywą 1, ponieważ w tym okresie temperatura płaszczyzny środkowej jest niższa od średniej temperatury  $95^\circ$ , a co za tym idzie — rzeczywisty proces relaksacji jest wolniejszy od nakreślonego krzywą 2. Natomiast później krzywa 2 daje wartości naprężeń stopniowo większe od podanych krzywą 1, aż po upływie 2 godzin naprężenia rzeczywiste stają się o 15 procent mniejsze od odpowiednich wartości danych krzywą 2. Wyniki te wykazują raz jeszcze nie-realny charakter takich teorii naprężeń cieplnych ciała lepkosprężystego, które nie uwzględniają zależności własności materiału od temperatury.

Względne zalety bezpośredniego numerycznego całkowania równań całkowych w stosunku do techniki transformacji całkowych w analizie naprężeń lepkosprężystych zostały dalej przedyskutowane i zilustrowane w pracy E. H. LEE i T. G. ROGERSA [45]. Poza tym, że podejście takie lepiej wykorzystuje dane doświadczalne, nie wymaga ono dużych ekstrapolacji czasowych poza przedziałem czasu, obejmującym poszukiwane rozwiązanie zagadnienia. Tego rodzaju podejście rozszerza ponadto zakres analizy na zagadnienia, do których transformacja Laplace'a nie daje się zastosować. Do takich problemów należą zagadnienia mieszane, w których siły powierzchniowe i przemieszczenia są dane na podzbiorach brzegu zależnych od czasu, oraz zagadnienia, w których sam brzeg jest funkcją czasu (powierzchniowe topnienie).

Przykład liczbowy zagadnienia tego ostatniego rodzaju podaje praca [45], gdzie rozwiązanie zagadnienia kuli otrzymane w [40] uogólniono na przypadek topniejącego ciała kulistego. Oprócz tego w [45] podano formalne rozwiązanie zagadnienia topniejącej powłoki kulistej; dla brzegów utwierdzonych zagadnienie to rozpatrzono uprzednio [6].

Chociaż dopiero co opisane rozważania są obiecujące, to warto zauważyć, że zagadnienia brzegowe rozpatrywanej teorii sprowadzają się do rozwiązywania niezależnych równań całkowych tylko w wyjątkowych okolicznościach. Co więcej, wszystkie dostępne dzisiaj zastosowania zależą od możliwości rozdzielania całkowania względem czasu i przestrzeni. Mimo faktu, że pewne bardziej ogólne zagadnienia rozwiązać można obecnie tylko na drodze czysto liczbowej, nie powinno to pomniejszać potrzeby systematycznego rozwijania teorii całkowania.

## 7. Uwagi końcowe

W naszych poprzednich rozważaniach przyjmowaliśmy, że materiał jest izotropowy, zarówno, jeśli chodzi o własności mechaniczne, jak i termiczne. W przypadku anizotropowego liniowego materiału lepkosprężystego równania stanu (2.6) przyjmują postać:

$$(7.1) \quad \sigma_{ij} = (\varepsilon_{ij} - a_{ij}) * dG_{ijkl},$$

gdzie  $G_{ijkl}$  i  $a_{ij}$  są odpowiednio składowymi tensora funkcji relaksacji i tensora rozszerzenia termicznego. Poza tym zachodzą związki  $a_{ij} = a_{ji}$  oraz

$$(7.2) \quad G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}.$$

Pierwsze równanie (7.2) wynika z symetrii tensora naprężenia, a drugie nie pociąga za sobą zmniejszenia ogólności, gdyż również tensor odkształceń jest symetryczny. Poza tym zwykle przyjmuje się, że

$$(7.3) \quad G_{ijkl} = G_{klij}.$$

Te ostatnie związki symetrii wynikają z (7.2) w przypadku szczególnym izotropii i wyrażają warunek niezależny. Dostępny teoretyczny dowód równości (7.3) opiera się na rozważaniach termodynamicznych i na zastosowaniu zasady wzajemności Onsagera<sup>30</sup>.

Jeżeli przyjmiemy, że warunki (7.3) są spełnione, to uogólnienie większości wyników teoretycznych rozpatrywanych w naszej pracy na przypadek jednorodnych ciał anizotropowych nie przedstawia trudności. Odnosi się to w szczególności do zasady odpowiedniości rozpatrzonej w pp. 4 i 6, która w takim przypadku prowadzi zgodnie z rozważaniami M. A. Biota [49] do związków pomiędzy liniowymi teoriami ciał lepkospężystych i sprężystych. Rozszerzenie tej zasady na przypadek niejednorodnych (izotropowych lub anizotropowych) ciał lepkospężystych jest zupełnie elementarne<sup>31</sup>, choć ma niewielkie znaczenie praktyczne.

Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko quasi-statyczne naprężenia termiczne w ciałach lepkospężystych. Wpływ bezwładności w termo-lepkospężystości był w ostatnich czasach przedmiotem wielu badań specjalnych. Spośród nich zacytujemy publikacje A. M. Katasonowa [51], W. Nowackiego [23, 52, 53, 54] i M. Żórawskiego [55, 56, 57, 58]. Trudno tu ocenić fizykalne znaczenie tych prac, gdyż niezmiennie zakłada się w nich, że własności materiału są niezależne od temperatury, nie podaje się ilościowej analizy wyników oraz zwykle dotyczą one tylko nagłych zmian temperatury<sup>32</sup>.

Dotychczas nie rozpatrywano jeszcze efektów sprzężenia termo-mechanicznego, które jak dotąd są konsekwentnie pomijane. Interesujące studium tych efektów podał S. C. HUNTER [60], którego analiza dotyczy termo-reologicznie prostych ciał lepkospężystych. Jak sugeruje bezpretensjonalny tytuł pracy [60], temat ten wymaga dalszych badań.

Należy wreszcie jeszcze raz podkreślić, że praca nasza ogranicza się w zasadzie do analizy liniowych naprężeń termicznych w ciałach lepkospężystych. Nie poświęciliśmy więc w niej uwagi wpływowi nieliniowych efektów lepkości ani odkształceniom skończonym, które należy brać pod uwagę przy realnym podejściu do naprężeń termicznych w metalach w podwyższonej temperaturze.

Podziękowanie. Autor jest zobowiązany Panu M. E. GURTINOWI, który przeczytał rękopis pracy i zgłosił szereg uwag krytycznych oraz pomocnych wskazówek.

<sup>30</sup> Por. np. M. A. Biot [46 i 47]. Rozważania tego rodzaju można znaleźć w komunikacie T. G. Rogersa i A. C. Pipkina [48] oraz pracy [5]. Zauważymy, że odpowiednik warunku (7.3) w teorii sprężystości wynika z istnienia potencjału sprężystego.

<sup>31</sup> W związku z tym wymienimy [20 i 44] oraz pracę H. W. Hiltona i S. B. Donga [50].

<sup>32</sup> Pokrewne badania w teorii termosprężystości (por. np. [59]) wykazują, że rozmiar takich wpływów inercyjnych niepomiarowo maleje, gdy zarzuci się fikcję nagłego przyłożenia temperatury.

## Literatura cytowana w tekście

- [1] M. E. GURTIN and ELI STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 11 (1962), 4, 20.
- [2] O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, Springer, Berlin 1929.
- [3] B. A. BOLEY and J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, Wiley, New York 1960.
- [4] V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, Atti R. Accad. Linc., 2, 18 (1909), 295.
- [5] M. E. GURTIN and ELI STERNBERG, *A reciprocal theorem in the linear theory of anisotropic viscoelastic solids*, Report No 17, Contract No.-562(25), Brown University, wrzesień, 1962.
- [6] ELI STERNBERG and M. E. GURTIN, *Further study of thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties*, Report No. 2, Contract Nonr-562(30), Brown University, październik 1961; Sympozjum I.U.T.A.M. w Haifie 1962 (Efekty drugiego rzędu w sprężystości, plastyczności i dynamice cieczy).
- [7] W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, London 1963.
- [8] M. HIEKE, Eine indirekte Bestimmung der Airyschen Fläche bei un stetigen Wärmespannungen, Z. angew. Math. Mech., 35 (1955), 285.
- [9] H. H. HILTON, *Thermal distributions without thermal stresses in nonhomogeneous media*, J. Appl. Mech., 1, 26 (1959), 137,
- [10] M. E. GURTIN, *Variational principles in the linear theory of viscoelasticity*, Report No 18, Contract Nonr-562(25), Brown University, Styczeń 1963.
- [11] S. AL KHOZAIE and ELI STERNBERG, *On Green's functions and Saint Venant's principle in linear viscoelasticity theory*, w przygotowaniu.
- [12] C. W. BORCHARDT, *Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 9 (1873).
- [13] HEINZ PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer, Wien 1959.
- [14] A. H. CORNELIUSSEN and E. H. LEE, *Stress distribution analysis for linear viscoelastic materials*, Proc., I.U.T.A.M., Colloquium on creep in structures, Palo Alto 1960; Springer, Berlin 1962.
- [15] T. ALFREY, *Non-homogeneous stresses in visco-elastic media*, Quart. Appl. Math., 2, 2 (1944), 113.
- [16] H. S. TSIEN, *A generalization of Alfrey's theorem for viscoelastic media*, Quart. Appl. Math., 1, 8 (1950), 104.
- [17] W. T. READ, *Stress analysis for compressible viscoelastic materials*, J. Appl. Phys., 7, 21 (1950) 671.
- [18] M. A. BRULL, *A structural theory incorporating the effect of time-dependent elasticity*, Proc., First Midwestern Conf. Solid Mech., Urbana 1953.
- [19] E. H. LEE, *Stress analysis in visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Math., 2, 13 (1955), 183.
- [20] H. H. HILTON, H. A. HASSAN, H. G. RUSSELL, — *Analytical studies of thermal stresses in media possessing temperature-dependent viscoelastic properties*, Technical Report 53-322, Wright Air Development Center, wzesień 1953.
- [21] ELI STERNBERG, *On transient thermal stresses in linear viscoelasticity*, Proc., Third, U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1958.
- [22] W. NOWACKI, *Thermal stresses due to the action of heat sources in a viscoelastic space*, Arch. Mech. Stos., 1, 11 (1959), 111.
- [23] W. NOWACKI, *Transient thermal stresses in viscoelastic bodies (I)*, Arch. Mech. Stos., 5, 11 (1959), 649.
- [24] M. SOKOŁOWSKI, *Naprężenia cieplne w kuli wykonanej z materialu o własnościach lepko-sprężystych*, Księga Jubileuszowa Prof. W. Wierzbickiego, Warszawa 1959.
- [25] B. W. SHAFER and M. LEVITSKY, *Thermal bond stresses in casebonded viscoelastic propellant discs*, J. Aerospace Sci., 7, 29 (1962), 827.

- [26] A. M. FREUDENTHAL, *Effect of rheological behavior on thermal stresses*, J. Appl. Phys., 9, 25 (1954), 1110.
- [27] A. M. FREUDENTHAL, *On inelastic thermal stresses*, Von Mises Anniversary Volume, Academic Press, New York 1954.
- [28] A. M. FREUDENTHAL, *On inelastic thermal stresses in flight structures*, J. Aero. Sci., 11, 21 (1954), 772.
- [29] A. M. FREUDENTHAL, *Problems of structural design for elevated temperatures*, Trans. New York Acad. Sci., Ser. II, 4, 19 (1957), 328.
- [30] H. H. HILTON, *Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin type*, Proc. Second U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1954.
- [31] L. RONGVED, *Residual stress in glass spheres*, Report No 16, Contract Nonr-266(09), Columbia University, lipiec 1954.
- [32] J. H. WEINER and H. MECHANIC, *Thermal stresses in free plates under heat pulse inputs*, Technical Report 54-428, Wright Air Development Center, Marzec 1957.
- [33] H. G. LANDAU, J. H. WEINER, and E. E. ZWICKY Jr., *Thermal stress in a viscoelastic-plastic plate with temperature-dependent yield stress*, J. Appl. Mech., 2, 27 (1960), 297.
- [34] B.D. AGGARWALA, *Thermal stresses in spherical shells of viscoelastic materials*, Z. angew. Math. Mech., 40 (1960), 482.
- [35] L. W. MORLAND and E. H. LEE, *Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation*, Trans. Soc. Rheology, 4 (1960), 233.
- [36] H. LEADERMAN, *Elastic and creep properties of filamentous materials*, Textile Foundation, Washington, D. C., 1943.
- [37] J. D. FERRY, *Mechanical properties of high molecular weight*, J. Amer. Chem. Soc., 72 (1950), 3746.
- [38] F. SCHWARZL and A. J. STAVERMAN, *Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior*, J. Appl. Phys., 23 (1952), 838.
- [39] A. J. STAVERMAN and F. SCHWARZL, *Linear deformation behavior of highpolymers*, Chapter 1 w: *Die Physik der Hochpolymeren*, Springer, Berlin 1956.
- [40] R. MUKI and ELI STERNBERG, *On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties*, J. Appl. Mech., 2, 28 (1961), 193.
- [41] E. H. LEE and T. G. ROGERS, *Solution of viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation data*, Interim Technical Report No 1, Grant DA-ARO(D)-31-124-G54, Brown University, sierpień 1961. Ukaże się w J. Appl. Mech.
- [42] ELI STERNBERG and M. E. GURTIN, *Uniqueness in the theory of thermo-rheologically simple ablating viscoelastic solids*, Report No. 16, Contract Nonr-562(25), Brown University, wrzesień 1962.
- [43] R. D. MINDLIN and M. G. SALVADORI, *Analogies*, w: *Handbook of experimental stress analysis*, Wiley, New York 1950.
- [44] H. H. HILTON and H. G. RUSSEL, *An extension of Alfrey's analogy to thermal stress problems in temperature dependent linear viscoelastic media*, J. Mech. Phys. Solids, 9 (1961), 152.
- [45] E. H. LEE and T. G. ROGERS, *Nonlinear effects of temperature variation in stress analysis of isothermally linear viscoelastic materials*, Report No 3, Contract Nonr-562(30), Brown University, Maj 1962. Ukaże się w sprawozdaniach z Sympozjum I.U.T.A.M. w Haifie 1962 (Efekty drugiego rzędu w sprężystości, plastyczności i dynamice cieczy).
- [46] M. A. BIOT, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., 11, 25 (1954), 1385.
- [47] M. A. BIOT, *Linear thermodynamics and the mechanics of solids*, Proc., Third U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1958.
- [48] T. G. ROGERS and A. C. PIPKIN, *Asymmetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity*, Report No 83, Contract Nonr-562(10), Brown University, Lipiec 1962. Ukaże się w: Z. angew. Math. Phys.

- [49] M. A. BIOT, *Dynamics of viscoelastic anisotropic media*, Proc., Fourth Midwestern Conf. Solid Mech., Lafayette 1955.
- [50] H. H. HILTON and S. B. DONG, *An analogy for anisotropic, non-homogeneous, linear viscoelasticity including thermal stresses*. Ukaże się jako Aerojet-General Corp. Technical Report TP120SRP.
- [51] А. М. Катасонов, *Распространение сферических термо-вязко-упругих возмущений*, Вестник Моск. Университета, Сер. Мат. Мех. Астр. Физ. Хим., 3, 1957.
- [52] W. NOWACKI, *Thermal stress propagation in visco-elastic bodies (I)*, Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Tech., 4, 7 (1959), 257.
- [53] W. NOWACKI, *Thermal stress propagation in visco-elastic bodies (II)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 7-8, 7 (1959), 459.
- [54] W. NOWACKI, *Ausbreitung der Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern*, Österr. Ing. Arch., 1-4, 15 (1961), 115.
- [55] M. ŻÓRAWSKI, *States of stress generated in a viscoelastic semi-space by a flat heat source*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 4, 8 (1960), 161.
- [56] M. ŻÓRAWSKI, *Determination of stresses generated in a layer and a viscoelastic closed spherical shell*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 10, 8 (1960), 557.
- [57] M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a visco-elastic space and corresponding basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., 13, 2 (1961), 257.
- [58] M. ŻÓRAWSKI, *Dynamic nucleus of thermoelastic strain in viscoelastic space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 2, 9 (1961), 77.
- [59] ELI STERNBERG and J. G. ШАКРАВОРТУ, *On inertia effects in a transient thermoelastic problem*, J. Appl. Mech., 26 (1959), 503.
- [60] S. C. HUNTER, *Tentative equations for the propagation of stress, strain and temperature fields in viscoelastic solids*, J. Mech. Phys. Solids, 9 (1961), 39.

## Р е з ю м е

## ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ВЯЗКО-УПРУГИХ ТЕЛАХ

Настоящая работа, занимающаяся исключительно телами, которые в изометрических условиях и для инфинитезимальных деформаций обладают свойствами линейной вязко-упругостью, преследует две цели. Во первых дается систематический эскиз развития достигнутого в последнее время, в теории, а во вторых знакомит читателя с подробными вопросами и с соответствующей литературой.

Эта работа ограничивается анализом квази-статистических термоупругих напряжений в однородных изотропных телах, обладающих линейной вязко-упругостью.

В первой части работы (§ 2, 3, 4) излагается теория термо — вязко-упругости тел при предположении независимости их механических свойств от температуры. Параграфы 5 и 6 касаются вязко-упругих тел, свойства которых зависят от температуры, обращая главное внимание на теорию термо-реологически простых материалов.

Результаты, полученные в работе опираются, в значительной степени на одну из предыдущих работ, касающихся изометрической теории [1]. Широкое использование свойств свертки Стелтьгеса, облегчает манипуляцию с прерывными функциями времени. Некоторые теоретические результаты приведенные в тексте работы, не смотря на их элементарный характер, вероятно еще не известны.

## S u m m a r y

## ON THE ANALYSIS OF THERMAL STRESSES IN VISCOELASTIC SOLIDS

The present paper, which is devoted exclusively to solids that under isothermal conditions and for infinitesimal strains exhibit linear viscoelastic behaviour, is intended to serve a dual purpose.



First, an attempt is made to sketch a systematic account of relevant recent theoretical developments, second, it supplies a guide to available specific results and to the literature on the subject at hand.

The present treatment is mainly confined to the quasi — static analysis of thermal stresses in homogeneous and isotropic linear viscoelastic bodies. Sections 5, 6 of the paper deal with temperature — dependent viscoelastic solids, particular emphasis being placed on the theory of thermorheologically simple materials.

BROWN UNIVERSITY, PROVIDENCE, USA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 maja 1963 r.*

---



ZALEŻNOŚĆ «NAPRĘŻENIE-ODKSZTAŁCENIE»  
W PRZYPADKU PROSTEGO ROZCIĄGANIA TWORZYW  
O ŁAŃCUCHOWEJ BUDOWIE CZĄSTECZEK

ANDRZEJ WILCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Praktyczne obliczenia wytrzymałościowe w olbrzymiej większości przypadków wymagają stosowania pewnego modelu matematycznego rzeczywistego ciała odkształcalnego.

Jednym z najprostszych modeli, stosowanych w klasycznej teorii sprężystości, jest model ciała stałego Hooke'a dający się opisać równaniem

$$(1.1) \quad \sigma = \varepsilon E$$

i przedstawiający prostą proporcjonalność pomiędzy naprężeniem a odkształceniem. W większości przypadków praktycznych tak prosty związek jest zupełnie wystarczający. W pewnych jednak zagadnieniach szczególnych, przy zastosowaniu tworzyw kauczukopodobnych, gdzie mogą wchodzić w grę odkształcenia rzędu jedności, odchylenia od prawa Hooke'a są tak duże, że nie może ono mieć zastosowania. W takich przypadkach możliwe są dwa sposoby postępowania.

Jednym z nich jest doświadczalne zdjęcie charakterystyki «naprężenie-odkształcenie», a następnie prowadzenie obliczeń w konkretnym zagadnieniu za pomocą rachunku różnicowego. Dla potrzeb techniki jednak związek przybliżony w postaci zamkniętej jest rzeczą o wiele wygodniejszą niż dokładne, lecz trudne do dyskusji rozwiązanie tablicowe. Z tego powodu aproksymuje się zazwyczaj krzywą doświadczalną za pomocą odpowiednio dobranej funkcji lub wielomianu. Jednak przy takim sposobie postępowania uzyskuje się przeważnie rozwiązanie w postaci zamkniętej, lecz obciążone błędem aproksymacji charakterystyki materiału. Zazwyczaj też funkcje aproksymujące, dobierane przez poszczególnych badaczy, różnią się od siebie w sposób zasadniczy, co zmusza często do prowadzenia większej liczby badań doświadczalnych niż w przypadku, gdy znana jest dokładna zależność naprężenie-odkształcenie, którą należy poprawić tylko współczynnikiem doświadczalnym.

Innym sposobem postępowania jest określenie związku naprężenie-odkształcenie na drodze teoretycznej w oparciu o metody fizyki statystycznej i budowę wewnętrzną materiału. Otrzymuje się wówczas rzeczywisty charakter zależ-

ności, której stałe dobiera się w sposób doświadczalny zmniejszając równocześnie ilość potrzebnych badań.

Znana zależność naprężenie–odkształcenie dla tworzyw o budowie łańcuchowej w postaci

$$(1.2) \quad \sigma' = kTL \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right),$$

gdzie  $\lambda$  można określić ze związku

$$(1.3) \quad \lambda = 1 + \varepsilon,$$

uzyskana niezależnie przez W. KUHNA [1] i F. T. WALLA [2] w oparciu o metody fizyki statystycznej, nie oddaje dostatecznie dokładnie przebiegu odkształcenia, jak to wykazuje np. J. FLORY [3] na przykładzie badania kauczuku.

Praca niniejsza jest próbą znalezienia zależności naprężenie–odkształcenie na drodze teoretycznej w oparciu o metody fizyki statystycznej i budowę wewnętrzną tworzywa przy założeniach ogólniejszych niż stosowane w cytowanych pracach Kuhna i Walla.

Stosowany w dalszej części związek (2.5) jest asymptotycznym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej  $x$ , uzyskany przez autora w pracy [7], przy założeniu dowolnej zmiany długości łańcucha  $n$  cząstek, w granicach  $[x-1, x+1]$ , w przypadku dodania do łańcucha cząstki  $n+1$ . Statystyka Kuhna i Walla natomiast została otrzymana przy założeniu, że w rozważanym przypadku długość łańcucha cząstek może wynosić albo  $x+1$ , albo  $x-1$ .

## 2. Założenia

1. Pod uwagę wzięto tworzywo o łańcuchowej budowie cząsteczek, którego łańcuchy mają długość zawartą w przedziale

$$(2.1) \quad 0 \leq l < \infty$$

o gęstości prawdopodobieństwa rozkładu długości danej związkem

$$(2.2) \quad \Pi(m) = mq^{m-1}(1-q)^2,$$

uzyskany przez J. FLORY [4], gdzie  $q$  oznacza stopień polimeryzacji tworzywa, a  $m$  ciężar cząsteczkowy jednej jego cząsteczki. Zależność (2.1) można wyrazić za pomocą ciężaru cząsteczkowego  $m$  w postaci

$$(2.3) \quad 0 \leq \nu n l_0 < \infty,$$

gdzie  $l_0$  oznacza długość jednego «ogniwa» łańcucha cząsteczek, czyli «długość» wiązania chemicznego, podczas gdy  $\nu$  i  $n$  związane są ze sobą zależnością

$$(2.4) \quad m = \nu n,$$

w której  $\nu$  jest liczbą naturalną, określającą ilość wiązań chemicznych w tworzywie o ciężarze cząsteczkowym  $m=1$  czyli w monomerze.

2. Prawdopodobieństwo stanu tworzywa przyjęto w postaci

$$(2.5) \quad f(x, n) = (\pi n)^{-1/2} e^{-x^2/n}$$

zbliżonej do proponowanej przez KUHNA [1] zależności

$$f(x, n) = (2\pi n)^{1/2} e^{-x^2/2n},$$

a będącej nieco lepszym przybliżeniem, uzyskanym przy ogólniejszych niż w pracy [1] założeniach [7]. W związku (2.5)  $x$  oznacza odległość końca łańcucha  $n$  atomów od początku obranego układu.

3. Zmianę energii wewnętrznej tworzywa w procesie odkształcenia przyjęto, zgodnie z pracą Hauka i Neumana [5], jako równą zero w dużym zakresie odkształceń.

4. Zmianę objętości w procesie odkształcenia przyjęto równą zero, co sprówadza się do związku

$$(2.6) \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

lub też dla materiału makroskopowo izotropowego

$$(2.7) \quad \lambda_1 \lambda_2^2 = 1,$$

jeżeli przez  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  oznaczyć wydłużenia względne w trzech prostopadłych kierunkach 1, 2, 3, co jest słuszne dla większości tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek przynajmniej w pewnym, zazwyczaj dobrym, przybliżeniu.

### 3. Średnie prawdopodobieństwo stanu

Traktując dla dostatecznie dużych  $n$  zmienną losową  $m$  jako ciągłą i wprowadzając (2.4) oraz

$$(3.1) \quad \beta = \nu |\log q|,$$

a także biorąc pod uwagę, że stopień polimeryzacji nie może przekraczać wartości  $q = 1$ , można zapisać rozkład (2.2) w postaci

$$(3.2) \quad A(n) = \beta^2 n e_i^{-\beta n},$$

jeżeli spełniony jest warunek (2.3) i wprowadzona normalizacja rozkładu.

Związek (2.5) określa prawdopodobieństwo stanu jednej cząsteczki tworzywa w zależności od zmiennych  $x, n$ . Powstaje zagadnienie, jaka jest spodziewana gęstość prawdopodobieństwa stanu, jeżeli rozkład zmiennej  $n$  dany jest przez (3.2). Oznaczając poszukiwaną gęstość prawdopodobieństwa przez  $f(x)$  zgodnie z określeniem wartości spodziewanej można napisać

$$(3.3) \quad f(x) = \int_0^{\infty} f(x, n) A(n) dn.$$

Wykonując całkowanie otrzymuje się [6]

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\beta} (1 + 2\sqrt{\beta} |x|) e^{-2\sqrt{\beta} |x|}.$$

Aby uniknąć wartości bezwzględnej niewygodnej w operowaniu, zmieniono umownie przedział zmienności argumentu  $x$  ograniczając go jedynie do wartości

dotatnich. Wówczas poszukiwany rozkład przybiera postać

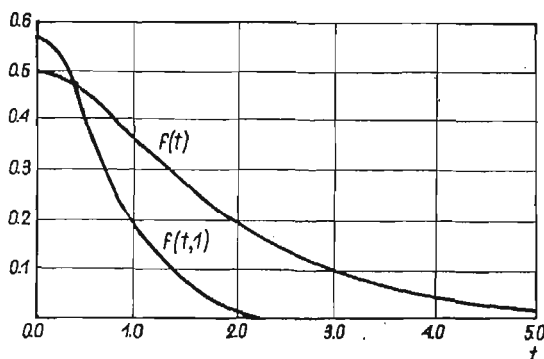
$$(3.4) \quad f(x) = \sqrt{\beta}(1+2\sqrt{\beta}x)e^{-2\sqrt{\beta}x}, \quad x \geq 0.$$

Można wreszcie wprowadzić zmienną standaryzowaną

$$(3.5) \quad t = 2\sqrt{\beta}x;$$

skąd uzyskuje się rozkład standaryzowany

$$(3.6) \quad f(t) = \frac{1}{2}(1+t)e^{-t}, \quad t \geq 0.$$



Rys. 1

W celu zobrazowania różnic pokazano na rys. 1 rozkład (3.6) oraz rozkład (2.5) po wprowadzeniu zmiennej standaryzowanej  $\sqrt{n} \cdot t = x$ .

#### 4. Zmiana entropii w procesie rozciągania

Gęstość prawdopodobieństwa stanu nieodkształconego w przestrzeni trójwymiarowej można określić związkiem

$$(4.1) \quad W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)e^{-(\xi+\eta+\zeta)},$$

gdzie przez  $\xi, \eta, \zeta$  oznaczono zmienne standaryzowane w kierunkach  $x, y, z$ . Zgodnie z podstawową zależnością termodynamiki statystycznej, wiążącej entropię z prawdopodobieństwem stanu,

$$(4.2) \quad S = k \log W + C,$$

gdzie  $k$  oznacza stałą Boltzmana,  $C$  pewną stałą addytywną, entropię jednego łańcucha, opisanego prawdopodobieństwem stanu (4.1), zapisuje się w postaci

$$(4.3) \quad S(\xi, \eta, \zeta) = k[\log(1+\xi) + \log(1+\eta) + \log(1+\zeta) - (\xi + \eta + \zeta)] + C.$$

Przyjmując zgodnie z (2.7) odkształcenia w jednoosiowym stanie naprężenia przy rozciąganiu

$$(4.4) \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

gdzie kierunki 1, 2, 3 odpowiadają odpowiednio zmiennym losowym  $\xi, \eta, \zeta$  i wyrażając przemieszczenia końca łańcucha w postaci

$$(4.5) \quad \xi = \lambda \xi_0, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \eta_0, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \zeta_0$$

uzyskuje się dla gęstości prawdopodobieństwa stanu odkształconego wzór

$$(4.6) \quad W_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda}\right) (1 + \eta \sqrt{\lambda}) (1 + \zeta \sqrt{\lambda}) e^{-\frac{\xi}{\lambda} - \sqrt{\lambda}(\eta + \zeta)}.$$

Wartość spodziewaną entropii jednego łańcucha w stanie odkształconym można znaleźć w zależności

$$(4.7) \quad S_0(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty S(\xi, \eta, \zeta) W_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Korzystając ze związków (4.3), (4.6) i (4.7) można wykazać, że entropię łańcuchów zawartych w 1 cm<sup>3</sup> tworzywa określa związek

$$(4.8) \quad S(\lambda) = kL \left[ S_1(\lambda) + 2S_1\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right] + C,$$

gdzie  $L$  oznacza liczbę Loschmidta, a  $S_1(\lambda)$  dane jest zależnością

$$(4.9) \quad S_1(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\log(1+\xi) - \xi] \left(1 + \frac{\xi}{\lambda}\right) e^{-\frac{\xi}{\lambda}} d\xi.$$

Aby określić wyrażenie (4.9), wyznaczamy zgodnie z [6] całki

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \log(1+\xi) e^{-\frac{\xi}{\lambda}} d\xi &= -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{\lambda}} Ei\left(-\frac{1}{\lambda}\right), \\ \frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty \xi \log(1+\xi) e^{-\frac{\xi}{\lambda}} d\xi &= \frac{1}{2} \left[ \lambda - (\lambda-1) e^{\frac{1}{\lambda}} Ei\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \right], \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi e^{-\frac{\xi}{\lambda}} d\xi &= \frac{1}{2} \lambda^2, \\ \frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty \xi^2 e^{-\frac{\xi}{\lambda}} d\xi &= \lambda^2. \end{aligned}$$

W powyższych związkach  $Ei(x)$  oznacza wykładniczą funkcję całkową.

Sumując uzyskane wyniki (4.10) otrzymujemy:

$$(4.11) \quad S_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ (2-\lambda) e^{\frac{1}{\lambda}} Ei\left(-\frac{1}{\lambda}\right) + \lambda - 3\lambda^2 \right].$$

Na podstawie (4.11) można napisać

$$(4.12) \quad S_1\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{2} \left[ \left(2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{\sqrt{\lambda}} Ei(-\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 3 \frac{1}{\lambda} \right].$$

Zgodnie z (4.8) można wyrazić entropię 1 cm<sup>3</sup> objętości tworzywa za pomocą (4.11) i (4.12) w postaci

$$(4.13) \quad S(\lambda) = \frac{1}{2} kL \left[ (2 - \lambda) e^{\frac{1}{\lambda}} Ei\left(-\frac{1}{\lambda}\right) + \right. \\ \left. + 2 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{\sqrt{\lambda}} Ei(-\sqrt{\lambda}) - 3 \left(\lambda^2 - \frac{2}{\lambda}\right) + \lambda + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \right] + C.$$

Zależność (4.13) przedstawia związek pomiędzy entropią układu a jego odkształceniem.

### 5. Zależność naprężenie–odkształcenie

W celu uzyskania zależności naprężenie–odkształcenie należy powiązać ze sobą siłę lub naprężenie z entropią układu. Można do tego celu użyć związku Helmholtza, wynikającego z pierwszych dwóch zasad termodynamiki przy założeniu procesu izotermicznego, w postaci

$$(5.1) \quad dA = dU - TdS,$$

gdzie  $A$  oznacza energię swobodną,  $U$  energię wewnętrzną, a  $T$  temperaturę w skali Kelvina. Zgodnie z założeniami, inaczej niż w przypadku ciał krystalicznych, można przyjąć  $dU \approx 0$ , skąd otrzymuje się obowiązujący dla tworzyw o budowie łańcuchowej związek

$$(5.2) \quad dA = -TdS.$$

Jeżeli teraz przyrównać przyrost energii swobodnej układu do elementarnej pracy  $Pd\lambda$  i podstawić powyższe do (5.2), to po przekształceniach otrzymuje się

$$(5.3) \quad P = -T \frac{dS}{d\lambda},$$

gdzie  $P$  oznacza siłę rozciągającą objętość 1 cm<sup>3</sup>. Jeżeli siła  $P$  działa na sześcián o krawędzi równej 1 cm, to naprężenie wynosi

$$\sigma_0 = \frac{P}{1 \cdot 1} = P.$$

W trakcie odkształcenia krawędzie sześciánu doznają wydłużeń określonych zależnościami (4.4), wobec czego naprężenie rzeczywiste, odniesione do pola przekroju odkształconego, jest równe

$$(5.4) \quad \sigma = \frac{P}{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = \lambda P.$$



Kombinując związki (5.3) i (5.4) otrzymuje się ostateczny związek pomiędzy naprężeniem i entropią w postaci

$$(5.5) \quad \sigma = -\lambda T \frac{dS}{d\lambda}.$$

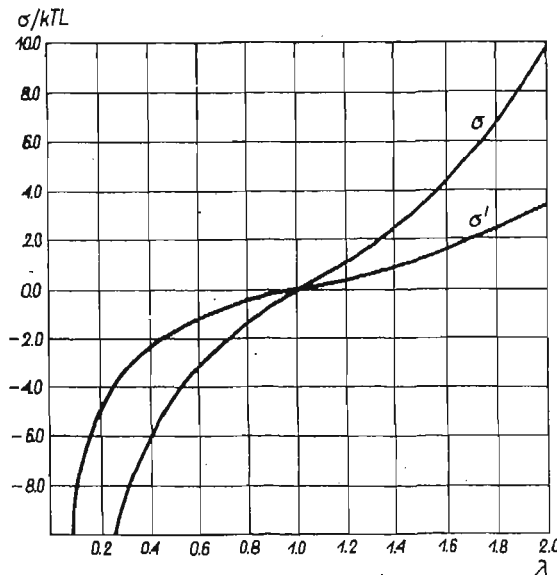
Różniczkując zależność (4.13) uzyskuje się

$$(5.6) \quad \frac{dS}{d\lambda} = -\frac{1}{2}kL \left[ 6\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\right) + \left(1 + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right)e^{\frac{1}{\lambda}} \text{Ei}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\right)e^{\sqrt{\lambda}} \text{Ei}(-\sqrt{\lambda}) \right].$$

Podstawiając (5.6) do (5.5) znajduje się związek między naprężeniem a odkształceniem w postaci

$$(5.7) \quad \sigma = kTL \left[ 3\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}kTL \left[ \left(\lambda + \frac{2}{\lambda} - 1\right)e^{\frac{1}{\lambda}} \text{Ei}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2\sqrt{\lambda} - 1\right)e^{\sqrt{\lambda}} \text{Ei}(-\sqrt{\lambda}) \right] \right].$$

Dla celów praktycznych zależność (5.7) daje się znacznie uprościć. Podstawiając wartości  $\lambda$  do związku (5.7) można łatwo stwierdzić, że dla wydłużeń do 100% lub skróceń do 50% pominięcie drugiego członu związku (5.7) prowadzi do błędów nie przekraczających 1%.



Rys. 2

Można zatem przyjąć, że związek naprężenie-odkształcenie jest wystarczająco dokładnie wyrażony zależnością

$$(5.8) \quad \sigma = kTL \left[ 3\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right].$$

Dla małych odkształceń, przy spełnieniu warunku  $|\varepsilon| < 1$ , można za pomocą (5.8) otrzymać wyrażenie asymptotyczne. Biorąc pod uwagę przybliżenia

$$\frac{1}{\lambda} \approx 1 - \varepsilon + \varepsilon^2, \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$$

znajduje się prostą zależność liniową:

$$(5.9) \quad \sigma = 7,5 k T L \varepsilon.$$

Na rysunku 2 pokazano wykresy funkcji (1.2) i (5.8). Należy zaznaczyć, że wynik (5.8) pozostaje w dobrej zgodności z rezultatami badań doświadczalnych przytoczonymi w pracy Flory [3].

## 6. Wnioski

Uzyskane w niniejszej pracy wyniki i ich zgodność z eksperymentem świadczą o zastosowaniu modelu matematycznego zjawiska, oddającego w dobry sposób zależność pomiędzy naprężeniem a odkształceniem. W rozważaniach swoich KUHN [1] i WALL [2] przyjmowali, że tworzywo utworzone jest z łańcuchów o pewnej średniej długości równej  $l_0 n_0$ , gdzie  $n_0$  jest średnią ilością wiązań chemicznych w makrocząsteczce tworzywa. W pracy niniejszej przyjęto, że długość poszczególnych łańcuchów cząsteczek jest różna i zmienna w granicach

$$0 \leq n l_0 < \infty,$$

przy czym ilość łańcuchów o długości zawartej w przedziale

$$[n, n + dn]$$

dana jest przez gęstość prawdopodobieństwa (3.2).

Zgodność otrzymanych wyników z doświadczeniami Flory [3] pozwala uważać, że przyjęte w pracy niniejszej uproszczenia są dopuszczalne i nie wprowadzają istotnych różnic.

## Literatura cytowana w pracy

- [1] W. KUHN, *Über die Gestalt fadenförmiger Moleküle in Lösungen*, Kolloid. Zeitschrift, 68, 2 (1934)
- [2] F. T. WALL, *Statistical thermodynamics of rubber*, J. Chem. Phys., 10, 132 (1942), 10, 485 (1942), 11, 527 (1943).
- [3] J. FLORY, *Network structure and the elastic properties of vulcanized rubber*, Ind. Eng. Chem., 38, 417 (1946).
- [4] J. FLORY, *Molecular size distribution in linear condensation polymers*, J. of Am. Chem. Soc., 58, 1877 (1936).
- [5] V. HAUKE, W. NEUMAN, *Die Temperaturabhängigkeit der Spannung in Kautschuk bei konstanter Dehnung*, Z. Phys. Chem., A 182, 285 (1938).
- [6] W. GROBNER, N. HOFREITER, *Intergral Tafeln*, Springer Verlag, Wien 1949.
- [7] A. WILCZYŃSKI, *Statystyka wewnątrzcząsteczkowa tworzyw o budowie łańcuchowej*, w druku.

## Р е з ю м е

ЗАВИСИМОСТЬ НАПРЯЖЕНИЕ-ДЕФОРМАЦИЯ  
В СЛУЧАЕ ОСЕВОГО РАСТЯЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА  
ЦЕПНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО СТРОЕНИЯ

Работа посвящена теоретическому исследованию зависимости напряжение-деформация, не являющейся функцией времени, в интервале «высокой упругости» для некоторых материалов с цепным строением. Пользуясь функцией распределения длин отдельных цепей частиц в материале, имеющей форму

$$A = \beta^2 n e^{-\beta n},$$

и функцией вероятности выпрямления одной цепной частицы

$$f(x, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-x^2/n},$$

было получено усредненное распределение вероятности выпрямления исследуемого материала, которое можно представить в виде

$$f(x) = \beta^{1/2} (1 + 2\beta^{1/2} x) e^{-2\beta^{1/2} x}.$$

Затем применяя положение о несжимаемости материала и основные термодинамические формулы была получена приближенная зависимость напряжение-деформация в форме

$$\sigma = kTL[3(\lambda^2 - \lambda^{-1}) - (\lambda - \lambda^{-1/2})],$$

которая лучше чем другие известные зависимости для исследуемой группы материалов согласуется с опытными данными.

## S u m m a r y

STRESS-STRAIN RELATION FOR CHAIN STRUCTURE MOLECULE MATERIALS  
IN CASE OF SIMPLE TENSION

The paper presents a theoretical investigation of the stationary stress-strain relation in the region of «high elasticity» for certain materials with internal structures of long chain molecules. Assuming the distribution of lengths of individual chains in the form

$$A = \beta^2 n e^{-\beta n}$$

and the distribution of probability of straightening of a particular chain molecule — in the form

$$f(x, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-x^2/n},$$

the mean distribution of probability of straightening of the considered material can be represented by the formula

$$f(x) = \beta^{1/2} (1 + 2\beta^{1/2} x) e^{-2\beta^{1/2} x}.$$

Applying furthermore the incompressibility hypothesis and the fundamental laws of thermodynamics, the approximate stress-strain relation can be derived, i.e.

$$\sigma = kTL[3(\lambda^2 - \lambda^{-1}) - (\lambda - \lambda^{-\frac{1}{2}})].$$

This relation proved to be in a better agreement with experiments than other formulae when applied to the group of materials under consideration.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 października 1962 r.*

---

## MODEL ELEKTRYCZNY TENSORA NAPRĘŻEŃ

HENRYK DZIA TL I K (WARSZAWA)

### Wstęp

Trwałość, lekkość i taniaść konstrukcji technicznych można osiągnąć tylko na podstawie wnikliwej analizy rozkładu naprężeń i odkształceń występujących w konstrukcji pod działaniem obciążeń. W prostych przypadkach do wyznaczenia naprężeń wystarczają metody nauki o wytrzymałości materiałów, oparte na hipotezie liniowego rozkładu naprężeń w badanych przekrojach, które pozostają płaskie również po odkształceniu elementu [1]. Założenia te są bliskie rzeczywistości tylko w takich elementach, w których wymiary przekrojów są bardzo małe w porównaniu z długością elementu, a więc w zasadzie metody wytrzymałości materiałów mogą być stosowane tylko do prętów i belek. W większości elementów konstrukcyjnych rozkład naprężeń nie jest jednak liniowy, lecz tworzy pole naprężeń o skomplikowanej budowie. Wymagania współczesnej techniki nie mogą być więc zaspokojone metodami wytrzymałości materiałów i zmuszają do szukania ścisłych rozwiązań opartych na teorii sprężystości, która pozwala wyznaczyć rozkład naprężeń bardziej zbliżony do rzeczywistości. Dzięki dobrej zgodności teorii ze zjawiskami zachodzącymi w rzeczywistych konstrukcjach metody teorii sprężystości można stosować do wszelkich elementów konstrukcyjnych, w których naprężenia nie wywołują odkształceń trwałych. Jeżeli jednak nie można pominąć faktu powstania odkształceń trwałych, to należy stosować metody teorii plastyczności, znajdujące się zresztą jeszcze w początkowej fazie swego rozwoju.

Przedmiotem naszych rozważań będzie teoria sprężystości, która została znakomicie opracowana w czasie swego przeszło stuletniego rozwoju i dzisiaj stanowi wypróbowane narzędzie do badania rozkładu naprężeń i odkształceń w elementach konstrukcyjnych o dowolnej postaci. Jednak struktura matematyczna teorii sprężystości, zawierająca wiele układów równań różniczkowych, jest bardzo skomplikowana i nastrocza ogromne trudności przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych. Jednym ze sposobów uproszczenia zagadnienia jest sprowadzenie go — w miarę możliwości — do układu płaskiego. Mamy wtedy do czynienia z dwiema zmiennymi niezależnymi  $i$ , po wprowadzeniu biharmonicznej funkcji naprężeń, z układem trzech równań różniczkowych; jednak i wtedy bezpośrednie rozwiązanie zagadnień bynajmniej nie jest łatwe.

## 2. Badanie naprężeń i odkształceń na modelach

Ze względu na trudności matematyczne od dawna stosuje się różne metody doświadczalne do rozwiązywania zagadnień teorii sprężystości.

Niewątpliwie najlepiej opracowaną metodą badania naprężeń na modelach jest elastooptyka [2, 3], która pozwala na bezpośrednie wyznaczanie linii jednakowego nachylenia osi naprężeń głównych (izokliny) i linii jednakowej różnicy naprężeń głównych (izochromy). Badania elastooptyczne wymagają jednak precyzyjnych urządzeń do obróbki modeli i kosztownej aparatury pomiarowej, a szczegółowe opracowanie wyników pochłania dużo czasu i wymaga personelu o wysokich kwalifikacjach technicznych.

Równoległe z metodą elastooptyki (lub czasem niezależnie od niej) stosuje się metody kruchych pokryć, analogii elektrycznej i analogii błonowej. Spośród innych doświadczalnych metod można jeszcze wymienić metodę rentgenograficzną i tensometryczną [3].

Znane metody doświadczalne poparte analizą matematyczną pozwalają na rozwiązanie wielu zagadnień teorii sprężystości, jednak najczęściej kosztem ogromnego nakładu pracy laboratoryjnej i rachunkowej. W ostatnich czasach rozpoczęto więc próby rozwiązywania zagadnień płaskich teorii sprężystości za pomocą układów elektrycznych, w których prądy lub napięcia spełniają równania biharmoniczne [9, 10].

Układy elektryczne przystosowane do rozwiązywania równań określonego typu stanowią wyspecjalizowane maszyny matematyczne wymagające jednak spełnienia warunków brzegowych danego zagadnienia metodą kolejnych przybliżeń. Ze względu na bardzo słabą zbieżność szeregów wyrażających warunki brzegowe funkcji naprężeń rozwiązywanie zagadnień płaskich teorii sprężystości nawet przy użyciu maszyn matematycznych bynajmniej nie jest łatwe.

Trudności doświadczalnych metod badania naprężeń na modelach wynikają najczęściej stąd, że wytworzenie pewnego pola wielkości fizycznych, np. pola prądów w modelach elektrycznych, analogicznego do pola naprężeń, nie prowadzi bezpośrednio do wytworzenia warunków brzegowych analogicznych do tych, jakie istnieją w stanie naprężenia oryginału. Spełnienie analogii wewnątrz modelu nie zapewnia jeszcze istnienia analogii na jego brzegach, czyli właściwie przy każdym modelowaniu znanymi metodami występują dwa zagadnienia: jedno związane z analogią naprężeń wewnątrz ciała, a drugie — z analogią naprężeń na jego brzegach i tylko równoczesne spełnienie tych analogii umożliwia rozwiązanie zagadnienia.

Nowa metoda modelowania elektrycznego naprężeń, opracowana przez autora w Instytucie Gospodarki Wodnej, pozwala zbudować taki model elektryczny stanu naprężenia, w którym analogie obciążenia na brzegach pociągają za sobą automatycznie spełnienie analogii naprężeń wewnątrz modelu.

## 3. Prądy zmienne wielofazowe w modelowaniu elektrycznym

W modelowaniu elektrycznym tensora naprężeń zastosowane są układy prądów wielofazowych [11] znanych z teorii prądów zmiennych. Pewne szcze-

góry, które są potrzebne do dalszych rozważań, wymagają jednak bliższego omówienia.

Przed wszystkim pod układem wielofazowych prądów zmiennych należy rozumieć każdy układ wieloprzewodowy odbiornika zasilanego prądami sinusoidalnymi przesuniętymi w fazie względem siebie, podczas gdy zwykle znaczenie tej nazwy jest związane raczej z układem generatora. Niewątpliwie takie rozumienie terminu «układ wielofazowy» pochodzi z silnego związania tego układu z energetyką, gdyż z reguły w rozdziale energii elektrycznej układem nadrzędnym jest układ generatora, natomiast układ odbiornika jest układem podporządkowanym.

W naszej pracy natomiast, w której chodzi o modelowanie elektryczne, układem podstawowym jest odbiornik (model), do którego powinien być przystosowany generator. Jeżeli np. do modelu doprowadzone są trzy prądy zmiennne, to powiemy, że układ jest trójfazowy, chociaż te trzy prądy mogą być pobrane z generatora, który ma cztery lub więcej faz. W ogóle korzystnie jest mieć do dyspozycji generator o dużej liczbie faz, np. 36, można wówczas bowiem otrzymać z niego każdy układ wielofazowy odbiornika o mniejszej liczbie faz przesuniętych względem siebie o dowolne kąty, będące wielokrotnością  $10^\circ$ . Takim generatorem może być np. silnik asynchroniczny z zatrzymanym wirnikiem. Jeżeli wirnik ma 36 żłobków, to w polu wirującym silnika wytwarza się w każdym przecię żłobka siła elektromotoryczna przesunięta o  $10^\circ$  względem siły elektromotorycznej indukowanej w przecię sąsiedniego żłobka.

Można również przyjąć jako generator prądów wielofazowych długą linię półfalową wykonaną w postaci łańcucha wielu czwórników — w każdym z takich czwórników prąd i napięcie są przesunięte względem prądów i napięć innych czwórników. Generatorem prądów wielofazowych może być każdy układ elektryczny odpowiedniej mocy, który może dostarczyć daną z góry liczbę prądów o znanym natężeniu, przesuniętych względem siebie o wyznaczone kąty przesunięcia fazowego.

Według podstawowej własności prądów zmiennych wielofazowych suma arytmetyczna prądów chwilowych i suma geometryczna wektorów przedstawiających prądy sinusoidalne są zawsze równe zeru [5]. Te własności mają również prądy  $m$ -fazowego odbiornika pobrane z  $n$ -fazowego generatora i wobec tego jest rzeczą oczywistą, że układ trzech faz odbiornika doprowadzanych z generatora czterofazowego można traktować jako układ prądu trójfazowego.

Konsekwentnie, układ dwóch faz odbiornika dwuzaciskowego przyłączony do generatora wielofazowego, np. trójfazowego, należy nazwać układem prądu dwufazowego. W literaturze technicznej jednak taki układ nazywa się zwykle prądem jednofazowym — prawdopodobnie dlatego, że stanowi właściwie jeden obwód. Do prądu jednofazowego w praktycznej elektrotechnice nie jest potrzebna interpretacja wektorowa, gdyż nie ma w nim dostrzegalnego w zastosowaniach przesunięcia fazowego.

W modelowaniu elektrycznym naprężeń będziemy traktować obwód dwubiegunowego odbiornika konsekwentnie jako układ prądu dwufazowego, jak

również będziemy stosowali do tego układu interpretację wektorową. Prąd dwufazowy przedstawiamy za pomocą dwóch wektorów równych co do wielkości lecz o przeciwnych zwrotach. Inaczej mówiąc przyjmujemy, że do jednego zacisku odbiornika doprowadzamy jeden prąd układu dwufazowego, a do drugiego zacisku — drugi taki sam prąd, lecz przesunięty w fazie o  $180^\circ$ .

W związku z przedstawieniem prądów wielofazowych za pomocą wektorów należy jeszcze zwrócić uwagę na pewną specyficzną cechę modelu elektrycznego, której na ogół nie mają zwykłe odbiorniki prądu wielofazowego. Odbiorniki te są połączone wewnątrz w gwiazdę lub wielobok, a punkt węzłowy gwiazdy lub boki wieloboku są punktami lub liniami, do których dopływają prądy wszystkich faz układu. Wektory reprezentujące prądy są zrównoważone, a zatem ich suma jest równa zeru. Suma momentów tych wektorów jest też równa zeru, ponieważ wszystkie wektory lub ich linie działania przecinają się w jednym punkcie.

W modelu elektrycznym natomiast wielofazowy układ prądów zmiennych jest doprowadzony nie do punktu węzłowego, lecz do pewnych miejsc obszaru płaskiego, w którym następuje spływ prądów wszystkich faz. W tym przypadku odbiornikiem jest cały obszar, który można nazwać obszarem węzłowym, a wektory prądów doprowadzonych do obszaru są związane nie z jednym punktem węzłowym, lecz z punktami przyłączenia prądu do obszaru. Wobec tego powinien być spełniony warunek znikania momentu układu wektorów. Warunek ten można jednak spełnić zawsze, ponieważ wszystkie wektory mogą być obrócone dokoła swych punktów zaczepienia o taki kąt, żeby ich linie działania przeszły przez jeden punkt. Jak wiadomo, obrót wektorów prądu następuje przy zmianie początku rachuby czasu.

#### 4. Gęstość prądu

Prąd stały w przewodniku jest określony przez pole wektorowe gęstości prądu  $\delta$  [4, 5, 6], czyli wektora, którego strumień przez dowolną powierzchnię jest równy prądowi  $I$ :

$$I = \int \delta \, ds.$$

Zgodnie z tą definicją prąd stały jest wielkością skalarną, a gęstość prądu jest wektorem, który ma ten sam kierunek co wektor pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  w przewodniku o przewodności właściwej  $\gamma$ :

$$\delta = \gamma \mathbf{E}.$$

Pole elektryczne prądu stacjonarnego jest polem potencjalnym, tak iż natężenie  $\mathbf{E}$  tego pola może być wyrażone jako gradient potencjału  $\Phi$ :

$$\mathbf{E} = - \text{grad} \Phi.$$

Pojęcie gęstości prądu, wprowadzone do rozważań nad rozkładem prądu stacjonarnego w przewodniku, nie daje się bezpośrednio zastosować do przy-



padku prądu zmiennego. Wynika to chociażby z układu równań Maxwella dla prądów quasi-stacjonarnych:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\delta}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\boldsymbol{\sigma};$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},$$

gdzie  $\mathbf{H}$  oznacza natężenie pola magnetycznego,  $\mathbf{B}$  indukcję magnetyczną,  $\mathbf{E}$  natężenie pola elektrycznego,  $\mathbf{D}$  indukcję elektryczną,  $\boldsymbol{\delta}$  gęstość prądu,  $\boldsymbol{\sigma}$  gęstość ładunków elektrycznych,  $\mu$  przenikalność magnetyczną i  $\varepsilon$  przenikalność dielektryczną ośrodka.

Przyjmując istnienie potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  pola magnetycznego,  $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ , otrzymujemy

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

czyli

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Wyrażenie w nawiasie jest więc polem bezwirowym o pewnym potencjale  $\Phi$ . Można je przedstawić jako gradient potencjału

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Phi,$$

skąd

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Obecność pochodnej potencjału wektorowego w tym wyrażeniu świadczy o tym, że pole elektryczne prądów quasi-stacjonarnych, a tym samym i pole gęstości prądu zmiennego, nie jest polem potencjalnym.

W przypadku prądów zmiennych gęstość prądu nie jest wektorem tak jak w przypadku prądu stałego, lecz wielkością fizyczną o innym charakterze, który wyjaśnimy w toku dalszych rozważań.

Najprostszym przykładem prądu jest prąd w pręcie przewodzącym o stałym przekroju. Jeżeli jest to prąd stały, to gęstość prądu  $\boldsymbol{\delta}$  otrzymamy dzieląc prąd  $I$  przez pole przekroju  $S$  prostopadłego do osi pręta:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{I}{S}.$$

Tak postępujemy w praktycznej elektrotechnice chcąc obliczyć np. gęstość prądu w przewodach sieci lub maszyn elektrycznych, przy czym zupełnie ginie wektorowy charakter gęstości prądu. W elektrotechnice teoretycznej natomiast

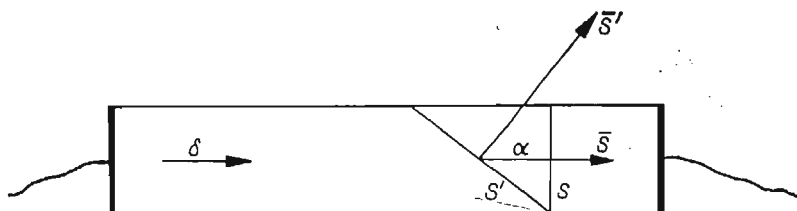
ważniejsza jest zależność odwrotna, która pozwala określić prąd  $I$  jako iloczyn skalarny wektora gęstości prądu i wektora powierzchni przekroju

$$I = \delta \cdot \mathbf{S}$$

albo

$$I = \delta S \cos \alpha.$$

Na rysunku 1 przedstawiono pręt wykonany z materiału przewodzącego o przewodności właściwej znacznie mniejszej niż przewodność metalowych elektrod przyłączonych do czołowych powierzchni pręta. Ze względu na symetrię



Rys. 1

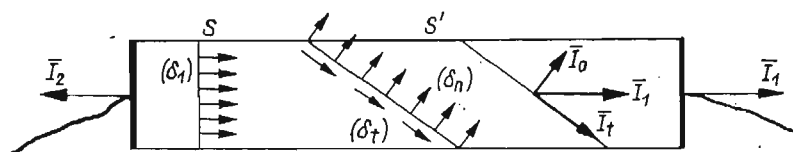
gęstość prądu  $\delta$  jest wszędzie jednakowa i skierowana wzdłuż osi pręta. Przez przekrój prostopadły do jego osi płynie prąd  $I = \delta \cdot \mathbf{S} = \delta S \cos 0^\circ = \delta S$ .

Przez przekrój nachylony  $S'$ , którego normalna tworzy kąt  $\alpha$  z osią pręta, płynie prąd  $I' = \delta \cdot \mathbf{S}' = \delta S' \cos \alpha$ , ale ponieważ  $S' = S / \cos \alpha$ , więc

$$I' = \delta \frac{S}{\cos \alpha} \cos \alpha = \delta S = I.$$

Wynik ten można było przewidzieć z góry, ponieważ przez dowolny przekrój prostopadły lub ukośny płynie ten sam prąd  $I$ .

W drugim przypadku przedstawionym na rys. 2 do tego samego pręta przyłączony jest prąd zmienny dwufazowy  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ . Jeżeli chcemy wyznaczyć prąd w przecie w ten sam sposób jak poprzednio, tj. jako iloczyn gęstości



Rys. 2

prądu i przekroju, to musimy przyjąć (jak to wykażemy w następnym punkcie), że gęstość prądu jest tensorem, który działając na wektor powierzchni  $\mathbf{S}$  daje wektor  $\mathbf{I}$ :

$$(\delta) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{I}.$$

W przekroju prostopadłym do osi pręta ( $\alpha = 0$ ) mamy tylko składową normalną tensora, który oznaczamy przez  $\delta_1$ . W tym przypadku prąd zmienny może być wyrażony wzorem

$$\delta_1 \mathbf{S} = \mathbf{I}.$$

W przekroju nachylonym  $S'$  gęstość prądu powinna być taką wielkością, która pomnożona przez przekrój daje dwie składowe prądu zmiennego  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_t$ . Wobec tego w przekroju nachylonym należy uwzględnić dwie wartości gęstości prądu:  $\delta_n$  dla składowej  $\mathbf{I}_n$  normalnej do przekroju  $S$ , oraz gęstość prądu  $\delta_t$  dla składowej  $\mathbf{I}_t$  stycznej do przekroju

$$\delta_n S' = \mathbf{I}_n, \quad \delta_t S' = \mathbf{I}_t.$$

Ponieważ

$$|S'| = \frac{S}{\cos \alpha}, \quad |\mathbf{I}_n| = I \cos \alpha, \quad |\mathbf{I}_t| = I \sin \alpha,$$

więc posługując się wartościami bezwzględными otrzymujemy ostatecznie

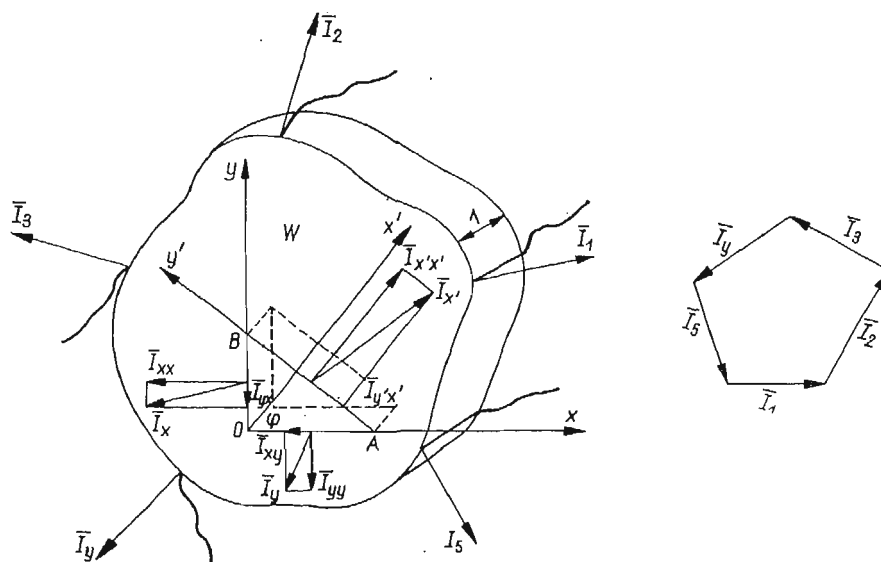
$$\delta_n = \delta_1 \cos^2 \alpha, \quad \delta_t = \delta_1 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Składowa normalna  $\delta_n$  gęstości prądu zmiennego jest największa w przekroju prostopadłym do osi pręta,  $\alpha = 0$ , gdzie równa się  $\delta_1$ ; wartość tę można nazwać wartością główną gęstości prądu zmiennego. W przekroju równoległym do osi pręta  $\delta_n = 0$ , ponieważ  $\alpha = 90^\circ$ . Składowa styczna gęstości prądu zmiennego  $\delta_t$  staje się równa zero dla przekroju prostopadłego,  $\alpha = 0$ , i dla przekroju równoległego,  $\alpha = 90^\circ$ , do osi pręta. Wartość największą składowa styczna osiąga wtedy, gdy  $\cos \alpha = \sin \alpha$ , czyli dla  $\alpha = 45^\circ$ .

### 5. Tensor gęstości prądu zmiennego

Gęstość prądu zmiennego jest wielkością tensorową. Żeby to wykazać, rozpatrujemy gęstość prądu zmiennego w przewodniku płaskim, tj. w takim przewodniku, którego jeden wymiar (grubość) jest znacznie mniejszy niż dwa pozostałe. Zakładamy, że prądy zmienne układu wielofazowego są doprowadzone do różnych punktów obwodu przewodnika płaskiego (płytki), przy czym wektory prądu zmiennego są w stanie równowagi, czyli suma ich rzutów na dowolną oś jest równa zero i suma momentów względem dowolnego punktu jest również równa zero. Można przyjąć, że gęstość w kierunku prostopadłym do powierzchni płytki jest równa zero, tak iż wszystkie kierunki prądów są równoległe do powierzchni płytki. Poza tym dla uproszczenia obliczeń można założyć, że grubość płytki jest równa jedności, tak iż do rozważań wystarcza płaski układ współrzędnych  $x, y$  (rys. 3).

Wykonujemy teraz w płytce szczelinę wzdłuż odcinka  $OA$ . Obecność szczeliny spowoduje przerwanie prądu między częścią płytki znajdującą się bezpośrednio pod odcinkiem  $OA$  i częścią położoną tuż nad nim. Aby przywrócić pierwotny stan elektryczny w części znajdującej się nad szczeliną  $OA$ , należy przyłożyć do ścianki szczeliny elektrodę i doprowadzić przez nią prąd taki sam, jaki był w tym miejscu przed wykonaniem szczeliny. O tym prądzie wiadomo na pewno, że jest prądem zmiennym sinusoidalnym, ponieważ został on wywołany przez sinusoidalne prądy zmienne doprowadzone z zewnątrz, przy czym jego częstotliwość jest taka sama jak częstotliwość prądów doprowadzonych, a przesunięcie fazowe jest funkcją punktu  $O$  szczeliny.



Rys. 3

Zgodnie z rozważaniami z poprzedniego punktu przyjmujemy, że na powierzchni szczeliny przy samej elektrodzie istnieją takie składowe gęstości prądu zmiennego, normalna  $\delta_n$  i styczna  $\delta_t$ , które pomnożone przez pole przekroju szczeliny  $OA$  dają prąd zmienny  $\mathbf{I}$ .

Rozważania przeprowadzamy dla nieskończenie bliskiego otoczenia punktu  $O$ . Jeżeli pominiemy wielkości nieskończenie małe wyższego rzędu, to możemy przyjąć, że gęstość prądu na nieskończenie małym odcinku  $OA$  (lub raczej na powierzchni  $OA \cdot 1$ ) jest wszędzie jednakowa. Można więc tak samo jak w poprzednim p. wyrazić prąd przez gęstości prądu.

Składowa normalna prądu posiada kierunek osi  $y$  i odnosi się do odcinka prostopadłego do osi  $y$ :

$$I_{yy} = \delta_{yy} OA.$$

Składowa styczna ma kierunek osi  $x$  i odnosi się do odcinka prostopadłego do osi  $y$

$$I_{xy} = \delta_{xy} OA.$$

Prąd zmienny, jaki powinien być doprowadzony do odcinka  $OA$  (prostopadłego do osi  $y$ ), jest sumą tych prądów składowych:

$$I_y = I_{yy} + I_{xy}.$$

Jeżeli wykonamy teraz drugą szczelinę  $OB$  prostopadłą do osi  $x$ , to prąd, jaki powinien być doprowadzony do jej ścianki wewnętrznej, będzie równy

$$I_x = I_{xx} + I_{yx}.$$

Składowe tego prądu, otrzymane w sposób podobny jak składowe prądu  $\mathbf{I}_y$ , mają wartości wyrażone przez gęstości prądu zmiennego

$$\mathbf{I}_{xx} = \delta_{xx} \mathbf{OB}, \quad \mathbf{I}_{yx} = \delta_{yx} \mathbf{OB}.$$

Wykonajmy jeszcze szczelinę  $AB$  kończąc w ten sposób wycięcie z danej płytki prostopadłościanu o podstawie trójkątnej  $AOB$ . Na ścianie  $AB$  wyznaczamy kierunek normalny  $x'$  i kierunek styczny  $y'$ .

Według przyjętej konwencji znakowania wyznaczamy prąd zmienny, jaki należy doprowadzić do ścianki  $AB$ , aby utrzymać w wyciętym prostopadłościanie pierwotny rozkład prądów:

$$\mathbf{I}_{x'} = \mathbf{I}_{x'x'} + \mathbf{I}_{y'x'}.$$

Wyrażamy składowe prądu  $\mathbf{I}_{x'}$  przez odpowiednie gęstości prądu

$$\mathbf{I}_{x'x'} = \delta_{x'x'} \mathbf{AB}, \quad \mathbf{I}_{y'x'} = \delta_{y'x'} \mathbf{AB}.$$

W rezultacie dokonanego wycięcia w płytce otrzymaliśmy nieskończenie mały obszar węzłowy  $AOB$ , do którego doprowadzony jest prąd zmienny trójfazowy  $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_{x'} \dots$ . W obszarze tym został zachowany taki sam stan elektryczny, jaki istniał w nim przed dokonaniem wycięcia.

Chcemy teraz wyrazić składowe prądu  $\mathbf{I}_{x'}$  przez składowe prądów  $\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y$ . Niech  $l, m$  oznaczają kosinusy kierunkowe osi  $x'$ . Rzutując wektory na oś  $x'$  otrzymujemy równanie wartości bezwzględnych

$$I_{x'x'} - I_{xx}l + I_{yx}m + I_{xy}l - I_{yy}m = 0,$$

$$I_{y'x'} - I_{xx}m - I_{yx}l + I_{xy}m - I_{yy}l = 0.$$

Podstawiając do tych równań prądy wyrażone przez gęstości prądu zmiennego otrzymamy

$$\delta_{x'x'} \mathbf{AB} = \delta_{xx} \mathbf{OBl} - \delta_{yx} \mathbf{OBm} - \delta_{xy} \mathbf{OAl} + \delta_{yy} \mathbf{OAm},$$

$$\delta_{y'x'} \mathbf{AB} = \delta_{xx} \mathbf{OBm} + \delta_{yx} \mathbf{OBl} - \delta_{xy} \mathbf{OAm} - \delta_{yy} \mathbf{OAl}.$$

Jeżeli podzielimy te równania przez  $AB$  i uwzględnimy, że  $OA/AB = m$  oraz  $OB/AB = l$ , to otrzymamy zależności między gęstościami prądu zmiennego i kosinusami kierunkowymi:

$$\delta_{x'x'} = \delta_{xx} l^2 - \delta_{yx} lm - \delta_{xy} lm + \delta_{yy} m^2,$$

$$\delta_{y'x'} = \delta_{xx} lm + \delta_{yx} l^2 - \delta_{xy} m^2 + \delta_{yy} lm.$$

Wyrażenia te podają prawo transformacji składowych tensora przy przejściu z układu współrzędnych  $x, y$  do układu współrzędnych  $x', y'$ , który został obrócony tak, że oś  $x'$  tworzy z osiami  $x, y$  kąty o kosinusach kierunkowych  $l, m$ .

Wprowadzając nowe oznaczenia

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad l = l_{1n}, \quad m = l_{2n}, \quad x' = n, \quad y' = \eta,$$

$$\delta_{xx} = \delta_{11}, \quad \delta_{yx} = \delta_{21}, \quad \delta_{xy} = \delta_{12}, \quad \delta_{yy} = \delta_{22},$$

możemy napisać powyższe wzory w ogólnie przyjętej postaci tensorowej:

$$\delta_{nn} = \sum_{r=1}^{r=2} \sum_{s=1}^{s=2} \delta_{rs} l_{rn} l_{sn},$$

$$\delta_{nn} = \sum_{r=1}^{r=2} \sum_{s=1}^{s=2} \delta_{rs} l_{r\eta} l_{s\eta}.$$

Tensor gęstości prądu zmiennego jest tensorem symetrycznym, czyli  $\delta_{rs} = \delta_{sr}$ . Dla przeprowadzenia dowodu należy uwzględnić omówiony w poprzednim rozdziale warunek równowagi momentów wektorów prądu zmiennego. Prąd zmienny trójfazowy, doprowadzony do trójkątnego prostopadłościanu  $AOB$  (rys. 1) spełnia ten warunek, ponieważ według założenia prądy zmienne wielofazowe  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$  doprowadzone do obszaru węzłowego  $W$  mają takie przesunięcia fazowe, że suma momentów wektorów prądów zmiennych względem dowolnego punktu jest równa zero.

Ponieważ można przyjąć, że na nieskończenie małych ściankach trójkątnego prostopadłościanu gęstości prądu są rozłożone równomiernie, to można również założyć, że punkty zaczepienia wektorów prądu leżą na środkach boków trójkąta. W trójkącie prostokątnym  $AOB$  symetralne boków  $OA$  i  $OB$  przecinają się w środku trzeciego boku  $BA$ . Środek ten bierzemy jako punkt, względem którego obliczamy momenty wektorów prądu. Przez punkt ten przechodzą linie działania wszystkich składowych normalnych  $\mathbf{I}_{xx}, \mathbf{I}_{yy}, \mathbf{I}_{x'x'}$  oraz składowa styczna  $\mathbf{I}_{y'x'}$ , a więc momenty tych czterech składowych są równe zero.

Momenta względem środka boku  $AB$  dają tylko składowe styczne  $\mathbf{I}_{xy}$  i  $\mathbf{I}_{yx}$  prądów zmiennych doprowadzonych do boków  $OA$  i  $OB$ . Równanie równowagi momentów ma postać

$$-\delta_{xy} \cdot \mathbf{OA} \cdot \frac{\mathbf{OB}}{2} + \delta_{yx} \cdot \mathbf{OB} \cdot \frac{\mathbf{OA}}{2} = 0,$$

czyli

$$\delta_{xy} = \delta_{yx},$$

co dowodzi, że tensor gęstości prądu jest tensorem symetrycznym. Z rachunku tensorowego wiadomo, że tensor symetryczny posiada w przypadku płaskim dwie ekstremalne wartości składowych normalnych: największą  $\delta_1$  i najmniejszą  $\delta_2$ .

Wprowadzamy nowy układ współrzędnych, w których oś  $x$  ma kierunek zgodny z kierunkiem występowania maksimum gęstości prądu  $\delta_1$ , a oś  $y$  ma kierunek odpowiadający minimum gęstości prądu  $\delta_2$ . Składowe normalne i styczne gęstości prądu zmiennego w tym układzie współrzędnych są wyrażone równaniami:

$$\delta_n = \delta_1 l_1^2 + \delta_2 l_2^2, \quad \delta_t = (\delta_1 - \delta_2) l_1 l_2.$$

Umieścimy w punkcie  $O$  (w początku układu współrzędnych) bardzo małą i bardzo cienką płytkę o powierzchni  $S$  (możemy np. wyobrazić sobie, że cały

ośrodek przewodzący jest cieczą, a płytka jest wykonana z materiału o takiej przewodności właściwej, jaką ma ciecz — wówczas obecność płytki w naczyniu nie naruszy stanu elektrycznego ośrodka). Jeżeli płytka jest prostopadła do osi  $x$ , tzn. kierunku jej normalnej i osi  $x$  są zgodne, to przez płytkę płynie prąd  $\mathbf{I}_1 = \delta_1 \mathbf{S}$ .

Po ustawieniu płytki prostopadle do osi  $y$  płynie przez nią prąd zmienny  $\mathbf{I}_2 = \delta_2 \mathbf{S}$  przesunięty w fazie o  $90^\circ$ . Przez płytkę nachyloną dowolnie, której normalna ma kosinusy kierunkowe  $l_1$  i  $l_2$ , płynie prąd zmienny  $\mathbf{I}$  przesunięty w fazie o kąt na ogół inny niż kąt nachylenia płytki; lecz zależny od tego kąta. Wektor prądu  $\mathbf{I}$  możemy rozłożyć na dwie składowe, normalną  $\mathbf{I}_n$  i styczną  $\mathbf{I}_t$ , których wartości bezwzględne otrzymamy mnożąc równania gęstości prądu przez  $\mathbf{S}$ :

$$\delta_n S = \delta_1 l_1^2 S + \delta_2 l_2^2 S, \quad \delta_t S = (\delta_1 - \delta_2) l_1 l_2 S.$$

Składowe prądu zmiennego  $I$  są więc wyrażone wzorami

$$I_n = I_1 l_1^2 + I_2 l_2^2, \quad I_t = (I_1 - I_2) l_1 l_2.$$

Wektor prądu  $I$  można rozłożyć na kierunki osi  $x$  i  $y$ . Składowe wzdłuż tych osi mają wartość

$$I_x = I_n l_1 + I_t l_2, \quad I_y = I_n l_2 - I_t l_1.$$

Podstawiając odpowiednie wielkości  $I_n$  i  $I_t$  otrzymamy nowe równania

$$I_x = (I_n l_1^2 + I_t l_2^2) l_1 + (I_1 - I_2) l_1 l_2 l_2,$$

$$I_y = (I_n l_1^2 + I_t l_2^2) l_2 - (I_1 - I_2) l_1 l_2 l_1,$$

które po uwzględnieniu równości  $l_1^2 + l_2^2 = 1$  i uproszczeniu przyjmują postać  $I_x = I_1 l_1$ ,  $I_y = I_2 l_2$ . Z równań tych otrzymujemy po wyrugowaniu  $l_1$ ,  $l_2$  równanie elipsy

$$\frac{I_x^2}{I_1^2} + \frac{I_y^2}{I_2^2} = 1.$$

Z powyższych równań wynika, że przy obracaniu płytki  $S$  w każdym jej położeniu przepływa przez nią prąd zmienny o takiej wartości i takim przesunięciu fazy, że koniec wektora tego prądu zakreśla elipsę. Równanie tej elipsy można również otrzymać na innej drodze w wyniku rozważań nad stanem elektrycznym ośrodka przewodzącego prąd zmienny wielofazowy.

Pod wpływem prądów zmiennych  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  układu wielofazowego, doprowadzonych do płaskiego przewodnika, powstaje w nim zmienne pole elektryczne, a ściślej pole prądu elektrycznego. Jeżeli częstotliwość prądów  $f = \omega/2\pi$  nie jest bardzo wielka, to można pominąć prądy przesunięcia Maxwella i traktować pole jako quasi-stacjonarne, które w każdej rozważanej chwili  $t$  jest polem potencjalnym. Potencjał pola w każdym punkcie przewodnika można obliczyć stosując metodę obliczania pojemności wielofazowej linii napowietrznej lub kablowej, istnieje bowiem ścisła analogia między ładunkiem  $Q = CU$  w polu elektrostatycznym a prądem  $I = \gamma U$  w polu elektrycznym prądu [5].

Wobec liniowej zależności potencjału w danym punkcie od prądów (ładunków) można — stosując zasadę superpozycji — wyrazić potencjał  $p$  wzorem

$$p = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \dots,$$

w którym  $a_1, a_2, a_3, \dots$  są współczynnikami zależnymi tylko od współrzędnych wybranego punktu.

Gradient potencjału (i proporcjonalna do niej gęstość prądu) określony jest pochodną cząstkową potencjału w kierunku normalnej  $n$  do linii ekwipotencjalnej przechodzącej przez punkt  $M$ .

Składowe gradientu potencjału w kierunku osi  $x$  i  $y$  mają postać

$$\text{grad}_x p = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial x} i_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} i_2 + \dots,$$

$$\text{grad}_y p = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial a_1}{\partial y} i_1 + \frac{\partial a_2}{\partial y} i_2 + \dots$$

Podstawiając

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$i_2 = I_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

$$\dots$$

$$i_n = I_n \sin(\omega t + \varphi_n)$$

otrzymamy na  $\text{grad}_x p$  wzór

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = & \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} I_1 \cos \varphi_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} I_2 \cos \varphi_2 + \dots \right) \sin \omega t + \\ & + \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} I_1 \sin \varphi_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} I_2 \sin \varphi_2 + \dots \right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach są tylko funkcjami położenia rozważanego punktu  $M(x, y)$ . Oznaczając je przez  $A_1(x, y)$  i  $A_2(x, y)$  możemy składową gradientu potencjału na osi  $x$  wyrazić równaniem

$$\text{grad}_x p = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t.$$

W podobny sposób otrzymujemy składową gradientu w kierunku osi  $y$ :

$$\text{grad}_y p = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t.$$

Znając te składowe możemy wyznaczyć gradient potencjału w dowolnym kierunku tworzącym z osią  $x$  kąt  $\varphi$ . Przez pomnożenie obu stron równania przez przewodność właściwą  $\gamma$  otrzymujemy składowe gęstości prądu w kierunku osi  $x$  i  $y$ :

$$\delta_x = \gamma A_1 \sin \omega t + \gamma A_2 \cos \omega t,$$

$$\delta_y = \gamma B_1 \sin \omega t + \gamma B_2 \cos \omega t.$$

Po wyrugowaniu zmiennej  $\omega t$  otrzymujemy równanie elipsy:

$$\delta_x^2 (B_1^2 + B_2^2) - 2(A_1 B_1 + A_2 B_2) \delta_x \delta_y + \delta_y^2 (A_1^2 + A_2^2) - \gamma^2 (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = 0.$$



Elipsę tę możemy uważać za linię, którą zakreśla koniec wirującego wektora wartości chwilowej gęstości prądu. Można wykazać, że taki wirujący wektor jest równoważny rozpatrzonemu wyżej tensorowi gęstości prądu.

Tak więc gęstość prądu zmiennego w obszarze węzłowym, do którego doprowadzono prądy zmiennie wielofazowe, jest tensorem o walencji 2.

Równania wiążące ze sobą składowe tensora gęstości prądu zmiennego otrzymuje się z rozważań równowagi elektrycznej dla każdego punktu obszaru węzłowego. Warunek równowagi powinien jednak być spełniony nie tylko dla punktu, ale i dla każdego skończonego obszaru ograniczonego powierzchnią zamkniętą, obejmującą badany punkt. Warunek taki podaje prawo Kirchhoffa, które dla obszaru bezźródłowego ma postać

$$\iint (\delta) dS = 0.$$

Na podstawie twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego równanie to można przekształcić:

$$\iiint \text{Div}(\delta) dv = 0$$

otrzymując w ten sposób bezpośrednio

$$\text{Div}(\delta) = 0.$$

Równanie to napisane w postaci rozwiniętej rozpada się na dwa równania różniczkowe:

$$\frac{\partial \delta_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Na granicy obszaru węzłowego są miejsca (powierzchnie) leżące bezpośrednio pod elektrodami, przez które wprowadza się prądy zmiennie do obszaru, oraz miejsca wolne od elektrod. W miejscach powierzchni wolnych od elektrod prąd przepływać może jedynie w kierunku stycznym do granicy obszaru, składowe normalne zaś są równe zero,  $\delta_n = 0$ , wobec czego na brzegach obszaru wolnych od elektrod elipsa gęstości prądu zmiennego degeneruje się do odcinka. W miejscach przyłożenia elektrod mogą natomiast istnieć tak składowe normalne gęstości prądu zmiennego jak i składowe styczne, a ich wzajemny stosunek decyduje o różnicy między fazami prądów zmiennych doprowadzonych do poszczególnych elektrod.

Prądy zmiennie doprowadzone do obszaru węzłowego powinny spełniać warunek równowagi wektorów, co już było omówione poprzednio. Wydaje się celowe wyrażenie tego warunku w oparciu o fakt, że suma prądów chwilowych układu wielofazowego jest zawsze równa zero (prawo Kirchhoffa dla prądów chwilowych). Skorzystamy w tym celu z rachunku symbolicznego dla prądów doprowadzonych do obszaru płaskiego.

Prądy chwilowe mają następującą postać symboliczną:

$$\begin{aligned}\hat{i}_1 &= I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}, \\ \hat{i}_2 &= I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \hat{i}_n &= I_n e^{j(\omega t + \varphi_n)}.\end{aligned}$$

Sumując prądy chwilowe otrzymujemy

$$\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \dots + \hat{i}_n = e^{j\omega t} (I_1 e^{j\varphi_1} + I_2 e^{j\varphi_2} + \dots + I_n e^{j\varphi_n}) = 0.$$

Ponieważ  $e^{j\omega t}$  jest funkcją czasu, więc równe zero może być tylko wyrażenie zawarte w nawiasie, które z kolei będąc wielkością zespoloną może być równe zero tylko wtedy, gdy są spełnione jednocześnie dwa równania

$$\begin{aligned}I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + \dots + I_n \cos \varphi_n &= 0, \\ I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 + \dots + I_n \sin \varphi_n &= 0.\end{aligned}$$

Omówione warunki brzegowe w miejscach przyłożenia elektrod i w miejscach wolnych obszaru węzłowego są spełnione zawsze, gdyż wynikają z podstawowych praw elektrotechniki.

#### 6. Analogie elektryczne tensora naprężenia

Podstawowym pojęciem teorii sprężystości jest tensor naprężenia, który charakteryzuje stan naprężenia w ciele poddanym działaniu sił. Tensor naprężenia dla zagadnienia płaskiego przedstawić można w postaci macierzowej:

$$\tau = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{Bmatrix}.$$

Prawo przekształcenia składowych tensora dla dowolnej ścianki o normalnej  $n$  można wyrazić w zwartej postaci; np. składową normalną przedstawia wzór:

$$\tau_{nn} = \sum_{i=1}^{i=2} \sum_{k=1}^{k=2} \tau_{ik} l_{in} l_{kn}.$$

Wiadomo z teorii sprężystości, że tensor naprężenia jest symetryczny, czyli że  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Warunek równowagi statycznej (bez uwzględnienia sił masowych) wyraża równanie tensorowe

$$\text{Div } \tau = 0,$$

które w postaci rozwiniętej rozpada się na dwa równania różniczkowe:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Układ sił działających na ciało jest w równowadze wtedy, gdy suma ich momentów względem dowolnego punktu jest równa zero oraz gdy rzuty ich na trzy liniowo niezależne kierunki są równe zero.

Dla układu płaskiego warunek równowagi rzutów wyrażają równania, w któ-

rych  $F_i$  oznaczają siły, a  $\varphi_i$  — kąty zawarte między kierunkami ich działania a osią  $x$ :

$$\begin{aligned} F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \cos \varphi_2 + \dots + F_n \cos \varphi_n &= 0, \\ F_1 \sin \varphi_1 + F_2 \sin \varphi_2 + \dots + F_n \sin \varphi_n &= 0. \end{aligned}$$

Z pobieżnego zestawienia równań obowiązujących w teorii sprężystości i porównania ich z odpowiednimi równaniami z poprzedniego rozdziału widać od razu, że istnieje pełna analogia między stanem naprężenia w ciele poddanym działaniu sił a stanem elektrycznym obszaru węzłowego prądów zmiennych wielofazowych. W szczególności siłom odpowiadają prądy zmienne, a naprężeniom — gęstości prądu zmiennego, tak iż analogia jest zachowana nie tylko wewnątrz obszarów ale i na brzegach. Dla zbadania stanu naprężeń w ciele obciążonym można wykonać geometrycznie podobny model i doprowadzić do niego prądy zmienne o natężeniu proporcjonalnym do sił i o przesunięciach fazowych równych odpowiednim kątom nachylenia sił przyłożonych do badanego ciała. Mierzac gęstości prądu zmiennego w poszczególnych punktach modelu znajdujemy wielkości proporcjonalne do naprężeń w odpowiednich punktach ciała obciążonego siłami.

W teorii sprężystości doniosłe znaczenie ma funkcja naprężeń Airy'ego, która spełnia równanie biharmoniczne

$$\Delta \Delta \varphi = 0.$$

Łatwo można wykazać, że analogiem funkcji naprężeń jest potencjał wektorowy, który w przypadku płaskim prądu zmiennego również spełnia podobne równanie

$$\Delta \Delta A = 0.$$

Składowe gęstości prądu zmiennego można wyrazić za pomocą potencjału wektorowego

$$\delta_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \delta_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \delta_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y},$$

a składowe tensora naprężenia za pomocą funkcji naprężeń:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

### 7. Analogia elektryczna zasady Saint-Venanta

Według zasady Saint-Venanta naprężenia w miejscach oddalonych od punktu przyłożenia obciążenia do ciała nie zależą w sposób istotny od rozkładu tego obciążenia w bezpośrednim otoczeniu punktu, a jedynie od jego wypadkowej, wobec czego np. siłę skupioną można w pewnych przypadkach zastąpić obciążeniem rozłożonym na pewnej niewielkiej powierzchni obejmującej punkt przyłożenia siły.

Funkcje opisujące stan naprężenia nie mają pochodnej w punkcie przyłożenia siły skupionej, a same naprężenia w otoczeniu tego punktu są nieograniczone. Ponieważ jednak z jednej strony rzeczywista struktura materiału nie pozwala na nieograniczony wzrost naprężeń bez zniszczenia elementu, z drugiej strony praktyka wymaga rozpatrywania układów obciążonych siłami skupionymi, to zasada Saint-Venanta pozwala na rozważanie takich układów z uwzględnieniem pewnych poprawek w pobliżu punktów przyłożenia sił. Zasada Saint-Venanta nie podaje co prawda żadnego ścisłego przepisu, lecz głosi tylko, że w miejscach dostatecznie oddalonych od punktów przyłożenia sił poprawki wniesione w otoczeniu tych punktów nie prowadzą na ogół do wypaczenia rzeczywistego obrazu rozkładu naprężeń.

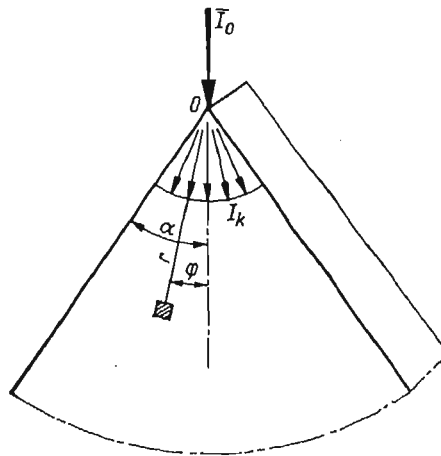
Zasada Saint-Venanta obowiązuje w całej pełni również w elektrotechnice i chociaż w tej dziedzinie nie została oddzielnie sformułowana i nazwana, tym niemniej jednak jest zawsze uznawana i stosowana jako zrozumiała samo przez się reguła praktyczna. Chodzi o to, że w rozważaniach teoretycznych często przyjmujemy istnienie punktowego przyłączenia prądu, lecz jednocześnie zdajemy sobie sprawę z tego, że w takim punkcie gęstość prądu byłaby nieskończenie wielka, a więc wydzielające się w nim ciepło Joule'a doprowadziłoby do natychmiastowego wyparowania przewodnika w otoczeniu punktu. Ten wniosek teoretyczny nie przeszkadza jednak bynajmniej w praktycznej realizacji takiego układu, ponieważ w praktyce zastępujemy punkt pewną powierzchnią, do której doprowadzamy prąd o gęstości dopuszczalnej ze względu na rodzaj materiału, czas działania, stopień chłodzenia i inne warunki, wiedząc przy tym, że w miejscach dostatecznie oddalonych od elektrody gęstość prądu będzie miała wartości zgodne z wynikami teoretycznymi.

W zastosowaniu do prądów zmiennych wielofazowych zasada analogiczna do zasady Saint-Venanta wymaga uwzględnienia fazy prądu. Jeżeli mamy układ teoretyczny, do którego jest przyłączony w określonym punkcie prąd zmienny o danej fazie, to punkt ten można zastąpić jego otoczeniem i do poszczególnych miejsc tego otoczenia doprowadzić prądy o różnych amplitudach i fazach; suma geometryczna tych prądów składowych powinna być równa danemu prądowi zmiennemu tak co do amplitudy jak i fazy.

Jeżeli więc na modelu elektrycznym chcemy odtworzyć siłę skupioną, to najpierw rozkładamy ją na pewne siły składowe działające na otoczenie punktu zgodnie z zasadą Saint-Venanta, a następnie modelujemy siły składowe odpowiednimi prądami. Zasada Saint-Venanta pozwalająca na takie rozłożenie danego prądu pozostawia dużą swobodę wyboru liczby prądów składowych, ich faz, amplitud i miejsc przyłączenia w otoczeniu danego punktu, jednak w każdym przypadku warunki graniczne dają pewne wskazówki, jak należy dokonać rozkładu.

Dla zilustrowania zastosowania zasady Saint-Venanta rozważmy teoretyczny przypadek prądu zmiennego wielofazowego doprowadzonego do przewodnika płaskiego w kształcie klina nieskończonego. Jedna faza prądu zmiennego jest

doprowadzona do wierzchołka, a pozostałe fazy układu wielofazowego doprowadzone są do punktów klina nieskończenie odległych. Należy wyznaczyć gęstość prądu zmiennego w każdym punkcie obszaru klinowego. Zagadnienie to jest analogiczne do znanego zagadnienia teorii sprężystości, dotyczącego wyznaczenia naprężeń w nieskończonym klinie płaskim, obciążonym na ostrzu siłą skupioną (rys. 4).



Rys. 4

Rozważmy przewodnik płaski w kształcie nieograniczonego klina o grubości jednostkowej. Do wierzchołka  $O$  klina doprowadzamy prąd zmienny  $I_0$  równomiernie rozłożony na jego grubości, tak że liniowa gęstość prądu jest stała i co do wartości liczbowej równa  $I_0$ .

Gdyby prąd  $I_0$  był prądem stałym, to gęstości prądu w każdym punkcie łuku zakreślonego z punktu  $O$  krzywizną promieniem  $r$  byłyby równe co do wielkości i skierowane wzdłuż promienia  $r$ , co wynika z symetrii układu. Gęstość prądu wynosiłaby  $\delta = I_0/ra$ . W przypadku prądu zmiennego gęstość prądu  $\delta$  będzie również skierowana wzdłuż promienia  $r$ , lecz jej wielkość będzie funkcją nie tylko promienia  $r$ , ale i kąta  $\varphi$ , jaki tworzy promień z osią symetrii klina.

W celu wyznaczenia gęstości prądu zmiennego rozkładamy prąd  $I_0$  na prądy składowe doprowadzone do poszczególnych części łuku zakreślonego małym promieniem dokoła krawędzi  $O$  klina. Przesunięcie fazy  $\varphi$  prądu składowego powinno być równe kątowi  $\varphi$  nachylenia wektora prądu względem osi symetrii. Cały klin możemy podzielić na kliny elementarne o wspólnym wierzchołku, w których płyną elementarne prądy składowe  $dI$ . Oznaczając przez  $\delta$  gęstość prądu w odległości  $r$  od krawędzi  $O$  w klinie elementarnym  $d\varphi$ , odchylonym od osi symetrii o kąt  $\varphi$ , możemy wyznaczyć prąd składowy  $dI_\varphi$  w tym klinie.

Prąd  $dI_\varphi$  jest prądem przesuniętym w fazie względem prądu  $dI$  i jednocześnie może być potraktowany jako jedna ze składowych prądu  $dI_0$  rozłożonego na

dwa kierunki wzajemnie prostopadłe:  $\varphi$  i  $\varphi - \pi/2$ . Taki rozkład zapewnia symetryczne rozmieszczenie prądów w obszarze klinowym  $2\varphi$ . Mamy więc zależność:

$$dI\varphi = dI_0 \cos\varphi.$$

Wyrażając prądy przez gęstości prądu otrzymujemy równanie

$$rd\varphi\delta = rd\varphi\delta_0 \cos\varphi,$$

czyli

$$\delta = \delta_0 \cos\varphi;$$

$\delta_0$  wyznaczyć możemy z warunku, że wypadkową wszystkich prądów zmiennych rozkładu jest dany prąd  $I_0$ ,

$$\int_0^\alpha \delta r d\varphi \cos\varphi = I_0,$$

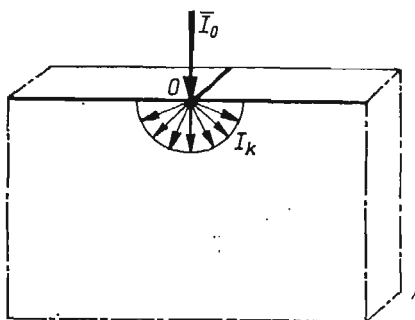
skąd

$$\int_0^\alpha \delta_0 \cos\varphi r d\varphi \cos\varphi = 2\delta_0 r \left( \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right) = I_0$$

i ostatecznie

$$\delta_0 = \frac{I_0}{r \left( \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right)}.$$

Ponieważ zaś  $\delta = \delta_0 \cos\varphi$ , to



Rys. 5

$$\delta = \frac{I_0 \cos\varphi}{r \left( \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right)}.$$

Jeżeli kąt  $\alpha = \pi/2$  (przypadek nieskończonej półpłaszczyzny, rys. 5), to gęstość prądu wzdłuż dowolnego kierunku  $\varphi$  wynosi

$$\delta = \frac{2I_0 \cos\varphi}{\pi r}.$$

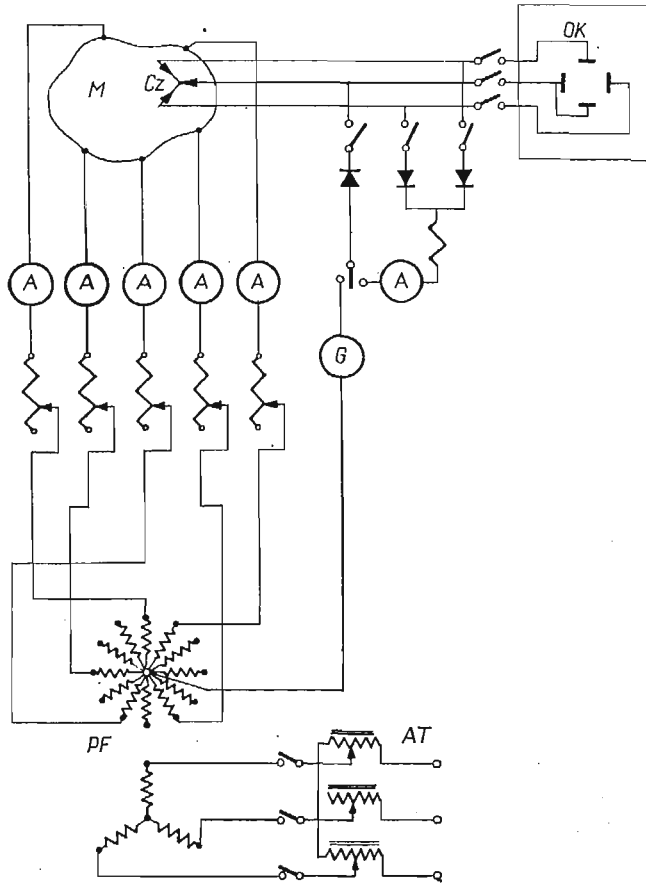
W teorii sprężystości otrzymujemy identyczne wzory wyrażające naprężenia  $\sigma_r$  wzdłuż promieni  $r$  tworzących kąt  $\varphi$  z osią

kłina obciążonego na wierzchołku siłą  $P$ .

#### 8. Układ pomiarowy modelu elektrycznego naprężeń

W przypadku płaskiego stanu naprężenia sporządzamy model z płaskiego przewodnika stałego lub płynnego, np. z masy przewodzącej lub elektrolitu. Następnie przymocowujemy do jego brzegów elektrody i doprowadzamy do nich prądy zmienne wyregulowane w ten sposób, żeby ich przesunięcia fazowe

były równe odpowiednim kątom nachylenia sił, a natężenia (np. amplitudy, wartości skuteczne lub wartości średnie prądu) były proporcjonalne do odpowiednich sił. Za pomocą czujnika o trzech ostrzach ustawionych parami



Rys. 6

prostopadle do siebie badamy teraz poszczególne punkty modelu. Każda para ostrzy czujnika mierzy różnicę potencjałów między dwoma bardzo bliskimi punktami, a ponieważ odległość między ostrzami jest stała, więc wielkością mierzoną jest gradient potencjału w punkcie leżącym między ostrzami. Gęstość prądu w tym punkcie jest w każdej chwili proporcjonalna do gradientu potencjału, tak iż ostatecznym wynikiem pomiaru jest gęstość prądu zmiennego w danym punkcie, a więc pośrednio — naprężenia w odpowiednim punkcie oryginału.

Gęstość prądu w modelu elektrycznym można mierzyć w różnych układach pomiarowych, jednak najbardziej celowe wydaje się zastosowanie oscylografu katodowego. Przykład takiego układu pomiarowego jest przedstawiony schematycznie na rys. 6.

Zródłem prądów zmiennych wielofazowych jest przetwornica fazowa  $FR$  zasilona z sieci przez autotransformatory  $AT$ . Na rysunku przedstawiona jest przetwornica w postaci silnika asynchronicznego z zatrzymanym wirnikiem, choć oczywiście źródłem prądów wielofazowych może być inny odpowiedni układ, np. sztuczna linia długa półfalowa. Prądy każdej fazy przyłączonej do modelu  $M$  są regulowane za pomocą oporników  $A$ . W badanym punkcie modelu ustawiony jest czujnik  $Cz$ , którego dwa skrajne ostrza są połączone z płytkami odchylenia poziomego i pionowego lampy oscylografu katodowego  $OK$ , a ostrze środkowe jest połączone z płytkami uziemionymi lampy. Na ekranie lampy oscylografu zjawia się elipsa, która jest obrazem elipsy naprężeń oryginału.

Analiza tej elipsy dostarcza ważnych informacji o naprężeniach w badanym punkcie. Osie główne elipsy są proporcjonalne do naprężeń głównych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , a jej kąt nachylenia względem układu współrzędnych prostokątnych, wyznaczonego przez trzy ostrza czujnika, jest równy kątowi nachylenia osi elipsy naprężeń względem tych samych osi związanych z oryginałem.

Ustawiając czujnik w różnych punktach modelu otrzymujemy na ekranie elipsy o różnych kształtach, wymiarach i nachyleniach osi. Czujnik można prowadzić po modelu w ten sposób, aby obydwie pary ostrzy były zawsze równoległe do ustalonych osi współrzędnych i aby kąt nachylenia osi różnych elips był stały; wtedy czujnik zakreśli na modelu linię stałego nachylenia naprężeń głównych, a więc izoklinę.

Bardzo łatwo znaleźć można za pomocą czujnika takie punkty, w których elipsa staje się kołem; są to punkty, w których w oryginale występują naprężenia hydrostatyczne.

W układzie pomiarowym przewidziane są jeszcze prostowniki pozwalające zmierzyć sumę średnich wartości prądów dwóch skrajnych ostrzy czujnika. Suma tych średnich wartości jest proporcjonalna do sumy gradientów potencjałów w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, przy czym dla każdego punktu suma ta jest stała, niezależna od kierunku osi współrzędnych czujnika. Przesuwając czujnik po modelu można znaleźć punkty, w których suma ta zachowuje wartość stałą. Jeżeli punkty te połączymy ze sobą, to otrzymamy linię równych wartości sumy naprężeń normalnych w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, czyli izopachę. Jak wiadomo, izopachy są liniami ekwipotencjalnymi, ponieważ

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] N. J. BIEZUCHOW, *Teoria sprężystości i plastyczności*, 1957.
- [2] J. T. PINDERA, *Zarys elastooptyki*, 1953.
- [3] R. ZIMMERMANN, *Pomiary naprężeń i drgań metodami elektryczności*, 1959.
- [4] J. E. TAMM, *Основы теории электричества*, 1954.
- [5] K. KUPFMÜLLER, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, tłum. ros., 1960.



- [6] J. WEYSSENHOFF, *Zasady elektromagnetyki i optyki klasycznej*, 1957.  
 [7] В.А. Говорков, *Электрические и магнитные поля*, 1960.  
 [8] А.А. Власов, *Макроскопическая электродинамика*, 1955.  
 [9] G. LIEBMANN, *The solution of plane stress problems by an electrical analogue method*, Brit. J. App. Phys., nr 5, 1955.  
 [10] J. BOSCHER, *Résolution par analogie électrique d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre intervenant dans divers problèmes d'élasticité*, Publ. Scient. Techn. Air, nr 348, 1958.  
 [11] T. W. G. CALVERT, *The determination of stress concentrations with an electrolytic tank model*, Brit. J. App. Phys., nr 5, 1961.

## Р е з ю м е

## ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Синусоидально переменный ток  $i = \sin I(\omega t + \varphi)$  можно рассматривать как вектор  $\mathbf{I}$  на плоскости, величина которого равняется амплитуде  $I$ , а угол, по отношению к некоторой постоянной оси координат, равняется сдвигу по фазе  $\varphi$ . Если к проводнику в форме тонкой пластинки, изготовленной из материала, обладающего по сравнению с проводимостью металла—значительно меньшей удельной проводимостью подвести, посредством подсоединенных к краю, металлических электрод, переменный многофазный ток, то через каждое произвольно малое сечение, сделанное перпендикулярно пластинке, проходит ток, представленный вектором, который вращается в плоскости, так, что в течение каждого периода конец вектора описывает эллипс. Автор статьи доказывает, что для описания этого факта следует принять, что плотность тока в пластинке является в каждой точке — тензором, который действуя на вектор сечения, заключающего данную точку, дает в результате вектор переменного тока как по отношению амплитуды, так и фазы, проходящего через рассматриваемое сечение. Существует строгая аналогия между тензором переменного тока в проводящей пластинке, подключенной к многофазной схеме и тензором напряжений в упругой пластинке, подверженной по контуру, действию сил, величины которых пропорциональны амплитудам многофазных токов, а углы, заключающиеся между ними, равняются углам сдвига по фазе между токами многофазной схемы. Поле тензора плотности переменного тока можно определить например с помощью предлагаемой в статье электрической схемы, дающей возможность измерить в каждой точке пластинки градиенты потенциала, пропорциональные плотности тока. Автор выясняет, кроме того, значение принципа Сен-Венана в электрическом моделировании тензора напряжений и, в качестве примера эффективности метода, приводит решение электрическим путем одного из классических вопросов теории упругости, а именно вопроса, касающегося распределения напряжений в бесконечном клине.

## S u m m a r y

## ELECTRICAL MODEL OF THE STRESS TENSOR

Current varying according to the sinusoidal law  $i = I \sin(\omega t + \varphi)$  can be regarded as a vector  $\mathbf{I}$  on a plane. The absolute value of this vector is equal to the amplitude  $I$ , and the angle of inclination with respect to any arbitrary fixed coordinate axis is equal to the phase shift  $\varphi$ . If a conductor having the form of a thin plate, and made of material with a specific conductance which is much smaller than the conductivity of metal, is fed by a multiphase variable current, through metal electrodes attached to the boundary of the plate, then through any arbitrary small cross-section perpendicular to the plate the flow of current is represented by a vector which rotates in the plane so that during every period the end of the vector traces an ellipse. It is shown in the paper that in order to describe this fact it should be assumed that the current density at any point of the

plate is a tensor which being multiplied by the vector of the cross-section containing the given point yields the vector of variable current flowing through the cross-section considered, with the appropriate amplitude and phase. There exists an exact analogy between the tensor of the variable current in the conductive plate, connected with the multiphase system, and the stress tensor in an elastic plate subjected to boundary forces, provided the values of the forces are proportional to the amplitudes of the multiphase currents, while the angles between them are equal to the angles of phase shifts between the currents of the multiphase system. The tensor density field of variable current can be determined by means of the suggested electrical system which makes it possible to measure at every point of the plate the potential gradients proportional to the current density. Moreover, the author explains the meaning of the Saint-Venant principle in the electric model of the stress tensor. The method suggested is illustrated by an example of solving in the electrical way the problem of stress distribution in an infinite wedge—that is one of the classical problems of the theory of elasticity.

INSTYTUT GOSPODARKI WODNEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 marca 1963 r.*

---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

### ZEBRANIA NAUKOWE W ODDZIAŁACH PTMTS

W drugim i trzecim kwartale 1963 r. odbyły się w Oddziałach Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej następujące zebrania naukowe

Data	Prelegent	Temat	Ucze- stni- ków	Dysku- tan- tów
<b>Oddział w Gliwicach</b>				
11.4.63	J. NALESZKIEWICZ	Z zagadnień stateczności ruchu wałów	42	4
23.5.63	Z. KĄCZKOWSKI	O metodach iteracyjnych mechaniki budowli	38	3
20.6.63	S. OCHĘDUSZKO	Zmierzech kalorii i kilogram-siły	46	5
<b>Oddział w Krakowie</b>				
5.4.63	GUNTER SCHMIDT (Berlin)	Stateczność dynamiczna powłok o małej wyniosłości	21	9
29.5.63	J. KOŁĘDOWSKI	Schemat zastępczy układu elektromechanicznego	12	6
25.9.63	A. MARTIN (Francja)	Teoria i technika metody kruchych pokryć		
	C. MORETTI (Francja)	Dwie metody wyznaczania naprężeń własnych	35	8
<b>Oddział w Łodzi</b>				
4.4.63	K. WILMAŃSKI	Sprężysto-plastyczny stan naprężenia wywołany pewnym polem temperatury	14	14
25.4.63	W. KOREWA	Obliczenia konstrukcyjne metodą wskaźników	26	7
16.5.63	G. DERKOWSKI	O pewnym zagadnieniu momentowym łupiny sferycznej	13	5
6.6.63	Z. KAZIMIERSKI	Pole prędkości w płaskim przepływie potencjalnym przez stopień osiowy turbiny lub sprężarki	14	5
<b>Oddział w Poznaniu</b>				
8.6.63	M. SOKOŁOWSKI	Nieskończone koncentracje naprężeń w liniowej teorii sprężystości	26	7

Data	Prelegent	Temat	Ucze- stni- ków	Dysku- tan- tów
<b>Oddział w Szczecinie</b>				
12.4.63	J. SUŁOCKI	Udokładnione metody obliczania płyt i warstw sprężystych		
31.5.63	Z. KIERZKOWSKI	Uniwersalne maszyny cyfrowe		
14.6.63	J. SUŁOCKI	Algorytmy obliczeniowe dla technicznych teorii płyt		
<b>Oddział w Warszawie</b>				
9.4.63	A. WILCZYŃSKI	O pewnym uogólnieniu huberowskiej hipotezy wyężeniowej w zastosowaniu do badania pelzania	11	4
20.4.63	P. PERZYNA	O dynamicznym zachowaniu się materiałów plastycznych wrażliwych na prędkość odkształcenia	14	6
20.5.63	A. BUCH	Anizotropia zmęczeniowych udarowych i statycznych wskaźników mechanicznych	10	5
10.6.63	K. WOLSKI	Ruch złożony, w formie najogólniejszej	13	3
17.6.63	R. DOROSZKIEWICZ	Rozwój metod elastoplastycznych	27	
<b>Oddział we Wrocławiu</b>				
27.5.63	W. PARZONKA	Uogólniona liczba Reynoldsa jako charakterystyka przepływu cieczy plastyczno-lepkich w rurach	15	3

## KONKURSY NAUKOWE W ODDZIAŁACH PTMTS

### Oddział w Poznaniu

Na posiedzeniu w dniu 14.3.63 r. Sąd Konkursowy Oddziału PTMTS w Poznaniu w składzie: prof. dr E. KARAŚKIEWICZ, prof. dr S. SZCZENIOWSKI, prof. dr F. TYCHOWSKI, mgr inż. J. CZARNECKI przyznał następujące nagrody za prace z dziedziny mechaniki teoretycznej i stosowanej:

**I nagroda (3.500 zł)** dr K. SZYMAŃSKI, *Ośrodkowy uszczelniacz rzęciowy do celów obniżenia strat tarcia mechanizmów o wysokich prędkościach wirowania;*

**I nagroda (3.500 zł)** dr T. PUCHAŁKA, *Analiza dynamiczna niektórych elementów i układów elektromechanicznych;*

**II nagroda (2.000 zł)** mgr W. WYSLOUCH, *Analiza teoretyczna nowego oparcia pudła na wózku bez belki bujawkowej i czopa skrętowego;*

**III nagroda (1.000 zł)** mgr B. CEGIELSKI, *Niektóre zagadnienia dotyczące kół zębatych walcowych o łukowej linii zęba.*

### Oddział w Warszawie

Na posiedzeniu w dniu 9.12.63 r. Sąd Konkursowy Oddziału PTMTS w Warszawie w składzie: prof. dr J. MUTERMILCH — przewodniczący, prof. dr Z. BRZOSKA, prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, prof. dr J. NALESZKIEWICZ, prof. dr Z. OLESIAK, prof. dr E. SZCZEPANIAK przyznał następujące nagrody za prace z dziedziny mechaniki:

**I nagroda (5.000 zł)** dr Z. WESOŁOWSKI, *Powstanie szyjki jako zjawiska utraty stateczności;*

**II nagroda (2.500 zł)** mgr J. SOBIESZCZAŃSKI, *Wpływ tarcia o podłoże na zjawisko samokompensacji cieplnej.*

Ponadto Sąd Konkursowy postanowił przyznać dwa wyróżnienia, a mianowicie:

1. dr E. KRYNICKIEMU i dr Z. MAZURKIEWICZOWI za dwie prace: *Pewne rozwiązanie zagadnienia zginania i wybożenia ram złożonych z prętów o zmiennych sztywnościach zginania oraz Zginanie i wybożenie ustrojów ramowych złożonych z prętów pełnych o zmiennych przekrojach poprzecznych.*

2. mgr M. JANASOWI za pracę *Metoda uogólnionych przegubów plastycznych w nośności granicznej powłok.*

Na konkurs nadesłano ogółem 9 prac, z których jedna nie odpowiadała warunkom formalnym, ponieważ jej autor nie był członkiem PTMTS.

## SYMPOZJA I KONFERENCJE NAUKOWE Z DZIEDZINY MECHANIKI

### Sympozjum Naukowe Oddziału PTMTS w Łodzi

W dniu 25 maja 1963 odbyło się w Łodzi sympozjum poświęcone zagadnieniom stateczności, zorganizowane przez Łódzki Oddział PTMTS. W obradach wzięło udział 27 pracowników nauki. Przedstawiono następujące prace:

1. GUO ZHONG-HENG, Stateczność układów niezachowawczych w teorii sprężystości;
2. S. ZAHORSKI, Mały dodatkowy ruch podstawowy ośrodka hiposprężystego;
3. J. SZMELTER, Zastosowanie elektronowej maszyny matematycznej do rozwiązywania zagadnień stateczności układów sprężystych;
4. Z. WESOŁOWSKI, Płaskie zagadnienie utraty stateczności przy rozciąganiu;
5. M. ROSZKOWSKI, Stateczność kołowej powłoki ortotropowej obciążonej momentem skręcającym;
6. T. GAŁKIEWICZ, Nieliniowe zagadnienie skręcania powłoki ortotropowej;
7. M. BANASIAK, Stateczność płyt prostokątnych o zmiennej grubości.

### Sympozjum Naukowe Oddziału PTMTS w Poznaniu

W dniach 13 i 14 września 1963 r. odbyło się w Poznaniu zorganizowane przez Oddział Poznański PTMTS sympozjum naukowe poświęcone teorii drgań nieliniowych. Komitet organizacyjny wydał drukiem (techniką powielenia) streszczenia referatów. W sympozjum wzięło udział 70 osób z wielu Oddziałów Towarzystwa i z różnych ośrodków naukowych całego kraju. Średnia liczba dyskutantów, przypadająca na jeden referat, wyniosła 4.

W ciągu 2 dni obrad przedstawiono ogółem 29 prac w dwóch sekcjach:

#### Sekcja A (analityczna)

1. W. BOGUSZ, Zagadnienie syntezy kinetycznej układów mechanicznych;
2. J. M. ŚKOWROŃSKI, Badania strukturalne układów mechanicznych;
3. J. SZADKOWSKI, Uwagi o strukturze obszarów granicznych układów dynamicznych;
4. J. MUSZYŃSKI, Pewne zagadnienia stateczności ruchu układów nieliniowych o jednym stopniu swobody;
5. Z. OSIŃSKI, Drgania układu o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem tak zwanego «tarcia konstrukcyjnego»;
6. L. DOBRZAŃSKI, Zanikanie drgań układu drgającego silnie nieliniowego;
7. H. GUMIŃSKA i Z. OSIŃSKI, Nieliniowe drgania układu o jednym stopniu swobody o sile restytucyjnej złożonej, sprężysto-grawitacyjnej;
8. W. BOGUSZ, Stateczność charakterystyk częstotliwościowych układów nieliniowych;
9. J. GIERGIEL, Współdziałanie układu samowzbudnego z układem liniowym;
10. R. KASPRZYK i J. GIERGIEL, Wpływ nieliniowości tłumienia na amplitudę rezonansową w układzie o dwóch stopniach swobody;

11. J. NIZIOŁ, O pewnej nowej metodzie znajdowania trajektorii fazowych dla układów nieliniowych;
12. S. SĘDZIWIY, O rozwiązaniach okresowych układu równań różniczkowych na płaszczyźnie;
13. R. GRYBÓŚ, Drgania parametryczne w układzie o jednym stopniu swobody z nieliniową bezwładnością;
14. T. PUCHAŁKA, K. RUMATOWSKI i J. MARTINEK, Problemy sterowania optymalnego układów automatycznej regulacji w świetle ogólnej teorii drgań.

#### Sekcja B (zastosowania)

15. J. NALESZKIEWICZ, Rozważania na temat pracy złamania konstrukcji wagonów przy zderzeniu;
16. E. KAMIŃSKI, Warunki stateczności pojazdu jednośladowego;
17. R. MIKLASZEWSKI, Synchronizacja pewnego typu układów mechanicznych;
18. T. SZUCKI i Z. OSIŃSKI, Nieliniowe drgania masy utwierdzonej w podwójnym oporowym łożysku tocznym;
19. Z. WASILEWSKI i Z. OSIŃSKI, Drgania tłumione nosiwa zawieszzonego na linie stalowej o nieliniowej charakterystyce sprężystej i tłumieniu;
20. W. BAJON, Przekładniki elektromagnetyczne jako nieliniowe mechaniczne układy drgające;
21. A. CZUBAK, Dynamika przenośnika wibracyjnego;
22. Z. ENGEL, Stateczność ruchu mechanizmu obiegowo-wodzikowego;
23. E. KARAŚKIEWICZ, Drgania subharmoniczne rezonatora Helmholtza;
24. FR. ZEIDLER, Drgania subharmoniczne układu nieliniowego o dwóch stopniach swobody;
25. S. BEDNARZ, Zastosowanie drgań samowzbudnych do badania sprzężeń ciernych;
26. J. ADAMCZYK, Schemat obliczeniowy drgań wrębiarki węglowej;
27. K. PISZCZEK, Dynamika wirówki wiszącej przy wymuszeniu kinematycznym;
28. J. NIZIOŁ, Wymuszone drgania belki w ujęciu probabilistycznym;
29. Z. STOJEK, Drgania skręcająco-ścinające niepryzmatycznego pręta.

Podsumowując dyskusję generalną po sympozjum Przewodniczący Oddziału PTMTS w Poznaniu prof. dr E. KARAŚKIEWICZ sformułował następujące postulaty:

- 1) o potrzebie rozwijania prac eksperymentalnych i matematycznych teorii oszacowania przybliżonych rozwiązań,
- 2) o rozwijaniu wibrotechniki i poszukiwaniu nowej tematyki związanej z potrzebami przemysłu ciężkiego,
- 3) o potrzebie rozwijania problemów syntezy i programowania dynamicznego.

Uczestnicy sympozjum podkreślali w wielu wystąpieniach, że organizowane przez Oddział w Poznaniu sympozja, poświęcone teorii drgań (pierwsze sympozjum odbyło się w 1960 r.), przyczyniają się do ożywienia kontaktów między poszczególnymi ośrodkami naukowymi i oddziaływają pobudzająco na rozwój młodej kadry naukowej. W związku z tym powzięto uchwałę o zwróceniu się do Zarządu Głównego PTMTS z propozycją kontynuowania tych sympozjów w latach nieparzystych.

#### Sympozjum Naukowe Oddziału PTMTS w Krakowie

W dniach 17-19 października odbyło się w Krakowie Sympozjum Mechaniki Górotworu. Organizatorem sympozjum był Krakowski Oddział PTMTS przy współudziale Głównego Instytutu Górnictwa w Katowicach.

Komitet organizacyjny wydał drukiem (techniką powielenia) materiały konferencyjne w językach polskim, rosyjskim i niemieckim w postaci broszury «Sympozjum Mechaniki Górotworu — streszczenie referatów», zawierającej na 78 stronach streszczenia 50 nadesłanych referatów.

W sympozjum wzięło udział około 100 pracowników nauki, a wśród nich 28 uczestników zagranicznych (2 z Bułgarii, 5 z ČSRS, 11 z NRD, 4 z NRF, 5 z Węgier i 1 ze ZSRR).

Otworzył sympozjum i podsumował dyskusję prof. dr J. LITWINISZYN.

- Spośród 50 zgłoszonych prac przedstawiono w ciągu pięciu sesji następujące 42 referaty:
1. W. BUCHHEIM (Freiberg), Zjawiska obniżenia terenu jako proces dyfuzyjny w szczelinach skalnych;
  2. A. SMOLARSKI, W. TRUTWIN (Kraków), Osiovo-symetryczny stan przemieszczeń w ośrodku sypkim i jego obliczenie za pomocą analogu elektrycznego;
  3. T. RACZYŃSKI (Kraków), Graficzna metoda wyznaczania planu warstwiczowego niecki osiadania dla poziomych obszarów eksploatacji.
  4. J. GOŁECKI, S. JÓŹKIEWICZ (Kraków), Wpływ charakteru spływu cząstek górotworu do wyrobiska na odkształcenie górotworu;
  5. R. RICHTER (Miskolc), Wnioski wynikające z współpracy obudowy górniczej z górotworem;
  6. R. RICHTER (Miskolc), Określenie charakteru skał w miejscu ich zalegania;
  7. W. BATKIEWICZ (Kraków), Wpływ kształtu frontu eksploatacji górniczej na zmniejszenie deformacji górotworu;
  8. B. DŻEGNIUK (Kraków), Zagadnienie przechodzenia niecki w górotworze według teorii Tadeusza Kochmańskiego;
  9. R. KITTRICH (Ostrawa), Stateczność wyrobisk w górotworze sprężysto-lepkim;
  10. I. MIKESKA (Ostrawa), Obszar tzw. deformacji głównej (według teorii Mohra);
  11. G. SZEFER (Kraków), Stan naprężenia i odkształcenia górotworu jako płaski problem teorii sprężystości;
  12. G. SZEFER (Kraków), Stan naprężenia i odkształcenia górotworu przy osiovo-symetrycznej eksploatacji w świetle teorii sprężystości;
  13. R. RÖSLER (Freiberg), O odchyleniach od klasycznego sprężystego zachowania się skał;
  14. Z. SZARKA, R. RICHTER (Miskolc), Rozkład naprężeń i deformacji w otoczeniu dwóch wyrobisk o przekroju kołowym i wynikające stąd wnioski;
  15. G. EVERLING (Essen), Doświadczenia z modelami odnośnie do współdziałania górotworu z obudową górniczą;
  16. A. KIDYBIŃSKI (Katowice), Badania reologicznych własności skał prowadzone w Głównym Instytucie Górnictwa;
  17. W. SIKORA, J. KWIATEK (Katowice), Badania zachowania się wyrobisk korytarzowych na dużych głębokościach;
  18. M. BORECKI, J. KWIATEK (Katowice), Nowa metoda modelowania górotworu;
  19. J. HORVÁTH (Budapeszt), Badania stanu napięcia w otoczeniu chodnika na podstawie określenia liczby Poissona i modułu Younga;
  20. J. HORVÁTH (Budapeszt), Nośność obudowy murowej pierścieniowej,
  21. A. NÉMETH (Miskolc), Badania laboratoryjne kotew skalnych;
  22. Z. GERGOWICZ (Wrocław), Badania laboratoryjne wytrzymałości ośrodków niespoistych na ścinanie w świetle problematyki budownictwa podziemnego;
  23. F. SCHUPPE (Lipsk), Badania reologiczne własności skał solnych.
  24. H. PFÖRR (Freiberg), Określenie tąpliwości skał;
  25. J. VOROPINOV (Ostrawa), w zastępstwie wygłosił inż. WACŁAWIK, O reologicznych własnościach skał i fizyce procesu ich płynięcia;
  26. Z. STRZELECKI (Kraków), Badania laboratoryjne dla określenia fizyko-mechanicznych własności zamrożonych skał dla potrzeb górniczych;
  27. T. KANTAREK (Kraków), O reakcji stycznej podłoża górniczego;
  28. K. GRAN (Kraków), Zastosowanie analogu fotoelektrycznego do określenia deformacji górotworu wywołanych eksploatacją górniczą;
  29. J. GUSTKIEWICZ (Kraków), O pewnym pomiarze deformacji terenu metodami tensometrii oporowej w obszarze eksploatacji górniczej;
  30. H. WORDELMANN, H. KÖNIG, T. DÖRING (Freiberg), Nowe wyniki pomiarów i obserwacje górotworu w górnictwie mansfeldzkich łupków miedzionośnych;

31. L. SISKÁ, O. DUŽI (Ostrawa), Deformacje w chodnikach ścianowych, na ścianie i w przestrzeni podsadzanej pokładu grupy siódłowej z sztywnym stropem w zagłębiu Ostrawa-Karvina;
32. K. H. HÖFER, E. BERTHOLD (Lipsk), Dotychczasowe wyniki pomiarów obniżek stropu w komorach eksploatacyjnych kopalń soli potasowych;
33. A. SILIŃSKI (Katowice), Możliwości przewidywania wielkości zaciskania wyrobiska w ścianach zawalowych;
34. Ž. M. KANLYBAJEWA (Ałma-Ata), Nowe dane o prawidłowości przemieszczeń górotworu nad podziemnymi wyrobiskami;
35. M. BORECKI (Katowice), Przesłanki prawidłowej współpracy z górotworem mechanicznej obudowy przesuwnej;
36. M. BORECKI, A. BILIŃSKI (Katowice), Wpływ prędkości wybierania na wielkość zaciskania wyrobisk;
37. G. BRÄUNER (Essen), Odkształcenia warstw leżących nad wybranymi pokładami w zagłębiu górniczym Ruhry oraz próba ich mechanicznego wyjaśnienia;
38. D. KOSINA (Ostrawa), Wpływ ciśnienia górotworu na chodniki eksploatacyjne i obudowę w stromo uwarstwionych pokładach;
39. K. PAWŁOWICZ (Katowice), Metoda oznaczania trwałości stropów pokładów węglowych;
40. J. ROSSMAN (Warszawa), Zagadnienie wpływu wody na ciśnienie gruntów spoistych na obudowę tuneli;
41. A. LISOWSKI (Kraków), Zastosowanie elektrycznych układów analogowych do obliczania konstrukcji na terenach górniczych;
42. J. SZIDAROVŠKY (Budapeszt), Studium na temat teorii ugięcia ram w płaszczyźnie.

## II Sympozjum Elastooptyki Warszawskiego Oddziału PTMTS

(komunikat wstępny)

Zarząd Oddziału Warszawskiego PTMTS przy współpracy Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN organizuje w dniach 4-7 listopada 1964 r. w Warszawie II Sympozjum Elastooptyki z udziałem zaproszonych gości zagranicznych.

Na sympozjum można zgłaszać dotychczas nieopublikowane prace oryginalne i przeglądowe (referaty i komunikaty) dotyczące specjalnych metod elastooptyki, pokrewnych optycznych metod analizy naprężeń oraz materiałów elastooptycznych.

Zarząd Oddziału Warszawskiego PTMTS powołał Komitet Organizacyjny IIgo Sympozjum w składzie: prof. dr J. NALESZKIEWICZ — przewodniczący, dr R. DOROSZKIEWICZ — wiceprzewodniczący, mgr B. MICHAŁSKI — sekretarz, dr Z. ORŁOŚ, mgr L. SŁOWAŃSKI i dr W. SZCZEPIŃSKI — członkowie.

Wszelką korespondencję dotyczącą II Sympozjum należy kierować pod adresem sekretarza Komitetu Organizacyjnego mgr Bogdana Michalskiego, Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 720.

W sekretariacie Sympozjum otrzymać można ankiety zgłoszeniowe. Komitet Organizacyjny prosi osoby zainteresowane o przesłanie wypełnionych ankiet do dnia 29 lutego 1964 r. Termin nadsyłania streszczeń referatów upływa 30 kwietnia 1964 r.

## Warszawskie Sympozjum IASS (International Association for Shell Structures)

W dniach 2-5 września 1963 r. odbyło się w Warszawie Sympozjum Międzynarodowego Stowarzyszenia Konstrukcji Powłokowych (IASS), poświęcone nieklasycznym zagadnieniom teorii powłok. Na czele komitetu organizacyjnego sympozjum stał prof. dr W. OLSZAK, wiceprzewodniczący Rady IASS; sprawy naukowe prowadził doc. dr A. SAWCZUK, stroną organizacyjną kierował mgr B. KOWAŁSKI.

Zgłaszane prace były opiniowane przez międzynarodowy komitet naukowy Sympozjum, w skład którego wchodziło 18 uczonych z 14 krajów i następnie dodatkowo recenzowane przez 18 uczonych, głównie amerykańskich i radzieckich.



Prace przyjęte do przedstawienia na sympozjum podzielono na następujące grupy tematyczne:

- a) zagadnienia termiczne w powłokach sprężystych,
- b) problemy powłok lepkosprężystych,
- c) analiza plastyczna powłok,
- d) zagadnienia nośności granicznej powłok żelbetowych,
- e) problemy konstrukcyjne powłok żelbetowych.

W dążeniu do przedstawienia syntezy zagadnień stanowiących przedmiot poszczególnych grup zwrócono się do kilku wybitnych uczonych z prośbą o opracowanie referatów generalnych.

Referentami generalnymi poszczególnych grup tematycznych byli:

W. NOWACKI (Polska), w zakresie termosprężystości,

JU. N. RABOTNOW (ZSRR), w zakresie lepkosprężystości i plastyczności,

E. T. ONAT (USA), w zakresie teorii konstrukcji plastycznych,

K. W. JOHANSEN (Dania), w zakresie teorii nośności granicznej konstrukcji żelbetowych,

FRANCO LEVI (Włochy), w dziedzinie zagadnień reologicznych konstrukcji inżynierskich.

Referatami generalnymi objętych zostało 47 prac spośród 59 zaakceptowanych (z uwagi na to, że część prac nadesłano z opóźnieniem).

Organizatorzy sympozjum z troszczyli się ponadto o uzyskanie prac kierunkowych na temat ogólnych równań nieliniowej teorii powłok, efektów geometrycznych i wzmocnienia plastycznego w powłokach plastycznych oraz na temat teorii pełzania powłok. Prace takie przygotowali:

P. M. NAGHDI (USA), w zakresie nieliniowej teorii powłok oraz

P. G. HODGE, Jr (USA) w dziedzinie zagadnień teorii powłok plastycznych.

W dążeniu do ożywienia dyskusji w trakcie Sympozjum zaproszono szereg osób do przygotowania pisemnych wypowiedzi na temat poszczególnych prac. Uzyskano w ten sposób około 50 przyczynków dyskusyjnych, które wniosły wiele nowego materiału.

Na sympozjum przedstawiono łącznie 59 prac oryginalnych, 5 referatów generalnych i 2 prace kierunkowe, łącznie 66 prac 81 autorów z 18 krajów. Najliczniejsze grupy stanowiły prace ze Stanów Zjednoczonych A.P. (13 prac), Polski (13 prac) oraz Związku Radzieckiego (10 prac).

W obradach wzięły udział 144 osoby, w tym 104 uczestników zagranicznych.

Pracownicy naukowcy z Polski stanowili grupę bardzo aktywną. Przygotowane prace oryginalne spotkały się z pozytywnymi ocenami referentów generalnych. 12 polskich autorów przedstawiło 12 prac oryginalnych oraz 1 referat generalny.

Termosprężystości oraz problematyki pól sprzężonych dotyczyły 4 prace (S. KALISKIEGO, Cz. WOŹNIAKA, Z. MAZURKIEWICZA i Z. F. BACZYŃSKIEGO). Problemy lepkosprężystości omawiane były w 2 pracach (W. NOWACKIEGO, Z. BYCHAWSKIEGO), a zagadnienia powłok plastycznych w 5 pracach (J. MURZEWSKIEGO, A. SAWCZUKA, W. SZCZEPIŃSKIEGO, Z. MROZA, J. RYCHLEWSKIEGO). Nośność graniczna powłok żelbetowych była traktowana w pracy M. JANASA. Ponadto do grupy prac poświęconych plastyczności należała praca W. OLSZAKA i R. SANKARANARAYANANA z Indii, wykonana w Polsce w czasie studiów specjalistycznych R. SANKARANARAYANANA. Autorzy polscy pochodzili z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN (10 osób), z Politechniki Warszawskiej (1 osoba), Politechniki Krakowskiej (1 osoba) i Politechniki Śląskiej (1 osoba).

### Sympozjum IUTAM w Tbilisi

W dn. 17-23 września odbyło się w Tbilisi w Gruzji Sympozjum IUTAM dotyczące zastosowań teorii funkcji zmiennych zespolonych w mechanice ośrodków ciągłych. Przewodniczył temu sympozjum prof. N. I. MUSCHELISZWILI. Obecnych było około 70 gości z zagranicy i wielu uczestników z ZSRR. Wygłoszono około 60 referatów o zastosowaniach funkcji analitycznych w teorii sprężystości, plastyczności i hydromechanice.

Obrady toczyły się w dwóch sekcjach. Na posiedzeniach plenarnych przedstawiono sześć referatów generalnych:

P. R. GARABEDIAN (USA), Rozwiązania ogólne w dziedzinie zmiennej zespolonej jako odpowiedź na zagadnienia mechaniki;

R. LEGENDRE (Francja), Ujednoczenie funkcji analitycznych w celu ich wykorzystania do badania zagadnień mechaniki;

N. I. MUSCHELISZWILI (ZSRR), Zastosowanie teorii funkcji analitycznych w teorii sprężystości;

I. N. SNEDDON (Anglia), Dualne szeregi i równania całkowe w teorii sprężystości;

M. W. KELDYSZ, L. I. SIEDOW (ZSRR), Zastosowania teorii funkcji zmiennej zespolonej w dynamice cieczy i gazów (przegląd prac szkoły Moskiewskiej);

W. T. KOITER (Holandia), Rozwiązanie pewnych zagadnień teorii sprężystości metodami asymptotycznymi.

Polska reprezentowana była przez profesorów: W. OLSZAKA, Z. OLESIAKA i H. ZORSKIEGO oraz przez dr J. RYCHLEWSKIEGO. Prof. W. OLSZAK i dr J. RYCHLEWSKI przedstawili referat o funkcjach biharmonicznych w teorii plastyczności.

Po symposium nasi przedstawiciele zwiedzili na zaproszenie AN ZSRR ośrodki naukowe w Moskwie, Kijowie i Jerewanu.

### Konferencja Naukowa Akademii Nauk ČSRS

W dniach 1-4 października 1963 odbyła się w Smolenicach (ok. 60 km od Bratysławy) konferencja poświęcona teorii dźwigarów powierzchniowych, zorganizowana przez Instytut Budownictwa i Architektury Słowackiej Akademii Nauk. W konferencji wzięło udział ogółem 86 pracowników nauki w tej liczbie 24 naukowców zagranicznych, mianowicie z Polski — 7, ZSRR — 5, NRD — 4, Rumunii — 3, USA — 2, Izraela — 1, NRF — 1 i z Węgier 1.

W skład polskiej delegacji wchodził: cz. rzecz. PAN prof. W. NOWACKI, czł. rzecz. PAN prof. W. OLSZAK, profesorowie Z. OLESIAK i M. ŻYCZKOWSKI, docenci J. MURZEWSKI i A. SAWCZUK oraz dr K. BORSUK.

Na konferencji wygłoszono osiem 50-minutowych referatów generalnych;

S. A. AMBARCUMIAN (ZSRR), Rozwój teorii powłok anizotropowych;

I. BABUŠKA (Praga, ČSRS), O optymalnym zredukowaniu wielowymiarowych zagadnień teorii sprężystości do zagadnień o mniejszej liczbie wymiarów;

J. BRILLA (Bratysława, ČSRS), Mieszane warunki brzegowe w płaskim zagadnieniu w przypadku anizotropii;

V. KOLAŘ (Brno, ČSRS), Mechanizacja i automatyzacja analizy liczbowej dla dwu i trójwymiarowych konstrukcji przy zastosowaniu maszyn liczących;

W. NOWACKI (Polska), Kierunki rozwoju teorii naprężeń cieplnych;

W. OLSZAK i A. SAWCZUK (Polska), Zagadnienia powłok niesprężystych;

R. S. RIVLIN (USA), Podstawowe związki tensorowe w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych;

Z. SOBOTKA (Praga, ČSRS), Liniowa i nieliniowa reologia płyt i powłok.

Ponadto na konferencji przedstawiono 54 krótkie 15 minutowe referaty, wygłoszone w większości podczas obrad toczących się w dwóch sekcjach. Komitet organizacyjny zastosował podział na sekcje wynikający z powiązania referatów w pewne grupy tematyczne, jak np. zagadnienia stateczności, badania elastoopcyjne, efekty lepkość-prężyste i skurczowe, naprężenia wywołane polem temperatury, zagadnienia powłok i płyt wielowarstwowych, niejednorodnych, anizotropowych, o zmiennej grubości, nieliniowych. Niektóre referaty odbiegały od tematyki konferencji i rozpatrywały pewne zagadnienia trójwymiarowej teorii sprężystości lub zagadnienia dotyczące kratownic. Przedstawiono rozwinięcie klasycznych problemów teorii dźwigarów powierzchniowych, jak zagadnienia nieliniowe, i pewne problemy związane z nowoczesnymi kierunkami rozwoju teorii. Kilka prac wykonanych przez zespół pracowników Politechniki w Brnie dotyczyło analizy zagadnień statyki dźwigarów powierzchniowych, wykonanej za pomocą maszyn cyfrowych i doprowadzonej do postaci wykresów.

Polscy uczestnicy konferencji wygłoszili dwa wymienione wyżej referaty generalne oraz sześć referatów na obradach w dwóch sekcjach (w tej liczbie referat nieobecnego na konferencji Z. BACZYŃSKIEGO).

WIZYTY POLSKICH MECHANIKÓW W ZAGRANICZNYCH OŚRODKACH  
NAUKOWYCH

Prof. dr W. OLSZAK w Szwajcarii, Stanach Zjednoczonych i Francji. Dnia 20 września 1962. prof. dr WACŁAW OLSZAK wyjechał do Szwajcarii, Stanów Zjednoczonych i Francji. W Zurychu wziął udział w Walnym Zebraniu Międzynarodowego Stowarzyszenia RILEM, na którym przedyskutowano i ustalono problematykę naukową i zagadnienia organizacyjne, związane z projektowanymi międzynarodowymi sympozjami. W czasie tego zebrania prof. W. OLSZAK wybrany został prezesem Zarządu Głównego tego Stowarzyszenia.

Celem wyjazdu do Stanów Zjednoczonych A.P. było wzięcie udziału w kongresie «World Conference on Shell Structures» (San Francisco), na którym prof. W. OLSZAK miał powierzony referat generalny na temat «Inelastic Shell Structures», opracowany wspólnie z doc. dr. ANTONIM SAWCZUKIEM.

Przy tej okazji wygłosił szereg wykładów na temat współczesnej teorii plastyczności, mianowicie w Yale University (New Haven, 24.IX), w Rensselaer Polytechnic Institute (Troy, 25.IX), w Applied Mechanics Division (Schenectady, 26.IX), w Brown University (Providence, 27.IX) oraz w Massachusetts Institute of Technology (Cambridge, 28.IX).

We Francji wziął udział w uroczystościach jubileuszowych Uniwersytetu w Tuluzie, który prof. W. OLSZAKOWI nadał godność doktora honoris causa. Wręczenie insygniów odbyło się w ramach tych uroczystości.

W drodze powrotnej wygłosił wykłady z zakresu teorii plastyczności na Politechnice w Turynie (10.X), na Uniwersytetach w Rzymie (12.X) i Neapolu (16.X) oraz na Politechnice w Wiedniu (19.X).

Prof. dr H. ZORSKI przebywał w Stanach Zjednoczonych w okresie od września 1962. do czerwca 1963 r. Głównym miejscem jego pobytu był uniwersytet stanu Kansas w Lawrence (Kansas University) liczący ok. 11 tys. studentów. Prof. ZORSKI prowadził w ciągu dwóch semestrów wykłady z mechaniki ciała stałego oraz seminaria z zakresu termosprężystości dla doktorantów i pracowników naukowych uniwersytetu.

Prof. H. ZORSKI odbył szereg kilkudniowych wizyt i wygłosił wykłady w następujących uniwersytetach i instytutach naukowych USA: University of Cincinnati, Rensselaer Polytechnic, Evanston University, California Institute of Technology, University of California w Los Angeles, Berkeley University, Midwest Research Institute oraz cykl wykładów dla pracowników jedenastu uniwersytetów w Oklahoma University. Uczestniczył ponadto w międzynarodowym Sympozjum IUTAM w Brown University, poświęconym zagadnieniu fal niesprężystych w ciałach stałych, gdzie przedstawił swoją pracę na temat fal w cienkich płytach i powłokach.

Prof. H. ZORSKI wziął udział w charakterze członka założyciela w pierwszym zebraniu Towarzystwa Filozofii Naturalnej w John Hopkins University. Odwiedził on poza tym szereg innych ośrodków naukowych.

## WIZYTY WYBITNYCH MECHANIKÓW AMERYKAŃSKICH W POLSCE

W okresie od lipca do października 1963 na zaproszenie PAN odwiedzili Polskę czterej uczeni ze Stanów Zjednoczonych: profesorowie A. J. A. MORGAN, C. A. TRUESDELL, R. D. MINDLIN i R. S. RIVLIN. Wygłosili oni w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN szereg ciekawych wykładów o dużej wadze naukowej. Poniżej podajemy krótką informację dotyczącą specjalności uczonych amerykańskich, daty ich wizyt i tematyki wykładów.

A. J. A. MORGAN, 27 lipca-2 sierpnia. Miejsce pracy: Uniwersytet Kalifornijski, Los Angeles. Specjalista z teorii sprężystości, opublikował wiele prac z tej dziedziny oraz z teorii równań różniczkowych. Ostatnio zajmuje się podstawami teoretycznymi równań stanu.

W czasie czterodniowej wizyty wygłosił wykład o podstawowych własnościach równań stanu. Wykład ten dotyczył ważnych własności grupowych, które spełniać musi każde równanie stanu ośrodka ciągłego.

C. A. TRUESDELL, 5-11 września. Miejsce pracy: Johns Hopkins University, Baltimore. Jeden z najwybitniejszych teoretyków ośrodków ciągłych na świecie. Autor szeregu podstawowych prac z tej dziedziny oraz szeregu monografii, m.in. monumentalnej pracy w III tomie Handbuch der Physik. Twórca zupełnie nowej szkoły, która zrewidowała i w znacznym stopniu unowocześniła całą teorię ośrodków ciągłych.

W czasie swej wizyty w Polsce wygłosił dwa wykłady o podstawowych prawach mechaniki ośrodka ciągłego i o rozwiązaniach dynamicznych w nieliniowej teorii sprężystości.

R. D. MINDLIN, 11-16 września. Miejsce pracy: Columbia University, New York. Wybitny uczony w zakresie klasycznej teorii sprężystości. Ostatnio napisał cykl prac dotyczących naprężeń momentowych w liniowych ośrodkach ciągłych, które posiadają ważne zastosowanie praktyczne.

W Warszawie wygłosił wykład na ten temat.

R. S. RIVLIN, 10-19 października. Miejsce pracy: Brown University, Providence. Jeden z twórców nowoczesnej nieliniowej teorii sprężystości. Napisał (poczynając od 1947 r.) wiele prac, w których stworzył podstawy tej teorii oraz podał szereg konkretnych rozwiązań dla ciał kauczukopodobnych. Obecnie zajmuje się teorią ruchu pewnych nowych ośrodków reologicznych.

Wygłosił u nas dwa wykłady o niezmienniczości równań stanu i ich zastosowaniach.

---

Następny zeszyt *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej* zawiera prace

- S. KALISKI, Stateczność ruchu układu oscylatorów poruszających się po belce na sprężystym podłożu  
Устойчивость движения системы осцилляторов движущихся по балке на упругом основании  
Stability of the motion of a system of oscillators moving on a beam on elastic foundation
- Z. OLESIAK, Przegląd polskich prac dotyczących zagadnień z mieszanymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości  
Обзор польских работ касающихся задач с перерывными краевыми условиями в теории упругости  
Review of the Polish papers concerning the problems with discontinuous boundary conditions in the theory of elasticity
- Z. WESOŁOWSKI, Związki fizyczne dla materiału sprężystego z więzami geometryczno-termicznymi  
Физические уравнения для упругого тела с геометрически-тепловыми связями  
Constitutive equations for elastic materials with thermo-geometric constraints
- W. SZCZEPIŃSKI, Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiarów tylko jednej składowej odkształcenia  
Определение напряжений на основе замера одной компоненты деформированного состояния  
Determining of stresses based on measuring of one strain component only
- R. DOROSZKIEWICZ, A. ЛИТЕВКА, Dorażne własności mechanicznych i elastoptycznych materiałów używanych w elastoptyce  
Текущее испытание механических и фотоупругих свойств материалов применяемых в фотоупругости  
Testing of mechanical and photoelastic properties of photoelastic materials

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągle mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie PTMTS otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50% w Oddziałach Towarzystwa. *MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA* można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Palac Kultury i Nauki)

---