strony AC z którey AB, ieżeli zaś wymieniony wyraz $\frac{y^2 dx}{r.dy}$ iest uiemny, wtedy AB z iedney strony AC leży, a liniia AF z drugiéy. A tak widocznie się pokazuie co tutay znaczy $+AF$ a co $-AF$.

§. 85. Wniosek. Spiralna Archimedesa ma takie równanie: $y = \frac{r.x}{p}$ a tém samém $py = r.x$, a przeto: $p.dy = r.dx$, z czego $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{r}$. Równaniu: $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{r}$ daię formę potrzebną, aby na iedney stronie wypadł wyraz $\frac{y^2 dx}{r.dy}$; a tak będzie $\frac{y^2 dx}{r.dy} = \frac{py^2}{r^2}$; biorąc zaś wartość zamiast py z funkcyi linii, będzie: $\frac{y^2 dx}{r.dy} = = \frac{y.r.x}{r.^2} = \frac{x.y}{r}$. To iest przy spiralnéy liniia $AF = = \frac{x.y}{r}$; a więc chcąc mieć przy spiralnéy kierunek stycznéy wyznaczony, musi wprzody łuk x bydź zmierzony.

ROZDZIAŁ V.

Zasady rachunku całkowego i zastósowanie onegoż łącznie z różniczkowym do linii Logarytmicznéy i Logarytmów.

§. 86. Definicya. Funkcya zupełna, każdéy różniczki nazywa się całkową (quantitas integralis das Integral) teyże różniczki y znaczy literą $\int$ która się przed różniczką kładzie. N. p.: $\int 2x\,dx = x^2$; $\int nx^{n-1}.dx = x^n$ i t. d. Szukanie zaś do daney lub wynalezioney różniczki, całkowéy téyże różniczki nazywa się całkowaniem (calculus integralis, Integralrechnung). Całkowanie tedy względem różniczkowania iest przeciwném działaniem, to iest: różniczkowanie idzie od funkcyy, do ich różniczek, całkowanie zaś od różniczek, do ich funkcyy czyli całkowych.

§. 87. Uwaga. Wyłożywszy w zasadach rachunku różniczkowego, tylko różniczkowanie funkcyy algebraicznych, w rachunku całkowym będzie także tylko mowa o różniczkach algebraicznych. Całkowanie zaś różniczek transcendentalnych, wynikaiące z różniczkowania funkcyy transcendentalnych, należy do dzieła obszernego, dlaczego tu mowa o nich bydź nie może. Także dla zamierzonéy krótkości ninieyszego dziełka, tylko prawidła całkowania różniczek pierwszych algebraicznych, o iednéy zmiennéy wyłożone zostaną. Całkowanie bowiem funkcyy różniczkowych wyższych a osobliwie o wielu zmiennych, podpada wielu trudnościom, dlaczego wykład onegoż iako bardzo rozwlekły tylko przedmiotem obszernych dzieł bydz może.

§. 88. Wniosek. Maiąc równanie n. p. $y = a^2 + bx + cx$: wypada: $dy = b\,dx + c.dx = (b+c)\,dx$ (§. 48.), a tak całkowa tutay widoczna, iest: $\int.(b+c)\,dx = bx + cx$, wktórey a^2 ilość iednostayna niedostaie, a tém samém całkowa $bx + cx$ iest niezupełna. A że nigdy z funkcyi różniczkowéy, któréy całkowa nieznana, niemożna się domyśleć, ieżeli iednostayna w różniczce znikła; przeto każdéy całkowéy, wynalezionéy podług prawideł, które się podadzą, potrzeba też iednostayną, która czasem może bydź Zerem, dodadź, przez co się całkowa uzupełni. Jednostayna ta znaczy się tak: *Const.* (constans), i zawsze z warunków każdego szczególnego zagadnienia, wynalezioną bydź może. Jednostayna ta, choć przy iednėm zagadnieniu się nieodmienia, dlatego że przy każdém innėm, może bydź inną, nazywa się iednostaynie zmienną. A tak funkcyi różniczkowéy $(b+c)\,dx$, zupełna całkowa iest taka: $bx+cx+$ *Const.*, czyli: $\int.(b+c)\,dx = bx+cx+$ *Const.*

§. 89. Twierdzenie. Maiąc iakąkolwiek funkcyą różniczkową o iednéy zmiennéy, powstałą z potęgi zmiennéy, z iakimkolwiek wykładnikiem, wtedy, bez względu na iednostaynie zmienną, czyli ilość Const., która się późniéy dodaie, całkowa takiéy różniczki się wynayduie, powiększaiąc wykładnik zmiennéy w różniczce iednością, i dzieląc ią potém przez iloczyn z nowego wykładnika i różniczki pierwiastka.

Dowodzenie. Z §§. 40, 41, 42, 43 wiadomém iest że każdéy potęgi zmiennéy ilości, różniczka iest iloczynėm z trzech czynnikow, to iest, z wykładnika zmiennéy, z saméy zmiennéy z wykładnikiem iednością mnieyszym od wykładnika w funkcyi, i z różniczki pierwiastka zmiennéy: a przeto powiększaiąc wykładnik zmiennéy w różniczce iednością, przez co wypada na powrot wykładnik zmiennéy w funkcyi i dzieląc tak zmienioną różniczkę, przez iloczyn z nowego wykładnika zmiennéy i różniczki pierwiastka, musi, pudług prawideł mnożenia i dzielenia prostego, iloraz dać na powrót funkcyą, czyli całkową, która się uzupełnia dodaiąc do niéy ilość Const. Kilka przykładów przytacza się dla wyiaśnienia rzeczy:

$$\int.5x^4\,dx = \frac{5x^5\,dx}{5.\,dx} = x^5 + \text{Const.}$$

$$\int.\frac{7x^5}{a}.\,dx = \frac{7x^6.\,dx}{6.a.dx} + \text{Const.} = \frac{7}{6}.\frac{x^6}{a} + \text{Const.}$$

$$\int.px^{n-1}\,dx = \frac{px^n\,dx}{n.dx} + \text{Const.} = \frac{px^n}{n} + \text{Const.}$$

$$\int.mx^{-3}\,dx = -\frac{mx^{-2}dx}{2.dx} + \text{Const.} = -\frac{m}{2}.x^{-2} + \text{Const.} =$$

$$= -\frac{m}{2x^2} + \text{Const.}$$

$$\int.b.\sqrt[3]{x^2}\,dx = \int.bx^{\frac{2}{3}}\,dx + \text{Const.} = \frac{b.x^{\frac{5}{3}}\,dx}{\frac{5}{3}.\,dx} + \text{Const}$$

$$= \frac{3}{5}b.x^{\frac{5}{3}} + \text{Const.} = \frac{3}{5}.b\sqrt[3]{x^5} + \text{Const.}$$

$$\int.nx^{\frac{-3}{5}}dx = \frac{nx^{\frac{-3}{5}+1}dx}{\left(\frac{-3}{5}+1\right)} + \text{Const.} = \frac{5}{2}.nx^{\frac{2}{5}} + \text{Const} =$$

$$= \frac{5}{2}n\sqrt[5]{x^2} + \text{Const.}$$

$$\int.\frac{p}{a}x^{\frac{-m}{n}}dx = \frac{\frac{p}{a}x^{\frac{-m}{n}+1}dx}{\left(\frac{-m}{n}+1\right).dx} + \text{Const} = \left(\frac{n}{n-m}\right).\frac{p}{a}x^{\frac{n-m}{n}}$$

$$+ \text{Const.} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\frac{p}{a}.\frac{x}{\sqrt[n]{x^m}} + \text{Const.}$$

§. 90. **Wniosek.** Z §. 47. wiadomém iest, że kiedy zmienna pewna iest zbiorem przez dodawanie lub odciąganie, kilku innych zmiennych, a tém samém iednéy zmiennéy w kilku wyrazach, wtedy różniczka pierwszéy zmiennéy iest takim samym zbiorém różniczek zmiennych w poiedyńczych wyrazach: a przeto i odwrotnie, kiedy pewna różniczka iest zbiorem przez dodawanie lub odciąganie kilku różniczek poiedynczych wyrazów, wtedy funkcya pierwszéy różniczki, iest takim samym zbiorem, funkcyy poiedynczych różniczek.

N. p.: $\int (ax^2 + Bx^3 + Dx^4)dx = a.\int.x^2.\,dx +$

$$+ B\int x^3 dx + D.\int x^4 dx = \frac{ax^3}{3\,dx}dx + \frac{Bx^4}{4\,dx}.dx +$$

$$+ \frac{Dx^5.\,dx}{5.dx} + \text{Const} = \frac{a}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{D}{5}x^5 +$$

$$+ \text{Const}.$$

$$\int(ay^2.\,dy + mxdx - pz^5.\,dz) = \frac{ay^3.\,dy}{3.dy} + \frac{mx^2dx}{2.dx} -$$

$$- \frac{pz^6.\,dz}{6\,dz} + \text{Const} = \frac{a}{3}y^3 + \frac{m}{-}x^2 - \frac{pz^6}{,} +$$

$$+ \text{Const}.$$

$$\int.\left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{7}x^4 + \frac{mx^{-\frac{3}{4}}}{p}\right).dx = \frac{3}{5}\int.x^2.\,dx -$$

$$- \frac{2}{7}\int.x^4.\,dx + \frac{m}{p}.\int.x^{-\frac{3}{4}}dx = \frac{3}{5}.\frac{x^3\,dx}{3.dx} -$$

$$- \frac{2}{7}\,\frac{x^5.\,dx}{5.dx} + \frac{m}{p}\,\frac{x^{\frac{1}{4}}dx}{\frac{1}{4}.dx} + \text{Const} = \frac{x^3}{5} -$$

$$- \frac{2}{35}x^5 + \frac{4m}{p}.\sqrt[4]{x} + \text{Const. i t. d.}$$

Różniczkuiąc na powrót każdą z wynalezionych całkowych wypada zawsze tażsama różniczka, z którey całkowa powstała. Co iest zaraz sprawdzeniém całkowania.

§. 91. Wniosek. Każdą funkcyą różniczkową takiego kształtu: $(ax+bx^2+cx^3)^{2.}dx$, lub ogólniéy, $(ax+bx^2+cx^3)^{m.}dx$ można uważać za zbiór, poiedynczych różniczek poiedynczych wyrazów; gdyż rzeczywiście wynosząc pierwiastek do naznaczonéy potęgi, będzie:

$$(ax+bx^2+cx^3)^{2.}dx = (a^2x^2+2abx^3+b^2x^4+$$
$$+2acx^4+2bcx^5+c^2x^6)dx = a^2x^{2.}dx+$$
$$+2abx^{3.}dx+b^2x^{4.}dx+2acx^4dx+$$
$$+2bcx^{5.}dx+c^2x^6dx.$$

To iest wzmiankowane funkcye są istotnie zbiorami różniczek poiedynczych, poiedynczych wyrazów; a zatém zawsze podług §. 89. całkować się dadzą. Jednak tym sposobem tylko wtedy całkowa zupełna się wynayduie, kiedy wykładnik pierwiastka w funkcyy iest cały i dodatny; w każdym zaś innym razie, potęga daie szereg nieskończony (§. 70.) a tém samém całkowa tylko przez przybliżenie wynalezioną bydź może. Że atoli często musimy przestać na całkowych przybliżonych; przeto przykładami wyiaśnimy równie całkowanie wzmiankowanych funkcyy różniczkowych kiedy wykładnik iest dodatny cały, albo funkcya wymierna, iako też kiedy iest uiemny lub łamany, a tém samém funkcya niewymierna. I tak:

1) $(a^2+Bx^3)^{2.}dx = a^{4.}dx+2a^2Bx^{3.}dx+B^{2.}x^{6.}dx$,

a przeto:

$$\int(a^2+Bx^3)^{2.}dx = \int(a^{4.}dx+2a^2Bx^{3.}dx+B^{2.}x^{6.}dx) =$$

$$= a^4 x + \frac{2a^2 B x^4 \, dx}{4 \cdot dx} + \frac{B^2 \, x^7 \, dx}{7 \cdot dx} + \text{Const.} =$$

$$= a^4 x + \frac{1}{2} a^2 B x^4 + \frac{B^2}{7} x^7 + \text{Const.}$$

Chcąc tutay całkową na powrót różniczkować, będzie:

$$d(a^4 x + \frac{1}{2} a^2 \, B x^4 + \frac{B^2}{7} x^7 + \text{Const.}) = a^4 dx +$$
$$+ 2a^2 B x^3 dx + B^2 x^6 \, dx = (a^4 + 2a^2 B x^3 +$$
$$B^2 \, x^6) \, dx = (a^2 + B x^3)^2 \, dx.$$

To iest taż sama różniczka wypada, z którey całkowa powstała, co iest dla tego sprawdzeniem całkowania.

$$2) \int. (mx + ax^2)^3 \, dx = \int. (m^3 x^3 + 3am^2 x^4 +$$
$$+ 3a^2 m x^5 + a^3 x^6) \, dx = m^3 \int. x^3 \, dx +$$
$$3am^2 \int x^4 dx + 3a^2 m. \int. x^5 \, dx + a^3 \, \int x^6 dx =$$
$$= \frac{m^3 x^4 dx}{4 \cdot dx} + \frac{3am^2 x^5 dx}{5 \cdot dx} + \frac{3a^2 m x^6 dx}{6 \cdot dx} +$$
$$+ \frac{a^3 x^7 \, dx}{7 \cdot dx} + \text{Const.} = \frac{1}{4} m^3 \, x^4 +$$
$$\frac{3}{5} am^2 \, x^5 + \frac{1}{2} a^2 m x^6 + \frac{1}{7} a^3 x^7 + \text{Const.}$$

$$3) \int. (ax^{\frac{-m}{n}} + px^2)^2 \, . dx = \int. (a^2 x^{\frac{-2m}{n}} + 2apx^{\frac{2n-m}{n}} +$$
$$p^2 x^4). dx = a^2 \int. x^{\frac{-2m}{n}} \, dx + 2ap. \int. x^{\frac{2n-m}{n}} \, dx +$$
$$+ p^2 \int. x^4 \, dx = \frac{a^2 \, x^{\frac{n-2m}{n}} \, dx}{(\frac{n-2m}{n}). \, dx} + \frac{2apx^{\frac{3n-m}{n}} \, dx}{(\frac{3n-m}{n}). \, dx} +$$

$$+\frac{p^2x^5dx}{5\,dx}+\text{Const.}=\left(\frac{n}{n-2m}\right)a^2x^{\frac{n-2m}{n}}+$$

$$+\left(\frac{n}{3n-m}\right).2\,a\,p\,x^{\frac{3n-m}{n}}+\frac{1}{5}\,p^2x^5+\text{Const.}$$

Chcąc ostatnią całkową różniczkować, dla przekonania się, czyli w całkowaniu niebyło omyłki, będziemy mieli:

$$d\left\{\left(\frac{n}{n-2m}\right)a^2x^{\frac{n-2m}{n}}+\left(\frac{n}{3n-m}\right)2\,a\,p\,x^{\frac{3n-m}{n}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\,p^2\,x^5+\text{Const.}\right\}=a^2\,x^{\frac{-2m}{n}}.dx+$$

$$+2\,a\,p\,x^{\frac{2n-m}{n}}dx+p^2\,x^4\,dx=(a^2\,x^{\frac{-2m}{n}}+$$

$$+2\,a\,p\,x^{\frac{2n-m}{n}}+p^2x^4)\,dx=\sqrt{(a^2\,x^{\frac{-2m}{n}}}+$$

$$+2apx^{\frac{2n-m}{n}}+p^2x^4)^2.\,dx=\left\{a\,x^{\frac{-m}{n}}+\frac{p\,x^{\frac{2n-m}{n}}}{x^{\frac{-m}{n}}}\right\}^2.dx$$

$$=(a\,x^{\frac{-m}{n}}+p\,x^2)^2.\,dx.$$

To iest tażsama różniczka, z iakiey całkowa powstała. Maiąc przeciwnie funkcyą różniczkową niewymierną, n. p.:

$dx\sqrt{(a^2+x^2)}=dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, daną do całkowania, tu się postępuie tak, z §. 70, będzie:

$$(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=a+\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5\,x^8}{128a^7}+$$

$$+\frac{7x^{10}}{256a^9}$$ i t. d., a przeto:

$$dx\sqrt{(a^2+x^2)} = dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a\,dx + \frac{x^2 dx}{2.a} -$$

$$- \frac{x^4 dx}{8a^3} + \frac{x^6 dx}{16a^5} - \frac{5x^8 dx}{128a^7} + \frac{7x^{10} dx}{256a^9},$$

i t. d., a zatem:

$$\int. dx\sqrt{(a^2+x^2)} = \int dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = ax + \frac{x^3 dx}{a.2.3.dx} -$$

$$- \frac{x^5 dx}{8a^3.5.dx} + \frac{x^7.dx}{16.a^5.7.dx} - \frac{5x^9.dx}{128a^7.9dx} +$$

$$+ \frac{7x^{11} dx}{256a^9.11.dx} \text{ i t. d. } + \text{Const.} = ax +$$

$$+ \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \frac{7x^{11}}{2816a^9}$$

i t. d. + Const.

Daléy niech będzie funkcya różniczkowa taka $\frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} =$ $= dx.(1-x)^{\frac{-1}{2}}$, a tak podług reguły Newtona (§§. 68, 69, 70.) będzie:

$$(1-x)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}.x^3 + \frac{35}{128}x^4 +$$

$$+ \frac{63}{256}x^5 \text{ i t.d., a przeto: } \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = dx.(1-x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= dx + \frac{1}{2}x.dx + \frac{3}{8}x^2 dx + \frac{5}{16}x^3 dx +$$

$$+ \frac{35}{128}.x^4 dx + \frac{63}{256}.x^5 dx \text{ i t. d., a zatém:}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = \int.dx(1-x)^{\frac{-1}{2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2 dx}{2.dx} +$$

$$+ \frac{3}{8}.\frac{x^3 dx}{3dx} + \frac{5}{16}.\frac{x^4 dx}{4.dx} + \frac{35}{128}.\frac{x^5 dx}{5.dx} +$$

$$+\frac{63}{256}\frac{x^6 dx}{6.dx} \text{ i t. d.} + \text{Const.} = x + \frac{1}{4}x^2 +$$

$$+\frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{64}x^4 + \frac{7}{128}x^5 + \frac{21}{512}x^6 \text{ i t.d.} + \text{Const.}$$

Podobnie się całkuią przez przybliżenie, wszystkie inne funkcye różniczkowe niewymierne, o iednéy zmiennéy.

§. 92. Uwaga. Maiąc n. p. funkcyą: $(B + + x^3)^2 \cdot dx$, mogłoby się czasem zdawać, że ta iest różniczką potęgi, z pierwiastka $(B + x^3)$ powstaiącéy, a tém samém że się da całkować podług §. 88, atoli zastanowiwszy się nieco nad rzeczoną funkcyą, widzimy że nie iest różniczką potęgi wzmiankowanego pierwiastka, bo podług tego iak się potęgi zmiennych różniczkuią, musiałaby rzeczona różniczka ieszcze przez $3x^2$ się mnożyć, przeto taż funkcya podług wzmiankowanego §. nie da się całkować, boby całkowa była fałszywa. Lecz że:

$$(B+x^3)^2 \cdot dx = (B^2 + 2Bx^3 + x^6)dx = B^2 dx + 2Bx^3 dx +$$
$$+ x^6 dx,$$

to iest, że iest zbiorém kilku poiedynczych różniczek; przeto da się podług §. 90, całkować. I tak

$$\int.(Bx+x^3)^2 dx = B^2 \cdot \int.dx + 2B.\int x^3 dx + \int.x^6 dx =$$

$$= \frac{B^2 x dx}{dx} + \frac{2Bx^4 dx}{4.dx} + \frac{x^7}{7.dx} + \text{Const} = B^2 x +$$

$$+ \frac{1}{2}Bx^4 + \frac{1}{7}x^7 + \text{Const.}$$

Przeciwnie maiąc funkcyą różniczkową: $6(a+y^2)^2 \cdot ydy$, ktora iest różniczką potęgi pierwiastka $(a+y^2)$ i zbiorem poiedynczych różniczek, tę można dwoiako całkować. I tak podług §. 88 będzie:

$$6. \int . (a + y^2)^2 y. dy = \frac{6(a+y^2)^3 y dy}{3.2.y.dy} + Const. =$$

$$= (a+y^2)^3 + Const. = a^3 + 3a^2 y^2 + 3ay^4 + y^6 + Const.$$

Powtóre podług §. 90:

$$6 \int . (a+y^2)^2 y.dy = \int . (6a^2 + 12ay^2 + 6y^4) y.dy =$$

$$6a.^2 \int . y. dy + 12a. \int . y.^3 dy + 6. \int . y.^5 dy =$$

$$= \frac{6a^2 y.^2 dy}{2dy} + \frac{12ay^4. dy}{4dy} + \frac{6y^6. dy}{6dy} = 3a^2y^2 +$$

$$+ 3ay^4 + y^6 + Const.$$

Porównywaiąc obydwie całkowe między sobą, widzimy że ostatniéy a^3 niedostaie, które iednak z ilości Const., iak się poźniey okaże, da się łatwo wynaleść. A tak maiąc funkcyą różniczkową takiey formy: $m(a+x^n)^e p dx$ i wiedząc o niey z pewnością, że iest różniczką potęgi, z pierwiastka $(a+x^n)$ powstaiącą, tę można kródzey całkować podług §. 88; niewiedząc zaś z pewnością, czyli funkcya różniczkowa iest różniczką potęgi, wtedy tylko podług §. 90, bezpiecznie się całkuie. Mógłby także ktoś pozornie sądząc, myśleć, że umieiąc funkcyi: $ax^2 dx + By^4 dy + cz^3 dz$ znaleść całkową podług §. 89, że także tym samym sposobem, da się całkowa wynaleść funkcyi: $axydz + axzdy + ayzdx$. Atoli zastanawiaiąc się dobrze nad obydwiema funkcyami, pokazuie się że pierwsza iest prawdziwym zbiorem poiedynczych różniczek poiedynczych wyrazów; druga zaś, maiąc w każdym wyrazie innéy zmiennéy różniczkę, iest tylko zbiorem różnych połączeń, różnych różniczek; a zatem całkowanie ostatniéy, całkiem niewynika z całkowania pierwszey i tylko należy do całkowania funkcyy różniczkowych o wielu zmiennych.

§. 93. Wniosek. Powiedzianém iest wyżey (§. 87), że ilość iednostaynie zmienna, to iest Const., da się zawsze z szczególnych warunków Zagadnienia wynaleść. Robi się to w ogólności tak: Maiąc do funkcyi różniczkowéy o iednéy zmiennéy iuż wynalezioną całkową niezupełną, wtedy nadaie się np. ilości x pewna oznaczona wartość, przez co funkcya z, to iest zupełna całkowa, iednę lub kilka oznaczonych wartości przybierze; kładąc potém w mieysce x, przybraną, a w mieysce z odpowiednią wartość, pozostanie równanie, w którém tylko iedna nieznana, to iest C będzie, i która się z niego łatwo wynayduie. Wynalazłszy zaś wartość na C raz, ta iako iednostayna, odmieniaiąc iakokolwiek x a tém samém z, zostaie w tém samém Zagadnieniu, zawsze tą samą. Np. Maiąc funkcyą różniczkową:

$$dz = \frac{2}{3}x^2\,dx + mx\,dx, \text{ a tak } \int. dz = \frac{2}{3}\frac{x^3dx}{3dx} + \frac{mx^2dx}{2dx} + \text{Const. czyli: } z = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + \text{Const.}$$

Biorąc tu oznaczoną wartość na x, n.p. A, w którym razie z zamienia się, n.p.: na B, a tak będzie: $B = \frac{2}{9}A^3 + \frac{1}{2}mA^2 + Const.$, przeto:

$$Const. = B - \frac{2}{9}A^3 - \frac{1}{2}mA^2,$$ a zatem zupełna całkowa będzie:

$$\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + B - \frac{2}{9}A^3 - \frac{1}{2}mA^2.$$

Uważaiąc w tym samym przykładzie, że $x = o$ daie $z = B$, wtedy będzie, $B = Const.$, a tak zupełna całkowa taka: $\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + B$. Uważaiąc, że $x = A$, daie $z=o$, a tak będzie: $o=\frac{2}{9}A^3+\frac{1}{2}mA^2+Const.$,

przeto, $Const.=-\frac{2}{9}A^3-\frac{1}{2}mA^2$, a zatem zupełna całkowa wypada pod temi warunkami taka:

$$\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{2}mx^2-\frac{2}{9}A^3-\frac{1}{2}mA^2.$$

Uważaiąc nakoniec, że $x=o$, daie także $y=o$, a wtedy także $Const.=o$, a zatem zupełna całkowa: $\frac{2}{9}x^3+$ $+\frac{1}{2}mx^2$. W ogólności maiąc całkową niezupełną ilości x, i zamieniaiąc x na a, kiedy funkcya niezupełna zamieni się na A, a zupełna na B, wtedy: $B=A+Const.$, a tak $Const.=B-A$.

§. 94. Zagadnienie. Jak wykreślić liniią krzywą, tak aby iéy odcinki logarytmami, a ustawione ich liczbami były, czyli aby liniia krzywa każdy system logarytmiczny wystawiała?

Rozwiązanie. Niech liniia AB (F6) wystawia nam linią odcinków; punkt C niech będzie początkiem odcinków; prostopadła z C do AB to iest $CD=CE=1$, i przez E niech przechodzi także prostopadła do AB, a tém samém równoległa do CD, iakiéykolwiek wielkości, którą wystawia EF, a która ogólnie będzie się nazywała c, a mówimy że ciągnąc przez punkta D, F, liniią krzywą tak, aby iéy ustawione prostopadłe do AB, coraz dalsze, iakiemi są: GH, IK, LM, BN, zawszę taką proporcyą dały:

$$CD:GH=CD^{\frac{CG}{CE}}:EF^{\frac{CG}{CE}};\ CD:JK=CD^{\frac{CJ}{CE}}:EF^{\frac{CJ}{CE}},$$

i t. d.,

natenczas rzeczona krzywa liniia iest żądaną linią. Przekonywamy się o tém tym sposobem, biorąc pierwszą proporcyą: $CD : GH = CD^{\frac{CG}{CE}} : EF^{\frac{CG}{CE}}$, w którey $CD = 1$, $GH = y$, $CG = x$, $CE = 1$, $EF = c$, ta zamienia się na taką: $1 : y = 1^x : c^x$, a przeto, $y = c^x$. Z tey samey przyczyny nazywaiąc IK, y', a CG, x', będzie: $y' = c^{x'}$, i tożsamo o każdey inney ustawioney się rozumie. A że równanie $c^x = y$, (co iest znaném z algebry) wystawia każdy system logarytmiczny, w którym c, iest ilością zasadową, x logarytmem, a y liczbą do logarytmu należącą; przeto także rzeczona liniia krzywa, którey wszyskie ustawione i odcinki w takiémże samém równaniu są zawarte, wystawia każdy system logarytmiczny, tak że odcinki są logarytmami, ustawione liczbami ich, a ustawiona ktorey odcinek równy iest iedności, iest ilością zasadową.

§. 95. Definicya. Liniia w powyższém zagadnieniu wynaleziona, nazywą się, liniią logarytmiczną lub logistyczną, dlatego że wszystkie własności logarytmów w sobie zawiera.

§. 96. Twierdzenie. Każde trzy ustawione linii logarytmiczney proporcyonalne, daią części odcinków między niemi zawarte równe, i przeciwnie.

Dowodzenie. Niech trzy ustawione ($F6$), GH, IK, LM nazywaią się y, y', y'', odcinek CG, x; GI zaś i IL, m, m'. Wiemy że: $y : y' = y' : y''$, a mamy nayprzód okazać że $m = m'$. Z powyższey proporcyi wypada, że: $\frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'}$ (znane z arytmetyki). A że: $y = c^x$, $y' = c^{x+m}$, $y'' = c^{x+m+m'}$;

przeto powyższe dwa ułamki, biorąc w mieysce ich wyrazów wartości, daią: $\frac{c^{x+m}}{c^x} = \frac{c^{x+m+m'}}{c^{x+m}}$, czyli $c^m = c^{m'}$ a zatem $m = m'$. Powtóre wiemy że $m = m'$, a mamy dowieść że trzy ustawione y, y', y'' do ich końcow należące, są proporcyonalne. Ponieważ $m = m'$, stąd także $c^m = c^{m'}$, iako też, $c^{x+m} = c^{x+m'}$, a przeto: $\frac{c^{x+m}}{c^x} = \frac{c^{x+m'}}{c^x} = \frac{c^{x+m'} . c^m}{c^x . c^m}$, to iest: $\frac{c^{x+m}}{c^x} = \frac{c^{x+m+m'}}{c^{x+m}}$. A że $c^x = y$, $c^{x+m} = y'$, $c^{x+m+m'} = y''$, przeto biorąc w powyższe dwa ułamki wartości, wypada $\frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'}$, a zatem: $y : y' = y' : y''$.

§. 97. Wniosek. Z powyższego twierdzenia pokazuie się, że wszystkie ustawione linii logarytmiczney, idące po sobie w stósonkach ieometrycznych ciągłych i równych, to iest tworzące postęp ieometryczny, daią odcinki do siebie należące, tworzące postęp arytmetyczny. A że także w każdym systemacie logarytmicznym, liczby daią postęp ieometryczny, a ich logarytmy, arytmetyczny (co powinno bydź znaném z algebry); przeto i tutay przekonywamy się, że ustawione są liczbami; odcinki, logarytmami, a liniia logarytmiczna, systematem logarytmicznym.

§ 98. Wniosek. Mieymy nad liniią odcinków BD, (F 7.), wystawione dwie linije logarytmiczne CE, CF maiące punkt C wspólny, gdzie $CB = BD = 1$, lecz w pierwszéy $DE = c$, w drugiéy zaś $DF = g$, a tak nazywaiąc pierwszéy ustawioną y, a drugiéy y', które bierzemy do tego samego odcinka, tutay równego iedności, będzie zawsze: $y = c^x$, a $y' = g^x$. To iest dwie liniie logarytmiczne, maiące ieden punkt wspólny, lecz ustawione, należące do odcinka równego iedności różne, wystawiaią dwa różne systemata, z których w pierwszym c, a w drugim g, iest ilością zasadową (§. 94.) Toż samo się rozumie o trzech, czterech i więcéy liniiach logarytmicznych, a zatem ieden logarytm może do bardzo wielu liczb należeć, zmieniaiąc ilość zasadową.

§. 99. **Wniosek.** Ponieważ ($F6$) z prawéy strony CD, każda ustawiona ma takie równanie $y = c^x$ (§. 94.) przeto nazywaiąc ustawione z lewéy strony CD u, których odcinki przeciwne względem prawych są uiemne, będzie zawsze $u = c^{-x} = \frac{1}{c^x}$; który wyraz iest tém mnieyszy, im $-x$ większe, a zatém liniia logarytmiczna równie się z prawéy strony CD, od linii odcinków, ciągle oddala, iak z lewéy strony, ciągle przybliża. Biorąc w reszcie $-x$, za nieskończenie wielkie, wyraz $\frac{1}{c^x}$ będzie nieskończenie mały (29.) a tém samém można uważać, że się wtedy liniia logarytmiczna z liniią *odcinków schodzi*, a więc liniia odcinków, iest przy linii logarytmicznéy, niedostyczną (z wyobrażenia o niedostycznéy w Jeometryi analitycznéy.)

§. 100. **Wniosek.** Dzieląc ($F6$) $CE = 1$ ogólnie na r części i nazywaiąc każdą p, w którym razie r, bierze się za całość i $r.p = 1$ wypada; wtedy, nazywaiąc pierwszą ustawioną należącą do pierwszego p, $1+q$, będzie: $1+q = c^p$ (§. 94.), a przeto $c^p - 1 = q$. To iest, maiąc ilość zasadową c, daną lub przybraną, wtedy oznaczone p, a tém samém r, daie oznaczone q; iakoteż przy oznaczoném c, kiedy q iest oznaczone, wtedy także p i r są oznaczone.

§. 101. **Wniosek.** Biorąc iakiekolwiek dwie ustawione, y, i $y+n$, z których do pierwszéy odcinek x; a do drugiéy: $x+p$ (p, się bierze wiém samém znaczeniu iak w §. przeszłym), wtedy będzie: $y+n=c^{x+p}$, a $y=c^x$ (§. 94.), a przeto: $y+n-y=c^{x+p}-c^x$, czyli: $n=c^{x+p}-c^x=c^x.(c^p-1)=y.q$ (§. 100.). A że: $n=y.q$, przeto, $\frac{y}{n}=\frac{1}{q}$, a tém samém: $\frac{y\,p}{n}=\frac{p}{q}$, gdzie ilość $\frac{p}{q}$ iest nieodmienna w każdym systemacie, bo maiąc w iakimkolwiek ilość c, to iest ilość zasadową daną lub obraną, wtedy (§ 100) taż sama wartość na p, zawsze tęż samą wartość na q a następnie na $\frac{p}{q}$ daie. Biorąc zaś w §. 100, ilość r za nieskończenie wielką, w którym razie oczywiście ilość p, i z nią n, i q, będzie nieskończenie małe, natenczas równanie powyższe; $\frac{y.p}{n}=\frac{p}{q}$, zamienia się na takie; $\frac{y.dx}{dy}=\frac{p}{q}$ (§. 34.), a przeto podstyczna linii logarytmicznéy, która iest $\frac{y.dx}{dy}$ (§. 71.), iako równa z wyrazem $\frac{p}{q}$ nieodmiennym, iest sama przy każdym systemacie nieodmienną. Nadto taż podstyczny iest zawsze liniią skończoną: albowiem gdyby była nieskończenie wielką, wtedyby styczna od linii odcinków musiała bydź równoległą, co z wyobrażenia o linii logarytmicznéy, bydź niemoże; gdyby zaś była równą Zeru, wtedyby styczna do linii odcinków, musiała bydź prostopadłą, co ztéy saméy przyczyny iak wyżéy, także bydź niemoże. Nazywaiąc tedy rzeczoną nieodmienną ilość a, w którym razie toż a, przy każdym systemacie iest nieodmienne i skończone, będzie ogólne równanie na każdą logarytmiczną liniią takie: $\frac{y\,dx}{dy} = a$.

§. 102. Twierdzenie. Nazywaiąc iakąkolwiek liczbę y, iéy logarytm x, natenczas w każdym systemacie takie równanie ma mieysce: $x =$
$= a. \int. \left(\frac{dy}{y}\right)$.

Dowodzenie. Biorąc równanie ogólne na każdą liniią logarytmiczną, a tém samém na każdy systemat logarytmiczny, $y.\frac{dx}{dy} = a$, w którém y iest ustawioną, a x do dx należące, odcinkiem ustawionéy y, a tém samém y liczbą, a x logarytmem iakiegokolwiek systematu, do y należącym (§. 94), widzimy że z tego równania wypada takie: $y dx = a\,dy$, a przeto $dx = a.\frac{dy}{y}$. Całkuiąc zaś ostatnie równanie, będzie: $x = a.\int.\left(\frac{dy}{y}\right)$, które służy każdemu systematowi; gdyż $y\frac{dx}{dy} = a$, z którego przeszłe wypadło, służy każdemu.

§. 103. Wniosek. Z poprzedzaiącego §. pokazało się, że do każdéy liczby, w iakimkolwiek systemacie, znayduie się logarytm, mnożąc całkową, wyrazu $\frac{dy}{y}$, przez podstyczną tegoż systematu, która to podstyczna będzie oznaczona, skoro systém, to iest ilość zasadowa będzie oznaczona (§. 98.), iako też ilość zasadowa, a tém samém system będą oznaczone, kiedy się na a pewną wartość weźmie (§. 100 §. 101). Cała rzecz tedy idzie, chcąc rzeczywiście znaleść lo-