Inaczey kładąc w wyraz $\triangle y = a \triangle x$, zamiast $\triangle x$, $\triangle x + \triangle^2 x$, wypada $a \triangle x + a \triangle^2 x$ ktore iest równe z powyższego ilości $\triangle y$. Kładąc zaś w wyraz $\triangle y = a \triangle x$, zamiast $\triangle x$, sam przyrostek $\triangle^2 y$, wypadnie $a \triangle^2 x$, co iest równe ilości $\triangle^2 y$; a zatem i przykład sprawdza to, co ostatnie dwa szczegóły z formy szeregów ogólnie pokazuią.

ROZDZIAŁ III.

Zasady rachunku różniczkowego.

§. 24. **Definicya.** Z wyobrażenia o ilości, o czem iuż się i wyżey powiedziało, wiadomem iest, że każdą ilość można ciągle powiększać lub pomnieyszać, dlaczego ilości naywiększéy równie iak naymnieyszéy niemasz i bydź niemoże. Kiedy ilość pewna o ten sam, lub o co raz większy przyrostek ciągle się powiększa, wtedy mówi się, że ilość nieskończenie rośnie. Kiedy ilość pewna, o co raz mnieyszy przyrostek ciągle pomnieysza się, wtedy mówi się, że się ilość nieskończenie zmnieyszą. Ilość, która od każdey, choćby bardzo wielkiey skończoney większą bydź może, nazywa się, nieskończenie wielką. N. p. każda z równoległych, wystawiaiąc ią sobie z całym postępem ukończonym, równie niedostyczna (assimptota) krzywéy linii, iest nieskończenie wielką; bo może bydź większą od każdey linii choćby bardzo wielkiéy, która się iuż daley nieprzedłuża, czyli która iest skończoną. Ilość, która bydź może mnieyszą od każdey, choćby bardzo małey skończoney, to iest takiey, którey wartość da się oznaczyć, nazywa się nieskończenie małą. N. p. niech będzie koło M (F 1), w niém średnica AB, ustawione CD, EF; liniia CG niech oznacza styczną, przez punkt C, przecinaiącą się z średnicą przedłużoną, w punkcie G. Połączmy punkta C, E, linią prostą i przedłużmy też linią aż do przecięcia się z przedłużoną średnicą; nazywaiąc ich przecięcie K, oraz poprowadźmy z C, równoległą do A B przecinaiącą się z E F, w punkcie H. A tak troykąty C H E, K D C, są podobne; a więc: C H: H E = K D: D C. Daley przybliżaymy ciągle w myśli E F ku C D; dlaczego się, iak figura pokazuie, C K ku C G przybliżać będzie, a tém samém linie, C H, H E, K G, będą się ciągle zmnieyszać. W reszcie wystawiaiąc sobie że E F iest tak bliska C D, iż iey oddalenie C H, a tém samém E H, K G bydź mogą od każdey ilości która się da oznaczyć, czyli od każdey skończoney, choćby bardzo małey, mnieysze, w którym razie K G dodana do skończoney ilości G D, ilości G D nieodmienia, dlaczego się stosunek C D: D K, na C D: D G zamienia, a następnie C H: H E = G D: D C wypada, w takim razie mówię, ilości C H, H E są nieskończenie małe. Właściwie ilości nieskończenie się powiększaiące, a tém samém nieskończenie wielkie, nie maią żadnych granic, my atoli wystawiamy sobie te ilości z ich ukończonymi postępami (progressus) i to, tylko w myśli, za ich granice bierzemy. Ilości nieskończenie się zmnieyszaiącey, czyli też nieskończenie małey *) iest granicą Zero (o) do którego, choć się ilość bardzo mała skończona, na nieskończenie małą, zamieni, taż nieskończenie mała, iako taka, nigdy niedochodzi. A tak ilość nieskończenie wielka, iako nieskończenie wiel-

---

*) Uwaga. Ilość nieskończenie się powiększaiąca, a nieskończenie wielka, iest toż samo co do istoty. Tylko że w pierwszey nieskończoność tyczy się bezpośrednio postępu, a nieskończoność ilości iest skutkiem pierwszey nieskończoności. W drugiey zaś iest przeciwnie. Tożsamo się rozumie o nieskończenie malejącey i nieskończenie małey.

ka, nie iest naywiększą, równie nieskończenie mała, iako nieskończenie mała nie iest naymnieyszą. Znak ilościnieskończenie wielkiey iest taki: ∞, a nieskończenie małey taki: $\frac{1}{\infty}$.

§. 25. Wniosek. Z powyższych wyobrażeń wypada. 1) Odciągaiąc od ilości nieskończenie wielkiey, iakąkolwiek skończoną; lub dzieląc ią przez iakąkolwiek skończoną; lub w reszcie wyciągaiąc z niey pierwiastek skończonego stopnia, nieskończenie wielka, zostaie nieskończenie wielką. I tak odciągaiąc od niedostyczney choćby bardzo wielką skończoną ilość, a niedostyczna i po tém zmnieyszeniu, iest tém czém była wprzody, iest od każdey skończoney większą, a zatem nieskończenie wielką. Dzieląc nieskończenie wielką, przez iakąkolwiek skończoną ilość n. p. a, i iloraz nazywaiąc y, będzie $\infty = a.y$, a więc $a(y+1) > \infty$. Gdyby więc y była ilość skończona, wtedy iloczyn z dwóch skończonych, to iest ilość skończona byłaby większą, od ilości nieskończenie wielkiey, co bydź niemoże podług §. 24., a więc y iest ilość nieskończenie wielka. Maiąc $\sqrt[m]{\infty} = y$, a zatem $\infty = y^m$, dlaczego $y^{m+1} > \infty$, natenczas, gdyby ilość y była skończoną, potęga skończona byłaby większą od ilości nieskończonie wielkiey, co bydź nie może dla tey samey przyczyny iak wyżey, a zatem pierwiastek y iest także nieskończenie wielki. 2) Nieskończenie mała, mnożona iakąkolwiek, nawet bardzo wielką skończoną, daie iloczyn takża nieskończenie mały.

N. p.: $\frac{1}{\infty}.a = x$, z czego $\frac{x}{a} = \frac{1}{\infty}$, a następnie $\frac{x-1}{a} < \frac{1}{\infty}$, wtedy, gdyby iloczyn x, był skończonym, musiałby iloraz z ilości skończonych, czyli ilość skończona, bydź mnieyszą od nieskończenie małey, co bydź nie może podług §. 24., a zatem iloczyn x iest także nieskończenie mały. 3) Ilość nieskończenie mała ma tylko w stosunku swoie prawdziwe znaczenie i może dać tego stósunku wykładnik skończony; za stosunkiem zaś, iako żadnego wpływu na skończone ilości niemaiąca, iest ilością niknącą, iest Zerem iako wielkość. I tak w proporcyi EH: HC = CD: DK (F 1.) biorąc EH, HC a tém samém GK za nieskończenie małe, nie można żadnego z pierwszych dwóch wyrazów opuścić, boby w mieyscu opuszczonego było zero bezwzględne, a więcby pierwszy stósunek zniknął; w wyrazie zaś DK, składaiącym się z DG ilości skończoney i GK nieskończenie małey, nie będącey w stósunku, opuszczą się GK, iako niemogąca ilości DG powiększyć, czyli, iako znacząca Zero co do wielkości, i dla tego to powyższa proporcya zamienia się na taką: EH: HC = DC: DG, z którey $\frac{EH}{HC} = \frac{DC}{DG}$, to iest gdzie wykładnik stósunku dwóch nieskończenie małych, iest skończoną ilością. — Tu się nadto pokazuie iż dodaiąc lub odciągaiąc ilość nieskończenie małą, od iakieykolwiek skończoney, tylko sama skończoną się zawsze uważa.

§. 26. Wniosek. Często ilości nieskończone tak są z sobą połączone, że kiedy iedna iest nieskończenie wielką, druga musi bydź nieskończenie małą i przeciwnie. N. p. mieymy proporcyą $x : m = p : y$, wtey biorąc y za nieskończenie wielką, x musi bydź nieskończenie małą; a biorąc x za nieskończenie wielką, y będzie nieskończenie małą. Z powyższey proporcyi pokazuie się także że ilość nieskończona może bydź także w stósunku z ilością skończoną, w którym razie daie wykładnik także nieskończony.

§. 27. Definicya. Ilości nieskończenie wielkie, równie iak nieskończenie małe są różne. Różność ta tyczy się rożnego ich postępu w nieskończoności. To iest maiąc dwie ilości nieskończone, iedna może nieskończenie prędzey, lub wolniey swóy postęp odbywać, iak druga. I tak, mieymy równanie: $y^2 = mx$, dlaczego: $\frac{y^2}{m} = x$, w którém niech ilość y będzie nieskończenie wielką; a tak ilość x, obok którey dzielnik m, ilości y^2, nieodmienia (§. 25.), będzie nieskończenie razy większą, to iest będzie nieskończenie razy prędzey w nieskończoności postępować iak ilość y. Ilość y, nazywa się nieskończenie wielką pierwszego rzędu, ilość zaś x, nieskonczenie wielką 2go rzędu, lub też x, iest nieskończenie wielką 1go rzędu, a ilość y, nieskończenie wielką $\frac{1}{2}$ rzędu. Podług tego znayduią się nieskończenie wielkie 3, 4, 5 i n^{tego}, iako też $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{n}^{tego}$ rzędu. Maiąc powyższe równanie $y^2 = mx$ i biorąc w niém y za nieskończenie małe dlaczego równanie się zamieni na takie: $\frac{1}{\infty^2} = mx$, na ten czas x, którego m niepowiększa (§. 25.) staie się nieskończenie razy mnieysze od y, to iest x iako nieskończenie małe, nieskończenie razy prędzey się zmnieysza iak y. Ilość y nazywą się nieskończenie małą 1go rzędu, ilość zaś x, nieskończenie małą 2go rzędu, albo też ilość x iest nieskończenie małą 1go, a ilość y $\frac{1go}{2}$ rzędu. Podług tego, nieskończenie małe ilości są także 3, 4, 5 i ntęgo, iako też $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{n}$ tego rzędu.

§. 28. Biorąc równanie na parabolę $y^2 = px$, i uważaiąc y, za nieskończenie wielką 1go rzędu, wtedy x iest nieskończenie wielką 2go rzędu (§. 27.), biorąc zaś y, za nieskończenie małą 1go rzędu, wtedy x, będzie nieskończenie małą 2go rzędu. To iest w paraboli odcinek nieskończony, nieskończenie razy prędzey rośnie i pomnieysza się, aniżeli rzędna.

§. 29. Wniosek. $\frac{a}{\frac{1}{\infty}} = a\infty$, to iest ilość skończona dzielona nieskończenie małą, daie iloraz nieskończenie wielki, skończona zaś, dla tey samey przyczyny dzielona nieskończenie wielką, daie iloraz nieskończenie mały. Daley $\frac{a}{0} = \infty$, to iest skończona dzielona Zerem, daie iloraz nieskończenie wielki, albowiem ułamek iest naywiększy kiedy mianownik iest naymnieyszy. Z dzielenia zwyczaynego można także o tem się przekonać, biorąc za dzielnik

$$m - m = 0. \text{ Także } \frac{1}{\infty} \cdot \infty^2 = \infty,$$

to iest nieskończenie mała, pierwszego rzędu, pomnożona przez nieskończenie wielką 2go rzędu, daie iloczyn nieskończenie wielki 1go rzędu. Podobnie:

$$\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}, \text{ także } \frac{1}{\infty^3} \cdot \infty = \frac{1}{\infty^2}, \; \infty^n \frac{1}{\infty^{n-1}} = \infty$$

i t. d. Także tu się pokazuie iż ilość nieskończenie mała drugiego rzędu tém samém iest względem nieskończenie małey 1go rzędu, czém nieskończenie mała 1go rzędu, względem skończonéy. (§. 24.)

§. 30. Definicya. Kiedy pewna ilość powiększaiąc lub pomnieyszaiąc się, nieskończenie się do pewney wartości przybliża, i tak bliską teyże wartości bydź może, że między nią a wspomnioną wartością, różnica stać się może nieskończenie małą, w którym to razie rzeczona wartość za wspomnioną ilość wziąźć się daie (§. 25.), na ów czas wzmiankowana wartość, nazywa się granicą ilości wyżey powiedzianéy. Także, kiedy stósunek ieden do drugiego nieskończenie się przybliża, tak dalece, że pod pewnymi warunkami pierwszy drugiemu równym się staie, wtedy stósunek drugi nazywa się granicą pierwszego. I tak koło iest granicą wszystkich wieloboków foremnych, które się w nie wpisuią, lub około niego opisuią. Stósunek zaś równości to iest: 1 : 1 iest stósunkiem granic wieloboku foremnego, liczbę boków ciągle powiększaiącego, w koło wpisywanego, do koła. Także stósunek (F 1.) CD : DG, iest granicą stósunku przyrostków współustawionych, to iest stósunku EH : HC.

§. 31. Twierdzenie. Maiąc równanie, $q = cu + e$, w którém q i u są ilości zmienne, utrzymuie się, że wziąwszy u za nieskończenie rosnące, wtedy granicą ilości q, będzie ilość cu.

Dowodzenie. W równaniu $q = cu + e$, dzieląc obydwie strony przez ilość cq, wypada $\frac{q}{cu} = 1 + \frac{e}{cu}$, gdzie będąc u, nieskończenie rosnące, ułamek $\frac{e}{cu}$, nieskończenie się zmnieysza, a tem samem wyraz $\frac{q}{cu}$ nieskończenie się do 1, przybliża. Ze zaś u iest oraz ilością nieskończenie wielką, przeto ułamek $\frac{e}{cu}$ iest ilością nieskończenie małą (§. 29), a tem samem w porównaniu z skończonemi, niknącą (§. 25), a więc $\frac{q}{cu} = 1$, stąd $q = cu$. To iest cu iest granicą q pod wyżey wymienionym warunkiem (§. 30).

§. 32. **Twierdzenie.** W równaniu: $q = au^n + bu^{n-1} + cu^{n-2}$, biorąc ilość u za nieskończenie się powiększaiącą, będzie granicą ilości q, ilość au^n, w którey nieskończenie rosnąca, ma nayw większy wykładnik.

Dowodzenie. Dzieląc w równaniu wziętém, $q = au^n + bu^{n-1} + cu^{n-2}$, obydwie strony przez ilość au^n, wypada takie równanie: $\frac{q}{au^n} = 1 + \frac{bu^{n-1}}{au^n} + \frac{cu^{n-2}}{au^n}$, to iest, znosząc co się daie: $\frac{q}{au^n} = 1 + \frac{bu^{-1}}{a} + \frac{cu^{-2}}{a}$, czyli: $\frac{q}{au^n} = 1 + \frac{b}{au} + \frac{c}{au^2}$. W równaniu ostatniém ułamki, $\frac{b}{au}$ i $\frac{c}{au^2}$ są ilości nieskończenie się zmnieyszaiące, albowiem u iest ilością nieskończenie rosnącą, a zatem $\frac{q}{au^n}$ nieskończenie się przybliża do 1. Uważaiąc zaś ilość u za nieskończenie wielką, ułamek $\frac{b}{au}$ staie się nieskończenie małą pierwszego, a $\frac{c}{au^2}$, nieskończenie małą 2go rzędu (§. 27. §. 29.), a więc pierwszy ułamek względem każdey skończoney, a drugi względem pierwszego, a tém bardziey względem iakieykolwiek skończoney ilości, są ilościami niknącemi (§. 24). A tak wypada $\frac{q}{au^n} = 1$, a przeto, $q = au^n$. Czyli granicą q iest au^n (§. 30), wyraz, którego nieskończenie rosnąca, ma naywiększy wykładnik.

§. 33. **Twierdzenie.** W równaniu $q = \frac{a}{u^n} + \frac{b}{u^{n+1}} + \frac{c}{u^{n+2}}$, biorąc u za nieskończenie rosnące, będzie granicą ilości q, wyraz $\frac{a}{u^n}$.

Dowodzenie. Równanie $q = \frac{a}{u^n} + \frac{b}{u^{n+1}} + \frac{c}{u^{n+2}}$, mnożę przez ilość u^n, a tak wypada $q. u^n = a + \frac{b}{u} + \frac{c}{u^2}$ A że ilość u nieskończenie rośnie, a tem samem ułamki $\frac{b}{u}$ i $\frac{c}{u^2}$ nieskończenie się zmnieyszaią; przeto wyraz $q. u^n$ przybliża się nieskończenie do wartości a. Gdy się zaś u za ilość nieskończenie wielką uważa, wtedy ułamek $\frac{b}{u}$ staie się nieskończenie małą pierwszego, a ułamek $\frac{c}{u^2}$ nieskończenie małą ilością 2go rzędu (§. 27), (§. 29), dlaczego pierwszy, a tem bardziey drugi względem ilości a, są ilościami niknącemi (§. 25), a zatem takie równanie wypada $q. u^n = a$, czyli $q = \frac{a}{u^n}$. To iest ilości q iest granicą ilość $\frac{a}{u^n}$ (§. 30), w którey ilość nieskończenie rosnąca iest mianownikiem i mą naymnieyszy wykładnik.

§. 34. Definicya. Kiedy ilość Q, iest funkcyą ilości q; iako też kiedy Q, przyrostkiem M, a q, przyrostkiem m, powiększa się, czyli kiedy także Q + M iest tą samą funkcyą q + m, iaką Q iest ilości q, wtedy zmnieyszaiącm, nieskończenie, dlaczego, i M, się nieskończenie zmnieyszać będzie, stósunek granic, do którego się M : m, nieskończenie przybliża, i który za M : m, w takim razie wziętym bydź może, nazywa się stósunkiem różniczkowym, M, zaś, i m, nazywaią się na ten czas różniczkami. N. p. (F. 1) nazywaiąc odcinek A D, Q, ustawioną D C q; przyrostek D F, czyli C H, M przyrostek H E, m: wiadomém iest że Q iest funkcyą, q, iako też Q + M, tą samą funkcyą q + m, bo zawsze odcinek da się wyrazić przez ustawioną i iednostayne czyli niezmienne ilości, lub przeciwnie, tym samym sposobem, przy téy samey linii. Daley zmnieyszaiąc H E, to iest m, nieskończenie, dlaczego także C H, to iest M, i G K nieskończenie się zmnieyszaią, wtedy stósunek m : M przybliża się nieskończenie do stósunku C D : D G, i można w takim razie stósunek C D : D G za m: M, wziąść (§. 24). Stósunek tedy C D: D G, który iest granicą stósunku m: M, (§. 30), nazywa się stósunkiem różniczkowym, ilości zaś m, M, *) nazywaią się Różniczkami. Różniczki m i M znaczą się, kładąc przed ich zmienne zgłoskę d, i tak Q+M wyraża się przez Q+dq, a q+m, przez q+dq.

*) Uwaga. Poięcie dokładne o ilościach nieskończonych, od których zawisło poięcie o różniczkach, iest koniecznym warunkiem zrozumienia wyższego rachunku. Poięcie to z natury swoiey iest bardzo trudne, dlatego że wyobrażenia bezpośredniego o ilościach nieskończonych niemamy, i tylko z wyobrażenia o postępie, pośrednio wyobrażenie o nieskończonych ilościach tworzymy. Poięcie to od różnych Matematyków różnie wykładanem było i miało często w skutku, sprzeczności zadziwiaiące, któreby w Matematyce niepowinny mieć mieysca. Wykład ninieyszy tego poięcia w §. 24 dany, a w §. 25 daley rozwinięty, iest zupełnie dokładny, gdyż z natury ilości wzięty i żadnych sprzeczności niedopuszczaiący. I tak, z wyobrażenia o wielkości, które iest rzeczywiste, wystawiaiąc sobie ciało fizyczne, iasno wypada wyobrażenie o wielkości nieskończenie rosnącey i malejącey, to iest, o takiey, która może bydź od każdey skończoney większą, czyli o nieskończenie wielkiey, i takiey, która może bydź od każdey skończoney mnieyszą, czyli nieskończenie małey. Skutkiem tego wyobrażenia bezpośrednim i koniecznym iest, iż ilości nieskończenie małe tylko w stósunku maią swoie znaczenie, za stósunkiem zaś są Zerami, i właśnie ta ich własność iest naywaźnieyszą w rachunku różniczkowym. Właściwie ilości nieskończenie małe są tylko skróconymi znakami stósunków, dlaczego, ieżeli stosunków nieoznaczaią, wtedy nic nieznaczą. Interessownym iest bardzo, obszerny rozbior wyobrażenia o ilościach nieskończonych, przez Hegla w iego loice zawarty, p. 206. Anmerkung.

Wyraz atoli dq nie iest iloczyn z dwóch czynników, lecz równie poiedynczy, iak był wyraz mx w różnicach skończonych (§. 15).

§. 35. Wniosek. A tak różniczki, iako ilości nieskończenie małe (§. 34), maią tylko w stosunku swoie prawdziwe znaczenie, za stosunkiem zaś są Zerami (§. 25).

§. 36. Wniosek. W szeregach różnic (§. 15), ilość y iest funkcyą x, ilość zaś y^{1} to iest $y + \triangle y$, iest tą samą funkcyą $x + mx$. Biorąc tutay mx za nieskończenie małą, w ktorym razie $\triangle y$, także nieskończenie małe będzie, natenczas stosunku $mx : \triangle y$, stósunek granic, różny według rożności ogólnego wyrazu szeregu funkcyi, zamienia się na stósunek różniczkowy, ilości zaś nieskończenie małe mx, $\triangle y$, na różniczki (§. 34). N. p. Niech ogolnym wyrazem będzie $y = ax^2$, dlaczego $y^{1} = a(x + mx)^2 = ax^2 + 2ax . mx + mx|^2$ (§. 15), a tém samém $y + \triangle y = ax^2 + 2ax . mx + mx^2$, z czego daley $\triangle y = 2ax . mx + mx^2$, a tak widzimy, iż biorąc mx za nieskończenie małą, cała prawa strona równania (§. 25.), a zatem i lewa, to iest $\triangle y$, będzie nieskończenie małą. Dawszy dla dalszego, ostatniemu równaniu taką formę, $\triangle y = (2ax + mx) . mx$, da się z niego następuiąca proporcya ułożyć: $\triangle y : mx = 2ax + mx : 1$, w którey dla nieskończenie maleiącego mx, stósunek $2ax : 1$, iest stosunkiem granic stosunku $\triangle y : mx$, a zatem iego stosunkiem różniczkowym (§. 30. §. 34), więc proporcya powyższa zamienia się na taką: $dy : dx = 2ax : 1$. A tak różniczki nic innego nie są, iak tylko, iedne przyrostkami iednostaynymi nieskończenie małymi ilości zmienney pierwszego szeregu (§. 15), á drugie różnicami tutay pierwszemi, nieskończenie małemi.

§. 37. Wniosek. A ponieważ różnice są różne, (§. 15.) przeto także różniczki różne bydź muszą. To iest różniczki są także, pierwsze, drugie, trzecie i t. d. Rożniczki wyższe znaczą się także tak iak różnice wyższe, zamieniaiąc tylko $\triangle$ na d. To iest różniczka pierwsza ilości zmienney y, pisze się, co iuż wyżey powiedzianém iest, dy; różniczka 2ga, d^2y; różniczka 3ciey, d^3y; różniczka nta, d^ny. Atoli wyrazu n. p. d^4y z wyrazem dy^4 nie potrzeba mięszać; pierwszy bowiem oznacza czwartą różniczkę ilości y, a drugi, czwartą potęgę pierwszey różniczki, ilości y. —

§ 38. Zagadnienie. Maiąc funkcyą daną $ax = y^n$, mamy do niey należący stósunek różniczkowy, wynaleść.

Rozwiązanie i dowód. Przyrostek zmienney x, niech się nazywa M, a zmienney y, m. A tak z równania danego $ax = y^n$, wypada takie $ax + aM = (y+m)^n$ (§. 34.) czyli wykonywaiąc:

$$ax + aM = y^n + ny^{n-1}.m + \frac{(n-1).ny^{n-2}.m^2}{1.\ 2} + \frac{(n-2)(n-1).n.y^{n-3}m^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{(n-3).(n-2).(n-1)\,n\,y^{n-4}.m^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$
$$\text{i t. d.} \ldots + m^n.$$

Odciągaiąc od wypadłego równania funkcyą daną, dla ułożenia stosunku między przyrostkami zostanie się:

$$(+)\quad aM = ny^{n-1}.m + \frac{(n-1).ny^{n-2}.m^2}{1.\ 2} + \frac{(n-2).(n-1).ny^{n-3}.m^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{(n-3).(n-2).(n-1).n.y^{n-4}.m^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \ldots$$
$$+ m^n.$$

Wyłączaiąc na prawey stronie iedno m, a to dla tego, aby z równania dała się proporcya ułożyć, wypadnie:

$$aM = \left(n y^{n-1} + \frac{(n-1).\ n.}{1.\ 2.} y^{n-2}.\ m + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-2).(n-1).\ n.}{1.\ 2.\ 3} y^{n-3}.\ m^2 \ldots + m^{n-1} \right) m.$$

A więc uważaiąc równanie iako dwa iloczyny równe, wypada taka proporcya:

$$M : m = n y^{n-1} + \frac{(n-1).\ n.}{1.\ 2} y^{n-2}.\ m +$$
$$+ \frac{(n-2).\ (n-1).\ n.}{1.\ 2.\ 3} y^{n-3}\ m^2 \ldots + m^{n-1} : a$$

A uważaiąc w reszcie przyrostek m, za nieskończenie maleiący, w którym razie także M nieskożczenie maleie, iak równanie pod znakiem (+) pokazuie, którego prawa strona, a tém samém lewa, a znią i przyrostek M nieskończeniz maleią, wtedy w proporcyi utwórzoney wszystkie części wyrazu trzeciego, maiące m, nieskończenie maleią, wyrazy zaś $n y^{n-1}$, i a, nieodmieniaią się: a więc stósunek M : m, nieskończenie się do stósunku $n y^{n-1} : a$, przybliża. A że nieskończenie maleiące m, iest oraz ilością nieskończenie małą, dlaczego części wyrazu trzeciego powyższey proporcyi, maiące za czynnik m, są nieskończenie małemi, coraz wyższych rzędów (§. 27. §. 29.), a tém samém wszystkie dalsze względem bliższych, a bardziey ieszcze względem ilości $n y^{n-1}$; na którą żadnego wpływu niemaią, są Zerami (§. 24. §. 25.) a więc wspomniona proporcya na taką się zamienia $M : m = n y^{n-1} : a$: a przeto $n y^{n-1} : a$, to iest stósunek granic stósunku M : m (§. 30.), iest stósunkiem różniczkowym żądanym; przyrostki zaś M i m są różniczkami (§. 34.) i proporcya ostatnia na taką się zamienia $dx : dy = ny^{n-1} : a$. Tożsamo można okazać uważaiąc x, i $x + M$ iako dwa wyrazy po sobie idące szeregu głównego (§ 15.) y zaś, i $y + m$ iako dwa po sobie idące wyrazy szeregu naypierwszego (§. 36.).

§. 39. Uwaga. W równaniu $ax = y^n$ (§. 38.) zmienna y, uważaną była iako maiąca iakąkolwiek wartość; gdyby zaś $y = o$ było, wtedy biorąc równanie z §. 38, naznaczone znakiem (+), a $M = ny^{n-1}.m + \frac{(n-1).ny^{n-2}}{1.2}.m^2 \ldots\ldots + m.^n$, wypadłoby $a M = m^n$. dla każdey wartości na m. Z którego równania taka proporcya wypada; $M : m^n = 1 : a$, która niezawiera stósunku różniczkowego (§. 34.), lecz tylko stósunek poczynaiących się zmiennych czyli różniczek ilości x i y. N. p.: W równaniu $a.x = y^2$, niech $a\,x$ oznacza prostokąt, y^2 kwadrat z prostokątem równy, ilość a niech będzie podstawą iednostayną prostokąta, x iego zmienną wysokością, ilość y nakoniec, zmienny bok kwadratu. A tak podług powyższego biorąc $y = o$, będzie $a. M = m^2$, a następnie $M : m^2 = 1 : a$. To iest robiąc kwadrat i prostokąt równe między sobą których wprzody niebyło przy nieźmienney podstawie prostokąta i przyrostkach nieskończenie małych, wtedy boki poczynaiące się kwadratu nie będą y, $y + m$, lecz o, $o + m$ wysokość zaś prostokąta będzie o, M. —

§. 40. Wniosek. Wziąwszy, w proporcyi $dx : dy = ny^{n-1} : a$, $a = 1$ (§. 38) wypadnie $dx = ny^{n-1}\,dy$. Samo się rozumie, iż wziąwszy rownanie (§. 38) $ay = x^n$, wypadnie: $dy = nx^{n-1}\,dx$, kiedy także a, iest iednością. To iest różniczka potęgi równa iest iloczynowi z trzech czynników, pierwszym iest n, stopień potęgi; drugim, y^{n-1}, pierwiastek wyniesiony do stopnia potęgi zmnieyszonego iednością; trzecim zaś dy, różniczką pierwiastka. *) A tak iesteśmy w stanie, podług ostatniego równania, znaleść różniczkę do każdey potęgi zmienney w funkcyi. N. p. $x = y^2$, a więc $dx = 2y.dy$; $x = y^3$, a więc $dx = 3y^2 dy$; $x = y^4$, a więc $dx = 4y^3 dy$; $x = y^5$, a więc $dx = 5y^4 dy$ i t. d.

§. 41. **Wniosek.** Kładąc w różnicę pierwszą zamiast zmienney każdey, przyrostek iey, i biorąc tylko te wyrazy, w które przyrostek się włożył, wynaydzie się różnica druga szeregów różnic, przy przyrostku iednostaynym; podobnie z drugiey trzecia i t. d. wynika (§. 22.): które to przyrostki z sobą i zmienną przyzwoicie połączone, uważaiąc różnicę w którą się kładą za różniczkę (§. 36.) daią różniczkę potęgi

*) Uwaga. Mówiąc, iż różniczka potęgi, równa iest iloczynowi z trzech czynników i t. d., nie rozumie się, iżby różniczka uważała się za stósunkiem; i owszem ona i tutay iest w stosunku choć pośrednim, który zamienia się na bezpośredni, tworząc z rownania proporcyą. N. p. $x = y^5$; dlaczego (§. 40), $dx = 5y^4 dy$, a więc $dx : dy = 5y^4 : 1$. Wtedy tylko pewna ilość (to iest nieskończenie mała) iest za stosunkiem, kiedy łącząc się z drugą mogącą bydź, lub będącą w stosunku, żadnego na nią wpływu niema. I tak maiąc równanie $Z = AX + BX^2 + CX^3$, czyli $Z = (A + BX + Cx^2) X$, z którego taka proporcya wypada:

$Z : X = A + BX + CX^2 : 1$. Biorąc tutay X, a tem samém Z, za nieskończenie małe, wtedy wyrazy BX, CX^2 będące w proporcyi; z których pierwszy iest nieskończenie mały 1go, a drugi 2go rzędu (§. 27. §. 29), są Zerami względem A, i stosunek $A + BX + CX^2 : 1$, zupełnie się zamienia na $A : 1$; przeto ilości BX i CX^2, chociaż są w stosunku, uważaią się iednak za stosunkiem, bo żadnego wpływu na niego niemaią. Co innego wcale iest co do ilości Z i X w tey samey proporcyi; które prawdziwie są w stosunku, bo wyrzuciwszy którąkolwiek z nich, stosunekby zniknął.