się w rachunku znayduie. Równie potrzebne są przy krzywych liniiach, co iuż w następuiącym rozdziale się pokaże. Logarytmy te nazywaią się inaczéy hyperboliczne, dlatego że kwadrowanie hyperboli równoramiennéy na nich się zasadza, o czém właśnie w przysłym rozdziale.

3) Logarytmy Neppera, o których iednak ilości zasadowéy niemamy zupełnéy pewności. Kaestner bierze za nią liczbę: 9999990000005. *Astron. T.* 2. *p.* 68. Są ieszcze oprócz tego logarytmy paraboliczne, podaiące się z hyperbolicznych, których atoli użytek do tąd nieznany. W ogólności systematów logarytmów moglibyśmy tworzyć tyle, ileby nam się podobało, co iest widocznem z tego co się o nich powiedziało, atoli rzeczywiście potrzebne są tylko pospolite i naturalne.

ROZDZIAŁ VI.

Zastósowanie rachunku różniczkowego i całkowego do odwrotnéy teoryi stycznych, do prostowania liniy krzywych i do wynaydowania ich powierzchni.

§. 118. **Definicya.** Sposób wynaydowania liniy krzywych należących do danych pewnych własności tychże, to iest do wartości podstycznych, stycznych, podnormalnych i normalnych, nazywa się odwrotną teoryą stycznych; gdyż tu się odwrotnie postępuie, względem tego, iak się postępowało szukaiąc do krzywych liniy rzeczonych prostych.

§. 119. **Zagadnienie.** Jak się w ogólności linija krzywa to iest iéy równanie, z danéy wartości podstycznéy; lub stycznéy; lub podnormalnéy; lub nakoniec normalnéy, wynayduie?

Rozwiązanie. Maiąc którąykolwiek z wymienionych liniy, wartość, do pewnéy krzywéy należącą, daną; wtedy bierze się ogólna wartość teyże saméy linii prostéy, przy współustawionych prostopadłych, ieżeli dana wartość iest przy takich; lub przy współustawionych pochyłych, ieżeli dana wartość iest przy pochyłych, (§. 71. §. 81.) po czém, utworzonemu równaniu różniczkowemu, daie się kształt przyzwoity i toż się całkuie, a wynaleziona całkowa, iako prawdziwa funkcya utworzonego równania różniczkowego, będzie żądaném rownaniem linii krzywéy. Kilka przykładów się przytacza dla wyiaśnienia rzeczy.

1) Mieymy daną podstyczną: $\frac{y^2}{m+x}$, a znaydziemy liniią krzywą do którey dana podstyczna należy tym sposobem: biorę ogólną wartość podstycznéy, przy współustawionych prostopadłych; gdyż dana wartość, iako niemaiąca ilości trygonometrycznych iest należącą do takich współustawionych. Ta wartość iest $S=\frac{ydx}{dy}$, (§. 71), a tak: $\frac{y.dx}{dy}=\frac{y^2}{m+x}$, stąd: $dx=\frac{y.dy}{m+x}$, a przeto: $mdx+xdx=ydy$. Całkując zaś równanie, będzie: $mx+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}y^2+Const.$ Dla wynalezienia ilości $Const.$, bierzemy współustawione od wierzchołka i $x=0$, a tak także $y=0$, a zatém $Const.=0$, stąd rownanie $mx+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}y^2$ iest zupełną całkową; mnożąc ie zaś przez 2, wypada:

$y^2 = 2mx + x^2$, czyli biorąc $2m = a$, $y^2 = ax + x^2$, co iest równaniem hyperboli równoramienney od wierzchołka (znane z Jeometryi analityczney). A tak liniia do daney podstyczney należąca, iest hyperbola równoramienna.

2) Maiąc daną wartość normalney taką: $\frac{1}{2}\sqrt{(m^2+4y^2)}$, znayduiemy do niey liniią krzywą tak iak wyżey. Podług §. 71. będzie: $y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+4y^2)}$; a zatém wynosząc równanie do kwadratu: $\frac{y^2 dy^2}{dx^2} + y^2 = \frac{m^2}{4} + y^2$, czyli: $\frac{y^2 dy^2}{dx^2} = \frac{m^2}{4}$; wyciągaiąc zaś pierwiastek kwadratowy: $\frac{y dy}{dx} = \frac{m}{2}$, a tém samém: $ydy = \frac{m}{2} dx$. Całkuiąc daléy, ostatnie równanie, wypada: $\frac{1}{2} y^2 = \frac{m}{2}. x + Const.$ Biorąc tutay $x = 0$, będzie także dla powyższéy przyczyny, $y = 0$, a zatém także $Const. = 0$, stąd równanie $\frac{1}{2} y^2 = \frac{m}{2} x$ iest zupełną całkową, które, mnożąc ie przez 2, i biorąc $m = p$, daie: $y^2 = px$, równanie paraboli. A tak linia krzywa do daney normalney należąca, iest parabola, co także §. 74 sprawdza.

§. 120. Zagadnienie. Jak znaleść różniczkę łuku, iakieykolwiek krzywey linii?

Rozwiązanie. Ponieważ funkcya krzywey linii może mieć współustawione lub prostopadłe do siebie lub też pochyłe; przeto żądana różniczka dwoiaka bydź może.

1) Niech AB (F. 2.) oznacza łuk iakiéykolwiek krzywéy linii który nazywam R, iego współustawione do siebie prostopadłe są: $AD = x$, i $DB = y$. Pociągniymy równoległą od DB, przez iakikolwiek punkt C krzywéy, która niech będzie CE, iako też poprowadźmy równoległą od AE, przez punkt B, która niech się nazywa BH. A tak $BH = DE = \Delta x$, $HC = \Delta y$, $BdC = \Delta R$. Nadto: ponieważ wielkość łuku R zawisła i w ten sposob od wielkości współustawionych x i y, iak wielkość łuku $R + \Delta R$ od $x + \Delta x$ i $y + \Delta y$ (co iest widoczném przy każdéy linii) przeto R iest funkcyą x i y i taką samą (nieznaną w prawdzie), iaką $R + \Delta R$ iest zmiennych $x + \Delta x$ i $y + \Delta y$. Daléy pociągnąwszy cięciwę BC, będzie w tróykącie prostokątnym: $BC^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, a tém samém: $BC = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, przybliżaiąc zaś ciągle EC ku y, wtedy Δx, Δy, ΔR i cięciwa BC ciągle się zmnieyszaią, iako też wszystkie punkta cięciwy BC ciągle się ku punktom łuku ΔR przybliżaią. Biorąc na ostatek EC za nieskończenie bliskie od y, w którym razie Δx, Δy, ΔR i cięciwa BC nieskończenie się małemi staią, wtedy między łukiem ΔR a cięciwą BC żadnéy linii wystawić sobie niemożna, któraby względem nich różną była i położenie nieodmienne miała, dlatego że punkta łuku i cięciwy są od siebie nieskończenie blıskie, a więc wtedy $\Delta R = BC$ się staie, iako swoiéy granicy. A tak, w takim razie $\Delta R = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, czyli: $dR = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, (§. 34.) i to właśnie iest żądną różniczką przy współustawionych do siebie prostopadłych.

2) Niech do łuku $AB = q$. (F. 4.), współustawione $AD = x$ i $DB = y$ będą pochyłe, prostopadła z punktu B do AE niech się nazywa $BM = y'$ i odcinek $AM = x'$. A tak podług przeszłego szczegółu iest:

$dR = \sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}$ Lecz z tróykąta prostokątnego DBM, którego kąt ostry $BDM = q$, wypada: $y' = y.\ Ws.q$, $DM = y.\ Dos.q$. (z zasad trygonometryi prostéy), a tém samém: $x' = x + y.\ Dos.q.$, a przeto $dy' = dy.\ Wsq.$, $dx' = dx + dy.\ Dosq.$; a więc $dy'^2 = dy^2.\ Wsq.^2$, $dx'^2 = dx^2 + 2dx.\ dy.\ Dosq. + dy^2.\ Dos.q^2.$ Kładąc tedy w różniczkę. $dR = \sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}$, zamiast dx'^2 i dy'^2, wartości wynalezione, będzie:

$$dR = \sqrt{(dx^2 + 2dx.dy.Dosq + dy^2.\ Dosq^2 + dy^2 Wsq^2)} =$$

$$= \sqrt{\left(dx^2 + 2dx.dy.Dosq + dy^2(Dosq^2 + Wsq^2)\right)}.$$

A że z trygonometryi wiadomém iest, iż: $Dosq.^2 + Wsq^2 = 1$, przeto wypada:

$$dR = \sqrt{(dx^2 + 2dxdy.Dosq + dy^2)},$$

co iest żądaną różniczką iakiegokolwiek łuku przy pochyłych współustawionych.

§. 121. Wniosek. Chcąc iakąkolwiek krzywą linią prostować, to iest wynaleść iey wielkość przez rachunek, potrzeba maiąc daną funkcyą teyże linii, tę funkcyą różniczkować i równaniu różniczkowemu taki kształt dać, aby na iedney stronie sama różniczka łuku została; dawszy potem drugiey stronie formę potrzebną do całkowania, równanie się całkuie, a wypadła całkowa drugiéy strony, iako prawdziwa funkcya różniczki łuku, daie łuk żądany.

§. 122. Zagadnienie. Jak sprostować, to iest przez rachunek wynaleść łuk koła, do danego odcinka należący, przy danym promieniu?

Rozwiązanie. Niech promień koła nazywa się a; odcinek zaś od środka x; a tak równanie na koło od środka; iest takie: $y^2 = a^2 - x^2$. Różniczkuiąc to równanie, będzie: $2ydy = -2xdx$, czyli: $ydy = -xdx$;

a więc: $dy = -\frac{xdx}{y}$. Daley ostatniemu równaniu

daie się taka forma; aby na iednéy stronie różniczka łuku wypadła, dlaczego wynosi się nayprzód do kwa-

dratu, a tak: $dy^2 = \frac{x^2 . dx^2}{y^2}$, czyli, biorąc na y^2

wartość: $dy^2 = \frac{x^2 . dx^2}{a^2 - x^2}$; dodaiąc zaś na obydwóch

stronach dx^2, będzie:

$$dy^2 + dx^2 = \frac{x^2 . dx^2}{a^2 - x^2} + dx^2 = \frac{x^2 . dx^2 + a^2 . dx^2 - x^2 dx^2}{a^2 - x^2} =$$
$$= \frac{a^2 . dx^2}{a^2 - x^2};$$

a tém samém:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a . dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{a . dx}{(a - x^2)^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= a . dx (a^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Maiąc tedy iuż: $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = adx (a^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}$ to iest takie równanie, w którém na iednéy stronie iest różniczka łuku, z którego się podaie: $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int . adx . (a^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}$ cała rzecz tylko idzie o rzeczywiste wynalezienie całkowéy prawéy strony, która aby była wynaleziona, wprzódy wyraz: $(a^2 - x^2)^{\frac{-1}{2}}$; zamienia się na szereg nieskończony, podług binomium (§. 70.) Szeregu tego forma iest ta:

$$(a^2-x^2)^{\frac{-1}{2}}=a^{-1}+\frac{1}{2}a^{-3}x^2+\frac{3.a^{-5}x^4}{2.4}+\frac{3.5.a^{-7}x^6}{2.4.6}+$$

$$+\frac{3.5.7}{2.4.6.8}a^{-9}x^8+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10}a^{-11}x^{10}+$$

$$=\frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}a^{-13}x^{12}\ldots\ldots$$

Kładąc teraz w powyższe równanie: $V(dx^2+dy^2)= =adx(a^2-x^2)^{\frac{-1}{2}}$, w mieysce wyrazu $(a^2-x^2)^{\frac{-1}{2}}$, wynaleziony szereg, wypada:

$$V(dx^2+dy^2)=dx+\frac{1}{2}.a^{-2}x^2dx+\frac{3.a^{-4}x^4dx}{2.4}+$$

$$+\frac{3.5a^{-6}x^6dx}{2.4.6}+\frac{3.5.7.a^{-8}x^8dx}{2.4.6.8.}+$$

$$+\frac{3.5.7.9.a^{-10}x^{10}dx}{2.4.6.8.10}+\frac{3.5.7.9.11.a^{-12}x^{12}}{2.4.6.8.10.12}$$

i t. d.

Całkuiąc nakoniec, będzie:

$$\int V.(dx^2+dy^2)=x+\frac{a^{-2}x^3}{2.3}+\frac{3.a^{-4}x^5}{2.4.5}+$$

$$+\frac{3.5.a^{-6}x^7}{2.4.6.7}+\frac{3.5.7.a^{-8}x^9}{2.4.6.8.9}+\frac{3.5.7.9.a^{-10}x^{11}}{2.4.6.8.10.11}+$$

$$+\frac{3.5.7.9.11.a^{-12}x^{13}}{2.4.6.8.10.12.13}\text{ i t. d.,}$$

która to całkowa iest zupełną; albowiem wziąwszy $x=0$, łuk także $=0$ będzie, a tém samém *Const.*$=0$. A tak wyraziliśmy iuż łuk przez odcinek iego ze środka, który się teraz da obrochować biorąc szczególne wartości na x i a.

§. 123. Wniosek. Biorąc $a=1$, $x=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$; łuk zaś koła do rzeczonych ilości należący nazywaiąc R, natenczas podług przeszłego §fu będzie:

$$R=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2.4.5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{3.5}{2.4.6.7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7+$$
$$+\frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+$$
$$+\frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12.13}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\ldots\ldots\ldots$$

Dodaiąc zaś wszystkie ułamki do siebie, zamienione wprzódy na dziesiątne, wypada:

$$\frac{1}{2}=0{,}500000000\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=0{,}020833333\ldots\ldots$$
$$\frac{3}{40}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=0{,}002343750\ldots\ldots$$
$$\frac{15}{336}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=0{,}000348772\ldots\ldots$$
$$\frac{105}{3456}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=0{,}000058334\ldots\ldots$$
$$\frac{945}{42240}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=0{,}000010966\ldots\ldots$$
$$\frac{10395}{599040}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13}=0{,}000002118\ldots\ldots$$
$$\overline{0{,}523597273\ldots\ldots}$$

To iest:

$$R=0{,}523597273.$$

A że do odcinka ze środka równego połowie promienia należący łuk, zawiera stopni 30 (gdyż taki odcinek iest wstawą kąta należącego do łuku, i że iest połową promienia, stąd kąt środkowy i iego łuk, to iest wzięty łuk zawieraią po 30 stopni) przeto znaleziony łuk iest dwunastą częścią całego okręgu, biorąc za promień 1. Mnożąc więc znaleziony łuk przez 12, co czyni: 6,283167276, mamy cały obwód koła do promienia 1; a zatém stósunek promienia do obwodu, w iedném, a tém samém w każdem kole (znane z Jeometryi elementarnéy) iest następuiący:

$$1 : 6,283167276 —.$$

Stósunek tu wynaleziony, iako wypadły z szeregu nieskończonego, iest tylko przybliżony do prawdziwego. Atoli uważaiąc go tak iak tu się wynalazł, nawet biorąc w zwyczaynieyszych robotach tylko pierwsze cztery mieysca dziesiątne, będzie różnica wynalezionego wypadku względem prawdziwego, tylko bardzo małym ułamkiem. Dla astronomicznych robót, gdzie dokładność daleko większa powinna bydź zachowana, można go wyłożonym sposobem tak daleko posunąć, iak się komu podoba, lub iak potrzeba. Jest nawet teraz do 150 mieysc dziesiątnych iuż wyrachowanym.

§. 124. Wniosek. Ponieważ różniczka łuku zawsze iest: $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, czyli równanie przy prostopadłych współustawionych weźmiemy od środka, lub od wierzchołka lub też od innego iakiego punktu; gdyż przeciwne znaki ilości dx i dy w kwadracie, żadnéy różnicy w znakach nie robią; przeto maiąc koło (F. 8.) w niem średnicę AB; ze środka E, prostopadłą EF do BA; ustawioną od środka $CD = y$ i odcinek $CE = x$, będzie taż sama różniczka zupełnie do łuku FD, co i do łuku AD, z tą tylko różnicą że łuk FD rosnący ma x rosnące a y maleiące; łuk zaś DA maleiący ma y maleiące a x rosnące. Biorąc daléy równanie na koło od środka znane: $y^2 = a^2 - x^2$, w którém $y = CD$, $x = CE$, $a = EF$, widzimy że do tego równania dwa łuki należą, to iest: do rosnącego x należy łuk FD rosnący; do maleiącego zaś y łuk DA maleiący; a przeto różniczkuiąc ie i na iednéy stronie robiąc, różniczkę łuku, będzie mogła mieć całkowa drugiéy strony, dwoiaką wartość to iest lub da wartość łuku FD, lub też łuku AD. Jeżeli druga strona wyrażona przez szereg nieskończony, będzie szła podług potęg ilości x, wtedy całkowa téy strony będzie ta, która się powiększa powiększaiąc x, io iest łuk DF, tak iakeśmy uważali w §fie przeszłym. Jeżeli przeciwnie szereg nieskończony będzie wyrażony przez same potęgi ilości y, wtedy całkowa iego będzie ta która od y zawisła, czyli która się pomnieysza lub powiększa kiedy się y pomnieysza lub powiększa, to iest łuk AD. Chcąc tedy rzeczony szereg mieć wyrażony przez same potęgi ilości y, aby wynaleść wartość łuku AD, postępuie się w ten sposób: z równania: $y^2 = a^2 - x^2$; wypada $2ydy = -2xdx$, czyli: $ydy = -xdx$, a przeto: $-dx = \frac{ydy}{x}$; stąd: $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{x^2}$. Biorąc zaś wartość za x^2, z równania koła, będzie: $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2-y^2}$. Dodaiąc daléy do obydwóch stron dy^2, dla utworzenia różniczki łuku, wypada:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2-y^2} + dy^2,\ \text{czyli:}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2 + a^2dy^2 - y^2dy^2}{a^2-y^2} = \frac{a^2dy^2}{a^2-y^2},$$

a więc:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{a.dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}},\text{ albo:}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=a.dy(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Tworząc nakoniec z wyrazu $(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ szereg nieskończony podług binonium, będzie:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dy+\frac{1}{2}a^{-2}y^2dy+\frac{3.a^{-4}y^4dy}{2.4}+$$
$$+\frac{3.5a^{-6}y^6dy}{2.4.6}+\frac{3.5.7a^{-8}y^8dy}{2.4.6.8}+$$
$$+\frac{3.5.7.9.a^{-10}y^{10}dy}{2.4.6.8.10}+\frac{3.5.7.9.11a^{-12}y^{12}dy}{2.4.6.8.10.12}\ldots\ldots$$

Całkuiąc zaś szereg, będzie:

$$\text{Łuk } DA=y+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{-2}y^3}{2.3}+\frac{3a^{-4}y^5}{2.4.5}+\frac{3.5a^{-6}y^7}{2.4.6.7}+$$
$$+\frac{3.5.7a^{-8}y^9}{2.4.6.8.9}+\frac{3.5.7.9.a^{-10}y^{11}}{2.4.6.8.10.11}\ldots\ldots$$

która całkowa iuż iest zupełna; gdyż biorąc $y=0$, także będzie *łuk*$=0$, a zatém i *Const.*$=0$. A tak wypadł nam ten sam szereg, iak w przeszłym §fie, wyiąwszy że tutay wszędzie y stoi, gdzie tam x stało. Ten wypadek sprawdza także przynaymniéy w ogólności, że biorąc $x=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$, w którym razie y będzie wstawą do kąta maiącego 60°, a tém samém $y>\frac{1}{2}a$ czyli $y<x$, iż łuk znaleziony przez ostatni szereg, musi bydź większy od łuku z przeszłego §fu, czyli że tym łukiem nie DF lecz AD iest. Co do równania od wierzchołka samo przez się rozumie się,

iż czyli łuk wyrażony będzie przez x, lub przez y, zawsze taż sama wartość czyli ten sam łuk wypada.

§. 125. Wniosek. Chcąc łuk koła obrachować za pomocą różniczki $\sqrt{(dx^2 + 2\,dx\,dy.Dos.\,q + dy^2)}$, należącey do współustawionych do siebie nieprostopadłych, bierze się równanie koła z pochyłemi współustawionemi, toż się różniczkuie, daie mu się taka forma aby na iedney stronie wypadła różniczka łuku, a przygotowawszy drugą stronę do całkowania, i znalazłszy rzeczywiście iey całkową, całkowa ta daie łuk żądany.

§. 126. Zagadnienie. Jak obrachować łuk paraboli do danych współustawionych do siebie prostopadłych należący?

Rozwiązanie. Równanie paraboli od wierzchołka przy prostopadłych współustawionych iest, $y^2 = px$, stąd: $2ydy = pdx$. Chcąc tedy mieć łuk obrachowany, n. p. przez samą funkcyą y, robi się daley tak: z równania ostatniego wypada:

$$dx = \frac{2ydy}{p}, \text{ a następnie:}$$

$$dx^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{p^2}, \text{ przeto:}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{4y^2\,dy^2 + p^2\,dy^2}{p^2},$$

czyli:

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{4y^2}{p^2} + 1\right) dy^2, \text{ a zatem:}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy.\sqrt{\left(\frac{4y^2}{p^2} + 1\right)}.$$

Daley wyraz $\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}$ zamienia się na szereg nieskończony podług binomium, co daie:

$$\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)} = 1 + \frac{2y^2}{p^2} - \frac{2y^4}{p^4} + \frac{4y^6}{p^6} - $$
$$- \frac{10y^8}{p^8} + \frac{28y^{10}}{p^{10}} \ldots\ldots$$

a przeto:

$$\sqrt{(dx+dy)} = dy.\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)} = dy +$$
$$+ \frac{2y^2}{p^2}.dy - \frac{2y^4}{p^4}.dy + \frac{4y^6}{p^6}.dy -$$
$$- \frac{10y^8}{p^8}.dy + \frac{28y^{10}}{p^{10}}.dy \ldots\ldots$$

Całkuiąc zaś szereg:

$$\int.\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int.dy.\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)} = y +$$
$$+ \frac{2.y^3}{3.p^2} - \frac{2.y^5}{5.p^4} + \frac{4.y^7}{7.p^6} - \frac{10.y^9}{9.p^8} + \frac{28.y^{11}}{11.p^{10}} \ldots\ldots$$

która to całkowa iuż iest zupełną, bo biorąc $y = o$, także łuk $= o$, a więc i Const. $= o$. Biorąc tedy w mieysce y, iego szczególną wartość, da się zawsze łuk do téy wartości szczególnéy na y wziętéy, lub z równania wynalezioney, za pomocą wynalezionego szeregu, obrachować.

§. 127. Wniosek. Chcąc mieć powyższy szereg, przez funkcyą x wyrażony, kładą się wszędzie w tymże szeregu, zamiast y i potęg y, ich wartości, które się z równania paraboli podaią. I tak $y^2 = px$, stąd $y = \sqrt{px}$ i t. d. A tak wypadnie taki szereg:

$$\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{px} + \frac{2px}{3p^2}\sqrt{px} - \frac{2.p^2x^2}{5.p^4}\sqrt{px} + \frac{4.p^3x^3}{7.p^6}\sqrt{px} - \frac{10.p^4x^4}{9.p^8}\sqrt{px} \ldots\ldots$$

$$= \sqrt{px}\left(1 + \frac{2.px}{3.p^2} - \frac{2.p^2x^2}{5.p^4} + \frac{4.p^3x^3}{7.p^6} - \frac{10.p^4x^4}{9.p^8} \ldots\right).$$

$$= \sqrt{px}\left(1 + \frac{2.x}{3.p} - \frac{2.x^2}{5.p^2} + \frac{4.x^3}{7.p^3} - \frac{10.x^4}{9.p^4} \ldots\right).$$

§. 128. **Wniosek.** Chcąc mieć łuk paraboli obrachowany za pomocą współustawionych pochyłych, postępuie się tutay i przy innych wszystkich krzywych liniiach, tak iak się w ogólności w §. 125 powiedziało. Pospolicie atoli wszelakie krzywe liniie obrachowywuią się biorąc współustawione prostopadłe; albowiem rachunek wtedy iest daleko prościeyszym, aniżeli kiedy współustawione są pochyłe. Dla tey tedy przyczyny nadal, przy prostowaniu liniy krzywych, niebędzie się czynić wzmianka o współustawionych pochyłych, co tylko właściwie do obszernego dzieła należy.

§. 129. **Zagadnienie.** Jak obrachować łuk Elipsy, należący do prostopadłych do siebie współustawionych?

Rozwiązanie. Weźmy równanie na elipsę od środka, nazywaiąc oś większą a, odcinek x, a ustawioną, iak zwyczaynie, y. Rownanie to (znane z Jeometryi analityczney), iest takie:

$$y^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{px^2}{a} = \frac{\frac{1}{4}a^2p - px^2}{a} =$$

$$= \frac{p}{a}.\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right); \text{ stąd:}$$

$$2ydy = -\frac{2pxdx}{a}; \text{ czyli:}$$

$$ydy = -\frac{pxdx}{a}; \text{ a więc: } dy = -\frac{pxdx}{ay}.$$

Wynosząc zaś ostatnie równanie do kwadratu i dodaiąc do obydwóch stron dx^2, aby w nie różniczkę łuku wprowadzić, wypada:

$$dy^2 + dx^2 = \frac{p^2.x^2.dx^2}{a^2.y^2} + dx^2;$$

czyli, biorąc wartość w mieysce y^2:

$$dy^2 + dx^2 = \frac{p^2.x^2.dx^2}{a^2.\frac{p}{a}.\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)} + dx^2 = \frac{p^2.x^2.dx^2}{ap.\left(\frac{1}{4}a^2 - x^2\right)} + dx^2;$$

albo:

$$dy^2 + dx^2 = \frac{px^2.dx^2}{\frac{1}{4}a^3 - ax^2} + dx^2 = dx^2\left(\frac{px^2}{\frac{1}{4}a^3 - ax^2} + 1\right),$$

a przeto:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx.\sqrt{\left(\frac{px^2}{\frac{1}{4}a^3 - ax^2} + 1\right)}.$$

Dla całkowania ostatniego równania, wyraz:

$$\sqrt{\left(\frac{px^2}{\frac{1}{4}a^3 - ax^2} + 1\right)},$$ zamienia się na szereg nieskończony podług binomium. Szereg atoli tu wypadaiący potrzebuie pewnych sposobów, aby był całkowany, które się tu wyłożyć niedadzą, a tak obrachunek łuku Elipsy, tylko się w ogólności pokazuie. *)

§. 130. Zagadnienie. Jak obrachować łuk hyperboli, maiąc dane współustawione, do siebie prostopadłe?

Rozwiązanie. Bierzemy równanie hyperboli od wierzchołka, które iest:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}, \text{ stąd:}$$

$$2ydy = \left(p + \frac{2px}{a}\right)dx; \text{ przeto:}$$

$$dy = \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)}{2y}dx; \text{ a tém samém:}$$

$$dy^2 = \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4y^2}dx^2 = \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)}dx^2$$

---

*) Uwaga. Obrachunek łuków Elipsy i Hyperboli podług tego co dotąd iest znaném w Matematyce, odbywa się pospolicie przez przybliżenie, które od matematyczney ścisłości iest dalekie. Pochodzi to stąd, iż szeregi którychby tu można używać, częścią się wolno bardzo schodzą, częścią zaś są zbyt trudne do całkowania.

Dodaiąc zaś do obydwóch stron ostatniego równania dx^2, dla wprowadzenia różniczki, będzie:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px}{a}\right)} \cdot dx^2 + dx^2,$$

$$= \left\{ \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right\} . dx^2;$$

przeto:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx . \sqrt{\left\{ \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right\}};$$

a zatém:

$$\int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int . dx . \sqrt{\left\{ \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right\}}.$$

§. 131. Zagadnienie. Jak obrachować Cyssoidę przy danych współustawionych do siebie prostopadłych.

Rozwiązanie. Weźmy równanie Cyssoidy od wierzchołka, które iest: $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (znane z Jeometryi analityczney), a tak będzie:

$$2y\,dy = \frac{(2a - x)\,3x^2\,dx + x^3\,dx}{(2a - x)^2} \quad (§. 52),$$