ROZDZIAŁ XII.

O WŁASNOŚCIACH BRYŁ I MIERZENIU ICH POWIERZCHNI.

Opisania.

I. Nazywa się *bryłą wielościenną*, albo krócey *wielościanem*, każda bryła zakończona płaszczyznami, czyli *ścianami* płaskiemi maiącemi za granice liniie proste. I tak bryła ograniczona czterema ścianami, iest *czworościanem*, 6cią ścianami, *sześcianem*, 12stą ścianami, *dwunastościanem*, 20stą ścianami, *dwudziestościanem* i t. d.

II. Spólne przecięcie dwóch ścian przyległych w wielościanie, nazywa się *bokiem* albo *krawędzią* wielościanu.

III. *Wielościanem foremnym* nazywa się ten, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnemi równemi, i którego wszystkie kąty bryłowe są równe sobie.

Takich wielościanów iest pięć dlatego 1ód, że dla złożenia kąta bryłowego potrzeba naymniey trzech kątów płaskich; 2re, że potrzeba aby kąty płaskie zawieraiące kąt bryłowy wielościanu foremnego były kątami foremnego wielokąta, co łatwo z opisania bryły foremney widzieć się daie; 3cie, że kąt bryłowy zawarty iląkolwiek kątami płaskiemi iest zawsze mnieyszy od 4 kątów prostych (16). Stąd wypada 1ód, że dla złożenia kąta bryłowego z kątów tróykąta równobocznego, nie można wziąć mniey nad 3, ani więcey nad 5 kątów płaskich; gdyż ieden z tych kątów równy iest $\frac{2}{3}$ kąta prostego, więc 6 takich kątów, czyniąc 4 kąty proste, nie mogłyby złożyć kąta bryłowego (16); a zatem tróykątami równobocznemi może być tylko zawarty *czworościan, ośmiościan i dwudziestościan foremny.* 2re z kątów płaskich kwadratu nie można mniey ani więcey wziąć nad trzy, dla złożenia kąta bryłowego: kwadratami zatem może tylko być ograniczony *sześcian.* 3cie ponieważ każdy kąt pięciokąta foremnego czyni 108° (*), można zatem trzema kątami płaskiemi tego pięciokąta zawrzeć kąt bryłowy, a pięciokątami foremnemi zamknąć *dwunastościan foremny.*

Chcąc złożyć z tektury wspomnione wielościany foremne, tak się postępuie:

Fig.19. Dla złożenia czworościanu kréślą się na tekturze cztery tróykąty równoboczne.

Fig.20. Dla ośmiościanu, ośm tróykątów równobocznych.

Fig.21. Dla dwudziestościanu, dwadzieścia tróykątów równobocznych.

Fig.22. Dla sześcianu, sześć kwadratów.

Fig.23. Dla dwunastościanu, dwanaście pięciokątów foremnych.

Potem za pomocą liniiału i scyzoryka, wzdłuż liniy oddzielaiących każdą płaszczyznę, nadrzynaią się obwody figur do połowy grubości tektury, nakoniec składaią się ściany i łączą przez skleienie ich boków, którémi się stykać powinny.

(*) Bo podług (1,26. w.) kąty wewnętrzne pięciokąta foremnego równe są 6 kątom prostym, więc ieden kąt$=\frac{6}{5}=108°$.

IV. *Graniastosłup* iest bryła ograniczona iląkolwiek płaszczyznami, z których dwie przeciwległe są wielokątami równemi i równoległemi, a inne boczne równoległobokami; płaszczyzny przeciwległe AL, BJ są *podstawami* graniastosłupa; a zbiór równoległoboków BD, CF, HL i t. d. czyni powierzchnią *boczną* czyli *wypukłą* graniastosłupa. Fig 24.

Prostopadła BR z któregokolwiek punktu B iedney podstawy, spuszczona na podstawę drugą, iest *wysokością* graniastosłupa; a liniie BA, CD .... są iego krawędziami.

Można uważać graniastosłup iako utworzony przez podstawę AL, posuwaiącą się równolegle względem siebie, po krawędzi AB. Przeciąwszy zatem gdziekolwiek graniastosłup, płaszczyzną równoległą do podstawy, przecięcie stąd otrzymane, będzie równe tey podstawie.

Graniastosłup iest *prosty*, gdy krawędzie iego BA, CD .... są prostopadłe do podstawy; i wtedy każda krawędź iest równa wysokości graniastosłupa. W każdym innym przypadku graniastosłup iest *pochyły*, i wysokość iego iest mnieysza od krawędzi.

Graniastosłup iest *tróykątny*, *czworokątny*, *pięciokątny* i t. d. podług tego iak podstawa iego iest tróykątem, czworokątem, pięciokątem i t. d.

V. Graniastosłup maiący za podstawę równoległobok zowie się *równoległościanem*. Rownoległościan ograniczony iest sześcią równoległobokami, z których każde dwa przeciwne są równoległe i równe. Fig.25.

Równoległościan iest *prostokątny*, gdy wszystkie iego ściany są prostokątami.

Równoległościan prostokątny nazywa się *sześcianem*, gdy iest zamknięty sześcią równemi kwadratami.

Fig. 26. VI. *Ostrosłup* czyli *piramida*, iest bryła ograniczona iłąkolwiek płaszczyznami tróykątnemi schodzącemi się w iednym punkcie S, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa, i opartemi na bokach wielokąta ABCDE, służącego za *podstawę* ostrosłupowi.

Prostopadła SP z wierzchołka ostrosłupa na podstawę spuszczona, iest *wysokością* ostrosłupa, liniie SB, SC i t. d. są iego *krawędziami*, a zbiór tróykątów ASB, BSC i t. d. składa powierzchnią *wypukłą* czyli *boczną* ostrosłupa.

Ostrosłup iest tróykątny, czworokątny i t. d. podług tego, iak podstawą iego iest tróykąt, czworokąt i t. d.

Fig. 27. Ostrosłup iest *foremny*, gdy ma za podstawę wielokąt *foremny* BCDEF, i gdy prostopadła SP z wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę podstawy spuszczona, przechodzi przez środek P tey podstawy.

W ostrosłupie *foremnym* krawędzie SB, SC, SE, SD i t. d. są wszystkie równe sobie; bo są przeciwprostokątnemi tróykątów prostokątnych równych SPB, SPC, SPD i t. d.; nadto wszystkie boczne tróykąty SBC, SCD, SDE i t. d. są równoramienne i równe sobie. A zatem z wierzchołka S ostrosłupa foremnego, spuszczona prostopadła SK na podstawę DE tróykąta bocznego SDE, oznaczaiąca iego wysokość, iest razem *wysokością* wszystkich tróykątów bocznych.

Przeciąwszy ostrosłup SABCDE płasz- *Fig.26.*
czyzną abcde równoległą do podstawy,
bryła ABCDE abcde, ztego przecięcia otrzymana, zowie się ostrosłupem *ściętym*, albo *kłocem ostrosłupowym.*

VII. *Walec* iest bryła, którą uważać mo- *Fig.28.*
żna iakby utworzoną przez prostokąt ABCD obracaiący się około iednego boku AB, iako nieruchomego, pókiby nie powrócił do tegoż samego mieysca, z którego się obracać zaczął.

Osią walca iest liniia nieruchoma AB, około którey prostokąt obraca się.

Podstawami walca są koła równe DHE, CGF, utworzone obrotem dwóch boków przeciwległych AD, BC, prostokąta AC. Powierzchnia utworzona przez bok CD, nazywa się powierzchnią *wypukłą* albo *boczną* walca.

Prostopadła AB z punktu iakiegokolwiek iedney podstawy, spuszczona na podstawę drugą, iest wysokością walca.

Walec iest *prosty*, kiedy oś AB iest prostopadła do dwóch podstaw, i wtedy oś iest równa wysokości walca.

Walec iest *pochyły*, kiedy oś AB iest *Fig.29.*
nachylona do podstaw, i wtedy oś iest większa od wysokości walca.

VIII. Można uważać walec za graniastosłup, którego podstawami są wielokąty o nieskończoney liczbie małych boków.

IX. *Ostrokrąg* iest bryła, którą uważać *Fig.30.*
można iako utworzoną przez tróykąt prostokątny SAB, obracaiący się około iednego z ramion SA kąta prostego, uważanego za nieruchome, pókiby nie wrócił do tego samego mieysca, z którego się obracać zaczął.

Osią ostrokręgu, iest liniia nieruchoma SA, około którey tróykąt obraca się, a wierzchołkiem iest punkt S.

Podstawą ostrokręgu iest koło BDC, utworzone ramieniem AB kąta prostego; a powierzchnia utworzona przez obrót przeciwprostokątney SB, nazywa się powierzchnią *wypukłą* albo *boczną*. Każde przecięcie w ostrokręgu zrobione prostopadłe do iego osi SA, iest *kołem*.

Prostopadła SA, z wierzchołka ostrokręgu na podstawę spuszczona, iest *wysokością* ostrokręgu.

Ostrokrąg iest *prosty*, gdy oś SA iest prostopadła do podstawy, i wtedy wysokość ostrokręgu iest równa iego osi.

Fig. 31. Ostrokrąg iest *pochyły*, gdy oś iego iest nachylona do podstawy; i wtedy wysokość ostrokręgu iest mnieysza od iego osi.

Liniie proste SC, SD, i t. d. oznaczaiące odległość wierzchołka ostrokręgu, od okręgu podstawy, zowią się *bokami* ostro-
Fig. 30. kręgu. Wszystkie te boki w ostrokręgu prostym są równe sobie, bo każdy z nich iest równy przeciwprostokątney SB, tworzącey powierzchnią wypukłą ostrokręgu.

X. Można ostrokrąg uważać za ostrosłup maiący za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków.

Fig. 32. Jeżeli ostrokrąg prosty SABD przetniemy płaszczyzną abd równoległą do podstawy ABD, bryła ADda z tego przecięcia powstaiąca, zowie się ostrokręgiem *ściętym*, albo *klocem ostrokręgowym*.

Fig. 33. XI. *Kula* iest bryła ograniczona powierzchnią krzywą, maiącą wszystkie punkta równo oddalone od punktu C

wewnątrz iey położonego, który nazywa się *środkiem* kuli.

Można uważać kulę iako utworzoną przez obrót całkowity półkola DAE, około średnicy DE nieruchomey; bo w tym obrocie powierzchnia opisana przez półokrąg DAE, ma wszystkie punkta równo oddalone od środka C.

Promień kuli, iest liniia prosta poprowadzona od środka C, do powierzchni kuli.

Srednica albo *oś* kuli, iest liniia prosta DE przechodząca przez środek C, i zakończona z obu stron na iey powierzchni.

Wszystkie promienie kuli są równe, i wszystkie iey średnice są podwóyne względem promienia, przeto są równe między sobą.

Dowiedziemy w (twier. 21), że każde przecięcie kuli płaszczyzną, iest *kołem*. Wszelkie przecięcie kuli maiące środek w C, zowie się *kołem wielkiem* kuli; każde zaś inne przecięcie kuli nie przechodzące przez iey środek C, nazywa się *kołem małem* kuli.

Bryła utworzona przez obrót całkowity wycinka kołowego DCB, około promienia DC, nazywa się *wycinkiem* kuli.

Płaszczyzna AMBF przecinaiąca kulę w iakimkolwiek kierunku, np. prostopadle do iey osi DE, dzieli kulę na dwa *odcinki kuliste* DAMBF, EAMBF, maiące za spólną *podstawę* koło AMBF; pierwszego z tych odcinków *wysokością* iest liniia DO, drugiego, liniia OE.

Odcinek kulisty AMBF A'M'B'F' ma dwie *podstawy* AMBF, A'M'B'F', gdy iest zawarty między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi DE.

Można uważać odcinek kulisty DAMBF, iako utworzony przez obrót całkowity półodcinka kołowego DOB, około linii prostey DO; a powierzchnią wypukłą tegoż odcinka kulistego, przez obrót łuku DB.

XII. Mówi się że walec prosty iest opisany na kuli, (fig. 33 bis) gdy ma za podstawę koło wielkie BEC kuli, a wysokość AB równą iey osi.

Mówi się podobnie, że walec iest opisany na ostrokręgu, gdy ma spólną z nim podstawę, i też samą wysokość.

XIII. Bryły zowią się *podobne*, gdy są zawarte równą liczbą płaszczyzn podobnych, i gdy maią kąty bryłowe odpowiednie równe. Z tego opisania wypada, że w wielościanach podobnych, krawędzie odpowiednie są proporcyonalne.

17. *Twierdzenie.*

Powierzchnia boczna graniastosłupa prostego, równa iest iloczynowi z obwodu podstawy przez wysokość graniastosłupa.

Fig. 34. Bo prostokąty AF, FD, AC.. składaiące powierzchnią boczną graniastosłupa prostego AH, maią za podstawy boki AE, ED, AG... podstawy graniastosłupa, a za wysokość iego krawędź AB; aże powierzchnia prostokąta, iest równa iloczynowi z iego podstawy przez wysokość, więc summa tych wszystkich prostokątów, czyli powierzchnia boczna graniastosłupa prostego AH, ma za miarę (AE+ED DG+AG)×AB, toiest równa się iloczynowi z obwodu podstawy przez wysokość graniastosłupa.

Wniosek. Powierzchnia boczna walca Fig. 28.
prostego FD, iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy FGC przez oś AB. Bo walec prosty iest graniastosłupem prostym maiącym za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków, a wysokość równą osi AB (opi. VIII. roz. XII).

18. *Twierdzenie.*

Powierzchnia boczna graniastosłupa pochy- Fig. 24.
łego DJ, iest równa iloczynowi z iego krawędzi któreykolwiek AB, przez obwód przecięcia adfle prostopadłego do teyże krawędzi.

Płaszczyzna bowiem przecięcia adfle, prostopadła do krawędzi BA, iest razem prostopadła do wszystkich krawędzi CD, HF, JL, KE równoległych do BA (6); a zatem i liniie ad, df, fl... na tey płaszczyznie znayduiące się, są odpowiednie prostopadłe do krawędzi BA, CD, HF... (opis. II. r. XI); ieżeli więc te krawędzie równe, weźmiemy za podstawy odpowiedne równoległobokom AC, DH, FJ, EJ, AK, składaiącym powierzchnią boczną graniastosłupa DJ; liniie proste ad, df, fl, el, ea, będą wysokościami tych równoległoboków: aże powierzchnia każdego z nich równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość (1, 22. wn. 2); przeto summa powierzchni wszystkich równoległoboków, czyli powierzchnia boczna graniastosłupa pochyłego DJ, iest równa iloczynowi z krawędzi BA, przez summę wszystkich boków przecięcia adflea, toiest równa BA(ad+df+fl+le+ea).

Wniosek. Powierzchnia boczna walca Fig. 29.
pochyłego FD, iest równa iloczynowi z bo-

ku EF, przez obwód przecięcia abcd prostopadłego do tegoż boku EF. Bo walec pochyły iest graniastosłupem pochyłym maiącym za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków.

Uwaga I. Ponieważ Jeometrya elementarna nie podaie sposobu oznaczenia obwodu przecięcia abcd, przestać więc potrzeba w praktyce, na wymierzeniu tego obwodu mechanicznie, obwiiaiąc walec nicią wyciągniętą na obwodzie płaszczyczyzny abcd, prostopadłey do boku EF.

Uwaga II. Chcąc wynaleść powierzchnią całą graniastosłupa albo walca, potrzeba do powierzchni boczney tych brył, dodać summę powierzchni ich podstaw, które w graniastosłupie tak wynayduią się iak powierzchnie wielokątów, a w walcu iak powierzchnie kół.

19. *Twierdzenie.*

Fig.27. *Powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego SBCDEF, iest równa iloczynowi z obwodu podstawy BCDEF, przez połowę wysokości SK, iednego z tróykątów składaiących powierzchnią boczną ostrosłupa.*

Bo tróykąty SBC, SCD, SDE, SEF, SFB składaiące powierzchnią boczną tego ostrosłupa są równe sobie (opis. VI. roz. XII), i wszystkie maią wysokość równą prostopadłey SK; aże powierzchnia każdego z tych tróykątów iest równa iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości SK; przeto summa powierzchni wszystkich tróykątów bocznych, czyli powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego SBCDEF iest $= (BC + CD + DE + EF + FB) \times \frac{SK}{2}$, toiest iloczynowi z obwodu podstawy ostrosłupa przez połowę wysokości tróykąta bocznego.

Wniosek. Powierzchnia boczna ostro- Fig. 30. *kręgu prostego SCDB, iest równa iloczynowi z okręgu iego podstawy CDB, przez połowę boku CS ostrokręgu.* Bo ostrokrąg prosty iest ostrosłupem foremnym maiącym za podstawę wielokąt o nieskończoney liczbie małych boków.

Uwaga I. Chcąc wynaleść powierzchnią boczną ostrosłupa nieforemnego, szukać potrzeba powierzchni tróykątów składaiących powierzchnią boczną tego ostrosłupa, i wziąć summę znalezionych powierzchni.

Uwaga II. Wyrachowanie powierzchni boczney ostrokręgu pochyłego, lubo nie należy do Jeometryi elementarney, można iednak na mocy prawd poprzedzaiących wynaleść tę powierzchnią sposobem przybliżonym; uważaiąc ostrokrąg pochyły za ostrosłup nieforemny któregoby powierzchnia boczna składała się z nieskończoney liczby tróykątów. Na ten koniec podzieliwszy okrąg podstawy tego ostrokręgu na tak wielką liczbę łuków, iżby te bez widocznego uchybienia, mogły się uważać za podstawy tróykątów bocznych ostrokręgu, i wynalazłszy tych tróykątów powierzchnie, otrzymamy powierzchnią boczną ostrokręgu pochyłego. Dla obrachowania zaś powierzchni całey tego ostrokręgu, dodać potrzeba znalezioną powierzchnią podstawy do powierzchni boczney.

20. *Twierdzenie.*

Fig.32. *Powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego ADda, iest równa iloczynowi z boku Aa kloca, przez połowę summy z okręgów dwóch iego podstaw ABD, abd.*

Bo powierzchnią boczną tego kloca można uważać iako złożoną z nieskończoney liczby trapezów, (iak iest AabB), których summa podstaw górnych, iest równa okręgowi podstawy górney abd kloca, a summa podstaw dolnych, okręgowi podstawy dolney ABD tegoż kloca; aże powierzchnia trapeza, iest równa iloczynowi z połowy summy dwóch iego podstaw, przez odległość między temi podstawami (II,23); tą zaś odległością w każdym trapezie iest bok Aa kloca, zatem summa powierzchni wszystkich trapezów, czyli powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego ADda, iest równa iloczynowi z połowy summy okręgów dwóch podstaw ABD abd, przez bok Aa kloca.

Wniosek. Przez środek M boku Aa kloca, przeciąwszy kloc płaszczyzną równoległą do podstawy ABD, przecięcie stąd otrzymane będzie kołem, którego średnica iest MO (opis. IX. r. XII). Aże w trapezie ADda, iest liniia $MO = \frac{AD + ad}{2}$ (II, 23): nadto okręgi kół maią się do siebie iak ich średnice (III, 16. wnio. 2); zatem okrąg $MNO = \frac{\text{okr. } ABD + \text{okr. } abd}{2}$.

Więc powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego iest równa iloczynowi z boku kloca, przez okrąg przecięcia zrobionego w klocu, w równey odległości od dwóch iego podstaw.

21. *Twierdzenie.*

Każde przecięcie kuli płaszczyzną AMBF iest kołem. Fig. 33.

Bo od środka C kuli, poprowadziwszy prostopadłą CO do płaszczyzny AMBF, tudzież liniie pochyłe CF, CM, CB ... do różnych punktów obwodu AMBF ograniczaiącego płaszczyznę przecięcia, nakoniec liniie OM, OF, OB..; ponieważ pochyłe CF, CM, CB.. iako promienie kuli są równe, są więc równo oddalone od prostopadłey CO (4); zatem wszystkie liniie OF, OM, OB.. są równe między sobą; więc przecięcie AMBF iest kołem, którego środek iest w punkcie O.

22. *Twierdzenie.*

Powierzchnia kuli iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez iey średnicę AB. Fig. 35.

Bo wystawiwszy sobie, że półokrąg AFB, tworzący powierzchnią kuli przez obrót około średnicy AB, iest podzielony prostopadłemi EP, SO.. do teyże średnicy, na nieskończoną liczbę małych łuków, iakim iest ES; będzie summa powierzchni utworzonych przez te łuki, równa powierzchni kuli. Aże powierzchnią utworzoną przez każdy z tych łuków, uważanych za liniie proste, można wziąć za powierzchnią boczną małego kloca ostrokręgowego; więc ze środka M łuku ES, spuściwszy prostopadłą MR do średnicy AB, będzie powierzchnia boczna, kloca ostrokręgowego maiącego za bok liniią ES, równa okr. MR$\times$ES (20.w.). To założywszy, poprowadźmy promień GM, i liniią EJ prostopadłą do SO, a przeto równą PO (I, 20). Dwa tróykąty MCR, ESJ, maiące boki odpowiednie prostopadłe do siebie, toiest, CM do ES (II, 5. w.), MR do EJ, RC do SJ, są podobne (III, 7), i daią CM: MR=ES: EJ=PO; zatem okr. CM: okr. MR=ES:PO (III,16.w.2); stąd okr.MR×ES= okr. CM×PO. Więc powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego, którego ES iest bokiem, wyrazi się przez okr. CM×PO, toiest, będzie równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez część PO średnicy AB, oznaczaiącą wysokość kloca. Zatem powierzchnia boczna wszystkich kloców ostrokręgowych, czyli powierzchnia kuli, iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez summę wysokości wszystkich kloców, czyli przez średnicę AB, *więc powierzchnia kuli* i t. d.

Wniosek I. *Powierzchnia kuli równa iest cztery razy wziętey powierzchni koła wielkiego kuli.* Bo powierzchnia koła wielkiego, iest równa iloczynowi z iego okręgu przez połowę promienia, czyli przez czwartą część iego średnicy (II, 24. w. 1), przeto ten iloczyn cztery razy wzięty, iest równy powierzchni kuli.

Wniosek II. *Powierzchnia kuli iest równa powierzchni boczney walca prostego opisanego na kuli.* Bo walec prosty na kuli opisany ma za podstawę koło wielkie kuli, a wysokość równą średnicy kuli; zatem powierzchnia boczna tego walca, równa iest iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli przez iey średnicę (17. wnio.), czyli równa iest powierzchni kuli.

Fig. 36. *Wniosek* III. *Powierzchnia wypukła odcinka kulistego BAFCE o iedney podsta-*

wie, maiącego za wysokość BD, równa iest iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez wysokość DB tego odcinka.

Podobnie, powierzchnia wypukła odcinka kulistego AECFA'E'C'F' o dwóch podstawach, maiącego za wysokość DO', iest równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez wysokość O'D.

23. *Twierdzenie.*

Powierzchnia kuli iest równa dwóm trzecim częściom powierzchni całey walca prostego opisanego na kuli.

Bo powierzchnia kuli równa iest powierzchni boczney walca opisanego na niey (22, wn. 2), i każda z tych powierzchni równa się czterem kołom wielkim kuli (22. wn. 1). Aże dla otrzymania powierzchni całey walca opisanego na kuli, potrzeba do powierzchni iego boczney dodać dwa koła wielkie kuli, które są iego podstawami (18. uwag. 2); więc cała powierzchnia wałca, będzie równa sześciu wielkim kołom kuli, kiedy powierzchnia tey kuli równa się tylko czterem wielkim kołom: zatem powierzchnia kuli ma się do powierzchni całey walca opisanego na niey, iak 4: 6, albo iak 2: 3; czyli, że powierzchnia kuli równa iest $\frac{2}{3}$ powierzchni całey walca prostego opisanego na niey.

Uwaga. Widzieliśmy w twierdzeniach poprzedzaiących, że powierzchnia boczna iakieykolwiek bryły równa się iloczynowi z dwóch iey wymiarów. Więc powierzchnie boczne dwoch iakichkolwiek brył tego samego gatunku, maią się do siebie iak iloczyny z dwóch ich wymiarów iednego *imienia*. Oznaczywszy zatem przez S, s, powierzchnie dwóch iakichkolwiek brył iednego gatunku, a przez H, B; h, b, ich wymiary iednego imienia, będzie $S: s = H \times B: h \times b$. W tey proporcyi uczyniwszy wymiar $H = h$, i podzieliwszy drugi stosunek przez H, będzie $S: s = B: b$; uczyniwszy znowu $B = b$, i podzieliwszy ten sam stosunek przez B, wypadnie $S: s = H: h$; co pokazuie, *że ieżeli naprzykład dwa graniastosłupy proste, lub dwa walce proste, maią równe wysokości, a obwody podstaw nierówne*; albo naodwrót, *ieżeli maią obwody podstaw równe, a wysokości nierówne*; *w pierwszym razie, powierzchnie boczne tych brył będą się mieć do siebie, iak obwody podstaw, w drugim, iak wysokości.*

Toż rozumie się o powierzchniach bocznych dwóch ostrosłupów foremnych, i dwóch ostrokręgów prostych.

24. *Twierdzenie.*

Powierzchnie dwóch brył podobnych maią się do siebie iak kwadraty z ich wymiarów odpowiednych.

Bryły bowiem podobne są te, w których wszystkie wymiary odpowiedne H, B, h, b, są proporcyonalne (opi. XIII.r.XII): będzie zatem wymiar $H: h = B: b$; więc proporcya $S: s = H \times B: h \times b$ (23. uwag.), zamieni się na $S: s = H \times H: h \times h = B \times B: b \times b$ (*), czyli $S: s = H^2: h^2 = B^2: b^2$; *więc powierzchnie dwóch brył podobnych* i t. d.

(*) Bo stosunek $H \times B: h \times b$ wypada z pomnożenia stosunku $H: h$ przez stosunek $B: b$; aże stosunek $H: h$ z przypuszczenia iest równy stosunkowi $B: b$, więc zamiast iloczynu z dwóch tych stosunków, można wziąć iloczyn z iednego.

25. *Twierdzenie.*

Powierzchnie dwóch kul maią się do siebie iak kwadraty z ich promieni, albo ze średnic.

Bo powierzchnia kuli równa iest cztery razy wziętemu kołu wielkiemu kuli (22. w. 1); więc powierzchnie dwóch kul maią się do siebie, iak cztery razy wzięte koła wielkie tych kul, czyli iak też koła raz wzięte; aże koła maią się do siebie iak kwadraty z ich promieni, lub iak kwadraty ze średnic, więc i powierzchnie dwóch kul maią się do siebie iak kwadraty z promieni, lub z ich średnic.

ROZDZIAŁ XIII.

O MIERZENIU BRYŁ.

Opisania.

I. Do mierzenia brył używa się zwyczaynie *sześcianu*, który gdy ma krawędź iedną równą długości sążnia, łokcia, stopy, cala i t. d. nazywa się *sążniem sześciennym*, *łokciem sześciennym*, *stopą sześcienną*, *calem sześciennym i t. d.*

Mierzyć zatem iakąkolwiek bryłę, iest-to dochodzić, ile razy mieści się w niey sześcian za miarę czyli iedność wzięty.

II. Dwa wielościany różne co do kształtu, lecz równe sobie co do bryłowatości, nazywaią się *równoważne.*