XIĘGA V.

ROZDZIAŁ XV.

POCZĄTKI

TRYGONOMETRYI PROSTOKREŚLNEY.

1. Każdą figurę prostokreślną można zamienić na tróykąt (11, 25); znaiąc zatem własności i sposób mierzenia tróykątów, przyydziemy łatwo do poznania własności i sposobu wymierzenia iakieykolwiek figury prostokreślney.

2. W tróykącie każdym iest sześć rzeczy do uważania: trzy boki i trzy kąty; z tych sześciu, wynalezienie przez rachunek trzech rzeczy, za pomocą trzech wiadomych, między któremi znaydować się powinien przynaymniey ieden bok, przedmiotem iest *Trygonometryi prostokreślney.*

3. Lecz aby z trzech rzeczy danych tróykąta, wynaleść przez proporcyą trzy inne, potrzeba wielkości w skład tróykąta wchodzące porównywać z sobą, toiest bok z bokiem, a kąt z kątem, iako rzeczy iednego z sobą gatunku; z tego porównania wypada stosunek boków, i stosunek kątów; że zaś z takowych dwóch stosunków nie można złożyć proporcyi; bo w tróykącie boki nie są proporcyonalne względem kątów im przeciwległych, ani

względem łuków mierzących te kąty; iak się o tem nayłatwiey można przekonać na tróykącie prostokątnym równoramiennym; w którym lubo każdy z kątów ostrych iest połową kąta prostego, boki iednak przeciwległe kątom ostrym, większe są od połowy przeciwprostokątney: z tego powodu, starano się wprowadzić inne liniie proste na mieysce kątów, proporcyonalne do boków tróykąta, i te nazwano liniiami *trygonometrycznemi*. Trzeba więc naprzód poznać liniie trygonometryczne, i wskazać sposób wyrachowania ich ważności w liczbach na kąty czyli łuki koła; potem oznaczyć stosunki tych liniy do boków tróykąta, za pomocą których, z trzech danych rzeczy tróykąta wynaydziemy, trzy inne, co nazywać się zwykło *rozwiązaniem tróykąta*.

Ta. VII. Fig. 1. 4. Dla poznania liniy trygonometrycznych, weźmy iakikolwiek łuk AB mnieyszy od czwartey części okręgu koła.

Prostopadła BE, spuszczona z iednego końca łuku AB, na promień AC przechodzący przez drugi koniec tego łuku, nazywa się *wstawą* łuku AB, albo kąta ACB maiącego ten łuk za miarę. Podobnie liniia BG iest wstawą łuku BF, lub kąta BCF.

5. Liniia AE, czyli część promienia AC, zawarta między końcem łuku AB, a iego wstawą BE, iest *wstawą odwrotną* łuku AB, albo kąta ACB. Podobnie liniia FG iest wstawą odwrotną łuku BF, lub kąta BCF.

6. Prostopadła AD, do promienia AC przechodzącego przez ieden koniec łuku AB, z końca iego wyprowadzona aż do przecięcia się z promieniem BC przedłu-

żonym, przechodzącym przez drugi koniec tegoż łuku, iest *styczną* łuku AB, albo kąta ACB; liniia FJ iest także styczną łuku BF, albo kąta BCF.

7. Liniia CD, czyli promień BC przedłużony aż do spotkania się z styczną AD, iest *sieczną* łuku AB, albo kąta ACB. Liniia CJ iest także sieczną łuku BF, lub kąta BCF.

8. Gdy kąt ACF iest prosty, kąt BCF będzie dopełnieniem kąta ACB do kąta prostego, i wtedy,

BG nazywa sie wstawą dopełnienia, lub dostawą	łuku AB albo kąta ACB.
FG iest wstawą odwrotną dopełnienia, czyli dostawą odwrotną	
FJ iest styczną dopełnienia, albo dostyczną	
CJ iest sieczną dopełnienia, albo dosieczną	

Widzimy podobnie, że ponieważ kąt ACB iest nawzaiem dopełnieniem kąta BCF, przeto wstawa, wstawa odwrotna, styczna, i sieczna kąta ACB, iest dostawą, dostawą odwrotną, dostyczną, i dosieczną kąta BCF. (*).

9. Gdy punkt B będzie się zbliżał do punktu F, czyli gdy łuk AB będzie coraz wzrastał, wstawa iego BE będzie się także coraz powiększać, tak dalece; że

(*) Dla skrócenia pisać będziemy, wst. wst.odw. sty. sie. dost. dost.odw. dosty. dosie, na mieyscu wstawa, wstawa odwrotna, styczna, sieczna, dostawa, dostawa odwrotna, dostyczna, i dosieczna.

gdy punkt B padnie na punkt F, wstawa BE zeydzie się z promieniem FC i będzie mu równa. Więc *promień* iest wstawą kąta prostego. Niekiedy promień nazywa się *wstawą całą.*

Fig. 2. W tróykącie prostokątnym ACB, ieżeli przeciwprostokątną CB weźmiemy za promień, każde z ramion kąta prostego będzie wstawą kąta przeciwległego temu ramieniowi, toiest AC będzie wstawą kąta B, AB wstawą kąta C.

Fig. 1. 10. Z poprzedzaiącego opisania wstawy widzimy, *że wstawa BE łuku iakiegokolwiek AB, iest połową cięciwy łuku podwóynego względem AB.*

Bo przedłużywszy BE do punktu O, promień CA prostopadły do cięciwy BO, dzieli ią i łuk BAO na dwie równe części (11, 5); więc BE wstawa łuku AB iest połową cięciwy łuku BAO dwa razy większego od łuku AB; *zatem wstawa i t. d.*

11. Więc 16d. *wstawa* 30° *iest połową promienia.*

Jakoż, wstawa 30° iest połową cięciwy łuku dwa razy większego, czyli ~~iest~~ cięciwy łuku 60°. Aże cięciwa łuku 60°, czyli bok sześciokąta foremnego (II, 11), iest równy promieniowi koła; więc *wstawa* 30° *iest równa połowie promienia.*

12. Więc 2re. *wstawa kąta rozwartego BCK, iest ta sama co wstawa BE iego spełnienia BCA.* (*)

Bo liniia BO, będąc cięciwą łuku BAO podwóynego względem łuku BA, iest oraz cięciwą łuku BKO podwóynego względem

(*) Kąt BCA, spełniaiący kąt BCK do dwóch kątów prostych, nazywa się iego *spełnieniem.*

łuku BK; zatem BE połowa tey cięciwy, czyli wstawa kąta BCA, iest także wstawą kąta BCK; *więc wstawa kąta rozwartego, i t. d.*

13. *Styczna 45° iest równa promieniowi.* Bo w tróykącie prostokątnym DAC, gdy kąt DCA=45°, będzie także i kąt D=45°, zatem bok AD=CA (1, 15); więc *styczna* 45° i t. d.

14. Gdy kąt DCA iest większy od 45°, styczna iego AD będzie większa od promienia; a gdy tenże kąt iest prosty, styczna iego będzie równoległa względem sieczney CD, a zatem nigdy się z nią nie zeydzie: i dlatego mówi się że styczna kąta prostego iest nieskończona. W tróykącie prostokątnym BAC, gdy CA Fig. 2.
iedno z ramion kąta prostego weźmiemy za promień, ramie drugie AB będzie styczną kąta C przyległego ramieniowi pierwszemu, a przeciwprostokątna CB sieczną tegoż kąta. Podobnie gdy AB weźmiemy za promień, CA będzie styczną kąta B, a CB iego sieczną.

Jeżeli teraz wystawimy sobie promień podzielony na 10,000,000,000 części równych, widoczna iest, iż wstawa 30° zamykać będzie takich części 5000,000,000, a wstawy łuków większych lub mnieyszch od 30°, zamykać będą więcey lub mniey tychże części; niemniey dostawy, styczne, i t. d. tych różnych łuków zawierać będą pewną liczbę części promienia. Staraymy się więc poznać sposób wyrachowania w liczbach wstaw, dostaw, i t. d.

15. Naprzód z wiadomey wstawy BE Fig. 1.
łuku AB, wynaydziemy łatwo iego dostawę. Jest bowiem BG dostawa łuku AB

równa EC. Aże tróykąt prostokątny BCE, daie $\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2$, skąd $\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2$, czyli $EC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2}$, albo dost$AB = \sqrt{P^2 - \text{wst}^2 AB}$; więc *dostawa iakiegokolwiek łuku równa się pierwiastkowi kwadratowemu wyciągnionemu z różnicy między kwadratem z promienia, a kwadratem ze wstawy tegoż łuku.*

16. Ponieważ AE=CA—CE, czyli wst. odw. $AB = P - \text{dost } AB$; więc *wstawa odwrotna iakiegokolwiek łuku, równa się różnicy między promieniem a dostawą tegoż łuku.*

Fig. 3. 17. Wiemy iuż że wstawa 30° iest równa połowie promienia (11); otrzymamy więc wstawę 15°, i następnie wstawy 7° 30′, 3° 45′, i t. d; gdy z wiadomey wstawy BE łuku BDA, i iego wstawy odwrotney AE, wynaydziemy wstawę Be łuku BD, który iest połową danego łuku BDA. Jakoż, ponieważ promień CD iest prostopadły do BA; będzie $Be = \frac{BA}{2}$ (11, 5). Aże $\overline{BA}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EA}^2$, skąd $BA = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{EA}^2}$, zatem $\frac{BA}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{EA}^2}$, czyli

$$\text{wst } \frac{BDA}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\text{wst}^2 BDA + \text{wst odw}^2 BDA};$$

więc, *wstawa łuku dwa razy mnieyszego od łuku danego, iest równa połowie pierwiastku kwadratowego wyciągnionego z summy z kwadratu wstawy, i kwadratu wstawy odwrotney danego łuku.*

18. Potrafimy nadto wyrachować wstawy i dostawy większey liczby iakichkolwiek łuków, ieżeli znaiąc zosobna

wstawę i dostawę dwóch łuków, wynaydziemy wstawę i dostawę summy tychże łuków.

Założmy więc sobie z wiadomey wstawy BE i dostawy CE, łuku AB, tudzież wstawy DG i dostawy CG, łuku BD; wynaleść wstawę DP, i dostawę CP łuku $AD = AB + BD$. Na ten koniec, z punktu G, w którym cięciwa KD spotyka promień CB do niey prostopadły, spuśćmy prostopadłą GJ na promień CA, i poprowadźmy GM równoległą względem AC. To założywszy, będzie $DP = MP + DM = GJ + DM$. Trzeba więc tylko wynaleść z osobna ważność na GJ, i na DM; które łatwo otrzymamy: bo tróykąty podobne CBE, CGJ, daią $BC : CG = BE : GJ$, czyli $P : \text{dost}\ BD = \text{wst}\ AB : GJ$, zatem $GJ = \dfrac{\text{wst}\ AB \times \text{dost}\ BD}{P}$. Fig. 4.

Tróykąty także CBE, DGM, maiąc boki do siebie prostopadłe są podobne, i daią $CB : DG = CE : DM$, czyli $P : \text{wst}\ BD = \text{dost}\ AB : DM$, stąd $DM = \dfrac{\text{wst}\ BD \times \text{dost}\ AB}{P}$; zatem $GJ + DM$, czyli $\text{wst}\ (AB + BD) = \dfrac{\text{wst}\ AB \times \text{dost}\ BD + \text{wst}\ BD \times \text{dost}\ AB}{P}$; co pokazuie: *że z wiadomych wstaw i dostaw dwóch łuków, aby wynaleść wstawę łuku równego summie łuków danych, trzeba wziąć dwa iloczyny: 1szy ze wstawy łuku iednego przez dostawę łuku drugiego; 2gi ze wstawy łuku drugiego przez wstawę łuku pierwszego, i summę tych iloczynów podzielić przez promień.*

A że CP, dostawa $(AB + BD) = CJ - JP = CJ - GM$; pozostaie więc ieszcze wynaleść osobno ważność ną CJ, i na GM. Jakoż tróykąty podobne CBE, CGJ, daią CB: CG=CE: CJ, czyli P: dost BD= dost AB: CJ; stąd $CJ = \frac{\text{dost } AB \times \text{dost } BD}{P}$.

Tróykąty znowu podobne CBE, DGM, daią CB: DG=BE: GM, czyli P: wst BD= wst AB: GM; więc $GM = \frac{\text{wst } AB \times \text{wst } BD}{P}$;

a zatem CJ—GM, czyli $\text{dost } (AB+BD) = \frac{\text{dost } AB \times \text{dost } BD - \text{wst } AB \times \text{wst } BD}{P}$.

19. Znaydziemy podobnie, że $\text{wst}(AB-BD) = \frac{\text{wst } AB \times \text{dost } BD - \text{wst } BD \times \text{dost } AB}{P}$;

a $\text{dost } (AB-BD) = \frac{\text{dost } AB \times \text{dost } BD + \text{wst } AB \times \text{wst } BD}{P}$.

20. Na mocy prawd dotąd wyłożonych, nietrudno będzie wyrachować wstawy i dostawy łuków. Gdyż maiąc wiadomą wstawę łuku 30° (11), wynaydziemy iego dostawę (15); a podług sposobu wskazanego pod liczbą (17), szukaiąc następnie wstawy łuku dwa razy mnieyszego od łuku danego, wynaydziemy wstawy łuków zawartych w szeregu maleiącym $\div \frac{30^\circ}{2} : \frac{30^\circ}{4} : \frac{30^\circ}{8} : \frac{30^\circ}{16} : \frac{30^\circ}{32} : \frac{30^\circ}{64} : \frac{30^\circ}{128} : \frac{30^\circ}{256} :$ i t. d. Aże łuki bardzo małe nie różnią się prawie od swoich wstaw; można więc takie łuki uważać za proporcyonalne do ich wstaw; a zatem

wstawę 1′ otrzymamy z tey proporcyi

$$\frac{30^\circ}{256} : 0^\circ\, 1' = \frac{\text{wst } 30^\circ}{256} : \text{wst } 0^\circ\, 1'.$$

Żeby znowu otrzymać wstawy łuków 2′, 3′, 4′, dosyć iest następnie pomnożyć wstawę 1′ przez 2, 3, 4. A dla wyrachowania wstaw i dostaw łuków większych od 4′, użyiemy prawidła pod liczbą 18, służącego do wynalezienia wstaw i dostaw summy dwóch łuków; i tak np. znaiąc wstawę i dostawę 4′, tudzież wstawę i dostawę 1′, wynaydziemy ważność na wstawę i dostawę 5′=4′+1′.

21. Maiąc wiadomą wstawą i dostawę kąta, można wynaleść iego styczną i dostyczną. Bo 1ód z podobieństwa tróykątów CBE, CDA, mamy CE: BE=CA: AD, czyli dost ACB : wst ACB=P : sty ACB; stąd Fig. 1.

$$\text{sty ACB} = \frac{\text{P} \times \text{wst ACB}}{\text{dost ACB}}.$$

2re z podobieństwa tróykątów CBG, CJF, iest CG: BG=CF: FJ; aże wst BE kąta ACB iest równa CG; więc wst ACB: dost ACB = P: dosty ACB; stąd

$$\text{dosty ACB} = \frac{\text{P} \times \text{dost ACB}}{\text{wst ACB}}.$$

22. Można nakoniec wynaleść sieczną i dosieczną kąta, którego wiadoma iest wstawa i dostawa.

Bo 1ód tróykąty podobne CBE, CDA daią CE: CB=CA: CD, czyli dost ACB : P=P: sie BCA; więc $\text{sie ACB} = \frac{\text{P}^2}{\text{dost ACB}}$

2re. z tróykątów podobnych CBG, CJF, mamy CG: CB=CF: CJ, czyli wst ACB: P=P: dosie ACB; więc dosieA CB= $\frac{P^2}{\text{wst ACB}}$.

23. Gdy liniie trygonometryczne w częściach promienia zostały wyrachowane; dla skrócenia działań z liczbami wyrażaiącemi te liniie, wzięto liczb tych logarytmy, i ułożono ie w tablice albo razem z liniiami trygonometrycznemi, pisząc naprzód łuki, potem liniie trygonometryczne, następnie logarytmy tych liniy; albo iak bywa nayczęściey, liniie trygonometryczne opuszczaią się, i kładą się tylko łuki, a obok nich logarytmy liniy trygonometrycznych, tychże łuków. Rzadko które tablice obeymuią logarytmy wszystkich liniy trygonometrycznych, nayczęściey zawieraią logarytmy tylko wstaw i stycznych, a tem samem dostaw i dostycznych. Układ i użycie tych logarytmów, zwyczaynie przy ich tablicach opisany bywa.

ROZDZIAŁ XVI.

TWIERDZENIA OKAZUIĄCE STOSUNKI MIĘDZY LINIIAMI TRYGONOMETRYCZNEMI A BOKAMI TROYKĄTA.

Twierdzenie 1.

Fig. 5. 24. *W każdym tróykącie ABC, boki tak się maią do siebie, iak wstawy kątów przeciwległych tym bokom*; *toiest będzie BC: AC: AB=wst A: wst B: wst C.*