a z punktu A, prostopadłą DA do promienia CA; będzie prostopadła ta styczną żądaną (4).

2re. Jeżeli punkt A iest za kołem, wtedy złączywszy ten punkt ze środkiem C koła danego, liniią CA, dzielę ią w punkcie O na dwie równe części; z punktu O iako środka, promieniem OC kréślę okrąg, przecinaiący okrąg danego koła w punktach B', D, i prowadzę liniią AD, która będzie styczną żądaną.

Bo poprowadziwszy liniią CD, będzie kąt CDA w półkolu prosty (7. wn. 3), zatem liniia AD iest prostopadłą z końca D promienia CD wyprowadzona, więc iest styczną (5).

ROZDZIAŁ VI.

O MIERZENIU POWIERZCHNI.

Opisania.

I. Do mierzenia powierzchni używa się zwyczaynie kwadratu, który, gdy ma bok ieden równy długości sążnia, łokcia, stopy, cala i t. d. nazywa się *sążniem kwadratowym*, *łokciem kwadratowym*, *stopą kwadratową*, *calem kwadratowym* i t. d.

Mierzyć zatem iakąkolwiek powierzchnią, iestto dochodzić ile razy mieści się w niey kwadrat za miarę czyli iedność wzięty.

Fig. 25. II. *Wysokością* równoległoboku ABCD, albo tróykąta ABD, nazywa się prostopadła BE, z wierzchołka którego kolwiek kąta B, na bok przeciwległy AD, przedłu-

żony ieżeli tego potrzeba, spuszczona. Ten bok AD zowie się *podstawą* równoległoboku, albo tróykąta.

III. W prostokącie, bok iego iest razem wysokością.

IV. *Wysokością* trapeza ADBC, nazywa Fig. 26. się prostopadła DE, spuszczona z wierzchołka któregokolwiek iego kąta D, na bok przeciwległy AC zwany podstawą.

V. Dwie figury, różne co do kształtu, lecz równe sobie co do powierzchni, nazywaią się figurami *równoważnemi*. I tak, koło może być równoważne kwadratowi, tróykątowi, prostokątowi, i t. d.

Nazywać zaś będziemy zawsze figurami równemi te tylko, które położone, iedna na drugiey, przystaią do siebie we wszystkich swoich punktach: takiemi figurami są np. dwa tróykąty maiące trzy boki odpowiednie równe, dwa koła równych promieni, i t. d.

20. *Twierdzenie.*

Dwa równoległoboki ABCD, ABEF, maiące, tęż samą podstawę AB, i spólną wysokość DX, są równoważne. Fig. 27.

Bo w równoległobokach ABCD, ABEF, iest bok AD=CB, bok AF=BE (roz. IV. op. 3), nadto iest bok DC=AB i bok EF=AB, zatem bok DC=EF (pew. 1); gdy zaś od linii DE, odeymiemy każdą z liniy DC, FE, pozostanie liniia CE=DF (pew. III): dwa więc tróykąty DAF, CBE, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, są równe sobie (1, 9). Aże gdy od czworokąta ABED, odeymiemy tróykąt CBE, pozostanie równoległobok ABCD; i gdy od tegoż czworokąta ABED, odeymiemy tróykąt DAF, pozostanie równoległobok ABEF, równy co do powierzchni równoległobokowi ABCD (pew. III.); więc dwa równoległoboki, iedney podstawy, i iedney wysokości, są równoważne.

Wniosek I. Każdy równoległobok AC (fig. 27 bis.), iest równoważny prostokątowi AE, maiącemu tęż samą z nim podstawę AB, i tęż samą wysokość AF.

Wniosek II. Dwa prostokąty równey podstawy i wysokości, są równe sobie.

21. *Twierdzenie.*

Fig. 28. *Każdy tróykąt ABC, iest połową równoległoboku ADBC, maiącego z nim tę samą podstawę AC, i wysokość spólną BX.*

Jakoż z natury równoległoboku AB, iest bok DB=AC, bok AD=BC; zatem dwa tróykąty ADB, ACB, maiące nadto bok spólny AB, są równe sobie (1, 9): aże te tróykąty razem wzięte, składaią równoległobok cały AB; więc każdy z tróykątów ADB, ACB, iest połową równoległoboku AB.

Wniosek I. Tróykąt ABC, iest połową prostokąta EC, maiącego z nim tę samą podstawę AC, i spólną wysokość AE; gdyż prostokąt EC iest równoważny równoległobokowi AB (20. wnio. 1).

Wniosek II. Ponieważ równoległoboki maiące tęż samą podstawę, i wysokość, są równoważne (20); a tróykąty tey samey podstawy i wysokości, co i równoległoboki, są ich połowami; więc *wszystkie tróykąty maiące równe podstawy, i równe wysokości, są równoważne.*

22. *Twierdzenie.*

Powierzchnia iakiegokolwiek prostokąta Fig. 20. *ABCD, iest równa iloczynowi z iego podstawy BC, przez wysokość AB.*

Przypuśćmy naprzykład, że łokieć wzięty za iedność liniiową, mieści się 4 razy w podstawie BC, a 3 razy w wysokości AB, prostokąta AC. Przez punkta podziałów E, G, poprowadźmy względem BC, liniie równoległe EF, GH; te podzielą prostokąt AC na trzy prostokąty AF, EH, GC, równe (20. wn. 2): przez punkta znowu podziałów I, L, N, poprowadźmy względem wysokości AB, liniie równoległe IK, LM, NO; te podzielą każdy z prostokątów AF, EH, GC, na tyle łokci kwadratowych, ile iest podziałów w podstawie BC, toiest na 4. Aże dla otrzymania liczby kwadratów zawartych w całym prostokącie AC, potrzeba liczbę kwadratów zamkniętych w iednym prostokącie GC, powtórzyć tyle razy, ile iest podziałów w wysokości AB, toiest razy 3; zatem powierzchnia prostokąta AC, zamykać będzie 4 łokcie kwadratowe wzięte razy 3, czyli 12 łokci kwadratowych: więc taż powierzchnia wyrazi się ogólnie przez iloczyn z BC×AB (*).

(*) Mówi się tylko przez skrócenie, że powierzchnia prostokąta iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość: gdyż właściwie należałoby powiedzieć, że powierzchnia prostokąta iest równa pewney liczbie kwadratów równych ustawionych na iego podstawie, albo na wysokości, tyle razy wziętych, ile razy mieści się bok iednego z tych kwadratów w wysokości, albo w podstawie prostokąta.

Uwaga. Ten sam sposób dowodzenia służy i na przypadek, w którym iedność za miarę wzięta nie mieści się zupełnie w podstawie, albo w wysokości prostokąta. Bo daymy np. że ta iedność mieści się w podstawie BC, razy $3\frac{1}{4}$, a w wysokości AB, razy 4. Poprowadziwszy równoległe względem BC i AB; prostokąt AC podzieli się na 12 kwadratów równych, i 4 prostokąty EK, FL, GM, HC, które są równe między sobą: gdyż każdy z tych prostokątów ma podstawę równą bokowi EF kwadratu, a wysokość $=ED=\frac{1}{4}$; te 4 prostokąty razem wzięte, są równe iednemu kwadratowi maiącemu za bok EF; więc prostokąt AC zawierać będzie 13 równych kwadratów, toiest liczbę taką, iaka wypada z pomnożenia 4 przez $3\frac{1}{4}$.

Wniosek I. Jeżeli prostokąt AC iest kwadratem, toiest, ieżeli podstawa BC iest równa wysokości AB, wtedy powierzchnia tego prostokąta będzie równa iloczynowi z $BC \times BC = \overline{BC}^2$.

Wniosek II. *Powierzchnia iakiegokolwiek równoległoboku AC (fig. 27. bis), równa iest iloczynowi z iego podstawy AB, przez wysokość AF.* Bo równoległobok AC iest równoważny prostokątowi FB, maiącemu tę samą z nim podstawę AB i spólną wysokość AF (20. wn. 1); aże ten prostokąt iest równy $AB \times AF$, zatem będzie i równoległobok $AC = AB \times AF$.

Fig. 28. *Wniosek* III. *Powierzchnia iakiegokolwiek tróykąta ABC, iest równa iloczynowi z podstawy AC, przez połowę wysokości BX tróykąta.* Bo tróykąt ABC iest połową równoległoboku BA, tey samey z nim

podstawy, i wysokości (21); aże równoległobok BA=AC×BX, więc będzie tróykąt ABC= $\frac{1}{2}$ × AC×BX= $\frac{AC \times BX}{2}$.

Wniosek IV. Oznaczywszy powierzchnie dwóch równoległoboków przez R, r, podstawy przez P, p, wysokości przez W, w; będzie R=P×W, r=p×w; czyli R: r= P×W: p×w. Z tey proporcyi, przypuściwszy w niey P=p i podzieliwszy drugi stosunek przez P, wypada R: r=W: w; toiest, *że równoległoboki maiące równe podstawy, maią się do siebie iak ich wysokości.* Z tey samey proporcyi, przypuściwszy w niey W=w i podzieliwszy drugi stosunek przez W, wypada R: r=P: p; toiest: *że równoległoboki równey wysokości maią się do siebie iak ich podstawy.*

Wniosek V. Ponieważ tróykąty są połowami równoległoboków, tey samey z niemi podstawy i wysokości; a połowy są do siebie w tym samym stosunku, co ich całości: więc *tróykąty równey podstawy, maią się do siebie iak wysokości; a tróykąty równych wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.*

23. *Twierdzenie.*

Powierzchnia trapeza ABDC, iest równa iloczynowi z iego wysokości AF, przez połowę summy boków AB, CD równoległych; albo równa iloczynowi z tey samey wysokości, przez linią łączącą środki dwóch boków AC, BD nierównoległych. Fig. 30.

Bo 1ód. poprowadziwszy przekątną AD, ta podzieli trapez na dwa tróykąty ABD, ACD, z których pierwszy iest= $\frac{AB \times AF}{2}$ (22. wn. 3), a drugi= $\frac{CD \times AF}{2}$; zatem summa tych dwóch tróykątów, czyli powierzchnia trapeza ABDC iest $= \frac{AB \times AF}{2} + \frac{CD \times AF}{2} = \frac{AF \times (AB + CD)}{2}$.

2re. przez środek O, boku BD, poprowadźmy GK równoległą do AC, i przecinaiącą przedłużony bok AB w punkcie G; nadto poprowadźmy LO równoległą do CD: będą czworokąty ALOG, LCKO, równoległobokami (I, 20. wn. 2). Aże, z równości dwóch tróykątów BOG, KOD, maiących bok BO=OD z wykréślenia, kąty przy O wierzchołkiem przeciwległe równe, i kąty GBO, ODK naprzemianległe równe, wypada (I, 4), bok BG=KD, OG=OK, a w równoległobokach AO, LK, iest OG=AL, i OK=LC; zatem AL=LC (pew. 1). Więc liniia LO przechodzi przez środki dwóch boków AC, KG równoległych. A ponieważ taż liniia LO=AG=CK; zatem $LO = \frac{AG + CK}{2} = \frac{AB + BG + CK}{2} = \frac{AB + CD}{2}$, gdyż BG = KD. Okazaliśmy zaś, że powierzchnia trapeza $ABDC = \frac{AF \times (AB + CD)}{2}$, przeto taż powierzchnia wyrazi się iescze przez AF × LO; toiest, przez iloczyn z wysokości trapeza, przez liniią łączącą środki dwóch iego boków nierównoległych.

Uwaga. Chcąc doyść powierzchni wielokąta o iakieykolwiek liczbie boków, należy go podzielić na tróykąty, przez przekątne, albo przez liniie poprowadzone od punktu wewnątrz wielokąta obranego, do wierzchołków wszystkich iego kątów, i doyść powierzchni każdego z tych tróykątów; a wzięta summa powierzchni tróykątów wszystkich, będzie szukaną powierzchnią wielokąta danego.

24. *Twierdzenie*.

Powierzchnia wielokąta foremnego ABCDE, iest równa iloczynowi z iego obwodu, przez połowę prostopadłey OH, spuszczoney ze środka O wielokąta, na bok iego którykolwiek BC. Fig. 31.

Bo tróykąt $BOC = \frac{BC \times OH}{2}$ (22. wnio. 3); tróykąt $COD = \frac{CD \times OK}{2}$; aże prostopadła $OH = OK$ (10), więc summa tych dwóch tróykątów będzie $= \frac{(BC + CD) \times OH}{2}$. Wynaydziemy podobnie powierzchnie tróykątów DOE, EOA, AOB. A zatem summa tróykątów składaiących wielokąt cały ABCDEA, czyli iego powierzchnia ma za miarę $\frac{(BC + CD + DE + EA + AB) \times OH}{2}$; toiest, równa się iloczynowi z obwodu wielokąta, przez połowę prostopadłey spuszczoney z iego środka na bok wielokąta którykolwiek.

Wniosek I. *Powierzchnia koła równa iest iloczynowi z iego okręgu przez połowę promienia.* Bo koło uważać można za wielokąt foremny o nieskończoney liczbie małych boków (11. Uwaga). Aże w takim wielokącie prostopadła spuszczona z iego środka, na bok iego którykolwiek, nie różni się od promienia, a obwód od okręgu koła; więc powierzchnia koła ma za miarę iloczyn z okręgu przez połowę promienia.

Wniosek II. *Powierzchnia wycinka kołowego, równa iest iloczynowi z łuku służącego za podstawę wycinkowi, przez połowę promienia koła.* Bo wycinek uważać można iako złożony z nieskończoney liczby tróykątów, maiących za podstawy łuki wycinka, a za wysokość promień iego koła.

Fig.23. *Uwaga*. Gdy od wiadomey powierzchni wycinka AOBG odeymiemy powierzchnią tróykąta AOB, otrzymamy powierzchnią odcinka AGB.

25. *Zagadnienie*.

Dany wielokąt zamienić na tróykąt iemu równoważny.

Fig.32. Niech naprzykład, danym wielokątem będzie pięciokąt ABCDE. Poprowadźmy przekątną EC, a przez wierzchołek D tróykąta DEC, liniią DF równoległą względem podstawy EC, i przecinaiącą przedłużony bok AE w punkcie F: dwa tróykąty FEC, DEC, maiące spólną wysokość, i tę samą podstawę, będą równoważne (21. wnio. 2). Do każdego z tych tróykątów, dodawszy czworokąt ABCE, będzie czworokąt ABCF równoważny pięciokątowi ABCDE (pew. 2). Jeżeli znowu poprowadzimy przekątną BF, i zrobimy wykréślenie podobne poprzedzaiącemu, okażemy tym samym sposobem, że tróykąt GFC iest równoważny czworokątowi ABCF, a zatem i pięciokątowi ABCDE. Stosuiąc to samo rozumowanie do iakiegokolwiek wielokąta, i za każdem wykréśleniem liczbę iego boków zmnieyszaiąc iednym, przyydziemy do tróykąta równoważnego wielokątowi.

Przykłady.

1. Znaleść powierzchnią prostokąta maiącego podstawę = 21, 37 łok. a wysokość = 9, 24 łok.

Powierzchnia szukana będzie $=21,37\times 9,24=197,4588$ łokci kw. (22).

II. Znaleść powierzchnią tróykąta maiącego podstawę $=4\frac{2}{3}$ łok. a wysokość $=3$ łok.

Powierzchnia szukana będzie $=\frac{3}{2}\times 4\frac{2}{3}=7$ łok. kw. (22. wn. 3).

III. Znaleść powierzchnią równoległoboku, którego podstawa ma 6 sążni, 4 stóp, 5 cali i 6 liniy; a wysokość zawiera 4 sążnie, 5 stóp, 8 cali i 9 liniy.

Ponieważ sążeń kw. ma 36 stóp kw.
Stopa kw. zamyka 144 cali kw.
Cal kw. ma 144 liniy kw.
Liniia kw. zawiera 144 punk. kw. i t. d.

Więc wysokość 4 sążni, 5 stóp, 8 cali i 9 liniy wyrażona w liniiach, będzie 4281

Podstawa 6 sążni, 4 stóp, 5 cali, 6 liniy, wyrażona w lin. 5826

Stąd iloczyn . . . 24941106 lin. kw.

Podzieliwszy ten iloczyn przez 144, wypadnie na iloraz 173202 cali kw. i 18 lin. kw.

Podzieliwszy znowu 173202 przez 144, wypadnie 1202 stóp kw. i 114 cali kw.

Podzieliwszy nakoniec 1202 przez 36, wypadnie 33 sążni kw. i 14 stóp kw. Zatem szukana powierzchnia równoległoboku iest równa 33 sążni kw. 14 stóp kw. 114 cali kw. i 18 liniy kw.

KONIEC XIĘGI DRUGIÉY.