

y. II 720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

TOM 1 • ZESZYT 1



PWN

WARSZAWA 1963  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## SPIS TREŚCI

Od Redakcji	3
Z. OSIŃSKI, Przegląd nieliniowych równań różniczkowych drgań układów autonomicznych o jednym stopniu swobody	7
Обзор нелинейных дифференциальных уравнений колебаний автономических систем с одной степенью свободы	
Survey on non-linear differential equations of the vibrations of autonomous systems of one degree of freedom	
A. SAWCZUK, W. OLSZAK, Zagadnienia powłok niesprężystych	37
Вопросы неупругих оболочек	
Inelastic shell problems	
A. WILCZYŃSKI, Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych	75
Исследование механических свойств некоторых пластмасс	
Investigation of mechanical properties of certain plastics	
Z. DŻYGADŁO, N. SOKOŁOWSKI, S. ZAHORSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Konferencja Naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych w Krynicy. Przegląd referatów	99
W. SZCZEPIŃSKI, Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań, Warszawa 1962.	109

11 1963  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M I • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 6 3  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

R A D A R E D A K C Y J N A  
WITOLD WIERZBICKI—PRZEWODNICZĄCY  
EDMUND KARAŚKIEWICZ (POZNAŃ). JERZY LIT-  
WINISZYN (KRAKÓW). ADAM MITZEL (WROCŁAW),  
WITOLD NOWACKI (WARSZAWA) STANISŁAW  
OCHEŁDUSZKO (GLIWICE). WAĆŁAW OLSZAK  
(WARSZAWA). MARIAN PIĄTEK (GDAŃSK)  
JAN SZMELTER (ŁÓDŹ).

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y  
A R T U R K A C N E R — R E D A K T O R  
J Ó Z E F J A N I C Z E K . • Z B I G N I E W O L E S I A K  
M A R E K S O K O Ł O W S K I

## REDAKCJA

W a r s z a w a , Ś w i e t o k r z y s k a 2 1 , t e l . 6 1 2 - 8 1 , w e w n . 2 1 3 .

---

Nakład 900 egz. Arkuszy wydawn. 8,75. Arkuszy drukarskich 7,0. Papierdruk. sat. III kl., 80 g. Oddano do składania 10.V.1963 r., druk ukończono w grudniu 1963 r. Cena zł. 27.

---

Zam. 669/63 L-36 Druk. im. Rewolucji Październikowej

## OD REDAKCJI

Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (P.T.M.T.S.) powstało w marcu 1958 r. z inicjatywy 74 członków założycieli.

Prace organizacyjne związane z powołaniem ośmiu Oddziałów Towarzystwa w Gliwicach, Gdańsku, Krakowie, Łodzi, Poznaniu, Szczecinie, Warszawie i Wrocławiu trwały do listopada 1958 r. Pod koniec tego roku P.T.M.T.S. zrzeszało już 212 osób pracujących twórczo w dziedzinie mechaniki. W 1959 roku liczba członków wzrosła do 283, w 1960 do 318, w 1961 do 341 i w czwartym kwartale 1962 wynosiła 367.

Do końca drugiego kwartału 1963 r. w Oddziałach Towarzystwa odbyło się ponad 250 zebrań naukowych i 12 ogólnopolskich sympozjów, na których przedstawiono łącznie ponad 450 prac.

W tym samym czasie ukazało się 17 zeszytów kwartalnego, informacyjnego Biuletynu P.T.M.T.S. i 8 zeszytów Sprawozdań z zebrań naukowych Oddziału Gliwickiego. Zarówno Biuletyn, jak i Sprawozdania wydawane były techniką rotaprintową. W Sprawozdaniach opublikowano dotychczas 26 prac a ponadto 12 streszczeń referatów wygłoszonych na naukowej konferencji środowiskowej Oddziałów Gliwickiego i Wrocławskiego (kwiecień 1961 r.).

Idea wydawania własnego kwartalnika naukowego, podnoszona na wszystkich Zjazdach Delegatów Towarzystwa, stała się już od dłuższego czasu realną potrzebą. Wynika to nie tylko z przytoczonych wyżej danych liczbowych, charakteryzujących rozwój P.T.M.T.S., lecz przede wszystkim z ilościowego i jakościowego rozwoju powojennej polskiej szkoły mechaniki teoretycznej i stosowanej, która zdobyła sobie dobre imię w nauce światowej i umacnia w niej swoją pozycję z roku na rok.

Czołowe czasopismo polskich mechaników Archiwum Mechaniki Stosowanej, założone w 1949 r. jako kwartalnik ukazujący się w języku polskim, począwszy od 1957 roku (t. IX) przekształciło się w dwumiesięcznik wydawany w języku angielskim. W ciągu ostatnich kilku lat Archiwum Mechaniki Stosowanej stało się czasopismem naukowym o charakterze międzynarodowym, w którym obok polskich autorów publikuje swoje prace wielu wybitnych uczonych zagranicz-

nych. Rozszerzył się znacznie nie tylko zasięg oddziaływania czasopisma, ale i jego tematyka, która obejmuje nie tylko podstawowe zagadnienia mechaniki, lecz także problemy przenikające z dyscyplin pokrewnych i leżące na pograniczu mechaniki i innych nauk.

W obecnej chwili Archiwum Mechaniki Stosowanej i założone później Proceedings of Vibration Problems są czasopismami wyspecjalizowanymi, skierowanymi na zewnątrz. Zajmując się prezentacją najcenniejszych prac nie odzwierciedlają one szerzej nurtu rozwoju mechaniki w Polsce i nie informują o życiu naukowym i rozwoju poszczególnych ośrodków.

Również zasłużony kwartalnik Rozprawy Inżynierskie wydawany podobnie jak Archiwum Mechaniki Stosowanej przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki P.A.N. i poświęcony zagadnieniom nowoczesnej teorii konstrukcji nie może już pomieścić wzrastającej liczby prac.

W wyniku tego stanu rzeczy wiele nieraz bardzo wartościowych prac ukazuje się ze znacznym opóźnieniem, ze szkodą dla wymiany myśli naukowej i dla sprawy priorytetu osiągnięć polskich autorów.

Taka jest w ogólnych zarysach sytuacja, w której P.T.M.T.S. wydaje pierwszy zeszyt swego czasopisma «Mechanika Teoretyczna i Stosowana».

Na treść Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej składać się będą:

prace przeglądowe,

oryginalne prace naukowe teoretyczne i doświadczalne,

komunikaty naukowe,

bibliografia, omawianie najważniejszych pozycji wydawniczych,

Biuletyn P.T.M.T.S., sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych.

Mechanika Teoretyczna i Stosowana skierowuje zatem swoją działalność do wewnątrz, na możliwie pełne informowanie o aktualnym rozwoju mechaniki polskiej i naukowej działalności środowisk krajowych.

Istniejące czasopisma nie mogły zaspokoić wyraźnie odczuwanej potrzeby prac przeglądowych omawiających postępy w poszczególnych działach mechaniki teoretycznej i stosowanej. Jawnie nie wystarczająca była dotychczas również liczba ukazujących się prac o charakterze doświadczalnym.

Te dotkliwe braki pragnie przede wszystkim usunąć Mechanika Teoretyczna i Stosowana realizując tym samym wytyczne działalności Towarzystwa.

Mechanika Teoretyczna i Stosowana wydawana będzie w języku polskim, ze streszczeniami w językach obcych.

Komitet Redakcyjny Mech. Teoret. Stos. prosi Zarządy Oddziałów i Komitety organizacyjne już odbytych i obecnie organizowanych konferencji i sympozjów naukowych o wykorzystanie posiadanych i napływających materiałów oraz kontaktów z autorami do opracowania referatów przeglądowych, syntetyzujących dotychczasowe osiągnięcia w poszczególnych dziedzinach mechaniki, stanowiących temat sympozjum.

Komitet Redakcyjny liczy na współpracę Zarządów Oddziałów w kierunku doboru odpowiednich autorów w celu dokonywania przeglądów referatów przedstawianych na zebraniach naukowych Oddziałów, stanowiących zamknięte cykle tematyczne.

W Mechanice Teoretycznej i Stosowanej powinny się ponadto znaleźć prace nagrodzone na konkursach naukowych, organizowanych przez Oddziały, oraz prace doktorskie i habilitacyjne, których autorami są członkowie Towarzystwa. Redakcja Mech. Teoret. Stos. wyraża nadzieję, że Zarządy Oddziałów wykażą troskę o wyłowienie na swym terenie najbardziej wartościowych prac i pozyskanie autorów dla swego czasopisma.

*KOMITET REDAKCYJNY  
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ*





PRZEGLĄD NIELINIOWYCH RÓŻNICZKOWYCH RÓWNAŃ  
DRGAŃ UKŁADÓW AUTONOMICZNYCH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

ZBIGNIEW OSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Celem pracy jest podanie w skondensowanej postaci przeglądu informacji o aktualnym stanie badań nad nieliniowymi równaniami różniczkowymi drgań układów o jednym stopniu swobody. Ograniczamy się do typowych równań opisujących ruch drgający w dotychczasowym rozumieniu, czyli do równań drugiego rzędu. Równania te zostały podzielone na jedenaście grup. Wewnątrz grup równania są numerowane kolejno: każde równanie oznaczone jest dwiema liczbami. Pierwsza liczba oznacza numer grupy, druga numer równania w grupie. Równania zostały sklasyfikowane według charakterystyki sprężystej i tłumienia oraz według założeń narzuconych na charakterystyki, a czasem na warunki początkowe. Rozróżnia się przy tym założenia gwarantujące istnienie rozwiązań okresowych (czyli powstanie drgań samowzbudnych) od założeń zapewniających gaśnięcie rozwiązań z upływem czasu.

Gdzie to było możliwe, równania przedstawiono w jednolitej postaci przy użyciu następujących oznaczeń:

- $x$  przemieszczenie,
- $\dot{x}$  prędkość,
- $\ddot{x}$  przyśpieszenie (współczynnik liczbowy przy  $\ddot{x}$  sprowadzono do jedności),
- $S(x)$  nieliniowa charakterystyka sprężysta,
- $\omega^2$  współczynnik liczbowy w przypadku liniowej charakterystyki sprężystej,
- $R(\dot{x})$  nieliniowa charakterystyka tłumienia,
- $R(x, \dot{x})$  nieliniowa mieszana charakterystyka tłumienia,
- $\alpha$  współczynnik liczbowy w przypadku liniowej charakterystyki tłumienia.

W wielu przypadkach pozostawiamy jednak oznaczenia zgodne z podanymi w oryginalnych pracach dotyczących danego równania.

Podział na grupy jest następujący:

1.  $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) = 0$ , równania o charakterze ogólnym;
2.  $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$ , równanie o mieszanej nieliniowej charakterystyce tłumienia i nieliniowej charakterystyce sprężystej przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;



3.  $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$ , jak w p. 2, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych;

4.  $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + \omega^2(x) = 0$ , równanie o mieszanej nieliniowej charakterystyce tłumienia i liniowej charakterystyce sprężystej przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;

5.  $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + \omega^2(x) = 0$ , jak w p. 4, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych;

6.  $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ , równanie z nieliniową charakterystyką tłumienia i nieliniową charakterystyką sprężystą przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;

7.  $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ , jak w p. 6, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych;

8.  $\ddot{x} + S(x) = 0$ , równanie z nieliniową charakterystyką sprężystą bez tłumienia;

9.  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + S(x) = 0$ , równanie z liniową charakterystyką tłumienia i nieliniową charakterystyką sprężystą;

10.  $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2x = 0$ , równanie z nieliniową charakterystyką tłumienia i liniową charakterystyką sprężystą przy założeniach gwarantujących gaśnięcie rozwiązań;

11.  $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2x = 0$ , jak w p. 10, ale przy założeniach gwarantujących istnienie rozwiązań okresowych.

Dla każdego równania podajemy podstawowe twierdzenia dotyczące zachowania się rozwiązań, rozwiązanie ściśle lub przybliżone (jeżeli takie są znane), uwagi o własnościach ruchu oraz o zastosowaniu równania w zagadnieniach technicznych.

Ogólnych warunków istnienia rozwiązań nie podajemy przyjmując, że są one spełnione i że istnieją rozwiązania badanych równań.

W opisie własności równań wymieniamy nazwiska autorów, którzy podali odpowiednie rozwiązania bądź twierdzenia. Opracowanie oparte jest na bibliografii wydrukowanej na końcu pracy.

2.1. 
$$\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0.$$

Równanie powyższe zostało zbadane przez S. ZIEMBRĘ w pracy [49] przy następujących założeniach:  $S(x)$  i  $R(x, \dot{x})$  są funkcjami analitycznymi,  $S(-x) = -S(x)$ ,  $S(0) = 0$ ,  $S(x)x > 0$  dla  $x \neq 0$ ;  $\frac{dS(x)}{dx} \geq 0$  dla każdego  $x$ ,  $R(x, 0) = 0$  dla każdego  $x$ ;  $R(-x, \dot{x}) = R(x, \dot{x})$  dla wszystkich  $x, \dot{x}$ ,  $R(x, -\dot{x}) = -R(x, \dot{x})$  dla  $x \neq 0$ ,  $R(x, \dot{x})\dot{x} > 0$  dla  $\dot{x} > 0$ ,  $\frac{dR(x, \dot{x})}{d\dot{x}} \geq 0$  dla każdego  $x$ .

Wykazano, że ruch jest ograniczony, a więc

$$|\dot{x}| \leq \sqrt{2E(t_0)} \quad \text{i} \quad |x| \leq V^{(-1)}E(t_0),$$

gdzie  $E(t_0)$  jest energią całkowitą w chwili początkowej, a  $V$  funkcją określającą energię potencjalną.

Ruch jest gasnący, czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0.$$

Zbadano charakter punktu osobliwego  $(0, 0)$ . Stwierdzono, że w przypadku  $h \geq k > 0$ , punkt osobliwy jest punktem węzłowym statecznym, a w przypadku  $0 < h < k$  — punktem ogniskowym statecznym. Symbole  $h$  i  $k$  określone są z rozwinięć funkcji  $S(x)$  i  $R(x, \dot{x})$  w szeregi potęgowe w następujący sposób:

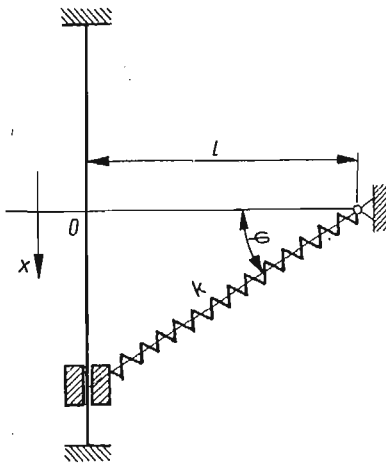
$$R(x, \dot{x}) = \mu x + 2h\dot{x} + R_1(x, \dot{x}),$$

$$S(x) = k^2 x + S_1(x).$$

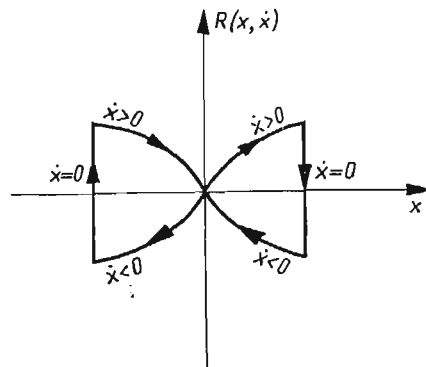
W pracy podana została analiza przebiegu trajektorii fazowych przez porównanie ich z trajektoriami równań liniowych oraz przykłady badania ruchu za pomocą metody  $\delta$ .

$$2.2. \quad \ddot{x} + \mu k l \left[ 1 - \cos \left( \arctg \frac{x}{l} \right) \right] \text{sign } \dot{x} + k l \left[ \frac{x}{l} - \sin \arctg \left( \frac{x}{l} \right) \right] = 0.$$

Równanie jest podane przez Z. OSIŃSKIEGO w pracy [29]; opisuje ono ruch drgający masy poruszającej się po prostoliniowej prowadnicy. Siła sprężysta pochodzi od rozciąganej sprężyny o stałej  $k$ , której punkt zamocowania leży poza osią prowadnicy (rys. 1). Rozproszenie energii następuje przez tarcie suche proporcjonalne do nacisku masy na prowadnicę.



Rys. 1



Rys. 2

Charakterystyka tłumienia zależy tylko od znaku prędkości i od wychylenia w sposób przedstawiony na rys. 2. Charakterystyka sprężysta jest sztywna (rys. 3)

$$2.3. \quad \ddot{x} + \left[ \frac{m}{l} (\dot{x})^2 \operatorname{tg} \psi + mg \cos \left( \frac{x}{l} \right) \operatorname{tg} \psi \right] \operatorname{sign} \dot{x} + mg \sin \left( \frac{x}{l} \right) = 0.$$

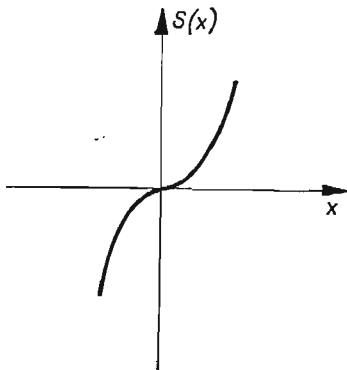
Równanie zostało podane przez Z. OSIŃSKIEGO w pracy [29]. Opisuje ono ruch wahadła matematycznego z uwzględnieniem oporu powietrza i oporu tarcia suchego w przegubie walcowym proporcjonalnego do nacisku w przegubie (rys. 4). Charakterystyka tłumienia przebiega według rys. 5, charakterystyka sprężysta miękka (sinusoidalna) według rys. 6.

$$2.4. \quad m\ddot{x} + lx^\gamma \dot{x}^\alpha + kx^\beta = 0$$

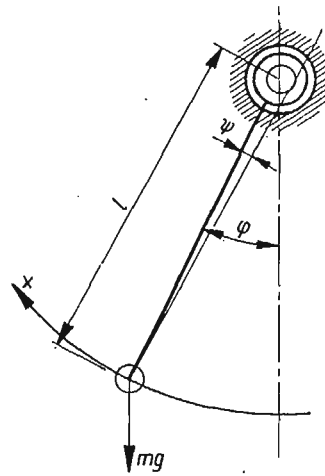
dla  $m > 0$ ,  $k > 0$ ,  $l \geq 0$ , przy założeniu, że

$$(a) \quad (-\dot{x})^\alpha = -\dot{x}^\alpha, \quad (-x)^\beta = -x^\beta, \quad (-x)^\gamma = x^\gamma.$$

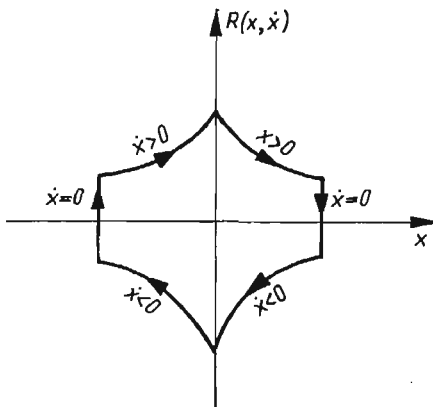
S. ZIEMBA w pracy [48] poszukuje szczególnych przypadków, dla których można znaleźć równanie trajektorii fazowej w zamkniętej postaci. Przypadki takie zachodzą, jeżeli istnieją odpowiednie związki między wykładnikami.



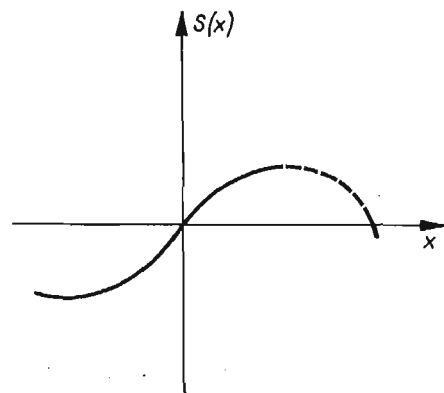
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Przyjmując ze względu na założenie (a), że wykładnik  $a$  określony jest wzorem

$$a = \frac{2n+1}{2m+1},$$

otrzymamy na  $\beta$  i  $\gamma$  wzory

$$\beta = \frac{2N+1}{2M+1}, \quad \gamma = \frac{(2m+1)(2N+1) - (2n+1)(N+M+1)}{(2M+1)(2m+1)},$$

Suma  $N+M$  powinna być liczbą nieparzystą.

Dla takich wykładników otrzymujemy równania trajektorii  $\Phi(\dot{x}, x) = 0$  w postaci

$$x^2 + [C + \exp F_2(u)]^2 = 0,$$

gdzie

$$F_2(u) = \int \frac{du}{au^v - (\beta+1)u + b}$$

oraz

$$u(x) = \dot{x}^2 x^{-(\beta+1)}, \quad v = \alpha/2, \quad a = -2l/m, \quad b = -2k/m.$$

2.5.

$$m\ddot{x} + lx^\gamma \dot{x}^\alpha + p\dot{x}^\delta + kx^\beta = 0$$

dla  $m > 0$ ,  $l \geq 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $k > 0$  i przy założeniu, że

$$(a) \quad \begin{aligned} (-\dot{x})^\alpha &= -\dot{x}^\alpha, & (-x)^\gamma &= -x^\gamma, \\ (-x^\beta) &= -x^\beta, & (-\dot{x})^\delta &= -\dot{x}^\delta. \end{aligned}$$

S. ZIEMBA w pracy [48] poszukuje szczególnych przypadków, w których można znaleźć równanie trajektorii fazowej w zamkniętej postaci. Przypadki takie zachodzą, jeżeli istnieją odpowiednie związki między wykładnikami  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ .

Jeżeli przyjmiemy ze względu na założenie (a), że wykładnik  $a$  określony jest wzorem

$$a = \frac{2n+1}{2m+1},$$

to otrzymamy na  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  wzory:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2N+1}{2M+1}, & \delta &= \frac{2N+1}{N+M+1}, \\ \gamma &= \frac{(2m+1)(2N+1) - (2n+1)(N+M+1)}{(2M+1)(2m+1)}. \end{aligned}$$

Suma  $M+N$  powinna być nieparzysta. Dla takich wykładników równanie trajektorii

$$\Phi(\dot{x}, x) = 0$$

ma postać

$$x^2 + [C + \exp F_2(u)]^2 = 0,$$

gdzie

$$F_2(u) = \int \frac{du}{au^v + cu^r - (\beta+1)u + b}$$

oraz

$$u(x) = \dot{x}^2 x^{-(\beta+1)}, \quad v = a/2, \quad r = \delta/2, \quad a = -2l/m, \quad b = -2k/m, \\ c = -2p/m.$$

$$3.1. \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x})x + g(\dot{x}) = 0.$$

Dla równania tego N. LEVINSON i O. K. SMITH w pracy [18] podają następujące twierdzenie o istnieniu rozwiązań okresowych.

Jeżeli funkcja  $g(x)$  jest określona i ciągła w przedziale  $(-\infty, +\infty)$ ;  $xg(x) > 0$  dla  $x \neq 0$ ; funkcja  $f(x, v)$  jest ciągła dla wszystkich  $x, v$  oraz spełnia warunki Lipschitza dla wszystkich  $v$ ;  $\int_0^\infty g(x) dx = \infty$  i  $f(0, 0) < 0$  oraz istnieje takie  $x_0 > 0$ , że  $f(x, v) \geq 0$  dla  $|x| \geq x_0$ ; istnieje takie  $M$ , że dla  $|x| \leq x_0$  jest  $f(x, v) \geq -M$  i takie  $x_1 > x_0$ , że

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, v) dx \geq 10Mx_0,$$

gdzie  $v = v(x)$  jest dowolną dodatnią funkcją malejącą, to równanie (3.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

A. D. DRAGILEW [12] podaje, że zamiast stałej  $10Mx_0$  można wziąć  $4Mx_0 + a$ , gdzie  $a$  jest dowolną stałą dodatnią.

Tam też znajduje się następujące twierdzenie: jeżeli równanie (3.1) ma rozwiązanie okresowe, to także równanie

$$\ddot{x} + f^*(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0,$$

gdzie  $f(x, \dot{x}) \geq f^*(x, \dot{x})$ , ma rozwiązanie okresowe.

Temu samemu zagadnieniu poświęcona jest także praca A. DE CASTRO [7]. Niektórym szczególnym zagadnieniom poświęcone są prace E. i H. CARTANÓW [4] oraz A. A. ANDRONOWA [1] i R. REISSIGA [32].

$$3.2. \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Jest to uogólnione równanie Lienarda. Dla równania tego typu Lienarda w pracy [19] podaje kryteria istnienia jednego statecznego rozwiązania, które podajemy w ujęciu Babakowa [2]:

- 1)  $f(x)$  powinno być funkcją parzystą, a  $g(x)$  — nieparzystą;
- 2)  $f(0) < 0$ ;
- 3)  $xg(x) > 0$  dla wszystkich  $x$ ;
- 4)  $F(x) = \int_0^x f(x) dx \rightarrow \infty$ , gdy  $x \rightarrow \infty$ ;

5) funkcja  $F(x)$  ma jedno miejsce zerowe w punkcie  $x = a > 0$  i monotonicznie rośnie dla  $x \geq a$ .

W pracy A. F. FILIPOWA [13] znajduje się twierdzenie o istnieniu granicznego cyklu dla powyższego równania.

Równanie ma stateczny cykl graniczny, jeżeli funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  są ciągłe,  $g(x)$  ma znak  $x$ ,  $\int_0^{\pm\infty} g(x) dx = \infty$  i jeżeli po zmianie zmiennych

$$\text{dla } x > 0 \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = z_1(x) \quad \text{i} \quad \int_0^x f(\xi) d\xi = F(x) = F_1(z_1),$$

$$\text{a dla } x < 0 \quad \int_0^x g(\xi) d\xi = z_2(x) \quad \text{i} \quad \int_0^x f(\xi) d\xi = F(x) = F_2(z_2),$$

funkcje  $F_1$  i  $F_2$  spełniają warunki następujące:

a) przy małych  $z$  ( $z < \delta$ )

$$F_1(z) \leq F_2(z) \quad \text{i nie wszędzie} \quad F_1(z) = F_2(z),$$

$$F_1(z) < a\sqrt{z}, \quad F_2(z) > -a\sqrt{z} \quad \text{dla} \quad a < \sqrt[3]{8};$$

b) istnieje taka wartość  $z_0$ , że

$$\int_0^{z_0} [F_1(z) - F_2(z)] dz > 0$$

i przy  $z > z_0$   $F_1(z) \geq F_2(z)$ ,  $F_1(z) > -a\sqrt{z}$ ,  $F_2(z) < a\sqrt{z}$ , gdzie  $a < \sqrt[3]{8}$

W pracy A. W. DRAGILEWA [12] znajduje się twierdzenie następujące:

Jeżeli równanie powyższe ma rozwiązanie okresowe, to również równanie  $\ddot{x} + F(x) + x = 0$ , w którym  $F(u) = \int_0^u f(x) dx$ , ma rozwiązanie okresowe.

Tym samym równaniem zajmuje się również W. S. IWANOW [15], I. L. MASSERA [23] oraz G. SANSONE [36].

$$4.1. \quad \ddot{x} + \Psi(x) \Phi(\dot{x}) + x = 0.$$

Równanie zostało zbadane przez S. ZIEMBĘ w pracy [47] przy założeniach

$$\Psi(-x) = \Psi x \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } x;$$

$$\Phi(-\dot{x}) = -\Phi(\dot{x}), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\dot{x}) > 0 \quad \text{dla } \dot{x} > 0;$$

$$\text{dla } 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2 \quad \text{jest } \Psi(x) \Phi(\dot{x}_2) > \Psi(x) \Phi(\dot{x}_1) \geq 0, \text{ a}$$

$$\text{dla } 0 \leq |x_1| < |x_2| \quad \text{jest } 0 \leq |\Psi(x_1) \Phi(\dot{x})| < |\Psi(x_2) \Phi(\dot{x})|.$$

Charakter funkcji  $\Psi(x)$  i  $\Phi(\dot{x})$ , zgodny z powyższymi założeniami, przedstawiony jest na rysunkach 7 i 8.

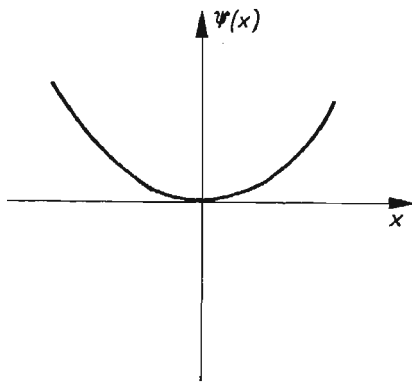
Równanie to znajduje zastosowanie do opisanego ruchu mechanicznego modelu ciała stałego niesprężystego. W cytowanej pracy podano wykresny sposób wyznaczenia trajektorii fazowych.

Przy podanych założeniach ruch jest gasnący i punkt ruchomy zmierza do położenia równowagi, gdy  $\tau \rightarrow \infty$ .

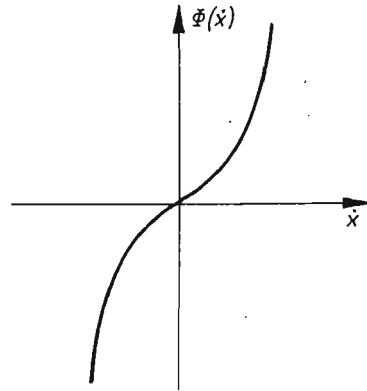
Zbadano charakter punktu osobliwego i wysnuto wnioski o naprzemienności ruchu:

1) jeżeli  $[\Psi(0)\Phi'(0)] < 2$ , to punkt osobliwy jest punktem ogniskowym statecznym;

2) jeśli  $[\Psi(0)\Phi'(0)] \geq 2$ , to punkt osobliwy jest punktem węzłowym statecznym.

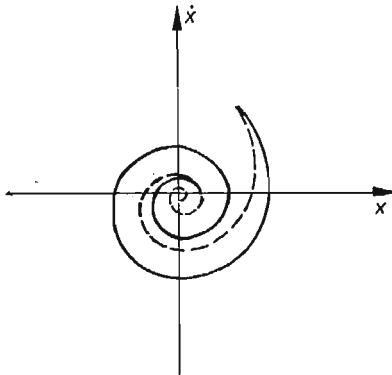


Rys. 7



Rys. 8

W przypadku pierwszym trajektorie mają w otoczeniu punktu osobliwego kształt spirali i ruch jest ruchem naprzemiennym (liczba miejsc zerowych jest nieograniczenie wielka). W przypadku drugim punkt od pewnej chwili zmierza asymptotycznie do położenia równowagi nie przechodząc przez położenie zerowe, czyli ruch jest nienaprzemienny.



Rys. 9

Przeprowadzono porównanie trajektorii fazowych omawianego równania z trajektoriami w przypadku tłumienia wiskotycznego.

Jak widać z rys. 9, trajektorie te są silniej zakrzywione ku środkowi, czyli że ruch jest silniej tłumiony niż w przypadku tłumienia wiskotycznego. W pracy [47] przedyskutowano także kierunki elementów liniowych na płaszczyźnie fazowej.

$$4.2. \quad \ddot{x} + \psi(x)\varphi(\dot{x}) + \omega^2 x = 0.$$

Równanie jest podane przez S. ZIEMBĘ w pracy [47]. Przez zamianę zmiennej niezależnej  $\tau = \omega t$  otrzymamy równanie analogiczne do (4.1):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \psi(x)\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0.$$



4.3. 
$$A\ddot{x} + [\beta + \Psi(x)][B + F(\dot{x})]\dot{x} + Cx = 0.$$

Równanie powyższe należy do typu 4.1. Zanalizował je S. ZIEMBA w [47] przy założeniach:

$$A > 0, \quad C > 0, \quad B \geq 0, \quad \beta \geq 0;$$

$$\Psi(-x) = \Psi(x) \geq 0 \text{ dla wszystkich } x; \quad \Psi(x_1) < \Psi(x_2) \text{ dla } |x_1| < |x_2|;$$

$$F(-\dot{x}) = F(\dot{x}) \geq 0 \text{ dla wszystkich } x.$$

W pracy zbadano zagadnienie naprzemienności ruchu. W przypadku

$$1) F(0) = 0 \quad \text{i} \quad F(\dot{x}_1) < F(\dot{x}_2) \quad \text{dla} \quad 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2,$$

czyli w przypadku analogicznym do tłumienia sztywnego przy tłumieniu czysto wiskotycznym stwierdzamy, że przy  $\beta^2 B^2 < 4AC$  ruch jest naprzemienny (liczba miejsc zerowych jest nieskończenie wielka), a przy  $\beta^2 B^2 \geq 4AC$  punkt przechodzi co najwyżej raz przez położenie równowagi i od tego miejsca jest nienaprzemienny niezależnie od warunków początkowych.

W przypadku

$$2) F(0) > 0 \quad \text{i} \quad F(\dot{x}_1) > F(\dot{x}_2) \quad \text{dla} \quad 0 < \dot{x}_1 < \dot{x}_2,$$

czyli w przypadku analogicznym do tłumienia miękkiego przy tłumieniu czysto wiskotycznym stwierdzamy, że jeżeli  $\beta B \geq 2\sqrt{AC}$ , to rozwiązanie ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.

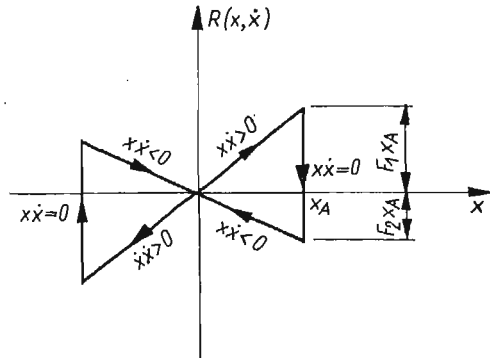
Jeżeli  $B + F(0) < 2\sqrt{AC}$ , to ruch jest naprzemienny (rozwiązanie ma nieskończenie wiele miejsc zerowych).

Jeżeli  $\beta B < 2\sqrt{AC} < \beta[B + F(0)]$ , to rozwiązanie ma skończoną liczbę miejsc zerowych, niezależną od warunków początkowych i od pewnej chwili ruch jest nienaprzemienny.

4.4.

$$m\ddot{x} + kx \begin{cases} +F_1\dot{x} = 0 & \text{dla } x\dot{x} > 0, \\ -F_2\dot{x} = 0 & \text{dla } x\dot{x} < 0. \end{cases}$$

Równanie to podał Z. OSIŃSKI w pracy [29]. Opisuje ono ruch drgający masy przy tarcie suchym (Coulomba) proporcjonalnym do przemieszczenia  $x$ . Opór taki występuje przy drganiach masy na sprężynie wielopierścieniowej i na resorze piórowym. Podobny charakter ma tarcie w przegubach dźwigni obciążonej masą drgającą i podpartej sprężystości.



Rys. 10

Charakterystyka tłumienia przebiega według rys. 10. Charakterystyka sprężysta jest liniowa.

Rozwiązanie równania dla ruchu od położenia równowagi:

$$x = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t.$$

Dla ruchu do położenia równowagi

$$x = C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \sin \omega_2 t,$$

gdzie

$$\omega_1^2 = \frac{k+F_1}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k-F_2}{m}.$$

Właściwości ruchu. 1. Przemieszczenie  $x(t)$  ma co najwyżej jedno miejsce zerowe przy  $k \leq F_2$  lub nieskończenie wiele miejsc zerowych przy  $k > F_2$ .

2. Kolejne amplitudy zmieniają się według postępu geometrycznego.

3. Przesunięcie środka drgań nie występuje.

4. Ruch układu przy  $k > F_2$  ustaje po upływie nieograniczenie długiego czasu.

5. Okres drgań jest stały i różny od okresu drgań bez tarcia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left( \frac{\omega}{2\omega_1} + \frac{\omega}{2\omega_2} \right) \quad \text{przy} \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

4.5. 
$$\ddot{x} + ax\dot{x}^2 + bx = 0.$$

Równanie powyższe zostało podane w zbiorze E. KAMKEGO [16], s. 553. Przez podstawienie  $p(x) = \dot{x}(t)$  otrzymujemy równanie Bernoulliego

$$pp' + axp^2 + bx = 0.$$

4.6. 
$$\ddot{x} + x\dot{x} - x^2 + ax = 0, \quad a > 0.$$

Równanie to i jego rozwiązanie podaje P. PAINLEVÉ. Cytujemy je za E. KAMKEM [16] (s. 548).

Rozwiązanie ma postać:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{3}} \frac{p'(u, 12, C_1)}{p(u, 12, C_1)^{-1}},$$

gdzie

$$u = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{a}{3}} + C_2.$$

5.1. 
$$\ddot{x} + \omega F(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Równanie Lienarda z liniową charakterystyką sprężystą. Dla równania tego G. SANSONE [35, 38] podaje kryteria istnienia rozwiązań okresowych.

Na charakterystykę tłumienia nałożone są warunki:  $F(x)$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $(-\infty, \infty)$ ; istnieją dwie takie liczby

$$\delta_{-1} < 0 \text{ i } \delta_1 > 0, \text{ że } F(x) < 0 \text{ dla } \delta_{-1} < x < \delta_1,$$

$$F(x) > 0 \text{ dla } x < \delta_{-1}, x > \delta_1 \text{ oraz } F(\delta_{-1}) = F(\delta_1) = 0.$$

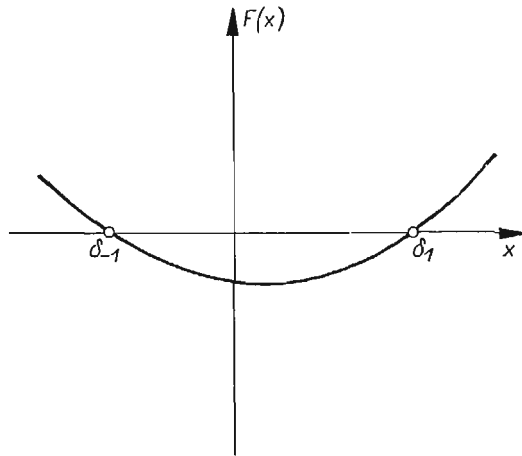
Powyższe założenia określają charakter funkcji  $F(x)$ , której wykres przedstawiono na rys. 11.

Możliwe są następujące przypadki:

1. Jeżeli obok założenia (a) spełniony jest jeszcze dla każdego  $x$  warunek  $x\dot{\Phi}(x) < 0$ , gdzie  $\Phi(x) = \int_0^x F(s)ds$ , to równanie nie ma rozwiązania okresowego.

2. Jeżeli obok założenia (a) spełnione są jeszcze warunki: istnieje takie  $x_0 > \delta_1$ , że  $4Nx_0 + 4N^2 \leq [\Phi(x_0) - \Phi(\delta_1)]^2$ , gdzie  $N = |\Phi(\delta_1)| + |\Phi(\delta_{-1})|$ ; istnieje  $x_0 < \delta_{-1}$ , takie że  $4N|x_0| + 4N^2 \leq [\Phi(x_0) - \Phi(\delta_{-1})]^2$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \infty$  oraz  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |\Phi(x)| = \infty$ , to równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

G. SANSONE i I. L. MASSERA podali także twierdzenie o istnieniu jedyne go rozwiązania okresowego [37, 22]:



Rys. 11

3. Jeżeli spełnione są założenia (a) i funkcja  $F(x)$  nie jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, 0)$  oraz nie jest malejąca w  $(0, \infty)$ , to równanie ma jedno i tylko jedno rozwiązanie okresowe.

$$5.2. \quad \ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Jest to równanie VAN DER POLA [30, 31]. Równanie należy do typu równania Lienarda (5.1) i spełnia założenia zapewniające istnienie jedyne go statecznego rozwiązania okresowego.

Równanie rozwiązuje się za pomocą metody małego parametru ( $\mu$  jest przyjmowane jako mały parametr). Podajemy rozwiązanie w drugim przybliżeniu uzyskane metodą Kryłowa–Bogoliubowa [3]:

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{\mu a^3}{32} \sin 3(\omega t + \theta),$$

gdzie

$$a = \frac{a_0 \exp(\mu t/2)}{\sqrt{1 + a_0^2 (\exp \mu t - 1)/4}}, \quad \omega = 1 - \frac{\mu^2}{16}.$$

Rozwiązanie okresowe otrzymujemy dla  $a = 2$ . Ma ono postać

$$x = 2 \cos(\omega t + \theta) - \frac{\mu}{4} \sin 3(\omega t + \theta).$$

5.3.  $\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$  przy  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Równanie ma postać równania drgań relaksacyjnych. Badaniem własności takiego równania przy bardzo dużych oraz rosnących nieograniczenie wartościach  $\lambda$  zajmowali się w szczególności A. A. DORODNICYN [11] i M. L. CARTWIGHT

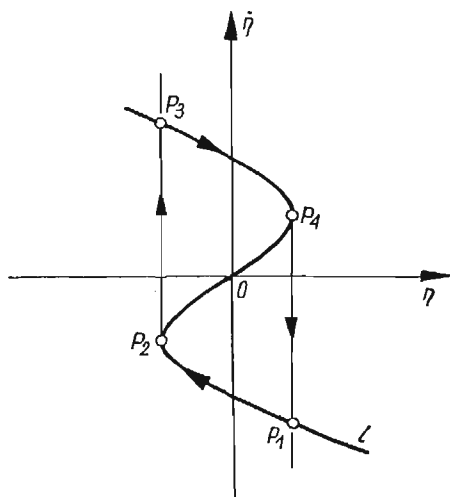
[5]. Podają oni przybliżone wzory na okres drgań. Podajemy wzór na okres drgań według pracy BOGOLIUBOWA i MITROPOLSKIEGO [3]:

$$T = 1,613706 \lambda + 7,01432 \lambda^{-1/3} - \frac{22 \ln \lambda}{9 \lambda} + 0,0087 \lambda^{-1} + 0(\lambda^{-4/3}).$$

W przypadku bardzo dużych wartości  $\lambda$  można po zamianie zmiennych  $x = \lambda \eta$ ,  $t = \varepsilon \tau$ , przejść do równania

$$(a) \quad \dot{\eta} - \frac{1}{3} \dot{\eta}^3 - \eta = 0.$$

Analiza ruchu na płaszczyźnie fazowej wskazuje na istnienie w tym przypadku cyklu granicznego o specjalnym charakterze, rys. 12. Krzywa  $l$  jest okre-



Rys. 12

ślona równaniem (a). Cykl graniczny składa się z dwóch odcinków krzywej  $P_1P_2$  i  $P_3P_4$  oraz z dwóch odcinków pionowych  $P_4P_1$  i  $P_2P_3$ .

6.1.  $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ .

Pewne własności tego równania zostały zbadane przez S. ZIEMBE w pracy [48]. Poczynione zostały przy tym założenia dodatniej dysypacji w przedziale nieograniczonym. Założenia te są następujące:  $R(\dot{x}) = -R(\dot{x})$ ,  $R(x)\dot{x} > 0$  dla  $\dot{x} > 0$ ,  $\frac{dR(\dot{x})}{d\dot{x}} > 0$ ,  $R(0) = 0$  oraz  $S(-x) = S(x)$ ,  $S(x)x > 0$  dla  $x > 0$ ,

$$\frac{dS(x)}{dx} > 0, \quad S(0) = 0.$$

Charakterystyka tłumienia jest więc asymetryczna i ma pochodną stale rosnącą. Podobne własności ma charakterystyka sprężysta. Przy tych założeniach wykazano ograniczoność ruchu, mianowicie:

$$|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{E(t_0)}, \quad |x(t)| \leq \tilde{F}^{-1}[E(t_0)],$$

gdzie  $\tilde{F}(x)$  jest funkcją określającą energię potencjalną układu, a  $E(t_0)$  całkowitą energię początkową.

Wykazano też, że rozwiązanie ma charakter gasnący, to znaczy, że

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [E(t)] &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{x}(t)] &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} [\ddot{x}(t)] &= 0. \end{aligned}$$

W tejże pracy przedyskutowano charakter punktu osobliwego. Punkt osobliwy jest punktem węzłowym statecznym, jeżeli  $h \geq a > 0$ , a punktem ogniskowym statecznym, jeżeli  $0 < h < a$ , gdzie  $2h$  jest współczynnikiem przy liniowym wyrazie w rozwinięciu funkcji  $R(x)$  na szereg potęgowy, a  $a^2$  jest współczynnikiem przy liniowym wyrazie w rozwinięciu funkcji  $S(x)$  na szereg potęgowy.

Przedyskutowano kierunki elementów liniowych na płaszczyźnie fazowej oraz podano metodę wykreślną przybliżonego wyznaczenia trajektorii fazowych.

Zagadnienia naprzemienności omówiono w związku z równaniem (6.2). Zagadnienie to zostało także zbadane przez Z. OSIŃSKIEGO w pracy [26].

Zakładamy, że charakterystyki można przedstawić w postaci

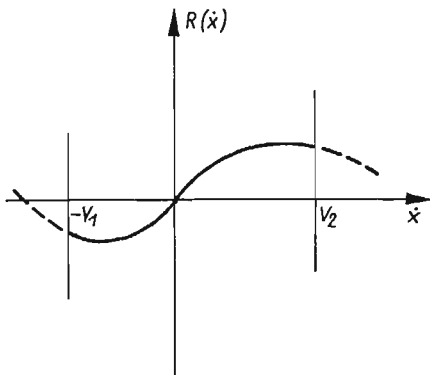
$$R(\dot{x}) = a\dot{x} + \varphi(\dot{x}), \quad S(x) = \omega^2 x + f(x)$$

przy  $a > 0$ ,  $\omega^2 > 0$  oraz

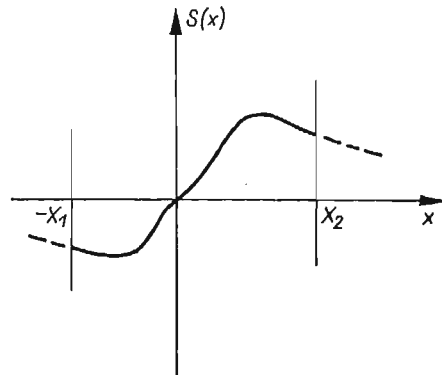
$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} R(\dot{x})\dot{x} > 0 \\ R(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{w przedziale } (-V_1, +V_2),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(x)x > 0 \\ S(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{w przedziale } (-X_1, +X_2).$$

Charakterystyki mają postać przedstawioną na rys. 13 i 14. Postać ta ograniczona jest tylko warunkiem ciągłości i założeniami (a) w ograniczonym przedziale.



Rys. 13



Rys. 14

Postać charakterystyk poza określonym przedziałem nie jest istotna dla ruchu rozpoczynającego się przy odpowiednio ograniczonych warunkach początkowych.

W tych warunkach przemieszczenie  $x(t)$  ma nieskończoną liczbę miejsc zerowych, gdy  $a < 2\omega$ , oraz skończoną liczbę miejsc zerowych, gdy  $a \geq 2\omega$ . W tym drugim przypadku może istnieć co najmniej jedno miejsce zerowe niezależnie od warunków początkowych lub skończona liczba miejsc zerowych, zależna od warunków początkowych.

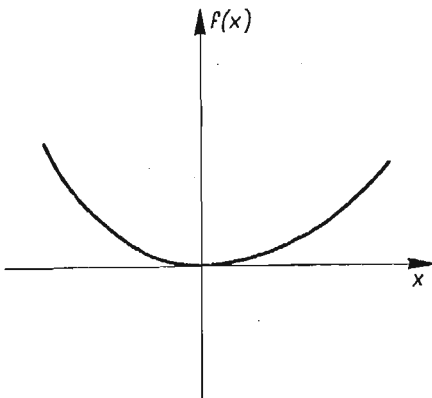
W pracy podano geometryczne kryterium oceny liczby miejsc zerowych w postaci tzw. «prostej krytycznej» oraz «prostej pomocniczej». Zastosowanie tego kryterium pozwala ocenić liczbę miejsc zerowych bezpośrednio z postaci charakterystyk, które mogą być dane w postaci wykresnej (np. z doświadczeń).

$$6.2. \quad \begin{aligned} A\ddot{x} + [B + \varphi(x)\dot{x}] + [C + f(x)]x &= 0, \\ A > 0, \quad B \geq 0, \quad C \geq 0. \end{aligned}$$

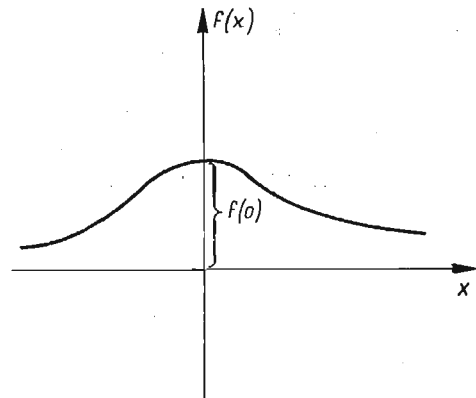
Równanie należy do typu (6.1). Przy spełnieniu założeń podanych tamże ogólne własności równania (6.1) są zachowane (ograniczoność, gaśnięcie, charakter punktu osobliwego). W pracy [48] S. ZIEMBA podaje analizę zagadnienia naprzemienności powyższego równania.

Określono charakterystykę sprężystą jako sztywną (rys. 15), jeżeli

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) > 0 & \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0, \\ f'(x) > 0 & \quad \text{dla } x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{aligned}$$



Rys. 15



Rys. 16

i jako miękką (rys. 16), jeżeli

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) > 0 & \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) > 0, \\ f(x) < 0 & \quad \text{dla } x > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Podobnie charakterystyka tłumienia jest sztywna, jeżeli

$$\begin{aligned} \varphi(-\dot{x}) = \varphi(\dot{x}) > 0 & \quad \text{dla } \dot{x} \neq 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \\ \varphi'(\dot{x}) > 0 & \quad \text{dla } \dot{x} > 0, \quad \lim_{\dot{x} \rightarrow \infty} \varphi(\dot{x}) = \infty \end{aligned}$$

oraz miękka, jeżeli

$$\begin{aligned} \varphi(-\dot{x}) = \varphi(\dot{x}) & \quad \text{dla } \dot{x} \neq 0, \quad \varphi(0) > 0, \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\dot{x}) < 0 & \quad \text{dla } \dot{x} > 0, \quad \lim_{\dot{x} \rightarrow \infty} [\varphi(\dot{x})] = 0. \end{aligned}$$

Zanalizowano i ustalono kryteria naprzemienności w czterech przypadkach skojarzenia charakterystyki:

- 1) miękka sprężysta, sztywna tłumienia;
- 2) sztywna sprężysta, miękka tłumienia;
- 3) sztywna sprężysta, sztywna tłumienia;
- 4) miękka sprężysta, miękka tłumienia.

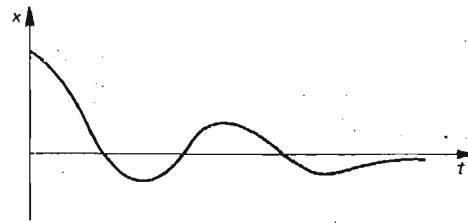
Stwierdza się, że zależnie od postaci charakterystyk i ich skojarzenia możemy ustalić następujące przypadki ruchu:

1. Ruch z jednym co najwyżej miejscem zerowym. Przy odpowiednim doborze warunków początkowych punkt ruchomy nie przechodzi w ogóle przez położenie równowagi (rys. 17).

2. Ruch ze skończoną liczbą miejsc zerowych. Punkt, zależnie od warunków początkowych, może przejść skończoną liczbę razy przez położenie równowagi, przy czym od pewnej chwili dalszy ruch jest nienaprzemienny (rys. 18).



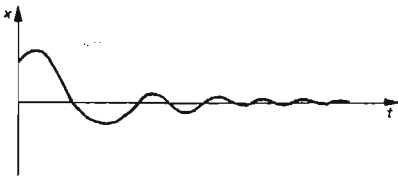
Rys. 17



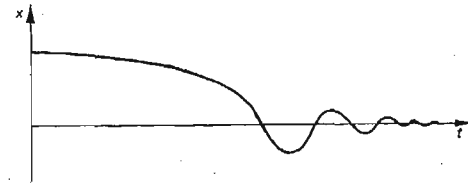
Rys. 18

3. Ruch z nieskończoną liczbą miejsc zerowych, czyli ruch naprzemienny (rys. 19).

4. Ruch nienaprzemienny przez pewien skończony okres czasu, a następnie ruch naprzemienny z nieskończoną liczbą miejsc zerowych (rys. 20).



Rys. 19



Rys. 20

6.3.  $m\ddot{x} + l\dot{x}^\alpha + kx^\beta = 0, \quad m > 0, \quad k > 0, \quad l \geq 0.$

S. ZIEMBA w pracy [48] poszukuje szczególnych przypadków, w których można znaleźć równanie trajektorii w postaci zamkniętej. Przypadki takie za-

chodzą, jeżeli istnieje odpowiedni związek między wykładnikami  $\alpha$  i  $\beta$ . Jeżeli przyjmiemy, że względu na antysymetrię charakterystyki, że wykładnik  $\alpha$  ma postać:

$$\alpha = \frac{2n+1}{2m+1},$$

gdzie  $n, m$  oznaczają liczby naturalne lub zero, to wykładnik  $\beta$  powinien mieć postać:

$$\beta = \frac{2n+1}{2(2m-n)+1}, \quad m > n/2.$$

Dla takich wykładników równanie trajektorii  $\Phi(\dot{x}, x) = 0$  ma postać

$$x^2 + [C + \exp F_2(u)]^2 = 0,$$

gdzie

$$F_2(u) = \int \frac{du}{au^\nu + \frac{1}{\nu-1}u + b}, \quad u(x) = x^{\nu-1} \dot{x}^2(x),$$

przy oznaczeniach  $a = -2l/m, b = -2k/m, \nu = \alpha/2$ .

6.4. 
$$\dot{x} + ax\dot{x} + bx^3 = 0.$$

Równanie podane przez E. KAMKEGO [16] (s. 551).

Przez podstawienie

$$\dot{x}(t) = x^2(\tau), \quad \tau = \ln x,$$

sprowadzimy równanie to do równania

$$a\dot{u} + 2u^2 + au + b = 0,$$

którego rozwiązanie można wyrazić za pomocą kwadratury

$$\tau = - \int \frac{udu}{2u^2 + au + b} + C_1.$$

6.5. 
$$\ddot{x} + (3a+x)\dot{x} - x^3 + ax^2 + 2a^2x = 0.$$

Równanie zostało podane przez P. PAINLEVÉ; cytujemy je za E. KAMKEM [16] (s. 548). Rozwiązanie ma postać,

$$x = C_1 e^{-at + p'(u, 0, 1)} / p(u, 0, 1),$$

gdzie

$$u = \begin{cases} \frac{C_1}{a} e^{-at} + C_2 & \text{dla } a \neq 0, \\ C_1 t + C_2 & \text{dla } a = 0. \end{cases}$$



$$6.6. \quad \ddot{x} + a\dot{x}^2 + b \sin x = 0.$$

Równanie wahadła matematycznego z oporem proporcjonalnym do kwadratu prędkości (o stałym kierunku) zostało zbadane przez F. A. WILLERSA [45]. Podajemy je za E. KAMKEM [16]. Rozwiązanie można przedstawić za pomocą kwadratury

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{C_1 e^{\mp at} + \frac{2b}{4a^2+1} (\text{soc } x - 2a \sin x)}} + C_2.$$

$$6.7. \quad \ddot{x} + a\dot{x}|\dot{x}| + b \sin x = 0.$$

Równanie wahadła matematycznego z uwzględnieniem oporu powietrza było badane przez F. A. WILLERSA [45]. Podajemy je za E. KAMKEM [16].

Rozwiązanie można otrzymać przez złożenie rozwiązań dwóch równań

$$\ddot{x} + a\dot{x}^2 + b \sin x = 0 \quad \text{dla} \quad \dot{x} > 0$$

oraz

$$\ddot{x} - a\dot{x}^2 + b \sin x = 0 \quad \text{dla} \quad \dot{x} < 0$$

(por. równanie 6.6.).

$$7.1. \quad \ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0.$$

Równanie to zostało zbadane pod kątem widzenia istnienia rozwiązań okresowych przez R. REISSIGA w pracy [33].

Założenia są następujące:

- 1)  $R(\dot{x})$  i  $S(x)$  ciągłe wraz ze swymi pochodnymi,  
 $R'(\dot{x})$  i  $S'(x)$  dla wszystkich wartości  $x$  i  $\dot{x}$ .
- 2)  $R(\dot{x})\dot{x} \leq 0$  dla  $|\dot{x}| \leq U > 0$ ,  
 $R(\dot{x})\dot{x} \geq 0$  dla  $|\dot{x}| \geq V > U > 0$ ,  
 $R(\dot{x}) \geq \delta > 0$  dla  $\dot{x} \geq V$ .
- 3)  $S(x)x > 0$  dla  $x \neq 0$ ,  
 $S(x) \geq -f + \delta$  dla  $x \geq X > 0$ ,  
 $S(x) \leq -F - \delta$  dla  $x \leq -X$ ,

gdzie

$$\left. \begin{array}{l} F = \max R(\dot{x}) > 0 \\ f = \min R(\dot{x}) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ w przedziale zamkniętym } |\dot{x}| \leq V.$$

4) Funkcja  $J(x) = \int_0^x S(s) ds$  rośnie silnie monotonicznie. Charakterystyka tłumienia ma postać pokazaną na rys. 21.

Udowodniono, że istnieje możliwość ustalenia się drgań okresowych (samowzbudnych) oraz podano konstrukcję pierścienia, wewnątrz którego wszystkie trajektorie bądź są zamknięte, bądź asymptotycznie zbiegają do trajektorii zamkniętej.

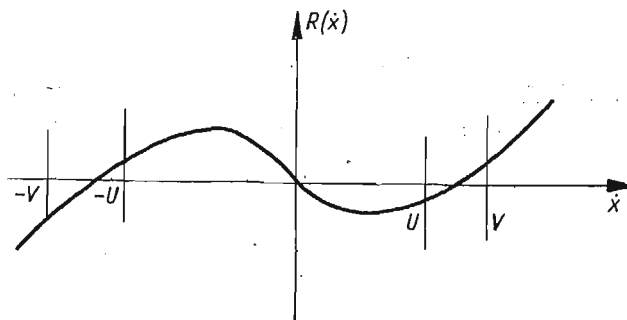
7.2.  $\ddot{x} + x|\dot{x}| - q\dot{x} + x - p^2x^3 = 0.$

Równaniem tym zajmowali się G. KRALL [17] i J. CECCONI [8, 9]. Przy dostatecznie małych  $q > 0$  i  $p > 0$  równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe.

8.1.  $\ddot{x} + S(x) = 0.$

Rozwiązanie sprowadza się do kwadratur (por. np. [2, 7])

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{-2 \int S(x) dx + C_1}} + C_2.$$



Rys. 21

Założymy, że warunki początkowe są następujące: dla  $t = 0$ ,  $x = x_0$  i  $\dot{x} = 0$  jeżeli przy tym równanie

$$-2 \int S(x) dx + C_1 = 0$$

ma pierwiastki pojedyncze  $x_1$  i  $x_2$ , to dla  $x_1 < x_0 < x_2$  ruch jest okresowy o okresie

$$T = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{-2 \int S(x) dx + C_1}}.$$

Ze względu na trudności z wykonaniem całkowania stosuje się często metody przybliżone, polegające na przedstawieniu  $S(x)$  w postaci szeregu Taylora i rozwiązanie równań metodą małego parametru.

8.2.  $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad \omega^2 = g/l.$

Jest to równanie wahadła. Jego rozwiązanie sprowadza się do kwadratur (por. równanie 8.1) i może być przedstawione [16] w postaci

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{\frac{1}{k} \sin \frac{\alpha}{2}}^u \frac{du}{(1-u^2)(1-k^2u^2)} + t_0,$$

gdzie

$$ku = \sin \frac{1}{2}x, \quad k^2 = \sin^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta^2 l}{4g}$$

oraz

$$\alpha = x(t_0), \quad \beta = \dot{x}(t_0).$$

Przybliżone rozwiązanie uzyskuje się za pomocą rozłożenia  $\sin x$  w szereg Taylora i zachowania pierwszych dwóch lub trzech wyrazów (por. równanie 8.3).

$$8.3. \quad \ddot{x} + \frac{g}{l} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) = 0.$$

Przybliżone równanie opisuje ruch wahadła. Rozwiązanie wyznaczono metodą Kryłowa-Bogoliubowa w drugim przybliżeniu [3]:

$$x = a \cos \Psi - \frac{a^3}{192} \left( 1 + \frac{3}{64} a^2 \right) \cos 3\Psi + \frac{a^5}{20480} \cos 5\Psi,$$

gdzie

$$\Psi = \omega t + \theta, \quad \omega = \frac{g}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^4}{1024} \right).$$

Wielkości  $a$  i  $\theta$  określa się z warunków początkowych. Okres drgań jest zależny jak widać, od amplitudy.

$$8.4. \quad \ddot{x} + Ax + 2Bx^3 = 0.$$

Badaniem powyższego równania zajmował się H. SCHOLZ [40]. Autor podaje kryteria, kiedy równanie powyższe, przy warunkach początkowych

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

może być rozwiązane przez odpowiednie funkcje specjalne.

Założenia:  $x_0 \neq 0$ ,  $\dot{x}_0 \neq 0$ ,  $A$  i  $B$  stałe dowolne,  $B \neq 0$ .

Jeżeli przy oznaczeniu  $D^2 = (A + 2Bx_0^2)^2 + 4B\dot{x}_0^2$ ,

- 1)  $0 \neq D \neq A$ , to rozwiązanie wyraża się przez funkcje eliptyczne;
- 2)  $D = 0$ ,  $A \neq 0$  lub  $D = A \neq 0$ , to rozwiązanie wyraża się przez funkcje wykładnicze;
- 3)  $D = A = 0$ , to rozwiązanie wyraża się przez funkcje wymierne.

H. SCHOLZ podaje rozwiązanie dla tych przypadków.

$$9.1. \quad m\ddot{x} + 2h\dot{x} + a^2\varphi(x) = 0, \quad h > 0, \quad a^2 > 0.$$

Pewne własności powyższego równania zostały zbadane w pracy R. GUTOWSKIEGO [14]. Założenia dotyczące charakterystyki sprężystej są następujące:  $\varphi(x)$  jest funkcją ciągłą, monotoniczną, rosnącą i analityczną w przedziale  $(-\infty, \infty)$ ;  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty$ .

Przyjęto następujące kryteria istnienia nieskończenie wielu miejsc zerowych:

1. Przy charakterystyce «sztynnej dla prawie wszystkich  $x$ », to jest spełniającej warunek

$$(a) \quad \dot{x} - \varphi(x) \leq 0$$

z wyjątkiem co najwyżej pewnego skończonego otoczenia punktu  $x = 0$ , wa-

runkiem istnienia nieskończonej liczby miejsc zerowych jest

$$\varphi'(0) > (h/a)^2.$$

2. Przy charakterystyce «absolutnie sztywnej», to znaczy spełniającej warunek (a) dla dowolnych  $x$  z przedziału  $(0, \infty)$ , warunkiem istnienia nieskończonej liczby rozwiązań jest

$$h/a < 1.$$

Warunek ten jest analogiczny do odpowiedniego warunku dla równoważnego równania liniowego.

3. Dla charakterystyki «absolutnie miękkiej», to znaczy spełniającej warunek

$$(b) \quad x - \varphi(x) \geq 0$$

dla wszystkich  $x$  z przedziału  $(0, \infty)$  oraz dla charakterystyki «miękkiej dla prawie wszystkich  $x$ », to znaczy spełniającej warunek (b) z wyjątkiem co najwyżej skończonego otoczenia punktu  $x = 0$ , warunkiem istnienia nieskończonej liczby rozwiązań jest istnienie takiej prostej  $y = \beta x$ , która leży całkowicie poniżej  $\varphi(x)$  dla  $x > 0$ , przy czym

$$\beta = \left(\frac{h}{a}\right)^2 < 1.$$

W pracy powyższej podano także oszacowanie odległości miejsc zerowych, pewne wnioski dotyczące zanikania wychyleń oraz przybliżoną metodę rozwiązywania przez przekształcenie go w równanie całkowe typu Volterra.

$$9.2. \quad \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x - \beta = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Równanie występuje w szeregu zagadnień dynamiki i elektrotechniki. Jakościowa analiza równania (kryteria istnienia rozwiązań okresowych) oraz bibliografia znajduje się w pracy [39].

$$10.1. \quad \ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2 x = 0.$$

Przy założeniu, że  $R(\dot{x})\dot{x} > 0$  i  $R(0) = 0$  w przedziale  $(-V, +V)$  ograniczonym lub nieograniczonym, niektóre własności równania zostały zbadane przez Z. OSIŃSKIEGO [28]. Praca ta jest rozszerzeniem prac G. SANSONEGO i S. ZIEMBY (równanie 10.2).

Jeżeli charakterystykę tłumienia przedstawimy w postaci

$$R(\dot{x}) = \alpha \dot{x} + \varphi(\dot{x}),$$

to, niezależnie od znaku  $\varphi(\dot{x})$ ,

- 1) dla  $\alpha < 2\omega$  ruch ma nieskończenie wiele miejsc zerowych,
- 2) dla  $\alpha \geq 2\omega$  ruch ma skończoną liczbę miejsc zerowych.

Jeżeli  $\varphi(\dot{x})\dot{x} > 0$ , to przemieszczenie ma co najwyżej jedno miejsce zerowe niezależnie od warunków początkowych.

Jeżeli  $\varphi(\dot{x})\dot{x} < 0$  w całym przedziale lub w jego części, to przemieszczenie może mieć więcej niż jedno miejsce zerowe. Ocenę liczby miejsc zerowych może ułatwić podane przez autora kryterium geometryczne w postaci tzw. «prostej krytycznej».

Jest to przypadek szczególny równania 6.1.

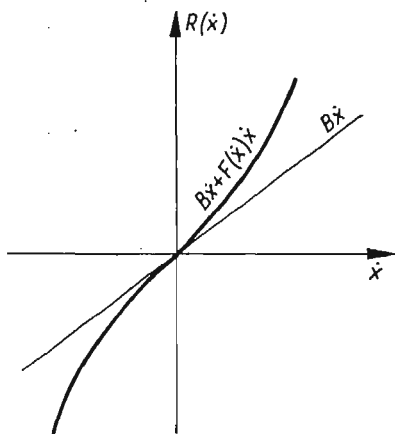
$$10.2. \quad A\ddot{x} + [B + F(\dot{x})]\dot{x} + Cx = 0.$$

Własności powyższego równania zostały zbadane przez W. E. MILNE'A [24] i G. SANSONEGO [31] przy założeniach

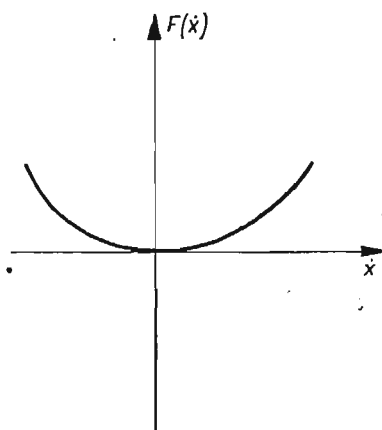
$$A > 0, \quad B \geq 0, \quad C > 0;$$

$$F(0) = 0, \quad F(-\dot{x}) = F(\dot{x}), \quad F(\dot{x}) > 0 \quad \text{dla} \quad \dot{x} > 0.$$

Założenia odnośnie  $F(\dot{x})$  odpowiadają sztywnej charakterystyce tłumienia (rys. 22 i 23).



Rys. 22



Rys. 23

Ważniejsze własności równania podajemy za G. SANSONEM:

1. Funkcje  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  są ograniczone w przedziale  $(t_0, \infty)$ .
2. W skończonym przedziale funkcje  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  nie mogą mieć punktów przegięcia.
3. Między dwoma miejscami zerowymi prędkości  $\dot{x}(t)$  jest tylko jeden punkt zerowy  $x(t)$ .

4.  $\ddot{x}(t)$  nie może być równe zero w żadnym przedziale.

5. Rozwiązanie jest gasnące, czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Dla  $B^2 - 4AC \geq 0$ :

6. Funkcja  $x(t)$  ma tylko jedno miejsce zerowe w przedziale swęgo istnienia.
7. Funkcja  $x(t)$  i jej pochodne poczynając od pewnego  $t$  są monotoniczne i dążą do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Dla  $B^2 - 4AC < 0$ :

8.  $x(t)$  ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.
9. Między dwoma miejscami zerowymi przemieszczenia  $x(t)$  istnieje tylko jedno miejsce zerowe  $\dot{x}(t)$ .

Tym samym równaniem zajmuje się G. SESTINI w pracy [41], w której podaje oszacowanie rozwiązań w przypadkach  $B^2 - 4AC > 0$ ,  $B^2 - 4AC = 0$  oraz  $B^2 - 4AC < 0$ .

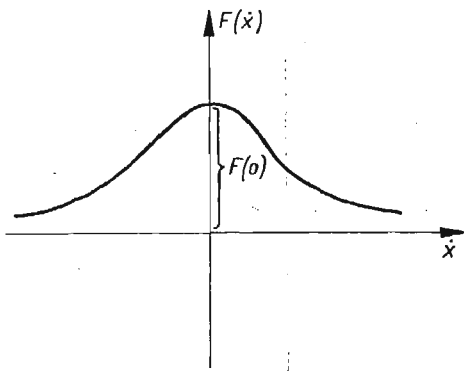
S. ZIEMBA w pracy [46] zbadał powyższe równanie dla pewnej klasy miękkich charakterystyk tłumienia.

Zakładając, że  $F(0) > 0$  (rys. 24) i że spełnione są pozostałe założenia, G. SANSONE dowodzi, że własności 1–5 zachodzą i w tym przypadku.

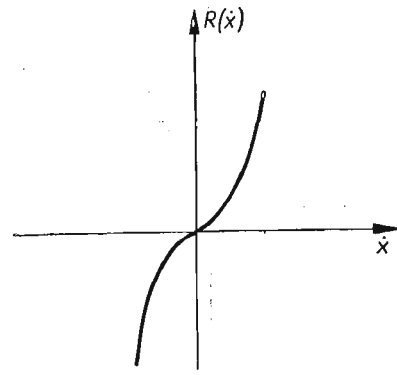
Odnośnie zagadnienia naprzemienności możliwe są cztery przypadki:

1. Dla  $B > 2\sqrt{AC}$  istnieje co najwyżej jedno miejsce zerowe przemieszczenia niezależnie od wartości  $F(0)$ .

2. Dla  $0 < F(0) \leq 2\sqrt{AC}$  oraz  $B + F(0) < 2\sqrt{AC}$  istnieje nieskończenie wiele miejsc zerowych przemieszczenia.



Rys. 24



Rys. 25

3. Dla  $0 < F(0) < 2\sqrt{AC}$  oraz  $0 < 2\sqrt{AC} - F(0) < B < 2\sqrt{AC}$ , a także dla  $F(0) \geq 2\sqrt{AC}$  oraz  $0 \leq B \leq 2\sqrt{AC}$  istnieje możliwość, że ruch ma skończoną, większą od jedności liczbę miejsc zerowych.

$$10.3. \quad \ddot{x} + R(\dot{x}) + Kx = 0.$$

Równanie zostało zbadane przez K. SZPUNARA w pracy [47], przy założeniu, że charakterystyka tłumienia jest nieliniową, nieparzystą funkcją prędkości, którą można przedstawić w postaci

$$R(\dot{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |\dot{x}|^{2n+1} \operatorname{sgn} \dot{x},$$

gdzie

$$b_{2n} = 0 \quad \text{i} \quad b_{2n+1} \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

oraz że  $K > 0$ .

Charakterystyka tłumienia jest więc sztywna (rys. 25).

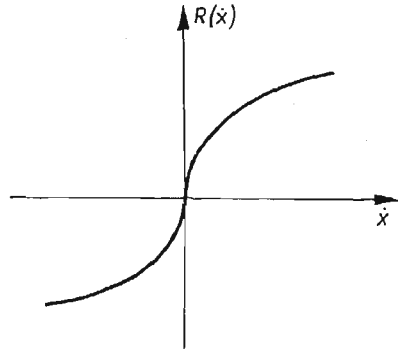
Autor szuka rozwiązania w postaci szeregu potęgowego (w otoczeniu punktu osobliwego) w postaci

$$t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{m+1} p^{m+1} + C,$$

gdzie  $p = \dot{x}$ . Badając własności tego szeregu autor dochodzi do następujących wniosków: jeżeli  $b_1^2 - 4K < 0$ , to rozwiązanie ma charakter oscylacyjny (naprzemienny), a jeżeli  $b_1^2 - 4K \geq 0$ , to rozwiązanie ma charakter nieoscylacyjny. Wnioski są analogiczne do wniosków uzyskanych przez E. MILNE'A [24] i G. SANSONEGO [34].

Jeżeli rozwiązanie jest oscylacyjne, to przedział czasu między dwoma kolejnymi krańcowymi wychyleniami zmierza do wartości granicznej określonej wzorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_{vt} = \frac{\pi}{\sqrt{K - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2}}$$



Rys. 26

10.4.  $\ddot{x} + R(\dot{x}) + x = 0$ .

Równaniem takim zajmował się G. MALGARINI w pracy [21] przy poniższych założeniach:

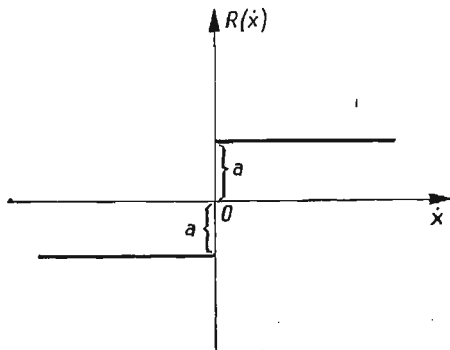
$$\lim_{\dot{x} \rightarrow 0} \frac{R(\dot{x})}{\dot{x}} = \infty, \quad R(\dot{x})\dot{x} > 0, \quad \dot{x} \neq 0, \quad R(0) = 0;$$

$R(\dot{x})$  jest funkcją ciągłą dla  $-\infty < \dot{x} < \infty$ ,  $R'(\dot{x}) > 0$  oraz  $\dot{x}R''(\dot{x}) < 0$ .

Charakterystyka taka została nazwana subwiskotyczną (rys. 26). Konsekwencją tych założeń jest, że

$$\lim_{\dot{x} \rightarrow -\infty} \frac{R(\dot{x})}{\dot{x}} = k_1 \geq 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\dot{x} \rightarrow \infty} \frac{R(\dot{x})}{\dot{x}} = k_2 \geq 0.$$

MALGARINI dowodzi, że jeżeli  $k_1 \geq 2$  i  $k_2 \geq 2$ , to ruch nie ma miejsc zerowych niezależnie od warunków początkowych, a jeżeli  $0 \leq k_1 < 2$ ,  $0 \leq k_2 < 2$ , to ruch jest podobny do ruchu przy tarcii suchym i liczba miejsc zerowych zależy od warunków początkowych. Istnieje «martwa strefa», podobnie jak przy tarcii suchym.



Rys. 27

10.5.  $\ddot{x} + 2\epsilon|\dot{x}|^{m-1}\dot{x} + x = 0$

dla  $0 < m < 1$ .

G. MALGARINI w pracy [21] podaje uwagi dotyczące zachowania się trajektorii powyższego równania na podstawie ogólnego twierdzenia dotyczącego równania 10.4.

10.6.  $\ddot{x} + a \operatorname{sign} \dot{x} + \omega^2 x = 0$ .

Drgania tłumione tarcie suchym o charakterystyce tłumienia przedstawionej na rys. 27 podajemy za I. M. BABAKOWEM [2].

Rozwiązanie równania: dla  $\dot{x} < 0$  mamy  $\dot{x} = a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ , a dla  $\dot{x} > 0$  mamy  $\dot{x} = -a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ .

Właściwości ruchu. 1. Ruch jest okresowy o okresie  $T = 2\pi/\omega$  niezależnym od siły tarcia.

2. Środek drgań przemieszcza się o wielkość  $a$  w stronę dodatnich  $x$ , gdy  $\dot{x} < 0$ , w stronę ujemnych  $x$ , gdy  $\dot{x} > 0$ .

3. Amplituda maleje w postępie arytmetycznym za każdym wahnięciem o  $2a$ .

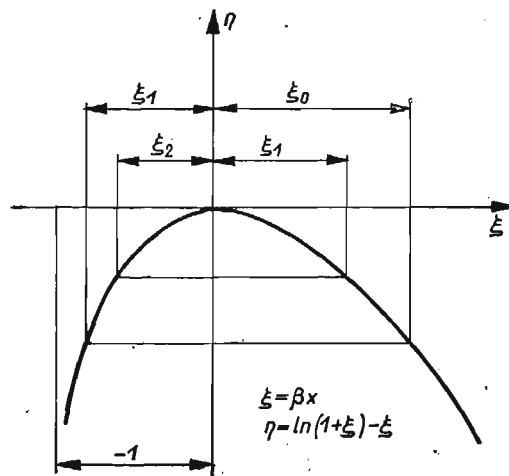
4. Drgania wygasają po skończonej liczbie wahanć.

$$10.7. \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{2} \dot{x}^2 \operatorname{sign} \dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Drgania tłumione są oporem powietrza lub płynu w warunkach przepływu burzliwego. Równanie zostało zbadane przez W. E. MILNE'A [24]. Rozwiązuje się je w kwadraturach [20]:

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{C_1 e^{\mp \beta x} + 2 \frac{\omega^2}{\beta^2} (\pm \beta x + 1)}} + C_2,$$

Znaki górne odpowiadają ruchowi z prędkością dodatnią,  $\dot{x} > 0$ , a dolne ruchowi z prędkością ujemną,  $\dot{x} < 0$ . Kolejne maksymalne amplitudy można wyznaczyć za pomocą wykresu (rys. 28).



Rys. 28

Okres drgań zależy od amplitudy początkowej. Wyznaczamy go za pomocą metody małego parametru. Półokres ruchu, liczony dla warunków początkowych  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , wynosi

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \left( 1 + \frac{1}{24} \beta^2 x_0^2 \right).$$



10.8.  $\ddot{x} + 3a\dot{x} - 2x^3 + 2a^2x = 0.$

Badaniem tego równania zajmował się PAINLEVÉ. Podajemy rozwiązanie za E. KAMKEM [16] (s. 548):

$$x = iaC_1 e^{-at} \operatorname{sn}_{k=-1}(C_1 e^{-at} + C_2).$$

10.9.  $\ddot{x} + 5ax - 6x^2 + 6a^2x = 0.$

Badaniem równania zajmował się PAINLEVÉ. Podajemy rozwiązanie za E. KAMKEM [16] (s. 547):

$$x = a^2 C_1^2 e^{-2at} (C_1 e^{-at} + C_2, 0, -1).$$

10.10.  $\ddot{x} + a\dot{x}|\dot{x}| + bx + cx = 0, \quad a > 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0.$

Drgania tłumione oporem wiskotycznym i oporem powietrza omówione zostały przez KAMKEGO [16] (s. 552).

10.11  $\ddot{x} + a\dot{x} + \beta\dot{x}^3 + \omega^2x = 0, \quad a > 0, \quad \beta > 0 \quad \text{lub} \quad \beta < 0.$

Równanie to zbadał Z. OSIŃSKI w pracy [27]. Podano rozwiązanie metodą małego parametru ( $\beta$  — mały parametr) w II przybliżeniu.

Rozwiązanie w I przybliżeniu ma postać

$$x_1 = \frac{a_0 e^{-a/2t}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\beta}{\alpha} a_0^2 (e^{-at} - 1)}} \cos(\lambda t + \theta),$$

gdzie  $a_0$  i  $\theta$  są amplitudą i fazą początkową, a  $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2/4}$ .

Zanalizowano wpływ nieliniowego parametru  $\beta$  na dekrement tłumienia oraz na okres drgań (to ostatnie na podstawie II przybliżenia, gdyż w I przybliżeniu wpływ powyższy nie jest dostrzegalny).

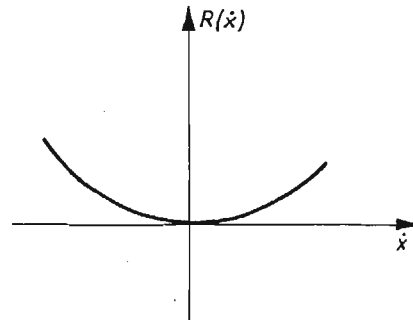
11.1.  $\ddot{x} - A\dot{x} + B\dot{x}^3 + \omega^2x = 0.$

Jest to równanie Rayleigha, które drogą zamiany zmiennych

$$\tau = \omega t, \quad y = \omega \sqrt{\frac{3B}{A}} \int x d\tau$$

przekształcamy w równanie Van der Pola 5.2.

11.2.  $\ddot{x} + (a\dot{x})^2 + bx = 0.$



Rys. 29

Równanie ruchu układu z liniową charakterystyką sprężystą oraz parzystą charakterystyką «tłumienia» przedstawiającą siłę proporcjonalną do kwadratu prędkości o stałym kierunku, niezależnie od kierunku prędkości (rys. 29).

Równanie to można rozwiązać przez kwadraturę [16], co prowadzi do

$$t = C_1 + \int \frac{dy}{\sqrt{C_2 e^{-2ax} + \frac{b}{2a^2} (1 - 2ax)}}.$$

K. SZPUNAR w pracy [43] przeprowadza badanie tego równania w kierunku ustalenia zależności oscylacyjnego charakteru rozwiązań od warunków początkowych.

Jeżeli równanie sprowadzimy do równania na płaszczyźnie fazowej

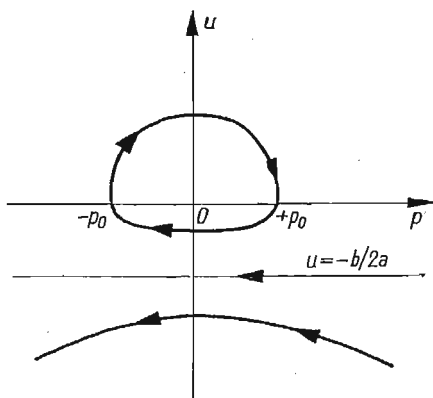
$$\frac{du}{dp} = -p \left( 2a + \frac{b}{u} \right),$$

gdzie  $u = \dot{p}$ ,  $p = \dot{x}$ , to charakter krzywych całkowych przedstawia rys. 30.

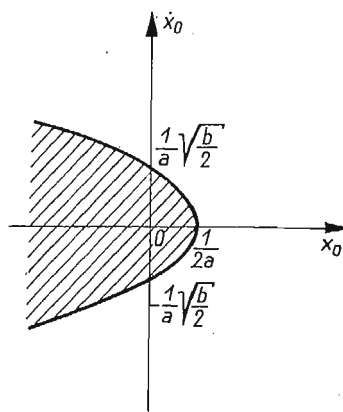
Jeżeli  $u_0 > -b/2a$ , to rozwiązanie jest oscylacyjne i okresowe. Jeżeli  $u_0 \leq b/2a$ , to rozwiązanie jest nieoscylacyjne.

Dla  $u_0 = -b/2a$  otrzymujemy ruch nieoscylacyjny ze stałą prędkością.

W odniesieniu do oznaczeń równania wyjściowego obszar warunków po-



Rys. 30



Rys. 31

czątkowych  $x_0, \dot{x}_0$ , dla których istnieją rozwiązania oscylacyjne i okresowe, został zakreślony na rys. 31. Rozwiązania nieoscylacyjne odpowiadają obszarowi niezakreślowanemu oraz punktowi  $(0, 0)$  (rozwiązanie trywialne).

Na zakończenie przedstawiamy krótki, syntetyczny przegląd równań w postaci tabeli 1 z podkreśleniem problemów zbadanych i takich, które — zdaniem autora — należałoby zbadać.

Tabela 1

Typ równania	Własności zbadane	Własności, które należałoby zbadać
1. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) = 0$		Wpływ funkcji $R(x, \dot{x})$ na charakter rozwiązań. Kryteria odpowiadające ruchom okresowym, gasnącym itp.
2. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$ RG (Rozwiązanie gasnące)	Ograniczoność, charakter punktu osobliwego dla charakterystyk rosnących wraz z $x$ i $\dot{x}$ i antysymetrycznych. Równania trajektorii fazowych w postaci zamkniętej dla szczególnych przypadków.	Ograniczoność i naprzemiennosc dla innych charakterystyk.

Typ równania	Własności zbadane	Własności, które należałoby zbadać
	Sformułowano równania ruchu w szczególnych przypadkach ruchu wahadła i ruchu po przewodnicy.	Rozwiązanie równań ruchu i analiza przypadków mających zastosowanie techniczne.
3. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + S(x) = 0$ RO (Rozwiązanie okresowe)	Gdy $R(x, \dot{x}) = f(x, \dot{x})\dot{x}$ , twierdzenie o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania okresowego; gdy $R(x, \dot{x}) = -f(x, \dot{x})$ , twierdzenie o istnieniu jednego rozwiązania okresowego.	Warunki istnienia rozwiązań okresowych w przypadku, gdy funkcja $R(x, \dot{x})$ ma inną postać.
4. $\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RG	Dla $R(x, \dot{x}) + \psi(x)\phi(\dot{x})$ charakter punktów osobliwych oraz zagadnienia naprzemienności dla charakterystyk sztywnych. Rozwiązano przypadek szczególny tarcia suchego proporcjonalnego do przemieszczenia. Niektóre szczególne przypadki mają rozwiązanie ściśle.	Analiza jakościowa w przypadku ogólniejszych założeń dla $R(x, \dot{x})$ . Naprzemiennosc przy innych charakterystykach. Rozwiązanie w szczególnych przypadkach mających zastosowanie techniczne.
5. $\ddot{v} + R(x, \dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RO	Dla funkcji $R(x, \dot{x}) = \omega F(x)\dot{x}$ kryteria istnienia jednego rozwiązania okresowego. Zbadano szczegółowo metodami przybliżonymi równanie Van der Pola oraz równania drgań relaksacyjnych.	Zbadanie jakościowe dla innej postaci funkcji $R(x, \dot{x})$ oraz zbadanie przypadków, gdy może być więcej rozwiązań okresowych niż jedno.
6. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ RG	Zbadano ograniczoność i gaśnięcie rozwiązań oraz naprzemiennosc przy charakterystykach miękkich i sztywnych. Szczególne przypadki, gdy trajektorie fazowe dadzą się przedstawić w zamkniętej postaci. Ściśle rozwiązania niektórych przypadków szczególnych.	Badania jakościowe dla szczególnych postaci charakterystyk $R(x), S(x)$ . Ze względu na liczne zastosowania techniczne celowe jest poszukiwanie rozwiązań przybliżonych lub numerycznych dla pewnych postaci charakterystyk $R(\dot{x})$ i $S(x)$ .
7. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + S(x) = 0$ RO	Możliwość istnienia rozwiązań okresowych.	Kryteria istnienia jednego lub więcej cykli w przypadku ogólnym oraz dla szczególnych postaci charakterystyk. Rozwiązania przybliżone w przypadkach szczególnych mających znaczenie techniczne.
8. $\ddot{x} + S(x) = 0$	Rozwiązania przez kwadratury prowadzące do całek eliptycznych. Rozwiązania ściśle (przez kwadratury) i przybliżone szczególnych przypadków.	Badanie szczególnych przypadków dla różnych charakterystyk siły sprężystej, a szczególnie obliczenie okresu drgań.
9. $\ddot{x} + a\dot{x} + S(x) = 0$	Naprzemiennosc rozwiązań.	Badanie szczególnych przypadków dla różnych charakterystyk $S(x)$ , a szczególnie obliczenie okresu drgań i dekrementu.
10. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RG	Ograniczoność rozwiązań. Kryteria naprzemienności. Analiza pewnych typów charakterystyk oporu.	Rozwiązanie przybliżone dla różnych charakterystyk $R(\dot{x})$ przedstawiających różne opory. Obliczenie dekrementu.
11. $\ddot{x} + R(\dot{x}) + \omega^2 x = 0$ RO	Kryteria istnienia rozwiązań okresowych. Analiza szczególnych przypadków.	Kryteria istnienia rozwiązań okresowych dla różnych charakterystyk. Rozwiązania przybliżone dla różnych charakterystyk.

## Literatura cytowana w tekście

- [1] A. A. ANDRONOW, *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenués*, Comptes Rendus, **189**, Paris 1929.
- [2] И.М. БАБАКОВ, *Теория колебаний*, Москва 1958.
- [3] Н.Н. БОГОЛЮБОВ, И.А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Москва 1958.
- [4] E. i H. CARTAN, *Note sur la génération des oscillations entretenues*, Annales des Postes Télégraphes et Téléphones, Déc. 1925.
- [5] M. L. CARTWRIGHT, *Van der Pol's equation for relaxation oscillations*, Contr. to the theory of nonl. oscill., edited by S. Lefschetz, **2** (1955), 3-18.
- [6] A. DE CASTRO, *Sull'esistenza ed unicita della soluzioni periodiche del equazione  $\ddot{x}+f(x, \dot{x})+g(x)=0$* , Boll. Un. Mat. Ital., Ser. 3, **9**, 1954 Bologna, 369.
- [7] A. DE CASTRO, *Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine*, Boll. Un. Mat., **8**, **3** (1953), 26.
- [8] J. СЕССОНИ, *Su di una equazione differenziale di rilassamento*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **8**, **9** (1950), 38-44.
- [9] J. СЕССОНИ, *Su di una equazione differenziale non-lineare del seconde ordine*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **3**, **3** (1950), 245-278.
- [10] R. CONTI, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard generazzata*, Boll. Un. Mat. Ital., **3**, **7** (1952).
- [11] А.А. ДОРОДНИЦЫН, *Асимптотическое решение уравнения Van der Pola*, Прикл. Мат. Мех., **11** (1947).
- [12] А.В. ДРАГИЛЕВ, *Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний*, Прикл. Мат. Мех., **16** (1952).
- [13] А.Ф. ФИЛИПОВ, *Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка*, Мат. Сборник, Т., **30** (72), № 11, **30** (1952), 172.
- [14] R. GUTOWSKI, *Free vibration of a system of one degree of freedom with nonlinear elastic characteristic, taking into consideration linear viscous damping*, Arch. Mech. Stos., **9** (1957).
- [15] В.С. ИВАНОВ, *Обоснование одной гипотезы Van der Pola в теории автоколебаний*, Ученые записки, Л.Г.У. С.М.Н. **10**, 1940, 111-119.
- [16] E. КАМКЕ, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1951.
- [17] G. KRALL, *Dinamica ed aerodinamica dei fili*, III. Problemi non lineari della vibrazioni-visibili, Rend. Acc. Naz. Lincei, **5**, **8** (1948), 197-203.
- [18] N. LEVINSON, O. K. SMITH, *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. J., **9** (1942), 382-403.
- [19] A. LIENARD, *Etude des oscillations entretenues*, Revue Gén. de l'Electricité, **23** (1928), 901-946.
- [20] Л.Г. ЛОЙЦЬЯНСКИЙ, А.И. ЛУРИЕ, *Курс теоретической механики*, Москва 1948.
- [21] G. MALGARINI, *Studio asintotico del moto d'un oscillatore elastico con resistenza di tipo subviscoso*, Rendiconti Istituto Lombardo, **86** (1953).
- [22] I. L. MASSERA, *Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Lienard*, Boll. Un. Mat. Ital., **3**, **9** (1951), 367-369.
- [23] I. L. MASSERA, *Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Lienard*, Boll. Un. Mat. Ital., ser. 3, **9** (1951), 367.
- [24] F. MILNE, Oregon Publication, **2**, 1923.
- [25] В.В. НЕМЫЦКИЙ, В.В. СТЕПАНОВ, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва 1950.
- [26] Z. OSIŃSKI, *Kryteria naprzemienności ruchu drgającego układu o jednym stopniu swobody z nieliniową siłą sprężystą i nieliniowym tłumieniem*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, Warszawa 1961.
- [27] Z. OSIŃSKI, *Drgania układu o jednym stopniu swobody przy tłumieniu nieliniowym*, Rozprawa doktorska, Warszawa 1959.

- [28] Z. OSIŃSKI, *O naprzemienności ruchu przy pewnym tłumieniu nieliniowym*, Rozpr. Inżyn., 2, 8 (1960).
- [29] Z. OSIŃSKI, *Wpływ tarcia suchego na ruchy drgające układów mechanicznych*, Arch. Bud. Masz. 1, 7 (1960.)
- [30] B. VAN DER POL, *The non-linear theory of electrical oscillations*, Proc. Inst. Radio Eng., 22 (1931), 1051-1086.
- [31] B. VAN DER POL, *Sur les oscillations de relaxation*, Phil. Magazine, 2, 7 (1926), 978-992.
- [32] R. REISSIG, *Über die Eindeutigkeit gewisser Relaxations-schwingungen*, Z. ang. Math. Mech., 7/8, 38 (1958).
- [33] R. REISSIG, *Selbsterregung eines einfachen Schwingers*, Math. Nachr., 3, 15 (1956).
- [34] G. SANSONE, *Equazioni differenziali el campo reale*, 1949.
- [35] G. SANSONE, *Sopra l'equazione di Lienard delle oscillazioni di rilassamento*, Ann. Mat. pura ed app., 4, 28 (1949), 153-181.
- [36] G. SANSONE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard, Calcolo del periodo*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 10, 1950-51.
- [37] G. SANSONE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Lienard*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, 10 (1950-51), 155-71.
- [38] G. SANSONE, *Sopra una classe di equazioni di Lienard prive di integrali periodici*, Rendo. ACC. Naz. Lincei, 8, 6 (1949), 156-160.
- [39] G. SANSONE, R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Roma 1956.
- [40] H. SCHOLZ, *Über die Lösung des Anfangsproblems  $\ddot{y} + Ay + 2By^3$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$* , Österreichisches Ing.-Archiv, 2, Wien 1961.
- [41] G. SESTINI, *Valutazione asintotiche per una problema della dinamica non-lineare*, Quaderno sc. del Conv. Matem. di Modena, 1952, Modena 1953, 63-78.
- [42] W. W. STIEPANOW, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1956.
- [43] K. SZPUNAR, *O równaniu różniczkowym  $d^2x/dt^2 + a(dx/dt)^2 + bx = 0$* , Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, nr 25, Kraków 1959.
- [44] K. SZPUNAR, *Drgania swobodne układu o jednym stopniu swobody przy silnie nieliniowym tłumieniu*, Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, nr 28, Kraków 1961.
- [45] F. A. WILLERS, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 53 (1933), 501-506.
- [46] S. ZIEMBA, *Free vibration with damping of marked non-linear character*, Arch. Mech. Stos., 5, 9 (1957).
- [47] S. ZIEMBA, *Drgania swobodne przy uwzględnieniu mikroodkształceń plastycznych*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, PWN, Warszawa 1961.
- [48] S. ZIEMBA, *Free vibration of systems of one degree of freedom with non-linear elastic characteristic and non-linear viscous-type damping*, Arch. Mech. Stos., 2, 10 (1958).
- [49] S. ZIEMBA, *Vibrations of mechanical systems with one degree of freedom and generalized forces not depending in an explicit manner on time*, Arch. Mech. Stos. 5, 10 (1958).
- [50] S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, Warszawa 1957.

## Резюме.

ОБЗОР НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ  
АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В работе дается обзор современного состояния исследований в области нелинейных дифференциальных уравнений колебаний автономных систем с одной степенью свободы. Обзор основан на анализе 50-и библиографических источников, указанных в работе. Уравнения разделены на 11 групп, причем раздел на группы вытекает из предположений, касающихся упругой характеристики и характеристики затухания. Рассматриваются предположения, гарантирующие существование автоколебаний и пред-

положения, гарантирующие затухание решений. Анализируется 37 уравнений или вошл уравнений.

Для каждого типа уравнений даются основные теоремы, касающиеся поведения решений, точные решения и приближенные решения, если таковы известны, замечания о свойствах движения и о приложениях к техническим задачам. В каждом случае указаны первоисточники.

В заключение приводится таблица с кратким синтетическим обзором групп уравнений, где подчеркиваются уже исследованные задачи, а также те, которые необходимо исследовать.

#### S u m m a r y

#### SURVEY ON NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE VIBRATIONS OF AUTONOMOUS SYSTEMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

A survey is given of the recent investigations concerned with non-linear differential equations of vibrations of autonomous systems with one degree of freedom. Fifty papers from the relevant literature of the subject are reported. The equations considered are subdivided into eleven groups according to the assumptions concerning the elastic and damping characteristics. Also the assumption assuring the existence of selfexcited vibrations is distinguished from those assuring the attenuation of the solutions. In all, 37 equations of various types are analysed.

The fundamental theorems concerning the behaviour of the solutions, the exact solutions or the approximate ones, remarks on the properties of motion and on the application in technical problems are given for each type of the equations.

The table at the end of the paper contains a short synthetic survey of the groups of differential equations, special emphasis being laid on such problems as have already been investigated; problems to be tackled have also been mentioned.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 października 1962 r.*

---

## ZAGADNIENIA POWŁOK NIESPRĘŻYSTYCH<sup>1</sup>

ANTONI SAWCZUK, WAŁAW OLSZAK (WARSZAWA)

### 1. Wprowadzenie

Wobec rozszerzającego się zakresu zastosowań konstrukcji łupinowych we współczesnej technice klasyczna teoria powłok, postulująca fizykalną liniowość i niezależność mechanicznych własności materiałów od czasu, przestaje być wystarczająca dla celów racjonalnego projektowania tych konstrukcji. Z tego powodu obserwuje się obecnie intensywny rozwój badań teoretycznych i doświadczalnych, dotyczących problemów niesprężystego zachowywania się powłok.

Aby matematycznie przewidzieć niesprężyste zachowanie się konstrukcji, wymagana jest znajomość *równania stanu* (związku fizycznego) materiału, z którego konstrukcja jest wykonana. To równanie stanu powinno być przedstawione w takiej postaci, która będąc *fizykalnie poprawna* jest równocześnie *matematycznie łatwa do operowania*. Fizykalna poprawność związków podstawowych dla materiału polega na takim uogólnieniu doświadczalnych zjawisk niesprężystych (jak np. pełzanie, relaksacja czy plastyczne płynięcie), które łączy rzeczywiście wielkości dynamiczne z niezmienniczymi wielkościami kinematycznymi w sposób odzwierciedlający zjawiska rzeczywiste.

Procesom odkształceń niesprężystych towarzyszy rozpraszanie energii. Przyczyna tej dysypacji energii mechanicznej może stanowić podstawę do pewnej użytecznej klasyfikacji ośrodków niesprężystych na ośrodki *sprężysto-lepkie* i *sprężysto-plastyczne*. W przypadku lepko-sprężystości rozpraszanie energii następuje wskutek lepkiego płynięcia, podczas gdy dysypacja w ośrodkach plastycznych może być wymodelowana przez suche tarcie. Każda z tych grup materiałów wymaga więc odmiennych metod analizy.

Teoria powłok dla scharakteryzowania stanu naprężenia i odkształcenia posługuje się siłami wewnętrznymi i odkształceniami powierzchni środkowej. Wskutek tego również związki fizyczne dla powłok niesprężystych wymagają przedstawienia ich w postaci zależności między siłami wewnętrznymi i odkształceniami powierzchni środkowej. Spełnienie tego żądania związane jest z odpowiednią transformacją równań fizycznych materiału do własnej przestrzeni powłoki. W niniejszej pracy przedstawione zostaną takie transformacje.

<sup>1</sup> Tekst referatu generalnego «Inelastic shell problems» na Światowej Konferencji Konstrukcji Powłokowych, San Francisco, 1-5 października 1962 r., opublikowanego w skróconej wersji w «Proceedings» tej konferencji.

Celem pracy jest dokonanie przeglądu aktualnego stanu badań z zakresu *powłok niesprężystych*. Z uwagi na wielorakość problemów ukrytych pod nazwą *powłoki niesprężyste*, przedstawienie przeglądu wyczerpującego zagadnienie nie było uważane za właściwy cel. Zdecydowano się skoncentrować uwagę na zagadnieniach *formułowania podstawowych związków fizycznych* oraz na scharakteryzowaniu *metod analizy* głównych typów powłok niesprężystych z podaniem informacji o ważniejszych rozwiązaniach problemów szczegółowych. Takie podejście pozwala zwrócić uwagę na analogie i różnice w stosunku do klasycznej (liniowo-sprężystej) teorii powłok.

Obecny przegląd nie obejmuje takich zagadnień, jak nieliniowość geometryczna, wyboczenie sprężysto-plastyczne i procesy technologiczne kształtowania powłok. Nie są również uwzględnione zagadnienia drgań i rozprzestrzeniania się fal w powłokach niesprężystych. Rozważania prowadzone są w założeniu, że odkształcenia są małe, a więc wszystkie związki mogą być zapisane w układzie odniesienia dotyczącego nieodkształcanej powłoki. Jeśli chodzi o równania fizyczne, to praca ogranicza się do czysto fenomenologicznego opisu bez wchodzenia w przyczyny zjawisk niesprężystych i termodynamikę procesów nieodwracalnych odkształceń.

## 2. Związki fizyczne

1.2. Zachowywanie się materiału w procesie jego obciążania zależy od mechanicznych własności tego ośrodka. Dla opisanie jakiegokolwiek procesu odkształcenia niezbędna jest znajomość aktualnego *prawa fizycznego* (równania stanu) materiału, a więc równania tensorowego

$$(2.1) \quad f(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \dots, T, t) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

wiążącego naprężenia  $\sigma_{ij}$ , odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ , ich pochodne czasowe, temperaturę  $T$  oraz czas  $t$ , jeśli wymagane jest uwzględnienie historii procesu *explicite* (por. A. M. FREUDENTHAL i H. GEIRINGER [36a], I. I. GOLDENBLAT [42a]).

Podstawowe modele matematyczne opisujące odkształcenie ośrodków niesprężystych można podzielić na dwie grupy dotyczące odpowiednio *lepkiego* bądź *plastycznego* zachowywania się materiału. W przypadku materiału *lepkosprężystego* współczynniki występujące w (2.1) przy składowych tensorów dynamicznych i kinematycznych są *stałymi materialowymi*, tzn. są niezmiennicze względem zmian intensywności wielkości dynamicznych i kinematycznych. Oznacza to, że dowolnie małemu naprężeniu ośrodka towarzyszą zawsze zjawiska lepkosprężyste.

Zachowanie się materiału *sprężysto-plastycznego* jest odmienne. Może on przenieść naprężenie o pewnej intensywności bez wystąpienia odkształceń nieodwracalnych (plastycznych). Warunkiem koniecznym do pojawienia się nieodwracalnych odkształceń jest spełnienie *warunku plastyczności*

$$(2.2) \quad \Phi(\sigma_{ij}) = k,$$



będącego dla materiałów izotropowych funkcją skalarną tensora naprężenia. Występująca w (2.2) stała  $k$  jest *modułem plastyczności* ośrodka i definiuje jego (skalarną) cechę plastyczności. Dla materiałów idealnie plastycznych zachodzi ponadto  $\dot{\Phi} = 0$ , podczas gdy materiały charakteryzujące się wzmocnieniem plastycznym mają  $\dot{\Phi} > 0$ . Skoro dla materiału plastycznego spełniony być musi warunek (2.2), to staje się oczywiste, że współczynniki pojawiające się przy składowych tensorów wchodzących do prawa fizycznego (2.1) nie mogą już być stałymi materiałowymi.

2.2. W zagadnieniach *lepko-sprężystości* wyróżnia się *teorie liniowe i nieliniowe* w zależności od tego, czy składowe odpowiednich tensorów występujących w (2.1) pojawiają się tam w liniowej czy też nieliniowej postaci. Za ogólnie obowiązującą zasadę przyjmuje się «lepka» nieściśliwość ośrodka, a więc brak zjawiska lepkości objętościowej, tzn.  $\varepsilon_{ii}^V = 0$ .

Ogólna postać prawa fizycznego dla *liniowej lepko-sprężystości* zapisywana jest w następującej postaci [36a]

$$(2.3) \quad \mathbf{P}\sigma_{ij} = 2G \mathbf{Q}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}(3KP - 2GQ)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 3aKP T\delta_{ij},$$

gdzie  $\mathbf{P}$  oraz  $\mathbf{Q}$  są liniowymi operatorami różniczkowymi:

$$(2.4) \quad \mathbf{P} = a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + \dots + \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad \mathbf{Q} = b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + \dots + b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}.$$

Współczynniki  $a_i$ ,  $b_i$  występujące w (2.4) są określonymi kombinacjami rzeczywistych stałych materiałowych,  $G$  oraz  $K$  z równania (2.3) przedstawiają moduły ścinania i odkształcenia objętościowego,  $T$  oznacza przyrost temperatury względem temperatury odniesienia,  $a$  natomiast jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Ograniczając się do szczególnych form operatorów (2.4) uzyskuje się odpowiednie prostsze modele ciał liniowo-lepko-sprężystych. Najprostszymi modelami są te, które zawierają jedynie tensory naprężenia i odkształcenia oraz ich pierwsze pochodne względem czasu. Tak np. gdy

$$(2.5) \quad \mathbf{P} = 1, \quad \mathbf{Q} = [1 + (\eta/G)\partial/\partial t],$$

otrzymuje się najprostszy model ciała charakteryzującego się *opóźnieniem sprężystym* (model Kelvina). Występująca w (2.5) wielkość  $\eta$  jest cechą materiałową, mianowicie modułem lepkości postaciowej (ścinania). Analogicznie najprostszy model ciała wykazującego *pełzanie liniowe* i *relaksację* (model Maxwella) otrzymuje się przy następującej postaci operatorów (2.4)

$$(2.6) \quad \mathbf{P} = (G/\eta + \partial/\partial t), \quad \mathbf{Q} = \partial/\partial t.$$

2.3. Związki liniowej lepko-sprężystości pozwalają na uwzględnienie w aktualnie rozpatrywanym procesie odkształcenia tych zjawisk, których konstrukcja była poddana w przeszłości. Jeśli np. w chwili  $\tau$  obciążenie wywołało określone odkształcenie, to w chwili  $t > \tau$  konstrukcja wchodzi do nowego procesu

odkształcenia «pamiętając» proces poprzedni. Tak więc dla opisanego aktualnego procesu odkształcenia należy znać funkcję określającą pamięć materiału, która może być odmienna dla ścinania i ciśnienia hydrostatycznego. Stan odkształcenia lub naprężenia w czasie  $t$ , wywołany nagłymi, niezależnymi oddziaływaniami w chwilach  $\tau$ , może być przedstawiony w postaci całki obejmującej wszystkie chwilowe przyrosty. Otrzymuje się wówczas tzw. *związki Boltzmann*, które dla odkształceń (pełzania) mają postać

$$(2.7) \quad 2G\varepsilon_{ij} = \int_{-\infty}^t \varphi_1(t-\tau) \sigma_{ij} d\tau + \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \varphi_2(t-\tau) \sigma_{kk} d\tau,$$

gdzie  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  oznaczają *funkcje pamięci* (dziedziczenia). Analogiczne związki otrzymuje się dla naprężeń (relaksacji) (por. JU. N. RABOTNOW [99a], A. M. FREUDENTHAL [36a], R. BLAND [12a]). Zależności typu (2.7) są równoważne przedstawieniu ciała lepko-sprężystego w postaci (2.3). Funkcje pamięci są w tym przypadku odpowiednio zależne od współczynników w operatorach (2.4).

Zależności typu (2.7) mogą być traktowane jako związki definiujące pełzanie i relaksację również dla zjawisk nieliniowych.

Istnieje kilka uproszczonych teorii pełzania wykorzystujących koncepcję funkcji pamięci. Uproszczenia dotyczą głównie matematycznej postaci funkcji  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i ich liczby. W teorii, której prawo fizyczne ma postać

$$(2.8) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu_1}{E(t)} \sigma_{ij} - \frac{\mu_1}{E(t)} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \int_{t_0}^t \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial \tau} (K_1 + K_2) d\tau + \delta_{ij} \int_{t_0}^t \frac{\partial K_1}{\partial \tau} \sigma_{kk} d\tau,$$

gdzie

$$K_1(\tau, t) = \frac{1}{E} + \varphi(\tau, t), \quad K_2(\tau, t) = \frac{\nu_1}{E} + \nu_2 \varphi(\tau, t),$$

$\nu_1$ ,  $\nu_2$  są zaś współczynnikami Poissona odpowiednio dla odkształceń sprężystych i odkształceń pełzania,  $E$  jest modułem Younga; tylko jedna funkcja pamięci  $\varphi$  określa odkształcenie ośrodka (N. CH. ARUTUNIAN [6a].) Funkcję tę dla betonu przyjmuje się zwykle w następującej postaci:

$$\varphi(\tau, t) = (C_0 + A/\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

gdzie  $C_0$ ,  $A$  oraz  $\gamma$  są stałymi materiałowymi, określonymi na podstawie odpowiednich doświadczeń (por. N. CH. ARUTUNIAN [6a], A. R. RZANICYN [106a], I. I. GOLDENBLAT [42a]),

Rozwiązywanie konkretnych problemów brzegowych w teorii liniowej lepko-sprężystości jest ułatwione przez możliwość wyeliminowania zależności związków (2.3) od czasu na drodze *transformacji Laplace'a*. Rozwiązanie problemu lepko-sprężystego otrzymuje się wówczas w zależności od rozwiązania analogicznego problemu brzegowego liniowej sprężystości (por. T. ALFREY [4a], E. H. LEE

[70a]). *Analogia sprężysto-lepko-sprężysta* prowadzi ponadto do praktycznie ważnego wniosku, że naprężenia lepko-sprężyste są równe zeru tam, gdzie są one równe zeru w zadaniu liniowo-sprężystym. Analogiczny wniosek odnosi się również do pól przemieszczeń. Oznacza to, że *w konstrukcji liniowo-lepko-sprężystej* (przy ustalonym obciążeniu) *nie zachodzi redystrybucja naprężeń*. Ten oczywisty wniosek wynikający zresztą bezpośrednio z (2.3) jest szczególnie ważny dla zastosowań.

2.4. Ponieważ większość materiałów konstrukcyjnych nie spełnia postulatów liniowej teorii lepko-sprężystości, zostały sformułowane *teorie nieliniowej lepko-sprężystości*. Najprostsze z tych teorii zachowują w równaniu (2.1) tylko naprężenia i szybkości odkształceń, tzn. przedstawiają pełzanie materiału w postaci

$$(2.9) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^V = f(\sigma_{ij}), \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^E + \dot{\epsilon}_{ij}^V$$

i są teoriami płynięcia, ponieważ zawierają *explicite* tylko naprężenia i prędkość odkształcenia. W większości zagadnień praktycznych odkształcenia sprężyste mogą być uważane za małe w porównaniu z całkowitymi odkształceniami pełzania.

W zależności od szybkości narastania odkształceń pełzania w czasie wyróżnia się procesy *pełzania nieustalonego*, *ustalonego* (stacjonarnego) i *pełzania przyspieszonego*, zakończonego zniszczeniem elementu. Jeśli niezmienniczą wielkość  $\Phi = \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$  przyjąć jako charakterystyczną wielkość dla pełzania w założonym procesie naprężenia, to wymienione trzy typy pełzania zdefiniowane są kolejno zależnościami

$$(2.10) \quad \frac{d^2}{dt^2} (\epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0, \quad \dot{\epsilon}_{ii}^V = 0, \quad \epsilon_{ij}^E \approx 0.$$

Skalarna funkcja  $\Phi = \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$  określana jest doświadczalnie (por. R. W. BAILEY [9a], F. K. G. ODQVIST [81a, b], I. FINNIE [33a], F. K. G. ODQVIST i J. HULT [82a]).

2.5. Większość studiów analitycznych odnoszących się do nieliniowej lepko-sprężystości dotyczy zagadnień *pełzania ustalonego*. Wobec założenia o lepkiej nieściśliwości prawo fizyczne stacjonarnego pełzania (por. F. K. G. ODQVIST [81a]) możemy zapisać w następującej postaci:

$$(2.11) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = f(\sigma_{ij}) s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3) \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

gdzie  $f(\sigma_{ij})$  jest skalarną funkcją składowych stanu naprężenia. Wśród teorii stacjonarnego pełzania dużą popularność zdobyła wykładnicza zależność  $\dot{\epsilon} = k \sigma_{\text{sk}}^n$  (w jednowymiarowym stanie naprężenia). Najprostszą niezmienniczą postacią tej zależności uogólnionej na złożone stany naprężenia jest związek

$$(2.12) \quad (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})_{\text{sk}}^{1/2} = B (s_{ij} s_{ij})_{\text{sk}}^{n/2}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = 0.$$

Przy takiej zależności niezmienniczej między dewiatorami prawo fizyczne (2.11) przybiera następującą postać:

$$(2.13) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = B (s_{kl} s_{kl})^{\frac{n-1}{2}} s_{ij},$$

gdzie  $B$  oraz  $n$  są stałymi materiałowymi, przy czym  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą, a  $B$  może zależeć od czasu. Między związkami teorii ustalonego

pełzania a zależnościami nieliniowej sprężystości występuje oczywista analogia. Ta analogia «pełzanie — nieliniowa sprężystość» (N. J. HOFF [54a]) jest przydatna przy poszukiwaniu przybliżonych rozwiązań, ponieważ udostępnia do stosowania odpowiednio zmodyfikowane twierdzenia wariacyjne nieliniowej sprężystości.

Nieliniowość związków fizykalnych (2.13) stanowi poważną przeszkodę w uzyskiwaniu zamkniętych rozwiązań zagadnień pełzania. Aby częściowo te trudności obejść, zaproponowano prawa fizyczne w postaci związków między największymi naprężeniami stycznymi a przyrostami odkształceń postaciowych. Otrzymuje się wówczas zależności typu  $\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_j = f(\sigma_i - \sigma_j)(\sigma_i - \sigma_j)^n$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ), co pozwala na korzystanie z metod odcinkowo-liniowej plastyczności do zagadnień stacjonarnego pełzania (por. A. M. W. WAHL [124a], W. I. ROZENBLUM [102b]).

2.6. Z problemami nieliniowego pełzania związane jest zjawisko *wybożenia* «pełzającego». Charakteryzuje się ono tym, że w skończonym czasie prędkości odkształceń wzrastają nieograniczenie (przy ustalonym obciążeniu). Odpowiednia wartość czasu określana jest jako *czas krytyczny*. Omawiane zjawisko wybożenia jest odmienne od klasycznych zjawisk utraty stateczności. Nie może ono wystąpić w przypadku lepko-sprężystości liniowej, gdyż spełnienie warunku  $\dot{\epsilon}_{ij} \rightarrow \infty$  nie jest możliwe w skończonym okresie czasu.

2.7. Wśród nieliniowych teorii lepko-sprężystości wyróżnić można również takie, które postulują bezpośrednią zależność między naprężeniami i odkształceniami a czasem *explicite*, tzn.  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + f_{ij}(\sigma_{ij}, t)$ , przy czym zwykle przyjmuje się  $f(\sigma_{ij}, t) = F(t)(S_{ij}S_{ij})^n$ . Poważnym zastrzeżeniem teoretycznym w stosunku do tych proporcji jest właśnie ich jawna zależność od czasu, względem którego związki fizykalne powinny być niezmiennicze.

N. CH. ARUTUNIAN [6a] rozwinął *nieliniową teorię dziedziczenia*, analogiczną do przedstawionej równaniem (2.8), lecz uwzględniającą dodatkowo określone niezmiennicze związki między dewiatorami naprężenia i odkształcenia.

2.8. W grupie teorii dotyczących *plastycznego zachowywania* się materiałów rozróżnić należy dwie główne tendencje. W jednej z nich prawo fizyczne sformułowane jest jako bezpośrednia zależność między naprężeniami a odkształceniami. Teorie posługujące się zależnościami tego typu znane są jako teorie (małych) *odkształceń sprężysto-plastycznych* («teorie odkształceniowe»). Druga tendencja zapisywania prawa fizykalnego ośrodka plastycznego w postaci zależności między naprężeniami a przyrostami odkształceń uwidacznia się w *teoriach plastycznego płynięcia* («teorie przyrostowe»). W obydwu przypadkach musi być spełniony dodatkowo warunek (2.2), jeśli ma się pojawić nieodwracalne odkształcenie  $\epsilon_{ij}^p$  (por. R. HILL, [47a], W. PRAGER i P. G. HODGE [97a]).

2.9. Równanie fizyczne *teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych* wiąże bezpośrednio dewiatory naprężenia i odkształcenia. Dla procesu obciążania odpowiednie zależności mają postać (por. A. A. ILIUSZIN [58d])

$$(2.14) \quad s_{ij} = 2G(1 - \varphi/2G)e_{ij}, \quad \sigma_{ii} = 3K(\epsilon_{ii} - 3\alpha T),$$

a odciążanie odbywa się czysto liniowo-sprężysto. Występujące w (2.14)  $\varphi$  oznacza skalarną funkcję współrzędnych fizycznych, przy czym  $\varphi > 0$  w procesie obciążania oraz  $\varphi = 0$  przy odciążaniu. Postać tej funkcji zależy od aktualnie obowiązującego warunku plastyczności (2.2). Poprzez  $\varphi$  warunek plastyczności wchodzi do prawa odkształcenia. Tak więc, gdy  $\Phi(s_{ij}) = s_{ij}$ ,  $s_{ij} = 2k^2$  (gdzie  $k$  oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu), to  $\varphi = 2G - 2k/e_{ij} e_{ij})^{1/2}$ . Ponieważ  $\varphi$  jest funkcją skalarną, równanie tensorowe (2.14) narzuca współosiowość dewiatorów naprężenia i odkształcenia w ciągu całego procesu odkształceń plastycznych. Stąd wniosek, że posługując się prawem fizycznym (2.14) (równania Hencky'ego-Ilusina), otrzymać można rozwiązanie problemu brzegowego, jeśli proces obciążenia zapewnia niezmiennosc kierunków głównych. W zagadnieniach powłok warunek ten może być spełniony tylko w wyjątkowych przypadkach, gdyż dopuszcza on tylko taką redystrybucję sił wewnętrznych, która nie zmienia kierunków głównych naprężeń i odkształceń.

2.10. Równanie fizyczne *teorii plastycznego płynięcia* wiąże bezpośrednio składowe tensora naprężenia i tensora przyrostów (prędkości) odkształceń, a mianowicie

$$(2.15) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} + \dot{s}_{ij}/2G, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = 0, \quad \sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii}.$$

Występująca w (2.15)  $\lambda$  jest funkcją skalarną podlegającą wyznaczeniu z warunku plastyczności (2.2). Jeśli rozpatrywać materiał *sztywno-plastyczny*, tzn. gdy odkształcenia sprężyste mogą być uważane za małe w porównaniu z plastycznymi, to zachodzi  $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ , a odpowiednie prawo fizyczne nazywane *prawem płynięcia* przyjmuje postać

$$(2.16) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij},$$

określaną jako związki Levy'ego-Misesa. Formalnie przypominają one równania nieliniowego pełzania, przedstawione związkami (2.13). Reprezentują one jednak zupełnie odmienne zjawiska, ponieważ dla materiału plastycznego dodatkowo zachodzi warunek plastyczności (2.2). Jeśli np.  $\Phi = s_{ij}s_{ij} = 2k^2$ , to  $\lambda = (\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}/2k^2)^{1/2}$ , a tym samym różnica pomiędzy zależnościami (2.13) i (2.16) jest widoczna.

2.11. Związki *teorii plastycznego płynięcia* stanowią podstawę *teorii nosności granicznej* konstrukcji (por. W. PRAGER [96 a, b], P. G. HODGE [49 f] oraz [111 a]) i *teorii optymalnego kształtowania konstrukcji plastycznych*.

Przez odpowiednie kombinacje związków fizycznych dla ośrodków sprężystych, lepkich i plastycznych otrzymuje się bardziej złożone modele ciał niesprężystych. Takie złożone modele nie były jednak jeszcze stosowane do analizy zagadnień naprężenia i odkształcenia powłok.

### 3. Założenia teorii powłok

3.1. Dla kompletności przedstawienia omawianych zagadnień wydaje się niezbędne przytoczenie podstawowych założeń teorii cienkich powłok (por. [34a]). Przypuśćmy, że początek prostokątnego układu współrzędnych  $x_i$

( $i = 1, 2, 3$ ) umieszczony jest na środkowej powierzchni powłoki w ten sposób, że  $x_3$  jest skierowana wzdłuż zewnętrznej normalnej do tej powierzchni. Przy założeniu  $\sigma_{33} = 0$ , stan naprężenia w powłoce zostaje jednoznacznie określony przez pięć składowych tensora naprężenia, mianowicie  $\sigma_{\alpha\beta}$  i  $\sigma_{\alpha 3}$  ( $\alpha\beta = 1, 2$ ). Jeśli grubość  $2H$  powłoki jest mała w porównaniu do jej głównych promieni krzywizny (tzn.  $2H/\rho_{\alpha} \ll 1$ ), to stan naprężenia może być określony w zależności od *naprężeń wypadkowych*, zdefiniowanych następująco:

$$(3.1) \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-H}^H \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-H}^H \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \quad Q_{\alpha} = \int_{-H}^H \sigma_{\alpha 3} dx_3.$$

Przedstawiają one odpowiedni tensor sił błonowych  $N_{\alpha\beta}$ , tensor momentów  $M_{\alpha\beta}$  oraz wektor sił poprzecznych  $Q_{\alpha}$ . W ten sposób stan naprężenia w powłoce o określonej grubości został sprowadzony do stanu wypadkowego, odniesionego do środkowej powierzchni powłoki nieodkształconej.

3.2. Jeśli wydłużenia i krzywizny powierzchni środkowej oznaczyć odpowiednio przez  $\lambda_{\alpha\beta}$  i  $\varkappa_{\alpha\beta}$ , to stosowane w teorii powłok *założenie o prostych normalnych* pozwala określić stan odkształcenia dowolnej warstwy w zależności od  $\lambda_{\alpha\beta}$  i  $\varkappa_{\alpha\beta}$ . Odpowiednie związki mają postać

$$(3.2) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + \varkappa_3 \varkappa_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = 0.$$

Wielkości  $\lambda_{\alpha\beta}$  i  $\varkappa_{\alpha\beta}$  wyrażają się z kolei przez przemieszczenia stosownie do znanych związków między przemieszczeniami a odkształceniami. Warunek  $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$  oznacza, że nie są dopuszczalne odkształcenia wywołane siłami poprzecznymi. Ponieważ układ odniesienia jest związany z nieodkształconą powierzchnią środkową, a więc niezmienny w czasie, to przez odpowiednie różniczkowanie względem czasu z równania (3.2) otrzymuje się analogiczne związki również między prędkościami. Stosownie do przytoczonych założeń teorii cienkich powłok wyrażenie na energię odkształcenia redukuje się do następującej postaci:

$$(3.3) \quad V = \frac{1}{2} \int_{-H}^H \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_3 = \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta}).$$

Podobnie jednostkowe rozpraszanie energii wyraża się w zależności od sił wewnętrznych i prędkości odkształcenia powierzchni środkowej powłoki.

3.3. Wobec posługiwania się wielkościami (3.1) również związek fizyczny dla powłok powinien wyrażać się w zależności od  $M_{\alpha\beta}$ ,  $N_{\alpha\beta}$ ,  $Q_{\alpha}$  oraz  $\varkappa_{\alpha\beta}$ ,  $\lambda_{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha 3}$  i ich pochodnych względem czasu. Odpowiednia dla powłok postać związku (2.1) jest więc następująca:

$$(3.4) \quad f(N_{\alpha\beta}, \dot{N}_{\alpha\beta}, \dots, M_{\alpha\beta}, \dots, \lambda_{\alpha\beta}, \dots, \varkappa_{\alpha\beta}, \dots, T, t) = 0.$$

Dla materiałów wykazujących cechę plastyczności należy również odpowiednio przekształcić *równania plastyczności* (2.2) do postaci

$$(3.5) \quad F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = \text{const},$$

jeśli pominąć wpływ sił poprzecznych na uplastycznienie elementu powłoki. Jak widać z porównania zależności (2.2) i (3.1), sprowadzenie warunku plastyczności do postaci (3.5) następuje na drodze pewnej transformacji całkowej, związanej ze zmianą wymiarów przestrzeni.

#### 4. Liniowa lepko-sprężystość

4.1. W związku z założeniem o płaskim stanie naprężenia warstw powłoki i wobec  $\sigma_{33} = 0$  równanie fizykalne (2.3) przy pominięciu członu termicznego sprowadza się do następującej postaci

$$(4.1) \quad \mathbf{P}\sigma_{\alpha\beta} = 2G\mathbf{Q} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{3K\mathbf{P} - 2G\mathbf{Q}}{3K\mathbf{P} + 4G\mathbf{Q}} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie operatory  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  są określone zależnościami (2.4). Wykorzystując w (4.1) założenie o prostych normalnych otrzymuje się

$$(4.2) \quad \mathbf{P}\sigma_{\alpha\beta} = 2G\mathbf{Q} [\lambda_{\alpha\beta} + \varkappa_3 \varkappa_{\alpha\beta} + \mathbf{A}(\lambda_{\gamma\gamma} + \varkappa_3 \varkappa_{\alpha\beta}) \delta_{\alpha\beta}],$$

gdzie  $\mathbf{A} = (3\varkappa\mathbf{P} - 2G\mathbf{Q})/(3\varkappa\mathbf{P} + 4G\mathbf{Q})$ . Jeśli ponadto wprowadzić definicję sił wewnętrznych (3.1) oraz wziąć pod uwagę niezależność operatorów  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  od współrzędnych przestrzeni fizycznej, to otrzymuje się następującą postać związków między siłami wewnętrznymi a odkształceniami powierzchni środkowej powłoki:

$$(4.3) \quad \mathbf{P}N_{\alpha\beta} = 4HG\mathbf{Q}(\lambda_{\alpha\beta} + \mathbf{A}\lambda_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}),$$

$$(4.4) \quad \mathbf{P}M_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}H^3G\mathbf{Q}(\varkappa_{\alpha\beta} + \mathbf{A}\varkappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}).$$

Z powyższych zależności widać, że siły błonowe powodują w materiale *liniowo lepko-sprężystym* tylko wydłużenia powierzchni środkowej, a momenty wywołują tylko jej zakrzywienia. Tak więc rozkład naprężeń po grubości ulega jedynie zmianie w czasie, *nie następuje* natomiast żadna *redystrybucja sił pomiędzy momentami i siłami błonowymi*.

4.2. Zależność związków (4.3) i (4.4) od czasu może być usunięta poprzez zastosowanie transformacji Laplace'a.

$$u^*(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt, \quad (\text{por. np. [36a], [12a]}).$$

Wówczas otrzymuje się

$$(4.5) \quad N_{\alpha\beta}^* = 4HG\mathbf{Q}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)[\lambda_{\alpha\beta}^* + \mathbf{A}(s)\lambda_{\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta}],$$

$$(4.6) \quad M_{\alpha\beta}^* = \frac{2}{3}H^3G\mathbf{Q}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)[\varkappa_{\alpha\beta}^* + \mathbf{A}(s)\varkappa_{\gamma\gamma}^* \delta_{\alpha\beta}]$$

pod warunkiem, że dla  $t = 0$  powłoka znajduje się w spoczynku. Związki (4.5) i (4.6) są formalnie identyczne z odpowiednimi zależnościami dla powłok liniowo sprężystych. Różnica sprowadza się do «stałych» materiałowych, które w przypadku lepko-sprężystości zostają sprowadzone do tzw. «stowarzyszonych modułów» (por. P. M. NAGHDI i W. C. ORTHWEIN [77a]).

Jeśli poddać transformacji również pozostałe równania (tzn. dynamiczne i kinematyczne oraz warunki brzegowe), to zagadnienie analizy rozpatrywanych powłok lepko-sprężystych sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego problemu sprężystości liniowej. Tak więc gdziekolwiek znane jest rozwiązanie stowarzyszonego zadania sprężystego, wynika tylko problem dokonania transformacji odwrotnej, co jednak na ogół nie jest łatwe.

Liczba dotychczas dostępnych rozwiązań konkretnych zagadnień teorii powłok lepko-sprężystych jest niewielka. P. M. NAGHDI i W. C. ORTHWEIN [77a] analizowali zachowanie się płaskiej powłoki kulistej poddanej działaniu obrotowo symetrycznego obciążenia dowolnie zmieniającego się w czasie. Dla uzyskania rozwiązań odnoszących się zarówno do powłok wykazujących opóźnienie sprężyste, jak i wykazujących liniowe pełzanie zastosowali oni podwójną transformację (tzn. Laplace'a z następującą po niej transformacją Hankela), co pozwoliło na odwrócenie otrzymanych związków. Podano szczegółowe wyniki odnoszące się do obciążenia impulsem ciśnienia.

4.3. Analiza traktująca o zagadnieniach powłok dla ogólnego modelu ciała nie może być na ogół przedstawiona w takiej postaci, która pozwoliłaby inżynierowi na ilościową ocenę zjawisk. Dla tych celów warto przeprowadzić rozważania odnoszące się do najprostszych modeli ciał liniowo-lepko-sprężystych.

Rozpatrzmy powłokę wykonaną z materiału wykazującego *opóźnienie sprężyste*, a poddaną działaniu ustalonego obciążenia. Dla takiego ośrodka operatory  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  mają postać (2.5). Przy ustalonym obciążeniu prowadzi to do związku fizykalnego  $s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij}$ , podczas gdy zmiana objętości jest natychmiastowa i czysto sprężysta,  $\varepsilon_{ii} = \sigma_{ii}/3K$ . Całkowanie prawa odkształcenia przy zerowych warunkach początkowych dla dewiatorów odkształcenia prowadzi do wyniku  $e_{ij} = (1 - e^{-\eta t/G})(s_{ij}/2G)$ . Jeśli tę zależność przedstawić w postaci właściwej powłokom, otrzymuje się związek

$$(4.7) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}(1 - e^{-\eta t/G})\left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{3K}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta},$$

a po wykorzystaniu definicji sił wewnętrznych (3.1) następującą postać zależności fizycznej:

$$(4.8) \quad 2H\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}(1 - e^{-\eta t/G})\left(N_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}N_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{3K}N_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}$$

i analogiczną łączącą tensory momentów i krzywizn.

Jest widoczne, że z wyjątkiem czysto sprężystego odkształcenia objętościowego wszystkie składowe tensora odkształcenia wzrastają dążąc do wartości



odpowiadających powłokom sprężystym. Dla materiałów nieściśliwych a wykazujących opóźnienia sprężyste na ścinanie otrzymuje się następujące wyrażenia na składową promieniową i składowe styczne wektora przemieszczeń:

$$(4.9) \quad \left. \begin{matrix} w \\ u_x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} w^E \\ u_x^E \end{matrix} \right\} (1 - e^{-\eta t/G}).$$

Analogicznie dla powłok z nieściśliwego materiału wykazującego *liniowe pełzanie* otrzymuje się odpowiednio

$$(4.10) \quad \left. \begin{matrix} w \\ u_x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} w^E \\ u_x^E \end{matrix} \right\} \left( 1 + \frac{G}{\eta} t \right),$$

przy czym  $w^E, u_x^E$  oznaczają część sprężystą przemieszczenia. Zależności typu (4.10) posłużyły do sformułowania przybliżonych teorii pełzania konstrukcji betonowych i żelbetowych (W. H. GLANVILLE [41a]). Teorie te zakładają, że czasowo zależna część pól naprężeń i odkształceń ma tę samą konfigurację przestrzenną co i odpowiednie wielkości sprężyste, tzn. w przypadku powłok otrzymuje się zależności  $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^E \varphi(t)$ ,  $u_x = u_x^E \varphi(t)$  itd (por. H. MUGURUMA [76a]).

Ogólne zależności między wielkościami dynamicznymi a kinematycznymi dla powłok lepko-sprężystych analizowali I. I. GOLDENBLAT i N. A. NIKOLAJENKO [43a, b], W. NOWACKI [80a], a dla ortotropii I. E. PROKOPOWICZ [98a]. E. TUNGL [122a] rozpatrzyła problem «przeskoku» dla płaskiej powłoki lepko-sprężystej wykazującej pełzanie i opóźnienie sprężyste (model «standardowy»). Uwzględnienie *geometrycznej nieliniowości* związków pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami prowadzi do efektu przeskoku, który dla materiału o cechach lepkich pojawia się przy mniejszych intensywnościach nagle przyłożonego ciśnienia niż dla powłoki idealnie sprężystej. Problem przeskoku dla elementu powłoki walcowej rozpatrywał Z. BYCHAWSKI [14a].

4.4. Wśród teorii postulujących prawo fizyczne w postaci (2.7) najszersze zastosowanie znalazła teoria posługująca się funkcją pamięci  $\varphi = (C_0 + A/\tau) \times [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$ , postulująca ponadto liniową proporcjonalność pomiędzy odkształceniami podłużnymi i poprzecznymi w całym procesie pełzania (N. Ch. ARUTUNIAN [6a]).

W przypadku *teorii dziedziczenia* związek między naprężeniami a odkształceniami w każdej warstwie powłoki przyjmuje następującą postać:

$$(4.11) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2G} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \int_{-\infty}^t K(t, \tau) \left( \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2G} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) d\tau,$$

gdzie  $K = -\partial K_1 / \partial t$ , co w konsekwencji założeń teorii powłok prowadzi do równania

$$(4.12) \quad \frac{2}{3} H^3 \kappa_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{2G} - \nu \frac{M_{\gamma\gamma}}{E} \delta_{\alpha\beta} - \int_{-\infty}^t K(t, \tau) \left( \frac{M_{\alpha\beta}}{2G} - \nu \frac{M_{\gamma\gamma}}{E} \delta_{\alpha\beta} \right) d\tau.$$

Analogiczną zależność do wiążącej momenty z krzywiznami otrzymuje się dla sił błonowych i wydłużeń. W przypadku niezmiennych obciążeń, jeśli ponadto  $E = \text{const}$ ,  $\nu = \text{const}$ , pełzanie określone jest przez proste zależności

$$(4.13) \quad \left. \begin{matrix} w \\ u_\alpha \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} w^E \\ u_\alpha^E \end{matrix} \right\} [1 + E\varphi(t, \tau)],$$

przy czym  $\varphi(t, \tau)$  jest funkcją pamięci danego materiału.

Jeśli posługiwać się związkami (2.8) bez upraszczającego założenia, że  $K_2 = \nu K_1$ , to zawarta w (4.13) analogia pomiędzy pełzaniem a odkształceniami sprężystymi nie obowiązuje. Dla takiego ogólnego przypadku odpowiedni układ równań różniczkowo-całkowych problemu pełzania przytoczony jest w pracy [43a]. Dotychczas jednak nie są znane żadne rozwiązania problemów spełniających takie związki fizyczne.

Zależność (4.13) może służyć do przybliżonego określania odkształceń pełzania, jeśli znana jest funkcja pamięci dla jednoosiowego stanu naprężenia oraz znane jest rozwiązanie problemu sprężystego. Tego typu wyniki odnoszące się do powłok walcowych znaleźć można w pracach I. I. GOLDENBLATA i N. A. NIKOŁAJENKI [43b] oraz E. A. DAVIS [20a].

Zachowanie się mało wyniosłej powłoki kulistej analizował M. R. FELDMAN [31a]. Przypadek nieliniowości związków kinematycznych dla tego typu konstrukcji studiowany jest w pracy M. I. ESTRINA [29a]; G. S. GRIGORIAN [44a] rozpatrywał pełzanie powłoki żelbetowej w dążeniu do uzyskania związków określających redystrybucję sił między betonem i stalą w procesie pełzania. Mimo rozpowszechnienia teorii dziedziczenia liczba opracowań dotyczących powłok jest niewielka.

4.5. Ponieważ temperatura wpływa zarówno na stałe materiałowe, jak i na związki pomiędzy naprężeniami a odkształceniami, współcześnie obserwuje się tendencję do analizy konstrukcji powierzchniowych z uwzględnieniem *zjawisk termo-lepko-sprężystych* dla procesów statycznych i dynamicznych. M. ŻÓRAWSKI [128a] rozpatrywał zamkniętą powłokę kulistą poddaną obciążeniu impulsem cieplnym. Inne prace z tego zakresu dotyczą efektów termicznych w powłokach grubościennych [1a], [7a, b], [48a], [103a, b]. M. A. ZADOJAN [125a] rozpatrywał pełzanie walca w sformułowaniu liniowej teorii dziedziczenia traktując jądro odpowiedniego równania całkowego problemu jako zależne od temperatury w następujący sposób:

$$K(t, \tau, T) = E_0 e^{\gamma - T} \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau, t) e^{\mu \tau}]$$

( $\gamma, \mu$  oznaczają stałe materiałowe,  $E_0$  moduł sprężystości w temperaturze odniesienia).

## 5. Pełzanie ustalone

5.1. W zakresie zagadnień nieliniowej lepko-sprężystości uwaga koncentruje się dotychczas głównie na problemach pełzania stacjonarnego. Daje ono bowiem możliwość zbadania takich specyficznych cech niesprężystego zachowywania

się konstrukcji jak *redystrybucja naprężeń* w stosunku do stanu sprężystego oraz *wyboczenie «pełzające»*.

Liczba proponowanych związków między naprężeniami a prędkościami odkształceń pełzania jest znaczna. Istnieje szereg opracowań przeglądowych traktujących o tych związkach fizycznych (F. K. G. ODQVIST [81a], I. FINNIE [33a]), o wyboczeniu przy pełzaniu (N. J. HOFF [54b]) oraz monografie (L. M. KACZANOW [63c], F. K. G. ODQVIST i J. HULT [82a]), omawiające zagadnienia od strony postaci funkcji (2.2) dla pełzania, a zależności (2.11) dla stacjonarnego pełzania.

Dla celów analizy pełzania powłok niezbędne jest określenie bezpośrednich związków między wielkościami dynamicznymi a kinematycznymi. Najbardziej rozpowszechnione prawo pełzania  $\dot{\epsilon} = k(\dot{\epsilon})\sigma^n$ , uogólnione na przestrzenny stan naprężenia, przyjmuje w zadaniu płaskim następującą postać:

$$(5.1) \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = B(s_{ij}s_{ij})^{\frac{n-1}{2}} [\sigma_{\alpha\beta}(1/3)\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}], \quad \dot{\epsilon}_{33} = -\dot{\epsilon}_{\gamma\gamma}.$$

Po odwróceniu związków (5.1) otrzymuje się zależności

$$(5.2) \quad \sigma_{\alpha\beta} = (\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} + \dot{\epsilon}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) / B^n (\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Wobec założonej nieściśliwości  $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ , kwadratowy niezmiennik stanu odkształcenia występujący w (5.2) może być przedstawiony jako  $\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} + \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha}\dot{\epsilon}_{\beta\beta}$ , a po wyprowadzeniu założenia o prostych normalnych przyjmuje on następującą postać:

$$(5.3.) \quad \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\alpha\alpha}\dot{\lambda}_{\beta\beta} + 2x_3(\dot{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\alpha\alpha}\dot{\lambda}_{\beta\beta}) + x_3^2(\dot{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\alpha\alpha}\dot{\lambda}_{\beta\beta}) = \\ = P_L + 2x_3P_{KL} + x_3^2P_K \equiv P.$$

W powyższym wzorze przez  $P_L$ ,  $P_{KL}$ ,  $P_K$  oznaczono odpowiednie niezmiennicze wielkości tensorów kinematycznych powierzchni środkowej. Wykorzystując związki (5.3) w zależnościach (3.1) otrzymuje się następujące wyrażenia na *siły wewnętrzne*:

$$(5.4) \quad N_{\alpha\beta} = (\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2 + (\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2.$$

$$(5.5) \quad M_{\alpha\beta} = (\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2 + (\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_3,$$

gdzie

$$(5.6) \quad I_s = \frac{1}{B^n} \int_{-H}^H \frac{x_3^{s-1}}{P^{(n-1)/2n}} dx_3, \quad s = 1, 2, 3,$$

które to wielkości można interpretować kolejno jako uogólnione pole, moment statyczny i moment bezwładności przekroju powłoki.

Jest bezpośrednio widoczne z powyższych zależności, że wszystkie *wielkości dynamiczne i kinematyczne są w ustalonym pełzaniu wzajemnie związane*. Zależności te są bardziej złożone, niż by to wynikało z prostej superpozycji stanu błonowego i giętnego. Siły błonowe są połączone zarówno z wydłużeniami

jak i zakrzywieniami powierzchni środkowej. Nie istnieje więc możliwość oddzielnego rozpatrywania stanów membranowego i zgięciowego z wyjątkiem bardzo szczególnych problemów brzegowych.

Z uwagi na postać związków (5.4)-(5.6) rozwiązanie problemów brzegowych pełzania w zamkniętej postaci jest możliwe tylko w nielicznych szczególnych przypadkach. Na ogół stosuje się metody numeryczne i wariacyjne.

Nieliniowość związków (5.1) powoduje istotne różnice w polu sił pomiędzy rozwiązaniem dla liniowej sprężystości a rozwiązaniem zagadnienia pełzania. Różnice są tym bardziej wyraźne, im «wyższa» jest nieliniowość równania fizycznego. Różnice obejmują również, co jest zrozumiałe, zależność między obciążeniem a przemieszczeniem powłoki.

5.2. Badaniu wpływu nieliniowości związku fizycznego na pole sił wewnętrznych w powłoce poświęcona jest praca M. P. BIENKA i A. M. FREUDENTHALA [11a]. Analiza przebiegu sił wewnętrznych w pobliżu brzegu powłoki walcowej wykazała, że szczyt momentu zostaje (w porównaniu do rozwiązania liniowo-sprężystego) znacznie zmniejszony i zmienia się charakter współpracy sił błonowych i momentów przy przenoszeniu obciążeń. W. I. ROZENBLUM [102a] zastosował metodę wariacyjną do badania zależności pomiędzy ciśnieniem a przemieszczeniem promieniowym dla powłoki walcowej. C. R. CALLADINE [15a] wyznaczył dla pół-nieskończonej powłoki walcowej na drodze całkowania numerycznego zasięg i przebieg «efektu brzegowego». Zagadnieniom redystrybucji sił w powłokach poświęcona jest praca H. PORITSKY'EGO [95a].

Wyznaczeniem przemieszczeń powłok walcowych znajdujących się w stanie ustalonego pełzania zajmował się A. E. GEMMA [37a, b], a dla powłok obrotowo-symetrycznych L. M. KACZANOW [63b, c]. A. E. GEMMA i J. T. WARFIELD [38a] wyznaczyli zależność między ciśnieniem a przemieszczeniem promieniowym dla zamkniętej elipsoidy.

5.3. Zamkniętą postać rozwiązań problemów pełzania można uzyskać przez zastosowanie *prawa fizycznego w «linearyzowanej» postaci*. Linearyzacja jest tu jednak dosyć szczególna i polega w zasadzie na uogólnieniu związku  $\dot{\epsilon} = k\sigma^n$  na złożony stan naprężenia nie w postaci  $\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = B^2(s_{ij}s_{ij})^n$ , lecz w postaci  $\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_j = B(\sigma_i - \sigma_j)^n$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Różnica tych podejść tłumaczy się tak, jak różnica pomiędzy warunkiem plastyczności Hubera-Misesa a warunkiem największego naprężenia stycznego (por. A. M. WAHL [124a], W. I. ROZENBLUM [102c], por. również C. R. CALLADINE i D. C. DRUCKER [16a]).

Tego typu podejście zastosowali E. T. ONAT i H. YÜKSEL [87a] do analizy pełzania powłok walcowych, uzyskując zamkniętą postać związku na przemieszczenia, oraz W. I. ROZENBLUM [102e] przy rozpatrywaniu pełzania powłok znajdujących się w błonowym stanie naprężenia.

5.4. Zależność (5.1) można wykorzystać do poszukiwania grubości powłok znajdujących się w stanie błonowym, a charakteryzujących się jednakową prędkością pełzania we wszystkich punktach powłoki (tzw. *powłoki «równomiernego pełzania»* por. [63c]). Wówczas zachodzi musi  $\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \text{const}$ ,

co z kolei stosownie do (2.12) jest równoważne warunkowi  $s_{ij}s_{ij} = \text{const}$ . Wykorzystując definicję sil błonowych otrzymuje się zależność

$$(5.7) \quad N_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} - (4/9)N_{\alpha\alpha}N_{\beta\beta} = 4H^2c,$$

gdzie  $c$  jest daną stałą. Ponieważ w stanie błonowym  $N_{\alpha\beta}$  jest określone z równań równowagi, zależność (5.7) podaje zmianę grubości powłoki.

5.5. Jedną z charakterystycznych cech nieliniowej lepko-sprężystości jest zjawisko *wyboczenia* «*pełzającego*». Okazuje się, że po upływie dostatecznie długiego okresu czasu *prędkości odkształceń nieograniczenie wzrastają*, a tym samym proces odkształcenia staje się niestacyczny dla każdej wartości obciążenia (por. N. J. HOFF [56b, c], JU. N. RABOTNOW [99c], S. A. SZESTERIKOW [120a]). Tak np. dla pręta ściskanego osiowo, a charakteryzującego się odchyłką od stanu idealnego, istnieje czas krytyczny  $\tau_{kr}$  skończony taki, przy którym prędkość narastania odkształceń staje się nieskończona. Zagadnienia niestacyczności pełzania — podstawy i analiza wyboczenia prostych konstrukcji omawiane są w pracach przeglądowych N. J. HOFFA [54b], JU. N. RABOTNOWA i S. A. SZESTERIKOWA [100a], B. F. DE VEUBECKE [123a] oraz w monografii [82a] (por. też [39a]).

Niestaceczność procesu pełzania powłok walcowych poddanych działaniu osiowego ściskania i ciśnienia wewnętrznego pierwszy analizował E. SUNDSTRÖM [118a]. N. J. HOFF, W. E. JASHMAN i W. NACHBAR [55a] rozpatrzyli stateczność walcowej powłoki sandwiczowej przy poprzecznym ciśnieniu (por. też. A. P. KUZNIECOW i L. M. KURSIN [69a]). Zagadnień z pogranicza wyboczenia przy pełzaniu dotyczy praca C. R. CALLADINE'A [15b], rozpatrująca rozprzestrzenianie się fałdy w powłoce walcowej.

5.6. *Nieliniowe pełzanie* zamkniętej kuli na gruncie nieliniowej teorii dziedziczenia rozpatrywali N. CH. ARUTUNIAN i M. M. MANUKIAN [7b]. Wpływ temperatury na stateczność i zniszczenie powłok analizowany jest przez WAH TEIN i R. KIRKA [121a]. Praca ta zawiera dane doświadczalne odnoszące się do przyspieszonego pełzania powłok walcowych. J. P. ELLINGTON [27a] rozpatrywał pełzanie powłoki walcowej stosując prawo fizyczne zawierające czas *explicite*. Stosując zależności nieliniowej teorii dziedziczenia i nieliniowe związki kinematyczne M. I. ROZOWSKI [103b] analizował pełzanie powłoki kulistej. Zagadnień zbliżonych do stacjonarnego pełzania powłok dotyczą ponadto prace [33b], [9a], [127a].

## 6. Teoria małych odkształceń sprężysto-plastycznych

6.1. Stosownie do założeń «odkształceniowej» teorii plastyczności odkształcenie objętościowe jest czysto sprężyste, a *prawo odkształcenia* postaciowego postuluje proporcjonalność dewiatorów naprężenia i całkowitego odkształcenia. W przypadku powłok odpowiedni związek przybiera postać

$$(6.1) \quad \sigma_{\alpha\beta} = A(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie  $A = [s_{ij}s_{ij}/e_{ij}e_{ij}]^{1/2}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Jak to było już podkreślane uprzednio, do analizy procesów małych odkształceń plastycznych niezbędna jest znajomość również warunku plastyczności. Załóżmy, że warunek plastyczności podany jest w postaci regularnej funkcji niezmienników stanu naprężenia. Najprostszą postacią takiej funkcji (niezależnej od ciśnienia hydrostatycznego) jest warunek plastyczności Hubera–Misesa, reprezentujący krytyczną (dla danego materiału izotropowego) wartość jednostkowej energii odkształcenia postaciowego. Ponieważ gęstość energii odkształcenia postaciowego określona jest kwadratowym niezmiennikiem dwiwartora naprężenia, omawiany warunek ma postać  $\Phi = s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_0^2$ , gdzie  $\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności w jednoosiowym stanie naprężenia. W płaskim stanie naprężenia otrzymuje się odpowiednio  $\Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - 2\sigma_0^2 = 0$ . Dla materiału idealnie plastycznego zachodzi  $\dot{\Phi} = 0$ , a więc warunek plastyczności nie zmienia się w procesie odkształcenia plastycznego, podczas gdy dla materiału wykazującego wzmocnienie plastyczne  $\dot{\Phi} > 0$ . Przypadek  $\dot{\Phi} < 0$  odpowiada odciążeniu, które w myśl założeń teorii odkształceniowej jest czysto sprężyste.

6.2. Prawo fizyczne teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych dla omówionego warunku plastyczności przyjmuje następującą postać:

$$(6.2) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_0(2/3e_{ij}e_{ij})^{1/2}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}),$$

a więc naprężenia są jednoznacznie określone przez odkształcenia i moduł plastyczności materiału  $\sigma_0$ . Na podstawie zależności (3.1) i (3.2) otrzymuje się bezpośrednio *związki między siłami wewnętrznymi a odkształceniami powierzchni środkowej*, mianowicie

$$(6.3) \quad N_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_1 + (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2,$$

$$(6.4) \quad M_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2 + (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_3,$$

gdzie

$$(6.5) \quad I_s = \sigma_0(2/3) \int_{-H}^H (x_3^{s-1}) / (e_{ij}e_{ij})^{1/2} dx_3, \quad s = 1, 2, 3.$$

Dla materiału ze wzmocnieniem oczywiście  $\sigma_0$  występuje pod znakiem całki. Wyrażenia (6.5) można interpretować kolejno jako zredukowane pole, moment statyczny i moment bezwładności przekroju powłoki. Ponieważ  $e_{ij}e_{ij}$  dla powłok wyraża się poprzez niezmiennik  $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma}\varepsilon_{\beta\beta}$ , który wobec założenia (3.2) jest wielomianem drugiego stopnia względem  $\kappa_0$ , to całki (6.5) dają się wyznaczyć i związki (6.3) oraz (6.4) otrzymuje się w postaci zamkniętej.

6.3. Wyrażenia (6.3) do (6.5) wraz z warunkami równowagi i związkami geometrycznymi, łączącymi  $\lambda_{\alpha\beta}$ ,  $\kappa_{\alpha\beta}$  ze składowymi  $w$ ,  $u_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) wektora przemieszczenia, przedstawiają układ równań teorii powłok sprężysto–plastycznych, który wymaga rozwiązania dla aktualnych warunków brzegowych. Z zależności tych widać, że elementy stanu zgięciowego i błonowego wchodzi do obydwu równań definiujących siły wewnętrzne. Wynika stąd wniosek,

że w ogólnym przypadku *nie jest możliwe rozdzielenie równań teorii powłok plastycznych na grupy* dotyczące odpowiednio *stanu zgięciowego* i *stanu błonowego*, jak to ma miejsce w teorii powłok sprężystych (por. [34a]). Fakt ten wskazuje na odmiennosc zagadnień powłok plastycznych w porównaniu ze sprężystymi. Rozdzielenie stanu momentowego od stanu błonowego następuje jedynie dla szczególnych przypadków odkształcenia, takich mianowicie gdy  $I_2 = 0$  (co oznacza, że wyrażenie  $e_{ij}e_{ij}$  jest symetryczne względem powierzchni środkowej).

Bezpośrednie całkowanie równań teorii powłok sprężysto–plastycznych nie jest w ogólnym przypadku możliwe. W dążeniu do rozwiązania problemów brzegowych stosuje się więc *metody przybliżone*, które można podzielić na metody wariacyjne i metodę rozwiązań sprężystych (A. A. ILIUSZIN [58a]).

6.4. W metodzie rozwiązań sprężystych stosuje się drogę kolejnych przybliżeń. Jako zerowe przybliżenie traktuje się rozwiązanie liniowo–sprężyste danego problemu brzegowego. Znając pole przemieszczeń wyznacza się  $e_{ij}$ , co z kolei pozwala na obliczenie wielkości (6.5), a tym samym na przedstawienie sił wewnętrznych w zależności od przemieszczeń. Podstawienie tych związków do równań równowagi prowadzi do zależności różniczkowych na przemieszczenia. Z uwagi na nieliniowość prawa fizycznego tak otrzymane równania różnią się od związków dla powłok sprężystych o pewne dodatkowe człony, które mogą być interpretowane jako odpowiednia zmiana obciążeń (np. jako specyficzne pole sił ciężkości). Równania przemieszczeniowe wymagają teraz rozwiązania dla «zmodyfikowanych» obciążeń przy niezmiennych warunkach brzegowych. W rezultacie tego kroku otrzymuje się nowe pole przemieszczeń. Postępowanie powtarza się aż do chwili, kiedy różnice pomiędzy rezultatami dwóch kolejnych przybliżeń mogą być uznane za dostatecznie małe (por. [58d]). Jak widać, sposób postępowania może być uciążliwy. Zbieżność metody rozwiązań sprężystych badał W. M. PANFEROW [90a], jednak przedstawiony dowód zbieżności nie może być uważany za dostateczny (por. [8a]).

Omówioną metodę kolejnych przybliżeń zastosowano do rozwiązania kilku prostszych przypadków powłok. Odkształcenia powłoki walcowej pod działaniem obrotowo symetrycznych obciążeń rozpatrywane są w pracach A. A. ILIUSZINA [58b, c, d] i innych [5a], [92a]. I. S. CURKOW analizował tą metodą odkształcenie mało wyniosłej powłoki kulistej [18b] oraz przypadek «efektu brzegowego» w powłoce walcowej [18a, d, e] również dla powłoki ortotropowej [18c]. R. A. MIEŻŁUMIAN podał równania sprężysto–plastycznych odkształceń cienkościennych profili otwartych [72a–d].

6.5. Metody wariacyjne stosowane w teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych oparte są na założeniu, że wariacja całkowitej energii odkształcenia  $W$  jest równa pracy  $L$  wykonanej przez obciążenia zewnętrzne na przyrostach przemieszczeń  $\delta u_i$  spowodowanych zgodną z więzami wariacją stanu odkształcenia, a więc

$$(6.6) \quad \delta \int_V W dV = \int_s T_i \delta u_i ds,$$

jeśli pominąć siły masowe. Na wielkość  $W$  składa się zarówno energia odkształcenia objętościowego, proporcjonalna do niezmiennika  $\varepsilon_{ii}$ , jak i energia odkształcenia postaciowego, która dla prawa fizycznego (2.14) zależy od wyrażenia  $\int_0^{\varepsilon_{ij}} A e_{ij} d\varepsilon_{ij}$ , gdzie  $A$  jest odpowiednią dla przyjętego warunku plastyczności skalarną funkcją określającą moduł odkształcenia [podobnie jak w (6.1)]. Tego typu podejście stosował A. A. ILIUSZIN [58b], zaś W. M. PANFEROW [90b] rozpatrywał problem doboru najwłaściwszych funkcji na przemieszczenia. I. S. GERASIMOW [40a] zastosował metodę wariacyjną do analizy współdziałania sprężysto–plastycznej płyty ze sprężystą powłoką w naczyniu ciśnieniowym.

6.7 Metody teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych, głównie metoda rozwiązań sprężysto–plastycznych mają praktyczne znaczenie dla *studiowania początku procesu odkształceń plastycznych*. W szczególności ta teoria może dostarczyć interesujących ze stanowiska technicznego informacji na temat odkształceń w pierwszej fazie procesu nieodwracalnego. Wówczas założenie o niezmienności kierunków głównych tensorów odkształcenia i naprężenia może być zaakceptowane (jeśli rozpatrywać problem ze stanowiska technicznego, nie matematycznego). Jeśli natomiast chodzi o wyznaczenie stopnia bezpieczeństwa konstrukcji na zniszczenie, to metoda rozwiązań sprężystych przedstawia niewielką wartość z uwagi na pracochłonność obliczeń. Ponadto otrzymane rozwiązania są przybliżone bez możliwości określenia bezwzględnego stopnia dokładności wyznaczenia np. obciążenia granicznego dla powłok. Z tych względów obserwuje się obecnie spadek zainteresowania teorią małych odkształceń sprężysto–plastycznych, szczególnie w zastosowaniu do zagadnień teorii konstrukcji. Wypierana jest ora w zagadnieniach nośności granicznej przez formalnie poprawniejszą i technicznie bardziej efektywną teorię plastycznego płynięcia.

## 7. Nośność graniczna

7.1. W zachowaniu się konstrukcji wykonanej z materiału idealnie sprężysto–plastycznego (bez wzmocnienia) można w procesie jej obciążania wyodrębnić dwie fazy, mianowicie: a) stan użytkowy, b) stan wyczerpania nośności. W pierwszym przypadku zachodzi przy narastających obciążeniach wzajemnie jednoznaczna zależność między naprężeniami a odkształceniami, podczas gdy drugiemu spośród wymienionych stanów odpowiada niekontrolowany przyrost odkształceń przy ustalonej intensywności obciążenia. Odpowiednia wielkość obciążenia jest definiowana jako *obciążenie graniczne (nośność graniczna)* konstrukcji, któremu towarzyszy *przekształcenie konstrukcji w mechanizm* o jednym co najmniej stopniu swobody (*mechanizm zniszczenia*). Przekształcenie się konstrukcji w mechanizm związane jest z osiągnięciem przez naprężenia warunku plastyczności w określonej liczbie obszarów, kontynuacja zaś procesu odkształcenia się plastycznego następuje bez zmiany liczby i geometrii tych uplastycznionych obszarów. Wielkość obciążenia granicznego może być wyznaczona na drodze śledzenia całego procesu obciążenia konstrukcji od stanu



sprężystego poprzez sprężysto–plastyczny aż do stanu granicznego. Istnieje też możliwość bezpośredniego wyznaczenia intensywności obciążenia granicznego przez zastosowanie takich metod analizy, które ograniczają się do rozpatrzenia wyłącznie stanu wyczerpania nośności. W tym drugim przypadku podstawą analizy jest sztywno–plastyczny model odkształcania się materiału. Obciążenie graniczne związane jest przy tym podejściu z rozpoczęciem się procesu odkształceń plastycznych (por. A. A. GWOZDIEW [45a,b], R. HILL [47b], W. PRAGER [96a]).

7.2. Analiza stanu granicznej nośności konstrukcji wymaga wyspecyfikowania warunku plastyczności, który należy przedstawić w zależności od sił wewnętrznych, a więc dla powłok w postaci  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$ , jak to podaje zależność (3.5). Warunek plastyczności tworzy w przestrzeni sił wewnętrznych  $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$  zamkniętą hiperpowierzchnię, zawierającą początek przyjętego (kartezjańskiego) układu odniesienia. Ta hiperpowierzchnia definiowana jest jako *powierzchnia graniczna* (powierzchnia plastyczności). Dla określenia ruchu mechanizmu zniszczenia, oprócz wyspecyfikowania warunku (3.5), potrzebna jest znajomość odpowiedniego *prawa ruchu*, a więc związku fizykalnego (3.4). Ruch ośrodka (niesztywny) jest określony, jeśli znany jest związek między naprężeniami a prędkościami odkształceń. Ponieważ takimi relacjami posługuje się teoria plastycznego płynięcia, stanowi ona podstawę teorii nośności granicznej. Teoria plastycznego płynięcia posługuje się pojęciem stowarzyszonego prawa płynięcia  $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \partial \Phi / \partial \sigma_{ij}$ ; przyjmuje się, że warunek plastyczności  $\Phi$  jest *potencjałem dla prędkości odkształceń plastycznych* lub w przypadku nieregularnej powierzchni granicznej tzw. uogólnionym potencjałem (W. KOITER [68a]).

Można wykazać (por. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI [114a], M. SAVE [108a]), że o ile zachodzi *stowarzyszone prawo płynięcia* w przestrzeni naprężeń, to zależności

$$(7.1) \quad \dot{\lambda}_{\alpha\beta} = \nu \frac{\partial F}{\partial N_{\alpha\beta}}, \quad \dot{\kappa}_{\alpha\beta} = \nu \frac{\partial F}{\partial M_{\alpha\beta}}, \quad \nu \geq 0$$

opisują chwilowy ruch tych punktów powierzchni środkowej, w których  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$ . Wielkości dynamiczne występujące w równaniu powierzchni granicznej oraz wielkości kinematyczne  $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}, \dot{\kappa}_{\alpha\beta}$  określają *prędkość rozpraszania energii wewnętrznej* (ogólnie wyrażającej się skalarem  $d = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ ), mianowicie  $d = M_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta}$  na jednostkę powierzchni środkowej powłoki. Ponieważ proces plastycznego płynięcia jest nieodwracalny, zachodzi  $d > 0$ . Przy wypukłości powierzchni granicznej fakt ten łącznie z postulatem stateczności  $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0$  służy do uzasadnienia słuszności stowarzyszonego prawa płynięcia (por. [21b], [96c]).

7.3. Sprezyzowanie równania powierzchni granicznej jest jednym z podstawowych problemów teorii nośności granicznej, gdyż znając je określamy równocześnie kryterium uplastycznienia, jak i na podstawie (7.1) ruch tworzącego się (w stanie wyczerpania nośności) mechanizmu zniszczenia. W zakresie

formułowania równań powierzchni granicznej wyodrębnić można dwa podejścia. Jedno z nich polega na *transformacji warunku plastyczności*  $F(\sigma_{ij}) = 0$  z przestrzeni naprężeń do przestrzeni sił wewnętrznych (3.1), drugie natomiast *formuluje bezpośrednio zależność*  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$ , nie trzsząc się o postać warunku plastyczności «w naprężeniach». Przewagę ma jednak podejście pierwsze.

Dla zilustrowania tej metody otrzymania równania powierzchni granicznej dla powłok dokonajmy wymaganej transformacji w przypadku warunku plastyczności Hubera–Misesa, tzn.

$$(7.2) \quad \Phi = 3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - 2\sigma_0^2 = 0.$$

Stowarzyszone prawo płynięcia zastosowane do (7.2) prowadzi dla materiału nieściśliwego do następujących związków między naprężeniami a prędkościami odkształceń plastycznych:

$$(7.3) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{3\nu}(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} + \dot{\epsilon}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}), \quad \dot{\epsilon}_{33} = -\dot{\epsilon}_{\gamma\gamma}.$$

Podstawienie (7.3) do (7.2) dostarcza związku określającego parametr  $\nu$ , mianowicie:

$$(7.4) \quad \nu = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{6}}(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} + \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha}\dot{\epsilon}_{\beta\beta}).$$

Z porównania zależności (7.3) i (7.4) wynika, że dla warunku plastyczności Hubera–Misesa prędkość odkształcenia plastycznego jednoznacznie określa stan naprężenia. W teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych zachodziły odpowiednie związki (6.2) między naprężeniami a odkształczeniami. Jeśli zależności (7.2) i (7.3) wykorzystać w równaniach definiujących *siły wewnętrzne*, otrzymuje się następujący układ równań:

$$(7.5) \quad N_{\alpha\beta} = \sigma_0(\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_1 + \sigma_0(\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2,$$

$$(7.6) \quad M_{\alpha\beta} = \sigma_0(\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2 + \sigma_0(\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_3,$$

gdzie

$$(7.7) \quad I_s = (1/3\sigma_0) \int_{-H}^H (x_3^{s-1}/\nu) dx_3, \quad s = 1, 2, 3.$$

Ponieważ z (3.2) i (7.4) wynika, że  $\nu$  jest wielomianem drugiego stopnia względem  $x_3$ , to całki (7.7) można wyznaczyć. Równania (7.4) i (7.5) przedstawiają *parametryczną postać hiperpowierzchni granicznej* w przestrzeni sił wewnętrznych  $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$ . Eliminując niezależne parametry dochodzi się do bezpośredniego związku  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$ , który jednak w ogólnym przypadku nie daje się przedstawić w postaci zamkniętej. Natomiast dla *powłok sandwiczowych* otrzymuje się następujący układ równań:

$$(7.8) \quad 3n_{\alpha\beta}n_{\alpha\beta} + 3m_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta} - m_{\alpha\alpha}m_{\beta\beta} - n_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta} = 2,$$

$$(7.9) \quad 3m_{\alpha\beta}n_{\alpha\beta} - m_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta} = 0,$$

gdzie  $m_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta}$  oznaczają odpowiednie bezwymiarowe wielkości momentów i sił błonowych (por. [114a]).

Równanie powierzchni granicznej typu (7.5)-(7.6) podał A. A. ILIUSZIN [58c] wychodząc ze związków teorii odkształceniowej, a w nieco innej parametryzacji zależności te uzyskał następnie P. G. HODGE [49k], (por. też prace: W. W. RÓZDZIESTWIENSKI [104a], W. I. JERCHOW [28a, c], a dla przypadku uwzględnienia ścinania G. S. SHAPIRO [115a]). A. SAWCZUK i J. RYCHLEWSKI [114a] oprócz podania związków (7.4)-(7.5) badali geometryczną strukturę hiperpowierzchni plastyczności wykazując, że powierzchnie graniczne dla szczególnych przypadków geometrii powłok i kinematyki ich plastycznego odkształcenia otrzymuje się bądź przez odpowiednie przecięcia, bądź przez rzutowanie ogólnej hiperpowierzchni do odpowiednich podprzestrzeni.

7.4. W przypadku *odcinkowo-liniowych warunków plastyczności* bezpośrednio otrzymanie równania powierzchni granicznej w podany wyżej sposób nie jest możliwe. Ponadto dla liniowych warunków plastyczności powierzchnie graniczne nie koniecznie są liniowe (w przestrzeni sił wewnętrznych). Dla warunku Coulomba-Treski równania powierzchni granicznej w przypadku obrotowo-symetrycznych powłok podali E. T. ONAT i W. PRAGER [86a], E. T. ONAT [85a] oraz P. G. HODGE [49 a, b], a dla szczególnego przypadku powłoki walcowej D. C. DRUCKER w pionierskiej pracy z zakresu teorii nośności granicznej powłok [21a], (por. też [49d, e, f]). Dla powłok sandwichowych równania powierzchni granicznej są odcinkowo liniowe (por. P. G. HODGE [44a, i, l]), W. PRAGER [96d]).

Nieliniowość związków  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$  prowadzi w konsekwencji do nieliniowych różniczkowych równań problemów nośności granicznej powłok, a tym samym ogranicza poważnie klasę zamkniętych rozwiązań. Linearyzację równań można uzyskać przez linearyzację powierzchni granicznej, co osiąga się np. przez *zastąpienie rzeczywistej powłoki odpowiednim modelem sandwichowym* (por. JU. N. RABOTNOW [99b], W. I. ROZENBLUM [102b]).

7.5. W dążeniu do uzyskania zamkniętej postaci rozwiązań problemów brzegowych stosowaną praktyką jest używanie zamiast «dokładnych» równań hiperpowierzchni granicznych (otrzymywanych przez transformację aktualnie stosowanego warunku plastyczności) pewnych ich przybliżeń. Następuje to np. bądź przez *pominięcie wpływu niektórych sił wewnętrznych* (D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD [24a], [117a]), bądź *rozdzielenie w warunku plastyczności wpływu zginania i stanu błonowego* (tzn. zamiast np.  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 1$  stosuje się  $F_1(N_{\alpha\beta}) = C_N^2$ ,  $F_2(M_{\alpha\beta}) = C_M^2$ ,  $C_N^2 + C_M^2 = 1$ ). (W. I. ROZENBLUM [102b,d]). Do tej ostatniej grupy należy propozycja P. G. HODGE'A [49j], przyjmująca  $C_N = C_M = 1$ , a więc postulująca brak współdziałania momentów i sił błonowych, podobnie jak dla szczególnego przypadku powłoki walcowej przyjął to D. C. DRUCKER [21a].

Odrębną grupę powierzchni granicznych stanowią zależności odnoszące się do stanu granicznego *powłok żelbetowych* (por. Z. MRÓZ [75a], A. SAWCZUK i W. OLSZAK [113a], a również [109d] i [112a]). Traktowane one mogą być jako powierzchnie graniczne dla warunków największego naprężenia normalnego, a tym samym jako przybliżenia (z nadmiarem) odpowiednich zależności

granicznych dla warunku Coulomba-Treski. Dla powłok z materiałów o odmiennych granicach plastyczności na rozciąganie i ściskanie zagadnienie powierzchni granicznych studiowali W. PRAGER [96d] oraz R. SANKARANARAYANAN i W. OLSZAK [107a] (por. też M. ŻYCZKOWSKI [129a], jeśli chodzi o ogólne kryteria wytrzymałości konstrukcji, w tym i powłok).

Należy zaznaczyć, że stosowanie przybliżonych powierzchni granicznych w dążeniu do uzyskania zamkniętej postaci rozwiązań problemów nośności granicznej ma swoje teoretyczne uzasadnienie w podstawowych twierdzeniach omawianej tu teorii, które zostaną przytoczone dalej.

7.6. Znając *podstawowe związki teorii nośności granicznej, a więc powierzchnię graniczną, prawo płynięcia, równania statyczne i kinematyczne* można starać się rozwiązywać konkretne problemy brzegowe. Na *zupełne* rozwiązanie problemu brzegowego składa się określenie intensywności obciążenia granicznego, stowarzyszonego z nim pola sił wewnętrznych oraz ruchu konstrukcji towarzyszącego granicznej intensywności obciążenia. Uzyskano dotychczas szereg rozwiązań *zupełnych* dotyczących powłok obrotowo-symetrycznych, przy czym odnoszą się one prawie wyłącznie do przybliżonych powierzchni granicznych i stowarzyszonego z nimi prawa odkształcenia.

7.7. Zagadnienia brzegowe dla *powłok walcowych* obciążonych poprzecznie były pierwszymi rozwiązywanymi problemami nośności granicznej powłok. Równania dynamiczne i kinematyczne są tu rozdzielone, a więc zagadnienie jest «statycznie wyznaczalne», jeśli chodzi o wyznaczenie obciążenia granicznego i pola sił wewnętrznych. Rozdzielenie związków ułatwia uzyskanie efektywnych rozwiązań (A. A. ILIUSZIN [58a], D. C. DRUCKER [21a], E. T. ONAT [85a], P. G. HODGE [49a,b], G. EASON [25a], G. EASON i R. T. SHIELD [26a], A. R. RZANICYN [106c]). Porównanie warunków plastyczności dla tego typu konstrukcji i wynikające stąd wnioski odnoszące się do klasycznego w teorii powłok sprężystych «efektu brzegowego» podali A. SAWCZUK i P. G. HODGE [110a]. W. OLSZAK i A. SAWCZUK [83b] przeprowadzili analizę wpływu warunku plastyczności na nośność powłok walcowych obciążonych liniowo zmieniającym się ciśnieniem. Analizie odkształceń tego typu konstrukcji sprężysto-plastycznych poświęconych jest szereg prac (m. in. A. A. ILIUSZIN [58d], A. N. ANANINA [5a], P. G. HODGE [49b], P. KLEMENT [66a], J. A. KÖNIG [67a]). Zagadnienia jednoczesnego działania obciążeń podłużnych i poprzecznych analizowali E. T. ONAT i W. PRAGER [86a], P. G. HODGE [49a, i, l], H. COHEN i R. T. SHIELD [17a], P. G. HODGE i J. PANARELLI [52a], a uwzględniając zjawiska stateczności B. PAUL [91a], B. PAUL i P. G. HODGE [92a].

Dla *powłok obrotowo symetrycznych* równania łączące siły i te wiążące wielkości kinematyczne są, ogólnie biorąc, sprzężone. Pierwsze rozwiązanie odnoszące się do płaskiej powłoki kulistej podał S. M. FEJNBERG [30b]. P. G. HODGE uzyskał rozwiązania dla powłok kulistych rozprzegając te równania przez uproszczenie warunku plastyczności [49g]. E. T. ONAT [85c] i P. G. HODGE [49h] podali rozwiązanie dla powłoki stożkowej obciążonej siłą skupioną. T. NAKAMURA [78a] uzyskał szereg rozwiązań odnoszących się do powłok stożko-

wych i kulistych. Wszystkie rozwiązania korzystają z powierzchni granicznej dla materiału Coulomba–Treski, ewentualnie z jej przybliżenia.

7.8. Z inżynierskiego stanowiska najbardziej interesującą wielkością, której dostarcza analiza nośności granicznej, jest *obciążenie graniczne*. Znajomość obciążenia granicznego pozwala ocenić *stopień bezpieczeństwa konstrukcji* na zniszczenie, stąd też jego szczególne znaczenie, podczas gdy pole sił wewnętrznych i mechanizm zniszczenia konstrukcji są dla tego celu mniej istotne. Ponadto, jak to wynika z uzyskanych dotychczas rozwiązań i analiz ([49], [78a], [110a]), równanie powierzchni granicznej nie wpływa na wielkość obciążenia granicznego w sposób istotny, mimo iż różnice w polu sił i szybkościach przemieszczeń mogą być zasadnicze. Oszacowanie intensywności obciążenia granicznego bez konieczności podawania zupełnego rozwiązania problemu brzegowego teorii nośności granicznej jest możliwe dzięki dwu *podstawowym twierdzeniom nośności granicznej*. Znaczenie tych twierdzeń polega na dostarczeniu metod określania granic przedziału, w którym zawiera się rzeczywista nośność konstrukcji. Te *twierdzenia o «granicach obciążenia niszczonego»* zostały sformułowane przez A. A. GWOZDIEWA [45a] i następnie udowodnione przez D. C. DRUCKERA, W. PRAGERA i H. J. GREENBERGA [22a], [23a] dla materiałów sprężysto–plastycznych oraz R. HILLA [47b] (por. też. W. KOITER [68b]).

*Twierdzenie o dolnej granicy nośności.* Konstrukcja sztywno–plastyczna nie ulega zniszczeniu, co najwyżej znajduje się w stanie równowagi granicznej pod działaniem obciążenia  $p_s$ , jeśli może być znalezione jakiegokolwiek pole sił wewnętrznych, będące w równowadze z działającym obciążeniem, a nie prowadzące do przekroczenia równania powierzchni granicznej.

*Twierdzenie o górnej granicy nośności.* Konstrukcja sztywno–plastyczna ulega niszczeniu pod działaniem obciążenia  $p_k$ , jeśli może być znaleziony taki mechanizm zniszczenia, dla którego prędkość wprowadzania energii zewnętrznej nie jest mniejsza od prędkości rozpraszania energii wewnętrznej.

Przy obciążeniach  $p = \mu p_0$  narastających proporcjonalnie do jednego parametru  $\mu$  ( $p_0$  oznacza obciążenia jednostkowe) oszacowanie nośności konstrukcji od dołu odpowiada wyznaczeniu statycznie dopuszczalnego mnożnika  $\mu_s$ , przy czym  $p_s = \mu_s p_0$ . Aby wyznaczyć  $\mu_s$ , należy znaleźć takie pole sił wewnętrznych  $M_{\alpha\beta}^0(\mu_s p_0)$ ,  $N_{\alpha\beta}^0(\mu_s p_0)$ , które czyni zadość różniczkowym równaniom równowagi i statycznym warunkom brzegowym zadania, a równocześnie spełnia postulat  $F(N_{\alpha\beta}^0, M_{\alpha\beta}^0) \leq K$ , tzn. nie przekracza warunku plastyczności. Jeśli  $F$  jest jednorodną funkcją (stopnia  $\alpha$ ) składowych stanu naprężenia, to wobec liniowości  $M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}$  względem  $\mu p_0$  warunek nieprzekroczenia powierzchni plastyczności ma postać

$$(7.10) \quad \mu_s^\alpha F(N_{\alpha\beta}^0, M_{\alpha\beta}^0) \leq K.$$

Najlepszą *dolną granicę nośności* daje

$$(7.11) \quad \mu_s^\alpha = \max \frac{K}{F(N_{\alpha\beta}^0, M_{\alpha\beta}^0)}.$$

Warto zaznaczyć, że wprowadzenie do (7.10) pola sił wewnętrznych, wynikającego z rozwiązania problemu brzegowego teorii sprężystości, prowadzi do określenia jednego ze statycznie dopuszczalnych mnożnika obciążenia  $\mu_s$ . Problemy związane z wyznaczeniem najlepszych statycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia granicznego analizował S. M. FEJNBERG [30a].

Oszacowanie nośności granicznej od góry, tzn. wyznaczenie kinematycznie dopuszczalnego mnożnika obciążenia  $\mu_k$  (przy jednoparametrowych obciążeniach  $p_k = \mu_k p_0$ ), następuje przez rozpatrzenie bilansu wprowadzonej do układu i rozproszonej tam energii. Ponieważ każdy wirtualny mechanizm spełnia warunki kinematyczne nałożone na mechanizm zniszczenia, to zasada przygotowanych prędkości staje się narzędziem do oceny górnych granic nośności. Jeśli więc  $\dot{u}_i^*$  jest wirtualnym polem prędkości przemieszczania się (niesztynnego) konstrukcji, to z odpowiednich związków między przemieszczeniami a odkształceniami otrzymuje się  $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*$  oraz  $\dot{u}_{\alpha\beta}^*$ . Drugie twierdzenie teorii nośności granicznej daje zależność

$$(7.12) \quad \mu_k \int_A p_{0i} \dot{u}_i^* dA \geq \int_A (M_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*) dA,$$

przy czym całkowanie obejmuje cały obszar  $A$  powierzchni środkowej powłoki. W obszarach, gdzie następuje rozpraszanie energii wewnętrznej,  $M_{\alpha\beta}^*$  i  $N_{\alpha\beta}^*$  spełniają odpowiednie równanie powierzchni granicznej. Najlepszą ocenę nośności powłoki od góry określa następujące wyrażenie:

$$(7.13) \quad \mu_k = \min \frac{\int_A (M_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^* \dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*)}{\int_A p_{0i} \dot{u}_i^* dA}.$$

Konieczność znajomości aktualnych związków  $F(N_{\alpha\beta}^*, M_{\alpha\beta}^*) = K$  w obszarach odkształcających się plastycznie utrudnia bezpośrednie korzystanie z zależności (7.13) w praktycznych obliczeniach. Jeśli natomiast dla konstrukcji izotropowej składowe tensorów sił wewnętrznych zastąpić wielkościami  $M_{\alpha\beta} = M_0 \delta_{\alpha\beta}$ ,  $N_{\alpha\beta} = N_0 \delta_{\alpha\beta}$ , to dla wyznaczenia kinematycznego mnożnika obciążenia otrzymujemy zależność

$$(7.14) \quad \mu_k = [M_0 \int_A |\dot{\lambda}_{\alpha\alpha}^*| dA + N_0 \int_A |\dot{\lambda}_{\alpha\alpha}^*| dA] / \int_A p_{0i} \dot{u}_i^* dA.$$

W zasadzie  $M_0$  i  $N_0$  powinny być tak dobrane, aby równania  $M_0 \delta_{\alpha\beta}$  i  $N_0 \delta_{\alpha\beta}$  opisywały rzeczywistą powierzchnię graniczną, a wówczas (7.14) prowadzi do oceny nośności granicznej od góry.

Powyższa zależność stanowi podstawę kinematycznej (energetycznej) metody wyznaczania obciążenia granicznego. Jeśli wirtualny mechanizm zniszczenia konstrukcji składa się ze sztywnych ogniw połączonych obszarami uplastycznionymi (np. liniowe przeguby plastyczne), to wartość licznika w (7.4) otrzymuje się przez całkowanie dotyczące tych obszarów.

Jeżeli wielkości  $\mu_s$  i  $\mu_k$  znane są z (7.11) i (7.13), to z twierdzeń o nośności granicznej wynika, że rzeczywiste obciążenie graniczne  $p_G = \mu_G p_0$ , scharakteryzo-

wane przez mnożnik obciążenia  $\mu_G$ , zawarte jest w przedziale określonym przez

$$(7.15) \quad \mu_s \leq \mu_G \leq \mu_k.$$

7.9. Twierdzenia o granicach obciążenia wykorzystane zostały do oceny obciążenia granicznego dla *powłok kulistych* po raz pierwszy przez E. T. ONATA i W. PRAGERA [86a], P. G. HODGE [49e, g] zaś uzyskał na tej drodze szereg rozwiązań odnoszących się do kopuł kulistych. W. I. ROZENBLUM [102b] określił granice przedziału nośności *powłoki stożkowej* obciążonej równomiernym ciśnieniem. Z. MRÓZ [75a], D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD [24c, 117a], P. G. HODGE [49e, f], T. NAKAMURA [78a] oraz P. G. HODGE i C. LAKSHMIKANTHAM [50a] oszacowali nośność w kilku innych przypadkach geometrii i obciążenia *powłok obrotowo-symetrycznych* (por. też [105a]). Problem nośności przekrycia walcowego studiował na tej drodze N. M. FIALKOV [32a]; K. SZMODITS [119a] oraz T. NAKAMURA [78b] zajmowali się obciążeniem granicznym *powłok o ujemnej krzywiznie*.

A. R. RZANICYN zaproponował *uproszczoną metodę oceny nośności granicznej powłok mało wyniosłych* o dowolnej geometrii [106b]. Kilka przykładów w oparciu o tę metodę posługującą się pojęciem «skupionych odkształceń» (będących w zasadzie nieciągłościami w krzywiznach i wydłużeniach powierzchni środkowej powłoki) podano w pracach [106d, e, f, g].

Uzyskanie rozwiązań zupełnych dla powłok przy nieobrotowo-symetrycznych warunkach brzegowych związane jest z koniecznością rozpatrzenia mieszanego zagadnienia dynamiczno-kinematycznego, tzn. związki odnoszące się do pola sił nie dają się odłączyć od zależności dotyczących mechanizmu zniszczenia. W tych warunkach tylko posługiwanie się metodami przybliżonymi wydaje się jedynie właściwym podejściem do oceny nośności takich konstrukcji. Dla mechanizmów zniszczenia składających się ze sztywnych płyt połączonych wzdłuż uplastycznionych linii A. SAWCZUK [109d] podał odpowiednią postać zależności (7.14), odnoszącą się do powłok walcowych o dowolnej wyniosłości. W tym podejściu rozpraszanie energii koncentruje się na liniach *uogólnionych przegubów plastycznych*, podobnie jak w teorii linii załomów płyt, z tym że w przypadku powłok przeguby plastyczne z zasady są krzywoliniowe. Nośność graniczną przekrycia walcowego oszacował na tej drodze M. JANAS [61a].

7.10. Odrębną grupę stanowią zagadnienia nośności granicznej powłok żelbetowych, przy czym wyróżnić tu należy dwie tendencje. Jedna z nich charakteryzuje się dążeniem do uzyskania rozwiązań zupełnych w oparciu o właściwe dla żelbetu równania powierzchni granicznej, podczas gdy drugi kierunek ogranicza się wyłącznie do analizy energetycznej według zależności (7.12). Sformułowania równań *powierzchni granicznej dla żelbetowych powłok* dotyczą prace Z. MROZA [75a], A. SAWCZUKA i W. OLSZAKA [113a] oraz A. SAWCZUKA i J. A. KÖNIGA [112a]. W pracach [112a], [113a] podane są odpowiednio uzupełnienia rozwiązania problemów nośności granicznej zbiorników i silosów walcowych.

Grupa *przybliżonych rozwiązań* odnoszących się do powłok żelbetowych jest znacznie obszerniejsza. I. MENYHÁRD [71a] podał górną granicę nośności zbiornika walcowego. S. KALISZKY [64a] rozpatrywał nośność stożkowej powłoki żelbetowej. Szereg rozwiązań odnoszących się do powłok kulistych podali N. W. ACHWLEDIANI [2a, b, c], N. W. ACHWLEDIANI i W. I. SZAJSZMEŁASZWILI [3a, b], G. I. CHAZALIA [46a], A. M. OWIECZKIN [89a, b]. Cechą charakterystyczną wymienionej tu grupy prac jest ich eksperymentalno-teoretyczny charakter. Obciążenie graniczne oblicza się tu dla mechanizmów zniszczenia zaobserwowanych doświadczalnie. Szczególnie dużą liczbę doświadczeń z zakresu nośności granicznej kopuł żelbetowych zawiera praca [89b]. *Doświadczenia nad zachowaniem się przekryć walcowych* opisują: A. L. L. BAKER [10a, b], P. B. MORICE [74a], A. L. BOUMA i in. [13a, 101a], K. HRUBAN [56a], A. SAWCZUK [109d]. Badania te wskazują na stosowalność metod analizy granicznej do zagadnień powłok żelbetowych i to nawet w uproszczonej postaci (por. [62a], [65a]), jeśli nie ingerują zjawiska stateczności.

7.11. Wśród zagadnień analizy plastycznej konstrukcji wyodrębnił się specjalny kierunek dotyczący zasad *optymalnego projektowania*. Zastosowanie teorii projektowania konstrukcji plastycznych na minimum ciężaru (D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD [24a, b], R. T. SHIELD [116a], Z. MRÓZ [75b]) do zagadnień powłok walcowych dotyczą prace E. T. ONATA i W. PRAGERA [86b], W. FREIBERGERA [35a, b] oraz R. T. SHIELDA [116b]. W tym podejściu kryterium minimum ciężaru związane jest z żądaniem, aby funkcja określająca jednostkowe rozpraszanie energii przybierała stałą wartość w każdym punkcie powierzchni środkowej powłoki tzn.  $D(K_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\beta}) = \text{const}$ . Zagadnienia optymalnego projektowania powłok plastycznych dotyczą prace W. OLSZAKA i A. SAWCZUKA [83a], H. ZIEGLERA [126a] i H. ISLERA [59a], traktujące problem optymalnego projektowania bądź od strony *doboru niejednorodności*, bądź — jak to ma miejsce w dwóch ostatnich pracach — doboru grubości zapewniających zrealizowanie się wymaganego stanu naprężenia.

7.12. Ponieważ rzeczywiste materiały wykazują wzmocnienie się w miarę narastania odkształceń plastycznych, ocena nośności granicznej, przyjmująca za punkt wyjścia idealnie plastyczny model odkształcenia, nie zawsze jest wystarczająca. Jeśli rozpatrywać geometrycznie *wzmocnienie się materiału*, to oznacza ono, ogólnie biorąc, zwiększanie się i przemieszczanie powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń  $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$ , tzn.  $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = C(\kappa_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\beta}, a_i)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ), ( $i = 1, \dots, 8$ ). W tym ogólnym zapisie wyróżnić można dwa najprostsze typy *wzmocnienia*: *izotropowe*, gdy  $C = C(\kappa_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\beta})$ , oraz *kinematyczne*, gdy  $F = C = \text{const}$ . W pierwszym przypadku powierzchnia graniczna równomiernie się zwiększa. Natomiast wzmocnienie kinematyczne (W. PRAGER [96b], A. JU. ISZLINSKI [60a]) charakteryzuje się wyłącznie translacją powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń o wektor  $a_i$ . Analizy walcowych powłok plastycznych po przekroczeniu obciążenia powodującego plastyczne płynięcie dotyczą prace P. G. HODGE'A [49c], P. G. HODGE'A i S. V. NARDO, [51a], P. G. HODGE'A i F. A. ROMANO, [53a], N. PERRONE'A [93a],



N. PERRONE'A i P. G. HODGE'A [94a, b]. Zachowywanie się powłok obrotowo-symetrycznych przy kinematycznym modelu wzmocnienia badał E. T. ONAT [85b]. Zagadnień wzmocnienia w obecności pola temperatury dotyczy praca CH. HWANGA [57a].

7.13. Odrębną grupę mało zbadanych jeszcze zagadnień stanowią problemy nośności granicznej przy obecności błonowych sił ściskających, a więc problemy z pogranicza *nośności granicznej i wyboczenia*. W przypadku powłok walcowych zagadnienie nośności przy jednoczesnym zginaniu i ściskaniu rozpatrywali B. PAUL i P. G. HODGE [92a] oraz B. PAUL [91a]. Systematyczne przedstawienie omawianego problemu zawarte jest w monografii [49f].

7.14. Zjawiska *anizotropii plastycznej*, i to zarówno *strukturalnej* (związanej z wewnętrzną budową materiału), jak *konstrukcyjnej* (wywołanej przez odpowiednie kombinacje materiałów o odmiennych własnościach plastycznych), znalazły również odbicie w teorii powłok. M. SZ. MIKELADZE [73a, -e] rozpatrywał powłoki sandwiczowe z ortotropowego materiału Misesa (por. [47a]). A. SAWCZUK w oparciu o wprowadzony odcinkowo-liniowy warunek dla ciał anizotropowych podał równanie powierzchni granicznej dla powłok obrotowo symetrycznych [109a]. W przypadku anizotropowego materiału nośność graniczna konstrukcji zależy od wzajemnej orientacji głównych kierunków anizotropii i głównych kierunków krzywizn odkształconej powłoki. Związki ogólnej teorii powłok anizotropowych dla warunku plastyczności  $\Phi = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 1 = 0$  (W. OLSZAK, W. URBANOWSKI [84a]) podał A. SAWCZUK [109b, c]. Równanie powierzchni granicznej dla powłok sandwiczowych, odpowiadające związkom (7.8)-(7.9), ma w przypadku anizotropii postać

$$(7.16) \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta}(m_{\alpha\beta}m_{\gamma\delta} + n_{\alpha\beta}n_{\gamma\delta}) = 1, \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta}(m_{\alpha\beta}n_{\gamma\delta} + n_{\alpha\beta}m_{\gamma\delta}) = 0,$$

gdzie  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ ) jest tensorem modułów plastyczności o sześciu niezależnych składowych (czterech w przypadku płaskiej ortotropii por. [47a]). Z (7.16) widać, w jaki sposób anizotropia deformuje powierzchnię graniczną. Nośność graniczną ortotropowej powłoki walcowej analizował D. NIEPOSTYŃ [79a], a W. OLSZAK i A. SAWCZUK [83b, c] podali rozwiązanie odnoszące się do częściowego zniszczenia zbiornika ortotropowego. Zagadnienie «efektu brzegowego» dla walcowych powłok ortotropowych rozpatrywał M. SZ. MIKELADZE [73b] jak też zagadnienia optymalnego kształtowania tego typu konstrukcji [73e, f].

7.15. Ostatnio obserwuje się tendencję do studiowania *wplywu pola temperatury na nośność graniczną konstrukcji*. Dotychczasowe prace dotyczące powłok rozpatrują jedynie przypadki, gdy własności plastyczne materiału są niezależne od temperatury, która tym samym ma charakter obciążenia. W. S. CZERNINA [19a] podała rozkład sił wewnętrznych w pobliżu połączenia dwóch powłok walcowych z materiałów o odmiennych własnościach termicznych i plastycznych. E. T. ONAT i S. YAMANTURK analizowali stan graniczny powłoki walcowej pod działaniem dużych gradientów temperatury [88a]. Spośród zagadnień

nieobjętych niniejszym omówieniem należy wspomnieć o dynamicznej nośności konstrukcji.

#### 8. Uwagi końcowe

Niniejsza praca podając przegląd rozwijających się dyscyplin z zakresu powłok niesprężystych wymaga uzupełnienia pewnego rodzaju syntezą, wskazującą przewidywane kierunki badań. Oprócz dostarczania nowych rozwiązań problemów brzegowych odnoszących się do zagadnień bezpośrednio omówionych, rozwój badań będzie musiał objąć zagadnienia *dostosowywania się powłok sprężysto-plastycznych do zmiennych programów obciążania*. Odejście od jednoparametrycznego obciążenia pociąga za sobą konieczność innego zdefiniowania nośności granicznej konstrukcji.

Uwzględnienie zmian w geometrii konstrukcji wskutek odkształcenia się plastycznego prowadzi do badania *stateczności procesu odkształceń plastycznych*. Pojęcie stateczności zastąpi w przyszłości dotychczas stosowane pojęcie obciążenia granicznego. Nośność graniczna związana z pojawieniem się plastycznego ruchu konstrukcji nie może stanowić podstawy do oceny stopnia bezpieczeństwa konstrukcji w przypadku zaawansowanych odkształceń (w zakresie w jakim konstrukcja może je przenieść). Pojęcie stateczności procesu odkształcenia pozwoli prześledzić współdziałanie efektów zmian geometrii powłoki i wzmocnienia materiału.

Odrębną grupę zagadnień w ramach klasycznych założeń sztywno-plastyczności stanowią problemy *dynamicznych obciążeń* ciśnieniem, masą i temperaturą. Również zagadnienia *niejednorodności plastycznej* spowodowanej zmianą własności materiałów wskutek działań cieplnych, strumienia neutronów, wymagają analizy na konkretnych przykładach.

Wreszcie zagadnienia zachowywania się powłok wykonanych z materiałów *sprężysto-lepko-plastycznych* oczekuje podjęcia badań tak teoretycznych, jak i doświadczalnych.

Rzeczonych kierunków obejmujących bardzo złożone problemy jest z jednej strony pobudzany przez potrzeby techniki, z drugiej strony ma doniosłe znaczenie poznawcze.

#### Literatura cytowana w tekście

[1a] B. O. AGGARWALA, *Thermal stresses in spherical shells of viscoelastic materials*, Z. angew. Math., **40**, 1960, 482-488.

[2a] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, *К расчету железобетонных оболочек вращения по предельному равновесию*, Сообщ. АН Груз. ССР, **18**, 1957, 205-210.

[2b] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, *К расчету несущей способности сборных железобетонных куполов*, Стронтел. Мех. Расч. Соор., **5**, **3**, 1961, 15-17.

[2c] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, *О несущей способности пологих железобетонных оболочек покрытий двоякой кривизны*, Исслед. Теор. Сооруж., **11**, 1962, 253-259.

[3a] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, В.И. ШАЙШМЕЛАВИЛИ, *К расчету несущей способности оболочек*, Сообщ. АН Груз. ССР, **13**, 1952.

- [3b] Н. В. АХВЛЕДИАНИ, В. И. ШАЙШМЕЛАШВИЛИ, *К расчету оболочек двоякой кривизны по стадии разрушения*, Труды Инст. Строит. Дела АН ГССР, Тбилиси, 5, 1955, 61-71.
- [4a] T. ALFREY, *Mechanical Behavior of High Polymers*, Interscience, New York 1948.
- [5a] А. Н. АНАНИНА, *Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки при упруго-пластических деформациях*, Инж. Сборник, 18, 1954, 157-160.
- [6a] Н. Х. АРУТЮНЯН, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Гос. Изд. Тех. Теор. Лит., Москва 1952.
- [7a] Н. Х. АРУТЮНЯН, М. М. МАНУКЯН, *Ползучести составных цилиндрических труб*, Изв. АН Армянской ССР, Сер. Физ. Мат., 6, 10, 1957, 41-58.
- [7b] Н. Х. АРУТЮНЯН, М. М. МАНУКЯН, *Ползучесть сферического сосуда*, Докл. АН Армянской ССР, 27, 1958, 209-218.
- [8a] В. М. БАБИЧ, *О некоторых работах В. М. Панферова по теории упруго-пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех., 20, 1956, 767-771.
- [9a] R. W. BAILEY, *Creep relationship and their application to pipes, tubes and cylindrical parts under internal pressure*, Proc. Instn. Mech. Engrs., 164, 1951, 425-431.
- [10a] A. L. L. BAKER, *A plastic design theory for reinforced and prestressed concrete shell roofs*, Mag. Concr. Research, 4, 1950, 27-34.
- [10b] A. L. L. BAKER, *Ultimate strength theory for short reinforced concrete cylindrical shell roofs*, Mag. Concr. Research, 10, 1952, 3-8.
- [11a] M. P. BIENIEK, A. M. FREUDENTHAL, *Creep deformation and stresses in pressurized long cylindrical shells*, J. Aero/Space Sci., 27, 1960, 763-778.
- [12a] R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
- [13a] A. L. BOUMA, A. C. VAN RIEL, H. VAN KOTEN, W. J. BERANEK, *Investigations on models of eleven cylindrical shells made of reinforced and prestressed concrete*, Proc. Symp. Shell Research, Delft 1961, North Holland, Amsterdam 1961, 79-101.
- [14a] Z. BYCHAWSKI, *Creep buckling of a cylindrical panel*, Proc. World Conference on Shells, San Francisco 1962.
- [15a] C. R. CALLADINE, *The steady creep of shells: a method of analysis*, Nuclear Reactor Containment Buildings and Pressure Vessels, Proc. Symp. Glasgow 1960, Butterwords, London 1960, 411-431.
- [15b] C. R. CALLADINE, *On the creep of a wrinkle*, Creep in Structures, Springer, Berlin 1962, 245-271.
- [16a] C. R. CALLADINE, D. C. DRUCKER, *Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep*, Quart. App. l. Math., 20, 1962, 79-84.
- [17a] H. COHEN, R. T. SHIELD, *Limit analysis of cylindrical shells using approximate yield conditions*, Brown Univ., Div. Appl. Math., Rep. DA 4564/2, April 1958.
- [18a] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластическое равновесие оболочек вращения при малых осесимметрических деформациях*, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1956, 106-110.
- [18b] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластическое равновесие пологих оболочек при малых деформациях*, Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1957, 139-142.
- [18c] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластическая деформация ортотропных цилиндрических оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1957, 50-54.
- [18d] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластические деформации в тонкостенном цилиндре вблизи кольца жесткости*, Инж. Сборник, 28, 1960, 182-189.
- [18e] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластические деформации на защемленном краю тонкостенного цилиндра*, Инж. Сборник, 31, 1961, 93-100.
- [19a] В. С. ЧЕРНИНА, *Упруго-пластическая деформация сварной разнородной цилиндрической оболочки*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 1, 1960, 133-140.
- [20a] E. A. DAVIS, *Creep rupture tests for design of high-pressure steam equipment*, J. Basic Engng., 2, 1960, 453-461.
- [21a] D. C. DRUCKER, *Limit analysis of cylindrical shells under axially-symmetric loading*, Proc. 1-st Midwest Conf. Solid Mech., Urbana 1953, 158-163.

- [21b] D. C. DRUCKER, *Plasticity*, Proc. 1-st Symp. Naval Struct. Mech. (Stanford 1958), Pergamon Press, Oxford 1959, 407-455.
- [22a] D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain*, J. Appl. Mech., **18**, 1951, 371-378.
- [23a] D. C. DRUCKER, W. PRAGER, H. J. GREENBERG, *Extended limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math., **9**, 1952, 381-389.
- [24a] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussel 1956, Actes, **5**, 212-222.
- [25b] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight*, Quart. Appl. Math., **15**, 1957, 269-281.
- [26c] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*, J. Appl. Mech., **26**, 1959, 61-68.
- [25a]. G. EASON, *The load carrying capacity of cylindrical shells subjected to a ring of forces*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 1959, 169-181.
- [26a] G. EASON, R. T. SHIELD, *The influence of free ends on the load-carrying capacity of cylindrical shells*, J. Mech. Phys. Solids, **4**, 1955, 17-27.
- [27a] J. P. ELINGTON, *Creep collapse of tubes under external pressure*, Developm. and Engng. Group, U. K. Atomic Energy Author., Rep. No 162, 1960.
- [28a] М. И. ЕРХОВ, *Конечное соотношение между силами и моментами при пластической деформации оболочек*, Строит. Мех. Расч. Сооруж., № 3, 1959, 38-41.
- [28b] М. И. ЕРХОВ, *Определение несущей способности многопролетного тонкостенного трубопровода*, Вопросы теории пластичности и прочности строит. констр., Труды ЦНИИСК, Вып. 4, Москва 1962, 168-175.
- [28c] М. И. ЕРХОВ, *Симметричная деформация цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Вопросы теории пластичности и прочности строит. констр., Труды ЦНИИСК, Вып. 4, Москва 1961, 176-198.
- [29a] М. И. ЭСТРИН, *Расчет пологих осесимметрических оболочек из упруго-вязкого материала с учетом больших прогибов*, Вопросы теории пластичности и прочности строит. констр., Труды ЦНИИСК, Вып. 4, Москва 1961, 123-134.
- [30a] С. М. ФЕЙНБЕРГ, *Принцип предельной напряженности*, Прикл. Мат. Мех., **12**, 1948, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 4, 1960, 101-111.
- [30b] С. М. ФЕЙНБЕРГ, *Пластическое течение пологой оболочки для осесимметрической задачи*, Прикл. Мат. Мех., **21**, 1957, 544-549.
- [31a] М. Р. ФЕДЬДМАН, *Расчет пологих оболочек с учетом ползучести материала*, Научн. Сообщ. Днепропетр. Инж. Инст., вып. 56, 1960.
- [32a] M. N. FIALKOV, *Limit analysis of simply supported circular shell roofs*, J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, **84**, Sep. 1958, 1796.
- [33a] I. FINNIE, *Stress analysis in the presence of creep*, Appl. Mech. Rev., **13**, 1960, 705-712.
- [33b] I. FINNIE, *Steady-state creep of a thick-walled cylinder under combined axial load and internal pressure*, J. Basic Engng, **3**, 1960, 689-694.
- [34a] W. FLÜGGE, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin 1960.
- [35a]. W. FREIBERGER, *Minimum weight design of cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 576-580.
- [35b] W. FREIBERGER, *On the minimum weight design problem for cylindrical sandwich shells*, J. Aero. Sci., **24**, 1957, 847-848.
- [36a] A. M. FREUDENTAL, H. GEIRINGER, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Handbuch der Phys., **6**, 229-433, Spinger-Verlag, Berlin 1958.
- [37a]. A. E. GEMMA, *The creep deformation of symmetrically loaded circular cylindrical shells*, J. Aero Space/Sci., **27**, 1960, 953-954.
- [37b] A. E. GEMMA, *The steady creep of long pressurized cylinders*, J. Aero/Space Sci. **29**, 1962, 352-353.

- [38a] A. E. GEMMA, J. T. WARFIELD, *The creep deformation of symmetrically loaded shells*, J. Aero/Space Sci., **28**, 1961, 507-508.
- [39a] G. GERARD, A. G. GILBERT, *A critical strain approach to creep buckling of plates and shells*, J. Aero/Space Sci., **25**, 1958, 429-434, 458.
- [40a] И. С. ГЕРАСИМОВ, *Об осесимметричной упруго-пластической деформации замкнутой круговой цилиндрической оболочки*, Инж. Сборник, **28**, 1960, 241-246.
- [41a] W. H. GLANVILLE, *The creep and flow of concrete under constant load*, Building Res. Tech., Paper No 12, HMSO, London 1930.
- [42a] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Гос. Изд. Тех. Теор. Лит., Москва 1955.
- [43a] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, Н. А. НИКОЛАЕНКО, *Ползучесть и несущая способность оболочек*, Госстройиздат, Москва 1960.
- [43b] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, Н. А. НИКОЛАЕНКО, *Теория ползучести строительных материалов и ее приложения*, Гос. Изд. Лит. Стр. Арх. Стр. Матер., Москва 1960.
- [44a] Г. С. ГРИГОРЯН, *К расчету безмоментных тонких железобетонных оболочек произвольной очертания с учетом ползучести бетона*, Изв. АН Армянской ССР, Серия физ.-мат., **10**, № 4, 1957, 67-91.
- [45a] A. A. GVOZDEV, *The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation*, Inter. J. Mech. Sci., **1**, 1960, 322-335, [ros. wyd. 1936].
- [45b] А. А. ГВОЗДЕВ, *Теория предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.
- [46a] Г. И. ХАЗАЛИЯ, *Расчет пологих сферических оболочек по предельному состоянию*, Сообщ. АН Груз. ССР, **17**, 1956, 815-822.
- [47a] R. HILL, *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Univ. Press., Oxford 1950.
- [47b] R. HILL, *A note on estimating the yield point loads in a plastic-rigid body*, Phil. Mag., **43** (7), 1952, 353-355.
- [48a] H. H. HILTON, *Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin type*, Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, ASME, New York 1955, 547-553.
- [49a] P. G. HODGE, *Rigid plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **21**, 1954, 336-342.
- [49b] P. G. HODGE, *Displacements in an elastic-plastic cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 73-79.
- [49c] P. G. HODGE, *Piecewise linear isotropic plasticity applied to circular cylindrical shell with symmetrical radial loading*, J. Franklin Inst., **263**, 1957, 13-33.
- [49d] P. G. HODGE, *The linearization of plasticity problems by means of nonhomogeneous materials*, Proc. Symp. Nonhomog. Probl., Warsaw 1958, Pergamon Press, London 1959, 147-156.
- [49e] P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Rationally Symmetric Shells*, DOMIIT, Rept 1-6, Chicago 1959.
- [49f] P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill, New York 1959.
- [49g] P. G. HODGE, *The collapse load of a spherical cap*, Proc. 4th Midwest Conf. Solid Mech., Austin, Texas 1959, 108-126.
- [49h] P. G. HODGE, *Plastic analysis of circular conical shells*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 696-700.
- [49i] P. G. HODGE, *Boundary value problems in plasticity*, Proc 2nd. Symp. Naval Struct. Mech. (Providence 1960), Pergamon Press, Oxford 1960, 297-334.
- [49j] P. G. HODGE, *Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 323-331.
- [49k] P. G. HODGE, *The Mises yield condition for rotationally symmetric shells*, Quart. Appl. Math., **18**, 1961, 305-311.
- [49l] P. G. HODGE, *A comparison of yield conditions in the theory of plastic shells*, Problem in Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia, Pa, 1961, 165-177.
- [50a] P. G. HODGE, C. LAKSHMIKANTHAM, *Limit Analysis of Shallow Shells of Revolution*, DOMIIT, Rep. 1-16, Chicago 1962.

- [51a] P. G. HODGE, S. V. NARDO, *Carrying capacity of an elastic-plastic cylindrical shell with linear strain-hardening*, J. Appl. Mech., **26**, 79-85, 1958.
- [52a] P. G. HODGE, J. PANARELLI, *Interaction curves for circular cylindrical shells according to the Mises or Tresca yield criteria*, J. Appl. Mech., **29**, 1962, 375-380.
- [53a] P. G. HODGE, F. ROMANO, *Deformations of an elastic-plastic cylindrical shell with linear strain-hardening*, J. Mech. Phys. Solids, **4**, 1956, 145-161.
- [54a] N. J. HOFF, *Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformation*, Quart. Appl. Math., **12**, 1954, 49-55.
- [54b] N. J. HOFF, *Theories of creep buckling*, Proc. 3rd U.S.Nath. Congr. Appl. Mech. (Providence 1958), ASME, New York 1959, 29-49.
- [54c] N. J. HOFF, *On a critical strain approach to creep buckling of plates and shells*, J. Aero/Space Sci., **26**, 1959, 117-118.
- [55a] N. J. HOFF, W. E. JASHMAN, W. NACHBAR, *A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell under uniform external pressure*, J. Aero/Space Sci., **26**, 1959, 663-669.
- [56a] K. HRUBAN, *Skořepiny tvaru českých kleneb*, Sbornik VŠT, Brno, 20, No 83, 1951.
- [57a] CH. HWANG, *Thermal stresses in an elastic, work-hardening sphere*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 629-634.
- [58a] А. А. ИЛЮШИН, *Некоторые вопросы теории пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех., **7**, 1943, 245-272.
- [58b] А. А. ИЛЮШИН, *Приближенная теория упруго-пластических деформаций осесимметричной оболочки*, Прикл. Мат. Мех., **8**, 1944, 15-24.
- [58c] А. А. ИЛЮШИН, *Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **9**, 1945, 101-140.
- [58d] А. А. ИЛЮШИН, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва 1948.
- [59a] H. ISLER, *Eine Kuppel gleicher Festigkeit*, ZAMP, **10**, 1959, 576-578.
- [60a] А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Мат. Журн., **6**, 1954, 314-325.
- [61a] M. JANAS, *Nośność graniczna przekrycia walcowego*, Arch. Inżyn. Łądown., **8**, 1962, 365-374.
- [62a] K. W. JOHANSEN, *Critical notes on calculation and design of cylindrical shells*, Final Rep. 3rd Congr. IABSE, Liege 1948, 601-606.
- [63a] Л. М. КАЧАНОВ, *Ползучесть овальных и разностенных труб*, Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 9, 65-71.
- [63b] Л. М. КАЧАНОВ, *Приближенное решение задач установившейся ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 3, 84-95.
- [63c] Л. М. КАЧАНОВ, *Теория ползучести*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1960.
- [64a] S. KALISZKY, *Untersuchung einer Kegelstumpf-Schale aus Stahlbeton auf Grund des Traglastverfahrens*, Acta Techn. Hung., **34**, 1961, 159-175.
- [65a] G. DE KAZINCZY, *The limit design of shells*, Final Rep. 3rd Congr. IABSE, Liege 1948, 616-621.
- [66a] P. KLEMENT, *Theorie der elastisch-plastischen Zylinderschale*, Österr. Ing. Arch., **16**, 1962, 199-211.
- [67a] J. A. KÖNIG, *Stan sprężysto-plastyczny powłoki walcowej*, Rozpr. Inżyn., w druku.
- [68a] W. T. KOITER, *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with singular yield surface*, Quart. Appl. Mech., **11**, 1953, 350-354.
- [68b] W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, **1**, 1960, 167-224.
- [69a] А. П. КУЗНЕЦОВ, Л. М. КУРШИН, *Устойчивость круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести*, ПМТФ, Прикл. Мех. Тех. Физ., № 3, 1962, 66-72.
- [70a] E. H. LEE, *Stress analysis an visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Math., **2**, **13**, 1955, 183-190.
- [71a] I. MENYHARD, *Die statische Berechnung von zylindrischen Stahlbeton — Behältern auf Grund der Bruchtheorie*, Vorbericht des V Kongr. Internat. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau, Lisbon 1956, 45-48.

- [72a] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Изгиб и кручение тонкостенных цилиндрических оболочек за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех., **14**, 1950, 253-264.
- [72b] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Граничные условия при изгибе и кручении тонкостенных оболочек за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех., **14**, 1950, 537-542.
- [72c] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Прикладная теория упруго-пластических оболочек и применение ее к расчету конструкций*, Инж. Сборник, **10**, 1951, 35-70.
- [72d] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Определение несущей способности тонкостенной конструкции с учетом упрочнения материала*, Прикл. Мат. Мех., **15**, 1951, 175-182.
- [73a] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О несущей способности первоначально анизотропных оболочек*, Докл. АН СССР, **98**, 1954, 921-923.
- [73b] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О пластическом течении анизотропных оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1955, 67-80.
- [73c] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Общая теория анизотропных жестко-пластических оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, No 1, 1957, 85-94.
- [73d] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Rigid-plastic analysis of anisotropic plates and shells*, Congr. Int. Mec. Appliqué, (Bruxelles 1956), Actes, **8**, 1957.
- [73e] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Упруго-пластическое равновесие анизотропных оболочек*, Сообщ. АН Груз. ССР, **20**, 1958, 13-20.
- [73f] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Анализ веса и прочности жестко-пластических анизотропных оболочек*, Arch. Mech. Stos., **11**, 1959, 17-31.
- [73г] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О равнопрочных пластичных оболочках*, Сообщ. АН Груз. ССР **25**, 1960, 391-398.
- [74a] P. B. MORICE, *Research on concrete shell structures*, Proc. 1st Symp. Shell. Roof. Constr.) London 1952, Cem. Concr. Assoc., London 1954, 99-113.
- [75a] Z. MRÓZ, *The load-carrying capacity of orthotropic shells*, Arch. Mech. Stos., **12**, 1960, 85-107.
- [75a] Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., **19**, 1961, 127-135.
- [76a] H. MUGURUMA, *Two dimensional creep deformation of concrete*, Proc. Symp. Non-Classical Shell Problems, Warsaw 1963.
- [77a] P. M. NAGHDI, W. C. ORTHWEIN, *Response of shallow visco-elastic spherical shells to time dependent axisymmetric loads*, Quart. Appl. Math., **18**, 1960/61, 107-121.
- [78a] T. NAKAMURA, *Plastic analysis of shells of revolution under axis-symmetric loads*, Ph. D. Dissertation, Stanford Univ., 1961.
- [78b] T. NAKAMURA, *Limit analysis of non-symmetric sandwich shells*, Proc. Symp. Non-Classical Shell Problem, Warsaw 1963.
- [79a] D. NIEPOSTYN, *The limit analysis of an orthotropic circular cylinder*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956, 565-580.
- [80a] W. NOWACKI, *Transient thermal stresses in viscoelastic plates and shells*, Advances in Aeronautical Sci, Pergamon Press, Oxford 1962, 947-970.
- [81a] F. K. G. ODQVIST, *Influence of primary creep on stresses in structural parts*, Trans. Roy. Inst. Techn., No 66, 1953,
- [81b] F. K. G. ODQVIST, *Applicability of the elastic analogue to creep problems of plates, membranes and beams*, Creep in Structures, Springer, Berlin 1962, 137-160.
- [82a] F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Kriechfestigkeit metalischer Werkstoffe*, Springer, Berlin 1962.
- [83a] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Problems of limit analysis and limit design of non-homogeneous axially symmetric shells*, Proc. Symp. Concr. Shell. Roof. Constr., Oslo 1956, Teknisk Ukeblad, Oslo 1958, 249-256.
- [83b] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung*, Acta Techn. Hung., **26**, 1959, 55-77.
- [83c] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Théorie de la capacité portante des constructions non-homogènes et orthotropes*, Ann. Inst. Techn. Bat. Trav. Publ., **13**, 1960, 517-535.
- [84a] W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalised distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elasto-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956, 85-110.

- [85a] E. T. ONAT, *The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading*, Quart. Appl. Math., **13**, 1955, 67-72.
- [85b] E. T. ONAT, *Analysis of shells of revolution composed of work hardening material*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 1958, 45-59.
- [85c] E. T. ONAT, *Plastic analysis of shallow conical shells*, J. Engng Mech. Div., Proc. ASCE, 1960, No 6, **86**, 1-12.
- [86a] E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limit analysis of shells of revolution*, Proc. Ned. Akad. Wetensch., Ser. B, **57**, 1954, 534-548.
- [86b] E. T. ONAT, W. PRAGER, *Limits of economy of materials in shells*, De Ingenieur, No 10, **67**, 1955, 46-49.
- [87a] E. T. ONAT, H. YÜKSEL, *On the steady creep of shells*, Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (Providence 1958), ASME, New York 1959, 625-630.
- [88a] E. T. ONAT, S. YAMANTURK, *On thermally stressed elastic-plastic shells*, J. Appl. Mech., **29**, 1962, 108-114.
- [89a] А. М. ОВЕЧКИН, *Уравнение равновесия железобетонных куполов в стадии предельного состояния*, Научн. докл. высш. школ. Строительство, No 1, 1958, 35-46.
- [89b] А. М. ОВЕЧКИН, *Расчет железобетонных осесимметрических конструкций (оболочек)*, Гос. Изд. Лит. Стр. Арх. Стр. Матер., Москва 1961.
- [90a] В. М. ПАНФЕРОВ, *О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **13**, 1949, 79-94.
- [90b] В. М. ПАНФЕРОВ, *О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех., **16**, 1952, 319-322.
- [91a] В. PAUL, *Carrying capacity of elastic-plastic shells with various end conditions under hydrostatic pressure*, J. Appl. Mech., **26**, 1959, 553-560.
- [92a] В. PAUL, P. G. HODGE, *Carrying capacity of elastic-plastic shells under hydrostatic pressure*, Proc. 3rd US. Nat. Congr. Appl. Mech., (Providence 1958), ASME, New York 1959, 631-640
- [93a] N. PERRONE, *Strain hardening solutions to axisymmetric discs and tubes*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 45-53.
- [94a] N. PERRONE, P. G. HODGE, *Applications of consistent theory for strain hardening plastic solids*, PIBAL Rep. 403, Polyt. Inst., Brooklyn 1957.
- [94b] N. PERRONE, P. G. HODGE, *On strain-hardened circular cylindrical shells*, J. Appl. Mech. **27**, 1960, 489-495.
- [95a] H. PORITSKY, *Effect of creep on stresses in cylindrical shells*, Creep in Structures, Springer, Berlin 1962, 229-244.
- [96a] W. PRAGER, *The general theory of limit design*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. (Istanbul 1952), **2**, 1956, 65-72.
- [96b] W. PRAGER, *A new method of analysing stress and strain in work-hardening plastic solids*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 493-496.
- [96c] W. PRAGER, *Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
- [96d] W. PRAGER, *On the plastic analysis of sandwich structures*, Probl. of Continuum Mechanics SIAM, Philadelphia, Pa, 1961, 347-349.
- [97a] W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York 1951.
- [98a] И. Е. ПРОКОПОВИЧ, *О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках*, Инж. Сборник, **34**, 1956, 151-164.
- [99a] Ю. Н. РАВОТНОВ, *Равновесие упругой среды с последствием*, Прикл. Мат. Мех., **12**, 1948, 53-62.
- [99b] Ю. Н. РАВОТНОВ, *Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **15**, 1951, 167-174.
- [99c] Yu. N. RAVOTNOV, *The theory of creep and its applications*, Proc. 2nd Symp. Nav. Struct. Mech. (Providence 1960), Pergamon Press, Oxford 1960, 338-346.
- [100a] Ю. Н. РАВОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. Мат. Мех., **21**, 1957, 406-412.



- [101a] A. C. VON RIEL, W. J. BERANEK, A. L. BOUMA, *Tests on shell roof models of reinforced concrete mortar*, Proc. 2nd Symp. Shell. Roof. Constr. (Oslo 1957), Teknisk Ukeblad, Oslo 1957, 315-324.
- [102a] В. И. РОЗЕНБЛУМ, *Расчеты некоторых деталей турбин в условиях ползучести*, Котлотурбостроение, № 4, 1951.
- [102b] В. И. РОЗЕНБЛУМ, *Приближенная теория равновесия пластических оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 18, 1954, 289-302.
- [102c] В. И. РОЗЕНБЛУМ, *О приближенных уравнениях ползучести*, Изв. Акад. Наук СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 5, 1959, 157-160.
- [102d] В. И. РОЗЕНБЛУМ, *Об условии пластичности для тонкостенных оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 24, 1960, 364-366.
- [102e] В. И. РОЗЕНБЛУМ, *О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек*, ПМТФ, Ж. Прикл. Мех. Тех. Физ., № 4, 1960, 82-84.
- [103a] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Изучение ползучести вращающейся трубы на основе интегрально-операторных уравнений*, Доповиди АН УССР, № 3, 1960, 309-313.
- [103b] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Влияние фактора времени на прочность сферической оболочки подвергнутой внутреннему давлению*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 4, 1961, 124-129.
- [104a] В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, *Состояния предельного равновесия сопряжений оболочек вращения*, Научн. Сообщ., АСИА СССР, Вып. 1, Москва 1957.
- [105a] В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, М.Н. РУЧИНСКИЙ, *Несущая способность цилиндрических сосудов с коническими и сферическими днищами*, Научн. Сообщ. Всес. Инст. Строит. Магистр. Трубопроводов, Москва 1959.
- [106a] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*, Гостехиздат, Москва 1949.
- [106b] A. R. RZHNITSYN, *The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium*, IX Congr. Appl. Mech. (Brussel 1956), Actes, 6, 331-340.
- [106c] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Пластические деформации трубы при осесимметричной нагрузке*, Изд. АН СССР, ОТН, № 8, 1958, 60-65.
- [106d] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет оболочек методом предельного равновесия*, Иссл. вопр. теории пластич. прочности строит. констр., ЦНИИСК, Москва 1958, 7-35.
- [106e] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет железобетонных оболочек методом продольного равновесия*, Теория расчета и констр. железобетон. констр. ЦНИИСК, Москва 1958, 155-175.
- [106f] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет пологих оболочек методом предельного равновесия*, Строит. Мех. Расч. Сооруж., № 1, 1959, 5-11.
- [106g] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Пологие оболочки и волнистые настилы*, Научн. сообщ. АСИА СССР, Вып. 14, Москва 1960.
- [107a] R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK, *Yield surfaces for brittle plastic shells*, Proc. Symp. Non-Classical Shell Problems, Warszawa 1963.
- [108a] M. SAVE, *On yield conditions in generalised stresses*, Quart. Appl. Math., 19, 1961, 259-267.
- [109a] A. SAWCZUK, *Piece-wise linear theory of anisotropic plasticity and its application to limit analysis problems*, Arch. Mech. Stos., 11, 1959, 541-557.
- [109b] A. SAWCZUK, *Yield condition for anisotropic shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV., 8, 1960, 213-227.
- [109c] A. SAWCZUK, *On the theory of anisotropic plates and shells*, Arch. Mech. Stos., 13, 1961, 355-366.
- [109d] A. SAWCZUK, *On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells*, Shell Research North Holland, Amsterdam 1961, 217-231.
- [110a] A. SAWCZUK, P. G. HODGE, *Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst., 269, 1960, 362-374.
- [111a] A. SAWCZUK, Th. JAEGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer, Berlin 1963.

- [112a] A. SAWCZUK, J. A. KÖNIG, *Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych*, Arch. Inżyn. Łądown., **8**, 1962, 161-183.
- [113a] A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *A method of limit analysis of reinforced concrete tanks*, Proc. Int. Coll. Shell Calc. Methods, (Brussels 1961), North Holland, Amsterdam 1962, 416-437.
- [114a] A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, Arch. Mech. Stos., **12**, 1960, 29-53.
- [115a] G. S. SHAPIRO, *On yield surfaces for ideally plastic shells. Problems of Continuum Mechanics*, SIAM. Philadelphia, 1961, 414-418.
- [116a] R. T. SHIELD, *Optimum design methods for structures*, Proc. 2nd. Symp. Naval Struct. Mech. (Providence 1960). Pergamon Press, Oxford 1960, 580-591.
- [116b] R. T. SHIELD, *On the optimum design of shells*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 316-322.
- [117a] R. T. SHIELD, D. C. DRUCKER, *Limit strength of thin-walled pressure vessels with an ASME standard torispherical head*, Proc. 3rd US. Nat. Congr. Appl. Mech. (Providence 1958), ASME, New York 1959, 665-672.
- [118a] E. SUNDSTRÖM, *Creep buckling of cylindrical shells*, Trans. Roy. Inst. Techn., No 115, 1957.
- [119a] C. SZMODITS, *A hiperbolikus paraboloidhéj töresemlelete*, Epítés-és közlekedestudományi, Közlemények, **3**, No 1-2, 1959.
- [120a] С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Вынуживание при ползучести*, Прикл. Мат. Мех., **25**, 1961, 754-755.
- [121a] TEIN WAN, R. KIRK, *Creep collapse of long cylindrical shells under high temperature and external pressure*, J. Aero/Space Sci., **28**, 1961, 177-188, 208.
- [122a] E. TUNGL, *Durchschlagen einer flachen Kugelschale aus viscoelastischem Material*, Österreichisches Ing.-Arch., **16**, 1962, 286-298.
- [123a] B. F. DE VEUVEKE, *Creep Buckling, High Temperature Effects in Aircraft Structures*, AGAR Dograph 28, Pergamon Press, 1958.
- [124a] A. M. WAHL, *Analysis of creep in rotating discs based on the Tresca criterion and associated flow rule*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 231-234.
- [125a] М. А. ЗАДОЯН, *О ползучести цилиндрической трубы при высоких температурах*, Докл. АН Армянской ССР, **31**, 1960, 201-209.
- [126a] H. ZIEGLER, *Kuppeln gleicher Festigkeit*, Ing. Archiv, **26**, 1958, 378-382.
- [127a] Б. В. ЗВЕРКОВ, *Ползучесть труб, нагруженных внутренним давлением и крутящим моментом*, Теплоэнергетика, № 8, 1959, 53-57.
- [128a] M. ŻÓRAWSKI, *Determination of stresses generated in a layer and a viscoelastic closed spherical shell*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **8**, 1960, 557-563.
- [129a] M. ŻYCZKOWSKI, *Die Grenzflächen in der Austrennungstheorie*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **9**, 1961, 667-676.

## Резюме

## ВОПРОСЫ НЕУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Работа является обзором главных направлений исследований в области неупругих оболочек. Представляя основные уравнения для неупругих тел, авторы проводят дискуссию, касающуюся главных моделей вязких и пластических тел. Рассматриваются линейно-вязко-упругие оболочки. В случае нелинейной вязко-упругости рассматриваются специально вопросы стационарной ползучести. В дальнейшем авторы обсуждают теорию упруго-пластической деформации. В заключение рассматриваются задачи, касающиеся несущей способности и проектирование оболочек на предельную нагрузку.

Приводится обширный перечень литературы.

## S u m m a r y

## INELASTIC SHELL PROBLEMS

An attempt is made to survey the main trends in the field of inelastic shells. After the fundamental equations for inelastic solids being recalled, the main types of viscous and plastic response are analysed. Linearly viscoelastic shells are discussed. In nonlinear visco-elasticity special attention is paid to steady creep problems. Further, the theory of elastic-plastic deformation is discussed. Finally, the problems of limit analysis and limit design of shells are considered. Relevant reference to the literature is given.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 grudnia 1962 r.*

---



BADANIE WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH NIEKTÓRYCH TWORZYW SZTUCZNYCH

ANDRZEJ WILCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Oznaczenia

- $A$  amplituda drgań,  
 $A(\alpha)$  funkcja rozkładu własności czasowych,  
 $A_*, A_*^\infty$  stałe,  
 $a$  wielkość stałego naprężenia,  
 $a_t$  stała materiałowa,  
 $B_*, B_*^\infty$  stałe,  
 $b$  prędkość narastania naprężenia,  
 $b_j$  stała materiałowa,  
 $C, C_0, C_*$  stałe,  
 $c$  amplituda naprężenia umownego,  
 $D_*, E_*$  stałe,  
 $E$  moduł Younga,  
 $F_0$  siła obciążająca łańcuch cząstek,  
 $\varepsilon(\sigma), \sigma(\varepsilon)$  zależność pomiędzy odkształceniem a obciążeniem niezależna od czasu,  
 $G, G_*$  stałe,  
 $h$  liczba naturalna  $> 1$ , wielokrotność  $x_0 = h\bar{x}$  w rozkładzie Gaussa,  
 $K_n(x)$  zmodyfikowana funkcja Bessela rzędu  $n$ ,  
 $k$  stała Boltzmannna,  
 $L$  liczba Loschmidta,  
 $l$  liczba stopni swobody układu,  
 $m$  liczba związków doświadczalnych,  
 $N$  liczba aktywnych łańcuchów cząsteczek,  
 $n_t$  liczba jednostek monomeru w cząsteczce tworzywa,  
 $n_i$  częstość obserwowana,  
 $n_t$  częstość teoretyczna,  
 $n_0$  średnia liczba wiązań chemicznych w cząsteczce,  
 $p$  częstość zmiany obciążenia,  
 $p(x^2, l)$  prawdopodobieństwo odchylenia przypadkowego,

- $q = 1 - M/M_0$  stopień polimeryzacji, gdzie  $M$  oznacza liczbę jednostek spolimeryzowanych, a  $M_0$  ogólną liczbę cząstek przed polimeryzacją,
- $\bar{r}, r_i$  błąd średni, błąd przypadkowy,
- $T$  temperatura w skali Kelvina,
- $t$  czas,
- $\bar{x}$  wartość spodziewana zmiennej  $|x|$ ,
- $x_i$  zmienna standaryzowana,
- $z, z_0, z_s$  amplituda drgań tłumionych,
- si  $y$ , ci  $y$  sinus i kosinus całkowity wielkości  $y$ ,
- $\partial_{t, \dots, t}^j$  pochodna rzędu  $j$  względem zmiennej  $t$ ,
- $\alpha$  stała czasowa materiału, odwrotność czasu sprężystego następstwa,
- $\beta$  moduł logarytmu stopnia polimeryzacji,
- $\xi$  miara tłumienia,
- $\gamma$  stała Eulera,
- $\gamma_*, \delta_*$  przesunięcie fazowe,
- $\varepsilon$  całkowite odkształcenie jednostkowe,
- $\varepsilon_*$  odkształcenie pełzania,
- $\varepsilon_0$  odkształcenie natychmiastowe,
- $\varepsilon^*$  odkształcenie umowne, natychmiastowe,
- $\zeta$  współczynnik tłumienia,
- $\eta$  współczynnik lepkości,
- $\theta(\lambda)$  prawdopodobieństwo pęknięcia łańcucha cząsteczek,
- $\vartheta$  czas,
- $\iota$  wielokrotność, ilość wiązań chemicznych w jednostce monomeru,
- $\varkappa$  współczynnik,
- $\Lambda(\alpha), \Lambda(n)$  gęstość prawdopodobieństwa rozkładu własności czasowych,
- $\lambda = 1 + \varepsilon$  wydłużenie względne,
- $\mu$  miara rozrzutu,
- $\nu$  odchylenie średnie,
- $E(x)$  rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej  $x$ ,
- $\pi(n)$  rozkład gęstości prawdopodobieństwa zmiennej ciągłej  $n$ ,
- $\pi(\lambda)$  gęstość prawdopodobieństwa niepęknięcia,
- $\tau$  okres drgań tłumionych,
- $\sigma$  naprężenie rzeczywiste,
- $\sigma_*$  naprężenie umowne,
- $\Phi(x)$  całka prawdopodobieństwa,
- $\Psi(t)$  funkcja historii obciążenia,
- $\chi$  logarytmiczny dekrement tłumienia,
- $\Omega$  pole powierzchni.

## 2. Wstęp

Okres ubiegłych trzydziestu lat charakteryzuje znaczne wzbogacenie asortymentu materiałów konstrukcyjnych. Różnorodne i powszechne zastosowanie w wielu dziedzinach techniki zyskują materiały o szczególnych własnościach fizykalnych i mechanicznych, odmiennych często od własności klasycznych materiałów konstrukcyjnych. Szereg cech indywidualnych wyodrębnia wśród tych materiałów grupę tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek. Celem naszej pracy jest przeprowadzenie próby określenia pewnych własności tych tworzyw na drodze teoretycznej.

Jednym ze sposobów określenia właściwości badanego materiału jest podanie analogii pomiędzy zachowaniem się tego materiału a zachowaniem się innego znanego materiału lub układu, wykazującego podobne właściwości. Jest kwestią umowy, jakie związki ma odtwarzać tego rodzaju model mechaniczny. Dla przykładu M. REINER [1] podaje związki zarówno pomiędzy tensorem naprężenia i odkształcenia, jak i pomiędzy dewiatorami tych wielkości, traktując je jako prawa równorzędne. A. R. RZANICYN [2] rozważa związki pomiędzy naprężeniem a odkształceniem, podczas gdy ALFREY [3] bada jedynie zależności pomiędzy dewiatorami naprężenia i odkształcenia i uzasadnia fizycznie słuszność takiego postępowania. O ile jednak w trójosiowym stanie obciążenia może być kwestią dyskusji, ze względu na brak danych doświadczalnych, jakie związki powinny odtwarzać modele mechaniczne, to w jednoosiowym stanie obciążenia chodzi zawsze o związki pomiędzy naprężeniem i odkształceniem, co do czego są zgodni autorzy cytowanych prac [1, 2, 3],

W pracy postaramy się ustalić na drodze teoretycznej zależność pomiędzy naprężeniem, odkształceniem i czasem przyjmując do rozważań przesłanki, wynikające ze struktury fizycznej tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek oraz z pewnego układu modeli mechanicznych ciała stałego.

W pracy używać będziemy terminu «sprężyste następstwo» określając nim zjawiska, wywołane wpływem czasu bądź na obciążenie, bądź też na odkształcenie, czyli zjawiska relaksacji i opóźnienia sprężystego.

W części końcowej pracy dokonane zostanie porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi, wykazujące stosowność proponowanych zależności i wrywkowo sprawdzające słuszność teorii.

## 3. Zależności podstawowe. Modele mechaniczne ciała stałego

Modelem mechanicznym nazywamy układ pewnej liczby elementów połączonych w odpowiedni sposób, obrazujących własności sprężystości, lepkości i plastyczności. Ze względu na specyfikę rozważanych materiałów ograniczono się w pracy do modeli nie wykazujących zjawisk plastyczności. Uzyskane wyniki końcowe odpowiadają pewnemu nieliniowemu modelowi ciała lepko-sprężystego.

Najbardziej ogólną zależność reologiczną pomiędzy obciążeniem a odkształceniem w jednoosiowym stanie obciążenia można przedstawić w postaci:

$$(3.1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i \partial_i^i, \dots, t \sigma = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \partial_j^j, \dots, t \varepsilon.$$

Jeżeli wielkości  $a_i, b_j$  są funkcjami zależnymi jedynie od czasu lub stałymi, równanie (3.1) jest liniowe, natomiast jeżeli zależą one również od naprężenia lub odkształcenia, równanie staje się nieliniowe. Zazwyczaj jednak wielkości  $a_i, b_j$  traktuje się jako stałe materiałowe, a co za tym idzie, równanie (3.1) jest liniowe. Należy jednak zaznaczyć, że równanie (3.1) nawet w przypadku stałych współczynników  $a_i, b_j$  jest jedynie asymptotycznie liniowe dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wynika to z faktu, że naprężenie rzeczywiste  $\sigma$ , odniesione do odkształconego pola przekroju, jest funkcją

$$\sigma = R(\sigma_*, \varepsilon),$$

spełniającą warunek

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\sigma_*, \varepsilon) = \sigma_*,$$

wobec czego dla  $\varepsilon \neq 0$  współczynniki  $a_i, b_j$  są w wyniku zależne od odkształcenia.

Modelami mechanicznymi rządzą zależności analogiczne do (3.1), jednak wskaźniki przybierają skończone wartości:  $i, j = 0, 1, \dots, k$ ; ze względów praktycznych przyjmuje się zazwyczaj  $k \leq 2$ .

Pewnym dalszym uogólnieniem zagadnienia jest zasada superpozycji Boltzmanna, którą można zapisać w postaci

$$(3.2) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(\sigma) + \int_0^t \sigma(\vartheta) \Psi(t-\vartheta) d\vartheta$$

przy założeniu, że materiał został obciążony w chwili  $t = 0$ . Należy tu wyraźnie zaznaczyć, że związek (3.2) nawet w przypadku funkcji liniowej  $\varepsilon(\sigma)$  jest jedynie asymptotycznie liniowy z powodów omówionych w uwagach do równania (3.1). Funkcję  $\Psi$  określa się jako funkcję historii obciążenia.

W przypadku szczególnym dla

$$\Psi(t-\vartheta) = \frac{\alpha}{E} e^{-\alpha(t-\vartheta)}$$

zależność (3.2) przedstawia zachowanie się modelu standardowego ciała stałego pod wpływem obciążenia  $\sigma$ . Wielkość  $\alpha$  jest tu odwrotnością czasu sprężystego następstwa; określa się ją jako stosunek modułu Younga do współczynnika lepkości elementów występujących w modelu mechanicznym. Przypadkowi ogólniejszemu odpowiada funkcja historii obciążenia w postaci

$$(3.3) \quad \Psi(t-\vartheta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\alpha_i(t-\vartheta)},$$

gdzie  $a_i$  są dowolnymi współczynnikami.



Jak wykazał RZANICYN [2], zależność (3.2) z funkcją historii obciążenia w postaci (3.3) spełnia równanie (3.1). W przypadku szczególnym, jeżeli funkcja  $\varepsilon(\sigma)$  jest funkcją liniową, to równanie (3.2) okazuje się równoważne równaniu (3.1) ze stałymi (dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) współczynnikami.

Interpretacją mechaniczną równania (3.2) jest model zaproponowany przez T. ALFREYA [3], składający się z nieskończonej liczby połączonych szeregowo modeli standardowych ciała stałego.

Badania przeprowadzone przez ALFREYA [3] i wielu innych badaczy wykazały, że nie można dokładnie odtworzyć własności ciał rzeczywistych za pomocą pojedynczego modelu. Jest to zresztą intuicyjnie oczywiste. Celem dalszych poszukiwań może być więc jedynie model mechaniczny składający się z pewnej, najlepiej nieprzeliczalnej liczby modeli elementarnych, z których każdy wykazuje pewne własności ciała badanego.

Przybliżając wyrażenie (3.3) za pomocą całki możemy napisać

$$\Psi(t-\vartheta) = \int_0^{\infty} A(a)e^{-a(t-\vartheta)} da.$$

Można też przedstawić funkcję (3.3) inaczej, co w obliczeniach praktycznych okazuje się dogodniejsze. Mając mianowicie pewien rozkład prawdopodobieństwa występowania stałych sprężystego następstwa w materiale tworzywa  $A(a)$ , można poszukiwać funkcji historii obciążenia jako wartości spodziewanej wyrażenia

$$\frac{a}{E} e^{-a(t-\vartheta)}$$

względem funkcji rozkładu prawdopodobieństwa  $A(a)$ . Otrzymuje się w takim przypadku

$$(3.4) \quad \Psi(t-\vartheta) = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} A(a) a e^{-a(t-\vartheta)} da.$$

Związek (3.4) jako kombinacja liniowa funkcji  $\exp[-a(t-\vartheta)]$  ma takie same własności jak związek (3.3), to znaczy, zależność (3.2) z funkcją historii obciążenia (3.4) spełnia równanie (3.1). Wyrażenie funkcji historii obciążenia w postaci (3.4) używane będzie w dalszych rozważaniach.

Pozostaje do wyjaśnienia interpretacja fizyczna zależności (3.2). Zgodnie z ALFREYEM [3] omawiana zależność po wprowadzeniu funkcji historii obciążenia, podanej związkiem (3.4), przedstawia zachowanie się nieprzeliczalnego zbioru modeli mechanicznych ciała stałego pod obciążeniem  $\sigma$ . Z kolei jeden model mechaniczny, jak to wyraźnie wykazuje ALFREY [3], odpowiada przyjęciu pewnego prawa płynięcia materiału, którego najprostszym przykładem jest model cieczy Newtona, składający się z liniowego tłumika hydraulicznego. Wobec tego wzór (3.2) z funkcją historii obciążenia podaną przez (3.4) przedstawia płynięcie materiału utworzonego z nieprzeliczalnej ilości elementów,

których płynięcie jest określone prawem wynikającym z własności fizycznych modelu standardowego. Można więc stwierdzić, że wzór (3.2) z funkcją historii obciążenia (3.4) oddaje zachowanie się ciała rzeczywistego z taką dokładnością, z jaką model standardowy przedstawia prawo płynięcia rozważanych tworzyw.

Badając równowagę jednego łańcucha cząstek tworzywa pod stałym obciążeniem siłą  $F_0$  i zakładając jego powolny ruch w otaczającym ośrodku liniowo lepkiem o współczynniku lepkości  $\eta_0$  oraz wprowadzając liniową zależność pomiędzy odkształceniem i siłą otrzymuje się związek

$$F_0 = \varepsilon E_0 + \eta_0 \partial_t \varepsilon.$$

Przez  $E_0$  oznaczono tu współczynnik sprężystości łańcucha cząstek. Wprowadzając liczbę łańcuchów występujących w jednostce powierzchni i wyrażając siłę przez naprężenie można napisać

$$(3.5) \quad \bar{\sigma}_0 = \varepsilon E_0 + \eta_0 \partial_t \varepsilon.$$

Związek (3.5) jest identyczny ze związkiem opisującym zachowanie się modelu standardowego pod działaniem stałego obciążenia. Na tej podstawie można stwierdzić, że model standardowy ciała stałego dobrze przedstawia odkształcenie tworzyw o długich i poplątanych łańcuchach cząstek; można więc przypuszczać, że z podobną dokładnością zależność (3.2) z funkcją historii (3.4) przedstawia zachowanie się tworzywa rzeczywistego pod warunkiem takiego dobrania funkcji  $\Lambda(a)$  i  $\varepsilon(\sigma)$ , aby odpowiadały one związkowi rzeczywiście występującym w materiale. Trzeba więc określić funkcje  $\Lambda(a)$  i  $\varepsilon(\sigma)$  stosownie do budowy fizycznej materiału.

Przy założeniu nieściśliwości materiału i po pewnych dalszych uproszczeniach fizycznych można funkcję  $\varepsilon(\sigma)$ , przedstawiającą część sprężystą odkształcenia całkowitego i niezależną od czasu, łatwo otrzymać z zależności W. Kuhna [4] w postaci

$$(3.6) \quad \sigma(\varepsilon) = kTL \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right),$$

gdzie funkcja  $\sigma(\varepsilon)$  jest funkcją odwrotną względem funkcji  $\varepsilon(\sigma)$ .

Zależność (3.6), jakkolwiek uzyskana przy dość dużych uproszczeniach fizycznych, jest — jak wykazuje doświadczenie — w znacznej mierze zgodna z rzeczywistością nawet dla wydłużeń większych niż 100%, jeśli tylko wydłużenia takie mogą wystąpić w rozważanym materiale.

Oznaczając  $kTL = E/3$ , można otrzymać funkcję odwrotną względem (3.6) w postaci

$$(3.7) \quad \varepsilon(\sigma) = \left\{ \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{\sigma}{E} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{2} - \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{\sigma}{E} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}.$$

W przypadku bardzo małych obciążeń zamiast zależności (3.6) przyjmuje się związek liniowy

$$(3.8) \quad \sigma(\varepsilon) = 3kTL\varepsilon.$$

Definiując odkształcenie zależne od czasu jako

$$(3.9) \quad \varepsilon_* = \int_0^t \sigma(\vartheta) \Psi(t-\vartheta) d\vartheta$$

można dla małych obciążeń uzyskać zależność przybliżoną przyjmując, że naprężenie rzeczywiste jest równe naprężeniu umownemu

$$(3.10) \quad \sigma(\vartheta) = \sigma_*(\vartheta)$$

bez żadnych dalszych założeń i uproszczeń. Dla obciążeń, przy których związek (3.10) nie może być stosowany, należy w oparciu o budowę fizyczną rozważanego materiału określić naprężenie rzeczywiste w zależności od naprężenia umownego, czyli ustalić funkcję

$$(3.11) \quad \sigma(\vartheta) = R(\sigma_*).$$

W pierwszym przybliżeniu można przyjąć niezmiennosć objętości tworzywa w czasie odkształcenia, co prowadzi do związku

$$(3.12) \quad \sigma(\vartheta) = \lambda \sigma_*(\vartheta).$$

Przy wyprowadzaniu wzoru (3.12) nie ma potrzeby postulowania czegokolwiek o budowie wewnętrznej rozważanego materiału. W dalszej części pracy ustalona zostanie zależność (3.11) bez założenia stałej objętości materiału w czasie odkształcenia.

#### 4. Podstawy fizyczne doboru modelu

**4.1. Rozkład prawdopodobieństwa własności czasowych tworzyw o budowie łańcuchowej.** Wychodzimy z zależności Flory [5], określającej prawdopodobieństwo powstania łańcucha składającego się z  $n$  członów w postaci

$$II(n) = n \iota q^{(n-1)\iota} (1-q)^2.$$

Definiujemy następnie wielkość stałej  $\beta$  jako moduł logarytmu stopnia polimeryzacji, pomnożony przez liczbę wiązań chemicznych w monomerze tworzywa  $\iota$

$$\beta = |\log q| \iota \quad \text{przy} \quad q \leq 1.$$

Wprowadzając teraz warunek normalizacji rozkładu prawdopodobieństwa otrzymuje się dla dostatecznie dużych  $n$  funkcję aproksymującą gęstość prawdopodobieństwa długości łańcucha cząstek w postaci prawdopodobieństwa o rozkładzie ciągłym

$$(4.1) \quad A(n) = \beta^2 n e^{-\beta n}.$$

W celu uzyskania związku pomiędzy długością łańcucha, określoną liczbą  $n$  jego członów oraz własnościami lepkiemi roztworu takich cząsteczek łańcuchów, można przyjąć zależność Hugginsa [6] obowiązującą dla niezbyt małych  $n$  w postaci

$$(4.2) \quad \eta = 3Cn.$$

Definiując wreszcie moduł Younga jako wartość wyrażenia podanego przez R. Houwinka [7]

$$(4.3) \quad E(\lambda) = kTL \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \right)$$

w punkcie  $\lambda = 1$ , otrzymuje się wyrażenie na moduł Younga w postaci

$$E = 3kTL.$$

Wzór ten jest słuszny dla  $L$  elementów tworzących jednostkę objętości. Natomiast dla jednego elementu moduł Younga wynosi

$$(4.4) \quad E_0 = 3kT.$$

Za pomocą zależności (4.2) i (4.4) otrzymuje się wartość stałej czasowej rozważanego tworzywa w postaci

$$(4.5) \quad \alpha = \frac{3kT}{3Cn} = \frac{C_0}{n}.$$

Jest ona równa, według znanych wzorów, podanych np. w pracy Alfreya [3], odwrotności czasu sprężystego następstwa w prostym modelu mechanicznym ciała stałego.

Następnie, korzystając z zależności (4.1) i (4.5), można określić funkcję (3.4) jako

$$(4.6) \quad \Psi(t-\vartheta) = \beta^2 \frac{C_0}{E_0} \int_0^\infty \exp \left[ -\beta n - \frac{C_0}{n}(t-\vartheta) \right] dn.$$

Tutaj przyjęto wartość spodziewaną względem rozkładu prawdopodobieństwa (4.1) dla uproszczenia nie wprowadzając wyrażenia (4.5) do (4.1).

4.2. Naprężenie rzeczywiste w tworzywach sztucznych o budowie łańcuchowej. Znając naprężenie umowne można wyznaczyć wartość naprężenia rzeczywistego bez wprowadzenia warunku stałej objętości materiału w czasie odkształcenia. Wystarczy w tym celu określić naprężenie działające w materiale nie w odniesieniu do pola przekroju, lecz do liczby łańcuchów biorących udział w odkształceniu i znajdujących się w jednostce pola przekroju obciążonego.

W celu wyznaczenia liczby aktywnych łańcuchów można się posłużyć gęstością prawdopodobieństwa  $\Xi$  rozkładu długości poszczególnych łańcuchów w stanie wydłużonym, podaną przez KUHNA [4] w postaci

$$(4.7) \quad \Xi(x) = \frac{\mu}{\lambda \sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^2}.$$

Tutaj wprowadzono oznaczenie

$$\mu = \sqrt{\frac{3}{n_0}},$$

przy czym  $n_0$  jest średnią liczbą członów (wiązań) w jednej cząsteczce tworzywa. Rozkład (4.7) jest oczywiście rozkładem Gaussa.

W czasie odkształcenia najbardziej narażone na pęknięcie są łańcuchy naj- silniej wyprostowane. Stąd prawdopodobieństwo pęknięcia poddanej odkształ- ceniu próbki można określić jako

$$(4.8) \quad \theta(\lambda) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \Xi(x) dx.$$

W związku (4.8) wielkość  $x_0$  oznacza pewną długość łańcucha, powyżej której łatwo może nastąpić pęknięcie. Jako pewne przybliżenie tej wielkości można przyjąć wielokrotność wielkości spodziewanej  $|x|$  względem rozkładu (4.7) wiedząc, że zgodnie z rozkładem Gaussa tylko niewielka liczba łańcuchów może mieć długość większą od tak zdefiniowanej długości  $x_0$ .

Wykonując działanie w (4.8) otrzymuje się za pomocą całki prawdopodo- bieństwa wynik

$$(4.9) \quad \theta(\lambda) = 1 - \Phi\left(\frac{x_0}{\lambda}\right).$$

Zależność (4.9), jakkolwiek dokładna, jednak ze względu na swój charakter nie nadaje się do stosowania w praktyce. Z tego powodu należy ustalić zależ- ność przybliżoną.

Prawdopodobieństwo niepęknięcia materiału określa wzór

$$(4.10) \quad \Pi(\lambda) = 1 - \theta(\lambda) = \Phi\left(\frac{x_0}{\lambda}\right).$$

Przy wzroście wydłużenia o  $d\lambda$  zmiana tego prawdopodobieństwa wynosi

$$(4.11) \quad d\Pi(\lambda) = -\partial_\lambda \Phi\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) \frac{x_0}{\lambda^2} d\lambda.$$

Dla dostatecznie dużych  $x_0$  oraz wielkości  $\lambda$  niezbyt odbiegających od jedności można przyjąć zamiast (4.11) wartość przybliżoną

$$(4.12) \quad d\Pi(\lambda) = -\frac{G}{\lambda^2} d\lambda,$$

w której wprowadzono oznaczenie

$$(4.13) \quad G = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{n_0}{3}} \exp\left[-\left(\frac{h^2 n_0}{3\pi}\right)\right].$$

Następnie, zgodnie z prawem wielkich liczb Bernoulliego, zmiana liczby łań- cuchów przenoszących obciążenie przy zmianie wydłużenia na podstawie (4.12) wynosi:

$$(4.14) \quad dN = -GN \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Całkowanie równania (4.14) daje

$$(4.15) \quad N = C_1 e^{\frac{G}{\lambda}}.$$

Dla niezbyt wielkich odkształceń, przy  $\lambda < 2$ , rozwinięcie  $\lambda^{-1}$  w szereg i zachowanie dwóch wyrazów tego rozwinięcia prowadzi przy warunku początkowym  $N(0) = N_0$ , do zależności

$$(4.16) \quad N = N_0 e^{-G e_*}.$$

Przyjmując w (4.16) podobnie jak przy wyprowadzaniu związku (3.5) płynięcie liniowe

$$de_* = \eta \sigma_*(t) dt$$

otrzymuje się ostatecznie zależność

$$(4.17) \quad N = N_0 e^{-G \eta \sigma_0},$$

gdzie przez  $\sigma_0$  oznaczono całkę

$$(4.18) \quad \sigma_0 = \int \sigma_*(t) dt.$$

Wychodząc następnie z warunku równowagi

$$\sigma(t)N = \sigma_*(t)N_0,$$

otrzymuje się dla naprężenia rzeczywistego wzór

$$(4.19) \quad \sigma(t) = \sigma_*(t) e^{G_* \sigma_0},$$

w którym, korzystając z (4.2) i (4.13), wprowadzono oznaczenie

$$(4.20) \quad G_* = \frac{2C}{\pi} \sqrt{\frac{n_0^3}{3}} \exp \left[ -\left( \frac{h^2 n_0}{3\pi} \right) \right].$$

W ten sposób ustalono związek typu (3.11), pozwalający ostatecznie utworzyć zależność rządzącą obranym modelem mechanicznym za pomocą wzorów (3.2), (3.7), (4.6) i (4.19). Biorąc pod uwagę fakt, że naprężenie  $\sigma$ , odniesione do jednostki pola powierzchni, pozostaje do naprężenia  ${}^1\sigma_0$ , obciążającego jeden łańcuch cząsteczek w tym samym stosunku co odpowiednie moduły sprężystości  $E$  i  $E_0$ , zależność ta przybiera postać

$$(4.21) \quad \varepsilon = \varepsilon(\sigma) + \beta^2 \frac{C_0}{E} \int_0^\infty \int_0^t \sigma(\vartheta) \exp \left[ -\beta n - \frac{C_0}{n} (t - \vartheta) \right] dn d\vartheta;$$

po jednokrotnym całkowaniu otrzymujemy

$$(4.22) \quad \varepsilon = \varepsilon(\sigma) + 2 \frac{C_0 \beta}{E} \int_0^t \sigma(\vartheta) [C_0 \beta (t - \vartheta)]^{1/2} K_1 [2 \sqrt{C_0 \beta (t - \vartheta)}] d\vartheta.$$

W praktyce jednak okazuje się dogodniejsze całkowanie najpierw względem  $\vartheta$ , a następnie względem  $n$ .

## 5. Zastosowanie techniczne

5.1. Technicznie ważne rodzaje obciążenia. W rozważaniach technicznych występują zazwyczaj obciążenia dające się wyrazić lub przynajmniej aproksymować prostymi funkcjami. Najczęściej występują obciążenia typu

$$(5.1) \quad \sigma_* = a,$$

$$(5.2) \quad \sigma_* = bt,$$

$$(5.3) \quad \sigma_* = c \cos pt$$

lub też kombinacje tych funkcji. W przypadku gdy można przyjąć zależność (3.10), daje się także zastosować zasada superpozycji i wystarczy poszukiwać rozwiązań oddzielnie dla poszczególnych rodzajów obciążeń, a następnie je sumować. Postępowanie takie ma jedynie sens w przypadku szczególnym dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Drugie ograniczenie związane jest z funkcją  $\varepsilon(\sigma)$ . Dla dostatecznie małych odkształceń można wprawdzie obliczyć wielkość  $\varepsilon_*$ , lecz sumując ją z odkształceniem  $\varepsilon(\sigma)$  należy to ostatnie obliczyć bez stosowania zasady superpozycji lub też zastąpić  $\varepsilon(\sigma)$  przez zależność liniową, odwrotną do (3.8). Gdy naprężenie rzeczywiste różni się w sposób istotny od umownego, należy korzystać z zależności (4.19) bez stosowania zasady superpozycji. Zależność (4.19) wprowadzona do równania (3.9) nie daje się scałkować bez pewnych uproszczeń.

Przy poszukiwaniu naprężenia rzeczywistego można wykorzystać fakt, że  $G_* \ll 1$ . Pozwala to na ograniczenie się do pierwszych wyrazów rozwinięcia (4.19) w szereg.

Dla obciążenia (5.1) otrzymuje się w ten sposób po wykonaniu działań wzór

$$(5.4) \quad \sigma(t) = a(1 + G_* at).$$

Postępując podobnie z obciążeniem określonym przez (5.2) otrzymamy

$$(5.5) \quad \sigma(t) = bt \left( 1 + \frac{1}{2} G_* bt^2 \right).$$

Wreszcie dla obciążenia (5.3) po wykonaniu całkowania w (4.18) i uwzględnieniu jedynie pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia otrzymuje się

$$(5.6) \quad \sigma(t) = c \cos pt \left( 1 + \frac{G_* c}{p} \sin pt \right).$$

5.2. Małe obciążenia. Założymy obecnie, że przez termin «małe obciążenia» rozumieć będziemy przypadki, gdy zachodzi związek (3.10).

Dla odkształceń natychmiastowych (tak określamy odkształcenia, które — z pominięciem skończonej prędkości rozchodzenia się zaburzenia w tworzywie — można uważać za niezależne od czasu) wystarczy do spełnienia (3.10) przyjąć, że obciążenia są małe zgodnie z (3.12). Przy uwzględnieniu wpływu czasu na wielkość odkształcenia należy dodatkowo żądać, aby czas badania zjawiska był dostatecznie mały. Ogólnie stwierdzić można, że o tym, czy czas

trwania zjawiska jest dostatecznie mały, decyduje wielkość iloczynu  $C_0\beta t$ . Konkretne wartości graniczne iloczynu  $C_0\beta t$  zostaną podane przy weryfikacji doświadczalnej wyników pracy. Przy powyższych założeniach można wprowadzając związek (4.6) do (3.9) dla obciążeń (5.1), (5.2) i (5.3) określić wielkość  $\varepsilon_*$ .

Dla obciążenia określonego przez (5.1) otrzymuje się

$$(5.7) \quad \varepsilon_* = \frac{a}{E} [1 - 2(C_*t)K_2(2\sqrt{C_*t})],$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(5.8) \quad C_* = C_0\beta.$$

Dla obciążenia określonego zależnością (5.2) otrzymujemy

$$(5.9) \quad \varepsilon_* = \frac{b}{E} \left\{ t - \frac{2}{C_*} [1 - (C_*t)^{3/2} K_3(2\sqrt{C_*t})] \right\},$$

gdzie jak poprzednio wprowadzono oznaczenie (5.8).

Postępując w analogiczny sposób dla obciążenia (5.3) nie można określić wielkości  $\varepsilon_*$  w sposób ścisły. Otrzymuje się wartość przybliżoną w postaci

$$(5.10) \quad \varepsilon_* = A_* \sin pt + B_* \cos pt - \frac{2c}{E} (C_*t) K_2(2\sqrt{C_*t}),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.11) \quad A_* = \frac{C_*^2 c}{Ep^2} \left[ \text{ci} \left( \frac{C_*}{p} \right) \cos \left( \frac{C_*}{p} \right) + \text{si} \left( \frac{C_*}{p} \right) \sin \left( \frac{C_*}{p} \right) \right],$$

$$(5.12) \quad B_* = \frac{C_*^2 c}{Ep^2} \left[ \frac{p}{C_*} - \text{ci} \left( \frac{C_*}{p} \right) \sin \left( \frac{C_*}{p} \right) + \text{si} \left( \frac{C_*}{p} \right) \cos \left( \frac{C_*}{p} \right) \right].$$

Łatwo zauważyć, że ostatni wyraz w związku (5.10) dla dostatecznie dużych czasów staje się pomijalny.

5.3. Wyrażenie asymptotyczne dla małych obciążeń. Biorąc pod uwagę zależność (5.7) oraz przyjmując wyrażenie asymptotyczne na funkcję  $K_2(2\sqrt{C_*t})$  przy  $t \rightarrow \infty$ , otrzymuje się dla dużych czasów

$$(5.13) \quad \varepsilon_* = \frac{a}{E} [1 - \sqrt{\pi} (C_*t)^{3/4} e^{-2\sqrt{C_*t}}].$$

W podobny sposób można zamiast (5.8) otrzymać słuszną dla dużych czasów zależność

$$(5.14) \quad \varepsilon_* = \frac{b}{E} \left\{ t - \frac{2}{C_*} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (C_*t)^{3/4} e^{-2\sqrt{C_*t}} \right] \right\}.$$

Wreszcie dla dostatecznie dużych czasów zamiast zależności (5.10) można przyjąć

$$(5.15) \quad \varepsilon_* = A_*^\infty \cos(pt - \delta_*) - \frac{c}{E} \sqrt{\pi} (C_*t)^{3/4} e^{-2\sqrt{C_*t}},$$



gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.16) \quad A_*^\infty = \sqrt{A_*^2 + B_*^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_* = \frac{A_*}{B_*}.$$

Łatwo zauważyć, że zgodnie z zależnością (5.7), dla  $t = 0$  także i  $\varepsilon_* = 0$ , natomiast prędkość odkształcenia dana jest przez wzór

$$\partial_t \varepsilon_* = 2 \frac{aC_*}{E} (C_* t)^{1/2} K_1(2\sqrt{C_* t});$$

proceedzi ona do związku asymptotycznego dla  $t \rightarrow 0$  w postaci

$$(5.17) \quad \partial_t \varepsilon_* = \frac{aC_*}{E}.$$

Wyrażenie asymptotyczne uzyskane ze związku (5.9) daje dla małych czasów

$$(5.18) \quad \varepsilon_* = \frac{bt}{E}.$$

Za pomocą zależności (5.10) można otrzymać związek obowiązujący dla małych wartości  $t$  w postaci

$$(5.19) \quad \varepsilon_* = A_*^\infty \cos(pt - \delta_*) - \frac{c}{E}.$$

Korzystając ze związków (5.16) i wyrażeń asymptotycznych na funkcje występujące w zależnościach (5.11) i (5.12) można otrzymać dla  $p \gg 1$  wzór

$$(5.20) \quad \operatorname{tg} \delta_* = \frac{C_*}{p} \frac{1 + \frac{p}{C_*} \log \gamma \frac{C_*}{p}}{\frac{p^2}{C_*^2} + 1 - \log \gamma \frac{C_*}{p}},$$

a dla  $p \ll 1$  prostą zależność

$$(5.21) \quad \operatorname{tg} \delta_* = \operatorname{tg} \frac{C_*}{p}.$$

**5.4. Duże obciążenia.** Przez określenie «stan dużych obciążeń» rozumiemy taki stan naprężenia i odkształcenia, w którym nie [można stosować zależności (3.10); w takim przypadku należy we wzorze (3.9) zastosować związki (5.4), (5.5) i (5.6) zamiast (5.1), (5.2) i (5.3) oraz wprowadzić zależność (4.6). Otrzymuje się wtedy zamiast (5.7) zależność

$$(5.22) \quad \varepsilon_* = \frac{a}{E} \left[ 1 - 2(C_* t) K_2(2\sqrt{C_* t}) + G_* a \left\{ t - \frac{2}{C_*} [1 - (C_* t)^{3/2} K_3(2\sqrt{C_* t})] \right\} \right].$$

Podobnie zamiast (5.9) otrzymujemy

$$(5.23) \quad \varepsilon_* = \frac{b}{E} \left[ t - \frac{2}{C_*} \left\{ 1 - (C_* t)^{3/2} K_3(2\sqrt{C_* t}) \right\} + \frac{bG_*}{2C_*^2} \left\{ (C_* t)^3 - 6(C_* t)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 36(C_* t) - 148 \left[ 1 - \frac{1}{12} (C_* t)^{5/2} K_5(2\sqrt{C_* t}) \right] \right\} \right].$$

Dla obciążenia (5.6) nie udaje się, w ogólnym wypadku, otrzymać wyniku zamkniętego. Można jednak postępując podobnie jak przy rozważaniu małych obciążeń podać wyrażenie przybliżone w postaci

$$(5.24) \quad \varepsilon_* = A_* \sin pt + B_* \cos pt + D_* \sin 2pt - E_* \cos 2pt - \\ - \frac{2c}{E} (C_* t) K_2(2\sqrt{C_* t}) + \frac{2G_* c^2}{EC_*} (C_* t)^{3/2} K_3(2\sqrt{C_* t}).$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$(5.25) \quad D_* = \frac{C_*^2 G_* c^2}{8E p^3} \left[ \text{ci} \left( \frac{C_*}{2p} \right) \cos \left( \frac{C_*}{2p} \right) + \text{si} \left( \frac{C_*}{2p} \right) \sin \left( \frac{C_*}{2p} \right) \right], \\ E_* = \frac{C_*^2 G_* c^2}{8E p^3} \left[ \frac{2p}{C_*} - \text{ci} \left( \frac{C_*}{2p} \right) \sin \left( \frac{C_*}{2p} \right) + \text{si} \left( \frac{C_*}{2p} \right) \cos \left( \frac{C_*}{2p} \right) \right].$$

5.5. Wyrażenia asymptotyczne dla dużych obciążeń. Wprowadzając wyrażenia asymptotyczne dla zmodyfikowanych funkcji Bessela przy  $t \rightarrow \infty$  otrzymujemy zamiast (5.22) związek w postaci

$$(5.26) \quad \varepsilon_* = \frac{a}{E} \left[ 1 - \sqrt{\pi} (C_* t)^{3/4} e^{-2\sqrt{C_* t}} + \right. \\ \left. + G_* a \left\{ t - \frac{2}{C_*} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (C_* t)^{5/4} e^{-2\sqrt{C_* t}} \right] \right\} \right].$$

Postępując analogicznie zamiast (5.23) otrzymujemy

$$(5.27) \quad \varepsilon_* = \frac{b}{E} \left[ t - \frac{2}{C_*} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (C_* t)^{5/4} e^{-2\sqrt{C_* t}} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{bG_*}{2C_*^2} \left\{ (C_* t)^3 - 6(C_* t)^2 + 36(C_* t) - 148 \left[ 1 - \frac{1}{24} \sqrt{\pi} (C_* t)^{9/4} e^{-2\sqrt{C_* t}} \right] \right\} \right].$$

Rozważając (5.24) należy, przyjmując dostatecznie duże wartości  $t$ , pominąć odkształcenia nieokresowe. Przy takim założeniu znajdujemy

$$(5.28) \quad \varepsilon_* = A_*^\infty \cos(pt - \delta_*) + B_*^\infty \sin(2pt - \gamma_*),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.29) \quad B_*^\infty = \sqrt{D_*^2 + E_*^2}, \quad \text{tg } \gamma_* = \frac{E_*}{D_*}.$$

Wynik (5.28) można też przedstawić w postaci wzoru

$$\varepsilon_* = F_*(p, t) \cos [pt - \delta(p, t)],$$

jednak złożona budowa funkcji  $F_*(p, t)$  i  $\delta(p, t)$  uniemożliwia jego zastosowanie.

Zależność funkcji  $\operatorname{tg} \gamma_*$  od częstości drgań można otrzymać dla dostatecznie dużych częstości przy  $C_*/2p \ll 1$  w postaci

$$(5.30) \quad \operatorname{tg} \gamma_* = \frac{C_*}{2p} \frac{1 + \frac{2p}{C_*} \log \gamma \frac{C_*}{2p}}{\frac{4p^2}{C_*^2} + 1 - \log \frac{C_*}{2p} \gamma}$$

oraz dla małych częstości drgań przy  $C_*/2p \gg 1$

$$(5.31) \quad \operatorname{tg} \gamma_* = \operatorname{tg} \frac{C_*}{2p}.$$

5.6. Pole pętli histerezy mechanicznej. Pole pętli histerezy, określone związkami (5.3) i (5.28), podzielić można na dwie części zależne odpowiednio od amplitud  $A_*^\infty$  i  $B_*^\infty$ .

Dla części zależnej od amplitudy  $A_*^\infty$ , zgodnie z [2], można napisać

$$(5.32) \quad \Omega_1 = \pi c A_*^\infty \sin \delta_*.$$

Uwzględniając (5.16) otrzymuje się

$$(5.33) \quad \Omega_1 = \pi c A_*.$$

Dla części pola pętli histerezy uzależnionej od amplitudy  $B_*^\infty$  można znaleźć wyrażenie

$$(5.34) \quad \Omega_2 = \frac{8}{3} c D_*.$$

Dla wyprowadzenia tej zależności wychodzimy ze wzorów (5.5) i (5.28) zapisanych w postaci

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \cos \omega t, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 \sin (2\omega t - \delta). \end{aligned}$$

Z pierwszego z tych wzorów określa się funkcje

$$\sin 2\omega t = 2 \frac{\sigma}{\sigma_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad \cos 2\omega t = 2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 - 1,$$

które, wprowadzone w drugą z podanych zależności wyjściowych, pozwalają uzyskać krzywą pętli histerezy w postaci

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 2 \frac{\sigma}{\sigma_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2} \cos \delta - \left[2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 - 1\right] \sin \delta.$$

Używając dla uproszczenia zmiennych bezwymiarowych

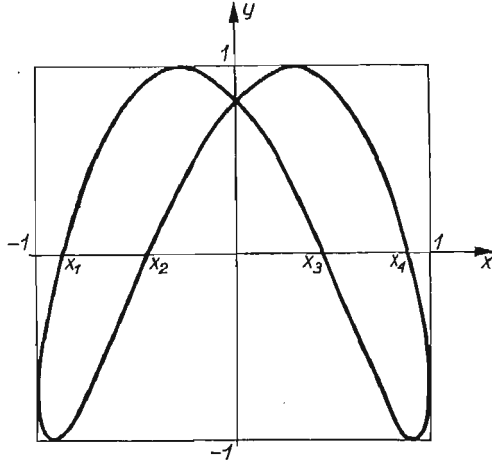
$$y = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad x = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \sin \delta = a, \quad \cos \delta = b,$$

równanie krzywej pętli histerezy można przedstawić w postaci

$$y = (1 - 2x^2) a \pm 2b \sqrt{x^2(1 - x^2)}.$$

Krzywa ta została pokazana na rys. 1, na którym wprowadzono oznaczenia

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1+b}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1-b}{2}}, \quad x_3 = \sqrt{\frac{1-b}{2}}, \quad x_4 = \sqrt{\frac{1+b}{2}}.$$



Rys. 1

przy oznaczeniach

$$(5.37) \quad w_0 = \frac{\pi A_*}{c}, \quad w_1 = \frac{8D_*}{3c^2},$$

zgodnie ze związkami (5.11) i (5.25). Korzystając ze wzorów (5.11) i (5.25) można też określić zależność pola pętli histerezy od częstości drgań. Dla niezbyt małych częstości czyli dla  $C_*/p \ll 1$ , otrzymujemy

$$(5.38) \quad \Omega = \frac{C_*^2 c^2}{Ep^2} \left\{ \left[ \log \gamma \frac{C_*}{p} + \left( \frac{C_*}{p} \right)^2 \right] \pi + \frac{G_* c}{3p} \left[ \log \gamma \frac{C_*}{2p} + \left( \frac{C_*}{2p} \right)^2 \right] \right\}.$$

5.7. Tłumienie drgań w tworzywach o łańcuchowej budowie cząsteczek. Wychodząc ze znanego dla rozważanego materiału pola powierzchni pętli histerezy można w sposób przybliżony wyznaczyć logarytmiczny dekrement tłumienia drgań.

W przypadku drgań tłumionych przy względnie słabych założeniach wychylenie można przedstawić w postaci

$$z = Ae^{-\zeta t} \cos(pt - \delta),$$

co pozwala przy ograniczeniu się do przebiegów ciągłych znaleźć zmianę amplitudy drgań dla pewnego ustalonego  $t_0$  i w jego otoczeniu jako

$$(5.39) \quad z = z_0 e^{-\zeta t},$$

gdzie  $\zeta = \partial_t f(t)$ .

Z kolei przez analogię do tłumienia liniowego logarytmiczny dekrement tłumienia przybiera postać

$$(5.40) \quad \chi = \zeta \tau$$

Wykonując całkowanie otrzymuje się pole powierzchni zamkniętej krzywą

$$\Omega = \frac{8}{3} b \varepsilon_0 \sigma_0.$$

Wzór ten po uwzględnieniu wartości współczynników  $b$ ,  $\varepsilon_0$  i  $\sigma_0$  prowadzi do (5.34). Stąd za pomocą (5.33) i (5.34) całkowite pole pętli histerezy wynosi

$$(5.35) \quad \Omega = c \left( \pi A_* + \frac{8}{3} D_* \right).$$

W celu lepszego zobrazowania wyniku można zależność (5.35) przedstawić w postaci

$$(5.36) \quad \Omega = w_0 c^2 + w_1 c^3,$$

lub

$$(5.41) \quad \chi = \log \frac{z_s}{z_{s+1}},$$

gdzie  $z_s$  określa amplitudę  $s$ -tego cyklu drgań w otoczeniu punktu  $t = t_0$ .

Następnie, definiując miarę tłumienia jako

$$(5.42) \quad \xi = \frac{z_s^2 - z_{s+1}^2}{z_s^2}$$

i posługując się związkami (5.39), (5.40) i (5.42), znajdujemy zależność pomiędzy miarą tłumienia a logarytmicznym dekrementem tłumienia

$$\xi = 1 - e^{-2\chi}.$$

Przyjmując następnie dla dostatecznie małych wartości  $\chi$  jako przybliżenie funkcji wykładniczej dwa pierwsze wyrazy jej rozwinięcia w szereg

$$e^{-2\chi} = 1 - 2\chi + \dots$$

otrzymuje się

$$(5.43) \quad \chi = \frac{1}{2} \xi.$$

Z kolei, przyjmując proporcjonalność pracy do kwadratu amplitudy, można napisać

$$(5.44) \quad z_s^2 - z_{s+1}^2 = \kappa \Omega,$$

gdzie  $\Omega$  jest określone przez (5.36), a  $\kappa$  oznacza pewien współczynnik. Zależność (5.37) należy traktować jako przybliżoną biorąc pod uwagę fakt, że w procesie tłumienia drgań swobodnych wykres tych drgań ma postać pewnej spirali, która jest jedynie zbliżona do pętli histerezy drgań wymuszonych.

Używając zależności (5.42), (5.43) i (5.44) oraz przyjmując  $z_s = c$  uzyskuje się ostatecznie

$$(5.45) \quad \chi = u_0 + u_1 c,$$

przy oznaczeniach

$$(5.46) \quad u_0 = \kappa w_0, \quad u_1 = \kappa w_1,$$

gdzie  $w_0$  i  $w_1$  określone są odpowiednio związkami (5.37).

Korzystając z poprzednio otrzymanych wyników [podanych związkiem (5.38)] i z oznaczeń (5.46), otrzymujemy w podobny sposób dla  $C_*/p \ll 1$  zależność dekrementu tłumienia od częstości drgań w postaci

$$(5.47) \quad \chi = \frac{C_*^2 \kappa}{E p^2} \left\{ \pi \left[ \log \gamma \frac{C_*}{p} + \left( \frac{C_*}{p} \right)^2 \right] + \frac{G_* c}{3p} \left[ \log \gamma \frac{C_*}{2p} + \left( \frac{C_*}{2p} \right)^2 \right] \right\}.$$

Pamiętać jednak należy, że tylko w otoczeniu punktu  $t = t_0$  można uznać logarytmiczny dekrement tłumienia za stały. W rzeczywistości jest on wyraźnie zależny od czasu.

## 6. Weryfikacja doświadczalna

6.1. Dobór stałych materiałowych. W celu sprawdzenia przydatności otrzymanych wyników do zastosowań praktycznych wykorzystano doświadczenia przeprowadzone przez ALFREYA i współpracowników, opublikowane w pracy [11].

Do weryfikacji wybrano próby przeprowadzone na technicznym nylonie 66, o ciężarze właściwym 1.08-1.14 G/cm<sup>3</sup> i o wilgotności względnej 30% w temperaturze 36.0°C, poddanym uprzednio różnorodnej obróbce mechanicznej, a co za tym idzie, o różnych właściwościach fizycznych. Próby pełzania prowadzone były przy różnych obciążeniach w aparacie umożliwiającym zachowanie stałego napięcia, niezależnie od wielkości odkształcenia.

Opublikowane wyniki są średnią arytmetyczną danych, uzyskanych dla poszczególnych punktów z kilkudziesięciu próbek.

Zastosowana technika laboratoryjna i aparatura pomiarowa pozwoliły praktycznie uwolnić się od błędów samego pomiaru. Pozostał więc jedynie błąd niejednorodności próbek, błąd nie do uniknięcia przy użyciu włókien technicznych w badaniach naukowych.

Przyjmujemy następujące wartości stałych materiałowych, występujących we wzorze (6.1).

Tablica 1

$\sigma$	455 kG/cm <sup>2</sup>	910 kG/cm <sup>2</sup>	1370 kG/cm <sup>2</sup>
$E$	22200	38200	20300
$C_*$	0,5	0,25	2,5
$G_*$	0,019	0,0101	0,028
$\varepsilon_0$	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$4,29 \cdot 10^{-2}$

W obliczeniach zastosowano wzór roboczy nadający się do użytku praktycznego w postaci

$$(6.1) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{a}{E} [1 - 2(C_*t)K_2(2\sqrt{C_*t}) + G_*at].$$

Wynika on z (5.22) przez pominięcie w nim wyrazów małych wyższego rzędu. Na podstawie danych doświadczalnych stwierdzamy, że dla

$$(6.2) \quad C_*t \leq 15,$$

zamiast zależności (5.22) można stosować związek (5.7).

Przy doborze stałych w zależnościach (5.7), (5.13), (5.22) i (5.26) bardzo pomocne są wykresy funkcji (rys. 2)

$$y = 1 - 2tK_2(2\sqrt{t})$$

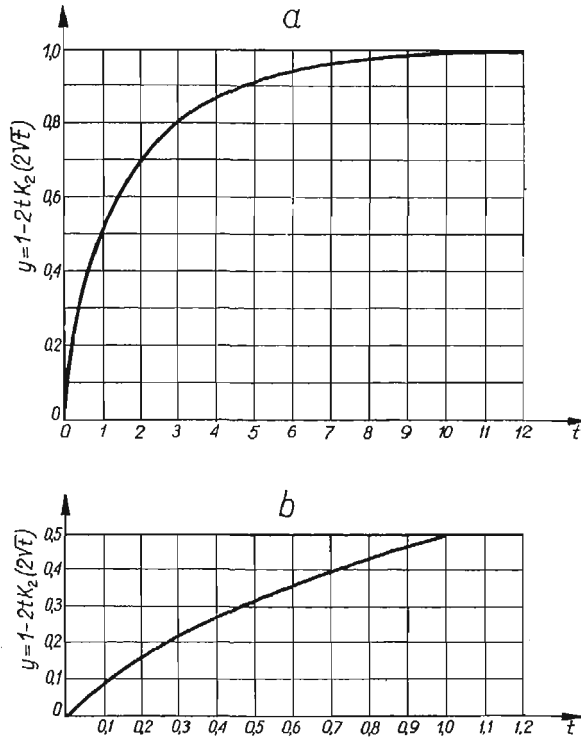
oraz funkcji

$$y = 1 - 1,77 t^{0,75} \exp[-2\sqrt{t}].$$

W praktyce najłatwiej jest dobierać poszukiwane stałe w sposób graficzny, przy czym najdogodniej jest nanosić dane doświadczalne na wykres funkcji:

$$y = 1 - 2tK_2(2\sqrt{t}).$$

Z powodu charakteru proponowanej zależności nie jest rzeczą możliwą rozwikłanie jej ze względu na  $t$ . Jednak zastosowanie metody kolejnych przy-



Rys. 2

bliżeń przy początkowym założeniu  $C_* = 1$  prowadzi dość prędko do celu.

Dla czasów określonych nierównością

$$(6.3) \quad C_* t \geq 8$$

można stosować wyrażenie (5.13) względnie, jeśli nierówność (6.2) nie jest spełniona, wyrażenie (5.26).

Przyjęcie wzoru przybliżonego (6.1) prowadzi w praktyce do błędów dużo mniejszych od 1%. Porównując wyniki doświadczalne z wynikami obliczonymi z tego wzoru znajdujemy wartość błędu średniego

$$\bar{r} = 1,47\%.$$

W celu lepszego porównania wyników doświadczalnych z wynikami wynikającymi z proponowanej zależności przeprowadzono test  $\chi^2$  Pearsona sprawdzając, czy rozkład błędów jest zgodny z rozkładem normalnym Gaussa. Chodziło

przy tym o sprawdzenie przydatności proponowanego wzoru, a nie o sprawdzenie poprawności doboru stałych w poszczególnych przypadkach. Zakładając jednakową rzetelność wykonania trzech rozważanych zbiorów doświadczeń jak również jednakową rzetelność doboru wszystkich stałych z tablicy 1, potraktowano błędy występujące w tych doświadczeniach jako należące do jednego zbioru.

Przeprowadzony test  $\chi^2$  stwierdził przydatność proponowanej zależności do opisanie wyników doświadczeń oraz określił prawdopodobieństwo uzyskania odchylenia większego niż  $\chi^2$  na

$$p(\chi^2, l) = 11,3\%.$$

W tablicy 2 zestawiono (w lewych kolumnach) wyniki uzyskane przez ALFREYA i współpracowników [11] dla każdego z obciążeń oraz (w prawych kolumnach) odpowiednie wyniki uzyskane ze związku (6.1) przy użyciu współczynników według tablicy 1. W celu uproszczenia zapisu wyniki pomnożono przez  $10^4$ .

Tablica 2

$\sigma$ kG/cm <sup>2</sup>	455		910		1370	
$t$ min	$\varepsilon_d$	$\varepsilon_t$	$\varepsilon_d$	$\varepsilon_t$	$\varepsilon_d$	$\varepsilon_t$
0.1	108	108	261	272	430	435
0.25	113	110	286	288	450	444
0.5	115	113	306	305	460	456
1.0	121	118	323	325	476	470
2.25	130	127	339	347	484	485
4.25	135	136	348	358	494	493
8.0	144	146	359	361	500	496
15.0	152	156	365	363	506	498
30.0	163	162	373	365	514	501
60.0	169	168	379	371	518	507
120.0	179	178	386	382	518	519
180.0	185	189	388	392	524	531

W tablicy 3 podano błędy względne, określone zależnością

$$r = 100 \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_t}{\varepsilon_d}$$

i uszeregowane w siedmiu klasach błędów.

Tablica 3

$-\infty-0.5$	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0	3.0- $\infty$
0.00	0.54	1.05	1.58	2.10	2.53	3.25
0.19	0.55	1.05	1.74	2.12	2.62	4.20
0.20	0.56	1.16		2.14	2.65	
0.20	0.59	1.26		2.16	2.90	
	0.61	1.33		2.31		



c.d. tablicy 3						
$-\infty-0.5$	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0	3.0- $\infty$
	0.62	1.33		2.36		
	0.70	1.39		2.48		
	0.74					
	0.80					
	0.87					
0.59	6.58	8.57	3.32	20.67	10.70	7.45

Na podstawie powyższej tablicy obliczono błąd średni  $\bar{r} = 1,47\%$ .  
 Tablica 4 służy do obliczenia wielkości  $\chi^2$ .

Tablica 4

	$r_i$	$r_i - \bar{r}$	$(r_i - \bar{r})^2$	$x_i = \frac{r_i - \bar{r}}{\nu}$	$P(x_i)$	$n_i = \frac{n_i}{36 P(x_i)}$	$n_i$	$\frac{(n_i - n_i)^2}{n_i}$
1.	0.25	-1.22	1.49	$\infty - 0.915$	0.1802	6.48	4	0.947
2.	0.75	-0.72	0.52	$-0.915 - 0.443$	0.1487	5.35	10	3.85
3.	1.25	-0.22	0.048	$-0.443 - 0.028$	0.1823	6.56	7	0.03
4.	1.75	0.28	0.078	$0.028 - 0.5$	0.1803	6.48	2	3.08
5.	2.25	0.78	0.61	$0.5 - 0.97$	0.1425	5.13	7	0.68
6.	2.75	1.28	1.54	$0.97 - 1.44$	0.0911	3.28	4	0.16
7.	3.25	1.78	3.16	$1.44 - \infty$	0.0749	2.69	2	0.176
			7.446		1.0000		36	8.923

Opracowano ją według pracy W. Romanowskiego [12].

Na jej podstawie uzyskano wielkość odchylenia średniego  $\nu = 1,06$  oraz  $\chi^2 = 8,923$ .

Liczba stopni swobody rozkładu wynosi  $l = 7 - 2 = 5$ , gdyż utworzono dwa związki określające  $\bar{r}$  i  $\nu$  na podstawie danych doświadczalnych.

Kryterium różnic nieistotnych między rozkładem Gaussa a rozkładem empirycznym jest, według [12],

$$\frac{|\chi^2 - l|}{\sqrt{2l}} < 3.$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$$\frac{|\chi^2 - l|}{\sqrt{2l}} = 1,24.$$

6.2. Dyskusja uzyskanych wyników. Wychodząc z najogólniejszych zależności reologicznych i budowy fizycznej tworzyw sztucznych o budowie łańcuchowej wyprowadziliśmy w pracy nowe zależności, określające zachowanie się wspomnianych tworzyw pod prostym obciążeniem jednoosiowym różnych technicznie ważnych typów. Należy tu zaznaczyć, że — jak to wykazuje ALFREY [3] — sposób ułożenia łańcuchów cząsteczek w przestrzeni nie ma decydującego wpływu na własności sprężyste i lepkie tworzywa. Wobec tego związki podane w pracy

powinny być obowiązujące dla wszystkich tworzyw o budowie łańcuchowej, nie wykazujących zjawiska wzmocnienia.

Biorąc pod uwagę dwa rodzaje błędów dominujących przy porównywaniu wyników teoretycznych i doświadczalnych, mianowicie błąd wynikający z niejednorodności próbek oraz błąd doboru stałych, należy wyniki podane w poprzednim punkcie uznać za pozytywne i zupełnie zadowalające.

Zastosowany test  $\chi^2$  stwierdza oczywiście jedynie dobrą zgodność proponowanych zależności z danymi doświadczalnymi, uzyskanymi w konkretnym przypadku. Jeżeli dalsze wielokrotne badania potwierdzą przydatność proponowanej teorii, to należy przypuszczać, że związki uzyskane w pracy mogą znaleźć duże zastosowanie w opisywaniu własności mechanicznych tworzyw o łańcuchowej budowie cząsteczek.

Dla konkretnego doświadczenia, to znaczy dla nylonu 66 poddanego próbie pełzania przy rozciąganiu w czasie do 3 godzin, można stwierdzić dodatkowo, że przy czasach

$$(6.4) \quad C_* t \geq 15$$

można zastosować zależność pełzania

$$(6.5) \quad \varepsilon = \varepsilon^* + \frac{G_* \sigma^2 t}{E}$$

w postaci analogicznej do proponowanej przez wielu badaczy zjawiska pełzania zależności empirycznej,

$$(6.6) \quad \varepsilon = \varepsilon^* + C \sigma^m t,$$

która daje zupełnie dobrą zgodność z doświadczeniem.

Dla czasów nie spełniających warunku (6.4), szczególnie (6.3), należy stosować zależność (6.1). Charakter jej powoduje niestety konieczność poszukiwania funkcji aproksymującej, lepiej nadającej się do obliczeń. Związek (6.1) nie pozwala, w celu szukania parametrów funkcji aproksymującej, na zastosowanie ani metody najmniejszych kwadratów, ani metod pokrewnych. Funkcję aproksymującą uzyskać jednak można w sposób przybliżony. Proponujemy stosować tutaj do obliczeń funkcję przybliżoną

$$(6.6) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{a}{E} \{ \exp[-(C_* t)^{-3/2}] + G_* a t \},$$

bardziej odpowiadającą potrzebom technicznym i dającą niewielkie błędy.

Na uwagę zasługuje wreszcie fakt, że zgodnie z zależnością (5.35) pole powierzchni pętli histerezy mechanicznej rośnie wraz z trzecią potęgą amplitudy obciążenia, co również wydaje się wskazywać na poprawność uzyskanych wyników.

Na zakończenie należy zaznaczyć, że dalszym etapem w badaniu tworzyw sztucznych o budowie łańcuchowej powinno być porównanie na podstawie dostatecznie dużej liczby przypadków wyników doświadczalnych z wynikami uzyskanymi z proponowanych związków. Konieczne będzie także wyznaczenie

szeregu stałych na drodze teoretycznej i porównanie ich z wynikami doświadczeń, gdyż obecnie stałe te wyznacza się dla każdego konkretnego przypadku oddzielnie.

Następnym krokiem do poznania własności tworzyw sztucznych byłoby poszukiwanie teoretyczne i doświadczalne sprawdzenie prawa, rządzącego zmianą objętości; jest to konieczne przy badaniu przestrzennego stanu odkształcenia. Do zagadnienia tego autor ma zamiar powrócić w swoich dalszych badaniach.

Wreszcie wydaje się konieczne znalezienie funkcji odwrotnej do (4.22) w oparciu o metody badań równań całkowych.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M. REINER, *Reologia teoretyczna*, PWN, Warszawa 1958.
- [2] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*, Москва 1948.
- [3] T. ALFREY, *Mechanical Behavior of High Polymers*, New-York-London 1948.
- [4] W. KUHN, *Über die Gestalt fadenförmiger Moleküle in Lösungen*, Kolloid Zs. 68, 2, 1934.
- [5] J. FLORY, *Molecular size distribution in linear condensation polymers*, J. of Am. Chem. Soc., 58, 1936.
- [6] M. L. HUGGINS, *The viscosity of dilute solutions of Long-Chain molecules*, J. Phys. Chem., 42, 911, 1938.
- [7] R. HOUWINK, *Elastomery i plastomery*, PWT, Warszawa 1953.
- [8] И. М. РЫЖИК, И. Ц. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва-Ленинград 1951.
- [9] W. GROBNER, N. HOFREITER, *Integraltaffel*, Springer-Verlag 1948.
- [10] Е. ЯНКЕ, Ф. ЕМДЕ, *Таблицы функций с формулами и кривыми*, Москва-Ленинград 1948.
- [11] T. ALFREY, E. CASTIFF, O'SHAUGHANESSY, *Generalized creep curves for nylon*, Text. Res. J., 23, 808, 1953.
- [12] W. ROMANOWSKI, *Zastosowanie statystyki matematycznej w doświadczalnictwie*, Warszawa 1951.

#### Резюме

#### ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ПЛАСТМАСС

Работа посвящена определению теоретическим путем зависимости напряжение — деформация для некоторого типа пластмасс, в случае осевого растяжения.

Значительные затруднения математического характера сопутствующие попыткам описания макроскопических явлений происходящих в материале на основе известной микроструктуры заставляют исследователей применять аналогии. При исследовании механических свойств реальных материалов такими аналогиями являются механические модели твердого тела. В этой работе автором выбрана механическая модель твердого тела, характеризующаяся непрерывной функцией упругого последействия. Эта функция была выведена путем рассуждений основанных на известной внутренней структуре пластмассы, так чтобы получить зависимость возможно приближенную к действительной.

Для получения соответствующей зависимости автор воспользовался законом Флори вероятного распределения молекулярного веса пластмасы (сводящимся к распределению  $\beta$ ) и формулой Хиггинса связывающей молекулярный вес пластмасы с ее вязкостью. В результате была получена зависимость между напряжением, деформацией и временем в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) + 2 \frac{C_*}{E} \int_0^t \sigma(\vartheta) [C_*(t-\vartheta)]^{1/2} K_1[2\sqrt{C_*(t-\vartheta)}] d\vartheta,$$

где  $K_1(u)$  обозначают функцию Мак Дональда, а  $C_*$  и  $E$  являются константами материала. В работе приведены также зависимости определяющие деформации для часто встречающихся на практике нагрузок и зависимости между техническим напряжением (отнесенным к сечению образца в начальный момент нагрузки), временем и действительным напряжением действующим на исследуемый элемент в произвольный момент нагрузки. Полученные результаты были сверены с опытными для случая простого ползания причем было обнаружено удовлетворительное соответствие данных, в связи с чем выведенные в работе зависимости можно считать пригодными для применения на практике.

#### S u m m a r y

#### INVESTIGATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF CERTAIN TYPES OF PLASTICS

This paper is aimed at determining by theoretical consideration the stress-strain relation for a certain type of plastics in the case of axial tension.

Since the attempts of describing the macroscopic phenomena which occur in the material, on the basis of the known microstructure, encounter considerable mathematical difficulties, the corresponding investigations are mostly carried out by employing analogies. In the case of mechanical properties of actual materials such analogies are represented by mechanical models of solids. The author selected a mechanical model of the solid body which is characterized by a continuous function of the elastic aftereffect. This function has been deduced from the known internal structure of the plastic so that the relation obtained might as well as possible approximate the actual conditions.

In order to obtain the relevant relation there have been used Flory's law of probability distribution of the molecular weight of the plastic (which reduces to the  $\beta$  distribution) and the Huggins relation connecting the molecular weight of the plastic with its viscosity. In conclusion of the paper the author obtained the relation between the stress, the strain and the time in the form

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) + 2 \frac{C_*}{E} \int_0^t \sigma(\vartheta) [C_*(t-\vartheta)]^{1/2} K_1[2\sqrt{C_*(t-\vartheta)}] d\vartheta,$$

where  $K_1(u)$  denotes the Mac Donald function, while  $C_*$  and  $E$  are material constants. Also the relations determining the strain produced by loadings which are most frequently encountered in practice have been obtained as well as the relations between the technical stress (related to the cross-section of the test piece at the beginning of loading), the time and the actual stress which acts on the tested element at an arbitrary moment of loading. The results obtained having been confronted with experiments for the case of simple tension creep showed a satisfactory compatibility, thus the relations derived in the paper can be used in practical applications.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 października 1962 r.*

KONFERENCJA NAUKOWA MECHANIKI  
OŚRODKÓW CIĄGŁYCH W KRYNICY. PRZEGLĄD REFERATÓW

Z. D ŻYGA D Ł O , M. S O K O Ł O W S K I , S. Z A H O R S K I (WARSZAWA)  
M. Ż Y C Z K O W S K I (KRAKÓW)

1. W dniach od 2 do 13 września 1962 roku odbyła się w Krynicy tradycyjna już (siódma z kolei) konferencja naukowa Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. Zgrupowała ona, jak zwykle, większość polskich pracowników nauki i inżynierów zainteresowanych problematyką mechaniki ośrodków ciągłych, w szczególności teorią sprężystości, plastyczności i wytrzymałości materiałów. W programie konferencji znalazła się także pokaźna liczba referatów poświęconych wybranym zagadnieniom teorii konstrukcji. Wśród uczestników konferencji ponad 50% stanowili pracownicy nauki z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, na resztę zaś złożyło się kilkudziesięciu zaproszonych gości ze szkół wyższych i instytutów podległych Ministerstwu Szkół Wyższych, z instytutów resortowych oraz dziesięciu gości zagranicznych (z USA, W. Brytanii, CSRS, Rumunii i NRD).

Ocena naukowych rezultatów konferencji, wobec jej nader obszernej i bogatej tematyki, wykracza poza ramy naszego przeglądu. W związku z tym ograniczymy się tutaj do krótkiego omówienia przedstawionych w Krynicy referatów kładąc nacisk na prace — naszym zdaniem — bądź to najbardziej interesujące, bądź też najbardziej charakterystyczne dla działalności różnych ośrodków i grup naukowych. W ten sposób nasze opracowanie nie będąc w stanie dać głębszej i krytycznej analizy dorobku naukowego konferencji krynickiej stanowić może materiał informacyjny, charakteryzujący kierunki badań i stopień ich zaawansowania w poszczególnych ośrodkach naukowych w Polsce.

Dla ułatwienia orientacji w bogatym materiale konferencji podzielono siedemdziesiąt wygłoszonych na niej referatów na kilka mniej lub bardziej luźno ze sobą powiązanych grup tematycznych. Do pierwszej grupy zaliczono prace z zakresu klasycznej teorii sprężystości, termosprężystości, zagadnień nieliniowych teorii sprężystości oraz fizyki ciała stałego. Grupa ta była powiązana ściśle z drugą grupą, w której umieszczono prace z zakresu zagadnień podstawowych fizyki ośrodka ciągłego ze szczególnym uwzględnieniem zagadnienia pól sprzężonych.

Następna grupa obejmowała zagadnienia podstawowe reologii, teorii pełzania i plastyczności; po przez zastosowania metody nośności granicznej w obliczaniu konstrukcji wiązała się ona tematycznie z grupą następną, która dotyczyła bezpośrednich zastosowań wyników badań podstawowych w zagadnieniach technicznych i konstrukcyjnych. Grupa ta obejmowała wybrane zagadnienia z zakresu teorii konstrukcji dźwigarów powierzchniowych i układów prętowych, sprężystych i sprężysto-plastycznych. Przegląd zamykała skromna objętościowo grupa prac eksperymentalnych w badaniach wytrzymałościowych.

2. Grupę referatów poświęconych teorii sprężystości, termosprężystości i fizyki ciała stałego otwierała praca G. C. MOISILA (Rumunia), dotycząca płaskich zagadnień teorii sprężystości ciał anizotropowych. Prace dwóch amerykańskich uczestników konferencji, E. SAIBELA i W. A. NASHA dotyczyły dużych sprężystych ugięć płyt cienkich oraz dynamicznej stateczności cienkich powłok sprężystych. E. JEŘABEK (CSRS) w swym przeglądowym referacie omówił pewne osiągnięcia uczonych czechosłowackich, dotyczące badania rozprzestrzeniania się fal uderzeniowych w konstrukcjach.

Jeśli chodzi o autorów polskich, to J. IGNACZAK (Warszawa) wygłosił referat omawiający kwestię zupełności naprężeniowych równań ruchu (Beltramiego–Mitchella) liniowej teorii sprężystości.

W programie konferencji krynickiej znalazły się także zagadnienia w minimalnym tylko stopniu reprezentowane na poprzednich konferencjach. Należą do nich zagadnienia związane z teorią skończonych odkształceń sprężystych. Na fakt ten wpłynęło bezsprzecznie systematyczne zajmowanie się tymi zagadnieniami w Zakładzie Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN, a także zwiększone zainteresowanie się tą problematyką w innych ośrodkach naukowych.

Zagadnieniem stateczności ciał sprężystych poddanych wstępnym odkształceniom skończonym zajęło się kilku autorów. W swojej pracy przeglądowej W. URBANOWSKI (Warszawa) podjął zadanie pełnego przedstawienia problemów stateczności począwszy od pierwszych prac A. E. Greena, R. S. Rivlina, R. T. Shielda, E. W. Wilkesa, A. J. M. Spencera i innych, aż do ostatnich wyników uzyskanych w kraju. Zagadnienie stateczności rozważano nakładając na ciało, poddane wstępnym odkształceniom skończonym, pewne dodatkowe małe odkształcenia i rozwiązując następnie odpowiedni problem brzegowy. Dla układów zachowawczych sposób ten umożliwia obliczenie krytycznych wartości parametrów, przy których nie jest już możliwa trwała równowaga ciała wstępnie odkształconego. Na drodze tej rozwiązano zagadnienia stateczności rozciąganej i skręcającej rury kołowej, walców i płyt rozciąganych lub ściskanych na swoich obwodach, stateczności pasma rozciągane itp.

W tej samej grupie tematycznej przedstawiono również dwie oryginalne prace poświęcone zagadnieniu stateczności. W pierwszej z nich pt. «Wariowane stany dużych odkształceń membran» GUO-ZHONG-HENG (Warszawa), w oparciu o założenia teorii membran, określił stan bliski stanowi odkształcenia membrany wyznaczając pierwsze wariacje wszystkich wielkości charakteryzujących jej odkształcenie. W ten sposób zagadnienie stateczności sprowadzone zostało do rozwiązania układu równań liniowych z trzema niewiadomymi składowymi wariacji wektora położenia.

Następna praca przedstawiona przez Z. WESOŁOWSKIEGO (Warszawa) rozwiązuje zagadnienie stateczności walca kołowego poddanego skończonemu rozciąganiu w kierunku osi. Dla walca wykonanego z materiału nieliniowo sprężystego i nieściśliwego określono stan naprężenia, a następnie nałożono na niego dodatkowy układ małych odkształceń niejednorodnych sprowadzając w ten sposób zagadnienie do problemu brzegowego, którego wartości własne są poszukiwanymi wydłużeniami krytycznymi. Rozwiązanie uzyskano korzystając z szeregów trygonometrycznych; szczegółowa dyskusja przeprowadzona została na konkretnym przykładzie liczbowym.

S. ZAHORSKI (Warszawa) zajął się zbudowaniem równań teorii dużych odkształceń sprężystych w powiązaniu z geometrią ciała nieodkształconego. Przedstawiony przez autora sposób rozwiązywania zagadnienia brzegowego znajduje zastosowanie w takich przypadkach, w których nie udaje się przewidzieć *a priori* geometrii ciała odkształconego nawet z dokładnością do pewnych dowolnych funkcji lub parametrów. Określono warunki równowagi i warunki brzegowe, warunek nieściśliwości, pracę przygotowaną i równania fizyczne oraz wykazano ich powiązanie z zależnościami stosowanymi w metodach odwrotnych i półodwrotnych.

Druga praca GUO-ZHONG-HENGA dotyczyła pochodnej czasowej tensorów w mechanice kontinuum. Autor poddał w niej krytycznej analizie różne definicje pochodnych czasowych, wprowadzanych głównie przy formułowaniu równań konstytutywnych ośrodków reologicznych. Opierając się na pewnych sześciu własnościach, jakimi — zdaniem autora — powinna charakteryzować się pochodna czasowa tensora, oraz eliminując część bierną danego tensora, pochodzącą od obrotu cząstki kontinuum, zdefiniowano ogólną pochodną czasową tensora względnie, tzw. pochodną konstytutywną. W szczególnych przypadkach definicja ta pokrywa się z definicją Zaremby i Jaumanna.

Cz. WOŹNIAK (Gliwice) w pracy pt. «Odkształcenia skończone ośrodka ciągłego w ujęciu teorii grup» rozważał sposób opisu dużych odkształceń ośrodka ciągłego, otwierający nowe możliwości. Zamiast odwzorowań punktowo-punktowych przestrzeni za punkt wyjścia przyjęto odpowiednie przekształcenia tensorów metrycznych dla ośrodka odkształconego i nieodkształconego. Przy ustalonej metryce ośrodka nieodkształconego przekształcenia takie tworzą grupę otrzymywaną na drodze holomorficznego odwzorowania pewnej grupy afinorów nieosobliwych. Rozkładając pełną grupę

liniową otrzymano trzy podgrupy przekształceń anizometrycznych, określające odkształcenia równoobjętościowe i odkształcenia zachowujące kąty między liniami współrzędnych. Proponowany opis odkształcenia zastosowano w przykładzie dużych odkształceń powłoki cienkościennej.

Tematem pracy P. WILDEGO (Gdańsk) były skończone odkształcenia termiczne w cienkich płytach o zerowej sztywności zginania. Stan naprężenia w płycie wyznaczono z warunku, aby — niezależnie od zmiany tensora metrycznego powierzchni ogrzewanej płyty — powierzchnia płyty pozostała euklidesowa. W ogólnym przypadku powierzchnia płyty stałaby się powierzchnią Riemanna. W szczególności dla płyt kołowo-symetrycznych i pasm płytowych zanalizowano zagadnienie odprowadzenia ciepła z powierzchni oraz rozważono rozwiązania uwzględniające wyłącznie efekty drugiego rzędu.

Bardziej klasyczny kierunek termosprężystości reprezentowała praca S. ZIELIŃSKIEGO (Łódź), który zajął się zagadnieniem stateczności płyty kołowej o brzegach swobodnych, poddanej działaniu pola temperatury. Źródło ciepła umieszczone wewnątrz płyty kołowej może, przy określonej wydajności, spowodować wyboczenie takiej płyty. Autor zajmował się dyskusją możliwych postaci takiego wyboczenia.

Osobną grupę stanowiły cztery referaty M. MATCZYŃSKIEGO, Z. OLESIAKA, M. SOKOŁOWSKIEGO (wszyscy z Warszawy) i G. SZEFERA (Kraków). Dotyczyły one stanu naprężenia, w szczególności koncentracji naprężeń, związanych z nieciągłymi warunkami brzegowymi w teorii sprężystości. Autorzy zastosowali tu dwie różne metody rozwiązywania problemu. M. MATCZYŃSKI i M. SOKOŁOWSKI rozważali zagadnienia ściskania pasm tarczowych częściowo utwierdzonych, częściowo zaś swobodnych na krawędziach. Zagadnienia tego rodzaju dają się sprowadzić do równania całkowego (zazwyczaj osobliwego) lub do układu takich równań. W tym przypadku autorzy poszli inną drogą i omijając równania całkowe rozwiązali równoważne równania typu Wienera–Hopfa. Zastosowano przy tym wersję przybliżoną metody Wienera–Hopfa, co pozwoliło autorom otrzymać efektywne i względnie proste rozwiązanie układu równań całkowych. Zastosowana przez autorów metoda okazuje się szczególnie użyteczna wtedy, gdy sztywność podpór nie jest nieskończona (podpory typu winklerowskiego), tj. gdy równoważne równania całkowe Fredholma są drugiego rodzaju.

Nieco inaczej podeszli do zagadnienia Z. OLESIAK i G. SZEFER. Rozważali oni zagadnienia osiowo-symetryczne. Pierwsze z nich — to problem szczeliny kołowej w nieograniczonej przestrzeni złożonej z dwóch ośrodków sprężystych o różnych charakterystykach mechanicznych i termicznych. Drugi problem dotyczył nieograniczonej warstwy sprężystej opartej dołną powierzchnią na niepodatnym podłożu z wyjątkiem obszaru kołowego, w którym powierzchnia ta była swobodna od naprężeń. Zagadnienie to stanowi wyidealizowany model mogący znaleźć zastosowanie przy budowie kopalń i tuneli.

Oba wymienione zagadnienia przez zastosowanie całkowitej transformacji Hankela sprowadzone zostały do układów dualnych równań całkowych. Równania tego rodzaju przy dostatecznie prostej budowie dają się rozwiązać w sposób ścisły. W przypadku pracy G. SZEFERA zastosowano pewną metodę przybliżoną. W pracy Z. Olesiaka z powodu otrzymania układu dwóch par dualnych równań całkowych zagadnienie okazało się bardziej złożone.

Przegląd prac pierwszej grupy tematycznej kończą referaty M. ŻÓRAWSKIEGO (Warszawa) i Z. MOSSAKOWSKIEJ (Warszawa). M. ŻÓRAWSKI omawiał problem doboru najwłaściwszej geometrii kontinuum, służącej do opisu defektów siatki krystalicznej (np. dyslokacji). W literaturze dotyczącej tego tematu brak dotąd jednomyślności w tym względzie i dlatego autor podjął próbę przedyskutowania w tym aspekcie przydatności różnych geometrii, w szczególności geometrii Riemanna i geometrii przestrzeni ze skręceniem. Analiza stanu dyslokacji, będącego ciągłą funkcją położenia, oparta została na pojęciu wektora Burgersa.

Z. MOSSAKOWSKA w krótkim komunikacie omawiała pewne aspekty zagadnienia stateczności walca pod wpływem naprężeń własnych przy założeniu dużych odkształceń. Asumpt do tych rozważań dały pewne zjawiska związane z krystalizacją roztopionych metali.

3. Omówienie zagadnienia pól sprzężonych w mechanice ośrodka ciągłego, które zaliczyliśmy do drugiej grupy tematycznej, rozpoczął referat W. NOWACKIEGO (Warszawa) zatytułowany «Za-

gadnienia magneto-termosprężystości». Autor omówił w nim wyniki swych badań teoretycznych nad efektem sprzężenia w ciałach stałych trzech pól: pola elektromagnetycznego, termicznego oraz pola odkształceń sprężystych.

Złożoność efektów płynących z tego sprzężenia nie zezwala na otrzymanie rozwiązań efektywnych, dotyczących bardziej złożonych układów. Autor ograniczył się zatem do omówienia pewnych problemów jedno- i dwuwymiarowych ze szczególnym uwzględnieniem zagadnienia rozchodzenia się fali płaskiej w warstwie nieograniczonej.

W swym pierwszym referacie S. KALISKI (Warszawa) omówił cykl prac, w których rozpatruje się promieniowanie typu Czerenkowa w dielektrykach i przewodnikach przy uwzględnieniu sprzężonych efektów magneto-mechanicznych.

Zjawisko promieniowania elektronu poruszającego się w ośrodku z prędkością nadświatlną, wykryte doświadczalnie przez P. A. CZERENKOWA w 1934 r. i uzasadnione teoretycznie przez I. A. TAMMA oraz I. M. FRANKA w 1937 r., znalazło w ostatnich latach szereg zastosowań praktycznych nie tylko w fizyce cząstek o dużej energii, ale również w radiotechnice wysokich częstotliwości, astrofizyce i innych działach fizyki.

W omawianym cyklu prac rozważających promieniowanie Czerenkowa na gruncie fenomenologicznej teorii połączonych pól magneto-mechanicznych wykryto nowe jakościowo zjawiska, będące skutkiem sprzężenia pól magnetycznych i mechanicznych.

Ustalono, że cząstka naładowana, poruszająca się w cieczy dielektrycznej w polu magnetycznym z prędkością nadświatlną, emituje dwa stożki promieniowania: jeden znany uprzednio i drugi — sprzężony z polem mechanicznym, tj. ze stożkiem fali akustycznej. Stwierdzono, że promieniowanie typu Czerenkowa pojawia się również, gdy ładunek porusza się w ośrodku z prędkością podświatlną, ale naddźwiękową; powstaje wówczas jeden stożek świecenia związany ze sprzężeniem akustycznym. Źródłem takiego promieniowania może być także poruszający się z prędkością naddźwiękową lub nadświatlną impuls mechaniczny.

Z prac S. Kaliskiego wynika również,<sup>1</sup> że w dielektryku sprężystym umieszczonym w polu magnetycznym ładunek poruszający się z prędkością nadświatlną emituje trzy stożki promieniowania: jeden znany z prac dotychczasowych oraz dwa nie znane dotąd, związane ze stożkami fal sprężystych podłużnych i poprzecznych.

Podobne efekty uzyskano rozważając doskonały przewodnik sprężysty w polu magnetycznym. Okazało się przy tym, że wielkość efektu promieniowania w doskonałym przewodniku, wywołanego przez impuls mechaniczny poruszający się z prędkością naddźwiękową, może być znacznie większy od klasycznie znanego i dlatego nabiera praktycznej wartości.

W następnym referacie S. KALISKI wyprowadził równania magneto-sprężystych drgań prętów, płyt i powłok cylindrycznych. Dzięki założeniu doskonałej przewodności oraz zastosowaniu zasady płaskich przekrojów otrzymano równania ruchu i pola elektromagnetycznego w materiale we współrzędnych wektora przemieszczenia oraz współrzędnych powierzchniowych tensorów napięć Maxwella, które wyrażają oddziaływanie pola na układ drgający w próżni lub gazie. Uzyskano w ten sposób istotne uproszczenie postaci równań.

Zagadnienia te mają szerokie zastosowanie w teorii plazmotromów, plazmowodów oraz w teorii aero-magneto-flatteru rur przewodzących ciecz zjonizowaną.

W ostatniej swej pracy S. KALISKI przedstawił model ośrodka ciągłego, w którym — na skutek wprowadzenia bezwładności obrotowej punktów — występuje sześć lokalnych stopni swobody oraz istotnie niesymetryczny tensor napięć mechanicznych.

Praca referowana przez L. SOLARZA (Warszawa), a wykonana wspólnie z S. KALISKIM, jest kontynuacją uprzednich prac autorów, w których rozpatrywano flatter płyty opływanej gazem o doskonałej przewodności elektrycznej w pierwotnym polu magnetycznym. W referowanej pracy uwzględniającej skończoną przewodność elektryczną gazu rozważono w dalszym ciągu drgania płyty opływanej w przypadku, gdy pole magnetyczne jest skierowane prostopadłe do płaszczyzny płyty. Z przeprowadzonej analizy liczbowej bardzo złożonego równania częstości wynika, że skończona przewodność gazu nie ma w tym przypadku istotnego wpływu na charakter drgań; pozostają one nadal tłumione przy dowolnie dużych prędkościach opływu.



Uzyskane wyniki znaleźć mogą zastosowanie w teorii plazmowodów i innych układów sprężystych opływanych zjonizowanym gazem.

Z. DŻYGAŁO (Warszawa) zreferował pracę rozpatrującą drgania samowzbudne powłoki walcowej opływanej gazem. Powłoka ta jest wycinkiem zamkniętego walca kołowego, który na pozostałej części obwodu jest nieodkształcalny. W takim przypadku występuje sprzężenie między drganiami powłoki i opływem nie tylko w kierunku osiowym, pokrywającym się z kierunkiem opływu, lecz również w kierunku obwodowym (sprężenie poprzeczne).

W pracy tej zbadano wpływ sprzężenia poprzecznego na postać drgań oraz na wartość parametrów krytycznych stosując ścisłą (zlinearyzowaną) teorię opływu. Uzyskane wyniki porównano z zależnościami otrzymanymi po zastosowaniu asymptotycznego wyrażenia na różnicę ciśnień (przybliżenie tłokowe), nie uwzględniającego sprzężenia poprzecznego. Stwierdzono, że sprzężenie to ma istotny wpływ na parametry krytyczne przy umiarkowanych wartościach liczby Macha.

W pracy przedstawionej przez J. KACPRZYŃSKIEGO (Warszawa) podano metodę rozwiązania dynamicznego problemu ściętego stożka sprężystego. Rozwiązanie uzyskano metodą perturbacyjną traktując obszar stożka jako obszar walcowy z małym zaburzeniem. Otrzymuje się w ten sposób rozwiązanie w postaci nieskończonego szeregu funkcji własnych obszaru niezaburzonego. Współczynniki tego szeregu wyznacza się drogą rozwiązania nieskończonego układu liniowych równań algebraicznych. Podano przykład rozwiązania problemu brzegowego z warunkami przemieszczeniowymi typu Sommerfelda, a uzyskane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą perturbacyjną.

4. Pośród tradycyjnej już tematyki prac poświęconych teorii plastyczności i teorii ośrodków sprężysto-lepkich główne miejsce zajęła praca W. OLSZAKA (Warszawa) i Z. BYCHAWSKIEGO (Kraków), dotycząca kryterium zniszczenia w takich ośrodkach. Kryterium to umożliwiła przewidywanie wytrzymałości czasowej lub czasu zniszczenia materiałów lepko-sprężystych. Koncepcja M. REINERA uplastycznienia materiałów sprężystych przy maksymalnej wielkości energii sprężystej nagromadzonej w ciele nie obejmuje wielu przypadków ciał bardziej złożonych. Na przykład w warunkach pełzania zniszczenie materiału obserwuje się po upływie dostatecznie dużego czasu już przy naprężeniach niższych od granicy sprężystości. Biorąc pod uwagę całkowitą ilość energii doprowadzonej do ciała autorzy przyjęli, że zniszczenie w warunkach pełzania następuje przy określonej granicznej wartości pewnej kombinacji energii sprężystej i energii rozproszonej. W oparciu o to założenie sformułowano kryterium zniszczenia materiałów sprężysto-lepkich i zastosowano je do różnych przypadków modeli reologicznych.

Z. Mróz (Warszawa) w pracy pt. «Niestowarzyszone prawa płynięcia plastycznego» odstąpił od powszechnie przyjmowanego, stowarzyszonego z warunkiem plastyczności prawa płynięcia, nie potwierdzonego w zupełności przez badania doświadczalne. Opierając się na twierdzeniu o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego przy danych prędkościach sił powierzchniowych i przemieszczeń na powierzchni ograniczającej ciało zbadano możliwość zbudowania praw płynięcia, w których wektor plastycznego płynięcia zmienia swój kierunek przy zmianie kierunku wektora prędkości naprężenia. Dla ciał ze wzmocnieniem odstąpiono od zasady prostopadłości wektora prędkości odkształcenia do powierzchni płynięcia i rozważono przypadek prawa płynięcia, w którym «potencjał plastyczny» nie pokrywa się z warunkiem plastyczności. Zbadano problem, dla jakich funkcji wzmocnienia można stosować warunki plastyczności Coulomba-Treski oraz prawa płynięcia wynikające z warunku Hubera-Misesa, określającego potencjał plastyczny.

J. RYCHLEWSKI zajął się rozwiązaniem za pomocą szeregów potęgowych zagadnienia brzegowego Cauchy'ego dla hiperbolicznego układu równań równowagi plastycznej ośrodka niejednorodnego, znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia. W pracy tej rozważono również przypadek niejednorodności nieanalitycznej. Proponowaną metodę zastosowano do zagadnień granicznej niejednorodnego ośrodka syckiego.

Quasi-statyczny problem dla kuli grubościennnej wykonanej z materiału sprężysto-lepko-plastycznego był tematem pracy T. WIERZBICKIEGO (Warszawa). Autor przyjął za podstawę uogólniony, czteroparametrowy model ciała Bingham'a i wykorzystał związki fizyczne wyprowadzone przez FREUDENTHALA. Rozpatrzono przypadki, gdy na wewnętrznej powierzchni kuli dane jest

ciśnienie lub przemieszczenie; zbadano wpływ czasu oraz lepkości sprężystej i plastycznej na przebieg naprężeń i przemieszczeń.

Z. BYCHAWSKI (Kraków) rozpatrzył zagadnienie wyoboczenia powłoki walcowej wykonanej z materiału posiadającego własności sprężysto-lepkie, obciążonej jednostajnie rozłożonymi siłami ściskającymi, działającymi w kierunku tworzących. Przy założeniu, że ugięcia powłoki są duże w porównaniu z jej grubością, wyprowadzono układ dwóch równań różniczkowych czwartego rzędu, który — łącznie z warunkami brzegowymi — określa funkcję ugięcia i funkcję naprężeń. Rozwiązanie tego układu równań uzyskano stosując metodę Galerkiną.

Problemom teorii plastyczności i reologii poświęcone były referaty trzech gości zagranicznych konferencji. N. CRISTESCU (Rumunia) mówił o drganiach strun wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego. Referat Z. SOBOTKI (CSRS) dotyczył reologii materiałów nieliniowych ze zmiennymi parametrami, a tematem pracy M. PREDELEANU (Rumunia) było całkowanie dynamicznych równań ciał lepko-sprężystych.

Nieco odrębną tematykę reprezentował referat J. LITWINISZYNA (Kraków). Autor, kontynuując prowadzone od wielu lat badania nad mechaniką ośrodków sypkich, przedstawił pracę omawiającą pewne zagadnienia nieliniowe związane z takimi ośrodkami.

5. Grupę prac z dziedziny teorii plastyczności, poświęconą zagadnieniom nośności granicznej, zapoczątkował na konferencji Ju. R. LEPIK (Estońska SRR) pracą pt. «Nośność graniczna niejednorodnych płyt i powłok». Zakładając niejednorodność typu warstwowego lub ciągłego wzdłuż grubości powłoki autor wyraził wszystkie siły uogólnione za pomocą parametrów charakteryzujących niejednorodność oraz zbudował odpowiednie warunki utraty nośności granicznej.

A. SAWCZUK (Warszawa) i M. DUSZEK (Warszawa) podjęli próbę zbadania wpływu sił poprzecznych na nośność graniczną sztywno-plastycznych płyt kołowych. W pracy tej przedyskutowano jakościowy wpływ sił poprzecznych na nośność graniczną płyt stosując graniczną powierzchnię tzw. ograniczonego współdziałania naprężeń normalnych i stycznych. Korzystając następnie ze stowarzyszonego prawa płynięcia zbudowano powierzchnię graniczną dla płyt z materiału Hubera-Misesa. Pracę zilustrowano wykresami przedstawiającymi wpływ sił poprzecznych na nośność graniczną w zależności od geometrycznych parametrów płyty.

Jedno z nielicznych efektywnych rozwiązań w teorii powłok plastycznych uzyskał J. RYCHLEWSKI (Warszawa) w pracy pt. «Nośność graniczna powłok helikoidalnych». Autor rozważył powłokę o kształcie prostej helikoidy (powierzchni śrubowej) przy założeniu, że obciążenie działa prostopadłe do powłoki i zależy tylko od odległości od osi. Przedyskutowano związki fizyczne dla powłok plastycznych odniesione do dowolnej niekrzywiznowej parametryzacji. Zlinearyzowana w przestrzeni sił powierzchnia graniczna pozwoliła autorowi uzyskać rozwiązania w postaci zamkniętej.

Z. MRÓZ i SUJ BUN-JE (Warszawa) zaproponowali nową metodę określania nośności granicznej płaskich powłok osiowo-symetrycznych. Opierając się na warunku Coulomba-Treski dla powłok płaskich autorzy otrzymali równanie powierzchni płynięcia, która dla pewnych stanów naprężeń pokrywa się z powierzchnią płynięcia dla powłok osiowo-symetrycznych, w pozostałym zaś obszarze leży na zewnątrz tej powierzchni. Uzyskano kompletne rozwiązanie dla kilku typów powłok kulistych, obciążonych ciśnieniem promieniowym lub siłami skupionymi. Dla powłok płaskich otrzymano rozwiązanie ścisłe, zaś w pozostałych przypadkach oceniono górną i dolną granicę wartości nośności granicznej.

W pracy pt. «Stan sprężysto-plastyczny powłoki walcowej przy obciążeniu pierścieniem sił» A. KÖNIG (Warszawa) postawił sobie za cel określenie odkształceń powłoki oraz zasięgu strefy uplastycznionej dla obciążenia mniejszego niż graniczne. Rozwiązanie otrzymano dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego, spełniającego warunek plastyczności Hubera-Misesa. Dla przypadku powłoki warstwowej zbudowano zamkniętą postać wyrażen na siły wewnętrzne i odkształcenia. Przedyskutowano także wpływ wzmocnienia izotropowego na związki między odkształceniami i przemieszczeniami powłoki.

Ostatnią pracą dotyczącą teorii powłok z materiałów sprężysto-plastycznych była praca J. MURZEWSKIEGO (Kraków) pt. «Wpływ załomów plastycznych na stateczność ogólną żebrowa-

nych powłok walcowych przy zginaniu». Autor rozważył pewien możliwy mechanizm zniszczenia powłoki walcowej uszytnionej poprzecznymi żebrami i ściskanej osiowo, polegający na utworzeniu się uplastycznionego załomu. Wyniki tej analizy zostały skonfrontowane z wynikami, jakie otrzymuje się w tym przypadku na drodze energetycznej przy odkształceniach czysto sprężystych.

6. Następną grupą prac przedstawionych na konferencji krynickiej dotyczyła zagadnień statyki i dynamiki układów prętowych.

G. LÖBEL (NRD) zajął się określeniem kształtu pierwotnego belek przy danej z góry linii skończonych ugięć sprężystych. Pomijając wpływ ścinania belki na kształt tej linii ugięcia autor zaproponował półgraficzną metodę wyznaczania współrzędnych osi belki nieodkształconej.

Z. WASZCZYŹYŃ oraz J. ORKISZ (Kraków) w swoich pracach zaproponowali nowe metody obliczania belek poddanych dużym ugięciom sprężysto-plastycznym. Pierwsza praca dotyczyła obliczania belek o osi odkształcalnej, opartych na podporach nieprzesuwnych. Referat J. ORKISZA dotyczył obliczania dużych ugięć belek o dowolnych przekrojach poprzecznych za pomocą właściwego doboru zaproponowanych przez autora tzw. wielopunktowych przekrojów zastępczych. Równania skończonych ugięć sprężysto-plastycznych są w przypadku przekrojów wielopunktowych liniowe względem momentu zginającego i siły podłużnej, ale oczywiście stają się nieliniowe po podstawieniu efektywnych wzorów na moment zginający. Stopień trudności ich rozwiązania jest taki sam jak przy analizie ugięć sprężystych, co stanowi zasadnicze osiągnięcie pracy.

Problemowi złożonych obciążeń prętów poświęcono dwie prace. ST. PIECHNIK (Kraków) przedstawił pracę «Złożone obciążenia prętów w teorii pelzania». Praca ta została w większej części wykonana w Sztokholmie pod kierunkiem prof. ODQVISTA. W oparciu o prawo pelzania Odqvista wyprowadzono w niej ogólne przemieszczeniowe równanie różniczkowe zagadnienia, obejmujące jednocześnie zginanie, skręcanie i rozciąganie prętów. Podano kilka rozwiązań uzyskanych metodą małego parametru przy założeniu małego udziału zginania wobec skręcania, małego udziału skręcania wobec rozciągania itd.

M. WNUK (Kraków) w referacie pt. «Skręcanie i rozciąganie prętów w zakresie sprężysto-plastycznym i przy pelzaniu» rozpatrywał pręty o dowolnym przekroju. Metodą małego parametru rozwiązał on przypadek sprężysto-plastyczny i wyznaczył granicę międzystrefową; przypadek nieliniowego pelzania został rozwiązany wspólnie z ST. PIECHNIKIEM. Krzywe graniczne oszacowano następnie w oparciu o twierdzenia wariacyjne teorii plastyczności. Zwrócono również uwagę na sprężysto-plastyczne wyboczenie prętów jednocześnie ściskanych i skręcanych.

M. KRAJEWSKA (Kraków) w pracy «Sprężysto-plastyczne zginanie prętów zakrzywionych o przekroju dwuteowym jako zagadnienie dwuwymiarowe» podaje przybliżoną metodę analizy takich prętów w zakresie sprężystym i plastycznym. Stan naprężenia w środku potraktowano jako zagadnienie płaskie, powierzchnię pólek skupiono w środku ich ciężkości, przy czym w zakresie sprężystym uwzględniono redukcję szerokości współpracującej w oparciu o techniczną teorię powłok. Poświęcono uwagę kształtowaniu przekroju ze względu na największą nośność przy danej powierzchni przekroju i danym promieniu krzywizny osi.

7. Poza pracami zajmującymi się kształtowaniem i obliczaniem układów prętowych w zakresie sprężysto-plastycznym przedstawiono na konferencji także kilka referatów dotyczących czysto sprężystych układów prętowych oraz powłok sprężystych.

Praca M. ŻYCKOWSKIEGO (Kraków) «Stateczność ścianek spiralnych wymienników ciepła» dotyczyła stateczności powłok walcowych wzmocnionych punktowo kółkami rozporowymi. Celem pracy było ustalenie optymalnego rozkładu kółków, zapewniającego ich minimum przy danym ciśnieniu krytycznym. Z uwagi na małą zmienność krzywizny spirali w obrębie zwoju wykorzystano teorię stateczności walcowych powłok kołowych. Zasadniczym obciążeniem powłoki jest ciśnienie promieniowo-ściskające. Ponieważ w tym przypadku różnice między górnym a dolnym ciśnieniem krytycznym (liniową i nieliniową teorią stateczności) nie są zbyt wielkie, wykorzystano więc prostszą teorię liniową zwiększając odpowiednio współczynnik bezpieczeństwa. Zbadano trzy możliwe schematy zniszczenia i podano wzory na najlepszy i «lokalnie najgorszy» rozkład kółków. Podano również bezpośrednie wzory na grubość powłoki przy danym rozkładzie kółków.

M. ŻYCZKOWSKI i W. KRZYŚ w referacie pt. «Kształtowanie prętów skręcanych i zginanych przy uwzględnieniu warunków stateczności» podali po przeprowadzeniu pewnej ogólnej klasyfikacji problemów kształtowania wytrzymałościowego metodę optymalnego «kształtowania parametrycznego». Terminem tym określono problem pośredni między kształtowaniem i wymiarowaniem, mianowicie dobór kształtu przez ustalenie optymalnej wartości skończonej liczby parametrów. Jest to problem minimum funkcji kilku zmiennych z warunkami pobocznymi w postaci nierówności słabych. Podano dwa przykłady dotyczące cienkościennych prętów o przekroju skrzynkowym. Problemy te rozwiązano w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym.

W. K. NOWACKI i S. WOROSZYŁ (Warszawa) przedstawili pracę omawiającą problem drgań wymuszonych belki składanej z uwzględnieniem efektów nieliniowych, pochodzących od luzów w złączach. Zagadnienie to rozwiązano w oparciu o metodę Rayleigha z liniowo i nieliniowo określoną postacią drgań. Tak postawiony problem prowadzi do liniowego równania różniczkowego ruchu o zmiennych współczynnikach. Podano równanie na obliczenie współczynnika dla obu przypadków z liniowo i nieliniowo określoną postacią drgań. W przykładach przedstawiono wpływ luzów na współczynnik dynamiczny belki.

W. GUTKOWSKI (Warszawa) w referacie pt. «Wybrane zagadnienia segmentowych układów prętowych» stosując metody rachunku różnicowego zajął się statyką i statecznością pewnych typów przestrzennych układów prętowych, takich jak ruszty przestrzenne, maszty itp. Praktyczne wykorzystanie wyników pracy uzależnione jest od technicznych możliwości rozwiązywania układów równań o dużej liczbie niewiadomych.

Praca Z. TERESZKOWSKIEGO (Warszawa) dotyczyła zagadnienia zwichrzenia belki pod dowolnym obciążeniem przy założeniu, że jedna z krawędzi belki, dzięki częściowemu przytwierdzeniu jej do podłoża, nie ma możliwości przesuwu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny obciążenia.

Grupę prac poświęconych teorii i metodom obliczania powłok sprężystych otwiera R. DĄBROWSKI (Gdańsk) dwoma referatami, zatytułowanymi «Równanie typu Donnella dla ortotropowych powłok walcowo-kolistych» oraz «Obliczanie sklepień walcowo-kolistych według przybliżenia Schorera». W pierwszej pracy autor zajął się obliczaniem powłok walcowych o ortotropii technicznej, wynikającej z gęstego uzeźbrowania. Mając na uwadze w szczególności powłoki stosowane przy zamknięciach wodnych, autor — w oparciu o założenia Donnella — wyprowadza przybliżone równanie różniczkowe takich powłok i przeprowadza dyskusję ich rozwiązania za pomocą szeregów nieskończonych.

W drugiej pracy, tematycznie zbliżonej do poprzedniej, autor uzasadnia przydatność do celów praktycznych mało u nas znanej metody obliczania sklepień walcowych, opartej na przybliżeniu Schorera. W celu ułatwienia dość żmudnych operacji liczbowych, związanych z tą metodą, autor opracował zbiór tablic pomocniczych.

W pracy pt. «Analiza przecinających się powłok walcowych» J. SOBIESZCZAŃSKI (Warszawa) zajął się zagadnieniem wpływu załomów na stan odkształceń i naprężeń w powłokach. Proponowany przez autora sposób postępowania, oparty na metodzie kollokacji, wymaga — ze względu na charakter obliczeń — stosowania matematycznych maszyn cyfrowych.

S. ŁUKASIEWICZ (Warszawa) w swoim referacie podał wyprowadzenia równań teorii powłok o podwójnej krzywiznie, które posiadają budowę podobną do równań technicznej teorii Własowa różniąc się od nich jedynie uwzględnieniem pewnego współczynnika zależnego od promieni krzywizny. Dokładność tych równań sprawdzono porównując je z równaniami Flüggego dla powłoki walcowej. Okazuje się, że dokładność ta jest lepsza niż w przypadku stosowania równań teorii technicznej Własowa, zwłaszcza dla powłok silnie zakrzywionych.

H. FRĄCKIEWICZ (Warszawa) przedstawił analizę modeli ortotropii konstrukcyjnej powłok cylindrycznych, a następnie wyprowadził równanie dla takich powłok o ortotropii ciągłej. Na podstawie analizy pierwiastków równania charakterystycznego określił on obszary stosowalności uzyskanych równań i przeprowadził porównanie z równaniami podanymi przez innych autorów.

J. KAPKOWSKI (Warszawa) rozważał od strony teoretycznej zagadnienie kształtowania tarcz płaskich, znajdujących się w płaskim stanie naprężenia, na równomierną wytrzymałość, spraważając ten problem do rozwiązania pewnych układów równań różniczkowych. Bardziej szczegóło-

wym zagadnieniem zajął się J. STUPNICKI (Warszawa) rozważając sposób uproszczony obliczania wytrzymałości kolnierzy rur eliptycznych.

8. Na zakończenie przejdziemy do omówienia prac o charakterze bądź to czysto doświadczalnym, bądź też w znacznej mierze opartych na badaniach eksperymentalnych.

Wśród prac doświadczalnych z zakresu teorii plastyczności należy wymienić pracę W. SZCZEPIŃSKIEGO (Warszawa), poświęconą doświadczalnej analizie wpływu wstępnych odkształceń plastycznych na warunek plastyczności. Autor poddawał płaskie próbki ze stopu aluminium rozciąganiu w różnych kierunkach. Próbki te poddano uprzednio wstępnym, dość znacznym odkształceniom trwałym. Wyniki badań wykazały, że granica proporcjonalności materiału wstępnie odkształconego jest silnie anizotropowa. Anizotropia ta jednak szybko się zmniejsza po dodatkowych, małych odkształceniach plastycznych próbki. Praca objęła również doświadczalne sprawdzenie istnienia tzw. «rogu» w powierzchni plastyczności; otrzymano odpowiedź negatywną.

W kolejnej pracy J. KLEPACZKO i J. LITOŃSKI (Warszawa) zbadali doświadczalnie wpływ odkształceń plastycznych przy jednoosiowym rozciąganiu na własności sprężyste mosiądzu i stali. Stwierdzono m.in., że względne zmiany modułów sprężystości podłużnej dla mosiądzu nie przekraczają 2,5%. Porównano otrzymane wyniki z wynikami innych badaczy.

Z. MENDERA i J. MURZEWSKI (Kraków) zaproponowali półempiryczną metodę określania powierzchni granicznych dla stali i innych materiałów elasto-plastycznych. Na podstawie analizy licznych danych doświadczalnych i teoretycznych w zakresie naprężeń granicznych stali i żeliwa autorzy zbudowali nowe wzory interpolacyjne na powierzchni plastyczności stali i żeliwa. Określono odpowiednie wartości współczynników empirycznych.

Nieco odmienną tematykę reprezentowały prace przedstawione przez M. L. WILLIAMS (USA) i Z. PAWŁOWSKIEGO (Warszawa). Pierwszy z tych autorów omawiał wyniki oryginalnych badań przeprowadzonych w laboratoriach Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego nad mechanizmem zniszczenia materiałów lepko-sprężystych o charakterze polimerów. Z. PAWŁOWSKI zajął się interesującym zagadnieniem współzależności między współczynnikiem tłumienia drgań wysokiej częstotliwości w niektórych metalach a pewnymi parametrami mechanicznymi, takimi jak np. wytrzymałość zmęczeniowa, naprężenie itp. Na podstawie referatu wydaje się, że pomiar współczynnika tłumienia może istotnie dostarczyć w pewnych przypadkach interesujących informacji na temat sił wewnętrznych i wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych.

Problemowi doświadczalnej analizy naprężeń poświęcone były trzy prace. Z. ORŁOŚ (Warszawa) zajmuje się od pewnego czasu stosowaniem tzw. półtrepanacyjnej metody badania naprężeń, polegającej na częściowym nacinaniu elementu konstrukcyjnego, znajdującego się w stanie naprężenia, i na tensometrycznym pomiarze powstających przy tym dodatkowych odkształceń. Na konferencji krynickiej autor omawiał zastosowanie tej metody do badania stanu naprężeń własnych.

Dwaj ostatni autorzy, R. DOROSZKIEWICZ i B. MICHALSKI (Warszawa), zajmują się metodami elasto- optycznymi. Pierwszy z nich omawiał zastosowanie żelu żelatynowego i żywicy epoksydowych w elasto- optyce na podstawie przeprowadzonych przez siebie badań. Referat zawierał dyskusję pewnych trudności technologicznych związanych ze stosowaniem tych materiałów oraz sposobem ich uniknięcia, jak również wyniki badań stanu naprężenia w zaporze typu grawitacyjnego. B. MICHALSKI zaproponował w swoim referacie pewną nową metodę ekstrakcji wyników pomiarów elasto- optycznych z krawędzi do punktów wewnętrznych modelu.



## SYMPOZJUM NA TEMAT ELASTOPTYKI I JEJ ZASTOSOWAŃ

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

W dniach od 29 listopada do 1 grudnia 1962 odbyło się w Warszawie ogólnokrajowe sympozjum na temat: «Elastoptyka i jej zastosowania», zorganizowane przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Zadaniem sympozjum był przegląd stanu badań elastoptycznych w Polsce i perspektyw ich dalszego rozwoju, przedstawienie własnych osiągnięć przez poszczególne ośrodki krajowe oraz wymiana doświadczeń. Jednym z głównych celów było również zwrócenie uwagi na efekty, jakie mogłoby przynieść gospodarce narodowej szersze niż obecnie korzystanie z metody elastoptycznej w praktyce konstrukcyjnej. Mimo tego bowiem, że ostatnio zanotować można pewien wzrost zainteresowania przemysłu tą metodą, co znalazło swój wyraz w szeregu prac przedstawionych na sympozjum, zainteresowanie to jest jeszcze zbyt małe.

Pozytywnym zjawiskiem jest rozwój badań elastoptycznych również w kilku ośrodkach poza Warszawą. Na ogólną liczbę 23 referatów sześć przedstawił ośrodek krakowski, dwa gdański i jeden szczeciński. Tematyka referatów była następująca: wygłoszono cztery referaty przeglądowe, osiem poświęcono bezpośrednim zastosowaniom praktycznym, a dwa — badaniom nad nowymi materiałami na modele elastoptyczne. Pozostałe prace poświęcone zostały różnym badaniom podstawowym.

Z dwóch referatów wstępnych wygłoszonych przez R. DOROSZKIEWICZA (Warszawa) pierwszy poświęcony był omówieniu rozwoju metody elastoptycznej i jej podstaw, w drugim dokonano przeglądu prac prowadzonych w Laboratorium Analizy Naprężeń Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN. Omówiono w nich badania modelowe z uwzględnieniem ciężaru własnego oraz badania nad zastosowaniem miękkich żywic epoksydowych jako materiału na modele. W pozostałych dwóch pracach przeglądowych T. KABAT (Szczecin) omówił prace prowadzone w Laboratorium Elastoptyki Politechniki Szczecińskiej, a S. BEDNARCZYK (Gdańsk) i S. MACKIEWICZ (Gdańsk) — prace jugosłowiańskiego Instytutu Jaroslav Cerni, poświęcone zastosowaniu elastoptyki w budownictwie wodnym.

W grupie prac różnych J. NALESZKIEWICZ (Warszawa) i J. LIETZ (Warszawa) przedstawili ciekawe zastosowanie elastoptyki do badań mechanizmu pęknięcia przy użyciu lamp błyskowych. J. HAŁAUNBRENNER (Kraków) omówiła interesującą pracę dotyczącą oporu, powstającego przy toczeniu szklanego walca po walcu z miękkiej żywicy epoksydowej, obserwowanym w świetle spolaryzowanym. Otrzymane wyniki przedstawiają silny wpływ prędkości i powstawania przy dużych prędkościach pewnego rodzaju efektu naskórkowego. Przykładem możliwości zastosowań elastoptyki do badań zagadnień mechaniki górotworu była praca T. JUSZKIEWICZA (Kraków). Pewne własne wyniki dotyczące naklejanych tensometrów elastoptycznych przedstawił B. MICHAŁSKI (Warszawa). Badania nad efektami obciążenia termicznego były tematem pracy Z. DYŁAGA (Warszawa) i Z. ORŁOSIA (Warszawa).

Ze szczególnym uznaniem należy powitać prace nad wytwarzaniem materiałów, które dotychczas importowano, na modele elastoptyczne. J. SŁOWIKOWSKA (Warszawa) przedstawiła wynik swych prac nad otrzymywaniem żywic elastoptycznych o różnych własnościach optycznych i mechanicznych. R. DOROSZKIEWICZ omówił wstępne badania przeprowadzone nad otrzymaniem

żywic epoksydowych o dużej czułości elastoptycznej, przeznaczonych do badań modelowych z uwzględnieniem ciężaru własnego.

W grupie zastosowań praktycznych przedstawiono prace poświęcone zarówno zagadnieniom z zakresu budowy maszyn jak i budownictwa lądowego i wodnego. Obejmowały one m.in. badanie zapór wodnych i elementów budynków wielkopłytowych, dynamiczne badanie kół zębatych, analizę nawijanych zbiorników ciśnieniowych, wirników generatorów elektrycznych dużej mocy itp.

Na zakończenie podjęto uchwałę, w której sprecyzowano środki, jakie należy podjąć w celu popularyzowania metod elastoptycznych w zastosowaniach praktycznych. Uznano za celowe organizowanie co dwa lata sympozjum poświęconego elastoptyce.

---



**Następny zeszyt Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zawiera prace:**

- Z. Nowak, M. Życzkowski, Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych  
Recent achievements in the field of stability of thin-walled shells  
Обзор новейших работ по устойчивости тонкостенных оболочек
- H. DZIATLIK, Model elektryczny tensora naprężeń  
Electrical model of stress tensor  
Электрическая модель тензора напряжений
- A. WILCZYŃSKI, Zależność naprężenie – odkształcenie w przypadku prostego rozciągania tworzyw o łańcuchowej budowie  
Stress-strain relation for materials built of chain molecules in case of simple tension  
Зависимость напряжение-деформация в случае осевого растяжения материала с цепным строением частиц
- P. PERZYNA, Podstawowe zagadnienia lepkoplastyczności  
Fundamental problems of visco-plasticity  
Основные вопросы вязко-пластичности
- E.LI STERNBERG, Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych  
On the analysis of thermal stresses in viscoelastic solids  
Термические напряжения в вязко-упругих телах

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i ukazuje się na razie jako wydawnictwo ciągłe mniej więcej w odstępach kwartalnych. Członkowie P.T.M.T.S. otrzymują poszczególne zeszyty wydawnictwa ze zniżką 50 % w Oddziałach Towarzystwa.

*MECHANIKĘ TEORETYCZNA I STOSOWANA* można nabyć w księgarniach naukowych Domu Książki oraz w Ośrodku Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polskiej Akademii Nauk (Pałac Kultury i Nauki).

---