Uważaiąc tutay w trzeciey różniczce, dx za nieodmienne, opuszczaią się wyrazy drugi i trzeci, w których się znayduie d^3x i d^2x iako Zera w takim razie, a tak zostaie do nieomiennego dx, $d^3 = 6adx^3$, to iest tożsamo, co iest wiadomém z §. 40.

§. 67. Uwaga. Sposób wynaydywania różniczek wszelakich rzędów, do funkcyi algebraicznych, uważaiąc dx za nieodmienne, iuż iest w całey zupełności wyłożony i to tak co do iedney iako co do wielu zmiennych. Także różniczkowanie funkcyi o iedney i wielu zmiennych, pod warunkiem że wszystkie różniczki są zmienne, iest rozebrane. Atoli co do różniczkowania funkcyi, w których wszystkie różniczki uważaią się za odmienne, ieszcze się wiele szczegółów znayduie, o których tutay mowa niebyła, dlatego że przeznaczenie tego dziełka tego niedozwoliło i że to co się o nich powiedziało, iest dostateczném, do łatwego zrozumienia wszystkiego dalszego, z obszernych dzieł.

ROZDZIAŁ IV.

Zastósowanie rachunku różniczkowego do niektórych materyi.

§. 68. Zagadnienie. Jak do Binomium $(1+x)^n$, w którém ilość n iakąkolwiek bydź może, znaleść potęgę?

Rozwiązanie. Widoczném iest, że iakiekolwiek znaczenie będzie miała ilość n, wykładnik ilości x w drugim wyrazie może bydź 1, w trzecim 2, w czwartym 3, i t. d. A tak cała rzecz idzie tylko o ogólne oznaczenie współczynników. Aby zaś współczynniki mogły bydź ogólnie oznaczone, to iest, (iak się w Algebrze pokazuie, gdzie się n, tylko za całość dodatną bierze) przez wykładnik n, i znane ilości wyrażone, potrzeba nayprzód szereg utworzyć z potęgi, w któryby rzeczone współczynniki wchodziły, zre z pierwszego szeregu drugi, w którymby także rzeczone współczynniki znaydowały się i ktoregoby wartość była Zero. A wtedy podług §. 7. dadzą się wszystkie współczynniki ogólnie przez n, i znane ilości wyrazić. Końcem tego niech będzie $(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots\ldots = Z$. A tak $dZ = n(1+x)^{n-1} dx$, (§. 40.) Mnożąc zaś obydwie strony przez $(1+x)$, aby w wykładniku $(n-1)$, -1 znieść, dla doprowadzenia równania potrzebnym sposobem do Zera, wypada: $(1+x) dZ = n(1+x)^n dx$. A że $(1+x)^n = Z$, przeto $(1+x).\ dZ = n.Z.dx$, a tém samém $(1+x).\frac{dZ}{dx.} = n.Z$, z czego $(1+x)\frac{dZ}{dx}$ $-nZ = 0$. Daley ostatnie równanie zamienia się na szereg, którego wartość będzie równa Zeru, biorąc zamiast niektorych wyrazów wartości, maiące w sobie, A, B, C, D, i t. d. I tak:

$$dZ = A\,dx. + 2Bx\,dx + 3Cx^2.\,dx + 4Dx^3.\,dx\ldots\ldots$$

stąd, $$\frac{dZ}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2. + 4Dx^3 \;.\;.\;.\;.\;.$$

przeto, $$(1+x).\frac{dZ}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3\ldots\ldots$$
$$+ Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3\ldots\ldots$$

azatem, $$(1+x).\frac{dZ}{dx} - nZ = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3\ldots$$
$$+ Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3\ldots$$
$$- n - nAx - nBx^2 - nCx^3.$$

A że lewa strona iest równa Zeru, przeto i prawa. To iest:

$$0 = (A-n) + (2B + A - nA).x + (3C + 2B - nB).x^2$$
$$+ (4D + 3C - nC)\, x^3. \; . \; . \; . \; . \; .$$

A tak: $A - n = 0$, przeto $A = n$,

$2B + A - nA = 0$, $2B = nA - A = (n-1)A$, przeto
$$B = \frac{(n-1)}{2} A = \frac{(n-1).\, n}{1.\, 2},$$

$3C + 2B - nB = 0$, $3C = nB - 2B = (n-2).B$ przeto,
$$C = \frac{(n-2)}{3} B = \frac{(n-2)\;(n-1).\, n.}{1.\, 2.\, 3}$$

$4D + 3C - nC = 0$, $4D = nC - 3C = (n-3).C$, przeto
$$D = \frac{(n-3)}{4}.C = \frac{(n-3).\,(n-2).\,(n-1).\, n.}{1.\, 2.\, 3.\, 4}$$
i t. d.

§. 69. Wniosek. Ponieważ $a + y = a\left(1 + \frac{y}{a}\right)$, dlaczego $(a+y)^n = a^n.\left(1 + \frac{y}{a}\right)^n$; przeto wziąwszy $\frac{y}{a} = x$, będzie $(a+y)^n = a^n\,(1+x)^n$. To iest, co się okazało o współczynnikach Binomium $(1+x)^n$, (§. 68), to samo się rozumie o współczynnikach $(a+y)^n$, i każdego innego. Co się zaś tyczy wykładników, widoczném iest, że powiedziane w algebrze, było ogólném. A tak, czyli wykładnik n, iest cały lub łamany, czy dodatny lub uiemny, czyli nawet uroiony, zawsze potęga z każdego Binomium powstaiąca zachowuie też same prawidła, to iest te, które w Algebrze były wyłożone, uważaiąc tam n, za ilość całą i dodatną; gdyż wszędzie można rachunku różniczkowego użyć i tożsamo okazać.

§. 70. Wniosek. A tak podług §. 68, znaiąc do tego prawidła wykładników, będzie:

N. p. $(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = r^{-1} + (-\tfrac{1}{2}.r.^{-3} - x^2) +$

$$+\frac{(-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}.r.^{-5}+x^4)}{1.\ 2}+\frac{(-\frac{1}{2}-2.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}r.^{-7}-x^6)}{1.\ 2.\ 3}+$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2}-3.-\frac{1}{2}-2.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}r.^{-9}+x^8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}+$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2}-4.-\frac{1}{2}-3.-\frac{1}{2}-2.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}.r.^{-11}+x^{10})}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

i t. d.

Czyli wykonywaiąc:

$$(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}.r.^{-3}\,x^2+\frac{3\ r.^{-5}\,x^4}{4.\ 1.\ 2}+\frac{5.3.r.^{-7}\,x^6}{8.\ 1.\ 2.\ 3}+$$

$$+\frac{7.5.3.r.^{-9}\,x^8}{16.\ 1.2.3.4}+\frac{9.7.5.3.r.^{-11}\,x^{10}}{32.\ 1.2.3.4.5.}$$

To iest, kiedy wykładnik Binomium iest uiemny i łamany, wtedy potęga zamienia się na szereg nieskończony. Lecz dla téy saméy przyczyny, zamienia się także potęga na szereg nieskończony, kiedy wykładnik iest cały ale uiemny, lub dodatny łamany; gdyż zawsze wykładnik pierwszey części niestaie się równy Zeru, a drugiey, wykładnikowi potęgi. Sposób wynoszenia każdego pierwiastka dwudzielnego do jakieykolwiek potęgi, a tém samém wyciągania z takiż samey formuły każdego pierwiastka, bardzo ważny w całey matematyce, nazywa się sposobem Newtona, który go wynalazł, lecz który dopiero przez Kaestnera ogólnie dowiedzionym został.

§. 71. Zagadnienie. Jak za pomocą różniczek wynaleść ogólną wartość, to iest, ogólne znaczenie podstyczney, styczney, podnormalney i normalney do każdey krzywey linii przy prostopadłych współustawianych?

Rozwiązanie. Niech AB (F. 2.) oznacza łuk iakieykolwiek krzywey linii, BdC iego przyrostek nieoznaczony. Liniia BF niech będzie styczną łuku AB, przez punkt B; punkt zaś F przecięciem styczney, z przedłużoną osią LA. Spuśćmy z punktów B i C prostopadłe do osi, BD, CE, a tak, też prostopadłe są ustawionemi, liniia zaś FD iest podstyczną linii krzywey. Daley z punktu B, wystawmy prostopadłą do styczney BF, którey przecięcie z osią niech się nazywa L, a tak BL iest normalną; DL zaś podnormalną. Wreszcie punkta B, C, połączmy liniią prostą, przedłużmy ią aż do przecięcia się z przedłużoną osią, nazywaiąc przecięcie G, i poprowadźmy przez B, równoległą do osi, przecinaiącą CE, w punkcie H. A że BdC iest nieoznaczonym przyrostkiem łuku AB; przeto $BH = DE$, iest nieoznaczonym przyrostkiem linii AD, to iest odcinka, który się nazywa x; CH zaś iest nieoznaczonym przyrostkiem linii BD, to iest ustawioney, która się nazywa y. Nazwawszy przyrostek pierwszy mx, a a drugi Δy, podaie się z podobieństwa troykątów GDB i BHC, taka proporcya: $mx : \Delta y = GD : y$. Lecz przybliżaiąc ciągle CE do BD, przyrostki mx, Δy ciągle się zmnieyszaią, liniia BG ciągle się do BF przybliża, a stósunek $mx : \Delta y$, ciągle się bliższym stósunku $FD : y$, staie. Wziąwszy nakoniec CE za nieskończenie bliskie od BD, w którym razie mx i Δy nieskończenie małemi są, wtedy stósunek $mx : \Delta y$ staie się zupełnie równym stósunkowi $FD : y$ (§. 24); przeto proporcya powyższa, zamienia się na taką: $dx : dy = FD : y$, (§. 34); a zatem $FD = y.\frac{dx}{dy}$, czyli nazywaiąc ogólnie podstyczną każdéy krzywéy linii S, $S = y.\frac{dx}{dy}$ Uważaiąc troykąt prostokątny FDB, będzie $FB^2 = FD^2 + DB^2$, wziąwszy zaś zamiast FD iuż wynalezioną wartość, wypada: $FB^2 = y^2.\frac{dx^2}{dy^2} + y^2$, czyli $FB^2 = y^2.\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)$, a przeto: $FB = y.\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$; albo nazywaiąc styczną każdey krzywey linii ogólnie T, $T = y.\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy} + 1\right)}$. Uważaiąc daley troykąty FBD i BLD podobne między sobą, widzimy iż w nich taka proporcya ma mieysce: $FD : y = y : DL$, czyli biorąc zamiast FD wynalezioną wartość: $y.\frac{dx}{dy} : y = y : DL$; przeto $DL = y.^2 \frac{dy}{y.dx} = y.\frac{dy}{dx}$, albo nazywaiąc podnormalną każdey krzywey linii ogólnie SN, $SN = y.\frac{dy}{dx}$. — Na ostatek z troykąta prostokątnego DBL, podaie się: $BL^2 = y^2 + DL^2$, to iest, biorąc zamiast DL, wartość wynalezioną, $BL^2 = y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2} = y.^2\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)$, a przeto: $BL = y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$, albo nazywaiąc normalną każdey krzywey linii ogólnie N, $N = = y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$.

§. 72. Uwaga. Wiedząc iuż ogólnie, że $S = y.\frac{dx}{dy}$ $T = y.\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$, $SN = y\frac{dy}{dx}$, $N = y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$ i szukaiąc do iakieykolwiek linii krzywéy któréykolwiek z wymienionych liniy, w wyrazach skończonych, wtedy do funkcyi linii krzywéy z prostopadłemi współustawionemi, szuka się różniczki; którey się na iednéy stronie taka forma daie, iaką ma wzmiankowana liniia, a wartość skończona rzeczonéy ogólnéy formy, daie liniią żądaną. I tutay to iuż się pokaże niezmierna wartość rachunku różniczkowego, za pomocą którego rzeczone liniie przy każdey krzywéy, bez porównania, krócdzey, prościey i łatwiey się wynayduią, iak za pomocą niższey Analizy. Pokazuie się tutay także z §. 68, i §. 71, iż ieżeli dowodzenia niższey Analizy są ogólne, to dowodzenia rachunku wyższego, czyli wyższey Analizy, są powszechne. Albowiem $S = y. \frac{dx}{dy}$ iest przy każdey krzywéy linii; wynaydowanie zaś podstycznych, np. do paraboli, Elipsy, Hyperboli i t. d. w wyrazach skończonych, będzie tylko rzeczonéy formuły zastósowaniem. Przeciwnie zaś wynaleziona wartość na podstyczną do iakiéykolwiek krzywéy, np. Elipsy podług niższey Analizy, niezawiera w sobie, czyli nie da podstyczney do Paraboli, Cissoidy, Konchoidy i t. d.

§. 73. Wniosek. Biorąc równanie na koło od wierzchołka i w niém promién nazywaiąc r, będzie $y^2 = 2rx - x^2$. Chcąc tutay 1) wynaleść podstyczną przez wyrazy skończone, równanie się różniczkuie, a tak $2y.dy = 2rdx - 2xdx$, czyli $y.dy = rdx - xdx$, to iest $y.dy = (r - x).dx$, to równanie nazywam A. Daley w równaniu $A.$, abym miał ogólną wartość podstyczney (§. 71.) obydwie strony dzielę przez dy. i przez $r - x$, ztąd będzie $\frac{y}{r - x} = \frac{dx}{dy}$, a więc $\frac{y.dx}{dy} = \frac{y^2}{r - x}$, czyli koła $S = \frac{y^2}{r - x}$. Biorąc $x = r$, będzie $S = \frac{y^2}{0} = \infty$, to iest do odcinka równego promieniowi, podstyczna iest równoległa do styczney. Biorąc $x > r$, wtedy S będzie uiemne, to iest wtedy pod styczna i styczna z drugiéy strony się schodzą. Wszystko tożsamo co iest z elementarnéy Jeometryi wiadomém Chcąc podstyczną, to iest prawą stronę równania, $S = \frac{y^2}{r-x}$, mieć przez samo x wyrażoną, zamiast y^2, bierze się wartość z funkcyi koła, a będzie $S = \frac{2rx - x^2}{r-x}$. Chcąc wreszcie mieć podstyczną wyrażoną przez samo y, bierze się z funkcyi koła wartość na x, która iest taka $x = \pm\sqrt{(r^2 - y^2)} + r$, to iest kiedy $x > r, x = +\sqrt{(r^2 - y^2)} + r$; kiedy $x < r, x = -\sqrt{(r^2 - y^2)} + r$, a będzie $S = \frac{y^2}{r + \sqrt{(r^2 - y^2)} - r}$, dlaczego pierwszą razą podstyczna, iest uiemna a drugą dodatna. Przy każdéy innéy linii chcąc mieć wartość, przez funkcyą iednéy zmiennéy wyrażoną, robi się toż samo co tutay. 2) Weźmy równanie A, to iest: $y.\,dy = (r-x).dx$, z którego iak wyżey wypada $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x}$, przeto $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{(r-x)^2}$, a więc mnożąc obydwie strony przez y^2 i dodaiąc do nich y^2, aby mieć ogólną wartość stycznej (§. 71.), wypada: $y^2 \frac{dx^2}{dy^2} + y^2 = \frac{y^4}{(r-x)^2} + y^2$, czyli: $\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right).y^2 = \left(\frac{y^2}{(r-x)^2} + 1\right).y^2$, a zatém: $y.\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)} = y.\sqrt{\left(\frac{y^2}{(r-x)^2} + 1\right)} = \frac{y}{r-x}.\sqrt{\left\{y^2 + (r-x)^2\right\}}$. To iest styczna koła $T = \frac{y}{r-x}\sqrt{\left\{y^2 + (r-x)^2\right\}}$ któréy różne własności odkryć można, biorąc różne wartości na x, tak iak wyżéy przy podstycznéy. 3) Wziąwszy równanie A, to iest: $y.\,dy = (r-x)dx$, i dzieląc w niém obydwie strony przez dx i y, dla znalezienia ogólnéy wartości podnormalnéy, wypada, $\frac{dy}{dx}=\frac{r-x}{y}$, a więc, $\frac{y\,dy}{dx}=r-x$, to iest podnormalna w kole, czyli: $SN= r-x$. Toż samo co z Jeometryi elementarnéy iest wiadomém, albowiem normalna przechodzi przez środek koła. 4) Biorąc równanie $\frac{dy}{dx}=\frac{r-x}{y}$, wynosząc ie do kwadratu, mnożąc przez y^2, i dodaiąc do obydwóch stron y^2, wypada:

$$y.^2\frac{dy^2}{dx^2}+y^2=\frac{(r-x)^2}{y^2}.\,y^2+y^2=(r-x)^2+y^2,$$

a przeto:

$y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}=\sqrt{\left\{(r-x)^2+y^2\right\}}$, to iest normalna koła,

$$N=\sqrt{\left\{(r-x)^2+y^2\right\}}.$$

Wyrażaiąc N, przez samą funkcyą x, sposobem wyżey wyłożonym, będzie:

$$N=\sqrt{\left\{(r-x)^2+2rx-x^2\right\}}=\sqrt{(r^2-2rx+x^2+}$$
$$+2rx-x^2)=\sqrt{r^2}=r.$$

To iest normalna w kole iest promieniem.

§. 74. **Wniosek.** Biorąc równanie na parabolę od wierzchołka, to iest $y^2=px$, i szukaiąc 1) podstyczněy, będzie: $2ydy=pdx$, a więc $A)\ \frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}$, przeto $y\frac{dx}{dy}=\frac{2y^2}{p}$, to iest w Paraboli

$S=\frac{2y^2}{p}$. Chcąc wartość wypadłą wyrazić przez funkcyą x, będzie $S=\frac{2px}{p}=2x$. Tożsamo co iest z niższey Analizy znaném. 2) Szukaiąc stycznéy bierze się równanie A to iest: $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}$, z tego, daiąc mu formę potrzebną, wypada:

$$y^2\frac{dx^2}{dy^2}+y^2=\frac{4y^4}{p^2}+y^2, \text{ czyli } y^2\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)=$$
$$=y^2\left(\frac{4 y^2}{p^2}+1\right), \text{ a przeto: } y.\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)}=$$
$$=\frac{y}{p}.\sqrt{(4y^2+p^2)},$$

to iest styczna paraboli $T=\frac{y}{p}.\sqrt{(4y^2+p^2)}$. 3) Dla znalezienia podnormalnéy, weźmy równanie A, czyli: $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}$, a więc także będzie, $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}$, przeto $y\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}$. $y=\frac{p}{2}$, to iest podnormalna paraboli $SN=\frac{p}{2}$ iest nieodmienna w każdey paraboli. 4) Szukaiąc normalnéy, weźmy równanie powyższe: $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}$, a dawszy mu formę potrzebną, będzie: $y^2+y^2\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{p.^2y^2}{4y^2}+y^2$, czyli: $y.^2\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)=\frac{p^2+4y^2}{4}$, a przeto $y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+4y^2)}$, to iest normalna paraboli $N=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+4y^2)}$.

§. 75. Wniosek. Biorąc równanie na Elipsę i Hyperbolę od wierzchołka, które iest $y^2 = px \mp \frac{px^2}{a}$, i szukaiąc 1) podstycznéy, będzie $2\,y\,dy = p\,dx \mp \frac{2\,p\,x\,dx}{a}$

czyli: $2\,y\,dy = \frac{ap\,dx \mp 2\,p\,x\,dx}{a} = \left(\frac{ap \mp 2\,px}{a}\right).\ dx$,

przeto: $\frac{dx}{dy} = \frac{2\,ay}{ap \mp 2\,px}$, które równanie niech się zowie B, a więc $y\frac{dx}{dy} = \frac{2\,ay^2}{ap \mp 2\,px}$, to iest Elipsy podstyczna $S = \frac{2\,ay^2}{ap - 2px}$, a hyperboli $S = \frac{2\,ay^2}{ap + 2\,px}$.

Biorąc w równaniu: $y\frac{dx}{dy} = \frac{2\,ay^2}{ap \mp 2\,px}$, zamiast y^2, wartość, będzie: $y\frac{dx}{dy} = \frac{2\,apx \mp 2\,px^2}{ap \mp 2\,px} = \frac{(2\,a \mp 2\,x)}{a \mp 2\,x}\,x$.

To iest Elipse między sobą i Hyperbole między sobą, na iednéy osi większéy wystawione, maią podstyczne równych odcinków równe; gdyż miara nie wchodzi w ich wartości, a tém samém ich niezmienia. Także z tey przyczyny pokazuie się daley, iż podstyczne rzeczonych Elipsów i Hyperbol, w iednym punkcie, na przedłużonéy osi, się schodzą. 2) Chcąc znaleść styczną, bierze się równanie B, które iest: $\frac{dx}{dy} = \frac{2\,ay}{ap \mp 2px}$, a dawszy mu potrzebną formę, będzie: $y^2.\ \frac{dx^2}{dy^2} + y^2 = \frac{4a^2y^4}{(ap \mp 2px)^2} + y^2$

czyli: $y^2.\ \left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right) = y^2.\ \left(\frac{4\,a^2.\ y^2}{(ap \mp 2\,px)^2} + 1\right)$,

a przeto: $y.\ \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)} = y.\ \sqrt{\left(\frac{4\,a^2\,y^2}{(ap \mp 2px)^2} + 1\right)} =$

$=\frac{y}{ap\mp 2px}.\sqrt{\left\{4a^2 y^2+(ap\mp 2px)^2\right\}}$, to iest styczna Elipsy $T=\frac{y}{ap-2px}.\sqrt{\left\{4a^2y^2+(ap-2px)^2\right\}}$; hyperboli zaś, $T=\frac{y}{ap+2px}\sqrt{\left\{4a^2 y^2+(ap+2px)^2\right\}}$.

3) Dla znalezienia podnormalnéy bierze się równanie B, to iest: $\frac{dx}{dy}=\frac{2ay}{ap\mp 2px}$, z którego wypada: $\frac{dy}{dx}=\frac{ap\mp 2px}{2ay}$, przeto: $\frac{ydy}{dx}=\frac{ap\mp 2px}{2a}$, to iest podnormalna elipsy, $SN=\frac{ap-2px}{2a}$; hyperboli zaś, $SN=\frac{ap+2px}{2a}$. 4) Szukaiąc nareszcie normalnéy bierze, się równanie powyższe: $\frac{dy}{dx}=\frac{ap\mp 2px}{2ay}$, z którego, robiąc zmianę potrzebną dla normalnéy, wypada: $y^2.\frac{dy^2}{dx^2}+y^2=\frac{(ap\mp 2px)^2}{4a^2y^2}.y^2+y^2$, czyli upraszczaiąc: $y^2.\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)$ $=\frac{(ap\mp 2px)^2}{4a^2}+y^2$, a przeto: $y.\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}=$ $=\frac{1}{2a}.\sqrt{\left\{(ap\mp 2px)^2+4a^2.y^2\right\}}$, to iest normalna elipsy, $N=\frac{1}{2a}.\sqrt{\left\{(ap-2px)^2+4a^2y^2\right\}}$; hyperboli zaś, $N=\frac{1}{2}.\sqrt{\left\{(ap+2px)^2+4a^2.y^2\right\}}$.