ROZDZIAŁ I.

O funkcyach w ogólności i o zamienianiu ich.

§. 1. **D**efinicya. Z zasad pierwszych matematyki wiemy, że każdą ilość można bez końca powiększać lub pomnieyszać. Od okoliczności tylko zawisło, czyli ilości w takim stanie uważamy, w którym wszelakie a wszelakie wartości mieć mogą, lub w takim, w którym tylko iednę, albo oznaczoną ich liczbę maią. Ilość która się znayduie w pierwszym stanie nazywa się zmienną (variabilis) znayduiąca się w drugim iest iednostayna (constans). Ilości iednostayne znaczą się lub liczbami, lub też gdy są ogólne, pierwszemi zgłoskami alfabetu; zmienne zaś, pospolicie ostatniemi. Strzedz się tutay iednak potrzeba, aby nie mięszać znanych i nieznanych niższey Analizy, z iednostaynemi i zmiennemi wyższey, z których iedne i drugie iednakowo się znaczą. Główna różnica między pierwszemi, a ostatniemi, iest nayszczególniey ta, iż pierwsze ściągaią się tylko do szczególnych, drugie zaś do ogólnych stosunków. Dlatego tak iednostayne iako zmienne ilości, mogą bydź według okoliczności, za znane lub nieznane uważane. NP. W równaniu: $x^2 \pm ax = \pm p$; gdzie $x = \pm\sqrt{(\pm p + \frac{a^2}{4})} \mp \frac{a}{2}$, iest x tylko nieznaną ilością; bo tylko dwie wartości ma; iak formuła wskazuie; ilość a iest tylko znaną; albo zastępuiącą; znaną ilość; bo przybieraiąc różne wartości na x, ilość a niemoże zostać nieodmienioną. Przeciwnie w równaniu Paraboli, $y^2 = px$, gdzie $y = \pm \sqrt{px}$, ilość x iest prawdziwą zmienną, a ilość p, prawdziwą iednostayną; gdyż x może mieć wszelakie, a wszelakie wartości, a ilość p, się nieodmienia. Ilości zmienne są lub algebraiczne lub przestępne (transcendentes) pierwsze są tę, których stosunki do iednostaynych, dadzą się przez równania wyrazić, do ostatnich zaś należą, które rzeczonych równań niemaią, lecz w mieysce ich szereg nieskończony konieczny.

§. 2. Wniosek. Ilości zmienne zawieraią tedy w sobie wartości dodatne, uiemne, wymierne, niewymierne, prawdziwe, uroione, nieoznaczenie wielkie, nieoznaczenie małe, iako też Zera. To iest wszystkie wymienione wartości, mogą bydź na nie brane.

§. 3. Definicya. Każdy wyraz, który się składa z ilości zmienney i iednostayney, w iakikolwiek sposób z sobą połączonych, nazywa się funkcyą ilości zmiennéy. NP. $x + ax^2 - bx^3 + cx$ iest funkcyą ilości x; $my + py^2 + gy^4$ iest funkcyą ilości y; w równaniu $y = ax + bx^2$, iest ilość y, funkcyą do ilości x.

§. 4. Wniosek. Biorąc powyższe równanie $y = ax + bx^2$, w którem ilość y, iest funkcyą do ilości x, i szukaiąc z niego wartości na ilość x, którą iest: $x = \pm \sqrt{\left(\frac{y}{b} + \frac{a^2}{4b^2}\right)} - \frac{a}{2b}$ wtedy pokazuie się, że w temże równaniu także x iest funkcyą do y. (§. 3.) To iest maiąc równanie o dwóch zmiennych, na ten czas iedna zmienna iest funkcya drugiéy zmiennéy.

§. 5. Wniosek. Ponieważ w prawdziwey funkcyi ilość zmienna koniecznie się znaydować musi (§. 3.), przeto każda funkcya, iest także sama zmienną. Dlatego mogą się znaydować wyrazy, które tylko pozornemi funkcyami są. Takiemi są np.: ay^0,

$m+1^y$, $\frac{a^3-a^2y}{a-y}$, które są nieodmienne, gdyż ilość y, w nich stoiąca nie ma żadnego wpływu na iednostayne, a tém samém, nie koniecznie tam, lecz tylko przypadkowo stoi.

§. 6. Definicya. Funkcye są bardzo różnogatunkowe. Naygłównieysze gatunki są następuiące: Funkcye algebraiczne, lub przestępne (transcendentes); podobne lub niepodobne; iedno lub wielokształtowe. Algebraiczne funkcye są te, w których ilości zmienne są algebraiczne, przestępne zaś, których ilości zmienne są przestępne. Np. funkcya: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ iest algebraiczną, albowiem między zmiennemi i iednostaynemi ilościami, równanie oznaczonego kształtu, to iest prawdziwe równanie, ma mieysce. Przeciwnie: $y^2 = ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5 \ldots\ldots$ iest funkcyą przestępną; albowiem między zmiennemi a iednostaynemi ilościami, prawdziwe równanie znalezione bydź niemoże. Maiąc iednak funkcyą w równaniu daną, to iest algebraiczną, i wyrażaiąc ią przez szereg nieskończony, ta funkcya nieprzestaie bydź algebraiczną, czyli niezamienia się na przestępną i tylko ta iest przestępną która koniecznie przez szereg nieskończony wyraża się, niedaiąc się inaczey wyrazić. Podobne funkcye są te, w których zmienne z iednostaynemi, zupełnie w ten sam sposób się łączą; wszystkie zaś inne są niepodobne. Np.: $y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ iako też $q = m + nz + kz^2 + lz^3 \ldots\ldots$ są funkcye podobne; przeciwnie zaś: $y = mx + px^3$, i, $z = \pm \sqrt{(ax+x^2)} + bx^3$ są niepodobne. Jednokształtowa funkcya iest ta która ma iednę wartość, dwukształtowa, która ma dwie, wielukształtowa, która ma wiele wartości, nadaiąc iey zmienney iednę oznaczoną wartość. NP.: $y = ax + bx^2$, iest funkcya iednokształtowa; bo nadaiąc iey zmienney, to iest ilości x, oznaczoną wartość, ilość y to iest funkcya do x, będzie miała tylko iednę wartość. Przeciwnie: $y^2 = ax + bx^2 + cx^3$ dla czego: $y = \pm \sqrt{(ax + bx^2 + cx^3)}$ iest funkcya dwukształtna, bo biorąc wartość oznaczoną na iey zmienną x, ilość y, to iest funkcya ilości x, będzie miała dwie różne wartości. Funkcya $y^5 = m + px + dx^3$ iest funkcyą wielu kształtową dla tey samey przyczyny. Oprócz tego znayduią się ieszcze wymierne i niewymierne funkcye. Pierwsze są te w których zmienne ilości nie maią znaku pierwiastkowego, ani wykładnika ułamkowego, nieznoszączego się, drugie zaś, które maią znak pierwiastkowy, lub wykładnik ułamkowy nieznoszący się przy swoich zmiennych. Np.: $y^2 = b + cx + dx^2$ iest funkcya wymierna; funkcya zaś: $y^2 = \sqrt[3]{(ax + bx^4)}$, lub; $y = ax^2 - bx^{\frac{3}{5}}$ iest funkcya niewymierna. —

§. 7. Twierdzenie. Zamieniaiąc iakąkolwiek funkcyą na szereg nieskończony i przyprowadzaiąc summę tegoż szeregu do Zera, wtedy wszystkie współczynniki ilości zmienney, iako też osobna iednostayna, są równe Zeru.

Dowodzenie. Niech funkcya zamieniona na szereg nieskończony ma taki kształt: $o = M + Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots\ldots$ Ponieważ ilość x iest prawdziwą zmienną, przeto zawierać może wszelakie wartości (§. 2.) a więc można ią uważać równą Zeru, w którym razie wszystkie wyrazy w których się x znayduie, także równe Zeru bydź muszą. A że i cały szereg iest równy Zeru, przeto $M = o$ koniecznie bydź musi. Odmieniaiąc wartości na x, ilości niezmienne zachochowuią swoią wartość (§. 1.), a tak raz na zawsze $M = o$ iest. Opuszczaiąc daley w szeregu M, iako Zero, reszta będzie toż samo równa Zeru, dzieląc ią więc przez x, wypadnie taki iloraz:

$$o = A + Bx + Cx^2 \ldots\ldots$$

gdzie także $A = o$ bydź musi, i to dla tey samey przyczyny dla którey wyżey $M = o$ było. Toż samo się rozumie o wszystkich innych współczynnikach. —

§. 8. Zagadnienie. Jak funkcyą $\sqrt{(1+x)}$ na szereg nieskończony zamienić i iego współczynniki obrachować?

Rozwiązanie i dowód. Niech szereg, któremu funkcya iest równa ma taki kształt:

$\sqrt{(1+x)} = M + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots\ldots$ Kształt ten dla tego iest stósowny do wziętey funkcyi, gdyż każdey wartości na x zadosyć czyni. To iest biorąc $x = o$, wtedy $\sqrt{1} = M = 1$; coby niebyło, i owszem $\sqrt{1} = o$ wypadłby (co iest niepodobném), gdyby ilości iednostayney M w szeregu niebyło. Toż samo się rozumie o wszystkich innych wartościach na x, co się samo przez się pokazuie. Aby zaś współczynniki módz obrachować, potrzeba szereg przyprowadzić do Zera, w którym razie wszystkie współczynniki, iako też ilość niezmienna zebrana, będzie także równą Zeru (§. 7.); a więc tyle równań poiedyńczych wypadnie, ile wyrazów ktoś chce obrachować, z których wartości sposobem znanym się podaią. Końcem tego funkcya i iey szereg wynoszą się do kwadratu co daie:

$$\begin{aligned} 1+x = M^2 + 2AMx + A^2x^2 &+ 2ABx^3 + B^2x^4 + 2BCx^5 + C^2x^6 \ldots \\ &+ 2BMx^2 + 2CMx^3 + 2ACx^4 + 2ADx^5 \ldots\ldots \\ &+ 2MDx^4 \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Daley, przeniosłszy ilość $1+X$, na drugą stronę, wypada:

$$\begin{aligned} o = (M^2 - 1) + (2AM - 1)x + A^2x^2 &+ 2ABx^3 + B^2x^4 \ldots \\ &+ 2BMx^2 + 2CMx^3 + 2ACx^4 \ldots \\ &+ 2MDX^4 \ldots \end{aligned}$$

A tak: $M^2 - 1 = 0$, $M^2 = 1$, $M = 1$;

$2AM - 1 = 0$, $2AM = 1$, $A = \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}$;

$A^2 + 2BM = 0$, $2BM = -A^2$, $B = -\frac{A^2}{2M} = -\frac{1}{8}$;

$2AB + 2CM = 0$, $2CM = -2AB$, $C = -\frac{2AB}{2M} = \frac{1}{16}$;

$B^2 + 2AC + 2MD = 0$, $2MD = -B^2 - 2AC$

$$D = -\frac{B^2 - 2AC}{2M} = -\frac{5}{128}.$$

W ten sam sposób wynayduią się dalsze współczynniki, wynosząc do kwadratu coraz dalsze wyrazy szeregu.

§. 9. **Wniosek.** Chcąc z iakiey liczby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy podług §. 8. przez przybliżenie, na ten czas postępuie się w następuiący sposób: N. p. niech dana liczba będzie 52, a tak $52 = 49\left(1 + \frac{3}{49}\right)$, przeto $\sqrt{52} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{3}{49}\right)} = 7 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{3}{49}\right)}$. W takim razie $\sqrt{\left(1 + \frac{3}{49}\right)} = \sqrt{(1 + X)}$, dla czego $X = \frac{3}{49}$, a zatem

$$\sqrt{\left(1 + \frac{3}{49}\right)} = 1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 49} - \frac{1 \cdot 3^2}{8 \cdot 49^2} + \frac{1 \cdot 3^3}{16 \cdot 49^3} - \frac{5 \cdot 3^4}{128 \cdot 49^4} \ldots$$

czyli

$$\sqrt{\left(1 + \frac{3}{49}\right)} = 1 + \frac{3}{98} - \frac{9}{19208} + \frac{27}{1882384} - \frac{405}{737894528} \ldots$$

Daley zamieniaią się wyrazy na ułamki dziesiętne, co daie:

$$+1 = +1{,}0000000\ldots$$

$$+\frac{3}{98} = +0{,}0306122\ldots$$

$$-\frac{9}{19208} = -0{,}0004685\ldots$$

$$+\frac{27}{1882384}=+0{,}0000143\ldots$$

$$-\frac{405}{737894528}=-0{,}0000005\ldots$$

A zatem razem $\sqrt{\left(1+\frac{3}{49}\right)}=1{,}0301575,\ldots$

dla czego $\sqrt{52}=7\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{49}\right)}=7\cdot(1{,}0301575)$ $=7{,}2111025$. To iest liczba, z którey się pierwiastek kwadratowy wyciąga, rozkłada się na dwa czynniki, z którychby ieden był zupełnym kwadratem, a drugi miał kształt użytey funkcyi $\sqrt{(1+x)}$. Potem wyciąga się pierwiastek kwadratowy z drugiego czynnika podług szeregu (§. 8) i mnoży przez zupełny pierwiastek kwadratowy pierwszego czynnika.

§. 10. Wniosek. Z przeszłego wniosku widocznem iest, iż wtedy szereg prętko się do wartości pierwiastka przybliża, kiedy w funkcyi $\sqrt{(1+x)}$, ilość x iest ułamkiem właściwym, maiącym licznik znacznie mnieyszy od mianownika. Tym końcem można czasem ilość x wziąść uiemnie, lecz wtedy współczynniki szeregu §. 8. powinny bydź stósownie do tey zmiany obrachowane. N. p. $3=4\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$, a więc

$\sqrt{3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=2\cdot\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}$; lub $7=9\cdot\left(1-\frac{2}{9}\right)$, a więc $\sqrt{7}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{2}{9}\right)}$ $=3\sqrt{\left(1-\frac{2}{9}\right)}$. Wyrazy $\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}$ i $\sqrt{\left(1-\frac{2}{9}\right)}$ wyobrażaią funkcyą $\sqrt{(1+x)}$ z tym tylko dodatkiem że x musi bydź wzięte uiemnie.

§. 11. Wniosek. Wszystko co się wyżey powiedziało o funkcyi $\sqrt{(1+x)}$ i o iey szczególney wartości (§. 8., §. 9.), rozumie się także o funkcyach

$\sqrt[3]{(1+x)}$, $\sqrt[4]{(1+x)}$, $\sqrt[n]{(1+x)}$, przy czém się także pokazuie że wyciąganie pierwiastków, podług nieskończonego szeregu, osobliwie szukaiąc wielu mieysc dziesiętnych, z wielu względów dogodnieysze iest od zwyczaynego przybliżenia.

§. 12. Definicya. Szereg nieskończony którego wszystkie następuiące wyrazy wynayduią się z naybliższych poprzedzaiących, a tem samém wszystkie z pierwszego iak w §. 8, nazywa sie wracaiącym szeregiem. (series revertens). Szereg zaś, którego wyrazy, do wartości szukaney prędko się przybliżaią, iak §. 9. nazywa się szeregiem zbiegaiącym się. (series convergens.)

§. 13. Wniosek. Chcąc Np. funkcyą $\frac{1}{a+x}$ na nieskończony wracaiący szereg zamienić, na ten czas bierze się $\frac{1}{a+x} = M + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots,$ który to szereg dla tey samey przyczyny iak w §. 8., ma stósowny kształt. Daley potrzeba summę szeregu przyprowadzić do Zera, aby iego współczynniki przód obrachować. (§. 7) Końcem tego mnożą się obydwie strony przez ilość $a + x$, z czego wypada:

$$\begin{aligned} 1 = aM &+ aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 \ldots \\ &+ Mx + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 \ldots \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} 0 = (aM - 1) &+ aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 \ldots \\ &+ Mx + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 \end{aligned}$$

Z ostatniego szeregu podaie się podług §. 7.

$$aM - 1 = 0, \quad aM = 1, \quad M = \frac{1}{a}$$

$$aA + M = 0, \quad aA = -M, \quad A = -\frac{1}{a^2}$$

$$aB + A = 0, \quad aB = -A, \quad B = \frac{1}{a^3}$$

$$aC+B=0,\ aC=-B,\ C=-\frac{1}{a^4}$$

$$aD+C=0,\ aD=-C,\ D=\frac{1}{a^5}.$$ A więc

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}\ \ldots$$

Tęn sam szereg tąkże wypada, dzieląc w funkcyi licznik przez mianownik i ciągnąc dzielenię tak daleko iak się podoba, lub iak daleko potrzeba.

§. 14. Zagadnienie. Maiąc równanie między dwiema zmiennemi ilośćiąmi, iak iędnę z nich przez szereg nieskończony wyrazić, tak aby wyrazy tegoż szeregu szły podług potęg drugiey zmienney?

Rozwiązanie i dowodzenię. Zamiast iedney zmienney, kładzie się szeręg wynaleziony *) w równanie przyprowadzone do Zerą i współczynniki równania zamienionego na szereg wynayduią się podług §. 7 i §. 8. Np. równanie niech będzie takie: $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, a stósowny szereg takiego kształtu:

$$y=M+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4\ \ldots$$

$$\begin{array}{lllllll}
\text{A tak: } +y^3 & = M^3 & +3AM^2x & +3A^2Mx^2 & +A^3x^3 & +3A^2Bx^4 & \ldots \\
 & & & +3BM^2x^2 & +3CM^2x^3 & +6AMx^4 & \\
 & & & & +6ABMx^3 & & \\
+a^2y & = a^2M & +a^2Ax & +a^2Bx^2 & +a^2Cx^3 & +a^2Dx^4 & \\
+axy & = & +aMx & +aAx^2 & +aBx^3 & +aCx^4 & \\
-2a^3 & = -2a^3 & & & & & \\
-x^3 & & & & -x^3 & &
\end{array}$$

*) Uwaga. Wszystko tutay zawisło od tego, aby szereg który się bierze, miał kształt potrzebny. Newtona równoległobok służy do tego. Teorya i zastósowanię tego równoległoboku znayduią się dokładnie wyłożono w matematyce Kaestnera, III. C. Pierwszy oddz. p. 419. §. 632.

Przeto podług §. 7. wypada co następuie:

$$M^3 + a^2M - 2a^3 = 0\ (1^\circ)$$
$$3AM^2 + a^2A + aM = 0\ (2^\circ)$$
$$3A^2M + 3BM^2 + a^2B + aA = 0\ (3^\circ)\ \text{i t. d.}$$

Pierwsze z powyższych trzech równań da się przez ilość $M - a = 0$ podzielić:

$$\begin{array}{l|l|l}
M - a & M^3 + a^2M - 2a^3 = 0 & M^2 + a^2 + aM + a^2 = 0 \\
 & M^3 - aM^2 & \text{czyli:} \\
\hline
 & //\ a^2M + aM^2 - 2a^3 & M^2 + aM + 2a^2 = 0 \\
 & a^2M \quad - a^3 & \\
\hline
 & //\ +aM^2 - a^3 & \\
 & +aM^2 - a^2M & \\
\hline
 & \quad +a^2M - a^3 & \\
 & \quad +a^2M - a^3 & \\
\hline
 & \quad //\quad // &
\end{array}$$

A że zrównania wypadłego na iloraz: $M^2 + aM + 2a^2 = 0$, takie wartości na M wypadaią: $M = \pm \sqrt{\left(-2a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$, które obydwie są uroione, przeto z dzielnika: $M - a = 0$, wypadaiąca wartość $M = a$, iest sama iedna na M, prawdziwą. To iest $M = a$. Chcąc wynaleść wartość na ilość A, bierze się równanie pod Nrem 2; $3AM^2 + a^2A + aM = 0$, czyli $(3M^2 + a^2)A + aM = 0$; a tak $A = -\frac{aM}{3M^2 + a^2} = -\frac{a^2}{4a^2} = -\frac{1}{4}$. Szukaiąc daley wartości na ilość B, potrzeba wziąć równanie naznaczone Nrem 3.: $3A^2M + 3BM^2 + a^2B + aA = 0$, które daie: $3A^2M + (3M^2 + a^2)B + aA = 0$, a zatem $B = -\frac{3A^2M - aA}{3M^2 + a^2} = \frac{-\frac{3a}{16} + \frac{a}{4}}{4a^2} = \frac{\frac{a}{16}}{4a^2} = \frac{1}{64.a}$. Tym samym sposobem daią się wszystkie następuiące współczynniki obrachować.