$$Ws.q = \sqrt{(2\, Ws\, Od.q - Ws\, Odw.q^2)},$$

$$= \sqrt{(2.y - y^2)}.$$

Biorąc tedy w równanie wyżéy stoiące: $d.q = \frac{d.y}{Ws.q}$, zamiast wyrazu: $Ws.q$, wartość wynalezioną, będzie:

$$d.q = \frac{d.y.}{\sqrt{(2y - y^2)}}.$$

To iest różniczka łuku, przez samą iego wstawę odwróconą daną, wyrażona.

§. 190. Twierdzenie. Różniczką dostawy odwróconéy łuku iest równa iloczynowi uiemnemu z różniczki łuku iéy, przez dostawę tegoż łuku.

Dowodzenie. Maiąc tedy łuk q, dostawę odwróconą iego, znaczę tak: $Dos\,Odw.q$. A tak z wyobrażenia o liniiach trygonometrycznych, podaie się:

$Dos\,Odw.q = 1 - Ws.q$, stąd:

$d.Dos\,Odw.q = - d.Ws.q$. A że:

$d.Ws.q = d.q.Dos.q$ (§. 176.), przeto będzie:

$d.Dos\,Odw.q = - d.q.Dos.q.$

To iest co się założyło.

§. 191. Wniosek. Maiąc do łuku q, daną dostawę odwróconą y, dla czego: $y = Dos\,Odw.q$, będziemy mieli podług §. 190:

$d.Dos\,Odw.q = - d.q.Dos.q$, czyli:

$dy = - d.q.Dos.q$; stąd:

$$\frac{dy}{Dos.q} = -dq; \text{ przeto:}$$

$$d.q = -\frac{dv}{Dos.q}.$$

To iest różniczka łuku wynayduie się, maiąc iego dostawę odwróconą daną, dzieląc różniczkę dostawy odwroconéy łuku przez dostawę tegoż łuku, i biorąc iloraz uiemnie. Chcąc zaś mieć różniczkę łuku wynalezioną, przez samą dostawę odwróconą która iest dana, wyrażoną, postępuie się tak:

$$Dos\,Odw.q = 1 - Ws.q = 1 - \sqrt{(1 - Dos.q^2)};$$

stąd:

$$Dos\,Odw.q - 1 = -\sqrt{(1 - Dos.q^2)}; \text{ czyli:}$$

$$1 - Dos\,Odw.q = \sqrt{(1 - Dos.q^2)}; \text{ przeto:}$$

$$1 - 2.Dos\,Odw.q + Dos\,Odw.q^2 = 1 - Dos.q^2;$$

a następnie:

$$Dos.q^2 = 2.Dos\,Odw.q - Dos\,Odw.q^2; \text{ a zatém:}$$

$$Dos.q = \sqrt{(2\,Dos\,Odw.q - Dos\,Odw.q^2)},$$

$$= \sqrt{(2y - y^2)}.$$

Kładąc więc w równanie wyżéy stoiące: $d.q = -\frac{dy}{Dos.q}$, zamiast wyrazu: *Dos.q*, wartość, wypada:

$$d.q = -\frac{d.y}{\sqrt{(2y - y^2)}},$$

gdzie różniczka łuku iest przez samą dostawę odwróconą, wyrażona. —

§. 192. Wniosek. Umieiąc iuż wynaydywać różniczki pierwsze do każdéy linii trygonometryczněy, tém samém umimy wynaydywać i wszystkie wyższe różniczki do tychże liniy, postępuiąc zawsze z wyższemi różniczkami według §fu 41. I tak niech będzie:

$$y = Ws.q, \quad a \quad z = Dos.q,$$

a będziemy mieli biorąc *d.q* za nieodmienne: (§.55)

$$dy = d.q\,Dos.q\ (\S.176), \quad a \quad d.z = -dq.Ws.q(\S.178.)$$

$$d^2.\ y = -d.q^2\ Ws.q, \qquad d^2.\ z = -d.q^2\ Dos.q,$$

$$d^3\ y = -d.q^3\ Dos.q, \qquad d^3.\ z = d.q^3\ Ws.q,$$

$$d^4.\ y = d.q^4\ Ws.q, \qquad d^4.\ z = d.q^4\ Dos.q,$$

$$d^5.\ y = dq^5\ Dos.q, \qquad d^5.\ z = -dq^5\ Ws.q,$$

$$d^6.\ y = -d.q^6\ Ws.q, \qquad d^6.\ z = -d.q^6\ Dos.q,$$

$$d^7.\ y = -d.q^7\ Dos.q, \qquad d^7.\ z = d.q^7\ Ws.q,$$

$$d^8.\ y = d.q^8\ Ws.q, \qquad d^8.\ z = d.q^8\ Dos.q,$$

i t. d.

O wszystkich innych liniiach toż samo się rozumie.

§. 193. Uwaga. Sposób różniczkowania ilości trygonometrycznych, iest w Matematyce wyższéy w dwoiakim względzie nieodbicie potrzebnym. Nayprzód, aby każdą funkcyą z różnych rachunków wypadaiącą, maiącą w sobie ilości trygonometryczne, modz różniczkować. Powtóre, aby tablice trygonometryczne, daleko mniéy mozolnym sposobem iak podług niższéy Analizy, umieć obrachować. Co do pierwszego, wiedząc iuż iak się każdéy linii trygonometryczněy różniczka wynayduie, iako też, iak się różniczka łuku przez iego każdą linią trygonometryczną wyraża, z łatwością potrafimy każdą funkcyą, maiącą w sobie iakąkolwiek ilość trygonometryczną, różniczkować, nadaiąc tylko wprzody funkcyi przyzwoity kształt i zachowuiąc równie prawidła ogólnego różniczkowania, iako też różniczkowania ilości trygonometrycznych. Co do drugiego, wyłożymy w krótkości, w kilku paragrafach następuiących, iak ze sposobu różniczkowania liniy trygonometrycznych, z którego się ich całkowanie łatwo podaie, wypada sposób obrachowania tablic trygonometrycznych.

§. 194. Wniosek. Umieiąc ilości trygonometryczne różniczkować, i znaiąc prawidła całkowania funkcyi o iedney zmienney, potrafimy także funkcye różniczkowe ilości trygonometrycznych całkować, odwracaiąc tylko funkcye różniczkowe trygonometryczne i przydaiąc im iednostaynie zmienną ilość. I tak:

$$\int . d.q. \text{Dos.}\, q = \text{Ws.}\, q + \text{Const},$$

$$\int . d.q. \text{Ws.}\, q = -\text{Dos.}\, q + \text{Const},$$

$$\int . \frac{d.q}{\text{Dos.}\, q^2} = \text{Stycz.}\, q + \text{Const},$$

$$\int . \frac{d.q.\text{Ws.}\, q}{\text{Dos.}\, q^2} = \text{Siecz.}\, q + \text{Const.},$$

$$\int . \frac{d.q}{\text{Ws.}\, q^2} = -\text{Dsst.}\, q + \text{Const.},$$

$$\int . \frac{d.q.\text{Dos}\, q}{\text{Ws.}\, q^2} = -\text{Dosiecz.}\, q + \text{Const.},$$

$$\int . d.q.\text{Ws.}\, q = \text{Ws Odw.}\, q + \text{Const.},$$

$$\int . d\, q \text{Dos.}\, q = -\text{Dos Odw.}\, q + \text{Const.}$$

że wynalezione całkowe są prawdziwemi całkowemi, do danych funkcyy różniczkowych z lewéy strony stojących, należącemi, przekonywamy się także różniczkuiąc też całkowe podług prawideł wyżéy wyłożonych, przez co na powrót dane funkcye różniczkowe wypadną. Pozostałe funkcye różniczkowe trygonometryczne, tymże samym sposobem się całkuią.

§. 195. Wniosek. Z poprzedzaiącego §fu pokazuie się że maiąc iakiekolwiek funkcye różniczkowe, w które różniczki trygonometryczne wschodzą, te zawsze potrafimy całkować, ieżeli im wprzody nadamy kształt któréykolwiek funkcyi różniczkowéy, z wyłożonych w szesnastu paragrafach pierwszych tego Rozdziału.

§. 196. Zagadnienie. Jak, maiąc daną wstawę, wynaleść iéy łuk za pomocą szeregu nieskończonego, przez wstawę daną wyrażonego?

Rozwiązanie. Niech wstawa dana nazywa się s, iéy łuk, którego szukamy q. A tak:

$$d.q = \frac{d.s}{\sqrt{(1-s^2)}} \quad (\S\ 177.),\ \text{czyli:}$$

$$d.q = ds.(1-s^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Dla całkowania ostàtniego równania zamieniam wyraz: $(1-s^2)^{\frac{-1}{2}}$, na szereg nieskończony za pomocą binomium, który iest taki:

$$(1-s^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{s^2}{2} + \frac{\frac{3}{4}.s^4}{1.2} + \frac{\frac{3.5}{8}.s^6}{1.2.3} + \frac{\frac{3.5.7.s^8}{16}}{1.2.3.4} + \frac{\frac{3.5.7.9.s^{10}}{32}}{1.2.3.4.5} + \frac{\frac{3.5.7.9.11.s^{12}}{64}}{1.2.3.4.5.6} \ldots\ldots$$

Albo:

$$(1-s^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{s^2}{2} + \frac{3.s^4}{2.4} + \frac{3.5\,s^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7\,s^8}{2.4.6.8} +$$

$$+ \frac{3.5.7.9.s^{10}}{2.4.6.8.10} + \frac{3.5.7.9.11\,s^{12}}{2.4.6.8.10.12} \ldots\ldots$$

A tak:

$$d.q = d.s.(1-s^2)^{\frac{-1}{2}} = d.s + \frac{s^2\,ds}{2} + \frac{3.s^4\,ds}{2.4} +$$

$$+ \frac{3.5.s^6\,ds}{2.4.6} + \frac{3.5.7.s^8\,ds}{2.4.6.8} +$$

$$+ \frac{3.5.7.9\,s^{10}ds}{2.4.6.8.10} + \frac{3.5.7.9.11.s^{12}ds}{2.4.6.8.10.12} \ldots\ldots$$

przeto:

$$q = s + \frac{s^3}{3.2} + \frac{3.s^5}{5.2.4} + \frac{3.5.s^7}{7.2.4.6} +$$

$$+ \frac{3.5.7.s^9}{9.2.4.6.8} + \frac{3.5.7.9.s^{11}}{11.2.4.6.8.10} +$$

$$+ \frac{3.5.7.9.11.s^{13}}{13.2.4.6.8.10.12} \ldots\ldots + \text{Const.}$$

Biorąc, dla wynalezienia całkowéy, $s=0$, i cała całkowa wynaleziona, iako mnożona przez s, także iest zerem; a zatem i ilość *Const.* $=0$. A tak:

$$s + \frac{s^3}{3.2} + \frac{3.s^5}{5.2.4} + \frac{3.5.s^7}{7.2.4.6} +$$

$$+ \frac{3.5.7\,s^9}{9.2.4.6.8} + \frac{3.5.7.9.s^{11}}{11.2.4.6.8.10} +$$

$$+ \frac{3.5.7.9.11.s^{13}}{13.2.4.6.8.10.12} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

iest zupełną całkową. Oznaczywszy wstawę do pewnego kąta pod pewnym promieniem należącą, lub maiąc iaką wstawę daną albo znaną, łatwo można podług wypadłego szeregu łuk do niéy należący obrachować, gdyby go ktoś chciał na téy drodze znaleść.

§. 197. Zagadnienie. Maiąc dany łuk, iak wynaleść wstawę do niego należącą za pomocą szeregu nieskończenego, przez dany łuk wyrażonego?

Rozwiązanie. Niech dany łuk będzie q, wstawa zaś iego którey szukamy niech się nazywa s. Przybieram sobie szereg na s, przez q wyrażony, taki:

$$s = q + B.q^3 + Cq^5 + Dq^7 + Eq^9 + Fq^{11} + + Gq^{13} \ldots$$

Cała rzecz tedy idzie o obrachowanie współczynników szeregu, to iest wyrazów: B, C, D, E, F, G i t. d., dlaczego szereg muszę przyprowadzić do Zera (§. 7.), w którym razie każdy współczynnik będzie także równy Zeru i będzie miał poiedyncze równanie, z którego się da wynaleść. Końcem tego szereg powyższy różniczkuię. A tak:

$$d.s = d.q + 3\,B.q^2\,d.q + 5.C.q^4\,dq + + 7.D.q^6\,d.q + 9E.q^8\,dq + 11\,F.q^{10}dq + + 13\,G.q^{12}\,dq \ldots\ldots$$

czyli:

$$\frac{d.s}{d.q} = 1 + 3B.q^2 + 5C.q^4 + 7.D.q^6 + 9E.q^8 +$$
$$+ 11.F.q^{10} + 13.G.q^{12} \ldots\ldots$$

A przeto:

$$\frac{d^2.s}{d.q^2} = 0 + 3.2.B.q + 5.4.C.q^3 + 7.6.D.q^5 +$$
$$+ 9.8.E.q^7 + 11.10.F.q^9 + 13.12.G.q^{11} \ldots$$

(§. 57.) i szereg ten nazywam n. p. $\dot{M}$.

A że:

$d.s = d.q.\,\mathrm{Dos}.q = d.q.\sqrt{(1 - \mathrm{Ws}.q^2)}$ (§. 176), czyli:

$d.s = d.q.\sqrt{(1 - s^2)}$, dlaczego:

$\frac{d.s}{d.q} = \sqrt{(1 - s^2)}$, a tém samém:

$$\frac{d.s^2}{d.q^2} = 1 - s^2;$$

przeto, różniczkuiąc ostatnie równanie, będzie:

$$\frac{2.ds.d^2.s}{d.q^2} = -2s.d.s, \text{ albo:}$$

$$\frac{d^2.s}{d.q^2} = -s.$$

Biorąc zaś wartość zamiast *s* z szeregu wyżéy stoiącego, wypada:

$$\frac{d^2 s}{d. q^2} = -q - Bq^3 - Cq^5 - Dq^7 - E.q^9 -$$
$$- Fq^{11} - G.q^{13} \ldots\ldots$$

Daléy w szereg *M*, kładę zamiast $\frac{d^2 s}{d q^2}$, wartość wynalezioną, a wypadnie:

$$-q - B.q^3 - Cq^5 - Dq^7 - E.q^9 - Fq^{11} -$$
$$-G.q^{13} \ldots\ldots = 3.2.B.q + 5.4.C.q^3 +$$
$$+ 7.6.D.q^5 + 9.8.E.q^7 + 11.10F.q^9 +$$
$$+ 13.12G.q^{11} \ldots\ldots$$

Przenosząc zaś wszystkie wyrazy uiemne na drugą stronę, będziemy mieli szereg równy Zeru taki:

$$\begin{array}{llll} o = 3.2.B.q & + 5.4.C.q^3 & + 7.6\,D.q^5 & + \\ \quad + q & + Bq^3 & + Cq^5 & \end{array}$$
$$\begin{array}{lll} + 9.8.E.q^7 & + 11.10Fq^9 & \ldots\ldots \\ + Dq^7 & + Eq^9 & \ldots\ldots \end{array}$$

A więc podług §. 7, ostatniego szeregu każdy współczynnik do téy saméy potęgi zmiennéy ilości *q* należący, iest Zerem. To iest:

$3.2B + 1 = o$ a więc:

$$B = -\frac{1}{2.3};$$

$5.4.C + B = 0$, a więc:

$$C = -\frac{B}{5.4} = \frac{1}{2.3.4.5};$$

$7.6.D + C = 0$, a więc:

$$D = -\frac{C}{7.6} = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7};$$

$9.8 E + D = 0$, a więc:

$$E = -\frac{D}{9.8} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9};$$

$11.10 F + E = 0$, a więc:

$$F = -\frac{E}{11.10} = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11},$$

i t. d.

Biorąc teraz w przyięty szereg na wstawę *s*, zamiast ogólnych naznaczonych współczynników, ich wynalezione wartości, szereg ten daie taki:

$$s = q - \frac{1}{2.3} q^3 + \frac{1}{2.3.4.5}.q^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}.q^7 +$$

$$+ \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}.q^9 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}.q^{11} \ldots$$

który iest szukanym szeregiem. Ten sam szereg można także innym sposobem wynaleść, to iest odwracaiąc szereg przeszłego §fu. Atoli sposób tu użyty, którego Kaestner naypierwszy użył, iako daleko mniey mozolny od wzmiankowanego, iest stósownieyszy do wynalezienia rzeczonego szeregu i dlatego tu go użyłem.

§. 198. Wniosek. Chcąc n. p. wynaleść wstawę do łuku a tém samém kąta zawieraiącego iednę minutę, postępuiemy tak: Podług §fu 123 obwód koła maiącego za promień 1, wynosi biorąc pierwsze sześć mieysc dziesiątnych: 6,283167; stąd łuk tego samego koła, należący do iednéy minuty, czyli:

$$q = \frac{6,283167}{360.60} = \frac{6,283167}{21600} = \frac{6283167}{21600000000}.$$

A tak, nazywaiąc wstawę należącą w rzeczonym kole do łuku wziętego, to iest do iednéy minuty n. p. x, będzie podług §fu 197:

$$x = \frac{6283167}{21600000000} - \frac{6283167^3}{21600000000^3 .\ 6} + \frac{6283167^5}{21600000000^5 .\ 120} - \frac{6283167^7}{21600000000^7 .\ 5040} + \frac{6283167^9}{21600000000^9 .\ 362880} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chcąc zaś mieć wstawę do tego samego kąta, lecz pod innym iakimkolwiek promieniem n. p. pod promieniem 100000, wtedy nazywaiąc ią y, będzie:

$$y = \left(\frac{6283167}{21600000000} - \frac{6283167^3}{21600000000^3 .\ 6} - \frac{6283167^5}{21600000000^5 .\ 120} - \frac{6283167^7}{21600000000^7 .\ 5040} + \frac{6283167^9}{21600000000^9 .\ 362880} \ldots\ldots \right) .\ 100000;$$

albowiem iednonazwiskowe liniie trygonometryczne, w różnych kołach, maią się do siebie iak promienie. Wykonywaiąc wszystko co szereg wskazuie przez ułamki dziesiątne, n. p. aż do dwóch miesc dziesiątnych, wypada:

$$y = 29{,}09 \ldots\ldots\ldots$$

To iest wstawa do łuku, a tém samém kąta, równego iednéy minucie, pod promieniem 100000, wynosi: 29,09 . . . . . .

§. 199. Wniosek. Podobnie iak się w §fie 198. wynalazła wstawa do iednéy minuty, dadzą się także wynaleść wstawy do wszelakich innych łuków od 0, aż do 90°. Atoli, obrachowywuiąc tablice trygonometryczne, i chcąc w nich mieć naymnieyszy kąt wynoszący n. p minutę, dosyć iest wymienionym sposobem znaleść iego wstawę do któréy się dostawa z tróykąta prostokątnego maiącego za boki, promień, wstawę i dostawę łatwo podaie. Z wystawy téy i dostawy daleko mniéy mozolnym sposobem od powyższego można wynaleść wstawy i z nich dostawy do wszystkich kątów aż do 45°, i to podług znanéy prawdy z elementarnéy trygonometryi, że wstawa podwoionego kąta równa iloczynowi, z dwóch wstaw poiedynczych przez dostawę także poiedynczego, podzielonemu przez promień, pod którym się liniie szukaią. Wynalazłszy wymienionym sposobem wstawy i dostawy do kątów od 1' aż do 45°, łatwo z nich wiadomym sposobem z elementarnéy trygonometryi, inne linie trygonometryczne do tychże kątów należące wynayduią się. Maiąc zaś wszystkie linie trygonometryczne do kątów od 1' aż do 45° wynalezione, tém samém mamy iuż wszystkie liniie trygonometryczne do wszystkich kątów od 1' aż do 179° 59' wynalezione, co także iest znaném z elementarnéy trygonometryi. A tak, znaiąc zasady trygonometryi, można podług §fu 197, całe tablice trygonometryczne obrachować. Samo się tutay przez się rozumie iż w obrachunku tablic, wstawy do 30° stopni nieszukamy, gdyż ta równa połowie promienia, iako też styczney do 45°; gdyż ta równa promieniowi.

§. 200. Uwaga. Dla łatwieyszego używania liniy trygonometrycznych, wynayduią się do nich, to iest do tych, które w zastósowaniu trygonometryi są potrzebne, logarytmy. Robi się to w ogólności tym sposobem, do kątów od 1^{III}, lub 1^{II} lub 1^{I} aż do 45°, wynayduią się liniie trygonometryczne, sposobem iuż wyłożonym pod promieniem 1, pospolicie aż do dziesięć mieysc dziesiątnych. Daléy bierze się za promień zwyczaynie liczba: 10000000000, i przez tę wszystkie liniie wynalezione się mnożą, to iest w nich się znak dziesiątny maże, a tém samém liniie zamienione na całości, należą do tych samych kątów iak wprzody, lecz teraz pod promieniem, dziesięć tysięcy milionów. Nareszcie do liniy ostatnich, iako do liczb całych wynayduią się logarytmy znanym sposobem, które daią szukane logarytmy liniy trygonometrycznych, w zastósowaniu potrzebnych. Pospolicie w tablicach do liniy samych bierze się za promien 100000, do liniy zaś których logarytmy są wypisane, bierze się za promień iak się iuż wyżéy wspomniało: i to dla większéy dokładności: 10000000000, i dlatego naturalnie cecha w logarytmie pewnéy linii trygonometrycznéy, iest większa od cechy tegoż nazwiska linii, do tegoż samego kąta należącéy, wypisaney iako liczba, kiedy tęż cechę z pamięci znayduiemy.

§. 201. Uwaga. Podobnym sposobem iak się z wstawy danéy dał łuk iéy wynaleść (§. 196.); iako też z łuku danego, iego wstawa (§. 197.), można także z każdéy innéy linii trygonometryczney danéy, iéy łuk nieznany; iako też z łuku danego każdą inną liniią trygonometryczną nieznaną, wynaleść. Wyszczególnienie atoli tego, to iest utworzenie ieszcze czternastu szeregów nieskończonych, do tego celu potrzebnych, opuszcza się, raz: aby dziełka przeciw zamiarowi nierozciągnąć; powtóre, że to łatwo bardzo z powiedzianego wynika, i potrzecie, że obrachunek tablic trygonometrycznych, który wyłożyć zamierzyłem, i już wyłożyłem, bez tego obeyść się może, iak się już wyżéy pokazało.

W POZNANIU
Głoskami Nadwornéy Drukarni W. Dekera i Społki.