$$\int y.\,dx = \frac{2}{3}.(m+x).\sqrt{(pm+px)} - \frac{2}{3}m.\sqrt{p.m},$$

iest zupełną całkową, a tém samém:

$$\text{Powierzchnia } BCED = \frac{2}{3}(m+x).\sqrt{(pm+px)} -$$

$$- \frac{2}{3}m.\sqrt{p.m}.$$

Oznaczywszy tedy ilości p, m, x, powierzchnia rzeczona łatwo bardzo z ostatniego wyrazu podaie się.

§. 143. Wniosek. Podług §. 40 wiadomém iest, że powierzchnia paraboli $ACED$ (F. 9.) z takiego wyrazu: $\frac{2}{3}AD.DB = \frac{2}{3}x.y$ się wynayduie. Nazywaiąc tedyresztę dokończonego prostokąta na AD i DB, leżącą za parabolą, n. p. M; wtedy $M = \frac{1}{3}x.y$. A że tróykąta ADE powierzchnia $= \frac{AD}{2}.DE = \frac{1}{2}x.y$, przeto powierzchnia odcinka parabolicznego, czyli: $ACE = ACED - AED =$ $= \frac{2}{3}.x.y - \frac{1}{2}.x.y = \frac{4}{6}.x.y - \frac{3}{6}.x.y = \frac{1}{6}.x.y.$ To iest powierzchnia odcinka parabolicznego zawiera $\frac{1}{6}$ powierzchni prostokąta dokończonego na współustawionych do siebie prostopadłych, a tém samém z współustawionych rzeczonych daie się łatwo bardzo wynaleść.

§. 144. Zagadnienie. Jak obrachować część powierzchni Elipsy, zawartą między współustawionemi od środka do siebie prostopadłemi, połową osi mnieyszéy i łukiem Elipsy?

Rozwiązanie. Mieymy elipsę (F. 10), w niey $AC = a$ połowie osi większéy; $CD = c$ połowie osi mnieyszéy; $FC = x$ i $FG = y$. Mamy tu obrachować powierzchnią $FGDC$, co się robi tym sposobem: Bierzemy równanie Elipsy od środka, które iest:

$$y^2 = \frac{ap}{2} - \frac{px^2}{2a} \text{ (znane z Jeometryi analitycznéy)}$$

$$= \frac{a^2 p - px^2}{2a}$$

$$= \frac{p}{2a}(a^2 - x^2),$$

Biorąc daléy zamiast p, wartość, która iest: $p = \frac{2c^2}{a}$ (z Jeometryi analitycznéy) będzie:

$$y^2 = \frac{2c^2}{2a^2}(a^2 - x^2)$$

$$= \frac{c^2}{a^2}.(a^2 - x^2), \text{ stąd:}$$

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}, \text{ a przeto:}$$

$$y.dx = \frac{c}{a}dx.\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{c}{a}.dx.(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Daley wyraz: $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, zamieniamy na szereg nieskończony za pomocą binomium. A tak:

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{1}{2}a^{-1}x^2 - \frac{\frac{1}{4}}{1.2.}a^{-3}x^4 -$$

$$- \frac{\frac{3}{8}}{1.2.3}a^{-5}x^6 - \frac{\frac{15}{16}}{1.2.3.4}a^{-7}x^8 - \frac{\frac{105}{32}}{1.2.3.4.5}a^{-9}x^{10} \dots$$

$$= a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \dots$$

Znaleziony szereg mnożymy przez $\frac{c}{a}.\ dx$, z czego się podaie;

$$ydx = \frac{c}{a}dx\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{a}\Big(adx - \frac{x^2\,dx}{2a} - \frac{x^4\,dx}{8a^3} - \frac{x^6\,dx}{16a^5} - \frac{5x^8\,dx}{128\,a^7}\ \ldots\ldots\Big).$$

Całkuiąc nakoniec ostatnie równanie, wypada:

$$\int.ydx = \frac{c}{a}\Big(ax - \frac{x^3}{3.2a} - \frac{x^5}{5.8a^3} - \frac{x^7}{7.16a^5} - \frac{5x^9}{9.128a^7}\ \ldots\ldots\Big),$$

która to całkową iuż iest zupełną, albowiem, biorąc $x = o$, wtedy każdy z wyrazów całkowéy znalezionéy, iako maiący w sobie x, iest także równy Zeru. A że i cała powierzchnia iest w takim razie równa Zeru; przeto także ilość Const $= o$. Biorąc w ostatnim szeregu $x = a$, to iest odcinek równy połowie osi większéy, wtedy szereg da czwartą część powierzchni elipsy i będzie miał taką formę:

$$\int.\ y.\ dx = \frac{c}{a}\Big(a^2 - \frac{a^3}{3.2a} - \frac{a^5}{5.8a^3} - \frac{a^7}{7.16a^5} - \frac{5a^9}{9.128a^7}\ \ldots\ldots\Big).$$

$$= \frac{c}{a}\Big(a^2 - \frac{a^2}{3.2} - \frac{a^2}{5.8} - \frac{a^2}{7.16} - \frac{5a^2}{9.128}\ldots\Big)$$

$$= \frac{c}{a}.a^2\Big(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128}\ldots\Big)$$

$$= c.a\left(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} \cdots\right)$$

To iest:

$$AGDC = ca\left(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} \cdots\right).$$

Oznaczaiąc w przedostatnim szeregu ilości $a\ c$, x, w ostatnim zaś a, c, z łatwością powierzchnie, do których też szeregi należą, przez ułamki dziesiątne, obrachowane bydź mogą.

§. 145. **Wniosek.** Biorąc szereg na powierzchnią koła, zawartą między współustawionemi od środka z §. 135, który iest:

$$\int y.dx = ax - \frac{x^3}{3.2a} - \frac{x^5}{5.8a^3} - \frac{x^7}{7.16a^5} - \frac{5x^9}{9.128a^7} - \frac{21x^{11}}{11.768a^9} \cdots$$

i uważaiąc że promień koła, to iest a, iest równy połowie osi większéy elipsy, która się także wyżéy tak nazywała, nadto biorąc $x = a$, czyli biorąc odcinek równy promieniowi, wtedy powyższy szereg będzie wyrażał czwartą część powierzchni koła i będzie miał kąta formę:

$$\int y.dx = a^2 - \frac{a^3}{3.2a} - \frac{a^5}{5.8a^3} - \frac{a^7}{7.16a^5} - \frac{5a^9}{9.128a^7} - \frac{21a^{11}}{11.768a^9} \cdots$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{3.2} - \frac{a^2}{5.8} - \frac{a^2}{7.16} - \frac{5a^2}{9.128} - \frac{21a^2}{11.768} \cdots$$

$$= a^2\left(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} - \frac{21}{11.768} \ldots\right)$$

To iest:

$$\text{Czwarta część koła} = a^2\left(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} - \frac{21}{11.768} \ldots\right).$$

A że także czwarta część powierzchni elipsy z przeszłego §fu, to iest:

$$AGDC = ca\left(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} \ldots\right),$$

przeto nazywaiąc koło k, a elipsę e, taka proporcya ma mieysce:

$$\frac{k}{4} : \frac{e}{4} = a^2 : ca, \text{ czyli:}$$

$k : e = a : c$. To iest koło, maiące za promień połowę osi większéy elipsy, ma się do elipsy iak się ma połowa osi większéy do połowy osi mnieyszéy, a tém samém, iak się ma cała oś większa, do całey mnieyszéy. Zakreślaiąc wreszcie koło promieniem równym wyrazowi: $\sqrt{ca}$, gdzie: $\sqrt{(c.a)}^2 = c.a$, wtedy powyższy szereg na czwartą część koła, zamieni się na taki:

$$\text{Czwarta część koła} = ca\left(1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} - \frac{21}{11.768} \ldots\right).$$

To iest powierzchnia koła zakreślonégo promieniem, który iest średnią proporcyonalną, między połowami obydwóch osiów, czyli, co iedno, koło wystawione na średnicy, która iest średnią proporcyonalną do obydwóch osiów elipsy, iest równe elipsie co do powierzchni. Też same obydwa szczegóły są także znane z Analizy niższéy, czyli z Jeometryi analityczné y.

§. 146. Zagadnienie. Jak obrachować część powierzchni hyperboli, zawartą między współustawionemi do siebie prostopadłemi, od wierzchołka wziętemi, i łukiem hyperboli?

Rozwiązanie. Nazywaiąc oś pierwszą hyperboli a, miarę p, równanie na hyperbolę od wierzchołka iest takie:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

$$= \frac{apx + px^2}{a}$$

$$= \frac{px}{a}(a+x), \text{ stąd:}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{p}{a}.x\right)}.\sqrt{(a+x)}, \text{ a przeto:}$$

$$y.dx = dx.\sqrt{\left(\frac{p}{a}.x\right)}.\sqrt{(a+x)}$$

$$= dx.\sqrt{\left(\frac{p}{a}.x\right)}.(a+x)^{\frac{1}{2}}.$$ Daléy wyraz:

$(a+x)^{\frac{1}{2}}$ zamienia się na szereg nieskończony, podług binonium, i ten iest:

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x - \frac{\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}x^2}{1.2} + \frac{\frac{3}{8}a^{-\frac{5}{2}}x^2}{1.2.3} -$$

$$- \frac{\frac{15}{16}a^{-\frac{7}{2}}x^4}{1.2.3.4} + \frac{\frac{165}{32}a^{-\frac{9}{2}}x^5}{1.2.3.4.5} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \sqrt{a} + \frac{x}{2.\sqrt{a}} - \frac{x^2}{8.a.\sqrt{a}} + \frac{x^3}{16.a.^2\sqrt{a}} -$$

$$- \frac{5x^4}{128a^3\sqrt{a}} + \frac{7x^5}{256a^4\sqrt{a}} \ldots\ldots\ldots$$

A więc:

$$y.dx = dx\sqrt{\frac{p}{a}.x.(a+x)^{\frac{1}{2}}} = dx\sqrt{\frac{p}{a}}.\sqrt{x.(a+x)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= dx.\sqrt{\frac{p}{a}}.(a+x)^{\frac{1}{2}}.\ x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{p}{a}}.\Big(dx.\sqrt{a}.x +$$

$$+ \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2.\sqrt{a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{8a.\sqrt{a}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{16a^2\sqrt{a}} -$$

$$- \frac{5x^{\frac{9}{2}}dx}{128a^3\sqrt{a}} + \frac{7x^{\frac{11}{2}}dx}{256a^4\sqrt{a}} \ldots\ldots\Big).$$

Całkuiąc zaś ostatni szereg, wypada:

$$\int y.dx = \sqrt{\frac{p}{a}}.\Big(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a} + \frac{2}{5}.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{a}} - \frac{2}{7}.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a.\sqrt{a}} +$$

$$+ \frac{2}{9}.\frac{x^{\frac{9}{2}}}{16.a^2\sqrt{a}} - \frac{2}{11}.\frac{5.x^{\frac{11}{2}}}{128.a^3\sqrt{a}} +$$

$$+ \frac{2}{13}.\frac{7x^{\frac{13}{2}}}{256.a^4\sqrt{a}} \ldots\ldots\Big).$$

Całkowa powyższa iuż iest zupełną; albowiem biorąc $x=0$, wtedy cała powierzchnia będzie Zerem, i każdy wyraz wynalezionéy całkowéy iako mnożony przez x, będzie także Zerem, a więc i ilość *Const.* $=0$. Ostatni szereg obrachowany przyzwoicie daie powierzchnią żądaną.

§. 147. Wniosek. Biorąc równanie na hyperbolę między niedostycznemi, które iest:

$x.y = c^2$, gdzie ilość c^2 nieodmienna oznacza potęgę hyperboli; a tak powierzchnia do współustawionych tego równania należąca, iest ta którą współustawione rzeczone, łuk cały hyperboli od ustawionéy zaczynaiąc, i druga niedostyczna, otaczaią. Chcąc na rzeczoną powierzchnią wynaleść wartość, popostępuiemy tak:

Ponieważ: $x.y = c^2$, stąd:

$$y = \frac{c^2}{x} = c^2 . x^{-1}; \text{ przeto:}$$

$$y.dx = c^2 x^{-1} dx; \text{ a zatém:}$$

$$\int y dx = \frac{c^2 x^{-1+1}}{-1+1} + \text{Const.} = \frac{c^2}{0} + \text{Const.} = \infty + $$
$$+ \text{Const.}$$

To iest rzeczona powierzchnia iest nieskończoną, biorąc odcinek, iaki iest w równaniu $x.y = c^2$, od środka.

§. 148. Zagadnienie. Jak obrachować część powierzchni hyperboli prostéy czyli równoramiennéy zawartą między łukiem hyperboli, częścią iednéy niedostycznéy i dwiema równoległemi do drugiéy niedostycznéy, poprowadzonemi między łukiem hyperboli, i pierwszą niedostyczną?

Rozwiązanie. Mieymy *CBD* (Fig. 11.) łuk hyperboli prostéy, to iest takiéy, któréy obydwie osie i miara są sobie równe i któréy *LA* i *AK* prostopadłe do siebie dwie niedostyczne wystawiaią. Weźmy $AE = BE = c$, gdzie c^2 oznacza potęgę hyperboli, zróbmy $AG = m$, gdzie m oznacza ilość iakąkolwiek nieodmienną, nadto poprowadźmy dwie liniie GF i KH równoległe do AL a tém samém do EB, a tak mamy tu znaleść powierzchnią $GFHK$ w czém tak postępuiémy: Ponieważ w każdéy hyperboli iloczyn z części niedostycznéy i iéy ustawionéy, iest równy potędze hyperboli (znane z Jeometryi wyższéy,) przeto uważaiąc $GK = x$, $KH = y$, będzie:

$$c^2 = AK.KH$$
$$= (AG + GK).KH$$
$$= (m + x)y, \text{ czyli: } c^2 = my + xy; \text{ przeto:}$$
$$y = \frac{c^2}{m+x}; \text{ a więc:}$$
$$y.dx = \frac{c^2 dx}{m+x}.$$

Chcąc tutay równanie ostatnie całkować, potrzeba wprzody wyraz: $\frac{c^2}{m+x}$, zamienić na szereg nieskończony za pomocą dzielenia. Szereg ten ma taką formę:

$$\frac{c^2}{m+x} = \frac{c^2}{m} - \frac{c^2 x}{m^2} + \frac{c^2 x^2}{m^3} - \frac{c^2 x^3}{m^4} + \frac{c^2 x^4}{m^5} -$$
$$- \frac{c^2 x^5}{m^6} + \frac{c^2 x^6}{m^7} \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

przeto:

$$y.dx = \frac{c^2 dx}{m} - \frac{c^2 x dx}{m^2} + \frac{c^2 x^2 dx}{m^3} - \frac{c^2 x^3 dx}{m^4} +$$
$$+ \frac{c^2 x^4 dx}{m^5} - \frac{c^2 x^5 dx}{m^6} + \frac{c^2 x^6 dx}{m^7} \ldots\ldots$$

A zatém:

$$\int y\,dx = \frac{c^2x}{m} - \frac{c^2x^2}{2m^2} + \frac{c^2x^3}{3m^3} - \frac{c^2x^4}{4m^4} + \frac{c^2x^5}{5.m^5} -$$

$$- \frac{c^2x^6}{6.m^6} + \frac{c^2x^7}{7.m^7} \ldots\ldots\ldots + \text{Const.}$$

$$= c^2\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2.m^2} + \frac{x^3}{3.m^3} - \frac{x^4}{4.m^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^5}{5.m^5} - \frac{x^6}{6.m^6} + \frac{x^7}{7.m^7} \ldots\ldots \right) + \text{Const.}$$

Biorąc na zaczynaiącą się powierzchnią w G, $x=o$; wtedy cała powierzchnia, iako też każdy wyraz wynalezionéy całkowéy, iako maiący w sobie x, będzie także równy Zeru, a zatém i ilość $Const = o$, a tém samém powyższa całkowa iest zupełna. A tak powierzchnia

$$GFHK = c^2\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^5}{5m^5} - \frac{x^6}{6m^6} + \frac{x^7}{7.m^7} \ldots\ldots\ldots \right).$$

Obrachowywuiąc ostatni szereg przyzwoicie, przyczém wprzody ilości m i x potrzeba oznaczyć, iako też wartość c^2, z osi pierwszéy wynaleść, wynayduie się łatwo powierzchnia wzmiankowana.

§. 149. **Wniosek.** Biorąc w powyższéy figurze $AG = AE$, to iest: $m = c$ i robiąc: $c = 1$, wtedy powyższy szereg zamienia się na inny, i daie powierzchnią $EBHK$. To iest, wtedy będzie:

$$EBHK = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \ldots\ldots$$

§. 150. **Wniosek.** Równanie nayogólnieysze na hyperbolę, to iest równanie na całą familią hyperból, iest takie: $x^a . y^e = c^{a+e}$, gdzie c^{a+e}, potęgę hyperboli oznacza. Z równania wspomnionego wypada:

$$y^e = \frac{c^{a+e}}{x^a} = c^{a+e} . x^{-a}, \text{ przeto:}$$

$$y = \sqrt[e]{(c^{a+e} . x^{-a})} = c^{\frac{a+e}{e}} . x^{\frac{-a}{e}} ; \text{ zatém:}$$

$$y dx = c^{\frac{a+e}{e}} . x^{\frac{-a}{e}} . dx; \text{ a więc:}$$

$$\int . y . dx = \frac{c^{\frac{a+e}{e}} . x^{\frac{-a}{e}+1}}{-\frac{a}{e}+1} + \text{Const.}$$

$$= \left(\frac{e}{e-a}\right) . c^{\frac{a+e}{e}} . x^{\frac{-a}{e}} . x + \text{Const.}$$

Biorąc zaś zamiast wyrazu: $c^{\frac{a+e}{e}} . x^{\frac{-a}{e}}$, wartość wyżéy stoiącą, to iest, y, będzie:

$$\int . y . dx = \left(\frac{e}{e-a}\right) . x . y + \text{Const.}$$

Uważaiąc tu $e > a$, n. p. $e = 2$, $a = 1$, wtedy wypada:

$$\int . y . dx = \frac{2}{2-1} . x . y + \text{Const.} = +2 x . y + \text{Const.}$$

Uważaiąc przeciwnie $a > e$, to iest np. $a = 2$, $e = 1$, wtedy będzie:

$$\int . y dx = \frac{1}{1-2} . x . y + \text{Const.} = - x y + \text{Const.}$$

To iest biorąc $AG = x$, $GF = y$ będzie powierzchnia:

$$AGFCL = +2.x.y + \text{Const},$$

powierzchnia zaś:

$$GFHK = -xy + \text{Const},$$

przyczém $GK = GA$ się uważa.

§. 151. Zagadnienie. Jak innym sposobem wynaleść powierzchnią, zawartą między łukiem hyperboli równoramiennéy, częścią iednéy niedostycznéy, i dwiema równoległemi do drugiéy niedostycznéy, między łukiem hyperboli a pierwszą niedostyczną pociągnionemi?

Rozwiązanie. Mieymy łuk hyperboli równoramiennéy (Fig. 11.) CBD, trzy prostopadłe BE, FG, HK na niedostycznéy AK stoiące, a tém samém do drugiéy niedostycznéy, to iest do AL równoległe, a mamy tu obrachować powierzchnią $EBFG$ którą nazywam W. Robi się to tak: Weźmy GK za nieskończenie małą, to iest $GK = d.AG$, wtedy będzie, figura $GFHK$ różniczką powierzchni $ABFG$, czyli:

$$dW = GFHK = FG.d.AG.$$

A że, nazywaiąc oś pierwszą hyperboli a, a drugą β, zawsze w hyperboli: $\frac{a^2 + \beta^2}{16} = AG.FG$ (§. 148) tutay zaś $a = \beta$ (z wyobrażenia o hyperboli równoramiennéy); przeto:

$$\frac{a^2 + a^2}{16} = \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2}{8} = AG.FG.$$

a więc:

$$FG = \frac{a^2}{8.AG}.$$

Biorąc tedy w wartości powyższéy wyrazu dW, zamiast FG, teraz wynalezioną wartość, będzie:

$$dW = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{dAG}{AG},$$

gdzie całkowa wyrazu $\frac{a^2}{8} \cdot \frac{dAG}{AG}$, a tém samém W, iest logarytmém ilości AG uważanéy za liczbę, przy podstycznéy $\frac{a^2}{8}$, całkowa zaś samego $\frac{dAG}{AG}$ iest logarytmém naturalnym ilości AG (§. 102. §. 110.). Uważaiąc daléy że $AE = 1$ mierzy AG, czyli AG iako liczbę wyraża, wktórym razie, (nazwawszy logarytm naturalny Log.):

$$\int \frac{dAG}{AG} = \text{Log.} \frac{AG}{AE},$$

wtedy wypada:

$$W = \frac{a^2}{8} \text{Log.} \frac{AG}{AE}. \ (\text{§. } 115.).$$

To iest powierzchnia $EBFG$ wynayduie się, wynayduiąc logarytm linii AG mierzonéy iednością AE, uważanéy za liczbę, w systemacie, którego podstyczną iest $\frac{a^2}{8}$.

§. 152. Wniosek. Liniia AE może mieć iakąkolwiek wielkość, uważaiąc atoli że AE należy, do ustawionéy z wierzchołka, to iest że B iest wierzchołkiem, wtedy będzie $AB = \frac{a}{2}$. A że kąt $BAE = 45°$ (własność hyperboli równoramiennéy), kąt $AEB = 90°$, stąd kąt $ABE = 45°$, przeto $AE = EB$, a więc $AB^2 = AE^2 + AE^2$, czyli: $\frac{a^2}{4} = 2AE^2$, a tém samém $AE^2 = \frac{a^2}{8}$, zatrzymuiąc zaś iak wyżéy $AE = 1$, wypada, pod wymienionymi warunkami: $1 = \frac{a^2}{8}$. A tak pod temi samemi warunkami:

$$W = EBFG = \text{Log.} \frac{AG}{AE}.$$

To iest znayduie się powierzchnia $EBFG$, znayduiąc logarytm naturalny linii AG, uważanéy za liczbę, mierząc ią iednością za którą się $\frac{a^2}{8}$ bierze, czego wykonanie dokładnie iuż iest wiadomém z §fu 113.

§. 153. Uwaga. Chcąc znaleść powierzchnią zawartą między łukiem hyperboli równoramiennéy dwiema ustawionemi i częścią iednéy niedostycznéy podług przeszłego §., potrzeba znaleść logarytm naturalny, do części niedostycznéy zawartéy między środkiem osi pierwszéy i ustawioną (§. 152.), który daie żądaną powierzchnią pod znanymy warunkami. A tak obrachunek powierzchni hyperboli równoramiennéy na téy drodze, ścisle iest połączony z logarytmami naturalnemi, i dlatego to logarytmy naturalne, nazywaią się inaczéy, hyperboliczne, o czém iuż w §. 117 wzmianka uczynioną była.

§. 154. Zagadnienie. Jak obrachować powierzchnią Cyssoidy, zawartą między łukiem iéy i współustawionemi od wierzchołka?

Rozwiązanie. Równanie Cyssoidy od wierzchołka, iest takie:

$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, gdzie a, oznacza promień koła przy którym się Cyssoida tworzy. Z tego równania wypada:

$$y = \sqrt{\left(\frac{x^3}{2a - x}\right)} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(2.a - x)}} = \frac{x.x^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= x^{\frac{3}{2}}(2a - x)^{-\frac{1}{2}}; \text{ stąd:}$$

$$y.dx = x^{\frac{3}{2}}\, dx(2a - x)^{-\frac{1}{2}}; \text{ albo, biorąc } a = 1,$$

$$y.dx = x^{\frac{3}{2}}\, dx.(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

Dla całkowania, ostatniego równania zamienia się wyraz: $(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$ na szereg nieskończeny, znanym już dobrze sposobem. A tak będzie:

$$^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.2.^{-\frac{3}{2}}x + \frac{\frac{3}{4}.2.^{-\frac{5}{2}}x^2}{1.2} +$$

$$\frac{\frac{15}{8}.2.^{-\frac{7}{2}}x^3}{1.2.3} + \frac{\frac{7.15.}{16}2^{-\frac{9}{2}}x^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2.2.\sqrt{2}} + \frac{3x^2}{8.2^2\sqrt{2}} +$$

$$\frac{5x^3}{16.2^3\sqrt{2}} + \frac{35x^4}{128.2^4\sqrt{2}} \ldots\ldots$$

przeto:

$$y.dx = x^{\frac{3}{2}}dx\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2.2\sqrt{2}} + \frac{3x^2}{8.2^2\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{5x^3}{16.2^3\sqrt{2}} + \frac{35x^4}{128.2^4\sqrt{2}} \cdots\cdots\right)$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{\sqrt{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{2.2.\sqrt{2}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}\,dx}{8.2^2.\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{5x^{\frac{9}{2}}\,dx}{16.2^3.\sqrt{2}} + \frac{35x^{\frac{11}{2}}\,dx}{128.2^4.\sqrt{2}} \cdots$$

a zatém:

$$\int.y.dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.\sqrt{2}} + \frac{2.x^{\frac{7}{2}}}{7.2.2\sqrt{2}} + \frac{2.3x^{\frac{9}{2}}}{9.8.2^2\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{2.5.x^{\frac{11}{2}}}{11.16.2^3\sqrt{2}} + \frac{2.35.x^{\frac{13}{2}}}{13.128.2^4\sqrt{2}} \cdots$$

$$+ \text{Const.}$$

Dla wynalezienia całkowéy weźmy $x = 0$, a tak powierzchnia cała, iako też, każdy wyraz całkowéy iako maiący w sobie x, są Zerami; a przeto i ilość *Const.* $= 0$. A wiec:

$$\int.y\,dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.2.2.\sqrt{2}} + \frac{2.3x^{\frac{9}{2}}}{9.8.2^2\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{2.5x^{\frac{11}{2}}}{11.10.2^3.\sqrt{2}} + \frac{2.35x^{\frac{13}{2}}}{13.128.2^4\sqrt{2}} \cdots\cdots$$

iest zupełną całkową. Oznaczywszy x w wypadłym szeregu i obrachowawszy go przyzwoicie za pomocą ułamków dziesiątnych, wynayduiemy powierzchnią żądaną, pod warunkiem iż iedność którą się długość mierzy, iest promień koła, przy którym się Cyssoida kreśli.

§. 155. Zagadnienie. Jak obrachować powierzchnią muszlowéy linii, czyli konchoidy, zawartą między iey łukiem i współustawionemi do siebie prostopadłemi, zaczynaiącemi się od łuku?

Rozwiązanie. Niech BC (F. 12.) będzie łukiem konchoidy, $BD=x$, $DC=y$, a mamy tu znaleść wyraz na powierzchnią DBC. Ponieważ w Jeometryi analityczney pospolicie się równanie na konchoidę tworzy, w które, wchodzące x, od niedostyczney EF się zaczyna, a tém samém, które do naszego celu nie iest potrzebne, przeto nayprzód wynaydziemy tu równanie na konchoidę do współustawionych od łuku się zaczynaiących, a potem za pomocą tego równania okażemy iak wyżéy wzmiankowana powierzchnia, da się obrachować. Końcem tego poprowadźmy z punktu F równoległą do AB, przedłużoną aż do DC, nazywaiąc ią FG. A tak chcąc utworzyć równanie potrzebne, to iest takie, aby tu przyięte y, było wyrażone przez x i ilości nieodmienne, iakiemi tu są $AE=\beta$, $EB=FC=a$ (znane z wyobrażenia o konchoidzie) potrzeba nam uważać dwa tróykąty podobne: ADC, FGC, z których boków, utworzywszy proporcyą, aby w nią żadne zmienne, oprócz x i y, niewchodziły, potem wyrazy tey proporcyi potrzebnie wyraziwszy, i z nich równanie ułożywszy, to równanie będzie tu szukane. Z rzeczonych troykątów proporcya potrzebna iest ta:

$$AD : DC = FG : GC.$$

A że: $AD = AE + EB - DB = \beta + a - x$;

$DC = y$;

$$FG = ED = EB - DB = a - x;$$

$$GC = \sqrt{(FC^2 - FG^2)} = \sqrt{\left\{a^2 - (a-x)^2\right\}};$$

przeto powyższa proporcya, biorąc w mieysce iey wyrazów, wynalezione potrzebnie ich wartości, zamienia się na taką:

$$\beta + a - x : y = a - x : \sqrt{\left\{a^2 - (a-x)^2\right\}};$$

przeto:

$$(a-x).\, y = \sqrt{\left\{a^2 - (a-x)^2\right\}}.\, (\beta + a - x);$$

a tém samém:

$$(a-x)^2\, y^2 = \left\{a^2 - (a-x)^2\right\}.\, (\beta + a - x)^2,$$

$$= (a^2 - a^2 + 2ax - x^2).\, (\beta + a - x)^2,$$

$$= (2ax - x^2).\, (\beta + a - x)^2,$$

a zatém:

$$y^2 = \frac{(2ax - x^2).\, (\beta + a - x)^2}{(a-x)^2}$$

Wyciągaiąc zaś pierwiastek kwadratowy, z całego równania:

$$y = \frac{(\beta + a - x)}{a-x}.\, \sqrt{(2ax - x^2)};\quad \text{stąd:}$$

$$y.\, dx = \frac{(\beta + a - x)}{a-x}.\, dx.\, \sqrt{(2ax - x^2)},\quad \text{czyli:}$$

$$y.\, dx = \frac{(\beta + a - x)}{a-x}.\, dx.\, \sqrt{x}.\, \sqrt{(2a - x)};\quad \text{a zatém:}$$

$$\int.\, y.\, dx = \int.\left\{\frac{(\beta + a - x)}{a-x}\, dx.\, \sqrt{x}.\, \sqrt{(2a - x)}\right\}.$$

Znalazłszy daley szereg nieskończony podług binomium, do wyrazu $\sqrt{(2a - x)} = (2a - x)^{\frac{1}{2}}$, i pomnożywszy każdy iego wyraz, przez $\frac{(\beta + a - x)}{a - x} . dx . \sqrt{x}$, i znalazłszy całkową do utworzonego szeregu, sposobem wiadomym, ta daie żądaną powierzchnią.

§. 156. Zagadnienie. Jak obrachować powierzchnią logarytmicznéy linii, zawartą między iey łukiem, dwiema ustawionemi i częścią linii odcinków?

Rozwiązanie. Równanie linii logarytmicznéy iest takie:

$y . \frac{dx}{dy} = a$, gdzie a, oznacza podstyczną przy każdym systemacie nieodmienną (§. 101); przeto:

$y . dx = a dy$; a zatem:

$\int . y . dx = ay + Const.$

Dla wynalezienia tu ilości Const., bierze się $x = o$, w którym razie, cała powierzchnia zaczynaiąca się od tego punktu, w którym $x = o$, iest także równa Zeru, a $y = 1$ (§ 94), a tak będzie:

$o = ay + Const. = a + Const.$, a tem samém:

ilość $Const. = - a$; zatem:

$\int . y\, dx = ay - a = a(y - 1)$

iest zupełną całkową.