Przykłady rozwiązania tróykątów prostokątnych.

30. *W tróykącie prostokątnym ACB, maiąc wiadome dwa kąty A, C, i przeciwprostokątną AC, wynaleść bok BC.* Fig.10.

Bok BC, otrzymamy z następuiącey proporcyi P: AC = wst A : BC (25), czyli P : wst A = AC : BC.

Niech będzie kąt A = 35°40', bok AC= 576 prętom; znaydziemy że bok BC=336 prętom.

Jakoż logarytm wstawy kąta A=	9,765720
Logarytm przeciwprostokąt.AC=	2,760422
Summa tych dwóch logarytmów=	12,526142
Od tey summy odiąwszy logarytm promienia . . . . =	10,000000
będzie boku BC logarytm =	2,526142

który w tablicach odpowiada liczbie 336 blisko.

Dla znalezienia zaś drugiego boku AB, użyiemy proporcyi P:. wst C=AC: AB.

31. *Maiąc przeciwprostokątną AC, i bok BC, wiadome, znaleść dwa kąty A i C.*

Kąt A otrzymamy z proporcyi AC: BC= P: wst A. Maiąc wiadomy kąt A, gdy ten odeymiemy od 90°, znaydziemy kąt C.

32. *Maiąc wiadome kąty A, C, i bok AB, wynaleść przeciwprostokątną AC.*

Wynaydziemy AC z proporcyi wst C: P = AB. AC.

33. *Maiąc bok BC i kąty wiadome, wynaleść bok AB.*

Bok szukany AB otrzymamy z proporcyi P: sty C = BC : AB (26).

34. *Maiąc dwa boki AB, BC, wiadome, wynaleść kąty C, A.*

Kąt C, otrzymamy z proporcyi BC: AB = P: sty C; który odciągnąwszy od 90°, wypadnie kąt A.

35. *Maiąc wiadome dwa boki AB, BC, wynaleść przeciwprostokątną AC.*

Potrzeba naprzód wynaleść kąt C z proporcyi BC: AB = P: sty C, a maiąc wiadomy kąt C, otrzymamy AC z proporcyi wst C: P = AB: AC.

Przykłady rozwiązania tróykątów ostrokątnych.

Fig. 11. 36. *Maiąc dwa kąty A, C, i bok AB, tróykąta ostrokątnego ACB, wiadome, wynaleść dwa pozostałe boki AC, BC.*

Ponieważ wiadoma iest ważność dwóch kątów A, C, więc odciągnąwszy ich summę od 180°, wypadnie na resztę kąt B.

To założywszy, dla znalezienia boku AC, użyiemy proporcyi wst C: wst B = AB: AC (24).

Daymy że kąt A = 49°53′, kąt C = 54°41′, a bok AB = 273 prętom; będzie bok AC = 323 prętom.

Jakoż summę kątów A i C, odiąwszy od 180°, wypadnie kąt B = 75°26′, a logarytm wstawy kąta tego będzie . = 9,985811

Logarytm boku AB . . . = 2,436163

Summa tych logarytmów = 12,421974

Odiąwszy od tey summy logarytm wstawy kąta C . . = 9,911674

Wypadnie na resztę logarytm = 2,510300

który w tablicach odpowiada liczbie 323 blisko.

Bok zaś BC otrzymamy z proporcyi wst C: wst A = AB: BC.

37. *W tróykącie ACB, maiąc dwa boki* BC, AC, *i kąt C, między temi bokami zawarty, wiadome, wynaleść dwa inne kąty A i B.* Fig. 12.

Widzimy, że na ten przypadek służy proporcya $BC + AC : BC - AC = \text{sty}\,\frac{A+B}{2} : \text{sty}\,\frac{A-B}{2}$ (28).

Daymy, że BC = 584 pręt., AC = 469 pręt.; kąt C = 68°; będzie BC + AC = 1053, BC — AC = 115; kąt C = 68° odiąwszy od 180°, wypadnie summa dwóch kątów A i B, równa 112°; zatem $\frac{A+B}{2} = 56°$.

Aże logarytm liczby 115	= 2,060698
Logarytm styczney 56°	= 10,171013
Więc summa tych dwóch logar.	= 12,231711
Od tey summy odiąwszy logarytm liczby 1053, który iest	= 3,022428
Reszta	9,209283

będzie logarytmem sty $\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Logarytm ten znaleziony w tablicach, odpowiada styczney 9°12′.

To maiąc, (29) będzie kąt większy A = 56° + 9°12′ = 65°12′, a kąt mnieyszy B = 56° — 9°12′ = 46°48′.

38. *Maiąc wiadome dwa boki BC, AC, i kąt C między niemi zawarty, wynaleść bok trzeci AB.*

Wynalazłszy kąty A i B sposobem dopiero wskazanym, otrzymamy ważność na AB, z proporcyi wst A: wst C = BC: AB.

39. *Maiąc wiadome trzy boki AB, AC,* Fig. 13. *BC tróykąta ACB, wynaleść iego kąty.*

Z wierzchołka kąta C, spuszczam prostopadłą CD, na bok AB iemu przciwległy, i układam proporcyą AB : BC+AC= BC—AC : BD—AD (27).

Daymy że bok AB=348 prętom, bok BC=314 prętom, a bok AC=236 prętom; na czwarty wyraz tey proporcyi wynaydziemy, między odcinkami BD, AD zrobionemi przez prostopadłą, różnicę BD—AD=123 prętom blisko. Więc odcinek większy $BD = \frac{348 + 123}{2} = 235\frac{1}{2}$ (29); a odcinek mnieyszy $AD = \frac{348 - 123}{2} = 112\frac{1}{2}$.

To maiąc, w każdym z tróykątów prostokątnych CAD, CBD, będzie wiadoma przeciwprostokątna i bok ieden; wynaydziemy więc kąty ACD, BCD (31), a zatem, i ich dopełnienia A, B. Więc otrzymamy następnie i ważność kąta ACB, który iest spełnieniem summy dwóch kątów A i B.

Fig. 14 40. *Maiąc wiadome dwa boki CA, CB, i kąt B przeciwległy iednemu z boków CA, wynaleść dwa inne kąty tróykąta ACB.*

Dla znalezienia kąta A ułożymy proporcyą CA : CB= wst B : wst A (24). Wynalazłszy kąt A, i ten z kątem B odiąwszy od 180°, wypadnie na resztę kąt C.

Uważać tu potrzeba, że ieżeli bok CA przeciwległy kątowi B, iest mnieyszy od boku CB przyległego temuż kątowi, w rozwiązaniu takiego tróykąta zachodzi wątpliwość. Bo z punktu C długością CA zakréśliwszy łuk przecinaiący w punkcie D przedłużony bok AB; utworzą się dwa różney wielkości tróykąty CDB, CAB, które maią te same trzy rzeczy wiadome: toiest bok CB i kąt B spólne, i bok DC tróykąta DCB, równy bokowi CA tróykąta CAB. Ponieważ bok DC=CA, więc kąt D=CAD; aże kąt CAD z kątem CAB czynią 180°, więc i kąt D z kątem CAB, uczynią także 180°; zatem wstawy dwóch kątów CAB i D, są też same (12). Więc z proporcyi powyższey CA : CB= wst B: wst A, wypaść może na czwarty wyraz kąt CAB, albo kąt D; zachodzi zatem wątpliwość który z tych dwóch kątów brać należy; bo biorąc kąt CAB, wypadnie rozwiązać tróykąt CAB, a biorąc kąt D trzeba rozwiązać tróykąt CDB. Aby uniknąć tey wątpliwości, znać koniecznie należy gatunek kąta A, zawartego między bokiem danym a bokiem szukanym; toiest, ieżeli ten kąt iest rozwarty, albo ostry, brać potrzeba w pierwszym razie tróykąt CAB, w drugim tróykąt CDB.

41. *Maiąc wiadome dwa boki CA, CB, i kąt B przeciwległy bokowi AC, znaleść bok AB.*

Potrzeba naprzód wynaleść kąty sposobem dopiero wskazanym, a potem ułożyć proporcyą wst B : wst C=CA : AB.

42. Poznawszy sposoby rozwiązywania iakichkolwiek tróykątów, obaczmy teraz, iak na mocy zasad dotąd wyłożonych, dochodzi się ich powierzchni.

43. *Maiąc bok AB i dwa kąty A i B, wiadome, a tem samem i kąt C, wynaleść powierzchnią tróykąta ACB.* Fig. 13.

Z wierzchołka kąta C, spuściwszy na podstawę AB prostopadłą CD, ta będzie wysokością tróykąta ACB; którą aby wynaleść, szukam naprzód z tróykąta ACB boku AC, przez proporcyą

$$\text{wst } C : \text{wst } B = AB : AC;$$

poczem, w tróykącie prostokątnym ACD, maiąc wiadomy bok AC, i wszystkie kąty, wynaydę wysokość CD, z proporcyi

$$P : \text{wst } A = AC : CD;$$

a pomnożywszy podstawę AB przez połowę znalezioney wysokości CD, wypadnie powierzchnia tróykąta ACB.

Można w tym przypadku doyść powierzchni tróykąta ACB, nie szukaiąc ważności na bok AC, i na prostopadłą CD. Bo pomnożywszy przez siebie dwie powyższe proporcye, będzie

$$P \times \text{wst } C : \text{wst } A \times \text{wst } B = AC \times AB : CD \times AC;$$

w tey znowu proporcyi, oba wyrazy drugiego stosunku podzieliwszy przez AC, a potem pomnożywszy przez $\frac{AB}{2}$, wypadnie

$$P \times \text{wst } C : \text{wst } A \times \text{wst } B = \frac{\overline{AB}^2}{2} : \frac{AB \times CD}{2};$$

zatem $\frac{AB \times CD}{2}$, czyli powier. tróy. ABC=

$$\frac{\overline{AB}^2 \times \text{wst } A \times \text{wst } B}{2P \times \text{wst } C};$$

toiest, *dla znalezienia powierzchni tróykąta, trzeba kwadrat z iego podstawy pomnożyć przez iloczyn ze wstaw kątów przyległych podstawie, i cały stąd iloczyn podzielić przez podwoiony iloczyn z promienia przez wstawę kąta przeciwległego podstawie.*

44. *Maiąc wiadome dwa boki AB, AC, i kąt C przeciwległy bokowi AB, znaleść powierzchnią tróykąta ACB.*

Aby z tróykąta prostokątnego ACD wynaleść prostopadłą CD, potrzeba prócz wiadomego w nim boku AC i kąta prostego D, mieć znany ieden z kątów ostrych. Na ten koniec z tróykąta ACB wynayduię kąt B, przez proporcyą AB:AC=wstC: wst B; poczem, znaleziony kąt B odiąwszy wraz z kątem C od 180°, wypadnie kąt A. W tróykącie więc ACD, za pomocą proporcyi P : wst A=AC : CD, otrzymam wysokość CD, którą pomnożywszy przez połowę podstawy AB, wynaydę szukaną powierzchnią tróykąta.

45. *Maiąc dwa boki AB, AC, i kąt A między niemi zawarty, wiadome, wynaleść powierzchnią tróykąta ACB.*

W tróykącie prostokątnym ACD znaiąc bok AC, i wszystkie iego kąty, wynaydę wysokość CD, z proporcyi

$$P : \text{wst}\,A = AC : CD;$$

wziąwszy połowę znalezioney wysokości CD, i pomnożywszy przez podstawę AB, otrzymam powierzchnią tróykąta ACB.

Można w tym przypadku doyść powierzchni tróykąta, nie szukaiąc wysokości CD. Bo w proporcyi poprzedzaiącey, oba wyrazy drugiego stosunku pomnożywszy przez $\frac{AB}{2}$, będzie

$$P : \text{wst}\,A = \frac{AB \times AC}{2} : \frac{AB \times CD}{2},\ \text{stąd}$$

$\frac{AB \times CD}{2}$, czyli powierz. tróykąta ACB $=$ $\frac{\text{wst}\,A \times AB \times AC}{2 \times P}$; co pokazuie, *że dla znalezienia powierzchni tróykąta, potrzeba iloczyn z dwóch iego boków rozmnożyć przez wstawę kąta zawartego między temi bokami, a otrzymany stąd iloczyn podzielić przez podwoiony promień.*

46. Maiąc trzy boki wiadome tróykąta ACB, znaleść iego powierzchnią.

Szuka się naprzód odcinków AD, DB, zrobionych przez prostopadłą CD (27); potem w którymkolwiek z tróykątów prostokątnych ACD, CDB, wynayduie się wysokość CD, a tey połowa pomnożona przez podstawę AB, da powierzchnią tróykąta ACB. (*)

ROZDZIAŁ XVII.

PRZYSTOSOWANIE TRYGONOMETRYI DO PRAKTYKI.

Zagadnienie I.

Fig. 15. 47. *Wymierzyć wysokość DM wieży u spodu dostępney.*

Przypuściwszy że grunt iest poziomy, mierzę na nim od punktu M, odpowiednego wierzchołkowi wieży, odległość iakąkolwiek MP; poczem ustawiwszy ką-

(*) Można w tym przypadku otrzymać powierzchnią tróykąta nie szukaiąc iego wysokości; na ten koniec bierze się połowa summy trzech danych boków, i od tey odeymuie się następnie każdy bok tróykąta, a z trzech reszt pozostałych robi się iloczyn, i ten mnoży się przez połowę summy boków; z tego ostatniego iloczynu wyciągnięty pierwiastek kwadratowy, będzie szukaną powierzchnią tróykąta. I tak, tróykąta ABC summę trzech boków oznaczywszy przez S.; będzie powie. tróyk.

$$ABC = \sqrt{\tfrac{1}{2}S\left(\tfrac{1}{2}S-AB\right)\left(\tfrac{1}{2}S-AC\right)\left(\tfrac{1}{2}S-BC\right)}.$$

Obacz. Traité élém. de Trigonometrie par Lacroix. 5 edit. Paris 1810. art. 64.