§. 76. **Wniosek.** Maiąc równanie na Cissoidę, które iest takie: $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, w którém ilość a, średnicę koła, przy którém się cyssoida tworzy, oznacza, chcąc tutay wynaleść nayprzód podstyczną, daie się równaniowi stósownieysza forma, iako to: $ay^2 - xy^2 = x^3$, a przeto: $2ay.\,dy - 2xy.\,dy - y^2 dx = 3x.^2\,dx$, czyli: $(2ay - 2xy)\,dy = (3x^2 + y^2)\,dx$, a więc: $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay - 2xy}{3x^2 + y^2}$, a tém samém: $y.\frac{dx}{dy} = \frac{2ay^2 - 2xy^2}{3x^2 + y^2} = 2y^2\frac{(a-x)}{3x^2+y^2}$. To iest: cissoidy podstyczna, $S = 2y.^2\frac{(a-x)}{3x^2+y^2}$. Chcąc mieć podstyczną i inne liniie wyrażone, n. p. przez samą funkcyą x, postępuie się w ogólności iak w §. 73, lecz tutay maiąc w równaniu $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, ilość x iuż na iedney stronie, można od razu wszystkie liniie, przez samo x wyrazić. I tak z równania wziętego wypada: $y = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}} =$

$$= \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}, \text{ przeto:}$$

$$dy = \frac{(a-x)\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.\,dx + \tfrac{1}{2}x.^{\frac{3}{2}}\,dx}{(a-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(3a-3x).\,x^{\frac{1}{2}}\,dx + x.^{\frac{3}{2}}\,dx}{2\,(a-x)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{(3a-3x).\sqrt{x}.\,dx + \sqrt{x^3}.\,dx}{2\,(a-x).\sqrt{(a-x)}} = \frac{\left\{(3a-3x)\sqrt{x} + \sqrt{x^3}\right\}dx}{2\,(a-x).\sqrt{(a-x)}},$$

a więc: $\frac{dx}{dy} = \frac{2(a-x).\sqrt{(a-x)}}{(3a-3x).\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$,

iakoteż: $\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-3x)\ \sqrt{x}+\sqrt{x^3}}{2(a-x).\sqrt{(a-x)}}$,

a zatem: $y.\frac{dx}{dy} = \frac{2(a-x).\sqrt{(a-x)}}{(3a-3x).\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}.\sqrt{\frac{x^3}{a-x}} =$

$$= \frac{2(a-x).\sqrt{(a-x)}.x.\sqrt{x}}{\left\{(3a-3x).\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right\}.\sqrt{(a-x)}} = \frac{2(a-x)x.\sqrt{x}}{(3a-3x).\sqrt{x}+x.\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2(a-x).x.\sqrt{x}}{\left\{(3a-3x)+x\right\}\sqrt{x}} = \frac{2x(a-x)}{3a-2x},$$ to iest:

$$S = \frac{2x(a-x)}{3a-2x}.$$

Powtóre. Z równania powyższego

$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-3x).\ \sqrt{x}+\sqrt{x^3}}{2(a-x).\ \sqrt{(a-x)}}$ wypada:

$y.\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{(3a-3x).\sqrt{x}+\sqrt{x^3}\right\}}{2(a-x).\sqrt{(a-x)}}.\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$, czyli

wyrażaiąc inaczey: $y.\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{(3a-3x).\sqrt{x}+x.\sqrt{x}\right\}x.\sqrt{x}}{2(a-x).\sqrt{(a-x)}.\sqrt{(a-x)}} =$

$$= \frac{\left\{(3a-3x)\sqrt{x}+x.\sqrt{x}\right\}.x.\sqrt{x}.}{2(a-x)^2} = \frac{(3a-3x)x^2+x^3}{2(a-x)^2} =$$

$= \frac{3ax^2-2x^3}{2(a-x)^2}$. To iest: $SN = \frac{3ax^2-2x^3}{2(a-x)^2}$. Podobnie się pozostałe dwie liniie, iako też wszystkie do iakieykolwiek innéy krzywéy należące, wynayduią.

§ 77. Uwaga. W §. 73. wypadło $N = r$, w §. 74 zaś $S = 2x$ i t. d., zupełnie takie same wartości, iakie są znane z Analityki niższey. Zdziwićby tedy mogło niemaiącego wszystkiego poprzedzaiącego w myśli, czyli inaczey tego, ktoby zasad rachunku różniczkowego, tu wyłożonego niezgłębił, że, chociaż w różniczkach niektóre części się wyrzucały, iednak wypadki nietylko są takie że ie za prawdziwe wziąść można, lecz nadto zupełnie prawdziwe. Lecz przypominaiąc sobie że części różniczek opuszczone, były nieskończenie małe, 2go, 3go i t. d. rzędu za stusunkiem, widzimy, stósownie do wyobrażenia o nieskończenie małych, że wszystkie wypadki rachunku różniczkowego, nie są przybliżone do prawdziwych, lecz zupełnie prawdziwe. Oprócz tego, w zastósowaniach dotąd wyłożonych (co i nadal także zawsze będzie) używaliśmi tylko stósunków różniczek; przeto choćby opuszczone części różniczek nie były nawet Zerami, skoro pozostałe zaznaczaią dostatecznie stósunek całych różniczek, wypadki wszystkie muszą bydź zupełnie prawdziwe.

§. 78. Zagadnienie. Jak położenie niedostycznych (assimptota) oznaczyć?

Rozwiązanie. Chcąc położenie niedostycznéy iakiéykolwiek krzywéy linii oznaczyć, potrzeba niedostyczną uważać za styczną krzywéy, stykaiącą się z nią w punkcie, od pewnego znanego, nieskończenie dalekim. Uważaiąc niedostyczną za styczną, w tedy punkt w którym się z krzywą styka, wystawiamy sobie tylko w myśli, rzecziwiście zaś ten punkt, na łuku krzywéy, z wyobrażenia o ilości nieskończenie wielkiey, nieznayduie się. A tak niedostyczna będzie styczną nieskończenie wielką, i z współustawionych do niey należących, iedna przynaymniey musi bydź także nieskończenie wielką, co iest widoczném; druga zaś może bydź skończoną, a nawet nieskończenie małą, iak n. p. przy Konchoidzie. Lecz także obydwie współustawione, bywaią nieskończenie wielkie, ieżeli do takiey krzywey należą, że powiększaiąc iednę i druga się powiększa, iak n. p. przy hyperboli. Mieymy tedy krzywą liniją BC, iaką nam $F3$ wystawia. Styczną iest tu linia DC, przez punkt C, przecinaiącą się z liniją odcinków w punkcie D, BE i EC są współustawione rarosnące, iak figura wskazuie. A tak, wystawiwszy z B, prostopadłą do osi, która przedłużona do stycznéy, tu się nazywa BF, cała rzecz idzie, chcąc oznaczyć położenie niedostycznéy, to iest chcąc dla styczney DC nieskończenie wielkiey oznaczyć kierunek, abyśmy ogólne wartości na DB i BF wynaleźli, których końce liniia prosta łącząca, daie żądane położenie, czyli żądany kierunek. Lecz dla wynalezienia rzeczonych wartości, musimy początkowo styczną DC za skończoną uważać; gdyż biorąc ią od razu za nieskończenie wielką, w którym razie oczywiście odcinek BC a tém samém DE będą nieskończcnie wielkie, skończona liniia $DB = DE - BE$ nie dałaby się wynaleść. Uważaiąc więc DC, a tém samém BE, EC i DE za skończone, mamy $DB = DE -$

$BE = y.\frac{dx}{dy} - x$, (§. 71.). Uważaiąc daley troykąty

DBF i DEC między sobą podobne, podaie nam się taka proporcya: $DB : BF = DE : EC$, wktórą biorąc zamiast DB, DE, EC wartości znane, będzie:

$$y.\frac{dx}{dy} - x : BF = y.\frac{dx}{dy} : y,$$

a przeto:

$$BF = \left(y.\frac{dx}{dy} - x\right).y.\frac{dy}{y.dx.} = y - x\frac{dy}{dx}.$$ Wiedząc iuż że:

$DB = y.\frac{dx}{dy} - x$ a, $BF = y - x\frac{dy}{dx}$, też same wartości nieodmieniaią się oczywiście, co do nazwiska, choć się styczna na niedostyczną zamieni, lecz ich znaczenie wewnętrzne, i tak przy każdéy innéy krzywéy, inne zmienioném zostanie. Chcąc więc szukać do iakieykolwiek krzywéy, szczególnych wartości na DB i BF należących do niedostycznéy dla odkrycia iey kierunku, wtedy z funkcyi krzywéy wynayduią się wartości wyrazów $y.\frac{dx}{dy} - x$, i $y - x\frac{dy}{dx}$, poczém, zamieniwszy w tych wartościach, iednę lub obydwie współustawione na nieskończenie wielkie (co natura linii krzywéy pokazuie), wynayduią się szczególne wartości linii DB i BF, a tém samém kierunek niedostycznéy do wziętéy krzywéy.

§. 79. **Wniosek.** Biorąc BC (F. 3) za parabolę, któréy funkcya iest, $y^2 = px$, od wierzchołka, wtedy $2ydy = pdx$, a więc:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}, \quad y\frac{dx}{dy} - x = \frac{2y^2}{p} - x = \frac{2y^2 - px}{p} =$$

$$\frac{2px - px}{p} = x,$$ to iest $DB = x$. Uważaiąc tu DC za niedostyczną, wtedy x i y są nieskończenie wielkie, czyli $DB = \infty$. Biorąc równanie z różniczki powyższéy,

$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, wtedy będzie $y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{px}{2y} =$
$= \frac{2y^2 - y^2}{2y} = \frac{y}{2}$, a więc $BF = \infty$. To iest niedostyczna paraboli iest równoległa do osi, przez nieskończenie dalеki punkt od wierzchołka, poprowadzona, a tém samém parabola takiey niedostyczney, któraby oś przedłużoną przecinała, a następnie któreyby położenie oznaczyć można, niema. Niech też sama liniia BC, oznacza hyperbolę. A tak z równania hyperboli od wierzchołka, które iest: $y^2 = px + \frac{px}{a} =$
$= \frac{apx + px^2}{a}$, wypada: $2aydy = apdx + 2pxdx =$
$(ap + 2px)dx$, przeto: $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{ap + 2px}$, stąd:

$$\frac{ydx}{dy} - x = \frac{2ay^2}{ap + 2px} - x = \frac{2ay^2 - apx - 2px^2}{ap + 2px} =$$

$$= \frac{\frac{2a^2px + 2apx^2}{a} - apx - 2px^2}{ap + 2px} =$$

$$= \frac{2apx + 2px^2 - apx - 2px^2}{ap + 2px} = \frac{apx}{ap + 2px} = \frac{apx}{(a + 2x)p} =$$

$$= \frac{ax}{a + 2x} = \frac{a}{\frac{a}{x} + 2}.$$ To iest $DB = \frac{a}{\frac{a}{x} + 2}$. Biorąc tutay x za nieskończenie wielkie, w którym razie DC zamienia się na niedostyczną, wtedy iest $DB = \frac{a}{\frac{a}{\infty} + 2}$,
gdzie ilość $\frac{a}{\infty}$, iako nieskończenie mała (§. 29.) za

stósunkiem, iest Zerem obok liczby (§. 25) 2, a tak $DB = \frac{a}{2}$. To iest niedostyczna hyperboli wychodzi z środka osi pierwszey. Weźmy daley z różniczki równania hyperboli, wyżey stoiącey, $\frac{dy}{dx} = \frac{ap+2px}{2ay}$, a będzie: $\frac{y-xdy}{dx} = \frac{y-apx-2px^2}{2ay} =$

$$= \frac{2ay^2 - apx - 2px^2}{2ay} = \frac{2apx + 2px^2 - apx - 2px^2}{2a.\sqrt{\left(\frac{apx + px^2}{a}\right)}} =$$

$$= \frac{apx}{2a.\sqrt{\left(\frac{a^2px + apx^2}{a^2}\right)}} = \frac{apx}{2.\sqrt{(a^2px + apx^2)}}.$$ To iest

$BF = \pm \frac{apx}{2.\sqrt{(a^2px+apx^2)}}$; a przeto $BF^2 = \frac{a^2p^2x^2}{4.(a^2px+apx^2)} =$

$$= \frac{a^2p^2x^2}{4a^2px + 4apx^2} = \frac{apx^2}{4ax + 4x^2} = \frac{ap}{\frac{4a}{x} + 4}.$$ A że x iest

nieskończenie wielkie, dlaczego $\frac{4a}{x}$ nieskończenie małe, przeto, dla tych samych przyczyn, iak wyżey, z wszelaką matematyczną ścisłością: $BF^2 = \frac{ap}{4}$, nazywaiąc zaś oś drugą c, będzie: $BF^2 = \frac{c^2}{4}$, a zatém $BF = \pm \frac{1}{2}c$. To iest linia prosta, łącząca środek osi pierwszéy z końcem połowy osi drugiéy, w wierzchołku do osi pierwszéy, prostopadłéy, daie kierunek a tém samém położenie niedostycznéy hyperboli. Nadto, że $BF = \pm \frac{1}{2}c$, pokazuie się, że hyperbola ma dwoie niedostyczne, których kierunki iednakowym sposobem się znayduią.

§. 80. Wniosek. Weźmy figurę Nr. 2. i w niey wykreślenie znane z §. 71., a tak wiadomém iest, wziąwszy BH i HC za nieskończenie małe, że taka proporcya ma mieysce: $dx : dy = FD : DB$, czyli: $dx : dy = FD : y$. A że w tróykącie FDB, linia FD iest styczną trygonometryczną do kąta FBD pod promieniem DB, przeto także $FD : DB = Tan. FBD : 1$, (Tan. oznacza styczną z tablic gdzie iest promień iednością), czyli, $Tan. FBD : 1 = FD : y$, przeto także: $dx : dy = Tan. FBD : 1$, a zatém: $Tan. FBD = \frac{dx}{dy}$. A że w tym samym tróykącie FDB, także BD iest styczną trygonometryczną do kąta BFD pod promieniem FD, przeto i taka proporcya ma mieysce: $FD : BD = 1 : Tan. BFD$, czyli: $1 : Tan. BFD = FD : y$, a więc dla téy saméy przyczyny iak wyżey, będzie $dx : dy = 1 : Tan. BFD$, a zatém $Tan. BFD = \frac{dy}{dx}$. To iest $\frac{dx}{dy}$ iest ogólną wartością styczné́y trygonometrycznéy przy każdéy krzywéy linii, do kąta zawartego między styczną linii krzywéy, i ustawioną; $\frac{dy}{dx}$ zaś iest wartością ogólną stycznéy trygonometrycznéy, do kąta zawartego między styczną linii krzywéy i osią przedłużoną. Chcąc zaś rzeczone styczne wyrazić przez ilości skończone, potrzeba wyrazy $\frac{dx}{dy}$ i $\frac{dy}{dx}$ z szczególnych funkcyy liniy krzywych wynaleść i przez skończone ilości wyrazić. N. p. w paraboli, $y^2 = px$, przeto $2y\,dy = p\,dx$, a zatem $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p} = 2.\sqrt{\frac{px}{p}} = 2.\sqrt{\frac{px}{p^2}} = 2.\sqrt{\frac{x}{p}}$. a $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{p}{2.\sqrt{px}} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{p^2}{px}} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{p}{x}}$. To iest w paraboli styczna trygonometryczna do kąta zawartego między styczną paraboli a ustawioną, ma taką szczególną wartość: $2.\sqrt{\frac{x}{p}}$; styczna zaś do kąta zawartego między styczną paraboli, a osią przedłużoną, ma taką: $\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{p}{x}}$. Podobnie do wszystkich innych krzywych liniy, rzeczone kąty wynayduią się.

§. 81. Zagadnienie. Jak wynaleść ogólną wartość, czyli ogólne znaczenie podstyczney, styczney, podnormalney i normalney, do każdey krzywey linii, kiedy współustawione, nie prostopadłe do siebie, lecz pochyłe są?

Rozwiązanie. Niech AB (F. 4.) będzie łukiem iakieykolwiek krzywey linii, BD i CE pochyłemi ustawionemi, do których AD i AE są odcinkami. Daley liniia BF niech będzie styczną przez punkt B, którey przecięciem z osią, iest punkt F; przecięciem zaś także z osią linii prostey, łączącey punkta B, C, niech będzie G. Nadto BM iest prostopadłą do osi, BH prostopadłą do styczney, a BL równoległą do AE. A tak podstyczna FD bardzo łatwo się znayduie tym sposobem: troykąty BLC, GDB, są podobne, a więc daią tę proporcyą: $BL : LC = GD : DB$. Lecz przybliżaiąc ciągle CE do BD, granicą stósunku $BL : LC$ iest stósunek $FD : DB$ (§. 30), a tém samém biorąc $BL = DE$ i LC za nieskończenie małe, w którym razie się na dx i dy (§. 34) zamieniaią, będzie $dx : dy = FD : DB$, czyli: $dx : dy = FD : y$, a przeto $FD = y . \frac{dx}{dy}$, albo nazywaiąc podstyczną każdą S, i inne trzy także tak iak w §. 71, wypada: $S = y\frac{dx}{dy}$, to iest tożsamo, co wypadło biorąc współustawione do siebie prostopadłe. Chcąc daley styczną FB, pod normalną DH i normalną BH, wynaleść, potrzeba koniecznie, spuściwszy iuż BM prostopadłą do osi, nayprzód wartości na liniie DM i BM wynaleść, przy czém kąt zawarty między współustawionemi, to iest q, bierze się za znany. Maiąc zaś liniie DM i BM wynalezione, łatwo rzeczone trzy liniie, za pomocą troykątów prostokątnych, dadzą się wynaleść. Uważamy tedy troykąt DBM prostokątny, w którym z zasad trygonometryi prostokreślnéy, podaią się takie proporcye: $DB : DM = 1 : Dos.\,q$ i $DB : BM = 1 : Ws.\,q$, albo, $y : DM = 1 : Dos.\,q$ i $y : BM = 1 : Ws.\,q$, a przeto: $DM = y.\,Dos\,q$, a $BM = y.\,Ws\,q$. Chcąc teraz szukać nayprzód styczney FB, uważa się troykąt prostokątny FBM, a tak $FB^2 = FM^2 + BM^2 = (FD + DM)^2 + BM^2$, biorąc zaś zamiast FD, DM i BM, iuż wynalezione wartości, będzie:

$$FB^2 = \left(y.\frac{dx}{dy} + y.\,Dos.\,q.\right)^2 + y.^2\,Ws.\,q^2 =$$

$$= y.^2\frac{dx^2}{dy^2} + 2\,y.^2\frac{dx}{dy}.Dos.\,q + y.^2\,Dos.\,q^2 + y^2\,Ws.\,q^2 =$$

$$= y^2\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 2\,\frac{dx}{dy}.\,Dos.\,q. + Dos\,q^2 + Ws\,q^2\right).$$

A że z trygonometryi iest wiadomém, iż $Dos.\,q^2 + Ws.\,q^2 = 1$, biorąc 1, za promień; przeto będzie:

$$FB^2 = y^2\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 2.\frac{dx}{dy}.\,Dos.\,q + 1\right),\ \text{a zatem}$$

$$FB = y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} + 2\,\frac{dx}{dy}.Dos.\,q\right)} = T.$$

Powtóre. Chcąc mieć podnormalną, uważaią się troykąty FBM, MBH podobne, a tak $FM : MB = MB : MH$, biorąc zaś zamiast FM i MB iuż wyżey wynalezione wartości, będzie:

$$y.\frac{dx}{dy} + y.\,\mathrm{Dos.}\,q : y.\,\mathrm{Ws.}\,q = y.\,\mathrm{Wsq} : HM,$$

czyli:

$$y\left(\frac{dx}{dy} + \mathrm{Dos.}\,q\right) : y.\,\mathrm{Ws.}\,q = y.\,\mathrm{Ws.}q : \mathrm{HM},$$

przeto:

$$\mathrm{HM} = \frac{\mathrm{Ws.}\,q^2\,y}{\frac{dx}{dy} + \mathrm{Dos.}\,q} = \frac{y.\,\mathrm{Ws.}\,q^2}{\frac{dx + \mathrm{Dos.}\,q.\,dy}{dy}} =$$

$$= \frac{\mathrm{Ws.}\,q.^2\,y.\,dy}{dx + \mathrm{Dos.}\,q\,dy}.$$ A że podnormalna DH = = HM + DM; przeto biorąc zamiast HM i DM już znane wartości, będzie:

$$\mathrm{DH} = \frac{\mathrm{Ws.}\,q.^2\,y.\,dy}{dx + \mathrm{Dos.}\,q.\,dy} + y.\,\mathrm{Dos.}\,q =$$

$$= \frac{\mathrm{Ws.}\,q.^2\,y.\,dy + y\,\mathrm{Dos}\,q.\,dx + \mathrm{Dos}\,q^2\,y.\,dy}{dx + \mathrm{Dos.}\,q.\,dy} =$$

$$= \frac{y.\,dy\,(\mathrm{Ws}\,q^2 + \mathrm{Dos.}\,q^2) + y.\,\mathrm{Dos}\,q.\,dx}{dx + \mathrm{Dos.}\,q.\,dy}.$$ A że $\mathrm{Ws.}\,q^2 + \mathrm{Dos.}\,q^2 = 1$, przeto:

$$\mathrm{DH} = \frac{y.\,dy + y.\,\mathrm{Dos}\,q.\,dx}{dx + \mathrm{Dos.}\,q.\,dy} = \frac{y(dy + \mathrm{Dos.}\,q.\,dx)}{dx + \mathrm{Dos.}\,q.\,dy} = \mathrm{SN}.$$

Nakoniec szukaiąc ogólnéy wartości na normalną BH, uważa się tróykąt prostokątny BMH, a tak będzie: $BH^2 = MH^2 + BM^2$, biorąc zaś zamiast MH i BM wyżey stoiące wartości, wypada:

$$\mathrm{BH}^2 = \left(\frac{\mathrm{Ws}\,q^2.\,y.\,dy}{dx + \mathrm{Dos}\,q.\,dy}\right)^2 + y^2.\,\mathrm{Ws.}\,q^2 =$$

$$=\frac{Ws.q^4.\,y^2.\,dy^2}{dx^2+2\,Dosq.dx.dy+Dos.q^2.\,dy^2}+y^2.\,Ws.q^2=$$

$$=\frac{Wsq^4.\,y^2}{\frac{dx^2}{dy^2}+2\frac{dx}{dy}.\,Dos.q+Dos.q^2}+y^2.\,Ws.q^2=$$

$$=y^2.\,Ws.q^2.\left(1+\frac{Wsq^2}{\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}.\,Dos.q+Dos.q^2}\right)=$$

$$=y^2.\,Ws.q^2\left(\frac{\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}.Dosq+Dos.q^2+Wsq^2}{\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}.Dos.q+Dosq^2}\right)=$$

$$=\frac{y^2.\,Ws.q^2}{\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}Dos.q+Dos.q^2}.\left(\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}.\,Dos\,q+\right.$$

$$\left.+Dosq^2+Wsq^2\right).$$

Że zaś, $Dos\,q^2+Ws.q^2=1$, przeto będzie:

$$BH^2=\frac{y^2.\,Wsq^2}{\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}.Dos.q+Dosq^2}.\left(\frac{dx^2}{dy^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2dx}{dy}.\,Dos.\,q+1\right)$$

Wyciągaiąc zaś na obydwóch stronach pierwiastek kwadratowy, wypada:

$$BH=\frac{y.Wq}{\frac{dx}{dy}+Dos\,q}.\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{2dx}{dy}.Dos.q+1\right)}=N.$$

§. 82. Wniosek. Chcąc szukać szczególnéy wartości któréykolwiek z liniy wyłożonych w przeszłym §. należącéy do iakiéykolwiek krzywéy algebraicznéy, wtedy bierze się ogólna wartość teyże linii z §. 81, i taka sama tworzy się z funkcyi linii krzywéy, przy pochyłych współustawionych, a wyraz skończenie wynaleziony, równy z ogólną wartością, daie szukaną liniią.

§. 83. Zagadnienie. Jak wynaleść ogólnie kierunek stycznéy należącéy do takiéy krzywéy linii, któréy ustawione z iednego punktu wychodzą?

Rozwiązanie. Niech liniia AB(F5) oznacza promień koła który nazywam r, iego zmienny łuk niech wyraża $BC = x$, liniia DE niech oznacza iakąkolwiek krzywą któréy punkt D leży na promieniu AC i któréy $AD = y$ iest ustawioną. Chcemy tutay wynaleść kierunek stycznéy przez punkt D przechodzącéy, to iest chcemy naznaczyć drugi punkt, który z punktém D połączony liniią prostą, dałby styczną żądaną. Wystawmy z punktu A do promienia AC prostopadłą i przedłużmy ią w myśli, aż do przecięcia się z szukaną styczną, także w myśli pociągnioną, nazywaiąc ich przecięcie nieznane F. A tak cała rzecz idzie o wynalezienie wartości ogólnéy na liniią AF, któréy koniec F poda drugi punkt szukany do stycznéy. Dla wynalezienia linii wzmiankowanéy, poprowadźmy promień nieskończenie bliski od AC, nazywaiący się AG; iego przecięcie z styczną niech się nazywa H; nadto około A promieniem AD zakreślmy koło, którego łuk między promieniami AC i AG zawarty, nazywa się Dm. Że tedy punkta H i m są nieskończenie bliskie od D, przeto liniia prosta DH nieskończenie mała leży oraz na linii krzywéy, iako też łuk Dm, iako nieskończenie mały, iest sam do linii AC prostopadły; a więc figura DmH iest tróykątem, który iest podobny z tróykątem FHA. Uważaiąc daléy że DA ilości BC, to iest y odcinka x, iest taką funkcyą, iaką AH ilości BG, to iest iaką $y+mH$, czyli $y+\Delta y$ ilości $x+CG$, czyli $x+\Delta x$, wtedy Δy i Δx zamieniaią się na dy i dx (§. 34). Nareszcie z własności kół wypada taka proporcya: $AD:AC=Dm:CG$, to iest: $y:r=Dm:dx$, a przeto $Dm=\frac{y.dx}{r}$. Z tróykątów zaś DHm i FHA podobnych wypada: $Dm:mH=FA:AH$, gdzie ilość mH nieskończenie mała, ilości skończonéy Am nieodmienia (§. 25), dlaczego powyższa proporcya daie taką: $Dm:mH=FA:AD$, czyli biorąc wartości: $y.\frac{dx}{r}:dy=FA:y$, a przeto: $FA=y^2.\frac{dx}{r.dy}$. Chcąc w szczególności przy pewnéy krzywéy wartość linii FA naznaczyć, bierze się funkcya krzywéy, zniéy wynayduie się wyraz skończony równy z wyrazem $y^2.\frac{dx}{r.dy}$, a ten będzie wartością linii FA.

§. 84. **Wniosek.** W figurze przeszłéy kąt $ADH>ADm$ prostego, i dlatego liniia AF i promień AB, z iednéy strony promienia AC leżą. Lecz biorąc kąt $ADH<ADm$ prostego (co także bydź może przy niektórych krzywych), wtedy liniia FA i promień AB, leżałyby po obydwóch stronach promienia AC. To iest kiedy $AH>Am>y$, a tém samém, kiedy dx i dy maią ieden znak, wtedy AF i AB, leżą z iednéy strony AC; kiedy zaś $AH<Am<y$. a tém samém, dx i dy maią przeciwne znaki, wtedy z liniy AF i AB, iedna leży z iednéy strony AC, a druga z drugiéy: a przeto $\frac{y^2 dx}{r.dy}$ może bydź dodatne lub uiemne i ieżeli iest dodatne AF leży z téy

strony AC z którèy AB, ieżeli zaś wymieniony wyraz $\frac{y^2 dx}{r.dy}$ iest uiemny, wtedy AB z iednèy strony AC leży, a liniia AF z drugiéy. A tak widocznie się pokazuie co tutay znaczy $+AF$ a co $-AF$.

§. 85. Wniosek. Spiralna Archimedesa ma takie równanie: $y = \frac{r.x}{p}$ a tém samém $py = r.x$, a przeto: $p.dy = r.dx$, z czego $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{r}$. Równaniu: $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{r}$ daię formę potrzebną, aby na iednéy stronie wypadł wyraz $\frac{y^2 dx}{r.dy}$; a tak będzie $\frac{y^2 dx}{r.dy} = \frac{py^2}{r^2}$; biorąc zaś wartość zamiast py z funkcyi linii, będzie: $\frac{y^2 dx}{r.dy} = = \frac{y.r.x}{r.^2} = \frac{x.y}{r}$. To iest przy spiralnéy liniia $AF = = \frac{x.y}{r}$; a więc chcąc mieć przy spiralnéy kierunek stycznéy wyznaczony, musi wprzody łuk x bydź zmierzony.

ROZDZIAŁ V.

Zasady rachunku całkowego i zastósowanie onegoż łącznie z różniczkowym do linii Logarytmicznéy i Logarytmów.

§. 86. Definicya. Funkcya zupełna, każdéy różniczki nazywa się całkową (quantitas integralis das Integral) teyże różniczki y znaczy literą $\int$ która się