ROZDZIAŁ VII.

Zastósowanie rachunku różniczkowego i całkowego, do obrachowywania powierzchni krzywych, brył, które liniie krzywe około swoich osiów obracane tworzą, i do wynaydywania obiętości czyli bryłowatości takichże samych brył.

§. 157. Zagadnienie. Jak znaleść różniczkę powierzchni krzywéy, iakieykolwiek bryły, którą liniia krzywa około swoiéy osi nieruchoméy obracana, tworzy?

Rozwiązanie. Niech AB (F. 2) wystawia nam łuk iakiéykolwiek krzywéy linii, któréy osią iest AL, a tak obracaiąc łuk AB około nieruchoméy osi AL, naokoło, utworzy się pewna bryła, któréy powierzchnią łuk AB zakreśli, i tey to powierzchni, bez względu do iakiéy linii łuk AB należy, mamy znaleść różniczkę. A że i tutay współustawione mogą bydź lub prostopadłe lub pochyłe względem siebie; przeto rzeczona różniczka dwoiako się wynayduie.

1) Niech będzie ten sam łuk AB, i iego współustawione: $AD = x$, $DB = y$, do siebie prostopadłe. Powiększmy łuk AB o nieoznaczony przyrostek: BdC, natenczas x powiększy się o $DE = BH = \Delta x$, a y, o $HC = \Delta y$. Poprowadźmy daléy przez punkta C, B, liniią prostą, która przedłużona, niech się z osią przedłużoną, w punkcie G przetnie. A tak obracaiąc całą figurę około nieruchoméy linii GE, tróykąty prostokątne GEC, GDB zakreślą dwa ostrokręgi proste, z których pierwszego osią iest liniia GE, a promieniem podstawnim EC; drugiego zaś osią liniia GD, a promieniem podstawnim DB. Nadto trapez

DBCE zakreśli ostrokrąg ścięty prosty, którego osią iest liniia *DE*. A że powierzchnia ostrokręga prostego wynayduie się, mnożąc obwód koła podstawniego przez połowę boku; przeto, nazywaiąc liczbę stósunkową średnicy do obwodu iak pospolicie się nazywa: π, będzie powierzchnia krzywa ostrokręga prostego $GEC = \pi . 2EC . \frac{GC}{2} = \pi . EC . GC$; powierzchnia zaś krzywa ostrokręga prostego $GDB = \pi\ 2DB . \frac{BG}{2} = \pi . DB . GB$; a zatem powierzchnia krzywa ostrokręga ściętego prostego $DBCE = \pi . EC . GC - \pi . DB . GB = \pi (EC . GC - DB . GB)$.

A że:

$EC = EH + HC = y + \Delta y$,

$GC = GB + BC$, z troykątów zaś podobnych GDB, BHC, taka proporcya ma mieysce: $GB : BD = BC : CH$, czyli: $GB : y = BC : \Delta y$ i z tróykąta prostokątnego BHC, $BC = \sqrt{(BH^2 + HC^2)} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, dlaczego: $GB : y = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} : \Delta y$, a tém samém $GB = y . \frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y}$, przeto: $GC = GB + BC =$
$= y . \frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y} + \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, daley: $DB = y$; a zatem kładąc w powierzchni ostrokręga ściętego prostego, wyżéy stoiącéy, zamiast tam będących wyrazów, ich wynalezione wartości, będzie taż powierzchnia, którą dla krótkości U nazywam, takie mieć równanie:

$$U = \pi \left\{ (y + \Delta y) . \left(y . \frac{\sqrt{(\Delta x^2 + y^2)}}{\Delta y} + \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \right) - \right.$$
$$\left. - y^2 \frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}{\Delta y} \right\}.$$

$$=\pi.\Big\{y^2.\surd\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\Delta y}+y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)+$$

$$+y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)+\Delta y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)-$$

$$-y^2\surd\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\Delta y}\Big\},$$

$$=\pi.\Big\{2y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)+\Delta y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)\Big\},$$

$$=2\pi.y\surd(\Delta x^2.\Delta y^2)+\pi\,\Delta y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2).$$

Biorąc zaś Δx, a tém samém Δy, za ciągle się zmnieyszaiące, wtedy także wyraz drugi ostatniego równania zmnieysza się i prędzey od pierwszego. Wziąwszy nakoniec Δx za nieskończenie małe, w którym razie Δy, także nieskończenie małém będzie, wtedy wyraz: $\pi.\Delta y.\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)=o$ się staie; albowiem iest nieskończenie małą ilością drugiego rzędu; wyraz zaś $2\pi\surd(\Delta x^2+\Delta y^2)$ iest nieskończenie małym pierwszego rzędu. (§. 27, §. 29). A tak zostaie:

$U=2\pi.y\surd(dx^2+dy^2)$, co iest powierzchnią którą nieskończenie mały łuk BC zakreślił. Nazywaiąc więc powierzchnią, którą łuk cały AB zakreślił, W; wypada:

$dW=2\pi.y\surd(dx^2+dy^2)$, co iest szukaną różniczką każdey powierzchni krzywéy, przy prostopadłych współustawionych. (§. 34).

2) Mieymy łuk AB (F. 4.), iego współustawione $AD=x$ i $DB=y$ pochyłe. Spuśćmy z punktu B prostopadłą na oś, nazywaiąc ią $BM=y'$; liniia zaś $AM=x'$ niech będzie. A tak nazywaiąc powierzchnią krzywą, którą łuk AB około nieruchoméy osi obracany, zakreśla, i tutay W, będzie:

$dW = 2\pi y.\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}$. A że łuk AB równie przy prostopadłych, iak przy pochyłych współustawionych, wyżey wymienionym sposobem, tęż samą powierzchnią krzywą zakreśla, któréy iest w obydwóch razach tażsama różniczka, to iest powierzchnia krzywa zakreślona nieskończenie małym łukiem BC; przeto powyższa różniczka należy także do powierzchni W przy pochyłych współustawionych, tylko potrzeba w téy różniczce wyrazy współustawionych prostopadłych, przez wyrazy współustawionych pochyłych, oznaczyć. I tak nazywaiąc kąt BDE q, podaie się z tróykąta prostokątnego DBM, co następuie:

$$y' = y.\mathrm{Ws}.q,$$

$$DM = y.\mathrm{Dos}.q, \text{ stąd:}$$

$$x' = x + y.\mathrm{Dos}.q. \text{ Daléy będzie:}$$

$$dy' = dy.\mathrm{Ws}.q$$

$$dx' = dx + dy.\mathrm{Dos}q; \text{ przeto.}$$

$$dy'^2 = dy^2\ \mathrm{Ws}.q^2,$$

$$dx'^2 = dx^2 + 2.dx.dy.\mathrm{Dos}.q + dy^2\ \mathrm{Dos}.q^2.$$

Kładąc tedy w różniczce: $2\pi.y'.\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}$, zamiast niepotrzebnych wyrazów, ich wartości wynalezione, wypada:

$$dW = 2\pi.y.\mathrm{Ws}.q.\sqrt{(dx^2 + 2dx.dy.\mathrm{Dos}q + dy^2\ \mathrm{Dos}q^2 + dy^2\ \mathrm{Ws}q^2)}$$

$$= 2\pi.y.\mathrm{Ws}.q.\sqrt{\left\{dx^2 + 2dx.dy.\mathrm{Dos}q + dy^2(\mathrm{Ws}q^2 + \mathrm{Dos}q^2)\right\}}.$$

Nakoniec; $Wsq^2 + Dosq^2 = 1$, podług zasad trygonometryi, biorąc 1 za promień, a zatém:

$$dW = 2\pi . y . Wsq . \sqrt{(dx^2 + 2dx . dy . Dosq + + dy^2)},$$

który wyraz iest szukaną różniczka powierzchni krzywéy, zakreślonéy iakimkolwiek łukiem, sposobem wyżéy powiedzianym, przy współustawionych pochyłych.

§. 158. Wniosek. Chcąc tedy znaleść powierzchnią krzywą iakiéykolwiek bryły, utworzonéy przez obracanie linii krzywéy około swoiéy osi nieruchoméy, bierze się równanie linii krzywéy, która bryłę, a tém samém powierzchnią krzywą zakreśliła, i ieżeli równanie iest do współustawionych do siebie prostopadłych, różniczkuie się i zmienia potrzebnie aby się w niem rożniczka powierzchni krzywéy z prostopadłemi współustawionemi na iednéy stronie utworzyła, ieżeli zaś równanie ma współustawione pochyłe, różniczkuiąc ie, odmienia się potém tak, aby na iednéy stronie różniczka powierzchni krzywéy, do pochyłych współustawionych, wypadła. W obydwóch potém razach, nadaie się równaniu taki kształt, aby się dało całkować, a wynaleziona całkowa, iako prawdziwa funkcya różniczki powierzchni krzywéy, daie szukaną powierzchnią krzywą. Chcąc daléy szukaną powierzchnią mieć wyrażoną przez samo x, wtedy wyraża się y i dy przez x i dx w równaniu różniczkowém; iako też chcąc całkową mieć wyrażoną przez samo y, wtedy x i dx wyraża się przez y i dy. —

§. 159. Wniosek. Mieymy tróykąt prostokątny ADB (Fig. 13.) i obróćmy go około iednego z boków zawieraiących kąt prosty, n. p. około boku DB; a tak zakreśli się ostrokrąg prosty, który tu figura wystawia. Oś tego ostrokręga wystawia nam liniia DB, a promień podstawnego koła, liniia AD. Poprowadźmy daléy przez iakikolwiek punkt E, boku AB, równoległą do *AD*, nazywaiąc ią *EF* i weźmy $AD = a$, $DB = \beta$, $BF = x$ i $EF = y$. A tak z tróykątów prostokątnych *EBF* i *ABD* podług twierdzenia Pytagoresa, podaią się takie równania:

$$EB^2 = EF^2 + FB^2 = y^2 + x^2,$$
$$AB^2 = AD^2 + DB^2 = a^2 + \beta^2, \text{ stąd:}$$
$$EB = \sqrt{(y^2 + x^2)},$$
$$AB = \sqrt{(a^2 + \beta^2)}.$$

Z podobieństwa zaś tróykątów *EBF* i *ABD*, taka proporcya wypada:

$$BF : EB = BD : AB, \text{ czyli:}$$
$$x : \sqrt{(x^2 + y^2)} = \beta : \sqrt{(a^2 + \beta^2)}; \text{ stąd:}$$
$$x . \sqrt{(a^2 + \beta^2)} = \beta . \sqrt{(x^2 + y^2)}; \text{ a tém samém:}$$
$$x^2 (a^2 + \beta^2) = \beta^2 (x^2 + y^2), \text{ albo:}$$
$$y^2 + x^2 = x^2 \frac{(a^2 + \beta^2)}{\beta^2}; \text{ przeto:}$$
$$y^2 = x^2 \frac{(a^2 + \beta^2)}{\beta^2} - x^2 = x^2 \frac{(a^2 + \beta^2) - \beta^2 x^2}{\beta^2};$$

to iest:

$$y^2 = \frac{a^2 x^2 + \beta^2 x^2 - \beta^2 x^2}{\beta^2} = \frac{a^2 x^2}{\beta^2}.$$

Wyciągaiąc zaś z ostatniego równania pierwiastek kwadratowy, wypada:

$$y = \frac{ax}{\beta};$$ stąd:

$$dy = \frac{a\,dx}{\beta};$$ przeto:

$$dy^2 = \frac{a^2\,dx^2}{\beta^2}.$$

Dodaiąc zaś do obydwóch stron dx^2, dla utworzenia na iednéy stronie różniczki powierzchni krzywéy, będzie:

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2\,dx^2}{\beta^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2\,dx^2 + \beta^2\,dx^2}{\beta^2}$$

$$= \frac{(a^2+\beta^2)\,dx^2}{\beta^2};$$ a więc:

$$\sqrt{(dy^2+dx^2)} = \frac{dx.\sqrt{(a^2+\beta^2)}}{\beta};$$ a zatém:

$$2\pi.y.\sqrt{(dy^2+dx^2)} = \frac{2\pi y.dx.\sqrt{(a^2+\beta^2)}}{\beta},$$

czyli: biorąc zamiast y, wartość wyżéy stoiącą:

$$2\pi.y.\sqrt{(dy^2+dx^2)} = \frac{2\pi.a\,x.dx}{\beta^2}.\sqrt{(a^2+\beta^2)}.$$

Całkuiąc nakoniec ostatnie równanie, wypada:

$$2\pi.y.\int.\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{2.\pi.a^2}{2\beta^2}.\sqrt{(a^2+\beta^2)} + \text{Const}$$

$$= \frac{\pi.a.x^2}{\beta^2}.\sqrt{(a^2+\beta^2)} + \text{Const}.$$

Dla znalezienia ilości *Const.*, weźmy $x = o$, dlaczego będzie także cała powierzchnia $= o$, i wynaleziona całkowa, iako maiąca x za czynnik, będzie także Zerem; a przeto i $Const. = o$. A tak wyraz:

$\frac{\pi . a x^2}{\beta^2} . \sqrt{(a^2 + \beta^2)}$, iest zupełną całkową. Biorąc w ostatnim wyrazie, to iest w całkowéy, $x = \beta$, odcinek równy osi, i nazywaiąc całą powierzchnią krzywą ostrokręgu, która wtedy do x należy, P; wtedy z powyższéy całkowéy wypada:

$$P = \frac{\pi . a \beta^2}{\beta^2} . \sqrt{(a^2 + \beta^2)},$$

$$= \pi . a . \sqrt{(a^2 + \beta^2)}$$

$$= \pi . a \sqrt{. AB^2},$$

$$= \pi . a . AB,$$

$= \pi . 2a . \frac{AB}{2}$. To iest powierzchnia krzywa ostrokręgu prostego znayduie się, mnożąc obwód koła podstawnego przez połowę boku. Zupełnie tożsamo co iest znaném z Solidometryi elementarnéy.

§. 160. Zagadnienie. Jak obrachować iakąkolwiek część powierzchni krzywéy kuli, należącą do współustawionych od wierzchołka, do siebie prostopadłych?

Rozwiązanie. Nazywaiąc promień koła wielkiego kuli a, wtedy mamy takie równanie na koło od wierzchołka przy prostopadłych współustawionych:

$y^2 = 2ax - x^2$, stąd:

$2ydy = 2adx - 2xdx$, to iest:

$$ydy = adx - xdx,$$ albo:

$$y.dy = (a-x)dx;$$ przeto:

$$dy = \frac{(a-x).dx}{y};$$

a następnie:

$$dy^2 = \frac{(a-x)^2 dx^2.}{y^2}$$

Biorąc zaś zamiast y^2, wartość iego wyżéy stoiącą, i dodaiąc do obydwóch stron dx^2, dla wprowadzenia różniczki powierzchni krzywéy, będzie:

$$dy^2 + dx^2 = \frac{(a-x)^2 dx^2}{2ax - x^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2 dx^2 - 2ax.dx^2 + x^2 dx^2 + (2ax - x^2).dx^2}{2ax - x^2}$$

$$= \frac{a^2 dx^2 - 2ax.dx^2 + x^2 dx^2 + 2ax.dx^2 - x^2 dx^2}{2ax - x^2}$$

$$= \frac{a^2 dx^2}{2ax - x^2};$$ przeto:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a.dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}},$$ czyli biorąc wartość zamiast wyrazu $\sqrt{(2ax - x^2)}$ z równania wyżéy stoiącego, wypada:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{y};$$ zatém:

$$2\pi.y.\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi.y.\frac{adx}{y}$$

$$= 2\pi.adx;$$ a więc:

$2\pi.y.\int.\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi.ax$, która to całkowa iuż iest zupełną; albowiem biorąc $x = 0$, powierzchnia całą, i całkową wynaleziona, iako mnożona przez x, są Zerami; a zatém także ilość $Const=o$.

§. 161. Wniosek. Biorąc w całkowéy przeszłego §fu, $x=2.a$, w którym razie cała powierzchnia krzywą kuli do takiego x należy, i nazywaiąc też powierzchnią P, będziemy mieli takie równanie:

$$P=2\pi a.2a=4\pi.a^2.$$

A że powierzchnia wielkiego koła kuli $=\pi a^2$; przeto powierzchnia kuli wyrównywa powierzchni czterech kół wielkich. Toż samo co i z elementarnéy Solidometryi było znaném.

§. 162. Zagadnienie. Jak z ogólnego równania na przecięcia ostrokręgowe, obrachować powierzchnią krzywą, któregokolwiek z rzeczonych przecięć?

Rozwiązanie. Równanie ogólne na każde przecięcie ostrokręga, od wierzchołka wzięte, przy prostopadłych współustawionych iest to:

$y^2=px\mp\frac{px^2}{a}$, gdzie p miarę, ilość zaś a, oś oznacza. Z równania tego wypada:

$$2y.dy=\left(p\mp\frac{2px}{a}\right)dx; \text{ stąd:}$$

$$dy=\frac{\left(p\mp\frac{2px}{a}\right).dx}{2y}; \text{ czyli, biorąc zamiast}$$

y wartość:

$$dy = \frac{\left(p \mp \frac{2px}{a}\right) dx}{2\sqrt{\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)}}; \text{ przeto:}$$

$$dy^2 = \frac{\left(p \mp \frac{2px}{a}\right)^2 \cdot dx^2}{4 \cdot \left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)}; \text{ więc:}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\left(p \mp \frac{2px}{a}\right)^2 \cdot dx^2}{4 \cdot \left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)} + dx^2$$

$$= \frac{\left(p \mp \frac{2px}{a}\right)^2 \cdot dx^2 + 4\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right) \cdot dx^2}{4\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)}$$

$$= \frac{\left\{\left(p \mp \frac{2px}{a}\right)^2 + 4 \cdot \left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)\right\} \cdot dx^2}{4 \cdot \left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)}$$

$$= \frac{\left\{\frac{(ap \mp 2px)^2}{a^2} + \frac{4}{a}(apx \mp px^2)\right\} \cdot dx^2}{\frac{4}{a} \cdot (apx \mp px^2)}$$

$$= \frac{\left\{(ap \mp 2px)^2 + 4a(apx \mp px^2)\right\} dx^2}{4a \cdot (apx \mp px^2)};$$

a tém samém:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \cdot \frac{\sqrt{\left\{(ap \mp 2px)^2 + 4a(apx \mp px^2)\right\}}}{\sqrt{\cdot \left\{4a\ (apx \mp px^2)\right\}}};$$

a zatém:

$$2\pi.y.\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$$

$$=\frac{2\pi.y.dx\sqrt{\{(ap\mp 2px)^2+4a(apx\mp px^2)\}}}{\sqrt{\{4a(apx\mp px^2)\}}}.$$

Biorąc zaś na prawéy stronie ostatniego równania, zamiast y, wartość z równania wyżéy stoiącego, będzie:

$$2\pi y.\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$$

$$=2\pi.\sqrt{\left(\frac{a^2px\mp apx^2}{a^2}\right)}.dx.\frac{\sqrt{\{(ap\mp 2px)^2+4a(apx\mp px^2)\}}}{\sqrt{\{4a.(apx\mp px^2)\}}}$$

$$=2\pi.\frac{\sqrt{\{a(apx\mp px^2)\}}}{a}.dx.\frac{\sqrt{\{(ap\mp 2px)^2+4a(apx\mp px^2)\}}}{2.\sqrt{\{a.(apx\mp px^2)\}}}$$

$$=\frac{2\pi}{2a}.dx.\sqrt{\{(ap\mp 2px)^2+4a(apx\mp px^2)\}}$$

$$=\frac{\pi\, dx}{a}.\sqrt{\{(ap\mp 2px)^2+4a.(apx\mp px^2)\}},$$

a zatém:

$$2\pi.y.\int.\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{\pi}{a}\int.dx.\sqrt{\{(ap\mp 2px)^2+}$$

$$+4a(apx\mp px^2)\}.$$

Chcąc zaś ostatniego równania prawą stronę rzeczywiście całkować, potrzeba w mieysce niewymierne-go pierwiastka wziąść wymierną wartość, przez co się ostatnie równanie na inne zamieni. Inne równanie się potém całkuie, i na odwrót w mieysce przybranych wartości, początkowe się kładą, a wynaleziona całkowa będzie szukaną powierzchnią krzywą każdego przecięcia ostrokręga, ogólnie wyrażoną. Chcąc nakoniec z ogólnego wyrazu wynaleść powierzchnią krzywą, któregokolwiek w szczególności przecięcia, warunki szczególnego przecięcia wprowadzaią się w ogólną całkową, a tym spososobem szczególna całkowa wypadaiąca, daie powierzchnią krzywą do szczególnego przecięcia należącą.

§. 163. W n i o s e k. Chcąc paraboloidy powierzchnią krzywą obrachować za pomocą rownania iey od wierzchołka z prostopadłemi współustawionemi, postępuiemy tak: Równanie wspomnione iest takie:

$$y^2 = px, \text{ stąd:}$$

$$2ydy = pdx, \text{ a następnie:}$$

$$dx = \frac{2ydy}{p}; \text{ przeto:}$$

$$dx^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{p^2}, \text{ a tém samém:}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{p^2} + dy^2,$$

$$= \frac{4y^2\,dy^2 + p^2\,dy^2}{p^2},$$

$$= \frac{dy^2}{p^2}.(4y^2 + p^2); \text{ a zatem:}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{p}.\sqrt{(4y^2+p^2)}.$$

Mnożąc zaś obydwie strony przez $2\pi y$, dla utworzenia na iedné́y stronie różniczki powierzchni krzywéy, będzie:

$$2\pi . y . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2\pi . y . dy}{p} . \sqrt{(4y^2+p^2)}$$

$$= \frac{\pi 8 . y dy}{4p} . \sqrt{(4y^2+p^2)},$$

gdzie dlatego się licznik i mianownik przez 4 pomnożył, aby łatwiey niewymierność pierwiastka znieść. Końcem tego, niech będzie:

$4y^2 + p^2 = u^2$, dlaczego $\sqrt{(4y^2+p^2)} = u$, stąd: $8ydy = 2udu$; a tak powyższe równanie daie takie:

$$2\pi . y\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{\pi .}{4p} 2u . du . u = \frac{\pi .}{2p} u^2 du.$$

Całkuiąc zaś ostatnie równanie, wypada:

$$2\pi . \int . \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{\pi . u^3}{6p} + \text{Const.}$$

Biorąc zaś zamiast u^3, z równania wyżey stoiącego, iego wartość napowrót, gdzie $u^2 = 4y^2 + p^2$; a $u = \sqrt{(4y^2+p^2)}$, a tem samém:

$$u^3 = (4y^2+p^2) . (4y^2+p^2)^{\frac{1}{2}} = (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}},$$

natenczas całkowa wypada taka:

$$2\pi . \int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\pi .}{6p} (4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Dla wynalezienia całkowéy, bierzemy $x = o$, a tak $y = o$, iakoteż cała powierzchnia $= o$; a więc takie równanie się podaie:

$$o = \frac{\pi}{6p} \cdot (o + p^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.},$$

$$= \frac{\pi}{6p} \cdot p^{\frac{6}{2}} + \text{Const.},$$

$$= \frac{\pi}{6p} \cdot p^3 + \text{Const.};$$ przeto:

$\text{Const.} = -\frac{\pi . p^3}{6p}$; a zatem, nazywaiąc powierzchnią krzywą parabolidy P, zupełna całkowa iest taka:

$$P = \frac{\pi .}{6p}\left((4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right),$$

z którey to formuły z łatwością powierzchnia szukana wynalezioną bydź może.

§ 164. Uwaga. Tak iak się w przeszłym §fie postąpiło z pierwiastkiem niewymiernym, wszędzie w podobnych zdarzeniach podobnie się postępuie. Atoli wartości, które przybieramy, co się samo rozumie, według różności okoliczności, różne bydź muszą. Wykład zupełny postąpienia sobie w każdém szczególném zdarzeniu, kiedy w funkcyach różniczkowych pierwiastki są niewymierne i kiedy szereg nieskończony z nich utworzony, niebyłby prędko się zbiegaiącym, należy tylko do obszernego dzieła o rachunku całkowym, dlaczego tutay, tylko się o nim wzmianka czyni. Tożsamo co się zrobiło z pierwiastkiem niewymiernym w §. 164, rozumiało się także o niewymiernym pierwiastku w §. 163.

§. 165. Wniosek. Biorąc równanie Cyssoidy od wierzchołka z prostopadłemi współustawionemi, które iest: $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ i różniczkuiąc ie, wypada:

$$2y.dy = \frac{3.x^2(2a-x).dx + x^3dx.}{(2a-x)^2} \text{ (§. 52.);}$$

$$= \frac{\{3x^2(2a-x)+x^3\}}{(2a-x)^2} dx,$$

$$= \frac{(6ax^2-2x^3).dx}{(2a-x)^2}; \text{ stąd:}$$

$$y.dy = \frac{(3ax^2-x^3)dx}{(2a-x)^2}; \text{ przeto:}$$

$$dy = \frac{(3ax^2-x^3)dx}{y.(2a-x)^2}; \text{ czyli:}$$

$$dy = \frac{(3ax^2-x^3).dx}{\sqrt{\left(\frac{x^3}{2a-x}\right)}.(2a-x)^2}; \text{ a więc:}$$

$$dy^2 = \frac{(3ax^2-x^3)^2.dx^2}{\frac{x^3}{2a-x}.(2a-x)^4};$$

$$= \frac{(9a^2x^4-6ax^5+x^6).dx^2}{\frac{x^3}{2a-x}.(2a-x)^4};$$

$$= \frac{(9a^2x-6ax^2+x^3).dx^2}{(2a-x)^3}; \text{ a zatem:}$$

$$dx^2+dy^2=\frac{(9a^2x-6ax^2+x^3)}{(2a-x)^3}dx^2+dx^2,$$

$$=\frac{(9a^2x-6ax^2+x^3)dx^2+(8a^3-12a^2x+6ax^2-x^3).dx^2}{(2a-x)^3}$$

$$=\frac{(8a^3-3a^2x)}{(2a-x)^3}dx^2.$$

Wyciągaiąc zaś pierwiastek kwadratowy, będzie:

$$\sqrt{}(dx^2+dy^2)=\sqrt{}\left\{\frac{(8a^3-3a^2x)dx^2}{(2a-x)^3}\right\}=$$

$$=\sqrt{}\left\{\frac{(8a-3x).a^2.dx^2}{(2a-x)^2.(2a-x)}\right\}=\frac{a\,dx}{2a-x}\sqrt{}\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right);$$

stąd:

$$2\pi.\,y.\sqrt{}(dx^2+dy^2)=\frac{2\pi.\,y.\,a\,dx}{2a-x}.\sqrt{}\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right);$$

$$=2\pi.\sqrt{}.\left(\frac{x^3}{2a-x}\right).\frac{a\,dx}{2a-x}.\sqrt{}\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right);$$

$$=\frac{2\pi.\,ax.\,dx.\sqrt{}x}{(2a-x)^{\frac{1}{2}}.(2a-x)}.\sqrt{}\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right)$$

$$=\frac{2\pi.\,ax.\,dx.\sqrt{}x}{(2a-x)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{}.\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right);$$

a zatem:

$$2\pi.\,y.\int.\sqrt{}.(dx^2+dy^2)=\int.\left\{\frac{2\pi.\,ax^{\frac{3}{2}}.dx}{(2a-x)^{\frac{3}{2}}}.\sqrt{}\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right)\right\}.$$

Wynalazłszy całkową naznaczoną, ta daie powierzchnią krzywą Cyssoidy.