ne i skończone, będzie ogólne równanie na każdą logarytmiczną liniią takie: $\frac{y\,dx}{dy} = a$.

§. 102. Twierdzenie. Nazywaiąc iakąkolwiek liczbę y, iéy logarytm x, natenczas w każdym systemacie takie równanie ma mieysce: $x = a. \int . \left(\frac{dy}{y}\right)$.

Dowodzenie. Biorąc równanie ogólne na każdą liniią logarytmiczną, a tém samém na każdy systemat logarytmiczny, $\frac{y.\,dx}{dy} = a$, w którém y iest ustawioną, a x do dx należące, odcinkiem ustawionéy y, a tém samém y liczbą, a x logarytmem iakiegokolwiek systematu, do y należącym (§. 94), widzimy że z tego równania wypada takie: $y\,dx = a\,dy$, a przeto $dx = a. \frac{dy}{y}$. Całkuiąc zaś ostatnie równanie, będzie: $x = a. \int . \left(\frac{dy}{y}\right)$, które służy każdemu systematowi; gdyż $y\frac{dx}{dy} = a$, z którego przeszłe wypadło, służy każdemu.

§. 103. Wniosek. Z poprzedzaiącego §. pokazało się, że do każdéy liczby, w iakimkolwiek systemacie, znayduie się logarytm, mnożąc całkową, wyrazu $\frac{dy}{y}$, przez podstyczną tegoż systematu, która to podstyczna będzie oznaczona, skoro systém, to iest ilość zasadowa będzie oznaczona (§. 98.), iako też ilość zasadowa, a tém samém system będą oznaczone, kiedy się na a pewną wartość weźmie (§. 100 §. 101). Cała rzecz tedy idzie, chcąc rzeczywiście znaleść logarytm do pewnéy liczby, w pewnym systemacie, o umienie znaleść całkowéy ogólnéy, do ogólnego wyrazu $\frac{dy}{y}$. Zastanawiaiąc się nad rzeczonym wyrazem widzimy że tak, iak iest, niemożna go całkować; gdyż nie ma kształtu znanego różniczek, to iest, nie iest ani zbiorem poiedynczych różniczek, ani różniczką potęgi ilości y. A tak chcąc go całkować trzeba mu inny kształt nadać, a w szczególności taki, aby go za zbior poiedynczych różniczek uważać można, ztąd trzeba go na szereg nieskończony zamienić. Końcem tego, aby z dzielenia szereg nieskończony wypadł, bierze się iakiekolwiek $y = 1 + w$, dlaczego $x = \log. y = \log. (1 + w)$, gdzie także w iakąkolwiek ilością będzie, a tak równanie $x = a \int \left(\frac{dy}{y}\right)$ czyli $dx = a\frac{dy}{y}$, zamieni się na takie: $dx = a\frac{dw}{1+w}$. Dzieląc tutay tak daleko dw, przez $1+w$, iak chcemy, wynaydziemy szeregu nieskończonego tyle wyrazów ile nam się podoba. Szereg ten iest następuiący:

$$dx = a(dw - w.dw + w^2 dw - w^3 dw + w^4 dw - \\ - w^5 dw \ldots)$$

całkuiąc zaś (§. 90.) będzie:

$$x = a\left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} \ldots + \text{Const.}\right).$$

Dla wynalezienia tutay ilości Const., weźmy $w = 0$, a tak będzie, $y = 1 + w = 1$, przeto $x = 0$, (logarytm iedności z algebry iest Zero), a przeto ilość Const $= 0$, stąd powyższa całkowa bez ilości Const. iest zupełną. Pokazuie się tutay widocznie z kształtu szeregu, że aby się iego wyrazy prędko schodziły, musi bydź $w < 1$, a tém samém $y < 2$ dlaczego ten szereg, biorąc iakiekolwiek y ieszcze nie iest zupełnie dogodny; gdyż potrzeba podług niego wielu wyrazów szukać. Biorąc zaś $y = 1 - w$, gdzie $x = \log.\ (1 - w)$, będzie, z równania $x = a.\int.\left(\frac{dy}{y}\right)$, czyli: $dx = \frac{a\,dy}{y}$, także równanie: $dx = -\frac{a\,dw}{1-w}$. Dzieląc tu $-dw$, przez $1-w$, tak daleko iak chcemy, wynaydziemy szeregu nieskończonego tyle wyrazów, ile nam się będzie podobać, gdzie atoli z kilku wynalezionych, następstwo wszystkich dalszych, tak iak wyżey, pokazuie się. Szereg ten iest taki:

$$dx = a.(-dw - w.dw - w^2dw - w^3dw - w^4dw\ldots),$$

całkuiąc go zaś będzie:

$$x = a.\left(-w - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{5}w^5\ldots\right)$$

gdzie ilość Const., dla téy saméy przyczyny iak wyżéy iest Zero, a tém samém wynaleziona całkowa zupełna.

§ 104. Wniosek. Z przeszłego §. wiadomém iest, że:

$$\log.(1+w) = a\left(w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}w^5\ldots\ldots\right).$$

iako też:

$$\log.(1-w) = a\left(-w - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5}w^5\ldots\ldots\right).$$

A że dzieląc dwie liczby logarytmy ich się odciągaią, których rożnica daie logarytm ilorazu (co z algebry iest znaném); przeto z powyższych dwóch szeregow, tworzy się taki:

$$\log.\left(\frac{1+w}{1-w}\right)=a\left(2w+\frac{2}{3}w^3+\frac{2}{5}w^5+\frac{2}{7}w^7+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{9}w^9\ldots\ldots\right)$$
$$=2a\left(w+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}+\frac{w^7}{7}+\frac{w^9}{9}\ldots\ldots\right)$$
$$=2aw\left(1+\frac{w^2}{3}+\frac{w^4}{5}+\frac{w^6}{7}+\frac{w^8}{9}\ldots\ldots\right).$$

Szeregu tego wyrazy daleko prędzéy się przybliżaią do wartości prawdziwéy, aniżeli w §. 103; albowiem tutay ilość w, tylko w nieparzystych potęgach postępuie. Nadto, każdą liczbę można wyrazić przez $\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$, i zawsze na w, wypadnie ułamek właściwy (co się zaraz okaże); przeto ostatni szereg iest zupełnie dogodnym do szukania logarytmu, iakiéykolwiek danéy liczby, w iakimkolwiek systemacie, skoro tylko ilość a, podstyczna systematu iest oznaczona.

§. 105. Nazywaiąc iakąkolwiek liczbę B, na tenczas zawsze z równania $B=\frac{1+w}{1-w}$ da się w wynaleść, albowiem w niém, tylko iedna nieznana, to iest w, będzie. Szukaiąc tedy ilolości w, z powyższego rownania, będzte: $B-Bw=1+w$, a tém samém $B-1=Bw+w$, czyli: $B-1=(B+1).w$, a zatém: $w=\frac{B-1}{B+1}$, która to wartość iest zawsze ułamkiem właściwym (bo się mnieysza przez większą dzieli). A tak podług szeregu przeszłego (§. 104) da się rzeczywiście, do każdéy liczby, w każdym systemacie, logarytm wynaleść, przy oznaczonéy podstyczney, wyrażaiąc liczbę przez $\frac{1+w}{1-w}$, wynayduiąc wartość na w, i kładąc ią w mieysce w, w szereg. Szereg ten, będąc w zawsze ułamkiem właściwym, prędko się zbiega, lecz iednak tém prędzéy im w mnieysze.

§. 106. **Wniosek.** Wiedząc iuż że każdą liczbę można wyrazić przez: $\frac{1+w}{1-w}$ i że z niéy wartość na w oznaczona się podaie (§. 105), można także łatwo wynaleść podstyczną a, do systematu Brygga, to iest do takiego systematu w którym liczba 10 iest ilością zasadową, czyli w którym, $\log:10=1$ (§. 94.). I tak będzie tu: $10=\frac{1+w}{1-w}$ a przeto: $w=\frac{10-1}{10+1}=$ $=\frac{9}{11}$ (§. 105). Wiedząc tedy że $\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)=$ $=\log 10=1$; szereg znany (§. 104) zamienia się na taki:

$$1=2a\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{11^3.3}+\frac{9^5}{11^5.5}+\frac{9^7}{11^7.7}+\frac{9^9}{11^9.9}+\frac{9^{11}\ldots}{11^{11}.11}\right),$$

a przeto:

$$a=\frac{1}{2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{11^3.3}+\frac{9^5}{11^5.5}+\frac{9^7}{11^7.7}+\frac{9^9}{11^9.9}+\frac{9^{11}}{11^{11}.11}\ldots\right)}=$$

$=0,4342944819032518 27$ .... i t. d.

Liczba ta iest podstyczną niezmienną systematu Brigga *) któréy wartość iest ta podług Eulera:

*) Uwaga. Liczbę tę iak stoi wypisana, obrachowałem sam aż do 18 mieysc dziesiątnych i znalazłem aż do tych mieysc zgodność z Eulerem.

0,4342944819032518276511289....;
Maiąc zaś podsyczną systematu Brigga iuż znaną, łatwo bardzo podług znanego iuż dobrze szeregu, wynaydzie się logarytm do każdéy liczby w tymże systemacie. Szukaiąc n. p. logarytmu do liczby 13, w systemacie wymienionym, wtedy $13 = \frac{1+w}{1-w}$, a zatém:

$$w = \frac{13-1}{13+1} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}, \text{ iakoteż log. } \left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \text{log. } 13,$$

a tak szereg znany (§. 104) daie taki:

$$\text{log. } 13 = 2a\left(\frac{6}{7} + \frac{6^3}{7.^3 3} + \frac{6^5}{7.^5 5} + \frac{6^7}{7.^7 7} + \frac{6^9}{7.^9 9} + \right.$$
$$\left. + \frac{6^{11}}{7.^{11} 11} + \frac{6^{13}}{7.^{13} 13} \ldots\right).$$

Kładąc tu zamiast a, wynalezioną wyżey wartość, ułamki w nawiasie będące na dziesiątne zamieniaiąc; i razem przyzwoicie dodaiąc; iako też przez ilość 2, i wartość na a mnożąc, wypada:

log. 13 = 1,11394332 . . . .

Logarytmów atoli do wielkich liczb tym sposobem rzadko kiedy się szuka; albowiem trzebaby wiele wyrazów szeregu brać, a tém samém, mozolnie ie wynaydywać. Nayczęściey większe liczby daią się na czynniki całe lub łamane rozłożyć, a logarytmy czynników dodane razem daią logarytm iloczynu (znane z Algebry), czyli liczby danéy. N. p. szukaiąc logarytmu do liczby 25, uważaiąc, że logarytmy niższych liczb iuż są znane, będzie $25 = 6.4.x$, przeto $x = \frac{25}{6.4} =$ $= \frac{25}{24} = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{2}$, zatem: $25 = 6.\ 4.\ \frac{5}{12}\ .\ \frac{5}{2}$; a więc logarytmy liczb 6, 4, $\frac{5}{12}$ i $\frac{5}{2}$ dodane, daią logarytm liczby 25. Podobnie z wielu innemi daleko większemi liczbami, da się często postąpić. Pokazuie się tu nareszcie, że układaiąc system iakichkolwiek logarytmów, skróconym sposobem, potrzeba mieć nayprzod logarytmy, do liczb od 1 aż do 10, należące, wyrachowane.

§. 107. Wniosek. Biorąc szereg z §. 104, to iest:

$$\log.\left(\frac{1+w}{1-w}\right)=2a\left(w+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}+\frac{w^7}{7}+\frac{w^9}{9}\ldots\right)$$

widzimy, że także można z niego przy znaney podstyczney a, ilość zasadową, to iest c, wynaleść, i to w każdym systemacie. I tak będzie tutay: $c=\frac{1+w}{1-w}$, iako też: $\log.\left(\frac{1+w}{1-w}\right)=\log. c=1.$, a przeto pomieniony szereg zamieni się na taki:

$$1=2a\left(w+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}+\frac{w^7}{7}+\frac{w^9}{9}\ldots\right);$$

stąd:

$$\frac{1}{2a}=w+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}+\frac{w^7}{7}\ \ldots\ ;$$

a tém samém:

$$\frac{1}{2a}-w-\frac{w^3}{3}-\frac{w^5}{5}-\frac{w^7}{7}\ \ldots\ =0.$$

A tak utworzyło nam się równanie sprowadzone do Zera, w którém iakimkolwiek sposobem można znaleść wartość na w, a następnie z równania powyższego: $c=\frac{1+w}{1-w}$, wartość na c, to iest cośmy powiedzieli. Lecz zastanawiaiąc się nad wspomnionem równaniem, odkrywamy daley że w niém ilość nieznana w, postępuie bez końca iako potęga z coraz większym wykładnikiem; a przeto na w, znayduie się nieskończona liczba wartości. Z wartości tych iedna iest dodatna; gdyż się znayduie iedna przemiana znaków, ta dodatna iest oraz prawdziwą; gdyż przywróciwszy równanie do pierwszéy formy szeregu, szereg wyraża odcinek do iakieykolwiek ustawionéy większéy od iedności, który to odcinek, a zatem i iedna wartość, na w iest dodatna i prawdziwa (§. 94). Lecz wszystkie inne wartości są uiemne, lub uroione. Gdyby były uiemne, wszystkie potęgi ilości w, w szeregu, iako nieparzyste, byłyby także uiemne, a zatem w równaniu byłyby dodatne. Co że nie iest, wszystkie inne wartości na w, uiemne bydź niemogą; a zatem wszystkie inne wartości na w, których iest nieskończóna liczba, są uroione. A że $c = \frac{1 + w}{1 - w}$; stąd także c, ma tylko iednę wartość prawdziwą, a nieskończenie wiele uroionych. Wreszcie $c^x = y$, a więc i każde y, a tém samém $\log. y$, to iest logarytm każdey liczby, w każdym systemacie ma tylko iednę wartość prawdziwą, a nieskończenie wiele, uroionych. Tą wartością iedną prawdziwą na Logarytm, iest tylko odcinek linii logarytmicznéy, należący do ustawioney równéy liczbie, do którey logarytm należy.

§. 108. **Zagadnienie.** Jak maiąc dany logarytm, wyrazić liczbę do niego należącą przez szereg nieskończony, któregoby wyrazami potęgi logarytmu były, to iest, iak do danego logarytmu szukać liczby nieznanéy, do niego należącéy, za pomocą szeregu nieskończonego.

Rozwiązanie. Dany logarytm niech się nazywa x, liczba do niego należąca y, a tak potrzeba y, wyrazić przez x. A że $y = 1 + w$, stąd dosyć iest tylko wynaleść w. Końcem tego biorąc równanie z §. 103, $dx = \frac{a\,dw}{1+w}$, z tego wypada: $dx + w dx = a dw$, czyli: $dw = \frac{dx}{a} + \frac{w\,dx}{a}$, które nazywam A. Chcąc tutay w, wyrazić przez x, potrzeba koniecznie nayprzód w, będące na prawey stronie, wyrazić częścią przez x, częścią przez pewną nieznaną, powtore ta pewna nieznana musi znowu bydź wyrażona częścią przez x; częścią zaś przez dalszą nieznaną; co się tak długo robi, przerabiaiąc zawsze równania z A wypadaiące, dopóki się kształtu szeregu żądanego dokładnie nieodkryie, w którym razie, rzecz skończona. Zastanawiaiąc się dlatego nad równaniem A; widzimy że pierwszym wyrazem na prawey stronie iest $\frac{dx}{a}$, którego całkowa $\frac{x}{a}$, a tak może bydź: $w = \frac{x}{a} + p$, gdzie p iest ilością nieznaną, zastępuiącą wyraz: $\frac{w\,dx}{a}$, i mnieyszą od w. Kładąc tedy w równanie A, zamiast w, iego wartość wypada:

$$dw = \frac{dx}{a} + \left(\frac{x}{a} + p\right) . \frac{dx}{a}, \text{ czyli:}$$

$$dw = \frac{dx}{a} + \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{p\,dx}{a}, \text{ które to równa-}$$

nie nazywam B. Całkuiąc zaś równanie B, i kładąc zaraz zamiast w, iego wartość; będzie:

$$\frac{x}{a} + p = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{px}{a}, \text{ a tém samém:}$$

$$p = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{px}{a}; \text{ gdzie dla przyczy wyżey wy-}$$

mienioney, biorąc: $\frac{px}{a} = q$, wypada:

$p = \frac{x^2}{2a^2} + q$, i ilość q nieznana iest mnieyszą od p, a tem bardziey od w. Kładąc daley w równanie B, zamiast p, iego wartość, wypada:

$$dw = \frac{dx}{a} + \frac{xdx}{a^2} + \left(\frac{x^2}{2a^2} + q\right)\frac{dx}{a},$$

czyli:

$$dw = \frac{dx}{a} + \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{2a^3} + q.\frac{dx}{a},$$

i to niech się nazywa C. Całkuiąc daley równanie C, i kładąc zaraz zamiast w, i w niém będącego p, wartość, będzie:

$$\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + q = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3.2a^3} + \frac{qx}{a},$$

a tém samém: $q = \frac{x^3}{3.2.a^3} + \frac{qx}{a}$, czyli, biorąc:

$\frac{qx}{a} = r$, $q = \frac{x^3}{3.2.a^3} + r$, gdzie znowu ilość r, nieznana, iest mnieysza od q, a tem bardziéy od p, a iescze bardziey od w. Kładąc następnie w równanie C, zamiast q, iego wartość, wypada:

$$dw = \frac{dx}{a} + \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{2a^3} + \left(\frac{x^3}{3.2a^3} + r\right)\frac{dx}{a},$$

czyli:

$$dw = \frac{dx}{a} + \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{2a^3} + \frac{x^3 dx}{3.2.a^4} + \frac{r.dx}{a},$$

które równanie, chcąc iść ieszcze daléy, nazywam D. Całkuię równanie D, i w niém w mieysce w i iego części p, q, kładę wartości, a tak wypada:

$$w=\frac{x}{a}+p=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+q=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+$$

$$+\frac{x^3}{3.2a^3}+r=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3.2.a^3}+\frac{x^4}{4\,3.2a^4}+$$

$$+\frac{rx}{a},$$

a tém samém: $r=\frac{x^4}{4.3.2a^4}+\frac{rx}{a}$, biorąc zaś: $\frac{rx}{a}=s$,

będzie $r=\frac{x^4}{4.3.2.a^4}+s$, gdzie o ilości s, tożsamo się rozumie co wyżéy o p, q, r. Kładę wreszcie w równanie D, zamiast r, iego wartość: a tak wypada:

$$dw=\frac{dx}{a}+\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{x^2\,dx}{2.a^3}+\frac{x^3\,dx}{3.2.a^4}+\left\{\frac{x^4}{4.3.2a^4}+s\right\}.\frac{dx}{a},$$

czyli:

$$dw=\frac{dx}{a}+\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{x^2\,dx}{2.a^3}+\frac{x^3\,dx}{3.2.a^4}+\frac{x^4\,dx}{4.3.2.a^5}+\frac{s\,dx}{a},$$

które to równanie iuż zupełnie kształt szeregu szukanego pokazuie; albowiem robiąc z ilością s, i wszystkiemi dalszemi coraz mnieyszemi nieznanemi, tożsamo, co się wyżey z ilościami, p, q, r, robiło, zawsze wypadaią wyrazy szeregu, co raz dalsze, w tym samym porządku iak dotąd. A tak ogólna forma szeregu nieskończonego, szukanego iest:

$$dw=\frac{dx}{a}+\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{x^2\,dx}{2.a^3}+\frac{x^3\,dx}{3.2.a^4}+\frac{x^4\,dx}{4.3.2\,a^5}+\frac{x^5\,dx}{5.4.3.2a^6}\dots$$

Całkuiąc zaś szereg, będzie:

$$w=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2.a}+\frac{x^3}{3.2a^3}+\frac{x^4}{4.3.2a^4}+\frac{x^5}{5\,4.3.2\,a^5}\dots+\text{Const.}$$

Dla wynalezienia tutay ilości Const., weźmy $w=0$, a tak będzie: $y=1+w=1$, stąd log. $y=x=\log. 1=0$; a więc także ilość Const. $=0$. To iest:

$$w=\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3.2a^3}+\frac{x^4}{4.3.2.a^4}+\frac{x^5}{5.4.3.2.a^5}+$$
$$+\frac{x^6}{6.5.4.3.2.a^6}\ldots\ldots\ldots$$

iest zupełną całkową. Pokazało się tedy, że zawsze

$$y=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3.2a^3}+\frac{x^4}{4.3.2a^4}+\frac{x^5}{5.4.3.2a^5}\ldots$$

§. 109. Wniosek. Z poprzedzaiącego §fu pokazuie się iasno, iak można wynaleść ustawioną, do odcinka równego podstyczney, w iakimkolwiek systemacie. I tak ustawiona ta niech się nazywa M, a tak: $M=y=1+w$, odcinek zaś iey $x=a$; a przeto szereg powyższy (§. 108) zamienia się na taki:

$$M=1+\frac{a}{a}+\frac{a^2}{2.a^2}+\frac{a^3}{3.2a^3}+\frac{a^4}{4.3.2a^4}+\frac{a^5}{5.4.3.2a^5}\ldots$$

czyli:

$$M=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2.}+\frac{1}{4.3.2}+\frac{1}{5.4.3.2}+\frac{1}{6.5.4.3.2}\ldots$$

Co wykonane przyzwoicie, za pomocą ułamków dziesiątnych, daie:

$$M=2,71828182845904523536028\ldots$$

A że M w każdym systemacie, zawsze się z tego samego ogólnego szeregu (§. 108) wynayduie, gdzie znosząc się podstyczna, zawsze na M taż sama wartość wypada; przeto widzimy że M, to iest ustawiona, któréy odcinkiem iest podstyczna, we wszystkich liniiach logarytmicznych, a tém samém we wszystkich systematach logarytmicznych, iakie sobie tylko wystawić można, iest zawsze iako liczba, tażsama *). Będziemy odtąd tę ustawioną wszystkim systematóm wspólną, zgłoską M nazywać.

§. 110. Definicya. Logarytmy naturalne, to iest: system logarytmów naturalnych, iest ten, w którym podstyczna, czyli ilość $a = 1$.

§. 111. Wniosek. Ponieważ ilością zasadową w każdym systemacie, iest ustawiona, któréy logarytm, czyli odcinek, to iest $x = 1$ (§. 94.); przeto w systemacie logarytmów naturalnych, iest ilością zasadową, to iest ustawioną należącą do odcinka równego iedności, a tém samém do odcinka równego podstycznéy (§. 110) nieodmienna we wszystkich systematach ustawiona, czyli ilość M (§. 109.)

§. 112. A tak uważaiąc że $BC = BD = 1$, (F 7), i $DF = M$; wtedy liniia logarytmiczna CF; wystawia nam system logarytmów naturalnych; gdyż każda inna ustawiona do odcinka równego podstycznéy poprowadzona iako równa ustawionéy M (§. 109.) musi z wyobrażenia o linii logarytmicznéy (§. 99.) z tego samego punktu D, wychodzić, dlaczego $BD = 1 = a$ iest. (§. 110.).

§. 113. Wniosek. Wiedząc iuż co są logarytmy naturalne, i maiąc szereg do szukania logarytmów we wszelakich systematach (§. 104) należących do liczb

---

*) Uwaga. Tę ustawioną niezmienną obrachowałem sam, i znalazłem ią taką, iaka tu stoi. W Eulerze na 23 mieyscu stoi liczba 8. Mnie zawsze 9 po kilku - razowey robocie wypadło.

danych, potrafimy z łatwością znaleść do każdéy liczby iéy logarytm naturalny. I tak szukaiąc logarytmu naturalnego do liczby 2, będzie: $2 = \frac{1+w}{1-w}$, a tém samém: $w = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$, iako też $\log 2 = \log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$; a tak, biorąc szereg znany i w nim zamiast ilości a, w, i $\log.\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ wartości, wypada:

$$\log 2. = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3.3} + \frac{1}{3^5.5} + \frac{1}{3^7.7} + \frac{1}{3^9.9} + \frac{1}{3^{11}.11} \ldots\right).$$

Podobnie postępuiąc znayduiemy logarytmy naturalne do liczb, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, i t. d., których szeregi są następuiące:

$$\log 3 = 2.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3\,3} + \frac{1}{2^5.5} + \frac{1}{2^7.7} + \frac{1}{2^9.9} + \frac{1}{2^{11}.11} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{13}.13} \ldots\right);$$

$$\log 4 = 2.\left(\frac{3}{5} + \frac{3^3}{5^3.3} + \frac{3^5}{5^5.5} + \frac{3^7}{5^7.7} + \frac{3^9}{5^9.9} + \right.$$

$$\left. + \frac{3^{11}}{5^{11}.11} + \frac{3^{13}}{5^{13}.13} \ldots\right);$$

$$\log 5 = 2.\left(\frac{2}{3} + \frac{2^3}{3^3.3} + \frac{2^5}{3^5.5} + \frac{2^7}{3^7.7} + \frac{2^9}{3^9.9} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{11}}{3^{11}.11} + \frac{2^{13}}{3^{13}.13} \ldots\right);$$

$$\log 6 = 2.\left(\frac{5}{7} + \frac{5^3}{7^3 3} + \frac{5^5}{7^5 5} + \frac{5^7}{7^7 7} + \frac{5^9}{7^9 9} + \right.$$

$$\left. + \frac{5^{11}}{7^{11} 11} + \frac{5^{13}}{7^{13} 13} \ldots \right);$$

$$\log 7 = 2.\left(\frac{3}{4} + \frac{3^3}{4^3 3} + \frac{3^5}{4^5 5} + \frac{3^7}{4^7 7} + \frac{3^9}{4^9 9} + \right.$$

$$\left. + \frac{3^{11}}{4^{11} 11} + \frac{3^{13}}{4^{13} 13} \ldots \right);$$

$$\log 8 = 2.\left(\frac{7}{9} + \frac{7^3}{9^3 3} + \frac{7^5}{9^5 5} + \frac{7^7}{9^7 7} + \frac{7^9}{9^9 9} + \right.$$

$$\left. + \frac{7^{11}}{9^{11} 11} + \frac{7^{13}}{9^{13} 13} \ldots \right);$$

$$\log 9 = 2.\left(\frac{4}{5} + \frac{4^3}{5^3 3} + \frac{4^5}{5^5 5} + \frac{4^7}{5^7 7} + \frac{4^9}{5^9 9} + \right.$$

$$\left. + \frac{4^{11}}{5^{11} 11} + \frac{4^{13}}{5^{13} 13} \ldots \right);$$

$$\log 10 = 2.\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{11^3 3} + \frac{9^5}{11^5 5} + \frac{9^7}{11^7 7} + \frac{9^9}{11^9 9} + \right.$$

$$\left. + \frac{9^{11}}{11^{11} 11} + \frac{9^{13}}{11^{13} 13} \ldots \right).$$

Wykonywaiąc wszystko przyzwoicie co szeregi wskazuią, za pomocą ułamków dziesiątnych, wypada:

log. 2 = 0,6931471805599453093 ....
log. 3 = 1,0986122886681096912 ....
log. 4 = 1,3862943611198906186 ....
log. 5 = 1,6094379124341005744 ....
log. 6 = 1,7917594692280550006 ....
log. 7 = 1,9459101371707443148 ....
log. 8 = 2,0794415416798359280 ....
log. 9 = 2,1972245773362193825 ....
log. 10 = 2,3025850929940456837 ....

§. 114. Twierdzenie. Logarytmy różnych systematów, do iedney liczby należące, maią się do siebie iak podstyczne ich systematów.

Dowodzenie. Niech podstyczna iednego systematu nazywa się a, drugiego a'; ilość zasadowa pierwszego c, drugiego c'; liczba w obydwóch y; logarytm pierwszego x, a drugiego x'. A tak trzeba dowieść że $x:x'=a:a'$. Cała rzecz tedy idzie o okazanie że ułamki, $\frac{x}{a}$ i $\frac{x'}{a'}$ są sobie równe; bo z równości tych ułamków wypada założona proporcya. Chcąc zaś dowieść że rzeczone ułamki są sobie równe, potrzeba koniecznie z danych warunków wynaleść dwie potęgi równe, z iednego pierwiastka powstaiące, maiące rzeczone ułamki za wykładniki, co robimy tym sposobem: $y=c^x$ w iednym systemacie, iako też: $y=c'^{x'}$ w drugim (§. 94), a przeto: $c^x=c'^{x'}$. A że: $c^a=M$ (§. 109. §. 94), iako też dla tey samey przyczyny: $c'^{a'}=M$; przeto z pierwszego będzie: $c=M^{\frac{1}{a}}$ a tém samém: $c^x=M^{\frac{x}{a}}$; z drugiego zaś: $c'=M^{\frac{1}{a'}}$

ą tém samém: $c^{x'} = M^{\frac{x'}{a'}}$. Biorąc tedy w równaniu powyższem: $c^x = c'^{x'}$, zamiast c^x i $c'^{x'}$, wynalezione wartości, wypada: $M^{\frac{x}{a}} = M^{\frac{x'}{a'}}$ wyżéy wspomnione potrzebne potęgi, a przeto: $\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}$, ą tém samém: $x : x' = a : a'$, to iest, co się powiedziało.

§. 115. Wniosek. Nazywaiąc iakąkolwiek liczbę y, iéy logarytm naturalny $Log.\ y$, logarytm zaś stuczny n. p. Brigga téy saméy liczby $log.\ y$, a podstyczną systematu Brigga, a, natenczas podług przeszłego wypada: $Log\ y : log.\ y = 1 : a$ (§. 110.); a przeto: $log.\ y = Log.\ y . a$, iako też: $a = \frac{log.\ y}{Log.\ y}$. Biorąc zaś $y = 10$, w którym razie w systemacie Brigga, $log\ y = log\ 10 = 1$ wypada, wtedy powyższe równanie: $a = \frac{log.\ y}{Log.\ y}$ zamienia się na takie: $a = \frac{1}{Log.\ 10}$. To iest logarytm Brigga znayduie się do każdéy liczby, mnożąc logarytm naturalny teyże liczby, przez podstyczną systematu Brigga; podstyczna zaś systematu Brigga, znayduie się, dzieląc iedność przez logarytm naturalny liczby 10. —

§. 116. Uwaga. Dwoiakim tedy sposobem, okazaliśmy szukanie do danéy liczby logarytmu Brigga, i podstycznéy tegoż systematu: raz w §. 106, a drugi raz w §. przeszłym. Atoli obydwa te sposoby tylko są co do słów różne; co do istoty rzeczy zaś, to iest co do całéy roboty, ieden a drugi sposób iest wszystko toż samo, dlaczego ieden od drugiego nie iest ani krótszym ani dłuższym, o czém iednak Lorenz p. 574, §. 370 i §. 377 zdaie się fałszywe mieć wyobrażenie. I tak z §. 106 wypadło:

$$a = \frac{1}{2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{11^3 \cdot 3}+\frac{9^5}{11^5 \cdot 5}+\frac{9^7}{11^7 \cdot 7}+\frac{9^9}{11^9 \cdot 9}+\frac{9^{11}}{11^{11} \cdot 11}\ldots\right)},$$

gdzie cały mianownik iest logarytmem naturalnym liczby 10, (§. 113); a więc znayduie się tu podstyczna *a*, dzieląc iedność przez logarytm naturalny liczby 10, a tém samém zupełnie tożsamo, co w §. 115. Także z §. 106 wypadło:

$$\log. 13 = 2a\left(\frac{6}{7}+\frac{6^3}{7^3 \cdot 3}+\frac{6^5}{7^5 \cdot 5}+\frac{6^7}{7^7 \cdot 7}+\frac{6^9}{7^9 \cdot 9}+\frac{6^{11}}{7^{11} \cdot 11}+\frac{6^{13}}{7^{13} \cdot 13}\ldots\ldots\right)$$

w systemacie Brigga, gdzie cały nawias pomnożony przez 2. daie logarytm naturalny liczby 13 (§. 113), a więc znayduie się tu logarytm Brigga, mnożąc logarytm naturalny liczby 13, przez podstyczną *a*, systematu Brigga, a *tém samém zupełnie tożsamo* co w §. 115. Dlatego przy tych dwóch sposobach, które są tylko iednym, niemożna myśleć że ieden od drugiego w rachunku iest dogodnieyszym, co w wyżéy wspomnioném mieyscu Lorenz mniemał.

§. 117. Uwaga. Znanych systematów logarytmicznych mamy dotąd trzy.

1) Logarytmy pospolite czyli Brigga których ilością zasadową iest liczba 10. Logarytmy te są niezmiernie użyteczne w całéy matematyce do skracania działań, co z algebry wiadomém bydź powinno.

2) Logarytmy naturalne, których podstyczną iest iedność. *Użytek tych logarytmów chociaż nie służą* do skrócenia rachunku iak pospolite, iest iednak wielki n. p. w wyższéy mechanice gdzie wyraz $\frac{dy}{y}$ którego całkowa iest logarytm naturalny do *y*, często

się w rachunku znayduie. Równie potrzebne są przy krzywych liniiach, co iuż w następuiącym rozdziale się pokaże. Logarytmy te nazywaią się inaczéy hyperboliczne, dlatego że kwadrowanie hyperboli równoramiennéy na nich się zasadza, o czém właśnie w przysłym rozdziale.

3) Logarytmy Neppera, o których iednak ilości zasadowéy niemamy zupełnéy pewności. Kaestner bierze za nią liczbę: 9999990000005. *Astron. T.* 2. *p.* 68. Są ieszcze oprócz tego logarytmy paraboliczne, podaiące się z hyperbolicznych, których atoli użytek do tąd nieznany. W ogólności systematów logarytmów moglibyśmy tworzyć tyle, ileby nam się podobało, co iest widoczném z tego co się o nich powiedziało, atoli rzeczywiście potrzebne są tylko pospolite i naturalne.

ROZDZIAŁ VI.

Zastósowanie rachunku różniczkowego i całkowego do odwrotnéy teoryi stycznych, do prostowania liniy krzywych i do wynaydowania ich powierzchni.

§. 118. **Definicya.** Sposób wynaydowania liniy krzywych należących do danych pewnych własności tychże, to iest do wartości podstycznych, stycznych, podnormalnych i normalnych, nazywa się odwrotną teoryą stycznych; gdyż tu się odwrotnie postępuie, względem tego, iak się postępowało szukaiąc do krzywych liniy rzeczonych prostych.