ROZDZIAŁ II.

O ROWNOSCI TROYKĄTOW.

Opisania.

I. Płaszczyzna trzema liniiami zamknięta zowie się *tróykątem*.

II. Tróykąt, uważany co do boków, nazywa się *równoboczny*, gdy ma trzy boki równe (fig. 10); *równoramienny*, gdy ma dwa boki równe (fig. 9); *różnoboczny*, gdy ma trzy boki nierówne (fig. 11).

III. Tróykąt, uważany co do kątów, nazywa się *prostokątny* gdy ma kąt ieden prosty; *ostrokątny*, gdy ma trzy kąty ostre; *rozwartokątny*, gdy ma kąt ieden rozwarty.

W tróykącie prostokątnym, bok AC przeciwległy kątowi prostemu zowie się *przeciwprostokątną* (fig. 11).

3. *Twierdzenie.*

Dwa tróykąty ABC, DEF są równe sobie, gdy maią dwa boki odpowiednie równe, i kąty zawarte temi bokami równe; toiest, gdy bok AB=DE, AC=DF, i kąt A=D, będzie tróykąt ABC=DEF. Fig. 12.

Bo, wystawiwszy sobie tróykąt ABC położony na tróykącie DEF, tak, aby punkt A padł na punkt D, i bok AB poszedł po boku DE, padnie i punkt B na punkt E, gdyż bok AB=DE z założenia; i bok AC padnie na bok DF, gdyż kąt A=D; nadto, ponieważ bok DF=AC, więc punkt C padnie na punkt F, a zatem i liniia prosta BC przystanie do linii EF (opis. V), i cały króykąt ABC przystanie do tróykąta DEF, i będzie mu równy (pew VI).

Wniosek. Z tego, że trzy rzeczy w dwóch tróykątach są równe, toiest, że kąt A=D, bok AB=DE, i bok AC=DF, wypada: że trzy inne także są równe sobie, toiest, kąt B=E, kąt C=F, i bok BC=EF.

4. *Twierdzenie.*

Fig.12. ***Dwa tróykąty ABC, DEF, maiące po iednym boku równym, i po dwa kąty przyległe temu bokowi, odpowiednie równe, są równe sobie: to iest, gdy bok BC = EF, kąt B = E, a kąt C = F; będzie tróykąt ABC = DEF.***

Bo, przeniosłszy tróykąt ABC na tróykąt DEF, tak, aby punkt B padł na punkt E, a bok BC poszedł po boku EF, padnie i punkt C na punkt F, gdyż bok BC = EF; nadto, ponieważ kąt B=E, więc bok AB weźmie kierunek DE, tak, że punkt A znaydzie się w iakimkolwiek punkcie linii ED. Podobnie, dla równości kąta C z kątem F, liniia CA weźmie kierunek FD, i punkt A znaydzie się w którymkolwiek punkcie boku CA; punkt więc A, znayduiąc się razem na dwóch liniiach ED, DF, znaydować się musi na ich spólnem przecięciu D, zatem dwa tróykąty ABC, DEF, przystaną do siebie i będą sobie równe (pew. VI).

Wniosek. Z tego, że w dwóch tróykątach trzy rzeczy są równe, toiest, że BC = EF, B = E, C = F, wypada, że trzy inne są także równe, toiest bok AB = DE, AC = DF, kąt D=A.

5. *Twierdzenie.*

Fig.12. ***W każdym tróykącie ABC, bok którykolwiek BC, iest mnieyszy od summy dwóch innych boków AB, AC.***

Bo bok BC, iest naykrótszą odległością punktu B od punktu C (opis. III); więc bok BC iest mnieyszy od BA+AC.

6. *Twierdzenie.*

Jeżeli z punktu O, obranego wewnątrz trójkąta ABC, poprowadzone są do końców iednego boku BC, dwie liniie proste OB, OC; będzie summa tych liniy mnieysza od summy dwóch innych boków AB, AC. Fig. 13.

Bo przedłużywszy bok BO, do spotkania się z bokiem AC w punkcie D, będzie liniia OC<OD+DC (twier. 5); do tych ilości nierównych dodawszy spólnie BO, będzie BO+OC<OD+DC+OB (pew. IV.), czyli BO+OC<BD+DC. Dla podobney przyczyny, będzie BD<AB+AD; dodawszy spólnie DC, będzie BD+DC<BA+AC. Aze okazaliśmy, że BO+OC<BD+DC, więc tem bardziey iest BO+OC<BA+AC.

7. *Twierdzenie.*

Jeżeli dwa boki AB, AC trójkąta ABC, są równe dwóm bokom DE, EF trójkąta EDF, i ieżeli kąt BAC zawarty między pierwszemi bokami, iest większy od kąta DEF zawartego między bokami drugiemi; mówię, że i bok trzeci BC pierwszego trójkąta, będzie większy od boku trzeciego DF trójkąta drugiego. Fig. 14.

Bo położywszy trójkąt DEF na trójkąt ABC, tak, aby bok EF przystał do boku AC, zdarzyć się może, że punkt D padnie wewnątrz trójkąta ABC, albo na bok iego BC, lub zewnątrz trójkąta ABC:

W 1ym przypadku, gdy punkt D pada wewnątrz trójkąta ABC, będzie podług twierdzenia poprzedzaiącego AD+DC<AB+BC; Fig. 14.

odiąwszy z iedney strony AD, z drugiey AB=AD, pozostanie bok DC, czyli równy mu DF<BC (pew. V).

Fig.15. W 2gim przypadku, gdy punkt D pada na bok BC, iest oczywista, że BC> DC=DF.

Fig.16. W 3cim przypadku, gdy punkt D pada zewnątrz tróykąta ABC; będzie AB< BO+OA (twier. 5), i DC<DO+OC; zatem AB+DC<BC+DA. Odiąwszy z iedney strony AB, z drugiey DA=AB, pozostanie DC<BC (pew. V).

8. *Twierdzenie odwrotne.*

Fig.14. *Jeżeli dwa boki AB, AC tróykąta ABC, są równe dwóm bokom DE,EF tróykąta EDF, lecz bok trzeci BC pierwszego tróykątu, iest większy od boku trzeciego DF drugiego tróykąta; będzie i kąt BAC przeciwległy bokowi BC, większy od kąta DEF przeciwległego bokowi DF.*

Bo gdyby nie był kąt BAC>DEF, byłby kąt BAC=DEF, lub BAC<DEF; w pierwszym więc razie, byłby bok BC=DF (twier. 3), w drugim zaś razie, byłby bok BC<DF (twier. 7); aże iedno i drugie sprzeciwiałoby się założeniu, zatem kąt BAC>DEF.

9. *Twierdzenie.*

Fig.12. *Dwa tróykąty ABC, DEF, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, są równe sobie: toiest, gdy bok AB=DE, AC=DF i BC=EF, będzie kąt A=D, B=E, C=F, i tróykąt cały ABC=DEF.*

Bo gdyby był kąt A>od kąta D, ponieważ bok AB=DE, AC=DF, byłby więc bok BC>EF (tw. 7); podobnie, gdyby był kąt A<od kąta D, byłby bok BC<EF; aże

bok BC=EF z założenia, więc kąt A nie może być ani większy, ani mnieyszy od kąta D, iest więc iemu równy. Podobnym sposobem okazać można, że kąt B=E, i kąt C=F; zatem będzie tróykąt ABC=DEF.

Uwaga. Widzimy tu, że kąty równe A i D, leżą na przeciw boków równych BC, EF.

10. *Zagadnienie.*

Daną liniią prostą AB, podzielić na dwie równe części. Fig. 17

Z końców linii AB, promieniem większym od połowy linii AB, kreślę dwa łuki przecinaiące się w punkcie C, tudzież dwa drugie łuki przecinaiące się w punkcie D, i prowadzę liniią CD, która podzieli liniią AB, na dwie równe części w punkcie F. Gdyż poprowadziwszy liniie AC, CB, AD, DB; dwa tróykąty ACD, CDB, maiące bok AC=CB, bok AD=DB z wykreślenia, i bok CD spólny, są równe sobie (twier. 9), zatem kąt ACD=DCB. Dwa więc tróykąty ACF, BCF, maiące bok AC=CB, bok CF spólny, i kąty równe przy C, są równe sobie (twier. 3), zatem iest bok AF=FB; więc liniia AB, w punkcie F podzielona iest na dwie równe części.

11. *Zagadnienie.*

Z punktu D danego na linii prostey AB, wyprowadzić do tey linii prostopadłą. Fig. 18.

Biorę DF=DB, i z punktów B i F, tym samym promieniem, kreślę dwa łuki przecinaiące się w punkcie C; punkt C z punktem D łączę liniią CD, która będzie prostopadłą żądaną. Bo poprowadziwszy liniie CB, CF; dwa tróykąty CDB, CDF, maiące bok CD spólny, bok DB=DF, i bok

BC=CF z wykreślenia, są równe sobie (twier. 9), a zatem kąt CDB=CDF; te zaś kąty są przyległe, więc liniia CD iest prostopadła do linii AB. (opis. XV).

12. *Zagadnienie.*

Fig. 19. *Z punktu C danego za liniią AB, spuścić prostopadłą do tey linii.*

Z punktu C, kreślę łuk przecinaiący liniią AB w punktach B i F, z punktów B i F, tym samym promieniem zakreślam dwa łuki przecinaiące się w punkcie G; punkta C i G łączę liniią CG, która będzie prostopadłą żądaną. Bo poprowadziwszy liniie FC, CB, FG, BG; tróykąty FCG, BCG, maiące bok CG spólny, bok CF=CB, i FG=GB z wykreślenia, są równe sobie (twier. 9); zatem kąt FCD=DCB. Dwa więc tróykąty CDF, CDB, maiące bok CD spólny, bok CF=CB, i kąty równe przy C, są równe sobie (twier. 3), a w szczególności kąt FDC=BDC; te zaś kąty są przyległe, zatem liniia CD iest prostopadła do linii AB (opis. XV).

13. *Twierdzenie.*

Fig. 20. *Jezeli z punktu A wziętego za liniią DE, poprowadzimy do niey prostopadłą AB, tudzież pochyłe AE, AC, AD, do różnych punktów teyże linii: będzie 1ód prostopadła AB krótsza od każdey pochyłey; 2re dwie pochyłe AC, AE, poprowadzone z dwóch stron prostopadłey AB, w odległościach BC, BE równych, są równe sobie; 3cie z dwóch którychkolwiek pochyłych AC i AD, lub AE i AD, ta będzie dłuższa, która iest bardziey od prostopadłey oddalona.*

Bo 1ód przedłużywszy prostopadłą AB tak, aby było BF=AB, i poprowadziwszy liniie FC, DF; dwa tróykąty ABC, CBF, maiące bok CB spólny, bok AB=BF, i kąty przy B proste, są równe sobie (twier. 3), a w szczególności bok AC=CF. Aże liniia prosta ABF iest krótsza od złamaney ACF (twier. 5); zatem AB połowa ABF, iest krótsza od AC połowy ACF; więc prostopadła AB iest krótsza od każdey linii pochyłey.

2re Założywszy że BE=BC, ponieważ dwa tróykąty ABE, ABC maią nadto bok AB spólny, i kąt ABE=ABC, są zatem równe sobie (twier. 3), więc AE=AC; przeto dwie pochyłe równo oddalone od prostopadłey są między sobą równe.

3e Ponieważ summa boków AC, CF tróykąta ACF, iest mnieysza od summy boków AD, DF tróykąta ADF (twier. 6), więc AC połowa ACF, iest krótsza od AD połowy ADF; zatem pochyłe naybardziey oddalone od prostopadłey są naydłuższe.

Wniosek I. Prostopadła AB będąc krótszą od każdey pochyłey, iest prawdziwą odległością punktu A od linii DE.

Wniosek II. Z punktu A wziętego za liniią DE, iedną tylko prostopadłą do tey linii poprowadzić można, gdyż przez dwa punkta A i B iedna tylko linia prosta przechodzić może.

Wniosek III. Jeżeli liniia prosta CD, ze środka linii AB poprowadzona, iest do teyże linii prostopadła; wtedy każdy punkt O wzięty na linii pierwszey, iest równo oddalony od końców A i B linii drugiey. Fig. 21.

Fig. 21. *Wniosek* IV. Wszelki punkt E wzięty za prostopadłą CD, nie iest równo oddalony od końców A i B linii AB. Bo poprowadziwszy liniie EB, EA, i punkt O przecięcia się linii AE z prostopadłą, z punktem B złączywszy liniią OB; ponieważ punkt O iest równo oddalony od punktów A, B, (wnio. 3), będzie AO=OB; ażе w tróykącie EOB, iest BE<OE+BO, więc BE<OE+OA, czyli BE<AE.

14. *Twierdzenie.*

Fig. 22. *Dwa tróykąty prostokątne ABC, EDF, są równe sobie, gdy maią przeciwprostokątne BC, DF, równe, i bok którykolwiek AB=DE; albo, gdy maią przeciwprostokątne BC, DF, równe, i kąt którykolwiek C=F.*

W pierwszym przypadku, rowność dwóch tróykątów byłaby widoczna, gdyby bok trzeci AC był równy bokowi trzeciemu EF. Lecz przypuśćmy, że te boki nie są równe, i że naprzykład bok AC>EF; na boku AC odciąwszy AG=EF i poprowadziwszy BG; dwa tróykąty ABG, EDF, maiące bok AB=DE z założenia, bok AG=EF z wykreślenia, i kąt prosty A=E, są równe sobie (twier. 3), a w szczególności bok BG=DF; ażе DF=BC z założenia, więc BG=BC (pew. I): toiest pochyła bliższa prostopadłey AB, iest równa pochyłey bardziey oddaloney od tey prostopadłey, co być nie może (twier. 13); nie może zatem być, aby liniia AC była większa od EF; okazać można podobnie, że nie może być od niey mnieysza, iest więc iey równa.

W 2gim przypadku, położywszy tróykąt DEF na tróykąt ABC, tak, aby punkt F padł na punkt C, a bok EF poszedł po boku AC; dla równości kątów F, C, bok DF póydzie po boku BC, i punkt D padnie na punkt B, bo DF=BC z założenia: gdyby więc bok DE nie przystał do boku AB, lecz wziął inne położenie, iak iest BG; wtedy z punktu B, możnaby było wyprowadzić dwie prostopadłe do linii AC, co być nie może (twier. 13, wnio. 2); przystanie więc bok DE do boku AB, i będzie mu równy; zatem podług pierwszey części tego twierdzenia, iest tróykąt ABC równy tróykątowi DEF.

15. *Twierdzenie.*

W tróykącie równoramiennym AOB, kąty A i B, przeciwległe bokom OB, OA, równym, są sobie równe: i naodwrót, ieżeli kąt A=B, będzie bok OB=OA. Fig. 23.

Bo 1ód. z punktu O spuściwszy prostopadłą OC na bok AB; dwa tróykąty prostokątne AOC, OCB, maiące przeciwprostokątne AO, BO równe, i bok spólny OC, są równe sobie (twier. 14), zatem kąt A=B.

2re. Założywszy że kąt A=B, będzie bok OB=OA. Bo ieżeli te boki nie są równe, przypuśćmy że bok AO>OB; odciąwszy na AO bok AE=OB, i poprowadziwszy liniią EB; dwa tróykąty AEB, AOB, maiące bok AB spólny, bok AE=OB z wykreślenia, i kąty A, B, między temi bokami zawarte równe z założenia, są sobie równe (twier. 3); zatem tróykąt AEB mnieyszy, byłby równy tróykątowi AOB większemu, co być nie może; nie iest przeto bok AO większy od boku OB; pokażemy podobnie, że nie iest od niego mnieyszy, więc iest mu równy: a zatem tróykąt AOB iest równoramienny.

16. *Twierdzenie.*

Fig. 21. *Jeżeli z dwóch boków AE, EB tróykąta AEB, bok AE iest większy od boku EB, będzie i kąt B przeciwległy bokowi AE, większy od kąta A przeciwległego bokowi EB; i naodwrót, ieżeli kąt ABE iest większy od kąta A, będzie bok AE większy od boku EB.*

Bo 1ód ze środka C linii AB, wyprowadziwszy do niey prostopadłą DC, i punkt O, przecięcia się tey prostopadłey z liniią AE, złączywszy z punktem B liniią OB; dwa tróykąty AOC, OCB, maiące bok OC spólny, bok AC=CB z wykreślenia, i kąt prosty ACO=OCB, są równe sobie (twier. 3), zatem kąt A=OBC; aże kąt EBA iest większy od kąta OBC, a zatem i od kąta A=OBC; więc w tróykącie AEB, kąt większy przeciwległy iest bokowi większemu.

2re Założmy że kąt ABE iest większy od kąta A; gdyby bok AE nie był większy od boku EB, byłby bok AE<EB, albo bok AE=EB; więc w pierwszym razie, na mocy pierwszey części tego twierdzenia byłby kąt B<A; w drugim, kąt A=B (tw.15); co iedno i drugie sprzeciwiało by się założeniu: zatem iest bok AE>EB.

ROZDZIAŁ III.

O LINIIACH RÓWNOLEGŁYCH.

Opisanie.

Dwie liniie proste nazywaią się *równoległe*, gdy położone na tey samey płaszczyznie, i w obie strony iak naydaley przedłużone, zeyść się z sobą z żadney strony nie mogą.