zaś dy, różniczką pierwiastka. *) A tak iesteśmy w stanie, podług ostatniego równania, znaleść różniczkę do każdey potęgi zmienney w funkcyi. N. p. $x = y^2$, a więc $dx = 2y . dy$; $x = y^3$, a więc $dx = 3y^2 dy$; $x = y^4$, a więc $dx = 4y^3 dy$; $x = y^5$, a więc $dx = 5y^4 dy$ i t. d.

§. 41. **Wniosek.** Kładąc w różnicę pierwszą zamiast zmienney każdey, przyrostek iey, i biorąc tylko te wyrazy, w które przyrostek się włożył, wynaydzie się różnica druga szeregów różnic, przy przyrostku iednostaynym; podobnie z drugiey trzecia i t. d. wynika (§. 22.): które to przyrostki z sobą i zmienną przyzwoicie połączone, uważaiąc różnicę w którą się kładą za różniczkę (§. 36.) daią różniczkę potęgi

---

*) Uwaga. Mówiąc, iż różniczka potęgi, równa iest iloczynowi z trzech czynników i t. d., nie rozumie się, iżby różniczka uważała się za stósunkiem; i owszem ona i tutay iest w stosunku choć pośrednim, który zamienia się na bezpośredni, tworząc z rownania proporcyą. N. p. $x = y^5$; dlaczego (§. 40), $dx = 5y^4 dy$, a więc $dx : dy = 5y^4 : 1$. Wtedy tylko pewna ilość (to iest nieskończenie mała) iest za stosunkiem, kiedy łącząc się z drugą mogącą bydź, lub będącą w stosunku, żadnego na nią wpływu niema. I tak maiąc równanie $Z = AX + BX^2 + CX^3$, czyli $Z = (A + BX + Cx^2) X$; z którego taka proporcya wypada:

$Z : X = A + BX + CX^2 : 1$. Biorąc tutay X, a tem samém Z, za nieskończenie małe, wtedy wyrazy BX, CX^2 będące w proporcyi; z których pierwszy iest nieskończenie mały 1go, a drugi 2go rzędu (§. 27. §. 29), są Zerami względem A, i stosunek $A + BX + CX^2 : 1$, zupełnie się zamienia na $A : 1$; przeto ilości BX i CX^2, chociaż są w stosunku, uważaią się iednak za stosunkiem, bo żadnego wpływu na niego niemaią. Co innego wcale iest co do ilości Z i X w tey samey proporcyi; które prawdziwie są w stosunku, bo wyrzuciwszy którąkolwiek z nich, stosunekby zniknął.

zmienney ilości (§. 40.): a przeto maiąc różniczkę pierwszą, iakieykolwiek funkcyi (§. 36.) i (§. 37.), i kładąc w niey zamiast zmienney, iey różniczkę, wypada różniczka druga. Podobnie znayduie się z drugiey trzecia, z trzeciey czwarta, i t. d. Jeżeli zaś iakakolwiek różniczka, z samych poiedyńczych różniczek się składa i zmienney iuż niema, wtedy wszystkie dalsze różniczki będą bezwarunkowemi Zerami tak iak w §. 22. N. p. wynayduiąc różniczki iako różnice przez odciąganie, maiąc $x = y^2$ będzie $dx = 2ydy$ (§. 40). Kładąc w wyraz $2ydy$ zamiast y, $y + dy$ (§. 21.) wypadnie $dx^1 = 2y.\ dy + 2dy^2$; a zatem $d^2x = 2dy^2$. Toż samo iest, kładąc od razu w wyraz $2y\,dy$, zamiast y, samo dy, $d^2x = 2dy^2$, zaś $d^3x = o$, dlatego, bo wszystkie wyrazy szeregu różnic drugich, są tutay między sobą równe (§. 21), a więc dalsze są Zerami (§. 20). Daley niech $x = y^3$ będzie, stąd $dx = 3y^2\,dy$ (§. 40.) Postępuiąc potem iak wyżey, to iest w wyraz $3y^2.\,dy$ kładąc, zamiast y, $y + dy$, lecz wyniesione do kwadratu, będzie $dx^1 = 3y^2.\,dy + 6y\,dy^2 + 3\,dy^3$, a przeto $d^2x = dx^1 - dx = 3y^2\,dy + 6y\,dy^2 + 3dy^3 - 3y^2\,dy = 6y\,dy^2 + 3\,dy^3$. Tutay $3\,dy^3$ względem $6ydy^2$ iest nieskończenie małą ilością, będącą za stosunkiem (§. 40 Uw.), dlaczego tylko wypada $d^2x = 6y\,dy^2$. Tożsamo, kładąc w wyraz: $3y^2\,dy$, zamiast y^2 iego różniczkę; wypada $d^2x = 6y\,dy^2$ i t. d. Tym samym sposobem daley postępuiąc wypada $d^3x = 6dy^3$, $d^4x = o$. A tak do wszystkich potęg zmienney ilości, których wykładniki są dodatne i całe potrafimy iuż wynaydować różniczki wszelakich rzędów. Następuiące przykłady okażą to naocznie:

$x = y^2$, $dx = 2ydy$, $d^2x = 2dy^2$, $d^3x = o$ i wszystkie dalsze równe Zeru.

$x = y^3$, $dx = 3y^2 dy$, $d^2x = 6y\,dy^2$, $d^3x = 6dy^3$, $d^4x = o$ i wszystkie dalsze są Zera.

$x = y^4$, $dx = 4y^3 dy$, $d^2x = 12y^2.dy^2$, $d^3x = 24y.dy^3$, $d^4x = 24dy^4$, $d^5x = o$ i dalsze także Zera.

$x = y^5$, $dx = 5y^4 dy$, $d^2x = 20y^3 dy^2$, $d^3x = 60y^2 dy^3$, $d^4x = 120y.dy^4$; $d^5x = 120.dy^5$; $d^6x = o$ i dalsze wszystkie także Zera.

$x = y^n$, $dx = ny^{n-1}dy$;

$d^2x = n(n-1)\,y^{n-2}dy^2$.

$d^3x = n(n-1).(n-2)y^{n-3}.dy^3$.

$d^4x = n(n-1).(n-2).(n-3)\,y^{n-4}.dy^4$.

$d^5x = n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).\,y^{n-5}.dx^5$.

$d^nx = n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)\ldots(n-n+1)\,y^{n-n}.dy^n$.

Z powyższych przykładów pokazuie się także, iż różniczki co do rzędów, potęg zmienney z wykładnikami dodatnymi całymi, idą aż do stopnia potęgi funkcyi, nad ten wszystkie dalsze są Zerami, dla przyczyny iuż wyłożoney. To iest funkcya, którey zmienna iest 2go stopnia ma naywyższą różniczkę 2gą, którey zmienna iest 3go stopnia, ma naywyższą różniczkę 3cią, inne zaś wszystkie są Zera i t. d.

§. 42. **Wniosek.** Z §. 40 i 41 wypada także sposób wynaydowania różniczek wszelakich rzędów do wszelakich potęg; ilości zmienney, z wykładnikami uiemnymi całymi; biorąc tylko w formule $ax = y^n$ wykładnik uiemny i maiąc wzgląd na iego znak w łączeniu go z innemi ilościami. Następuiące przykłady okażą to dostatecznie. Niech tutay będzie:

1) $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, a tak $dy = d\,(x^{-1}) = d\left(\frac{1}{x}\right)$ $= -x^{-2}\,dx$; $d^2y = d^2\,(x^{-1}) = d^2\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^{-3}\,dx^2$, $d^3y = d^3\,(x^{-1}) = d^3\left(\frac{1}{x}\right) = -6x^{-4}\,dx^3$; $d^4y =$ $d^4\,(x^{-1}) = d^4\left(\frac{1}{x}\right) = 24x^{-5}\,dx^4$; $d^5y = d^5\,(x^{-1}) =$ $d^5\left(\frac{1}{x}\right) = -120x^{-6}\,dx^5$ i t. d. Gdzie $-x^{-2}\,dx$ $= \frac{dx}{x^2}$; $2x^{-3}\,dx^2 = \frac{2\,dx^2}{x^3}$; $-6x^{-4}\,dx^3 = -\frac{6\,dx^3}{x^4}$; $24x^{-5}\,dx^4 = \frac{24\,dx^4}{x^5}$; $-120x^{-6}\,dx^5 = -\frac{120\,dx^5}{x^6}$.

2) $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, a tak $dy = d\,(x^{-2}) = d\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $= -2x^{-3}\,dx = -\frac{2\,dx}{x3}$; $d^2y = d\,(-2x^{-3}\,dx) =$ $= 6x^{-4}\,dx^2 = \frac{6\,dx^2}{x^4}$; $d^3y = d\,(6x^{-4}\,dx^2) = -24x^{-5}\,dx^3$. $= -\frac{24\,dx^3}{x^5}$; $d^4y = d\,(-24x^{-5}.\,dx^3) = 120x^{-6}.\,dx^4$ $= \frac{120\,dx^4}{x^6}$.

3) $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, a tak $dy = d\,(x^{-3}) = d\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $= -3x^{-4}.\,dx = -\frac{3\,dx}{x^4}$; $dy^2 = d\,(-3x^{-4}.\,dx) =$ $= 12x^{-5}\,dx^2 = \frac{12\,dx^2}{x^5}$; $dy^3 = d\,(12x^{-5}.\,dx^2) =$

$= -60x^{-6}.dx^3 = -\frac{60dx^3}{x^6}$; $dy^4 = d(-60x^{-6}.dx^3)$

$= 360x^{-7}.dx^4 = \frac{360dx^4}{x^7}$.

4) $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, a tak $dy = d(x^{-4}) = d\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= -4x^{-5}.dx = -\frac{4dx}{x^5}$; $d^2y = d(-4x^{-5}dx) =$

$20x^{-6}.dx^2 = \frac{20dx^2}{x^6}$; $d^3y = d(20x^{-6}.dx^2) =$

$= -120x^{-7}.dx^3 = -\frac{120dx^3}{x^7}$; $d^4y = d(-120x^{-7}.dx^3)$

$= +840x^{-8}.dx^4 = \frac{840dx^4}{x^8}$.

5) $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, a tak

$dy = d(x^{-n}) = d\left(\frac{1}{x^n}\right) = -nx^{-n-1}.dx = -\frac{ndx}{x^{n+1}}$;

$d^2y = d(-nx^{-n-1}.dx) = n(n+1)x^{-n-2}.dx^2 =$
$= \frac{n(n+1)dx^2}{x^{n+2}}$; $d^3y = d[n(n+1)x^{-n-2}.dx^2] =$

$= -n(n+1).(n+2)x^{-n-3}.dx^3 = -\frac{n(n+1).(n+2)dx^3}{x^{n+3}}$;

$d^4y = d[-n(n+1).(n+2).x^{-n-3}.dx^3] = n(n+1)$
$(n+2)(n+3).x^{-n-4}.dx^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)dx^4}{x^{n+4}}$,

i t. d. Można także podług §. 38 okazać, że $x = y^{-n}$, daie $dy = -nx^{-n-1}.dx$, z czego o rożniczkach wyższych, wszystko samo przez się wypadnie, podług §. 41. Niech przyrostki do x i y nazywaią się $\triangle x$

$\triangle y$, a tak z równania $y = x^{-n}$, czyli $y = \frac{1}{x^n}$, wynika takie $y + \triangle y = \frac{1}{(x + \triangle x)^n}$. To wykonane daie:

$$y + \triangle y = \frac{1}{x^n + n x^{n-1} \triangle x + a x^{n-2} \triangle x^2 \ldots + \triangle x^n}.$$

Daley równanie dane i ostatnie, muszą mieć prawych stron równe mianowniki, aby się dały odciągnąć, co iest potrzebném do utworzenia proporcyi, w którąby przyrostki wchodziły, a następnie do wynalezienia stósunku różniczkowego. Robiąc to, pierwsze równanie daie takie:

$$y = \frac{x^n + n x^{n-1} \triangle x + a x^{n-2} \triangle x^2 \ldots\ldots + \triangle x^n}{x^{2n} + n x^{2n-1} \cdot \triangle x + a x^{2n-2} \triangle x^2 \ldots\ldots + x^n \triangle x^n};$$

drugie zaś zamienia się na następuiące:

$$y + \triangle y = \frac{x^n}{x^{2n} + n x^{2n-1} \triangle x + a x^{2n-2} \triangle x^2 \ldots + x^n \triangle x^n}.$$

Odciągaiąc zaś od drugiego pierwsze, wypada:

$$\triangle y = \frac{- n x^{n-1} \cdot \triangle x - a x^{n-2} \triangle x^2 \ldots - \triangle x^n}{x^{2n} + n x^{2n-1} \triangle x + a x^{2n-2} \cdot \triangle x^2 \ldots + x^n \cdot \triangle x^n}$$

czyli:

$$\triangle y = \frac{(- n x^{n-1} - a x^{n-2} \cdot \triangle x \ldots - \triangle x^{n-1}) \cdot \triangle x}{x^{2n} + n x^{2n-1} \cdot \triangle x + a x^{2n-2} \cdot \triangle x^2 \ldots + x^n \cdot \triangle x^n}.$$

A tak z ostatniego równania tworzy się taka proporcya:

$$\triangle y : \triangle x = \frac{- n x^{n-1} - a x^{n-2} \triangle x \ldots - \triangle x^{n-1}}{x^{2n} + n x^{2n-1} \cdot \triangle x + a x^{2n-2} \cdot \triangle x \ldots + x^2 \cdot \triangle x^n} : 1.$$

Biorąc w utworzoney proporcyi $\triangle x$ za nieskończenie małeiące, w którym razie podług ostatniego równania $\triangle y$ także nieskończenie maleie, wtedy części trzeciego wyrazu teyże proporcyi, maiące $\triangle x$ za czynnik, tak w liczniku iako w mianowniku także nieskończenie maleią, a tém samém stósunek $\Delta y : \Delta x$, nieskończenie się do stósunku, $\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} : 1$, przybliża. Uważaiąc na koniec Δx za nieskończenie małe, dla czego Δy, także takiem będzie, na ten czas rzeczone części trzeciego wyrazu, tak w liczniku iako i mianowniku, maiące za czynnik Δy, są nieskończenie małemi coraz wyższych rzędów (§. 27.), a tém samém Zerami względem skończonych wyrazów $-nx^{n-1}$ i x^{2n}, (§. 25.), dlaczego wymieniona proporcya na taką się zamienia: $\Delta y : \Delta x = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} : 1$, czyli $\Delta y : \Delta x = -nx^{-n-1} : 1$; a przeto stósunek, $-nx^{-n-1} : 1$, to iest stósunek granic stósunku $\Delta y : \Delta x$ (§. 30.) iest stósunkiem różniczkowym, ilości Δy i Δx są różniczkami (§. 34.), proporcya zaś ostatnia da się tak napisać $dy : dx = -nx^{-n-1} : 1$ (§. 34.) z którey $dy = -n^{-n-1} . dx$. To iest iak wyżey.

§. 43. Wniosek. Dotąd wiadomém iuż iest, iak się wynayduią wszelakie różniczki, do iakichkolwiek potęg iedney zmienney, z wykładnikami całymi, tak dodatnymi, iako też uiemnymi (§. 41. §. 42.). Lecz biorąc w funkcyi $ax = y^n$ (§. 38.) albo co iedno w funkcyi $y = x^n$, wykładnik n, za ułamek, i to lub dodatny lub uiemny, pokazuie się także z §. 41. i 42, iak się wynayduią różniczki wszystkich rzędów, do zmienney z wykładnikiem łamanym, tak dodatnym iako też uiemnym, a tém samém do wszelakich pierwiastków, zmienney. I tak

$$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}},\ dy = d(\sqrt[3]{x^5}) = d(x^{\frac{5}{3}}) = \tfrac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}.dx =$$
$$= \tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}.dx = \tfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}.dx.$$

$$d^2x = d^2(\sqrt[3]{x^5}) = d^2(x^{\frac{5}{3}}) = d(\tfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}.dx) = \tfrac{10}{9}x^{\frac{2}{3}-1}.dx^2 =$$

$$= \tfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}dx^2 = \tfrac{10}{9}.\frac{dx^2.}{\sqrt[3]{x}}$$

$$d^3y = d^3(\sqrt[3]{x^5}) = d^3(x^{\frac{5}{3}}) = d(\tfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.dx^2) = -\frac{10}{27}x^{-\frac{1}{3}-1}dx^2 =$$

$$= -\frac{10}{27}x^{-\frac{4}{3}}.dx^3 = -\frac{10}{27.}\frac{d.x^3.}{\sqrt[3]{x^4}.}$$

$$y = \sqrt[4]{x^7} = x^{\frac{7}{4}},\ dy = d(\sqrt[4]{x^7}) = d(x^{\frac{7}{4}}) = \tfrac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1}.dx =$$

$$= \tfrac{7}{4}.x^{\frac{3}{4}}.dx = \tfrac{7}{4}\sqrt[4]{}.x^3.\ dx.$$

$$d^2y = d^2(\sqrt[4]{}.x^7) = d^2(x^{\frac{7}{4}}) = d\left(\frac{7.x^{\frac{3}{4}}dx.}{4.}\right) = \frac{21.x^{\frac{3}{4}-1}}{16.}.xd^2 =$$

$$= \frac{21.}{16}x^{-\frac{1}{4}}.dx^2 = \frac{21.}{16.}\ \frac{dx^2.}{\sqrt[4]{x}.}$$

$$d^3y = d^3(\sqrt[4]{x^7}) = d^3(x^{\frac{7}{4}}) = d\left(\frac{21}{16}x^{-\frac{1}{4}}dx^2\right) =$$

$$-\frac{21}{64}x^{-\frac{1}{4}-1}dx^3 = -\frac{21.}{64}x^{-\frac{5}{4}}dx^3 = -\frac{21.}{64.}\frac{dx^3.}{\sqrt[4]{x^5}.}$$

i t. d.

$$y = \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}},\ dy = d(\sqrt[m]{x^n}) = d(x^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}x^{\frac{n-1}{m}}.\ dx =$$

$$= \frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}.dx = \frac{n}{m}\sqrt[m]{}\frac{x^n.\ dx.}{x}$$

$$d^2y = d^2(\sqrt[m]{x^n}) = d^2(x^{\frac{n}{m}}) = d\left(\frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}.\ dx\right) =$$

$$\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).x^{\frac{n-m-1}{m}}dx^2=\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).x^{\frac{n-2m}{m}}dx^2=$$

$$=\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).\frac{\sqrt[m]{x^n}\;dx^2}{x^2}$$

$$d^3y=d^3(\sqrt[m]{x^n})=d^3(x^{\frac{n}{m}})=d\left\{\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).x^{\frac{n-2m}{m}}dx^2\right\}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).\left(\frac{n-2m}{m}\right)\;x^{\frac{n-2m-1}{m}}.\;dx^3\;=$$

$$=\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).\;\left(\frac{n-2m}{m}\right).\;x^{\frac{n-3m}{m}}\;dx^3\;=$$

$$=\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{n}{m}\right).\;\left(\frac{n-2m}{m}\right).\frac{\sqrt[m]{x^n}\;dx^3}{x^3}.\text{ i t. d.}$$

$$y=\sqrt[3]{x^{-4}}=x^{-\frac{4}{3}},\;dy=-\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1}dx=-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}\;dx=$$

$$=-\frac{4}{3}\;\frac{dx}{\sqrt[3]{x^7}}.$$

$$d^2y=d\left(-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}\;dx\right)=\frac{28}{9}x^{-\frac{7}{3}-1}dx^2=\frac{28}{9}x^{-\frac{10}{3}}\;dx^2=$$

$$=\frac{28}{9}.\;\frac{dx^2}{\sqrt[3]{x^{10}}}.$$

$$d^3y = d\left(\frac{28}{9}x^{\frac{-10}{3}}\,dx^2\right) = -\frac{280}{27}.\,x^{\frac{-10-1}{3}}.\,dx^3 =$$

$$= -\frac{280}{27}.\,x^{\frac{-13}{3}}\,dx^3 = -\frac{280}{27}.\frac{dx^3}{\sqrt[3]{x^{13}}}.\text{ i t. d.}$$

$$y = \sqrt[5]{x^{-2}} = x^{\frac{-2}{5}},\quad dy = -\frac{2}{5}x^{\frac{-2-1}{5}}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{5}x^{\frac{-7}{5}}\,dx = -\frac{2}{5}.\frac{dx}{\sqrt[5]{x^7}}.$$

$$d^2y = d\left(-\frac{2}{5}.x^{\frac{-7}{5}}\,dx\right) = \frac{14}{25}x^{\frac{-7-1}{5}}.\,dx^2 = \frac{14}{25}x^{\frac{-12}{5}}.dx^2 =$$

$$= \frac{14}{25}\,\frac{dx^2}{\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

$$d^3y = d\left(\frac{14}{25}x^{\frac{-12}{5}}\,dx^2\right) = -\frac{14.\,12}{125}\,x^{\frac{-12-1}{5}}\,dx^3 =$$

$$= \frac{14.\,12.}{125}\,x^{\frac{-17}{5}}\,dx^3 = \frac{14.\,12.}{125.}\,\frac{dx^3}{\sqrt[5]{x^{17}}}.\text{ i t. d.}$$

$$y = \sqrt[m]{x^{-n}} = x^{\frac{-n}{m}},\ dy = -\frac{n}{m}x^{\frac{-n-1}{m}}\,dx = -\frac{n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}\,dx =$$

$$= -\frac{n}{m}.\frac{dx}{x.\sqrt[m]{x^n}}.$$

$$d^2y = d\left(-\frac{n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}.\,dx\right) = \left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right).\,x^{\frac{-n-m-1}{.m}}\,dx^2 =$$

$$= \left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right)x^{\frac{-n-2m}{.m}}\,dx^2 = \left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right).\,\frac{dx^2}{x^2\sqrt[m]{x^n}}.$$

$$d^3y = d\left\{\left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right).\,x^{\frac{-n-2m}{m}}\,dx^2\right\} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right).\left(\frac{-n-2m}{m}\right).\,x^{\frac{-n-2m-1}{.m}}\,dx^3 =$$

$$= \left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right).\left(\frac{-n-2m}{m}\right).\,x^{\frac{-n-3m}{.m}}\,dx^3 =$$

$$= \left(\frac{n^2}{m^2}+\frac{n}{m}\right).\left(\frac{-n-2m}{m}\right)\frac{dx^3}{x^3\sqrt[m]{x^n}}.\ \text{i t. d.}$$

§. 44. Uwaga. W §. 41. różniczki różnych rzędów szły tylko do stopnia potęgi zmienney; wyższe zaś były Zerami bezwarunkowemi. Przeciwnie w §. 42. i §. 43 idą różniczki bez końca. Przyczyna tego znayduie się w różniczkowaniu. To iest kiedy wykładnik zmienny iest cały i dodatny, wtedy w różniczkowaniu zamienia się na reszcie na Zero, i dlatego dalsze różniczki są Zerami bezwarunkowemi (§. 41.). Kiedy przeciwnie wykładnik zmiennéy iest uiemny cały lub łamany, albo też łamany dodatny, nie zupełnie na całość daiący się zamienić, wtedy w różniczkowaniu wykładnik taki niezamienia się nigdy na Zero, lecz będąc od początku uiemnym, lub kiedy wykładnik iest dodatny łamany, zamieniwszy się na uiemny, ciągle iako uiemny się powiększa, a tém samém ciągle wyższe różniczki się znayduią.

§. 45. Definicya. Tworzyć równanie różniczkowe, iest to zamieniać równanie dane między zmiennemi, na równanie między ich różniczkami, w któremby iednostaynych iakoteż zmiennych, przez dodawanie lub odciąganie, z różniczkami połączonych niebyło. Różniczkować zaś pewną funkcyą, iest to tworzyć z niey równanie różniczkowe.

§. 46. Wniosek. A tak do funkcyi: $y = x^n$, $y = x^{-n}$, $y = x^{\frac{\pm m}{n}}$ umiemy iuż tworzyć równania różniczkowe (§§. 41, 42, 43.).

§. 47. Wniosek. Maiąc równanie takie: $Z = q + r + y - t - x$ między zmiennemi, i kładąc w nie zmienne z różniczkami, wypada takie:

$$Z + dz = q + dq + r + dr + y + dy - t - dt - x - dx,$$

odciągnąwszy zaś od niego pierwsze, zostanie $dz = dq + dr + dy - dt - dx$, które iest równaniem różniczkowém (§. 45.). Widzimy tutay, że kiedy zmienna iedna iest kilku innych summą lub resztą, wtedy różniczka pierwszey, iest także summą lub resztą różniczek, ostatnich. *)

*) Uwaga. §. 47. zdaie się bydź sprzecznym względem §. 34. To iest wyobrażenie o różniczkach wyłożone pod ostatnim paragrafem, może się zdawać bydź takiem, że podług niego przyrostki w §. 47. użyte, nie są prawdziwemi różniczkami, a tém samém równanie nie iest różniczkowem. Atoli sprzeczność ta iest tylko pozorną. Dla przekonania o rzeczy, toż samo wyobrażenie powtarzam: kiedy Q iest funkcyą q, iako też $Q + M$, funkcyą $q + m$, i tą samą iaką Q ilości q było, wtedy stósunek granic stósunku $M : m$,

§. 48. Wniosek. Maiąc równanie takie $a+x-y=B+Z$, kładąc wnie różniczki, wypadnie $a+x+dx-y-dy=B+Z+dZ$, a odciągaiąc od drugiego pierwsze, będzie $dx-dy=dZ$ które iest równaniem rożniczkowem (45.) w którem iłości nieodmienne różniczek nie maią i mieć nie mogą (§. 1. §. 34), i to to iest, dlaczego się mówi, że różniczka iłości nieodmienney iest Zero.

§. 49. Zagadnienie. Jak do równania: $x=q.y$, znaleść równanie różniczkowe, czyli iak znaleść rożniczkę iłoczynu?

Rozwiązanie i dowodzenie. W równaniu $x=q.y$, $q.y$ iłoczyn potrzeba wyrazić przez wyrazy, których iuż różniczki znane są, aby znalazłszy tych wyrazów różniczki i zamieniwszy wyrazy wprowadzone na dane, wypadła różniczka iłoczynu. A tak:

$(q+y)^2-(q-y)^2=4q.y=4x$; dlaczego
$d(q+y)^2-d(q-y)^2=4dx$. Daley niech będzie
$(q+y)^2=z^2$, a $(q-y)^2=u^2$, a więc
$d(q+y)^2=2z.dz=2(q+y).(dq+dy)$ (§. 40. §. 47.)
$d(q-y)^2=2u.du=2(q-y).(dq-dy)$, przeto

---

uważaiąc M i m za nieskończenie małe, nażywa się stósunkiem różniczkowym, M zaś i m różniczkami. A tak, ile razy z dwóch zmiennych, iedna drugiey iest funkcyą, i też same zmienne z pewnemi przyrostkami nayprzód skończonymi, także nawzaiem są swemi fuukcyami, i temi samemi iakiemi same zmienne były, tyle razy ich przyrostki uważane za nieskończcnie małe, są rożniczkami; stósunek zaś granic tych przyrostków, ieżeli nie są od razu w stósunku równości, iak w §. 47., nazywa się stósunkiem różniczkowym. Wykład ten wszelaką sprzeczność, iakaby się zdawać mogła, powinien znieść.

$4dx = 2(q+y).(dq+dy) - 2(q-y)(dq-dy)$, czyli:
$2dx = (q+y).(dq+dy) - (q-y).(dq-dy)$.
Wykonawszy zaś ostatnie równanie będzie:

$$2dx = qdq + ydq + qdy + ydy - qdq + ydq + qdy - ydy,$$

to iest:

$$2dx = 2ydq + 2qdy.$$

A zatem $dx = ydq + qdy$. Toż samo inaczey. W równanie $x = q.y$, kładą się różniczki, a tak będzie:

$$x + dx = (q + dq).(y + dy) = q.y + ydq + qdy + + dq.dy.$$

Odciągnąwszy dane równanie od wypadłego, zostanie $dx = ydq + qdy + dq.dy$. W ostatniem równaniu, $dq.dy$ iest ilością nieskończenie małą drugiego rzędu, a więc względem poprzedzaiących wyrazów Zerem (§. 29. §. 25. §. 33), a zatem $dx = y.dq + qdy$ toż samo co wyżey. To iest różniczka iloczynu maiącego dwa czynniki, składa się z pierwszego czynnika przez różniczkę drugiego, i z drugiego przez różniczkę pierwszego pomnożonych, do siebie dodanych.

§. 50. Wniosek. Podług §. 49. można znaleść różniczkę do iloczynu, maiącego trzy, cztery, pięć i t. d. czynników, uważaiąc zawsze iloczyn, do którego różniczka iest znaleziona za ieden poiedynczy czynnik, a iego różniczkę za poiedynczą. N. p. $x = q.r.u.$, $d(q.r) = qdr + rdq$, $d(u) du =$, a więc $dx = q.r.du + qu.dr + ru dq$; $Z = q.r.u.y$, $d(q.r.u) = q.r.du + q.udr. + ru.dq$, $d(y) = dy$, a więc $dZ = qr udy. + qrydu + q.u.y dr + ruydq$ i t. d.

§. 51. Wniosek. Maiąc równanie $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, i mnożąc obydwie strony przez x^n, wypadnie: $yx^n = 1$, a więc $d(yx^n) = o$ (§. 48). Podług §. 49 i §. 40: $d(yx^n) = nyx^{n-1}.dx + x^n.dy$, to iest: $nyx^{n-1}.dx + x^n.dy = o$, przeto $x^n.dy = -nyx^{n-1}.dx$, czyli $dy = \frac{-nyx^{n-1}dx}{x^n}$. Znosząc daley w liczniku i mianowniku x^n zostanie, $dy = -nyx^{-1}.dx$; włożywszy zaś zamiast y, na prawey stronie wartość, wypadnie $dy = -nx^{-n-1}.dx$. To iest tożsamo, co się iuż dwoiakim sposobem w §. 42 okazało.

§. 52. Zagadnienie. Jak równanie $x = \frac{q}{r^n}$ zamienić na różniczkowe, czyli iak do ilorazu zmiennych dzielney i dzielnika, znaleść różniczkę?

Rozwiązanie i Dowodzenie. Z równania $x = \frac{q}{r^n}$ wypada $x.r^n = q$, a więc $nx.r^{n-1}.dr + r^n.dx = dq$ (§. 40. §. 49), przeto $r^n.dx = dq - nx.r^{n-1}.dr$. Biorąc na prawey stronie zamiast x wartość, będzie: $r^n.dx = dq - \frac{nq}{r^n}.r^{n-1}.dr$; znosząc zaś r^n w liczniku i mianowniku, wypada: $r^n.dx = dq - nq.r^{-1}.dr = dq - \frac{nq.dr}{r}$, przeto $dx = \frac{dq}{r^n} - \frac{nq.dr}{r^n r} = \frac{dq}{r^n} - \frac{nq.dr}{r^{n+1}}$. Sprowadzaiąc zaś dla symetryczności prawą stronę do iednego mianownika, wypada $dx = \frac{rdq - nq.dr}{r^{n+1}}$. To iest różniczka ilorazu znayduie się biorąc iloczyn z pierwiastka dzielnika przez różniczkę dzielney, odciągaiąc od niego iloczyn, z wykładnika dzielnika i samey dzielney przez różniczkę pierwiastka dzielnika i dzieląc resztę przez dzielnik maiący wykładnik iednością większy, od wykładnika w daney funkcyi.