XIĘGA IV.

ROZDZIAŁ XI.

O PŁASZCZYZNACH PRZECINAIĄCYCH SIĘ, I LINIIACH PROSTYCH PRZECIĘTYCH PŁASZCZYZNAMI.

Opisania.

I. Przez ieden punkt, iako też przez iedną liniią prostą, można poprowadzić nieskończoną liczbę płaszczyzn.

II. Liniia iest *prostopadła do płaszczyzny*, gdy iest prostopadła do wszystkich liniy prostych przez iey *spodek* na płaszczyznie poprowadzonych: naodwrót i płaszczyzna iest w tym razie prostopadła do linii. *Spodek* prostopadłey iest punkt, w którym ta liniia spotyka płaszczyznę.

III. Liniia iest *równoległa do płaszczyzny*, albo dwie płaszczyzny są *równoległe względem siebie*; gdy liniia nie spotyka nigdy płaszczyzny, albo gdy płaszczyzny naydaley będąc przedłużone zeyść się z sobą nie mogą.

IV. Dowiedziemy (twier. 1), że spólnem przecięciem dwóch płaszczyzn z sobą spotykaiących się, iest *liniia prosta*; nachy-
Tab. V. lenie się zatem ku sobie dwóch płasz-
Fig. 1. czyzn MN, PQ, oznacza się kątem ABC, zawartym dwiema prostopadłemi AB, BC,

do spólnego tych płaszczyzn przecięcia PN, z iednego punktu B, na dwóch płaszczyznach, poprowadzonemi.

V. *Kąt bryłowy*, iest przestrzeń kątowa S, zawarta więcey niż dwiema płaszczyznami ASB, BSC, CSD, DSA, w iednym schodzącemi się punkcie Fig. 2.

1. *Twierdzenie.*

Przecięcie się spólne dwóch płaszczyzn iest liniia prosta.

Bo liniia prosta przechodząca przez dwa punkta spólnego przecięcia dwóch płaszczyzn, iest razem na iedney i drugiey płaszczyznie, więc taż liniia prosta musi być spólnem przecięciem tych płaszczyzn.

2. *Twierdzenie.*

Jeżeli liniia prosta AP, iest prostopadła do dwóch liniy PB, PC, przecinaiących się w iey spodku P, na płaszczyznie MN; będzie taż liniia AP, prostopadła i do płaszczyzny MN. Fig. 3.

Obrawszy bowiem na liniiach PC, PB, dwa iakiekolwiek punkta C, B, i połączywszy ie liniią prostą CB; a od śródka Q tey linii, poprowadziwszy do P, liniią QP, nadto od punktu A do B, Q, C, liniie AB, AQ, AC. Ponieważ w tróykącie PBC, podstawa BC iest podzielona w punkcie Q, na dwie równe części, będzie $\overline{PC}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2$ (III,22); podobnie w tróykącie BAC, iest $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2$; więc, odiąwszy pierwszą równość od drugiey, i uważaiąc, że tróykąty APC, APB prostokątne przy P, daią $\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{AP}^2, \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2$ (III, 17. w. 2); będzie $\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AP}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2$; a podzieliwszy obie strony przez 2, otrzymamy $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$; czyli, dodawszy do obu stron, $\overline{PQ}^2$, wypadnie $\overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{AQ}^2$; zatem tróykąt APQ iest prostokątny (III, 17, wn. 1), przy P; więc liniia AP iest prostopadła do PQ: podobnie można okazać że liniia AP iest prostopała do każdey linii prostey przez punkt P, na płaszczyznie MN poprowadzoney; zatem liniia AP będzie prostopadła i do płaszczyzny MN (opis. II).

3. *Twierdzenie.*

Fig. 4. *Dwie liniie proste AB, AC, przecinaiące się z sobą, są na iedney płaszczyznie i oznaczaią iey położenie.*

Bo przez liniią AB, wystawiwszy sobie poprowadzoną płaszczyznę, i obracaiącą się około tey linii póty, póki nietrafi na punkt C, wtedy, ponieważ liniia AC, mieć będzie dwa punkta na tey płaszczyznie, więc cała na niey znaydować się będzie; położenie zatem tey płaszczyzny będzie tem samem oznaczone, że znayduią się na niey dwie liniie proste AB, AC, przecinaiące się z sobą.

Wniosek I. Tróykąt ABC, czyli trzy punkta A, B, C, nie w linii prostey będące, oznaczaią położenie płaszczyzny.

Fig. 5 *Wniosek* II. Dwie liniie równoległe AB, CD, oznaczaią położenie płaszczyzny; bo przeciąwszy te liniie, trzecią liniią EF, będzie płaszczyzna dwóch liniy prostych AE, EF, płaszczyzną liniy równoległych AB, CD.

4. *Twierdzenie.*

Liniie pochyłe AD, AB... poprowadzone od punktu A do płaszczyzny MN, ieżeli są równo oddalone od prostopadłey AP, do teyże płaszczyzny, będą równe sobie; a z dwóch pochyłych AE, AB nierówno oddalonych od prostopadłey AP, liniia AE więcey oddalona, iest dłuższa od AB. Fig. 6.

Bo 1śd. ieżeli liniy pochyłych odległości DP, PC, PB, od linii AP, są równe; tróykąty prostokątne APD, APC, APB, maiące nadto bok AP spólny, będą równe sobie (1. 3): zatem pochyłe AD, AC, AB, równo oddalone od prostopadłey są między sobą równe.

2re. ieżeli odległość PE pochyłey AE, iest większa od odległości PB pochyłey AB, będzie (1, 13) pochyła AE, większa od AB, a zatem i od AC.

Wniosek. Spodek P prostopadłey AP, iest środkiem koła zakreślonego na płaszczyznie MN, z punktu A promieniem większym od AP; własność ta podaie sposób prowadzenia prostopadłey do płaszczyzny, z punktu nad nią wziętego.

5. *Twierdzenie.*

Jeżeli przez spodek P, prostopadłey AP, do płaszczyzny MN, poprowadzimy prostopadłą PD, do linii BC leżącey na teyże płaszczyznie, i koniec D tey prostopadłey, złączymy z punktem iakimkolwiek A prostopadłey pierwszey, liniią AD; będzie ta liniia AD prostopadła do BC. Fig. 7.

Wziąwszy bowiem BD=DC, i poprowadziwszy liniie PB, PC, AB, AC. Ponieważ liniia PD iest prostopadła do BC, i odległość BD=DC, więc pochyła PB=PC (1, 13); aże znowu względem prostopadłey AP, odległość PB=PC, zatem pochyła AB=AC (4); liniia więc AD ma dwa punkta A i D, równo oddalone od końców B i C, linii BC, zatem iest prostopadła do teyże linii.

Wniosek. Wypada stąd, że liniia BC iest prostopadła do płaszczyzny APD (2); bo ta liniia iest razem prostopadła do dwóch liniy prostych AD, PD, przecinaiących się w iey spodku D.

6. *Twierdzenie.*

Fig. 8. *Jeżeli liniia AP, iest prostopadła do płaszczyzny MN, wszelka liniia ED równoległa do linii AP, będzie prostopadła do teyże płaszczyzny.*

Bo przez liniie równoległe AP, ED, poprowadziwszy płaszczyznę APDE przecinaiącą się z płaszczyzną MN, w linii PD, a na płaszczyznie MN poprowadziwszy liniią BC prostopadłą do PD, i punkta A i D złączywszy liniią AD; podług wniosku twierdzenia poprzedzaiącego, liniia BC będzie prostopadła do płaszczyzny APDE, zatem kąt BDE iest prosty; aże kąt EDP iest także prosty (1, 19), bo liniia AP równoległa do DE, iest z założenia prostopadła do PD; zatem liniia DE iest prostopadła do dwóch liniy PD, BC, przecinaiących się w iey spodku D, więc iest prostopadła i do ich płaszczyzny MN (2).

Wniosek. Wypada stąd naodwrót, że ieżeli dwie liniie proste AP, ED, są prostopadłe do iedney płaszczyzny MN, te dwie liniie są do siebie równoległe; bo połączywszy spodki tych prostopadłych liniią PD, na płaszczyznie MN, będą linie AP, ED prostopadłe do linii PD (opis. II), a zatem będą względem siebie równoległe (1, 17).

Wniosek II. Dwie liniie AB, CD, równoległe do linii trzeciey EF, na odmienney z niemi płaszczyznie położoney, są równoległe względem siebie. Bo wyobraziwszy sobie płaszczyznę prostopadłą do linii EF, każda z liniy AB, CD, będąc równoległa do linii EF, będzie prostopadła do tey płaszczyzny; a zatem podług wniosku poprzedzaiącego liniie AB, CD, będą względem siebie równoległe. Fig. 14.

7. *Twierdzenie.*

Jeżeli liniia prosta AB, iest równoległa do linii CD, leżącey na płaszczyznie MN, będzie liniia AB równoległa i do tey płaszczyzny. Fig. 9.

Bo gdyby liniia AB nie była równoległa do płaszczyzny MN, więc spotykałaby razem tę płaszczyznę, i położoną na niey liniią CD; ale liniia AB nie może spotykać linii CD, bo iest do niey z założenia równoległa, przeto też liniia nie może spotkać i płaszczyzny MN; zatem iest do niey równoległa (opis. III.).

8. *Twierdzenie.*

Dwie płaszczyzny MN, PQ, prostopadłe do linii prostey AB, są do siebie równoległe. Fig. 10.

Gdyby bowiem te płaszczyzny przedłużone spotkały się z sobą w linii DC, wtedy, obrawszy na tey linii punkt O, i poprowadziwszy liniie BO, AO; ponieważ liniia AB iest prostopadła do płaszczyzny MN, więc iest prostopadła i do linii AO poprowadzoney przez iey spodek na tey płaszczyznie (opis. II.); dla tey samey przyczyny, i liniia AB iest prostopadła do BO; zatem byłyby dwie prostopadłe BO, AO spuszczone z iednego punktu O, na liniią AB, co być nie może; nie mogą przeto dwie płaszczyzny MN, PQ, spotkać się z sobą; są więc równoległe.

9. *Twierdzenie.*

Fig. 11. *Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe MN, PQ, są przecięte trzecią płaszczyzną ABCD, ich przecięcia AB, CD, będą względem siebie równoległe.*

Bo gdyby liniie AB, CD leżące na iedney płaszczyznie ABCD, nie były równoległe, więc przedłużone zbiegłyby się z sobą, a zatem zeszłyby się i płaszczyzny MN, PQ, na których one znayduią się; aże te płaszczyzny schodzić się nie mogą, będąc z założenia równoległe; zatem i liniie AB, CD muszą być względem siebie równoległe.

10. *Twierdzenie.*

Fig. 12 *Liniia AB prostopadła do płaszczyzny MN, iest prostopadła i do płaszczyzny PQ, równoległey do MN.*

Bo na płaszczyznie PQ, pociągnąwszy dowolnie liniią BC, i przez dwie liniie AB, BC poprowadziwszy płaszczyznę ABCD, przecinaiącą się z płaszczyzną MN, w linii AD, będzie to przecięcie AD równoległe do BC (9); aże liniia AB iest prostopadła do płaszczyzny MN, a zatem iest i do linii AD leżącey na tey płaszczyznie (opis. II); iest zaś liniia BC równoległa do AD, więc liniia AB iest prostopadła i do linii BC (I, 19. wn.); podobnie okazać można, że taż liniia AB iest prostopadła do każdey linii przechodzącey przez iey spodek na płaszczyznie PQ, zatem liniia AB iest prostopadła do płaszczyzny PQ.

11. *Twierdzenie.*

Dwie liniie równoległe AB, CD, zawarte Fig. 13.
między dwiema płaszczyznami MN, PQ, równoległemi, są równe sobie.

Gdyż przez liniie równoległe AB, CD, poprowadziwszy płaszczyznę ABDC; przecięcia AC, BD, tey płaszczyzny, z dwiema płaszczyznami MN, PQ, będą względem siebie równoległe (9), zatem figura ABDC iest równoległobokiem; więc liniia AB = CD.

12. *Twierdzenie.*

Jeżeli dwa kąty CAE, DBF, nie leżące Fig. 14.
na iedney płaszczyznie, maią ramiona AC i BD, AE i BF, względem siebie równoległe, i skierowane w iedną stronę; będą te kąty równe, a ich płaszczyzny równoległe.

Wziąwszy bowiem AC=BD, AE=BF, i poprowadziwszy liniie CE, DF, AB, CD, EF. Ponieważ liniia AC iest równa i równoległa do BD, będzie i liniia CD równa i równoległa do AB (I, 20. w. 1). Dla podobney przyczyny i liniia EF iest równa i równoległa do linii AB; dwie zatem liniie CD, EF, równe i równoległe względem linii trzeciey AB, położoney na inney z niemi płaszczyznie, są równe i równoległe względem siebie (6. w. 2); zatem i liniia DF iest równa i równoległa do CE; więc dwa tróykąty ACE, BDF, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, są równe sobie (1,9); a zatem iest kąt CAE=DBF. Nadto, ponieważ trzy boki tróykąta ACE, są równoległe względem trzech boków tróykąta BDF, więc i płaszczyzny tych tróykątów są do siebie równoległe.

13. *Twierdzenie.*

Fig. 15. *Jeżeli dwie liniie proste AB, CD, przecięte są trzema płaszczyznami równoległemi MN, PQ, RS, przecięte będą proporcyonalnie.*

Niech liniia AB, spotyka płaszczyzny dane w punktach A, E, B; liniia CD, w punktach C, F, D; powiadam, że, ma się AE: EB=CF: FD.

Bo poprowadziwszy liniią AD, spotykaiącą płaszczyznę PQ w punkcie G; i nadto liniie AC, EG, GF, BD. Ponieważ przecięcia EG, BD, płaszczyzn równoległych PQ, RS, z płaszczyzną ABD, są do siebie równoległe (9); więc w tróykącie ABD, ma się AE: EB=AG: GD (III, 1). Podobnie dla przecięć AC, GF, równoległych, w tróykącie ADC, iest AG: GD= CF: FD, więc, z przyczyny spólnego stosunku AG: GD, będzie AE: EB=CF: FD.

14. *Twierdzenie.*

Fig. 16. *Jeżeli liniia AP iest prostopadła do płaszczyzny MN, wszelka płaszczyzna APB przechodząca przez liniią AP, będzie prostopadła do płaszczyzny MN.*

Niech liniia BC, wyraża spólne przecięcie dwóch płaszczyzn APB i MN. Napłaszczyznie MN, poprowadźmy przez punkt P, liniią DE prostopadłą do BC; liniia AP iako prostopadła do płaszczyzny MN, iest prostopadła do każdey z dwóch liniy BC, DE na tey płaszczyznie poprowadzonych(opi.II), więc kąt APD iest prosty; aże ten kąt zawarty dwiema prostopadłemi PA, PD, do spólnego przecięcia BC, mierzy nachylenie się ku sobie dwóch płaszczyzn APB, MN (opis. IV); więc dwie te płaszczyzny są do siebie prostopadłe.

Wniosek. Wypada stąd, że ieżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe do trzeciey, będzie i spólne przecięcie tych dwóch płaszczyzn prostopadłe do płaszczyzny trzeciey.

15. *Twierdzenie.*

Jeżeli kąt bryłowy S, zawarty iest trzema kątami płaskiemi ASB, ASC, CSB, będzie summa dwóch którychkolwiek z nich, większa od kąta trzeciego. Fig.17.

Niech kąt ASB, będzie większy od każdego z kątów, ASC, BSC; powiadam że kąt $ASB < ASC + BSC$.

Bo na płaszczyznie ASB, wykreśliwszy kąt $DSB = CSB$, wziąwszy $SD = SC$ i poprowadziwszy liniie ADB, AC, CB: ponieważ dwa boki BS, SD są równę dwóm bokom BS, SC, i kąty BSD, BSC między temi bokami zawarte są równe, więc dwa tróykąty BSD, BSC są równe sobie, zatem $BD = BC$. Aże $AB < AC + BC$ (1, 5), więc, odiąwszy z iedney strony BD, z drugiey BC, będzie $AD < AC$. Lecz dwa boki AS, SD są równe dwóm bokom AS, SC, a bok trzeci

AD iest mnieyszy od AC, zatem kąt ASD<ASC (1, 8); dodawszy spólnie kąt BSD=BSC, będzie kąt ASD+BSD, czyli kąt ASB<ASC+BSC.

16. *Twierdzenie.*

Fig. 18. *Summa kątów płaskich zawieraiących kąt bryłowy, iest mnieysza od czterech kątów prostych.*

Przetniymy kąt bryłowy S, iakąkolwiek płaszczyzną ABCDE, i z punktu O wziętego na tey płaszczyznie, do wszystkich kątów wielokąta ABCDE, podrowadźmy liniie OA, OB, OE i, t. d. Będzie summa kątów w tróykątach ASB, BSC . . . maiących wierzchołki w S, równa summie kątów podobneyże liczby tróykątów AOB, BOC . . maiących wierzchołki w O. Aże przy punkcie B, kąty ABO, OBC, razem wzięte czynią kąt ABC<ABS+SBC (15); podobnie przy punkcie C, iest kąt BCO+OCD <BCS+SCD, i toż samo iest ze wszystkiemi kątami wielokąta AD; zatem w tróykątach, których wierzchołkiem iest punkt O, summa kątów przy podstawie, iest mnieysza od summy kątów przy podstawie w tróykątach, których wierzchołkiem iest punkt S; więc naodwrót summa kątów utworzonych przy punkcie O, iest większa od summy kątów przy punkcie S; aże summa kątów przy O, iest równa czterem kątom prostym (1, 2. uwag.); zatem summa kątów płaskich ASB, BSC . . . zawieraiących kąt bryłowy S, iest mnieysza od czterech kątów prostych.