§. 166. Zagadnienie. Jak znaleść różniczkę bryłowatości, czyli oboiętości iakieykolwiek bryły, utworzonéy przez obrócenie linii krzywéy, około swéy osi nieruchoméy?

Rozwiązanie. Ponieważ tutay także współustawione mogą bydź lub prostopadłe do siebie, lub pochyłe; przeto wynaydywania rzeczonéy różniczki, mamy równie iak różniczek łuków, powierzchni na płaszczyznie, i powierzchni krzywych, tożsamo dwa przypadki:

1) Weźmy współustawione do siebie prostopadłe. A tak uważaiąc figurę Nro. 2. w tém samém znaczeniu, w iakiém była użyta w §. 157, widzimy, że obracaiąc ią około swéy osi GE, tworzą się dwa ostrokręgi całe proste, ieden ostrokrąg ścięty prosty i bryła z powierzchnią także krzywą, zakreślona łukiem AB, któréy różność od różności łuku zawisła i któréy tu różniczki szukać mamy. Z ostrokręgów rzeczonych ieden tworzy się troykątem GEC, maiąc za oś GE, a za promień podstawnego koła, EC; drugi tróykątem GDB, maiąc za oś GD, a za promień podstawy DB; ścięty zaś ostrokrąg prosty, zakreśla się trapezem $DBCE$. A że bryłowatość ostrokręga prostego wynayduie się mnożąc powierzchnią koła podstawnego przez trzecią część osi; przeto nazywaiąc bryłowatość ostrokręga ściętego prostego, tutay trapezem $DBCE$ zakreślonego, n. p. M, a liczbę stósunkową przez którą pomnożona średnica daie obwód iak pospolicie π., podaie nam się takie równanie:

$$M = \pi . EC^2 \frac{GE}{3} - \pi . DB^2 \frac{GD}{3},$$

$$= \frac{\pi .}{3} (EC^2 . GE - DB^2 . GD.).$$

Daléy potrzeba nam się starać, dla doyścia do zamierzonego celu, wszystkie wyrazy stoiące w nawiasie, w ostatniém równaniu, przez same współustawione i ich przyrostki, wyrazić. I tak:

$EC = EH + HC = y + \Delta y$, stąd:

$EC^2 = (y + \Delta y)^2 = y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2$; daléy:

$GE = GD + DE = GD + \Delta x$.

A że z podobieństwa tróykątów *GBD*, i *BHC* taka proporcya ma mieysce:

$GD : DB = BH : HC$, czyli:

$GD : y = \Delta x : \Delta y$, z którey:

$GD = y.\frac{\Delta x}{\Delta y}$; przeto będzie:

$GE = GD + \Delta x = y.\frac{\Delta x}{\Delta y} + \Delta x$. Nadto:

$DB = y$; stąd:

$DB^2 = y^2$.

Biorąc tedy zamiast wyżéy wspomnionych wyrazów, stoiących w nawiasie, ich wynaleziony wartości, tworzy się nam takie równanie:

$$M = \frac{\pi.}{3}\left\{(y^2 + 2y.\Delta y + \Delta y^2).\left(y.\frac{\Delta x}{\Delta y} + \Delta x\right) - y^2.\, y.\frac{\Delta x}{\Delta y}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(y^3\, \frac{\Delta x}{\Delta y} + 2y^2\, \Delta x + y.\Delta x.\Delta y + y^2\, \Delta x + 2y\,\Delta x.\Delta y + \Delta x.\Delta y^2 - y^3\, \frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(3y^2\,\Delta x+3y.\Delta x.\Delta y+\Delta x.\Delta y^2\right),$$

$$=\pi.\,y.^2\,\Delta x+\pi.y.\Delta x.\Delta y+\frac{\pi.}{3}\Delta x.\Delta y^2.$$

Nazywaiąc dla dalszego obiętość bryły, znalezionéy łukiem AB i współustawionemi AD, DB, n. p. Z; obiętość bryłki zakreślonéy przyrostkami łuku i współustawionych, to iest zakreślonéy figurką $BDCm$, n. p. w, widoczném iest iż:

$$\Delta Z=\pi y^2\,\Delta x+\pi.y.\Delta x.\Delta y+\frac{\pi.}{3}\Delta x.\Delta y^2+w.$$

Zmnieyszaiąc zaś ciągle Δx, a tém samém Δy, ciągle się wartość ΔZ do wartości, $\pi.y^2\,\Delta x$, przybliża. Biorąc nakoniec Δx, a tém samém Δy za nieskończenie małe, wtedy wyrazy $\pi y.\Delta x.\Delta y$ i $\frac{\pi.}{3}\Delta x.\,\Delta y^2$, z których pierwszy staie się nieskończenie małym drugiego rzędu, a drugi nieskończenie małym, trzeciego rzędu, względem wyrazu $\pi.y^2\,\Delta x$, nieskończenie małego pierwszego rzędu, staią się Zerami. (§. 27. §. 29.). Równie ilość w staie się w takim razie Zerem, albowiem wtedy łuk BdC, zamienia się na cięciwę BmC. A tak z wszelaką matematyczną ścisłością wypada:

$$dZ=\pi.\,y^2\,dx.$$

To iest różniczka obiętości każdéy bryły, zakreślonéy łukiem iakiéykolwiek krzywéy linii, obróconym około osi nieruchoméy, przy prostopadłych współustawionych, iest taka: $\pi.\,y.^2\,dx$.

2) Chcąc znaleść różniczkę bryłowatości przy współustawionych pochyłych, trzeba wprzody wiedzieć, że tworząc bryły przez obracanie liniy krzy-

wych około swoich osiow, tym bryłom za podstawy daiemy i w takim razie koła, dlaczego, biorąc figurę 4tą, w tém samém znaczeniu, iak w §. 157, i obracaiąc liniią krzywą AB około swéy osi AE; nie płaszczyzna ABD, w któréy współustawione są pochyłe, lecz płaszczyzna ABM, wktórey współustawione są prostopadłe, bryłę do linii AB należącą, zakreśla. A tak różniczka obiętości rzeczonéy bryły, taż sama tu będzie przy pochyłych współustawionych, co i przy prostopadłych. Cała rzecz idzie tylko oto, abyśmy współustawione prostopadłe będące w różniczce, przez współustawione pochyłe wyrazili. Nazywaiąc i tutay bryłowatość czyli obiętość bryły zakreśloney płaszczyzną ABM, obracaną około nieruchoméy osi AE, n. p. Z, biorąc nadto:

$$BM = y', \ AM = x', \ BD = y, \ AD = x, \text{ będzie:}$$

$$dZ = \pi . y'^2 \, dx'. \quad \text{A że } y' = y . Wsq, \quad \text{a } x' = x + y . Dosq \ (\text{§. } 157.); \text{ przeto:}$$

$$y'^2 = y^2 \ Ws . q^2, \text{ iako też:}$$

$$dx' = dx + dy . Dos . q; \text{ a zatém:}$$

$$dZ = \pi . y^2 \ Wsq^2 \ (dx + dy . Dosq).$$

To iest różniczka obiętości bryły iakieykolwiek, sposobem wyżéy wymienionym, utworzonéy, przy pochyłych współustawionych, czyli przez pochyłe współustawione wyrażona, iest taka:

$$\pi . y^2 \ Wsq^2 \ (dx + dy . Dosq)$$

§. 167. **W n i o s e k.** Znaiąc iuż różniczkę obiętości każdéy bryły, tak przy prostopadłych, iako też pochyłych współustawionych, iesteśmy tém samém w stanie obrachować obiętość każdéy bryły. Robi się to w ogólności tym sposobem: Bierze się równanie linii krzywéy która bryłę zakreśliła; to się różniczkuie, daiąc mu potém taki kształt, aby różniczka obiętości, z powyższego §fu znana, na iednéy stronie utworzoną została, i to należąca do współustawionych prostopadłych, ieżeli równanie iest z takiemi współustawionemi; lub do współustawionych pochyłych, ieżeli równanie ma pochyłe współustawione. Potém równanie różniczkowe całkuie się w każdym razie, a całkowa wynaleziona, iako prawdziwa funkcya różniczki obiętości, daie obiętość szukaną. Całkową można i tutay wyrazić lub przez funkcyą x, wyrażaiąc w równaniu różniczkowém, y i dy, przez x i dx; lub też przez funkcyą y, wyrażaiąc w równaniu różniczkowém x i dx, przez y i dy. —

§. 168. Wniosek. Chcąc (Fig. 4.) znaleść obiętość bryły, którą płasczyzna ABD obracana około swéy osi tworzy, wtedy szukamy wprzody obiętości bryły zakréślonéy płasczyzną ABM, sposobem wyżéy wymienionym, potém znayduiemy obiętość ostrokręga prostego, tróykątem DBM prostokątnym zakreślonego, a odciągnąwszy drugą obiętość od pierwszéy, reszta daie oczywyście obiętość bryły zakreślonéy płasczyzną ABD. Nazywaiąc zaś rzeczoną obiętość ostrokręga prostego, tróykątem DBM zakreślonego n. p. R, ta się z następuiącego równania podaie:

$$R = \pi . MB^2 \frac{DM}{3}$$

$$= \frac{\pi .}{3} y^2 \; Wsq^2 \; y . Dosq.$$

$$= \frac{\pi .}{3} y^3 \; Wsq^2 \; Dosq.$$

§. 169. **Wniosek.** Maiąc ostrokrąg prosty, (Fig. 13.) w nim mamy iuż z §. 159. znane równanie, które iest:

$$y^2 = \frac{a^2 x^2}{\beta^2}, \text{ stąd:}$$

$$\pi . y^2 dx = \frac{\pi . a^2 x^2 dx}{\beta^2} \text{ a zatém:}$$

$$\int \pi . y^2 dx = \frac{\pi a^2 x^3}{3 \beta^2},$$ która to całkowa iuż iest zupełną; albowiem biorąc $x = 0$, wtedy cała obiętość $= 0$, i całkowa wynaleziona, iako mnożona przez x, także równa Zeru; a zatem i ilość $Const. = 0$. Uważaiąc że w całkowéy wynalezionéy $x = \beta$, to iest, biorąc oś za odcinek, i nazywaiąc obiętość całego ostrokręga, która do takiego x należy, n. p. Z, wtedy powyższe równanie zamienia się na takie:

$$Z = \frac{\pi a^2 \beta^3}{3 \beta^2}$$

$$= \frac{\pi . a^2 \beta}{3}$$

$$= \pi . a^2 \frac{DB}{3}.$$ To iest obiętość ostrokręga prostego wynayduie się, mnożąc powierzchnią koła podstawnego przez trzecią część osi. Co iuż iest znaném z Solidometryi elementarnéy.

§. 170. **Wniosek.** Biorąc równanie koła od wierzchołka, które iest: $y^2 = 2ax - x^2$, w którém a, promień oznacza, możemy bardzo łatwo obiętość każdéy części kuli odciętéy iedną płaszczyzną, to iest kołem, wynaleźć. I tak z równania wziętego, wypada:

$$\pi y^2 dx = 2\pi a x . dx - \pi x^2 dx,$$ a zatém:

$$\int . \pi y^2 dx = \frac{2\pi a x^2}{2} - \frac{\pi x^3}{3} + \text{Const},$$

$$= \pi a x^2 - \frac{\pi x^3}{3} + \text{Const}.$$

Dla wynalezienia całkowéy, weźmy $x = o$, w którym razie cała obiętość, iako też obydwa wyrazy całkowéy, dlatego że się mnożą przez x, są Zerami; stąd i ilość *Const.* $= o$. A tak wyraz wynaleziony: $\pi a x^2 - \frac{\pi x^3}{3}$, iest zupełną całkową, daiącą obiętość każdéy części kuli, kołem odciętéy. Biorąc zaś w wynalezionéy całkowéy $x = a$, to iest promień za odcinek, i nazywaiąc obiętość półkuli, która do takiego odcinka należy n. p. $\frac{K}{2}$, na ów czas wynaleziona całkowa podaie nam takie równanie:

$$\frac{K}{2} = \pi a x^2 - \frac{\pi x^3}{3}$$

$$= \pi a^3 - \frac{\pi a^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3} . \pi a^3;$$ a zatém:

$$K = \frac{4}{3} \pi . a^3$$

$$= 4 \pi a^2 \frac{a}{3}.$$

To iest bryłowatość kuli wynayduie się mnożąc iéy powierzchnią (§. 161.) czyli co iedno powierzchnią iéy czterech kół wielkich, przez trzecią część promienia. To także iest iuż znane z Solidometryi elementarnéy.

§. 171. Zagadnienie. Jak ogólnie znaleść wyraz na obiętość bryły, zakreślonéy iakiemkolwiek przecięciem ostrokręga?

Rozwiązanie. Weźmy równanie ogólne na każde przecięcie ostrokręga od wierzchołka, które iest:

$$y^2 = px \mp \frac{px^2}{a},$$

w którem p, miarę, ilość zaś a, oś (w paraboli nieskończenie wielką) oznacza. A tak z wziętego rónania podaie się:

$$\pi y^2 dx = \pi . dx \left(px \mp \frac{px^2}{a}\right),$$

$$= \pi . px . dx \mp \frac{\pi . px^2 dx}{a},$$

a przeto:

$$\int \pi . y^2 dx = \frac{\pi}{2} . px^2 \mp \frac{\pi}{3a} . px^3 + \text{Const.},$$

która to całkowa iest ogólnym lecz nieoznaczonym wyrazem bryłowatości czyli obiętości każdéy bryły, zakreślonéy iakiémkolwiek przecięciem ostrokręga.

§. 172. Wniosek. Chcąc z całkowéy przeszłego §fu nieoznaczonéy, wynaleść obiętość bryły zakreślonéy parabolą, którą można nazwać paraboloidą, potrzeba warunki paraboli, w rzeczoną całkową włożyć. Te warunki są tylko iednym warunkiem, to iest w paraboli oś czyli $a = \infty$; a zatém nazywaiąc obiętość paraboli Z, będzie podług wynalezionéy nieoznaczonéy całkowéy (§.171), takie równanie;

$$Z = \frac{\pi}{2}.\, px^2 \mp \frac{\pi}{3.\,\infty}.\, px^3 + \text{Const.}, \text{ to iest:}$$

$$Z = \frac{\pi}{2}.\, px^2 + \text{Const; albowiem } \mp \frac{\pi}{3.\,\infty} px^3 = 0.$$

(§. 29. §. 25.)

Biorąc zaś $x = 0$, wtedy będzie $Z = 0$, iako też: $\frac{\pi}{2} px^2 = 0$, więc i ilość *Const.* $= 0$; a zatém wypada na zupełną całkową:

$$Z = \frac{\pi}{2}.\, p.x^2$$

A że w paraboli: $px = y^2$; przeto:

$$Z = \frac{\pi}{2}.\, y^2 x.$$

Wystawiaiąc nakoniec na podstawie paraboloidy walec, który wtedy za promień koła podstawnego będzie miał y, i daiąc mu za wysokość x, to iest odcinek, będziemy mieli na bryłowatość iego nazywaiąc ią np W, takie równanie:

$$W = \pi.\, y^2 x$$

(znane z Solidemetryi elementarnéy);

a zatem:

$$Z : W = \frac{\pi}{2}.\, xy^2 : \pi.\, x\, y^2; \text{ czyli:}$$

$$Z : W = \frac{1}{2} : 1; \text{ albo}$$

$$Z : W = 1 : 2.$$

To iest walec maiący za promień podstawny ustawioną paraboloidy, a za wysokość iey odcinek, ma bryłowatość od bryłowatości paraboloidy, dwa razy większą.

§. 173. Wniosek. Biorąc całkową z §. 171 na obiętość ellipsy, nazywaiąc tęż obiętość także iak wyżey Z, i uważaiąc że $x=a$, w którym razie Z należące do x przyiętego, daie bryłowatość całey ellipsoidy, wtedy tworzy się takie równanie:

$$Z = \frac{\pi.}{2} p a^2 - \frac{\pi}{3a}. p a^3 + \text{Const.},$$

$$= \frac{\pi}{2}. p. a^2 - \frac{\pi}{3}. p a^2 + \text{Const.},$$

$$= \frac{3\pi. p. a^2 - 2\pi. p. a^2}{6} + \text{Const},$$

$$= \frac{\pi}{6}. p. a^2 + \text{Const},$$

A że i tutay dla téy samey przyczyny, iak w §fie przeszłym przy paraboloidzie, ilość *Const.* $= o$; przeto:

$Z = \frac{\pi}{6}. p. a.^2$ iest zupełną całkową. To iest obiętość ellipsoidy znayduie się mnożąc powierzchnią koła zakreślonego całą osią większą przez szóstą część miary. Nazywaiąc zaś promień kuli, np. r, bryłowatość kuli nazwana K (§. 170), miała takie równanie:

$K = \frac{4}{3} \pi r^3$, gdzie biorąc $r = \frac{a}{2}$, to iest:

biorąc połowę osi większéy ellipsy za promień kuli, będzie:

$$K = \frac{4}{3} . \pi . \frac{a^3}{8}$$

$$= \frac{\pi .}{6} a^3 .$$

A tak podaie nam się taką proporcyą:

$$Z : K = \frac{\pi}{6} p . a^2 ; \frac{\pi}{6} . a^3 ;$$

czyli:

$$Z : K = p : a ,$$

A że $p = \frac{c^2}{a}$, gdzie c oś poprzeczną ellipsy oznacza (znane z wyobrażenia o osiach i mierze ellipsy w Jeometryi analityczney); przeto będzie:

$$Z : K = \frac{c^2}{a} : a , \text{ a tém samem: }$$

$$Z : K = c^2 : a^2$$

To iest, biorąc w kuli oś większą ellipsy za średnicę, bryłowatość ellipsy ma się do bryłowatości takiéy kuli, iak się ma kwadrat osi poprzeczněy ellipsy, do kwadratu iey osi większéy.

§. 174. Wniosek. Biorąc w całkowey:

$$\frac{\pi}{2} . px^2 \mp \frac{\pi}{3a} . px^3 + \text{Const. (§. 171.)},$$

drugi wyraz, z dodatnym znakiem, wtedy całkowa tą daie bryłowatość hyperboloidy, co się z równania hyperboli od wierzchołka pokazuie. A tak nazywaiąc tę bryłowatość hyperboloidy Z, będzie:

$$Z = \frac{\pi}{2} . px^2 + \frac{\pi}{3a} . p^3 ,$$

gdzie się ilość Const. niedodaie; albowiem iest i tutay Zerem dla tych samych przyczyn, iak w powyższych dwóch paragrafach.

Biorąc zaś $x = a$, wtedy będzie:

$$Z = \frac{\pi}{2}. pa^2 + \frac{\pi}{3a}. pa^3,$$

$$= \frac{\pi}{2}. p.a^2 + \frac{\pi}{3}. pa^2,$$

$$= \frac{3\pi. p.a^2 + 2\pi. p.a^2}{6},$$

$$= \frac{5\pi. p.a^2}{6}.$$

W równoramienney nakoniec hyperboloidzie, którą zakreśla równoramienna hyperbola, i w którey $p = a$ bryłowatość nazwana także Z, takie ma równanie:

$$Z = \frac{\pi}{2} ax^2 + \frac{\pi}{3} x^3,$$

a biorąc i tutay $x = a$, będzie:

$$Z = \frac{5.\pi.}{6}. a^3.$$

§. 175. Wniosek. Równanie linii logarytmiczney było (§. 101):

$$y. \frac{dx}{dy} = a;$$

gdzie a iest podstyczną, stąd:

$$dx = \frac{a dy}{y}, \text{ więc:}$$

$$\pi y^2\, dx = \frac{\pi . ay^2\, dy}{y},$$

$$= \pi ay . dy, \text{ a zatém:}$$

$$\int . \pi y^2\, dx = \frac{\pi}{2} . ay^2 + \text{Const.}$$

Nazywaiąc tutay obiętość bryły zakreślonéy liniią logarytmiczną R, i biorąc $x = o$, a tém samém $y = 1$, (§. 94), wtedy R, zaczynaiące się, gdzie się $x = o$ zaczyna, iest także Zerem. A tak, wypada:

$$o = \frac{\pi}{2} . ay^2 + \text{Const.}; \text{ dlaczego:}$$

$$\text{Const.} = -\frac{\pi}{2} . ay^2,$$

$$= -\frac{\pi}{2} . a, \text{ a zatém:}$$

$$R = \frac{\pi}{2} . ay^2 - \frac{\pi}{2} . a,$$

$$= \frac{a\pi}{2} . (y^2 - 1).$$

Biorąc przeciwnie $y = o$, to iest y nieskończenie dalekie od ilości zasadowéy, którą ustawiona do $x = 1$, wyraża (§. 94), i uważaiąc że się R tam zaczyna, gdzie iest $y = o$, (czego także równanie linii logarytmicznéy dozwala), wtedy, $R = o$ się staie, a tém samém w powyższem równaniu: $\int : \pi . y^2\, dx = \frac{\pi}{2} . ay^2 + \text{Cons.}$ ilość $Cons. = o$; a zatem obiętość R, pod wymienionym warunkiem ma takie równanie:

$$R = \frac{\pi}{2} . ay^2 .$$

Biorąc nakoniec w walcu za promień podstawy $\frac{y}{2}$, a za wysokość $2a$, to iest za promień podstawy połowę ustawionéy linii logarytmicznéy, a za wysokość iéy podwoioną podstyczną, i nazywaiąc obiętość iego np. B, będziemy mieli takie równanie:

$$B = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot y^2 \cdot 2a,$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot ay^2.$$

To iest bryłowatość linii logarytmicznéy, czyli obiętość bryły zakreślonéy liniią logarytmiczną, zaczynaiącéy się gdzie $y = o$, iest równa obiętości walca pod wymienionymi warunkami.

ROZDZIAŁ VIII.

Zastósowanie rachunku różniczkowego i całkowego do ilości trygonometrycznych.

§. 176. **Twierdzenie.** Różniczka wstawy kąta a tém samém wstawy łuku, iest równa iloczynowi z różniczki tegoż łuku, przez iego dostawę. —

Dowodzenie. Mieymy czwartą część iakiegokolwiek koła (Fig. 15.) ACB; promień $AB = BE = BC = 1$; iakikolwiek łuk $AE = q$; iego nieoznaczony przyrostek $Eg = \Delta q$. Z punktu E, spuśćmy dwie prostopadłe, iednę na AB, drugą na BC, nazywaiąc pierwszą ED, a druga FK. A tak $DE = BK$ iest wstawą łuku q; a $EK = DB$ iest dostawą tegoż łuku, czyli: