25. *Twierdzenie.*

Powierzchnie dwóch kul maią się do siebie iak kwadraty z ich promieni, albo ze średnic.

Bo powierzchnia kuli równa iest cztery razy wziętemu kołu wielkiemu kuli (22. w. 1); więc powierzchnie dwóch kul maią się do siebie, iak cztery razy wzięte koła wielkie tych kul, czyli iak też koła raz wzięte; aże koła maią się do siebie iak kwadraty z ich promieni, lub iak kwadraty ze średnic, więc i powierzchnie dwóch kul maią się do siebie iak kwadraty z promieni, lub z ich średnic.

ROZDZIAŁ XIII.

O MIERZENIU BRYŁ.

Opisania.

I. Do mierzenia brył używa się zwyczaynie *sześcianu*, który gdy ma krawędź iedną równą długości sążnia, łokcia, stopy, cala i t. d. nazywa się *sążniem sześciennym*, *łokciem sześciennym*, *stopą sześcienną*, *calem sześciennym i t. d.*

Mierzyć zatem iakąkolwiek bryłę, iestto dochodzić, ile razy mieści się w niey sześcian za miarę czyli iedność wzięty.

II. Dwa wielościany różne co do kształtu, lecz równe sobie co do bryłowatości, nazywaią się *równoważne.*

26. *Twierdzenie.*

Dwa iakiekolwiek graniastosłupy są równoważne, gdy maią wysokości równe, a podstawy równoważne.

Bo wystawiwszy sobie te dwa graniastosłupy podzielone na warszty nieskończenie cienkie, płaszczyznami równoległemi do ich podstaw; można w każdym graniastosłupie, każdą taką warsztę uważać za równą iego podstawie (op. IV. r. XII); aże podstawy w obu graniastosłupach są z założenia równoważne, więc każda warszta graniastosłupa iednego iest równoważna każdey warszcie drugiego graniastosłupa: nadto w obu graniastosłupach, z przyczyny ich równey wysokości, liczba warszt iest taż sama; przeto zbiór wszystkich warszt iednego graniastosłupa iest równoważny zbiorowi wszystkich warszt graniastosłupa drugiego; czyli te dwa graniastosłupy są równoważne. (*)

27. *Twierdzenie.*

Fig. 37. *Bryłowatość równoległościanu prostokątnego SB równa iest iloczynowi z podstawy SPCD równoległościanu, przez iego wysokość KS.*

Przypuśćmy naprzykład, że łokieć wzięty za miarę liniiową mieści się 4 razy w wysokości KS, 5 razy w boku SP, a 4 razy w drugim boku SD, podstawy SPCD. Ponieważ powierzchnia tey podstawy iest

(*) Dla krótkości, użyliśmy tego sposobu dowodzenia; ścisleyszy nad ten znaleść można w Jeometryi Euklidesa albo Leżandra.

równa SP$\times$SD (11, 22); zamykać więc będzie 20 łokci kwadratowych; można zatem na tęy podstawie umieścić 20 łokci sześciennych. Aże gdy przez punkta f, g, h, podziałów wysokości KS, z których każdy oznacza łokieć, poprowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy SC, te podzielą bryłę na 4 warszty, z których każda zamykać będzie tyle łokci sześciennych, ile iest łokci kwadratowych w podstawie SC, toiest 20; więc równoległościan SB zawierać będzie 20 łokci sześciennych wziętych razy 4, czyli bryłowatość iego będzie równa SP$\times$SD$\times$KS; *więc i t. d.*

Wniosek I. Jeżeli prostokąt SC iest kwadratem, bok zaś iego SP iest równy wysokości KS równoległościanu, wtedy bryła ta będzie sześcianem, i iey miara SP$\times$SD$\times$KS zamieni się na KS$\times$KS$\times$KS$=$KS^3.

Wniosek II. *Bryłowatość iakiegokolwiek graniastosłupa, prostego lub pochyłego, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.* Bo każdy graniastosłup iest równoważny równoległościanowi prostokątnemu, maiącemu z nim też samą wysokość, a podstawę równoważną (26); iest zaś ten równoległościan równy iloczynowi z podstawy przez wysokość, przeto i wszelki graniastosłup mieć będzie za miarę tenże sam iloczyn.

Wniosek III. *Bryłowatość iakiegokolwiek walca prostego lub pochyłego, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość.* Bo każdy walec można uważać za graniastosłup maiący za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków (opis. VIII. r. XII).

28. *Twierdzenie.*

Fig.38. *Jeżeli iakikolwiek ostrosłup SABCDE, przetniemy płaszczyzną abcde równoległą do iego podstawy ABCDE; przecięcie abcde będzie wielokątem podobnym podstawie.*

Jakoż, ponieważ dwie płaszczyzny ABCDE, abcde, równoległe przecięte są płaszczyzną trzecią AES, więc ich przecięcia AE, ae, będą równoległe (9); dla podobney przyczyny i liniie AB,BC,DC, DE będą równoległe do ab, bc, cd, de; zatem kąty BAE, bae, ABC, abc i t. d. są równe (12); więc wielokąty ABCDE, abcde są równokątne. Nadto ponieważ tróykąty SAE, SAB, SBC... przecięte są liniiami ae, ab, bc... równoległemi do ich podstaw; będzie więc SA: sa = AE: ae = AB: ab = BC: bc... (III, 1. w.): przeto wielokąty ABCDE, abcde równokątne, maią i boki odpowiedne proporcyonalne, są zatem podobne.

Fig.38. *Wniosek.* Jeżeli dwa ostrosłupy SABCD, SXYZ maiące wierzchołek spólny S, a podstawy na iedney płaszczyznie, czyli maiące też samą wysokość, przetniemy płaszczyzną abcxyz równoległą do płaszczyzn podstaw ABCDE i XYZ; będą *przecięcia abcde, xyz, proporcyonalne do tychże podstaw.* Bo dla podobieństwa wielokątów AD, ad, iest wielokąt AD: ad $= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (III, 16), aże iest AB: ab = AS: aS, więc wielokąt AD: ad $= \overline{AS}^2 : \overline{aS}^2$. Dla podobney przyczyny tróykąt XYZ: xyz $= \overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$. Lecz płaszczyzna abcxyz, i płaszczyzna podstaw ABCDE i XYZ, są do siebie równoległe, i przecięte płaszczyzną trzecią ASX; będą więc przecięcia AX, ax równoległe; a zatem w tróykącie AXS ma

się AS:aS=SX:Sx, czyli $\overline{AS}^2 : \overline{aS}^2 = \overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$; przeto wielokąt AD : ad=XYZ : *xyz*; czyli przecięcie abcde : *xyz* = podstawa ABCDE: XYZ.

29. *Twierdzenie.*

Dwa iakiekolwiek ostrosłupy SABCDE, SXYZ, maiące równe wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy ABCDE, XYZ. Fig. 38.

Bo dwa ostrosłupy równey wysokości złożone są z równey liczby przecięć, czyli warszt nieskończenie cienkich, na które podzielić się mogą płaszczyznami nieskończenie siebie bliskiemi i równoległemi do ich podstaw. Aże, podług wniosku twierdzenia poprzedzaiącego, każda warszta abcde nieskończenie cienka ostrosłupa SABCDE, ma się do takieyże warszty xyz odpowiedney w ostrosłupie SXYZ, iak podstawa ABCDE do podstawy XYZ; przeto i zbiór wszystkich warszt składaiących ostrosłup pierwszy, do zbioru wszystkich warszt ostrosłupa drugiego, iak postawa ABCDE: XYZ; czyli ostrosłup SABCDE: SXYZ=podstawa ABCDE: XYZ; *więc dwa ostrosłupy* i t. d.

Wniosek. Stąd wypada, że dwa osrosłupy są równoważne, ieżeli maią wysokości równe, a podstawy równoważne.

30. *Twierdzenie.*

Wszelki ostrosłup tróykątny ACBF iest trzecią częścią graniastosłupa tróykątnego AE, maiącego z nim też samą podstawę ACB, i spólną wysokość. Fig. 39.

Bo odiąwszy ostrosłup tróykątny ACBF od graniastosłupa AE, pozostanie ostrosłup czworokątny ADEBF, maiący za podstawę równoległokok ADEB, a wierzchołek w punkcie F. Pociągnąwszy znowu przekątną AE, i przez punkta A, F, E, poprowadziwszy płaszczyznę AFE, ta podzieli ostrosłup czworokątny ADEBF na dwa ostrosłupy tróykątne ADEF, AEBF, które są równoważne sobie (29. w.): maią bowiem podstawy ADE, AEB, równe a za spólną wysokość prostopadłą, spuszczoną z wierzchołka F na płaszczyznę równoległoboku AE. Aże ostrosłup tróykątny ADEF iest także równoważny ostrosłupowi tróykątnemu ACBF, gdyż maią podstawy DFE, ACB, równe (opi. IV. r. XII); i tęż samą wysokość co i graniastosłup AE; zatem trzy ostrosłupy tróykątne ADEF, ABEF, ACBF, składaiące graniastosłup AE, są równoważne między sobą; więc ostrosłup ACBF iest trzecią częścią graniastosłupa AE.

Wniosek I. Ponieważ ostrosłup tróykątny iest trzecią częścią graniastosłupa tróykątnego iedney z nim podstawy i wysokości, a każdy graniastosłup ma za miarę iloczyn z podstawy przez wysokość (27. w. 2) *więc ostrosłup tróykątny iest równy trzeciey części iloczynu z podstawy przez swoię wysokość.*

Fig. 38. *Wniosek* II. *Wszelki ostrosłup SABCDE, ma za miarę trzecią część iloczynu z podstawy ABCDE przez wysokość SO.* Bo przez wierzchołek S ostrosłupa, i przekątne EB, EC, iego podstawy, poprowadziwszy płaszczyzny SEB, SEC; te podzielą ostrosłup SABCDE na ostrosłupy tróykątne, z których każdy, podług wniosku poprzedzaiącego, mieć będzie za mia-

rę trzecią część iloczynu z swoiey podstawy przez wysokość SO; a zatem i summa tych ostrosłupów, czyli ostrosłup SABCDE iest równy trzeciey części iloczynu z podstawy ABCDE przez wysokość SO.

Wniosek III. *Wszelki ostrokrąg prosty albo pochyły ma za miarę trzecią część iloczynu z podstawy przez wysokość.* Bo ostrokrąg iest ostrosłupem maiącym, za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków (opis. X. r. XII).

Wniosek IV. *Każdy ostrokrąg iest trzecią częścią walca maiącego z nim spólną podstawę, i tę samą wysokość.* Bo pierwsza z tych brył, ma za miarę trzecią część iloczynu z iey podstawy przez wysokość, a druga, cały ten iloczyn (27. w. 3).

31. *Twierdzenie.*

Wszelki ostrosłup ścięty, czyli kloc ostrosłupowy ABCDEF, składa się z trzech ostrosłupów maiących wysokość kloca, i z których ieden ma za podstawę ACB dolną podstawę kloca, drugi podstawę DEF górną kloca, a trzeci, podstawę średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami. Fig. 40.

Bo przez punkta A, F, B, poprowadziwszy płaszczyznę AFB, ta odetnie od kloca, ostrosłup tróykątny ACBF, maiący za podstawę tróykąt ACB, a wysokość też samą co i kloc; gdyż wierzchołek F tego ostrosłupa znayduie się na podstawie górney kloca. Przez punkta D, F, B, poprowadziwszy znowu płaszczyznę DFB, ta pozostały ostrosłup czworokątny ADEBF podzieli na dwa ostrosłupy tróykątne: ieden DFEB stoiący na postawie DFE górney kloca i maiący tę samą z nim wysokość; gdyż wierzchołek iego B znayduie się na podstawie dolney kloca; drugi ostrosłup ADBF, maiący za podstawę tróykąt ADB, a wierzchołek w punkcie F. Lecz poprowadziwszy liniią FG równoległą do EB, za ten trzeci ostrosłup ADBF można wziąć inny ostrosłup ADBG iemu równoważny; ma bowiem z nim tę samą podstawę ADB, i spólną wysokość; gdyż wierzchołki F, G, tych ostrosłupów znayduią się na linii FG, równoległey do krawędzi EB kloca, a przeto równoległey i do płaszczyzny ich podstaw (7). Aże ostrosłup tróykątny ADBG, można uważać iako stoiący na podstawie AGB, i maiący wierzchołek w punkcie D, a zatem maiący wysokość kloca; są więc trzy ostrosłupy tróykątne ACBF, DFEB, ABGD, składaiące kloc ostrosłupowy AE. Pozostaie tylko okazać że podstawa AGB ostatniego z tych trzech ostrosłupów, iest średnią proporcyonalną między podstawami dwóch pozostałych. Jakoż dwa tróykąty ABG, ABC, maiące iednakową wysokość, maią się do siebie iak podstawy BG, BC (II, 22. w. 5); toiest ABG: ABC = BG:BC; zatem będzie $\overline{ABG}^2 : \overline{ABC}^2 = \overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$. Aże tróykąty DEF, ABC, maiąc boki odpowiednie równoległe są podobne (12), i daią DFE: ABC $= \overline{EF}^2$ czyli $\overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$ (III, 15), więc z przyczyny spólnego stosunku $\overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$, będzie $\overline{ABG}^2 : \overline{ABC}^2 =$ DFE: ABC, stąd $\overline{ABG}^2 = ABC \times DFE$, czyli ABC: ABG = ABG : DFE; więc podstawa ABG iest średnią proporcyonalną między dwiema podstawami kloca; *zatem wszelki ostrosłup ścięty i t. d.*

Wniosek I. *Bryłowatość kloca ostrosłupowego ma za miarę trzecią część iloczynu z wysokości kloca, przez summę z podstawy iego górney, i dolney, i średniey proporcyonalney między temi dwiema podstawami.*

Wniosek II. Ponieważ kloc ostrokręgowy, można uważać za kloc ostrosłupa maiący za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków; *więc i bryłowatość kloca ostrokręgowego ma za miarę trzecią część iloczynu z iego wysokości, przez summę z dwóch kół służących mu za podstawy, i koła średnio proporcyonalnego między temi podstawami.*

32. *Twierdzenie.*

Gdy graniastosłup tróykątny maiący za podstawę ABC, przetniemy płaszczyzną DES nachyloną do tey podstawy; bryła ABCEDS z tego przecięcia otrzymana, będzie równa summie trzech ostrosłupów, których wierzchołkami są punkta S, E, D, a podstawą spólną tróykąt ABC. Fig. 41.

Jakoż przez trzy punkta S, A, C, poprowadziwszy płaszczyznę SAC, ta od graniastosłupa ściętego ABCEDS, odetnie ostrosłup tróykątny SABC, maiący za podstawę ABC, a wierzchołek w punkcie S. W pozostałym znowu ostrosłupie czworokątnym SACDE maiącym wierzchołek S, a podstawę ACDE, poprowadziwszy płaszczyznę SEC, ta podzieli ostrosłup czworokątny na dwa ostrosłupy tróykątne SACE, i SCDE: z tych ostrosłup SACE, maiący za podstawę tróykąt AEC a za wierzchołek S, iest równoważny ostrosłupowi BAEC, maiącemu spólną z nich podstawę AEC, i spólną wysokość; gdyż wierzchołki S, B, tych ostrosłupów znayduią się na linii SB równoległey do każdey z liniy AE, CD, a zatem i do ich płaszczyzny AEC (7): ten zaś ostrosłup BAEC, uważać można iako maiący za podstawę ABC, a za wierzchołek punkt E. Co do ostrosłupa trzeciego SCDE, ten naprzód zamieniony być może na ostrosłup mu równoważny ASCD, ma bowiem z nim tę samą podstawę SDC, i spólną wysokość; gdyż wierzchołki A, E, tych ostrosłupów znayduią się na linii AE równoległey do płaszczyzny SCD: następnie, ponieważ ostrosłup ASCD, może być zamieniony na ostrosłup mu równoważny BACD, maiący z nim spólną podstawę ADC, i spólną wysokość; bo wierzchołki S, B, tych ostrosłupów znayduią się na linii SB równoległey do podstawy ADC; przeto ostrosłup SCDE iest równoważny ostrosłupowi BACD, z których ten ostatni może być uważany iako maiący za podstawę ABC, a za wierzchołek punkt D. Więc graniastosłup ścięty ABCDES, iest równy summie trzech ostrosłupów SABC, EABC, DABC, maiących za podstawę spólną tróykąt ABC, a za wierzchołki odpowiedne punkta S, E, D.

Wniosek. Jeżeli krawędzie AE, BS, CD, są prostopadłe do płaszczyzny podstawy ABC, będą one razem wysokościami trzech ostrosłupów składaiących graniastosłup ścięty AD; *więc bryłowatość graniastosłupa tróykątnego ściętego wyrazi się wtedy przez* $\frac{1}{3}AE \times ABC + \frac{1}{3}BS \times ABC + \frac{1}{3}CD \times ABC = \frac{1}{3}ABC \times (AE + BS + CD)$; *toiest, przez iloczyn z trzeciey części podstawy graniastosłupa przez summę trzech iego krawędzi.*

33. *Twierdzenie.*

Bryłowatość kuli równa iest iloczynowi z powierzchni kuli, przez trzecią część iey promienia.

Kulę bowiem można uważać iako złożoną z nieskończenie wielu ostrosłupów maiących za podstawy, bardzo małe cząstki powierzchni kuli, a za wierzchołek spólny, iey środek. Aże każdy z tych ostrosłupów ma za wysokość promień kuli, i równa się iloczynowi z powierzchni swoiey podstawy, przez trzecią cześć tey wysokości (30. wn. 1); przeto summa wszystkich tych ostrosłupów czyli bryłowatość kuli, równa będzie iloczynowi z iey powierzchni, przez trzecią część promienia kuli.

Wniosek I. *Bryłowatość kuli iest równa iloczynowi z powierzchni koła wielkiego kuli, przez* $\frac{2}{3}$ *iey średnicy.*

Bo powierzchnia kuli równa iest 4 razy wziętey powierzchni koła iey wielkiego (22. wn. 1); więc bryłowatość kuli równa będzie 4 razy wziętey powierzchni tegoż koła, pomnożoney przez $\frac{1}{3}$ promienia; albo równa powierzchni iednego iey wielkiego koła, pomnożoney przez $\frac{4}{3}$ promienia: aże $\frac{4}{3}$ części promienia równe są $\frac{2}{3}$ częściom średnicy; więc bryłowateść kuli równa iest iloczynowi z powierzchni iey koła wielkiego przez $\frac{2}{3}$ średnicy.

Wniosek II. *Bryłowatość wycinka kulistego OABC, utworzonego obrotem wycinka kołowego BOC, około promienia BO, iest równa iloczynowi z trzeciey części promienia kuli, przez cześć powierzchni tego wycinka kulistego, utworzoną łukiem BC.* Fig. 30.

Fig. 36. Gdy od wycinka kulistego OABC, odeymiemy ostrokrąg OAECF, maiący za podstawę kolo AECF, a wierzchołek w środku kuli, otrzymamy odcinek kulisty BAFCE. Żeby zaś wynaleść bryłowatość ostrokręgu OAECF, potrzeba mieć wiadomą iego wysokość OD wyrażoną w części promienia kuli. W praktyce wysokość ta otrzymuie się łatwo: bo zmierzywszy cyrklem albo innem narzędziem średnicę AC koła AECF, i wziąwszy tey średnicy połowę DC; w tróykącie prostokątnym DCO, ponieważ $\overline{DO}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{DC}^2$, będzie $DO = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{DC}^2}$; maiąc zatem wiadomą liniią DC, i kuli promień OC, wynaydziemy wysokość DO, a następnie i bryłowatość ostrokręgu OAECF (30.w.3).

Wynalazłszy podobnym sposobem bryłowatość odcinka kulistego BA'F'C'E', gdy od tey odeymiemy bryłowatość odcinka BAFCE, otrzymamy bryłowałość odcinka kulistego AC', o dwoch podstawach AECF, A'E'C'F'.

Uwaga I. Oznaczywszy kulę przez K, koło iey wielkie przez Q, średnicę przez S, walec na kuli opisany przez W, ostrokrąg wpisany w walec przez O; będzie $K = \frac{2}{3}S \times Q$ (33.w.1). Aże walec opisany na kuli ma za podstawę koło wielkie kuli, a za wysokość iey średnicę, będzie więc $W = S \times Q$ (27 wn. 3): iest znowu ostrokrąg trzecią częścią walca opisanego na nim (30. wn. 4); zatem $O = \frac{1}{3}S \times Q$. Będzie więc $W : K : O = S \times Q : \frac{2}{3}S \times Q : \frac{1}{3}S \times Q = 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{3} : = 3 : 2 : 1$; toiest, walec, kula, i ostrokrąg, gdyż tych trzech brył pierwsza iest opisana na dwóch drugich, maią się do siebie iak liczby 3, 2, 1.

Uwaga II. Widzieliśmy w twierdzeniach podrzedzaiących, że iakakolwiek bryła iest zawsze równa iloczynowi z trzech wymiarów; więc dwie iakiekolwiek bryły iednego gatunku, maią się do siebie iak iloczyny z trzech wymiarów iednego imienia. Oznaczywszy zatem przez S, s, dwie bryły iednego gatunku, przez H, B, L, h, b, l, ich trzy wymiary iednego imienia: będzie $S : s = H \times B \times L : h \times b \times l$. W tey proporcyi uczyniwszy wymiar $H = h$, i podzieliwszy drugi stosunek przez H; będzie $S : s = B \times L : b \times l$. W tey samey proporcyi uczyniwszy znowu $B \times L = b \times l$, i podzieliwszy drugi stosunek przez $B \times L$; wypadnie $S : s = H : h$. Skąd widzimy, *że dwa graniastosłupy, albo dwa walce, albo graniastosłup z walcem, maiące też samą wysokość, są do siebie w stosunku podstaw: maiące zaś te same podstawy, są do siebie iak ich wysokości*. Toż rozumie się o dwóch ostrosłupach, lub dwóch ostrokręgach, albo o ostrosłupie z ostrokręgiem, gdy maią tę samą wysokość, a podstawy nierówne; i naodwrót.

34. *Twierdzenie.*

Dwie bryły podobne maią się do siebie iak sześciany z ich wymiarów odpowiednych.

Bo w bryłach podobnych (24) ma się $H : h = B : b = L : l$. Zatem proporcya $S : s = H \times B \times L : h \times b \times l$, zamieni się na $S : s = H \times H \times H : h \times h \times h = B \times B \times B : b \times b \times b = L \times L \times L : l \times l \times l$, czyli $S : s = H^3 : h^3 = B^3 : b^3 = L^3 : l^3$; *więc dwie bryły i t. d.*

Wniosek. Więc naprzykład, bryłowatości dwóch kul maią się do siebie iak sześciany z ich promieni, lub z ich średnic.

Uwaga. Porównywaiąc zatem z sobą dwie kule, z których iedna ma np. dwie stopy średnicy, a druga stopę iedną; widzimy: że bryłowatości tych kul maią się do siebie iak 8: 1; ich powierzchnie iak 4: 1; a okręgi kół wielkich iak 2: 1. W ogólności, bryła którey wszystkie wymiary są podwóyne, potróyne i t. d. względem wymiarów bryły drugiey, iest 8, 27 i t. d. razy większa od bryły drugiey.

Przypis ogólny.

Poprzedzaiące twierdzenia o mierzeniu brył można ogólniey i krócey wyrazić za pomocą znaków algiebraicznych, i tak:

I. Niech P, oznacza podstawę graniastosłupa; W, iego wysokość: będzie bryłowatość graniastosłupa równa $P \times W$, albo PW..(27. wn. 2).

II. Niech P, będzie podstawą ostrosłupa; W, iego wysokością: bryłowatość ostrosłupa wyrazi się przez $\frac{P \times W}{3}$, lub $\frac{PW}{3}$..(30.w.1).

III. Niech W, wyraża wysokość kloca ostrosłupowego; P, P′, iego podstawy równoległe, między któremi średnia proporcyonalna będzie $\sqrt{P \times P'}$: bryłowatość kloca ostrosłupowego będzie równa $\frac{W}{3} \times (P + P' + \sqrt{P \times P'})$ .. (31.w.1).

IV. Niech P, wyraża podstawę graniastosłupa tróykątnego ściętego; W, W′, W″, wysokości trzech iego wierzchołków: bryłowatość graniastosłupa ściętego będzie $\frac{P}{3} \times (W + W' + W'')$..(32. wn.).

V. Niech R, oznacza promień podstawy walca; W, iego wysokość: będzie okrąg podstawy walca równy $2R \times \frac{22}{7}$ (III, 28. uw.); a powierzchnia tey podstawy równa $2R \times \frac{22}{7} \times \frac{R}{2} = R^2 \times \frac{22}{7}$ (II, 24. w. 1); czyli stosunek $\frac{22}{7}$ okręgu koła do średnicy oznaczywszy przez π, będzie powierzchnia podstawy walca równa πR^2; a bryłowatość walca wyrazi się przez $\pi R^2 \times W$, czyli $\pi R^2 W$.. (27. wn. 3).

VI. Niech R, oznacza promień podstawy ostrokręgu; W, iego wysokość: będzie bryłowatość ostrokręgu równa $\pi R^2 \times \frac{1}{3} \times W$, albo $\frac{1}{3} \pi R^2 W$.. (30. wn. 3).

VII. Niech A, B, wyrażaią promienie podstaw kloca ostrokręgowego; W, iego wysokość: podstawy tego kloca będą πA^2, πB^2, a między temi średnia proporcyonalna $\sqrt{\pi A^2 \times \pi B^2}$: bryłowatość zaś kloca wyrazi się przez $\frac{1}{3} W \times (\pi A^2 + \pi B^2 + \sqrt{\pi A^2 \times \pi B^2})$ czyli $\frac{1}{3} \pi W \times (A^2 + B^2 + AB)$ .. (31. w. 2)

VIII. Niech R, oznacza promień kuli; iey powierzchnia będzie $4 \pi R^2$.. (22, w. 1): a bryłowatość kuli wyrazi się przez $4 \pi R^2 \times \frac{R}{3}$ czyli $\frac{4}{3} \pi R^3$..(33).

IX. Nakonice niech R, oznacza promień wycinka kulistego; W, wysokość odcinka kulistego, którego powierzchnia kulista służy za podstawę wycinkowi kulistemu: będzie ta podstawa równa okręg. $R \times W = 2 \pi R \times W$ (22.w.3); a bryłowatość wycinka kulistego wyrazi się przez $\frac{2}{3} \pi R^2 \times W$ (33.w.2).