XIĘGA II.

ROZDZIAŁ V.

O LINIIACH PROSTYCH UWAŻANYCH W KOLE, I O MIERZENIU KĄTOW.

Opisania.

Tabl.II. Fig. 1. I. Liniia prosta FG, podpieraiąca łuk FHG, zowie się *cięciwą*.

II. *Odcinkiem* koła, nazywa się powierzchnia czyli część koła, zamknięta łukiem FHG, i iego cięciwą FG.

III. *Wycinkiem* zowie się część koła, zamknięta łukiem BD i dwoma promieniami BC, CD, poprowadzonemi do końców tego łuku.

IV. Kąt BAD zawarty dwiema cięciwami BA, AD, i maiący swóy wierzchołek na okręgu koła, nazywa się kątem wpisanym.

V. Mówi się, że figura iakakolwiek iest *wpisana* w koło, gdy wierzchołki wszystkich iey kątów znayduią się na okręgu koła, a wtedy koło to nazywa się *opisanem* na tey figurze.

VI. Liniia prosta MN, maiąca ieden punkt B spólny z okręgiem koła, zowie się *styczną*, a punkt B punktem dotknięcia.

VII. Wszelki wielokąt iest opisany na kole, gdy wszystkie iego boki są stycznemi z okręgiem koła; i w tym razie mówi się, że koło iest wpisane w wielokąt.

1. *Twierdzenie.*

Każda średnica AB, dzieli koło i iego o- Fig. 2.
krąg, na dwie równe części.

Przyłożywszy bowiem do siebie dwie figury AEB, ADB, tak aby miały spólną podstawę AB; liniia krzywa AEB przystać musi do linii krzywey ADB, gdyż inaczey wszystkie punkta iedney lub drugiey linii, nie byłyby równo oddalone od śródka, coby się sprzeciwiało naturze koła.

2. *Twierdzenie.*

Każda cięciwa AD, iest mnieysza od śre- Fig. 2.
dnicy AB.

Jakoż, poprowadziwszy promień DC do końca cięciwy AD; będzie liniia złamana ACD czyli iey równa AB, większa od linii prostey AD. Więc liniia naywiększa wpisana w koło, iest średnica.

3. *Twierdzenie.*

W każdem kole, albo w kołach równych, łuki równe wspieraią się na cięciwach równych: i naodwrót, cięciwy równe podpieraią łuki równe.

I tak założywszy, że łuk AMB iest ró- Fig. 3.
wny łukowi FNE, będzie i cięciwa AB=FE. Bo dwa te łuki obrócone wklęsłościami w iedną stronę, i położone ieden na drugim tak, aby punkt B padł na E, dla równości swoiey i iednakowego zakrzywienia, przystaną do siebie; więc i punkt A padnie na punkt F, a przeto i liniia AB łącząca dwa punkta A i B, przystanie do linii FE, i będzie iey równa.

Naodwrót, poprowadziwszy średnice AE, BF: ieżeli cięciwa AB=FE, będzie łuk AMB=FNE. Bo dwa tróykąty ABC, CFE, maiące trzy boki odpowiednie równe trzem bokom, toiest, AC=CE, CB=CF i AB=FE, maią i kąt ACB=FCE (1, 9) (*). Lecz dwa te kąty, położone ieden na drugim tak, aby liniia CB przykryła liniią CE, przystaną do siebie; i dla równości ich ramion, punkt B padnie na punkt E, a punkt A na punkt F; zatem i dwa łuki AMB, FNE, maiąc wszystkie punkta równo oddalone od środka koła, przystaną do siebie, i będą równe sobie (pew. VI).

Wniosek I. Wypada ztąd że w kole, lub w kołach równych, kąty równe: maiące swóy wierzchołek w środku, obeymuią na okręgu łuki równe; i naodwrót, ieżeli łuki są równe, będą i kąty obeymuiące ramionami swemi te łuki, i maiące wierzchołki w środku koła, równe między sobą.

Fig. 4. *Wniosek* II. Na okręgu ACBE, wziąwszy ilekolwiek łuków równych AE, EF, FG, GH, i do końców tych łuków poprowadziwszy promienie AD, DE, DF, DG, DH: ponieważ łuki AE, EF, FG, GH, są równe, będą podług poprzedzaiącego wniosku, i kąty ADE, EDF, FDG, GDH, równe między sobą; zatem ile razy łuk cały AH, iest większy od łuku cząstkowego AE, tyle razy i kąt cały ADH, iest większy od kąta cząstkowego ADE, i naodwrót. Stąd widzimy, że iakikolwiek kąt ADH powiększa się albo zmnieysza, w miarę powiększania lub zmnieyszania się łuku iego AH: a zatem, *za miare*

(*) *Przestroga*. Z dwóch liczb zamkniętych nawiasem i oddzielonych przecinkiem, pierwsza oznacza xięgę, druga twierdzenie do którego się w tey xiędze odwołuiemy. Liczby zaś bez przecinka położone w nawiasie, oznaczaią twierdzenie tey xięgi, o którey iest mowa.

iakiegokolwiek kąta, można wziąć łuk zawarty między iego ramionomi, a zakreślony z wierzchołka tego kąta.

Uwaga. Okrąg koła podług dawnieyszego podziału dzieli się na 360 części równych zwanych stopniami; każdy stopień na 60 części równych zwanych minutami; każda minuta na 60 części równych zwanych sekundami, i t. d. Stopień oznacza się przez znak ° położony nad liczbą; minuta przez znak ′, sekunda przez znak ″, i t. d. Więc np. dla oznaczenia kąta maiącego 23 stopnie, 28 minut, i 24 sekund; pisze się 23° 28′ 24″ i t d. Podług zaś nowego podziału, który nie iest wszędzie przyięty, okrąg koła dzieli się na 400, stopni, stopień na 100 minut, minuta na 100 sekund i t. d. Zatem półokrąg, i czwarta część okręgu, czyli 180° i 90°, podług podziału dawnego, odpowiadaią 200°, i 100°, podług podziału nowego.

4. *Twierdzenie.*

Prostopadła AB do promienia AC, z końca iego wyprowadzona, iest styczną z okręgiem koła. Fig. 5.

Jakoż, poprowadziwszy iakąkolwiek pochyłą BC, ta będzie dłuższą od promienia AC (I, 13); zatem punkt B będzie za kołem: więc liniia AB ma tylko ieden punkt A spólny z okręgiem koła, przeto iest styczną (II. opis. 6).

Wniosek. Stąd wypada, że promień AC, poprowadzony do punktu dotknięcia A, styczney AB, iest prostopadły do tey styczney.

5. *Twierdzenie.*

Fig. 6. *Promień CD prostopadły do cięciwy AB, dzieli tę cięciwę, i wsparty na niey łuk ADB, na dwie równe części.*

Bo poprowadziwszy promienie AC, CB; ponieważ promienie te uważane względem prostopadłey CE, są liniiami pochyłemi równemi sobie; zatem są one równo oddalone od tey prostopadłey (I, 13), więc AE=EB. Nadto, poprowadziwszy liniie AD, DB; ponieważ prostopadła DE przechodzi przez środek linii AB, więc punkt D wzięty na tey prostopadłey iest równo oddalony od punktów A i B (I, 13. wno. 3), więc liniia AD=DB: aże cięciwy AD, DB, równe, podpieraią łuki równe (3), zatem łuk AD=DB; czyli łuk ADB podzielony iest na dwie równe części.

Wniosek. Ponieważ środek C koła, środek E cięciwy AB, i środek wspartego na niey łuku ADB, są trzy punkta znayduiące się na iedney linii prostey CED prostopadłey do cięciwy AB; a do oznaczenia położenia linii prostey dosyć iest mieć dwa punkta (I. opis. V); więc każda liniia prosta, przechodząca przez dwa z wspomnionych punktów, przechodzi i przez trzeci, i iest prostopadłą do cięciwy. *Zatem prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona, przechodzi przez środek koła, i środek łuku wspartego na cięciwie.*

6. *Twierdzenie.*

Fig. 7. *W każdem kole, dwa łuki EB, BA, zawarte między styczną PQ, a cięciwą do niey równoległą EA, są równe sobie: tudzież dwa łuki EM, AN, zawarte między dwiema cięciwami równoległemi EA, MN, są równe między sobą.*

Jakoż, poprowadziwszy promień XB prostopadły do cięciwy EA, ten będzie prostopadły i do cięciwy MN, równoległey do AE (I, 19. wn.); zatem przechodzić on będzie przez środek łuku EBA, i środek łuku MBN (5): będzie więc łuk EB=BA i łuk MB=BN: od dwóch pierwszych łuków, odiąwszy dwa drugie, pozostanie łuk EM=AN (pew. III.)

7. *Twierdzenie.*

Kąt ABC, zawarty między styczną AB i cięciwą BC, ma za miarę połowę łuku BC, zawartego między iego ramionami. Fig. 8.

Bo poprowadziwszy promień ED, prostopadły do cięciwy BC, ten podzieli cięciwę tę w punkcie O, a łuk BEC, w punkcie E, na dwie równe części (5). Poprowadziwszy nadto promień BD, do punktu dotknięcia B styczney, ten będzie prostopadły do styczney AB (4. wnio.); nakoniec punkta C i D złączywszy linią CD: dwa tróykąty prostokątne BOD, COD, maiące bok OD spólny, bok BO=OC, są równe sobie (1, 3), a zatem iest kąt CBD=C, i kąt BDO=ODC. Aże kąt ABC z kątem CBD, czyni kąt prosty; a w tróykącie COD, kąt ODC z kątem C=CBD, czyni także kąt prosty (1, 25. wnio. 2); więc kąt ABC=ODC (I, 2. wnio.): kąta zaś ODC, równego połowie kąta BDC, miarą iest połowa łuku BEC (3. wn. 2), więc i kąta ABC, zawartego styczną i cięciwą, iest miarą połowa łuku BEC, zawartego między iego ramionami.

Wniosek I. *Kąt DEF wpisany w około, ma za miarę połowę łuku DF zawartego między iego ramionami.* Bo kąt AEF, za- Fig. 9.

warty styczną AE i cięciwą FE, ma za miarę połowę łuku EDF; a kąt AED, zawarty tąż styczną, i cięciwą ED, ma za miarę połowę łuku ED; zatem kąt DEF, który iest różnicą tych dwóch kątów, mieć będzie za miarę połowę różnicy dwóch łuków EDF i ED, czyli połowę łuku DF.

II. *Wszystkie kąty DEF, DBF, DCF, będące w tym samym odcinku DEBCF, są równe sobie*; gdyż każdy z nich ma za miarę połowę łuku DF.

Fig. 10. III. *Wszystkie kąty ABC, ADC, wpisane w półkole ABDC, są proste; bo każdy z tych kątów ma za miarę połowę półokręgu AEC.*

Fig. 11. IV. *Każdy kąt ABC, wpisany w odcinek ABC większy od półkola, iest ostry; a każdy kąt ADC, wpisany w odcinek ADC mnieyszy od półkola, iest rozwarty:* bo pierwszy z tych kątów, ma za miarę połowę łuku ADC mnieyszego od połokręgu, a drugi, połowę łuku ABC większego od półokręgu koła.

Fig. 12. V. *W czworokącie ABCD wpisanym w koło, dwa kąty B, D, sobie przeciwległe, wzięte razem, ważą dwa kąty proste*: bo kąt B ma za miarę połowę łuku ADC; a a kąt D, połowę łuku ABC; aże te dwa łuki razem wzięte składaią cały okrąg ABCD; więc dwa kąty B i D, maią za miarę połowę okręgu koła, zatem ich summa iest równa dwom kątom prostym.

8. *Zagadnienie.*

Fig. 13. *W kole, kąt BAD maiący wierzchołek A między środkiem a okręgiem koła, ma*

za miarę połowę łuku BD, zawartego między iego ramionami, więcey połową łuku FG, zawartego między przedłużeniami tych ramion.

Bo, poprowadziwszy cięciwę GM równoległą do FD; będzie łuk FG = DM (6), i kąt BAD=BGM (I, 19); zatem każdy z tych kątów mieć będzie ten sam łuk za miarę: aże kąta wpisanego BGM iest miarą łuk $\frac{BDM}{2}$ (7. wnio. 1), czyli łuk $\frac{BD}{2}+\frac{DM}{2}=\frac{BD}{2}+\frac{FG}{2}$; więc i miarą kąta BAD iest łuk $\frac{BD}{2}+\frac{FG}{2}$.

9. *Twierdzenie.*

Kąt BAD, maiący wierzchołek A za okręgiem koła, a obeymuiący ramionami swemi łuki BD, CE, ma za miarę połowę różnicy tych łuków. Fig. 14.

Jakoż, poprowadziwszy cięciwę EF równoległą do AB; będzie łuk BF=CE (6), i kąt FED=BAD (I, 19); zatem każdy z tych kątów mieć będzie ten sam łuk za miarę: aże kąt FED wpisany, ma miarę połowę łuku FD (7. wnio. 1), który iest różnicą między łukiem BFD a łukiem BF=CE, więc i kąt BAD ma za miarę połowę różnicy dwóch łuków BD, CE.

10. *Twierdzenie.*

Każdy wielokąt foremny ABCDEFA może być wpisany w koło, i opisany na kole. Fig. 15.

Bo 1ód, wystawiwszy sobie, że punkt O iest środkiem koła, którego okrąg przechodzi przez trzy punkta A, B, C; okażemy, że tenże okrąg przechodzi przez punkta D, E, F, wielokąta danego. Jakoż, z punktu O spuściwszy prostopadłą OH do cięciwy BC i poprowadziwszy liniie AO, OB i t.d. Dwa czworokąty OABH, OHCD, położone ieden na drugim tak, aby bok OH miały spólny, przystaną do siebie: iest bowiem kąt prosty OHB = OHC, i bok HB = HC (5.); zatem punkt C padnie na punkt B, a dla rowności kąta C z kątem B, iako w wielokącie foremnym, liniia CD weźmie kierunek AB, i punkt D padnie na punkt A, gdyż CD = AB; zatem liniia OD przystanie do linii OA, i będzie iey równa: aże liniia OA iest promieniem, więc iest nim i liniia OD; zatem okrąg koła przeydzie przez punkt D. Podobnie okazać można, że tenże okrąg przeydzie i przez punkta E i F, zatem wielokąt foremny ABCDEFA będzie wpisany w koło (II. opis. V.).

2re. Z punktu O, poprowadziwszy prostopadłe OK, OL i t. d. do boków CD, DE i t. d. wielokąta; wszystkie te prostopadłe będą równe sobie. Bo ponieważ boki BC, CD, iako w wielokącie foremnym, są równe, więc i boków tych połowy HC, CK (5.), będą równe między sobą. Zatem dwa tróykąty prostokątne HOC, CKO maiące bok HC = CK, i bok CO spólny, są równe (I, 14), więc bok OH = OK; podobnie dowieść można, że prostopadła OK = OL, i tak następnie: więc z punktu O promieniem OH, zakreśliwszy okrąg koła, ten dotknie się wszystkich boków wielokąta w ich środkach, przeto okrąg ten będzie wpisany w wielokąt, czyli wielokąt foremny będzie opisany na kole.

Uwaga I. Punkt O, środek spólny koła wpisanego i opisanego na wielokącie foremnym, uważać można za środek tego wielokąta; i dlatego kąt AOB zawarty dwoma promieniami do końców boku AB poprowadzonemi, zowie się kątem *środkowym*. A ponieważ wszystkie cięciwy AB, BC i t. d. są równe, przeto wszystkie kąty środkowe, są równe między sobą; zatem wartość każdego z tych kątów wynaydziemy, podzieliwszy 4 kąty proste, przez liczbę boków wielokąta foremnego.

II. Aby w dane koło wpisać wielokąt foremny, o pewney liczbie boków, dosyć iest okrąg tego koła podzielić na tyle części równych, ile wielokąt ma boków, i punkta podziałów połączyć liniiami prostemi. Bo z przyczyny łuków równych, będą i cięciwy AB, BC i t. d. równe; zatem wielokąt ABCD .. będzie równoboczny. A że tróykąty OAB, OBC.... prócz boków AB, BC .. równych, maią inne boki w punkcie O schodzące się, równe promieniowi koła, a zatem i między sobą równe; przeto tróykąty te są równokątne; a zatem wszystkie kąty ABC, BCD.. będą równe; więc wielokąt ABCD .. będzie foremny.

Chcąc np. w dane koło wpisać kwadrat, dosyć iest przez środek koła poprowadzić dwie średnice do siebie prostopadłe, i końce tych średnic połączyć liniiami prostemi.

11. *Twierdzenie.*

Bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło, iest równy promieniowi tego koła.

Bo, uważaiąc liniią AB za bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło; w tróy- Fig. 15.

kącie ABO zawartym, tym bokiem i dwoma promieniami AO, OB, będzie kąt AOB szóstą częścią 4 kątów prostych (10. uwaga); czyli, wziąwszy kąt prosty za 1, będzie kąt AOB$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; aże dwa kąty pozostałe ABO, BAO, tróykąta równoramiennego ABO, czynią razem $2-\frac{2}{3}$, czyli $\frac{4}{3}$ (1,25), i są między sobą równe (I, 15); przeto każdy z tych kątów iest$=\frac{2}{3}$; więc tróykąt ABO iest równoboczny (I, 25. wn. 5): zatem bok AB sześciokąta foremnego wpisanego w koło, iest równy promieniowi tego koła.

Wniosek I. Chcąc wpisać sześciokąt foremny w dane koło, potrzeba promień tego koła przenieść sześć razy na iego okrąg; i punkta iego podziałów połączyć liniiami prostemi.

Fig. 16. II. Maiąc wpisany w koło sześciokąt foremny ABCDEF, ieżeli wierzchołki iego kątów A, E, C, połączymy liniiami prostemi AE, EC, CA, utworzy się tróykąt równoboczny AEC wpisany w koło.

Uwaga. Ponieważ każdy wielokąt foremny może być wpisany w koło, i opisany na kole (10); i im większa będzie liczba boków, każdego z tych wielokątów, tem się one bardziey będą zbliżać do koła, tak dalece: że wystawiwszy sobie dwa wielokąty foremne o nieskończoney liczbie małych boków, ieden wpisany w koło, a drugi opisany na niem, obwód każdego z tych wielokątów będzie nieskończenie mało różnić się od okręgu koła samego: idzie stąd, *że obwód wielokąta foremnego o nieskończoney liczbie małych boków uważać można za okrąg koła, a sam wielokąt za koło.*

12. *Zagadnienie.*

Dany kąt BAC podzielić na dwie równe części. Fig. 17.

Z wierzchołka kąta A, iako środka koła, promieniem iakimkolwiek, kréślę łuk przecinaiący ramiona danego kąta w punktach M i N, i prowadzę cięciwę MN; z punktów znowu M, N, iako środków, promieniem większym od połowy cięciwy MN, kréślę dwa łuki przecinaiące się w punkcie D, i prowadzę liniią AD, która podzieli kąt dany A na dwie równe części.

Bo każdy z punktów A i D, iest równo oddalony od końców cięciwy MN; zatem liniia AD przechodzi przez środek tey cięciwy, i iest do niey prostopadła (I, 13. wn. 3); podzieli więc łuk MN, a przeto i kąt A maiący ten łuk za miarę, na dwie równe części (5.)

Tym samym sposobem można podzielić każdy z kątów BAD, DAC, na dwie równe części, a przez tak następne podziały, kąt dany A podzielimy na 4, 8, 16, i t. d. części równych.

Uwaga. Podobne wykréślenie służy do podzielenia danego łuku na 2, 4, 8, i t. d. części równych.

13. *Zagadnienie.*

Dany kąt prosty ACD, maiący za miarę łuk AD, podzielić na trzy równe części. Fig. 18.

Od punktu A do S, przenoszę promień CA; będzie łuk AS=60° (11), a pozostały łuk DS=30°. Przenoszę znowu ten sam promień od punktu D do E, będzie łuk DE=60°, a pozostały łuk EA=30°; zatem łuk SE iest także równy 30°: aże kąty DCS, SCE, ECA, mierzone łukami równemi DS, SE, EA, są równe sobie (3, wnio. 2); więc dany kąt prosty ACD, iest podzielony na trzy równe części.

Uwaga. Co się tyczy ieometrycznego sposobu dzielenia kąta na trzy równe części za pomocą liniiału i cyrkla; zagadnienie to, nie może być rozwiązane tylko w niektórych szczególnych przypadkach; a w innych, poprzestać należy na sposobie praktycznym, na samey tylko próbie opartym, który zręcznie wykonany, prowadzi do podziału dosyć dokładnego; i takiego sposobu używać się zwykło do dzielenia kąta na 5, 7 i t. d. części równych.

14. *Zagadnienie*.

Fig.19. *Maiąc dane dwa kąty A i B, tróykąta, znaleść kąt trzeci.*

Prowadzę liniią prostą nieograniczoną DEF, i na tey przy punkcie iakimkolwiek E, kreślę kąt DEC = kątowi A, i kąt CEH = kątowi B; będzie kąt pozostały HEF, kątem tróykąta szukanym: bo te trzy kąty wzięte razem, czynią dwa kąty proste (I, 1).

15. *Zagadnienie*.

Fig.20. *Maiąc dane dwa boki B i C, tróykąta, i kąt A temi bokami zawarty, wykreślić tróykąt.*

Prowadzę liniią nieograniczoną DE, i na tey przy punkcie iakimkolwiek D, kreślę kąt EDF = kątowi A, biorę liniią DG = B, DH = C, i prowadzę liniią GH; będzie tróykąt DGH szukany (I, 3).

16. *Zagadnienie*.

Fig.21. *Maiąc dany bok tróykąta, i dwa kąty przy tym boku leżące, wykreślić tróykąt.*

Prowadzę liniią DE równą bokowi da- Fig. 21
nemu tróykąta, i przy punkcie D, kréślę kąt EDF równy iednemu, a przy punkcie E kąt DEG, równy drugiemu z kątów danych; dwie liniie DF, EG przetną się z sobą w punkcie H, utworzy się więc tróykąt DHE żądany (1, 4).

17. *Zagadnienie.*

Z trzech danych liniy A, B, C, wykréślić tróykąt.

Prowadzę liniią DE=A, i z punktu E Fig. 22.
iako środka, promieniem równym linii B kréślę łuk, a z punktu D promieniem równym linii C kréślę łuk drugi; od punktu F przecięcia się tych łuków, do punktów D, E, prowadzę liniie FD, EE; będzie tróykąt DEF szukany (1, 9).

18. *Zagadnienie.*

Znaleść środek danego koła.

Biorę na okręgu koła trzy iakiekolwiek Fig. 23.
punkta A, B, C; prowadzę liniie AB, BC, i te dzielę na dwie równe części w punktach D i E; z punktów tych poprowadziwszy prostopadłe DF, GE do liniy AB, BC; punkt przecięcia się O, tych prostopadłych, będzie środkiem koła szukanym (5. wnio.).

Uwaga. To samo wykréślenie służy do poprowadzenia okręgu koła przechodzącego przez trzy punkta dane A, B, C, tudzież do opisania tróykąta ABC kołem.

19. *Zagadnienie.*

Przez punkt dany poprowadzić stycz- Fig. 24.
ną do okręgu koła danego.

1śd. Jeżeli punkt dany A iest na okręgu koła, wtedy poprowadziwszy promień CA, a z punktu A, prostopadłą DA do promienia CA; będzie prostopadła ta styczną żądaną (4).

2re. Jeżeli punkt A iest za kołem, wtedy złączywszy ten punkt ze środkiem C koła danego, liniią CA, dzielę ią w punkcie O na dwie równe części; z punktu O iako środka, promieniem OC kreślę okrąg, przecinaiący okrąg danego koła w punktach B, D, i prowadzę liniią AD, która będzie styczną żądaną.

Bo poprowadziwszy liniią CD, będzie kąt CDA w półkolu prosty (7. wn. 3), zatem liniia AD iest prostopadłą z końca D promienia CD wyprowadzona, więc iest styczną (5).

ROZDZIAŁ VI.

O MIERZENIU POWIERZCHNI.

Opisania.

I. Do mierzenia powierzchni używa się zwyczaynie kwadratu, który, gdy ma bok ieden równy długości sążnia, łokcia, stopy, cala i t. d. nazywa się *sążniem kwadratowym*, *łokciem kwadratowym*, *stopą kwadratową*, *calem kwadratowym* i t. d.

Mierzyć zatem iakąkolwiek powierzchnią, iestto dochodzić ile razy mieści się w niey kwadrat za miarę czyli iedność wzięty.

Fig. 25. II. *Wysokością* równoległoboku ABCD, albo tróykąta ABD, nazywa się prostopadła BE, z wierzchołka któregokolwiek kąta B, na bok przeciwległy AD, przedłu-