Dodaiąc zaś do obydwóch stron ostatniego równania dx^2, dla wprowadzenia różniczki, będzie:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px}{a}\right)} \cdot dx^2 + dx^2,$$

$$= \left\{ \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right\} . dx^2;$$

przeto:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx . \sqrt{\left\{ \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right\}};$$

a zatém:

$$\int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int . dx . \sqrt{\left\{ \frac{\left(p + \frac{2px}{a}\right)^2}{4\left(px + \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right\}}.$$

§. 131. Zagadnienie. Jak obrachować Cyssoidę przy danych współustawionych do siebie prostopadłych.

Rozwiązanie. Weźmy równanie Cyssoidy od wierzchołka, które iest: $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (znane z Jeometryi analityczné y), a tak będzie:

$$2y\,dy = \frac{(2a - x)\,3x^2\,dx + x^3\,dx}{(2a - x)^2} \quad (\text{§. } 52),$$

czyli:

$$2y\,dy = \frac{\left\{(2a-x).\,3x^2 + x^3\right\}.\,dx.}{(2a-x)^2}$$

Wykonywuiąc zaś mnożenie w nawiasie zaznaczone, będzie:

$$2y\,dy = \frac{(6ax^2-2x^3)\,dx.}{(2a-x)^2}$$

Dzieląc daléy całe rownanie przez $2y$, wypada:

$$dy = \frac{(3ax^2-x^3)\,dx}{y.\,(2a-x)^2};\quad \text{stąd:}$$

$$dy^2 = \frac{(3ax^2-x^3)^2.\,dx^2}{y^2.\,(2a-x)^4},$$ czyli biorąc wartość na y^2, z równania cyssoidy:

$$dy^2 = \frac{(3ax^2-x^3)^2.\,dx^2}{\left(\frac{x^3}{2a-x}\right)(2a-x)^4} = \frac{(9a^2x^4-6ax^5+x^6).\,dx^2}{\frac{x^3}{2a-x}.\,(2a-x)^4} =$$

$$= \frac{(9a^2x-6ax^2+x^3).\,dx^2.}{(2a-x)^3}$$

A dodaiąc do obydwóch stron dx^2, będzie:

$$dx^2+dy^2 = \frac{(9a^2x-6ax^2+x^3).\,dx^2}{(2a-x)^3} + dx^2,$$

czyli, wyniosłszy mianownik do naznaczonéy potęgi, i pomnożywszy przez niego dx^2:

$$dx^2+dy^2 = \frac{(9a^2x-6ax^2+x^3).\,dx^2}{(2a-x)^3} +$$

$$+ \frac{(8a^3-12a^2x+6ax^2-x^3).\,dx^2}{(2a-x)^3} =$$

$$= \frac{(8a^3-3a^2x)\,dx^2}{(2a-x)^3} = \frac{a^2.(8a-3x).\,dx^2}{(2a-x)};$$

przeto:

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a.\,dx}{2a-x} . \sqrt{\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right)};$$

a więc:

$$\int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int . \frac{a.\,dx}{2a-x} . \sqrt{\left(\frac{8a-3x}{2a-x}\right)}.$$

§. 132. Zagadnienie. Jak obrachować liniią logarytmiczną?

Rozwiązanie. Wziąwszy równanie linii logarytmicznéy $y\frac{dx}{dy} = a$ (§. 101), z tego się podaie: $dx = \frac{a\,dy}{y}$, stąd: $dx^2 = \frac{a^2\,dy^2}{y^2}$, przeto;

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2\,dy^2}{y^2} + dy^2,\ \text{czyli:}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{(a^2 + y^2)\,dy^2}{y^2};\ \text{więc:}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{y} . \sqrt{(a^2 + y^2)},\ \text{a zatém:}$$

$$\int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int . \frac{dy}{y} . \sqrt{(a^2 + y^2)}.$$

W systemacie zaś logarytmów naturalnych, gdzie $a = 1$, będzie: $\int . \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int . \frac{dy}{y} . \sqrt{(1 + y^2)}$.

§. 133. Zagadnienie. Jak znaleść różniczkę powierzchni, zawartéy między dwiema współustawionemi i łukiem iakiéykolwiek krzywéy linii?

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ współustawione mogą bydź raz do siebie prostopadłe, a drugi raz pochyłe, przeto dwa przypadki mamy szukania rzeczonéy różniczki.

1) Mieymy (F. 2.) powierzchnią A B D, zawartą między łukiem A B, iakieykolwiek krzywéy, i współustawionemi $AD=x$, $DB=y$ do siebie prostopadłemi, a różniczkę iey znaydziemy tym sposobem. Weźmy iakikolwiek przyrostek nieoznaczony łuku AB, np. BDC; z punktu C poprowadźmy równoległą do BD, to iest CE, i z punktu B równoległą do AE, nazywaiąc ią BH. A tak $BH=DE=\Delta x$, $CH=\Delta y$. Nadto widoczném iest, że powierzchnia ABD zawisła i tym samym sposobem od AD i DB, iak powierzchnia ACE od AE i EC, a tém samém, że powierzchnia ABD iest tą samą funkcyą ilości x i y, iaką powierzchnia ACE ilości $x+\Delta x$ i $y+\Delta y$. Daléy powierzchnia prostokąta $DBHE = DB \times DE = y.\Delta x$; powierzchnia zaś tróykąta $BHC = \frac{\Delta x.\,\Delta y}{2}$.

A tak, nazywaiąc powierzchnią ABD, S, w którym razie przyrostkiem nieoznaczonym ilości S, iest figura $DBdCE$, będzie:

$$\Delta S = DBdCE = y.\Delta x + \frac{\Delta x.\Delta y}{2} + BdCm.$$

Przybliżaiąc wreszcie CE ciągle ku BD, powierzchnie $y.\Delta x$, $\frac{\Delta x\,\Delta y}{2}$ i $BdCm$ ciągle się zmnieyszaią. Biorąc zaś CE za nieskończenie bliskie od BD, dlaczego Δx i Δy będą nieskończenie małe, a łuk BdC cięciwę BC pokryie, wtedy w równaniu $\Delta S = y\Delta x + \frac{\Delta x.\Delta y}{2} + BdCm$, wyrazy $\frac{\Delta x.\Delta y}{2}$ i $BdCm$

obydwa, są tylko iednym wyrazem $\frac{\Delta x . \Delta y}{2}$, i ten wyraz, to iest $\frac{\Delta x . \Delta y}{2}$ iako nieskończenie mały drugiego rzędu względem $y \Delta x$, który iest nieskończenie małym pierwszego rzędu, staie się równym Zeru (§ 29.) będąc tu za stósunkiem; a więc wypada: $\Delta S = y \Delta x$, czyli: $dS = y dx$ (§. 34.) co iest żądaną różniczką do prostopadłych współustawionych.

2) Maiąc powierzchnią ABD (F. 4.); łuk iakiéykolwiek krzywéy AB; współustawione $AD = x$, $BD = y$, pochyłe. A tak poprowadziwszy CE równoległą do BD i BL równoległą do AE, nadto, z punktu B spuściwszy prostopadłą na AE, która niech się nazywa BM, utworzy się równoległobok $DBLE$, który będzie, uważaiąc CE za nieskończenie bliskie od BD, różniczką powierzchni ABD, dla téy saméy przyczyny iak wyżéy. A że prostopadła $BM = y. Wsq$ (§. 120), dlaczego powierzchnia równoległoboku $DBLE = DE . BM = dx . y Ws . q$; przeto nazywaiąc powierzchnią ABD, także S, iak wyżéy wypada:

$$dS = DBLE = dx . y . W sq.$$

To iest żądana różniczka do pochyłych współustawionych iest: $Wsq . y . dx$.

§. 134. Wniosek. Chcąc tedy znaleść powierzchnią iakieykolwiek linii krzywéy, któréy równanie czyli funkcya iest znana, różniczkuie się rzeczone równanie, daie mu się potrzebna forma; aby na iednéy stronie sama różniczka powierzchni stała; i potém, przygotowawszy drugą stronę do całkowania, całkuie się, a całkowa drugiéy strony, iako prawdziwa funkcya różniczki powierzchni, daie powierzchnią żądaną, to iest do danych współustawionych należącą.

§. 135. Zagadnienie. Jak znaleść część powierzchni koła, między współustawionemi od środka, do siebie prostopadłemi łukiem i promieniem, zawartą?

Rozwiązanie. Mieymy koło (F. 8.) w którém: $CE = x$, $CD = y$, promień EF lub $DE = a$. Mamy tu znaleść powierzchnią $CDFE$, co się robi tym sposobem: Bierzemy równanie koła od środka, to iest: $y^2 = a^2 - x^2$, a tém samém: $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, a więc: $y.dx = dx.\sqrt{(a^2 - x^2)} = dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Maiąc tedy iuż wyraz: $dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ równy różniczce danéy powierzchni (§. 133.), zamieniamy go na szereg nieskończony, za pomocą binomium, aby go modz całkować. A tak

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{1}{2}.a.^{-1}x^2 - \frac{\frac{1}{4}.a.^{-3}x^4}{1.2} - \frac{\frac{3}{8}.a.^{-5}x^6}{1.2.3} - \frac{\frac{15}{16}.a.^{-7}x^8}{1.2.3.4} - \frac{\frac{105}{32}a^{-9}x^{10}}{1.2.3.4.5} \dots\dots\dots$$

czyli:

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{21x^{10}}{768a^9} \dots\dots\dots\dots$$

a więc:

$$y.dx = dx.\sqrt{(a^2 - x^2)} = dx.(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7} - \frac{21x^{10}dx}{768a^9} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

a zatém:

$$\int.ydx = ax - \frac{x^3}{3.2a} - \frac{x^5}{5.8a^3} - \frac{x^7}{7.16a^5} - \frac{5x^9}{9.128a^7} - \frac{21x^{11}}{11.768a^9} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

która to całkowa iuż iest zupełną; albowiem biorąc $x = 0$, także powierzchnia cała będzie Zerem iako też wszystkie wyrazy wynalezionéy całkowéy, gdyż w nie x wchodzi, będą Zerami, a zatém i ilość *Const.* = 0. Biorąc tutay promień, to iest $a = 1$, powyższy szereg zamienia się na taki:

$$\int.ydx = x - \frac{x^3}{3.2} - \frac{x^5}{5.8} - \frac{x^7}{7.16} - \frac{5x^9}{9.128} - \frac{21x^{11}}{11.768} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Całkowe powyższe, oznaczywszy wartość na x, obrarachowane przyzwoicie za pomocą ułamków dziesiątnych, daią żądaną powierzchnią.

§. 136. Wniosek. Zachowuiąc $a = 1$, i biorąc także $x = a = 1$, natenczas z powyższych ostatni szereg, zamienia się na taki:

$$\int.ydx = 1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.8} - \frac{1}{7.16} - \frac{5}{9.128} - \frac{21}{11.768} \ldots$$

czyli:

$$\int y.dx = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{21}{8448} \ldots\ldots$$

To iest, pod wzmiankowanymi warunkami, czwarta część powierzchni koła, albo:

$$AFE = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{21}{8448} \ldots$$

§. 137. Wniosek. Część powierzchni koła (Fig. 8.) *CDFE* można także zupełnie bez wyższéy analizy obrachować iedynie za pomocą liniy trygonometrycznych maiąc tylko łuk *DF* znany, który niech się tu nazywa *m*. I tak rzeczona część koła składa się z wycinka *DEF* i prostokątnego tróykąta *CDE*; a przeto:

$$CDEF = \frac{m}{2}.DE + \frac{CE}{2}.CD = \frac{m}{2}.DE + \frac{x}{2}.y.$$

Nazywaiąc zaś promień, to iest *DE*, *a*, i wiedząc że $CE = x$ iest wstawą łuku *m*; $CD = y$ iest dostawą łuku *m*; wtedy wypada:

$$CDFE = \frac{m}{2}.a + \frac{W\int.m.}{2}.Do\int.m.$$

§. 138. Wniosek. Biorąc współustawione od wierzchołka, to iest (Fig. 8.) $AC = x$, $CD = y$, natenczas część powierzchni koła *ADC* może bydź znalezioną, z równania od wierzchołka. Nazywaiąc promień iak dotąd *a*, równanie koła od wierzchołka iest takie: $y^2 = 2ax - x^2$, stąd: $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, a więc $ydx = dx\sqrt{(2ax - x^2)}$. Wyraz $dx\sqrt{(2ax - x^2)}$ iest już wprawdzie potrzebną różniczką powierzchni, którey szukamy, atoli ten wyraz w formie iaką ma, całkowanym bydź nie może, lecz musi bydź wprzódy do całkowania przygotowanym. To robimy tak:

$(2ax - x^2) = 2x\left(a - \frac{1}{2}x\right)$, stąd:

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = \sqrt{2x}.\sqrt{\left(a - \frac{1}{2}x\right)} = \sqrt{2x}.\left(a - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daléy wyraz $\left(a - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}}$ zamieniamy na szereg nieskończony za pomocą binomium. A tak:

$$\left(a - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}.\frac{x}{2} - \frac{\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}.\frac{x^2}{4}}{1.\ 2.} -$$

$$- \frac{\frac{3}{8}.a^{-\frac{5}{2}}.\frac{x^3}{8}}{1.\ 2.\ 3} - \frac{\frac{15}{16}.a^{-\frac{7}{2}}.\frac{x^4}{16}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} -$$

$$- \frac{\frac{105}{32}a^{-\frac{9}{2}}.\frac{x^5}{32}}{1.2.3.4.5} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

czyli:

$$\left(a - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} - \frac{x}{4\sqrt{a}} - \frac{x^2}{32.a.\sqrt{a}} -$$

$$- \frac{x^3}{128.a^2.\sqrt{a}} - \frac{5x^4}{2048.a^3.\sqrt{a}} -$$

$$- \frac{7x^5}{32.32.8a^4.\sqrt{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

przeto:

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = \sqrt{2x}.\left(a - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\sqrt{2}.\sqrt{x}.\left(a-\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{a}.x-\right.$$

$$-\frac{x\sqrt{x}}{4\sqrt{a}}-\frac{x^2.\sqrt{x}}{32.a\sqrt{a}}-\frac{x^3.\sqrt{x}}{128a^2.\sqrt{a}}-$$

$$\left.-\frac{5.x^4\sqrt{x}}{2048a^3\sqrt{a}}-\frac{7x^5\sqrt{x}}{32.32.8a^4\sqrt{a}}\cdots\cdots\right),$$

czyli:

$$\sqrt{(2ax-x^2)}=\sqrt{2}\left(\sqrt{a}x-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{a}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{32.a.\sqrt{a}}-\right.$$

$$-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{128.a^2.\sqrt{a}}-\frac{5x^{\frac{9}{2}}}{2048.a^3\sqrt{a}}-$$

$$\left.-\frac{7x^{\frac{11}{2}}}{32.32.8a^4.\sqrt{a}}\right),$$ zatém:

$$dx.\sqrt{(2ax-x^2)}=\sqrt{2}\left(\sqrt{a}x.dx-\frac{x^{\frac{3}{2}}.dx}{4\sqrt{a}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{32.a.\sqrt{a}}-\right.$$

$$-\frac{x^{\frac{7}{2}}.dx}{128.a^2.\sqrt{a}}-\frac{5x^{\frac{9}{2}}.dx}{2048.a^3.\sqrt{a}}-$$

$$\left.-\frac{7x^{\frac{11}{2}}.dx}{32.32.8.a^4.\sqrt{a}}\cdots\cdots\right);$$

a więc:

$$\int.y.dx=\int.dx(2ax-x^2)=\sqrt{2}.\left(\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}-\right.$$

$$-\frac{2}{5}.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4.\sqrt{a}}-\frac{2}{7}.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{32a.\sqrt{a}}-\frac{2}{9}.\frac{x^{\frac{9}{2}}}{128a^2\sqrt{a}}-$$

$$-\frac{2}{11}.\frac{5.x^{\frac{11}{2}}}{2048a^3.\sqrt{a}}-$$

$$-\frac{2}{13}.\frac{7.x^{\frac{13}{2}}}{32.32.8.a^4\sqrt{a}}\dots\dots\Big),$$

która to całkowa iuż iest zupełną; albowiem biorąc $x=0$, każdy wyraz całkowéy w którym iest x, iako też cała powierzchnia będzie równa Zeru; a więc i ilość *Const*$=0$. Biorąc $a=1$, powyższy szereg zamienia się na taki;

$$\int y.dx=\sqrt{2}.\Big(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4}-\frac{2}{7}.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{32}-\frac{2}{9}.\frac{x^{\frac{9}{2}}}{128}-$$

$$-\frac{2}{11}.\frac{5x^{\frac{11}{2}}}{2048}-\frac{2}{13}.\frac{7x^{\frac{13}{2}}}{32.32.8}\dots\dots\Big).$$

Obrachowywuiąc powyższe szeregi przyzwoicie, za pomocą ułamków dziesiątnych, oznaczywszy wprzody ilość x, znayduiemy powierzchnią *ADC.*

§. 139. W n i o s e k. Z tego co się dotąd powiedziało o obrachunku koła, pokazuie się, że każdy wycinek iako też odcinek koła może bydź łatwo wyrachowany nawet bez użycia stósunku średnicy do obwodu maiąc tylko kąt środkowy, do nich należący znany i promień oznaczony. I tak (Fig. 8) mieymy wycinek *GEB* dany do obrachowania, którego kąt środkowy q iest znany. A tak poprowadziwszy z *G* prostopadłą na *EB* i nazywaiąc ią *GH*, będzie *HG* wstawą kąta q, a *EH* iego dostawą, pod promieniem $EB=a$; stąd ich wielkość da się wyrazić przez wstawę i dostawę kąta q z tablic, maiąc promien a oznaczony (z Trygonometryi znane). A że $EH = x$, a $GH = y$, przeto wziąwszy równanie od środka, da się z niego łuk BG wynaleść, wyrażaiąc tylko szereg nieskończony przez funkcye y, (§. 124), a zatém wycinek GEB się znayduie, mnożąc połowę wynalezionego łuku GB, przez promień. Chcąc mieć zaś odcinek $GmBr$ obrachowany, wynayduie się trygonometrycznie powierzchnia tróykąta GEB, maiącego dwą boki to iest promienie, i kąt q znane, a odciągnąwszy powierzchnią rzeczonego tróykąta, od powierzchni wycinka $GEBr$, reszta daie powierzchnią odcinka $GmBr$.

§. 140. Zagadnienia. Jak obrachować powierzchnią paraboli, zawartą między współustawionemi do siebie prostopadłemi, od wierzchołka wziętemi, i iéy łukiem?

Rozwiązanie. Mieymy parabolę pospolitą (Fig. 9.), AE, łuk iéy AC, współustawiona od wierzchołka do siebie prostopadłe, $AB = x$ i $BC = y$. Mamy tu obrachować powierzchnią ABC, co się robi tym sposobem: Równanie paraboli od wierzchołka, przy prostopadłych współustawionych iest: $y^2 = px$, stąd:

$$y = \sqrt{px} = \sqrt{p}.\sqrt{x}. = \sqrt{p}.(x^{\frac{1}{2}}) \text{ przeto;}$$

$$y.dx = \sqrt{p}(x^{\frac{1}{2}} dx), \text{ a zatém;}$$

$$\int.ydx = \sqrt{p}.\left(\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}\right) + \text{Const.} = \frac{2}{3}\sqrt{p}.(x.x^{\frac{1}{2}}) +$$

$$+ \text{Const.} = \frac{2}{3}x.\sqrt{p}.\sqrt{x} + \text{Const.} =$$

$$= \frac{2}{3}x.\sqrt{px} + \text{Const.} = \frac{2}{3}x.y + \text{Const.}$$

Lub: $y^2 = px$, stąd: $2ydy = pdx$, przeto: $dx = \frac{2ydy}{p}$, a tem samém: $ydx = \frac{2y^2dy}{p}$. Całkuiąc zaś:

$$\int . ydx = \frac{2}{3} . \frac{y^3}{p} + Const = \frac{2}{3} y^2 \frac{y}{p} + Const =$$

$$= \frac{2}{3} px . \frac{y}{p} + Const = \frac{2}{3} x . y + Const.$$

Toż samo iak wprzody. Biorąc tu $x = o$, w którym razie cała powierzchnia będzie równa Zeru, będzie także ilość *Const* $= o$, a zatém: $\int ydx = \frac{2}{3} xy$ iest zupełną całkową. To iest powierzchnia paraboli $ABC = \frac{2}{3} x . y$, wynayduie się biorąc $\frac{2}{3}$ prostokąta dokończonego na współustawionych. Tożsamo iest także wiadomém z Jeometryi analityczněy.

§. 141. **Wniosek.** Biorąc równanie nayogólnieysze paraboli, to iest służące wszystkim gatunkom parabol, które iest: $y^e = p^{e-c} x^c$ (znane z Jeometryi analityczněy), z tego wypada: $y = \sqrt[e]{p^{e-c}} \sqrt[e]{x^c} = p^{\frac{e-c}{e}} x^{\frac{c}{e}}$, przeto:

$$y . dx = p^{\frac{e-c}{e}} x^{\frac{c}{e}} dx, \text{ a zatem:}$$

$$\int . y . dx = \frac{p^{\frac{e-c}{e}} x^{\frac{c}{e}+1}}{\frac{c}{e}+1} + Const.$$

Lecz i tutay ilość *Const.*, dla téy saméy przyczyny iak wyżéy iest równa Zeru, a przeto:

$$\int y.dx = \frac{p^{\frac{e-c}{e}} x^{\frac{c}{e}+1}}{\frac{c}{e}+1} = \left(\frac{e}{c+e}\right).p^{\frac{e-e}{e}} x^{\frac{c}{e}} x =$$

$$= \left(\frac{e}{c+e}\right).x.y,$$

iest zupełną całkową, którą daie każdéy paraboli powierzchnią, zawartą między łukiem iéy i współustawionemi do siebie prostopadłemi, od wierzchołka wziętemi; Chcąc powyższe nayogólnieysze równanie, do pospolitéy paraboli zastósować, wtedy będzie: $e=2$, $c=1$, a tak wypadek ostatni: $\int ydx = \frac{e}{c+e}.x\, y$, zamienia się na taki: $\int ydx = \frac{2}{3}.x.y$. To iest tożsamo co wyżéy wypadło.

§. 142. **Wniosek.** Chcąc znaleść powierzchnią $BCED$ (F. 9), zawartą między liniiami CB, DE prostopadłemi do osi AD, iako też łukiem paraboli CE i częścią linii odcinków, to iest liniią BD, i to, chcąc ią bezpośrednio wynaleść, czyli nieodciągaiąc od AED powierzchni ABC, co podług poprzedzaiącego da się także zrobić, wtedy bierzemy równanie paraboli pospolitéy (o któréy tu iest mowa), które iest od wierzchołka: $y^2=px$. Biorąc tu $BD=x$ za odcinek; $DE=y$ za ustawioną, w którym razie liniia AB niezmienną niech się nazywą m, naówczas powyższe równanie zamienia się na takie; $y^2=p\,(m+x)= =pm+px$, a przeto;

$y=\surd\,(pm+px)$. Robiąc zaś: $\surd\,(pm+px)=u$, z czego:

$pm+px=u^2$, stąd;

$pdx=2udu$, przeto:

$$dx = \frac{2u\,du}{p}, \text{ a więc;}$$

$$y\,dx = \sqrt{(pm+px)}.\,dx = \frac{2u.\,du.}{p}\,y =$$

$$= \frac{2u\,du.}{p}\sqrt{(pm+px)} = \frac{2u^2.\,du}{p},$$

A tak;

$$\int y.\,dx = \frac{2\,u^3}{3.\,p} + \text{Const.} = \frac{2\,u^2}{3.\,p}.\,u + \text{Const,}$$

Wziąwszy zaś zamiast u^2 i u, odwrotnie wartości wyżéy stoiące, będzie;

$$\int y.\,dx = \frac{2}{3.p}.\,(pm+px).\sqrt{(pm+px)} + \text{Const.,}$$

$$= \frac{2}{3}.\,(m+x).\sqrt{(pm+px)} + \text{Const,}$$

Dla wynalezienia tutay ilości Const., bierze się $x = o$, w którym razie cała powierzchnia $BCED$ staie się także równa Zeru. Lecz że wyrazy całkowéy nie wszystkie maią w sobie x, dlaczego chociaż cała całkowa iest Zerem, to iest zbiorem dodatnych i uiemnych równych, iednak poiedyncze wyrazy nie wszystkie są Zerami, przeto także ilość Const. niebędzie tu równa Zeru. Atoli równanie ostatnie, skoro $x = o$ się bierze, zamienia się na takie:

$$o = \frac{2}{3}\,(m+o).\sqrt{(pm+o)} + \text{Const.}$$

$$= \frac{2}{3}\,m.\sqrt{pm} + \text{Const., przeto:}$$

$$\text{Const.} = -\frac{2}{3}.\,m.\sqrt{pm}, \text{ a więc:}$$

$$\int y.\,dx = \frac{2}{3}.(m+x).\sqrt{(pm+px)} - \frac{2}{3}m.\sqrt{p.m},$$

iest zupełną całkową, a tém samém:

$$\text{Powierzchnia } BCED = \frac{2}{3}(m+x).\sqrt{(pm+px)} -$$

$$- \frac{2}{3}m.\sqrt{p.m}.$$

Oznaczywszy tedy ilości p, m, x, powierzchnia rzeczona łatwo bardzo z ostatniego wyrazu podaie się.

§. 143. Wniosek. Podług §. 40 wiadomém iest, że powierzchnia paraboli $ACED$ (F. 9.) z takiego wyrazu: $\frac{2}{3}AD.DB = \frac{2}{3}x.y$ się wynayduie. Nazywaiąc tedy resztę dokończonego prostokąta na AD i DB, leżącą za parabolą, n. p. M; wtedy $M = \frac{1}{3}x.y$. A że tróykąta ADE powierzchnia $= \frac{AD}{2}.DE = \frac{1}{2}x.y$, przeto powierzchnia odcinka parabolicznego, czyli: $ACE = ACED - AED =$ $= \frac{2}{3}.x.y - \frac{1}{2}.x.y = \frac{4}{6}.x.y - \frac{3}{6}.x.y = \frac{1}{6}.x.y.$ To iest powierzchnia odcinka parabolicznego zawiera $\frac{1}{6}$ powierzchni prostokąta dokończonego na współustawionych do siebie prostopadłych, a tém samém z współustawionych rzeczonych daie się łatwo bardzo wynaleść.

§. 144. Zagadnienie. Jak obrachować część powierzchni Elipsy, zawartą między współustawionemi od środka do siebie prostopadłemi, połową osi mnieyszéy i łukiem Elipsy?