§. 53. Wniosek. Maiąc równanie $x = \frac{y}{z}$, będzie $dx = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2}$, iakoteż $q = \frac{r}{x^5}$, daie $dq = \frac{x\,dr - 5r\,dx}{x^6}$ i t. d.

§. 54. Uwaga. Dlatego w §. 50. i §. 52 tylko sposób wynaydywania różniczek pierwszych był wyłożony, albowiem z §. 41 raz na zawsze iuż się okazało, iak z różniczek pierwszych wszelakie wyższe się wynayduią. Nadal dla teyże samey przyczyny będzie tylko mowa o różniczkach pierwszych.

§. 55. Uwaga. Dotąd umiemy iuż różniczkować wszelakie potęgi zmienney, tak z wykładnikiem całym dodatnym, iako też całym uiemnym; równie z łamanym dodatnym, iakoteż uiemnym; równienie iloczyn, iloraz, iako też summę i różnicę zmiennych. A że wszelakie funkcye, iakie tylko bydź mogą algebraiczne, są tylko zbiory funkcyi poiedyńczych algebraicznych, przez dodawanie, odciąganie, mnożenie dzielenie, potęgowanie i wyciąganie pierwiastków, przeto iuż tém samém wszelakich funkcyi algebraicznych różniczkowanie, z tego co się dotąd powiedziało wypada, czyli iest tylko przyzwoitém użyciem powiedzianego. Następuiące §. §. wyiaśnią to. Atoli ciągle dotąd przyrostek szeregu naypierwszego (§. 15.) czyli co iedną różniczkę dx, (§. 36) uważaliśmy za iednostayną, to iest, choć ona sama w sobie iako nieskończenie maleiąca, nieskończenie się zmnieysza, atoli biorąc do każdego x tożsamo nieskończenie maleiące dx, toż samo iest tutay iak gdyby dx zupełnie się nieodmieniało, Daley będziemy także dx za odmienne, to iest takie uważać, które samo będzie miało przyrostek, od siebie nieskończenie razy mnieyszy.

§. 56. **Zagadnienie.** Maiąc równanie o 2ch zmiennych, z których iedna na iedney stronie w iednym wyrazie, druga zaś na drugiey w kilku wyrazach, zawikłanie z sobą połączonych się znayduie; iak też równanie różniczkować?

Rozwiązanie. Wyrazy zawikłanie się z sobą łączące, wyrażaią się prościey, tak aby ich części dały się podług powyższych prawideł różniczkować, i potem znanym sposobem się różniczkuią. Jeżeliby zaś wyrazy były zbyt długie i zbyt złożone, w mieysce ich biorą się wartości, te się różniczkuią, a w wynalezioną różniczkę, dane, w mieysce przybranych ilości, wkładaią się. Kilka przykładów następuiących wyiaśnią to dostatecznie.

1) $y = (ax + Bx^2 - Dx^3 + Ex^4).(mx + p)$,

to iest:

$$y = amx^2 + Bmx^3 - Dmx^4 + Emx^5 + apx +$$
$$+ pBx^2 - Dpx^3 + Epx^4,$$

a więc:

$$dy = 2amxdx + 3Bmx^2.dx - 4Dmx^3.dx +$$
$$+ 5Emx^4.dx + apdx + 2Bpxdx - 3Dpx^2.dx +$$
$$+ 4Epx^3.dx. \quad (§. 47.)$$

2) $y = \left(\frac{a}{x^3} + c\sqrt[5]{x^2} + \frac{m}{\sqrt[5]{x^3}}\right).(ax^2 + B.\sqrt[3]{x^2})$,

to iest:

$$y=\left(ax^{-3}+cx^{\frac{2}{5}}+mx^{-\frac{3}{5}}\right).\left(ax^2+Bx^{\frac{2}{3}}\right), \text{ a więc}$$

$$dy=\left(\frac{a}{x^3}+c\sqrt[5]{x^2}+\frac{m}{\sqrt[5]{x^3}}\right).\left(2axdx+\frac{2Bdx}{3\sqrt[3]{x}}\right)+$$

$$+\left(ax^2+B\sqrt[3]{x^2}\right).\left(-\frac{3adx}{x^4}+\frac{2cdx}{5.\sqrt[5]{x^3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{3mdx}{5.x\sqrt[5]{x^3}}\right), \text{ (§. 49.).}$$

3) $y=\dfrac{Ax^2-Bx^3+Cx^4}{Ex+Fx^2}$, a więc

$$dy=\frac{(Ex+Fx^2).(2Axdx-3Bx^2dx+4Cx^3dx)-}{(Ex+Fx^2)^2}$$

$$-\frac{(Ax^2-Bx^3+Cx^4).(Edx+2Fxdx)}{(Ex+Fx^2)^2}, \text{ (§.52.)}$$

4) $y=\dfrac{\sqrt{\left(ax+\sqrt[3]{Bx^2}\right)}.\sqrt[3]{\left(cx^2-\dfrac{D}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}}{\sqrt[3]{(Ex^3-Gx^5)^2}}$, to iest

$$y=\left\{ax+(B.x^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(cx^2-Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot$$

Niech tutay będzie:

$$q=\left\{ax+(Bx^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}},\ r=\left(cx^2-Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}},\ z=Ex^3-Gx^5.$$

a tak:

$$r\,dq + q\,dr = \left(cx^2 - Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}\left\{ax + (Bx^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left\{a\,dx + \frac{1}{3}(Bx^2)^{-\frac{2}{3}}\,2Bx\,dx\right\} +$$

$$+\left\{ax + (Bx^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}\left(cx^2 - Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot$$

$$\left\{2x\,dx + \frac{2D.dx}{3\sqrt[3]{x^5}}\right\}$$

$$dz = 3Ex.^2\,dx - 5Gx^4\,dx.$$

A że podług wprowadzonych wartości:

$y = \frac{q.r}{z^{\frac{2}{3}}}$, dlaczego, $dy = \frac{z(r\,dq + q\,dr) - \frac{2}{3}q.r\,dz}{z^{\frac{5}{3}}}$,

(§. 49. §. 52.) przeto biorąc napowrot zamiast przybranych, dane ilości, będzie:

$$dy = (Ex^2 - Gx^5)\left\{\left(cx^2 - Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}\left\{ax + (Bx^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot\right.$$

$$\left\{adx + \frac{1}{3}(Bx^2)^{-\frac{2}{3}}\,2Bx.dx\right\} + \left\{ax + (Bx^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left.\frac{1}{3}\left(cx^2 - Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(2x\,dx + \frac{2D.dx:}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)\right\} -$$

$$\frac{-\frac{2}{3}\left\{ax + (Bx^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(cx^2 - Dx^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (3Ex^2.\,dx - 5Gx^4.\,dx}{(Ex^3 - Gx^5)^{\frac{5}{3}}}.$$

§. 57. Wniosek. Z wyobrażenia o równaniu różniczkowém (§. 45.), pokazuie się że kiedy y iest algebraiczną funkcyą do x, natenczas ogólna forma różniczki pierwszey iest taka: $dy = A\,dx$, gdzie ilość A, może bydź zbiorem współczynników samych iednostaynych, ieżeli w sobie zmienney nie ma, a tém samém, ieżeli wyższych różniczek nie masz (§. 41.) lecz może bydź też funkcyą dalszą ilości x, ieżeli w sobie x zawiera. Dzieląc w powyższém równaniu obydwie strony przez dx wypada $\frac{dy}{dx} = A$, ogólna forma stósunku różniczek pierwszych, czyli raczey wykładnika stósonku, różniczek pierwszych. W równaniu $\frac{dy}{dx} = A$, biorąc A za dalszą funkcyą x, i kładąc w mieyscu zmienney różniczkę iey (§. 41.), czyli co iedno iest, różniczkuiąc na nowo A, wynayduie się różniczka druga funkcyi algebraiczney x, do iednostaynego dx (§. 55.) którey ogólna forma będzie taka: $\frac{d^2y}{dx} = B.dx$, a więc $\frac{d^2y}{dx^2} = B$, ogólna forma wykładnika różniczek drugich. Podobnie postępuiąc będzie:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C,\quad \frac{d^4y}{dx^4} = D,\quad \frac{d^5y}{dx^5} = E \text{ i t. d.};$$

a więc ogólnie wynayduie się wykładnik stósunku różniczek coraz wyższych funkcyi algebraicznych, uważaiąc dx za iednostayne: różniczkuiąc każdą dalszą funkcyą x, na nowo, i dzieląc równanie przez dx. Następuiące przykłady przytaczaią się dla wyiaśnienia rzeczy:

1)

$$y = x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^{-5} = \frac{12}{x^5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -60x^{-6} = -\frac{60}{x^6}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=360x^{-7}=\frac{360}{x^7}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=-2520x^{-8}=-\frac{2520}{x^8}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6}=20160x^{-9}=\frac{20160}{x^9}$$

i t. d.

2) $y=\dfrac{mx^2}{m^2-x^3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(m^2-x^3).\,2mx+3mx^4}{(m^2-x^3)^2}=\frac{2m^3x+mx^4}{(m^2-x^3)^2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(m^2-x^3).\,(2m^3+4mx^3)+6x^2\,(2m^3x+mx^4)}{(m^2-x^3)^3}=$$

$$=\frac{2m^5+16m^3x^3+2mx^6}{(m^2-x^3)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(m^2-x^3).\,(48m^3x^2+12mx^5)+9x^2\,(2m^5+16m^3x^3+2mx^6)}{(m^2-x^3)^4}=\frac{66m^5x^2+108m^3x^5+6mx^8}{(m^2-x^3)^4}.$$

i t. d. —

§. 58. Zagadnienie. Jak się wynayduie ogólna forma różniczek funkcyi algebraicznych, o kilku zmiennych?

Rozwiązanie. Niech zmnienna Q będzie funkcyą dwóch zmiennych x i y. A tak widoczném iest że zmieniaiąc x, y może zostać nieodmienne, iako też zmieniaiąc y, x może się nieodmieniać, dlaczego różniczka x niezawisła od różniczki y, i przeciwnie; przeto różniczkuiąc całą funkcyą, można nayprzód uważać ilość y za nieodmienną, a x za odmienne, w którym razie ogólna różniczka będzie Adx (§. 57.). Powtóre można uważać ilość x za nieodmienną a y, za odmienną, gdzie taka ogólna różniczka wypadnie: Bdy: a zatém uważaiąc razem x i y za odmienne, będzie: $dQ = Adx + Bdy$, co iest ogólną formą różniczek do dwóch zmiennych należących w której o ilościach A i B toż samo się rozumie co w (§. 57.) z tym dodatkiem, że tutay mogą bydź także funkcyami do x i y co zawsze od związku w iakim zmienne są, zawisło. Podług tego samego, kiedy Z iest funkcyą trzech zmiennych x, y, r, ogólna forma różniczki będzie taka:

$$dZ = Adx + Bdy + Cdr, \text{ i t.d.}$$

§. 59. Wniosek. Z §. 58, wypada iasno iż różniczkuiąc, iakąkolwiek funkcyą algebraiczną, o kilku zmiennych, nayprzód się pierwsza zmienna, za zmieną uważa, a inne za iednostayne i funkcya się różniczkuie; powtóre druga zmienna, uważa, się za zmienną a wszystkie inne za iednostayne i funkcya się różniczkuie; podobnie się robi potrzecie, czwarte i t. d., dopóki wszystkich zmiennych się różniczki, tym sposobem nie znaydą, w którym razie różniczka całey funkcyi, uważaiąc wszystkie zmienne iako zmienne, iest zbiorem wszystkich poiedynczych różniczek. Następuiące przykłady dla wyiaśnienia rzeczy posłużą:

$$y = q.r,$$

$$dy = rdq + qdr. \text{ Tożsamo iak w (§. 49).}$$

$$y = \frac{q}{r} = q.r^{-1}.$$

$$dy = \frac{dq}{r} - qr^{-2}\,dr = \frac{dq}{r} - \frac{q.dr}{r^2} = \frac{rdq - qdr.}{r^2}$$

Jak w (§. 52).

$$Z = \frac{(x+ay^2)^2}{cy}$$

$$dZ = \frac{2(x+ay^2)\,dx}{cy} \frac{+2cy\,(x+ay^2)\,2aydy - (x+ay^2)^2\,cdy}{c^2.\,y^2} =$$

$$= \frac{(2x+2ay^2).\,dx}{cy} + \frac{(4acxy^2 + 4a^2cy^4)\,dy}{c^2.\,y^2} -$$

$$- \frac{(cx^2 + 2acxy^2 + a^2cy^4).dy}{c^2.\,y^2.} = \frac{(2cxy+2acy^3)\,dx}{c^2.\,y^2} +$$

$$+ \left\{\frac{(4acxy^2 + 4a^2cy^4) - (cx^2 + 2acxy^2 + a^2cy^4)}{c^2.\,y^2}\right\} dy$$

$$= \frac{(2cxy+2acy^3)\,dx + (2acxn^2 + 3a^2cy^4 - cx^2)\,dy.}{c^2\,y^2}$$

$$Q = (x+ay^2+Bx^2.y.Z^3).\,(ax^2+Bx\,y^3.Z+Ey).$$

$$dQ = (x+ay^2+Bx.^2y.Z^3)\,(2ax+By^3.Z).\,dx +$$

$$+ (ax^2+Bxy.^3Z+Ey).\,(1+2By.Z^3x)\,dx +$$

$$+ (x+ay^2+Bx^2.y.Z^3)\,(3BxZ.y^2+E)\,dy +$$

$$+ (ax^2+Bxy^3.Z+Ey).\,(2ay+Bx^2.Z^3)\,dy +$$

$$+ (x + ay^2 + Bx^2.\,y.Z^3).\,Bxy^3.\,dz +$$

$$(ax^2 + Bxy^3.Z + Ey).\,3Bx^2yz^2.\,dz.$$

§. 60. **Wniosek.** Niech zmienna R będzie funkcyą dwóch innych x i y, a tak będzie $dR = Adx + B.dy$, gdzie Adx iest różniczką funkcyi, uważaiąc samo x za zmienne a y, za nieodmienne; wyraz zaś Bdy iest różniczką funkcyi uważaiąc samo y za zmienne, a x za nieodmienne (§. 58). Kładąc w funkcyą R zamiast x, $x+dx$, niech to w co się R zamieni nazywa się Z; kładąc zaś w R zamiast y, $y+dy$, niech to w co się R zamieni, zowie się P; kładąc nakoniec w R zamiast x i y, $x+dx$ i $y+dy$, niech to w co się R zamieni nazywa się R'. Widoczném tedy iest, że w Z kładąc zamiast y, $y+dy$, zamieni się Z na R', bo wszystko iedno iest, czyli się w Z zamiast y, $y+dy$ położy, czyli też od razu, w R zamiast x i y, $x+dx$ i $y+dy$ włoży. Dla tey samey przyczyny, kładąc w P, zamiast x, $x+dx$, P zamieni się na R'. A tak $Z - R = Adx$, $P - R = Bdy$ (§. 36). Uważaiąc w wyrazie Adx, y za odmienne a x za iednostayne i nazywaiąc różniczkę iego $dAdx$, taż różniczka się wynaydzie, kładąc w $Z-R$ zamiast y, $y+dy$, w którym razie $Z-R$, zamienia się na $R'-P$, i odciągaiąc $Z-R$ (§. 36); a przeto $R'-P-Z+R = dA.dx$. Także w wyrazie Bdy uważaiąc x za odmienne a y za iednostayne i nazywaiąc iego różniczkę $dBdy$, taż rożniczka wynayduie się, kładąc w $P-R$ zamiast x, $x+dx$, dlaczego $P-R$ zamienia się na $R'-Z$, i odciągaiąc $P-R$ (§. 36), a więc $R'-Z-P+R = dBdy$. A że nakoniec $R'-P-Z+R = dA.dx$, iako też $R'-Z-P+R = dBdy$; przeto $dAdx = dBdy$. To iest, kiedy zmienna R iest funkcyą dwóch innych zmiennych x i y, wtedy znalazłszy pierwszą część iey różniczki, w którey się x za zmienną a y za nieodmienną uważa, iako też drugą część, w którey się y za zmienną, a x za iednostayną uważa, i różniczkuiąc pierwszą część daley, uważaiąc w niey y za zmienną, a x za nieodmienną, iako też drugą część, uważaiąc w niey x za zmienną a y za nieodmienną, obydwie ostatnie różniczki są sobie równe. Przykłady okażą sprawdzenie:

1) $R = ax^2 + bxy^2 - cx^3y$, a przeto

$dR = Adx + Bdy$,

$Adx = (2ax + by^2 - 3cyx^2)\,dx$,

$Bdy = (2bxy - cx^3)\,dy$,

więc, $dAdx = (2by - 3cx^2).\,dy.\,dx$,

$dBdy = (2by - 3cx^2)\,dx.\,dy$. To iest

$(2by - 3cx^2)\,dy.\,dx = (2by - 3cx^2)\,dx\,dy$.

2) $R = (ax + bx.^2y^3).\ (ex^2.\,y + fxy)$, a przeto

$dR = Adx + Bdy$.

$Adx = (ax + bx^2.\,y^3.).\ (2eyx + fy).\,dx +$

$+ (ex^2y + fxy).\ (a + 2bxy^3).\,dx$.

$Bdy = (ax + bx^2.\,y^3).\ (ex^2 + fx).\,dy +$

$+ (ex^2.\,y + fxy).\ 3bx^2.\,y^2.\,dy$.

więc $dAdx = (ax + bx^2y^3).\ (2ex + f)\,dy.\,dx +$ 1sze.

$+ (2eyx + fy).\ 3bx^2.\,y^2.\,dy.\,dx +$ 2gie.

$+ (ex^2y + fxy).\ 6bxy^2.\,dy.\,dx +$ 3cie.

$+ (a + 2bxy^3).\ (ex^2 + fx).\,dy.\,dx$. 4te.

$d B d y = (ax + bx^2 . y^3) . (2ex + f) dx . dy +$ 1sze.

$+ (ex^2 + fx) . (a + 2bxy^3) . dx . dy +$ 4te.

$+ (ex^2 y + fxy) . 6bxy^2 . dx . dy +$ 3cie.

$+ (2eyx + fy) . 3bx^2 y^2 . dx . dy .$ 2gie.

A tak wyrazy temi samemi liczbami naznaczone, są sobie równe, iak iest widocznem; a przeto i cała wartość $dA.dx$ iest równa całey wartości $dB\,dy$.

§. 61. Wniosek. Wiedząc, że pod znanymi warunkami (§. 60) $dA\,dx = dB\,dy$, przeto, nazywaiąc ogólnie powyższe różniczki, $\alpha dy.\ dx$ i $\beta dx.\ dy$ (§. 57) będzie tożsamo $\alpha dy.\ dx = \beta\ dx.\ dy$, a więc $\alpha = \beta$. A że $dA\,dx = \alpha dy . dx$, z czego, $dA = \alpha dy$, przeto $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \alpha$. Także $dB\,dy = \beta dx . dy$, z czego $dB =$ $= \beta\ dx$, a przeto $\left(\frac{dB}{dx}\right) = \beta$, a zatem, że iuż $\alpha = \beta$, będzie także $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$, gdzie się ułamki kładą w nawiasach, dla krótszego zaznaczenia warunków przyiętych. A tak ile razy mieć będziemy różniczkę takiey formy: $A\,dx + B\,dy$, i $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ niebędzie równe wyrazowi $\left(\frac{dB}{dx}\right)$, tyle razy rzeczona rożniczka niebyła prawdziwą rożniczką funkcyi o dwóch zmiennych, czyli tyle razy do rzeczoney różniczki, funkcyi, to iest całkowey, (co w całkowaniu bardzo iest ważnem) znaleść niemożna. N. p. maiąc różniczkę $x^2 y^3 dx + x^3 y . dy$, tutay $A = x^2 y^3$, $B = x^3 y$, a więc $dA = 3y^2 x^2 dy$, a $dB = 3x^2 . y . dx$, przeto $\left(\frac{dA}{dy}\right) = 3y^2 . x^2$,

$\left(\frac{dB}{dx}\right) = 3x^2.y$, to iest: $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ i $\left(\frac{dB}{dx}\right)$, nie są sobie równe; a zatem do rożniczki $x^2.y^3.dx + x^3y.dy$, nieznayduie się funkcya, czyli rzeczona rożniczka niebyła prawdziwą rożniczką.

§. 62. **Wniosek.** Kiedy zmienna R będzie funkcyą trzech zmiennych x, y, z, wtedy forma ogólna rożniczki będzie taka: $dR = Adx + Bdy + Cdz$ (§. 58.) A że iedna zmienna od drugich zmiennych niezawisła, przeto uważaiąc z za nieodmienną, a x i y, za odmienne, będzie $dR = Adx + Bdy$, a więc $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$. Uważaiąc powtóre y, za nieodmienną, a x, i z, za odmienne, będzie $dR = Adx + {}$ $+ Cdz$, a więc $\left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right)$. Nakoniec uważaiąc x za nieodmienną, a y i z, za odmienne, będzie $dR =$ $= Bdy + Cdz$, a więc, $\left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right)$, (§. 58, §. 61). A że uważaiąc wszystkie trzy x, y, z, za zmienne od razu, części różniczki całey, te same są co wprzody (§. 59); przeto w funkcyi o trzech zmiennych, ilości A, B, C, maią takie stósunki: $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right)$. Z tey samey przyczyny, kiedy R będzie funkcyą czterech zmiennych, x, y, z, q, w którym razie ogólna forma iest taka: $dR = Adx + Bdy + Cdz + Edq$, wtedy między ilościami, A, B, C, E, zachodzą takie stósunki: $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dq}\right) =$

$=\left(\frac{dE}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dz}\right)=\left(\frac{dC}{dy}\right)$, $\left(\frac{dB}{dq}\right)=\left(\frac{dE}{dy}\right)$, $\left(\frac{dC}{dq}\right)=\left(\frac{dE}{dz}\right)$ które się znayduią, biorąc z części całey różniczki, każdą dwoikę przez łączenie bez powtarzania, i postępuiąc z nią iak wyżey. Podług tego iakakolwiek iest liczba zmiennych w funkcyi, można zawsze stósunki między ilościami A, B, C, D, E i t. d. wynaleść. A więc odwrótnie kiedy różniczka o trzech zmiennych nie daie między ilościami A, B, C, pod znanymi warunkami, znanych równań, różniczka taka nie iest prawdziwą różniczką, czyli do takiey różnicki, niemasz funkcyi. Toż samo się rozumie o różniczcze o czterech, pięciu i t. d. zmiennych.

§. 63. Definicya. Dotąd uważaliśmy różniczkę dx za iednostayną (§. 55.), lecz często potrzeba samo dx, uważać za zmienne, wtedy, przyrostek drugi, od dx nieskończenie razy mnieyszy tak się znaczy: d^2x; przyrostek trzeci: d^3x; przyrostek czwarty: d^4x i t. d. Różniczkowanie funkcyi pod warunkiem że dx iest zmienne, nazywa się różniczkowaniem różniczkowych funkcyi, dlatego że każdą funkcyą, choćby była samą różniczką, można ciągle różniczkować.

§. 64. Zagadnienie. Jak się różnickuią funkcye o iedney zmienney, kiedy samo dx iest zmienne?

Rozwiązanie. Ponieważ wtedy, kiedy dx, d^2x, d^3x, d^4x i t. d., są zmienne też ilości względem siebie i względem x, są oddzielnemi zmiennemi, to iest tyle co x, y, z, q, i t. d. znaczą; przeto uważaiąc ie iako takie, funkcye zupełnie się tak różniczkuią, iak się różniczkowały, kiedy dx było iednostayne. Prykłady następuiące okażą to.

1) $y = x$, $dy = dx$; $d^2y = d^2x$, $d^3y = d^3x$, $d^4y = d^4x$,

$d^ny = d^nx$.

2) $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$; $d^2y = 2x.d^2x + 2dx^2$,

gdzie się $2x.\,dx$ za iloczyn uważa, i iako taki różniczkuie.

$$d^3y = 2x.d^3x + 2dx.d^2x + 4dx.d^2x$$

$$= 2x.d^3x + 6dx.d^2x.$$

$$d^4y = 2x\,d^4x + 2dx.d^3x + 6dx.d^3x + 6.d^2x^2$$

$$= 2x\,d^4x + 8dx.d^3x + 6d^2x^2.$$

(Wyraz d^2x^2 znaczy kwadrat z drugiego przyrostka, czyli ilości d^2x.)

$$d^5y = 2xd^5x + 2dx.d^4x + 8dx.d^4x + 8d^2x.d^3x + 12d^2xd^3x$$

$$= 2xd^5x + 10dx.d^4x + 20d^2x.d^3x. \text{ i t. d.}$$

3) $Z = \dfrac{ax^3}{y^2}$

$$dZ = \frac{3ayx^2dx - 2ax^3dy}{y^3}$$

$$d^2Z = \frac{(6ayx.dx^2 + 3ax^2dy.dx + 3ayx.^2d^2x - 2ax.^3d^2y - 6ax.^2dx.dy).y - 9ax^2y.dx.dy + 6ax.^3dy^2}{y^4}$$

Mianownik do całey prawey strony.

$$= \frac{6ay^2x.dx^2 + 3ax.^2y.dy.dx + 3ay^2x.^2d^2x - 2ax^3y.d^2y - 6ax.^2y.dx.dy - 9ax^2y.dx.dy + 6ax^3dy^2}{y^4}$$

$$= \frac{6ay^2x.dx^2 - 12ax.^2y.dx.dy + 3ay.^2x^2d^2x - 2ax^3yd^2y + 6ax^3dy^2}{y^4}.$$

i t. d.

§. 65. **Wniosek.** Z powyższego wypada że maiąc funkcyą o dwóch, trzech, czterech i t. d. zmiennych, z których w każdey *dx*, *dy*, *dr*, *dz* i t. d. są odmienne, i zważaiąc rzeczone różniczki, iako też wszystkie dalsze, za oddzielne odmienne, natenczas funkcya różniczkuie się zupełnie podług §. 59.

§. 66. **Wniosek.** Maiąc iakąkolwiek różniczkę do iakieykolwiek funkcyi, znalezioną pod warunkiem że *dx*, *dy*, i t. d. są odmienne, i chcąc z niey znaleść taką różniczkę w któreyby *dx* za nieodmienne się uważało, wtedy wyrazy w które wchodzi d^2x, d^3x, d^4x i t. d. opuszczaią się iako Zera; pozostałe zaś wyrazy daią żądaną różniczkę. Toż samo się rozumie o *dy*, *dz* i t. d.

N. p.: $y = ax^3$, $dy = 3ax^2 dx$, $d^2y = 3ax^2 d^2x + 6axdx^2$; $d^3y = 3ax^2 d^3x + 6ax.dx.d^2x + 12ax.dx.d^2x + 6adx^3 = 3ax.^2d^3x + 18ax.dx.d^2x + 6a.dx^3$

Uważaiąc tutay w trzeciey różniczce, dx za nieodmienne, opuszczaią się wyrazy drugi i trzeci, w których się znayduie d^3x i d^2x iako Zera w takim razie, a tak zostaie do nieomiennego dx, $d^3 = 6adx^3$, to iest tożsamo, co iest wiadomém z §. 40.

§. 67. Uwaga. Sposób wynaydywania różniczek wszelakich rzędów, do funkcyi algebraicznych, uważaiąc dx za nieodmienne, już iest w całey zupełności wyłożony i to tak co do iedney iako co do wielu zmiennych. Także różniczkowanie funkcyi o iedney i wielu zmiennych, pod warunkiem że wszystkie różniczki są zmienne, iest rozebrane. Atoli co do różniczkowania funkcyi, w których wszystkie różniczki uważaią się za odmienne, ieszcze się wiele szczegółów znayduie, o których tutay mowa niebyła, dlatego że przeznaczenie tego dziełka tego niedozwoliło i że to co się o nich powiedziało, iest dostateczném, do łatwego zrozumienia wszystkiego dalszego, z obszernych dzieł.

ROZDZIAŁ IV.

Zastósowanie rachunku różniczkowego do niektórych materyi.

§. 68. Zagadnienie. Jak do Binomium $(1+x)^n$, w którém ilość n iakąkolwiek bydź może, znaleść potęgę?

Rozwiązanie. Widoczném iest, że iakiekolwiek znaczenie będzie miała ilość n, wykładnik ilości x w drugim wyrazie może bydź 1, w trzecim 2, w czwartym 3, i t. d. A tak cała rzecz idzie tylko o ogólne