ROZDZIAŁ II.

O szeregach różnic.

§. 15. Definicya. Biorąc dwa szeregi, ieden taki: x, $x+mx$, $x+2mx$, $x+3mx$, $x+4mx$, $x+5mx$... a drugi: y, y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}, y^{V}, z których w pierwszym, mx iednostayny iakikolwiek przyrostek zmiennego x, oznacza, dla czego tenże szereg iest ciągiem arytmetycznym, drugiego zaś wyrazy są iakiemikolwiek funkcyami x, lecz iednak podobnemi, na ten czas szereg drugi nazywa się szeregiem głównym, a równanie między pierwszymi wyrazami obydwóch szeregów, według okoliczności różne, podaiące inne równania każdych dwóch odpowiednich wyrazów, rzeczonych szeregów, nazywa się wyrazem ogólnym. Odciągaiąc w szeregu głównym od drugiego wyrazu pierwszy; od trzeciego drugi; od czwartego trzeci, i t. d., na tenczas utworzy się nowy szereg; który się nazywa szeregiem różnic pierwszych. Wynayduiąc podobnie iak wyżey, różnice wyrazów po sobie idących, w szeregu różnic pierwszych, utworzy się dalszy szereg, który się nazywa szeregiem różnic drugich. Tym samym sposobem daley powstaiące szeregi, nazywaią się szeregami różnic trzecich, czwartych, piątych i ntych. Różnice rzeczonych szeregów piszą się tym sposobem; $y^{\mathrm{I}} - y = \Delta y$, $y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{I}}$, $y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{II}}$, $y^{\mathrm{IV}} - y^{\mathrm{III}} = \Delta y^{\mathrm{III}}$, to iest różnice pierwsze, $\Delta y^{\mathrm{I}} - \Delta y = \Delta^2 y$, $\Delta y^{\mathrm{II}} - \Delta y^{\mathrm{I}} = \Delta^2 y^{\mathrm{I}}$, $\Delta y^{\mathrm{III}} - \Delta y^{\mathrm{II}} = \Delta^2 y^{\mathrm{II}}$, $\Delta y^{\mathrm{IV}} - \Delta y^{\mathrm{III}} = \Delta^2 y^{\mathrm{III}}$, to iest różnice drugie. $\Delta^2 y^{\mathrm{I}} - \Delta^2 y = \Delta^3 y$, $\Delta^2 y^{\mathrm{II}} - \Delta^2 y^{\mathrm{I}} = \Delta^3 y^{\mathrm{I}}$, $\Delta^2 y^{\mathrm{III}} - \Delta^2 y^{\mathrm{II}} = \Delta^3 y^{\mathrm{II}}$, różnice trzecie: $\Delta^3 y^{\mathrm{I}} - \Delta^3 y = \Delta^4 y$; $\Delta^3 y^{\mathrm{II}} - \Delta^3 y^{\mathrm{I}} = \Delta^4 y^{\mathrm{I}}$, $\Delta^3 y^{\mathrm{III}} - \Delta^3 y^{\mathrm{II}} = \Delta^4 y^{\mathrm{II}}$, rożnice czwarte: $\Delta^{n-1} y^{\mathrm{I}} - \Delta^{n-1} y = \Delta^n y$,

$\Delta^{n-1} y^{II} - \Delta^{n-1} y^{I} = \Delta^{n} y^{I}$, $\Delta^{n-1} y^{III} - \Delta^{n-1} y^{II} = \Delta^{n} y^{II}$ czyli n te różnice. Wyraz Δy czyli różnica między y^{I} i y iest wyrazem poiedynczym, nie zaś iloczynem z Δ i y, równie $\Delta^{2} y$ różnica między Δy^{I} i Δy iest wyrazem poiedynczym i t. d., ztąd co innego iest $\Delta^{2} y$ iak Δy^{2}, pierwsze iest różnicą drugą y, a drugie kwadratem pierwszey różnicy y. Tożsamo się o innych różnicach rozumie.

§. 16. Wniosek. A tak wymienione szeregi maią formę taką;

$$
\begin{array}{llllll}
x, & x+mx, & x+2mx, & x+3mx, & x+4mx, & x+5mx, \ldots \\
y, & y^{I}, & y^{II}, & y^{III}, & y^{IV}, & y^{V}, \ldots \\
\Delta y & \Delta y^{I} & \Delta y^{II} & \Delta y^{III} & \Delta y^{IV} & \\
\Delta^{2} y & \Delta^{2} y^{I} & \Delta^{2} y^{II} & \Delta^{2} y^{III} & & \\
\Delta^{3} y & \Delta^{3} y^{I} & \Delta^{3} y^{II} & & & \\
\Delta^{4} y & \Delta^{4} y^{I} & & & & \\
\Delta^{5} y & & & & &
\end{array}
$$

§. 17. Wniosek. Biorąc za wyraz ogólny n. p. $y = a.x$, dla czego będzie $y^{I} = a.x + a.mx$, $y^{II} = a.x + 2a.mx$, $y^{III}\ a.x + 3a.mx$ i t. d., widzimy, iż szereg główny będzie także ciągiem arytmetycznym; biorąc zaś $y = c^{x}$, a przeto $y^{I} = c^{x+mx} = c.^{x}\ c^{mx}$, $y^{II} = c^{x+2mx} = c.^{x}\ c.^{mx}\ c^{mx}$, $y^{III} = c^{x+3.mx} = c.^{x}\ c.^{mx}\ c^{mx}.\ c^{mx}$, w takim razie szereg główny iest ciągiem jeometrycznym. Biorąc za wyraz ogólny co raz co innego, za każdą razą kształt szeregu głównego będzie inny; a zatem szereg główny wyrażać może wszelakie szeregi, iakie tylko sobie wystawić można, co zawsze od wyrazu ogólnego zawisło.

§. 18. Wniosek. Kładąc wiakikolwiek wyraz szeregu głównego zamiast x, $x+mx$, natenczas wynayduie się następuiący wyraz tegoż szeregu. To iest kładąc w ilość y która iest funkcyą x, zamiast x, $x+mx$, wypadnie wyraz y^I i t. d. Pokazuie się to tym sposobem: iak powstaie iakikolwiek wyraz szeregu głównego z nad sobą stoiącego wyrazu ciągu arytmetycznego, zupełnie tak powstaie wyraz dalszy tegoż szeregu, z odpowiedniego sobie wyrazu, ciągu arytmetycznego, i tylko ta iest zmiana, że w każdym dalszym wyrazie ciągu arytmetycznego x, zamienia się na $x+mx$ (§. 15); stąd kładąc w iakikolwiek wyraz szeregu głównego zamiast x, $x+mx$, wypada dalszy wyraz tegoż szeregu. N. p. Niech będzie $y = x^2$, a tém samém $y^I = x^2 + 2x.mx + mx^2$, $y^{II} = x^2 + 4x.mx + 4mx^2$, $y^{III} = x^2 + 6x\,mx + 9mx^2$ i t. d. Biorąc tu w wartości na y^{II}, zamiast x, $x+mx$, wyraz x^2 zamieni się na $x^2 + 2x.mx + mx^2$; $4x.mx$ na $4(x+mx)\,mx = 4x.mx + 4mx^2$; a zatem cała wartość $x^2 + 4x.mx + 4mx^2$, da ten wyraz: $x^2 + 6x.mx + 9mx^2$, który, iak wyżey stoi, iest dalszym wyrazem szeregu głownego.

§. 19. **Wniosek.** Z §. 15. wiadomo, że $\triangle y = y^I - y$, $\triangle y^I = y^{II} - y^I$, $\triangle y^{II} = y^{III} - y^{II}$, $\triangle y^{III} = y^{IV} - y^{III}$, $\triangle^2 y = \triangle y^I - \triangle y$, $\triangle^2 y^I = \triangle y^{II} - \triangle y^I$, $\triangle^2 y^{II} = \triangle y^{III} - \triangle y^{II}$, $\triangle^3 y = \triangle^2 y^I - \triangle^2 y$, $\triangle^3 y^I = \triangle^2 y^{II} - \triangle^2 y^I$, i t. d., a przeto $\triangle^2 y = \triangle y^I - \triangle y = y^{II} - y^I - y^I + y = y^{II} - 2y^I + y$, $\triangle^2 y^I = \triangle y^{II} - \triangle y^I = y^{III} - y^{II} - y^{II} + y^I = y^{III} - 2y^{II} + y^I$, $\triangle^3 y = \triangle^2 y^I - \triangle^2 y = \triangle y^{II} - \triangle y^I - \triangle y^I + \triangle y = \triangle y^{II} - 2\triangle y^I + \triangle y = y^{III} - y^{II} - 2y^{II} + 2y^I + y^I - y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$, i t. d. To iest wszelakie różnice daią się przez same wyrazy szeregu głównego wynaleść; biorąc na pierwsze, dwa; na drugie, trzy; na trzecie, cztery; na czwarte pięć; na nte $n+1$, wyrazów szeregu głównego.

§. 20. Wniosek. Biorąc $x=1$, $mx=1$, $y=x^2$, wtedy forma (§. 16.) będzie taka:

$x)$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	....
$y)$	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	
$\triangle y)$	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,		
$\triangle^2 y)$	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,			
$\triangle^3 y)$	0,	0,	0,	0,	0,	0,				

Kiedy zaś $y=x^3$ na ten czas będzie:

$x)$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	....
$y)$	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	
$\triangle y)$	7,	19,	37,	61,	91,	127,	169,	217,		
$\triangle^2 y)$	12,	18,	24,	30,	36,	42,	48,			
$\triangle^3 y)$	6,	6,	6,	6,	6,	6,				
$\triangle^4 y)$	0,	0,	0,	0,	0,					

i t. d.

To iest kiedy którykolwiek z szeregów, zaczynaiąc od głównego staie się ciągiem arytmetycznym, wtedy tylko ieden szereg, po nim następuie, wszystkich zaś dalszych wyrazy, czyli wszystkie dalsze różnice są Zerami.

§. 21. Twierdzenie. Kładąc w iakim kolwiek szeregu różnic, w iakikolwiek wyraz w mieysce x, $x+mx$, wynaydzie się dalszy wyraz czyli bezpośrednia dalsza różnica tegoż szeregu.

Dowodzenie. I tak maiąc różnicę $\triangle y$ znaną, kładąc w $\triangle y$ zamiast x, $x+mx$, wypadnie $\triangle y^{I}$ i t.d. $\triangle y^{I} = y^{II} - y^{I}$, y^{II} zaś znaydzie się biorąc y^{I} i kładąc w nie zamiast x, $x+mx$ (§. 18.) Niech to czemu y^{II} iest równe wyraża się przez $\overset{\frown}{y^{I}}$ gdzie górny haczyk znaczy iż się w y^{I} zamiast x, $x+mx$ kładzie. A tak będzie $\triangle y^{I} = \overset{\frown}{y^{I}} - y^{I}$. A że $y^{I} = y + \triangle y$ (§. 1.), dla czego $\overset{\frown}{y^{I}} = \overset{\frown}{y} + \triangle \overset{\frown}{y}$; ztąd $\triangle y^{I} = \overset{\frown}{y} + \overset{\frown}{\triangle y} - y^{I}$. Wziąwszy w reszcie z równania $y^{I} = \overset{\frown}{y}$, zamiast y^{I}, $\overset{\frown}{y}$ wypadnie $\triangle y^{I} = \overset{\frown}{y} + \overset{\frown}{\triangle y} - \overset{\frown}{y} = \overset{\frown}{\triangle y}$. To iest kładąć w $\triangle y$ zamiast x, $x + mx$ wypada $\triangle y^{I}$. Toż samo $\triangle^2 y^{I} = \triangle y^{II} - \triangle y^{I} = \overset{\frown}{\triangle y}^{I} - \triangle y^{I} = \overset{\frown}{\triangle} y + \overset{\frown}{\triangle^2} y - \triangle y^{I} = \overset{\frown}{\triangle} y + \overset{\frown}{\triangle^2} y - \overset{\frown}{\triangle} y = \overset{\frown}{\triangle^2} y$. Toż samo o wszystkich innych wyrazach i innych szeregach się rozumie.

§. 22. Wniosek. Z powyższego twierdzenia wypada, że kładąc w iakąkolwiek różnicę, w mieysce każdego x, samo mx, i łącząc ie tak i z temi samemi ilościami, z któremi i iak się x łączyło, a wyrazy, w które x, niewchodzi, opuszczaiąc, wypada różnica do takiego samego y, lecz szeregu dalszego. I tak różnica każda dalsza powstaie z bliższey tego samego szeregu, kładąc w niey zamiast x, $x + mx$ (§ 21); więc każda różnica dalsza składa się właściwie z dwóch części, raz z różnicy bliższey tego samego szeregu, powtóre z wyrazów różnicy bliższey, tych, w których było x, kładąc zamiast każdego x, mx. Pierwsza część powstaie kładąc w różnicę bliższą zamiast x, także x; druga zaś, kładąc iescze w bliższą różnicę mx i łącząc ie z innemi ilościami tak iak się x łączyło. Odciągaiąc tedy od różnicy dalszey różnicę bliższą, resztą ich będą te wyrazy bliższey różnicy, w których było x, lecz zmienione wzmiankowanym sposobem, która to reszta daie różnicę dalszą dalszego szeregu, do tego samego y, (§. 15), to iest różnica pierwsza, daie różnicę drugą; druga trzecią i t. d. N. p. Niech będzie $y = x^2$, z czego $y^{I} = x^2 + 2x.mx + mx^2$. W takim razie $\triangle y = y^{I} - y = x^2 + 2x.mx + mx^2 - x^2 = 2x.mx + mx^2$. Biorąc tedy w wartość na $\triangle y$, zamiast x, mx samo, a wyrazy, gdzie niema x, tutay mx^2 opuszczaiąc, będzie $\triangle^2 = 2mx^2$; $\triangle^3 y = 0$ i wszystkie dalsze wyrazy także równe Zeru. Biorąc $y = x^3$, będzie $y^{I} = (x + mx)^3 = x^3 + 3x^2 mx + 3x(mx)^2 + mx^3$, a tak $\triangle y = y^{I} - y = x^3 + 3x.^2 mx + 3x.mx^2 + mx^3 -$

$x^3 = 3x.^2 mx + 3x.mx^2 + mx^3$. Tutay w wyraz $3x.^2 mx$, kładzie się zamiast każdego x, mx, to iest dwa przyrostki mx, i drugi przyrostek mnoży się z pierwszem x, a pierwszy przyrostek, z drugiem x; i przyrostki z sobą, bo w xx tak się x z sobą łączy; a tak wyraz $3x^2.mx$ zamienia się na taki $3.mx$ ($2x mx + mx^2$) czyli $6.x mx^2 + 3mx^3$. W wyraz zaś $3x.mx^2$ kładzie się samo mx zamiast x, dla czego $3x mx^2$ zamienia się na $3mx^3$. A więc $\triangle^2 y = 6x mx^2 + 6mx^3$. Inaczey można to samo powiedzieć: z każdey bliższey różnicy znayduie się dalsza, kładąc w każdy wyraz niższey, w którym x iest, zamiast x, $x + mx$, wyniesione do tey potęgi, do którey x w tym wyrazie było wyniesione, opuszczaiąc w tey potędze naywyższą potęgę x, i resztę z względnymi wyrazami łącząc tak iak się potęga x łączyła, iako też inne wyrazy, w których x niebyło, wyrzucaiąc. Iż różnice wszystkie dalsze dalszych szeregów, wymienionym sposobem się wynayduią, przekonywa także sprawdzenie rzeczonych różnic, to iest wynalezienie ich i sposobem rzeczonym i przez odciąganie. Maiąc iuż wyżey $y = x^2$; $y^I = x^2 + 2x.mx. + mx^2$, będzie daley $y^{II} = x^2 + 4x.mx + 4mx^2$, a więc $\triangle y = 2x.mx + mx^2$, $\triangle y^I = 2x.mx + 3mx^2$, stąd $\triangle^2 y = \triangle y^I - \triangle y = 2x.mx + 3mx^2 - 2x.mx - mx^2 = 2mx^2$. Toż samo co wyżey i t. d.

§. 23. Wniosek. Dotąd uważaliśmy mx iako ilość iednostayną; lecz można także mx równie iak x i wszystkie dalsze przyrostki uważać za zmienne, i podobnie ie oznaczyć iak różnice y, w którym razie szeregi, pierwsze dwa z §. 16. taką formę mieć będą:

$$\underset{y;}{x}, \quad \underset{y^I;}{x + \triangle x}, \quad \underset{y^{II},}{x + 2\triangle x + \triangle^2 x}, \quad \underset{y^{III},}{x + 3\triangle x + 3\triangle^2 x + \triangle^3 x},$$

$$\underset{y^{IV},}{x + 4\triangle x + 6\triangle^2 x + 4\triangle^3 x + \triangle^4 x},$$ z czego się

pokazuie: 1. że lubo szereg główny może wiele szeregów oznaczać iednak nie wszystkie iak §. 17., albo wiem iuż arytmetycznego ciągu, iak forma wskazuie niewyraża nadto że zawsze różność szeregu od wyrazu ogólnego zawisła. 2. Że w szeregu głównym kładąc zamiast zmiennych, też zmienne i ich przyrostki, wynaydzie się dalszy wyraz szeregu głównego. 3. Każdą różnicę szeregów różnic można wyrazić przez wyrazy szeregu głównego. 4. Że tu się nie natrafia na różnice równe Zeru iak §. 6. 5. Kładąc w iakimkolwiek szeregu różnic, w iakikolwiek wyraz, zamiast zmiennych, też zmienne i ich przyrostki, wypada dalszy wyraz tegoż szeregu. 6. Kładąc w iakąkolwiek róznicę zamiast zmiennych ich same przyrostki i łącząc ie z sobą i innemi tak iak się zmienne łączą, wypada dalsza różnica tego samego y, dalszego szeregu. I tak Np. co do ostatnich dwóch szczegółów niech będzie:

$y = ax$, a więc

$y^{I} = ax + a.\triangle x;$

$y^{II} = ax + 2a.\triangle x + a.\triangle^{2}x,$

$y^{III} = ax + 3a.\triangle x + 3a.\triangle^{2}x + a.\triangle^{3}x,$

$y^{IV} = ax + 4a.\triangle x + 6a.\triangle^{2}x + 4a.\triangle^{3}x + a\triangle^{4}x;$

$\triangle y = y^{I} - y = a.\triangle x.$

$\triangle y^{I} = y^{II} - y^{I} = a.\triangle x + a.\triangle^{2}x,$

$\triangle y^{II} = y^{III} - y^{II} = a.\triangle x + 2a.\triangle^{2}x + a.\triangle^{3}x,$

$\triangle y^{III} = y^{IV} - y^{III} = a\triangle x + 3a.\triangle^{2}x + 3a.\triangle^{3}x + a.\triangle^{4}x;$

$\triangle^{2}y = \triangle y^{I} - \triangle y = a.\triangle^{2}x,$

$\triangle^{2}y^{I} = \triangle y^{II} - \triangle y^{I} = a.\triangle^{2}x, + a.\triangle^{3}x,$

$\triangle^{2}y^{II} = \triangle y^{III} - \triangle y^{II} = a.\triangle^{2}x + 2a.\triangle^{3}x + a\triangle^{4}x;$

$\triangle^{3}y = \triangle^{2}y^{I} - \triangle^{2}y = a.\triangle^{3}x,$

$\triangle^{3}y^{I} = \triangle^{2}y^{II} - \triangle^{2}y^{I} = a.\triangle^{3}x + a\triangle^{4}x;$

$\triangle^{4}y = \triangle^{3}y^{I} - \triangle^{3}y = a\triangle^{4}x,$

i t. d.

Inaczey kładąc w wyraz $\triangle y = a \triangle x$, zamiast $\triangle x$, $\triangle x + \triangle^2 x$, wypada $a \triangle x + a \triangle^2 x$ ktore iest równe z powyższego ilości $\triangle y$. Kładąc zaś w wyraz $\triangle y = a \triangle x$, zamiast $\triangle x$, sam przyrostek $\triangle^2 y$, wypadnie $a \triangle^2 x$, co iest równe ilości $\triangle^2 y$; a zatem i przykład sprawdza to, co ostatnie dwa szczegóły z formy szeregów ogólnie pokazuią.

ROZDZIAŁ III.

Zasady rachunku różniczkowego.

§. 24. **Definicya.** Z wyobrażenia o ilości, o czem iuż się i wyżey powiedziało, wiadomem iest, że każdą ilość można ciągle powiększać lub pomnieyszać, dlaczego ilości naywiększéy równie iak naymnieyszéy niemasz i bydź niemoże. Kiedy ilość pewna o ten sam, lub o co raz większy przyrostek ciągle się powiększa, wtedy mówi się, że ilość nieskończenie rośnie. Kiedy ilość pewna, o co raz mnieyszy przyrostek ciągle pomnieysza się, wtedy mówi się, że się ilość nieskończenie zmnieyszą. Ilość, która od każdey, choćby bardzo wielkiey skończoney większą bydź może, nazywa się, nieskończenie wielką. N. p. każda z równoległych, wystawiaiąc ią sobie z całym postępem ukończonym, równie niedostyczna (assimptota) krzywéy linii, iest nieskończenie wielką; bo może bydź większą od każdey linii choćby bardzo wielkiéy, która się iuż daley nieprzedłuża, czyli która iest skończoną. Ilość, która bydź może mnieyszą od każdey, choćby bardzo małey skończoney, to iest takiey, którey wartość da się oznaczyć, nazywa się nieskończenie małą. N. p. niech będzie koło M (F 1), w niém średnica AB, ustawione CD, EF; liniia CG niech oznacza styczną,