

# ROZDZIAŁ V.

## RACHUNEK LITERALNY.

§ 68. Jużemy w § 18 namienili iak wygodnie wyrażać liczby literami z alfabetu. Używszy znakow  $+$   $-$   $\times$ : wyraziliśmy tam w krotkości wszystkie cztery fundamentalne arytmetyczne działania, tak że ie do razu ogarnąć okiem można. Część arytmetyki, w której dochodzi się liczb nieznaomych ze znaomych wyrażając ie ogólnie literami z alfabetu, nazywa się *rachunkiem literalnym*. Znaki działań dopiero co przytoczone zachowują się też same; wyjąwszy, że znak mnożenia opuszcza się n. p. zamiast  $a \times b$  kładę  $a b$ .

Przystąpmy do czterech zwyczajnych fundamentalnych działań, które z łatwością wykonać będzie można, pomniąc na to co się z okazji przeciwnych sobie wielkości w Rozdziale III. mówiło o znakach  $(+)$   $(-)$

*Przykład dodawania.*

$$\begin{array}{r} + 8a + 3b - 4c - 6d = A \\ + 5a - 6b - 5c + 7d = B \\ \hline + 13a - 3b - 9c + d = C \end{array}$$

*Odciągania.*

$$\begin{array}{r} + 14a - 13b + 7c - 10d = D \\ + 2a + 7b - 4c - 15d = E \\ \hline + 12a - 20b + 11c + 5d = F \end{array}$$

Jeżeli każdej z liter  $a, b, c, d$  damy iedność wyznaczoną, n. p. *Cetnarow, Funtow, Łotow* i ćwierć łotow, byłyny  $a=160 b$ ;  $b=32 c$ ;  $c=4 d$ . zatem

w dodawaniu

w odciąganiu

 $A=164202$  ćwierć łot:  $D=285074$  ćwierć łot: $B=101619$  - - -  $E=41825$  - - - $C=265821$  - - -  $F=243249$  - - -

Widać z tąd oczywiście, iak zrudne i długie redukowanie wyższych iedności na niższe oszczędzić sobie można rachunkiem przeciwnych sobie wielkości: dla tego też w wielu rachunkach w pożyciu, użyć go można z korzyścią.

Sprawdza się oraz temi dwoma przykładami przepisane postępowanie znakami (+) (—) w dodawaniu i odciąganiu.

§ 69. Następującemi przykładami przeświadczyć się można, iak wygodnym jest ten rachunek literalny w odkrywaniu nowych prawd.

Przykład 1.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + a b \\ + a b + b^2 \\ \hline a^2 + 2a b + b^2 \end{array}$$

Przkład 2.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2a b + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2 b + ab^2 \\ + a^2 b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Przykład 3.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + a b \\ - a b - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Przykład 4.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - a b \\ - a b + b^2 \\ \hline a^2 - 2a b + b^2 \end{array}$$

Z pierwszego. Przykładu widać, z czego jest złożony kwadrat liczby z dwóch części.

Z drugiego. Z czego jest złożony sześciąt takię liczby. Obydwóch zaś tych podań użyliśmy z korzyścią w wyciąganiu pierwiastków kwadratowych i sześciennych.

Z *trzeciego* przykładu widać, że summa dwóch liczb rozmnożona przez ich różnicę daie różnicę ich kwadratów.

Z *czwartego*. Ze kwadrat z różnicy dwóch liczb daie różnicę między kwadratem z pierwszej i różnicą między podwoynym produktem pierwszej przez drugą i kwadratem z drugiej.

Dwóch pierwszych były już przykłady liczebne w poprzedzającym rozdziale. Dwa drugie także objaśnićby sobie można na liczbach

*Przykład 3.*

$$3 + 2 = 5$$

$$\frac{3-2}{1} = 1$$

$$9 - 4 = 5$$

*Przykład 4.*

$$5 - 2 = 3$$

$$\frac{5-2}{3} = 3$$

$$25 - 20 + 4 = 9$$

Zanimi się ośwoi z rachunkiem na literach dobrze objaśniać sobie takie działania na zwyczajnych liczbach, iak w tych tu dwóch przykładach widzimy:

Z *czwartego* przykładu wywieść możemy i następującą prawdę; że od iakiey liczby *odciągnąć różnicę dwóch liczb*, na iedno wychodzi co *pierwszą odciągnąć*, a *drugą do tej różnicy dodać*, lub *drugą dobrać*, a *pierwszą od tej summy odciągnąć*. iak wyrażenie  $25 (20 - 4)$  tak też  $25 - 20 + 4$  czyni y Często się tego zdarza przytłosowanie:

*Przykład dzielenia.*

$$\frac{ab - cd}{bc} = \frac{ab}{bc} - \frac{cd}{bc} = \frac{a}{c} - \frac{d}{b}$$

Wymazują się mianowicie spólne, czyniki: względem znaków zaś zachowują się reguły w § 52 podane.

Obszerniejsze prawidła dzielenia nie są tu ieszcz potrzebne.

*Mnożenie i dzielenie mnogości.*

§ 70. *Produktem mnogości o jednakowych pierwiastkach, jest mnogość tegoż pierwiastku, mająca za wykładnika sumę wykładników, które są w czynnikach.*

$$\text{I tak } 2^3 \times 2^2 = 8 \times 4 = 32 = 2^5$$

$$\text{i ogólnie } a^3 \times a^2 = aaaaa(\S 53) = a^5$$

A jeżeli  $m$  i  $n$  znaczyć będą jakiekolwiek dwie liczby, otrzymamy następującą ielzce ogólnieyszą formułę  $a^m a^n = a^{m+n}$

§ 71. *I wzajemnie wielorazem z dwóch takich mnogości jest mnogość tegoż pierwiastka, mająca za wykładnika różnicę wykładników podzielney i dzielnika.*

$$\text{I tak } \frac{2^5}{2^2} = \frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

$$\text{ogólnie } \frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3$$

$$\text{nayogólnie } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

§ 72. Z różności wykładników w dzieleniu takich mnogości wypadających, ważne wynikają wnioiki.

Może bowiem ten być drugi przypadek, że wykładnik podzielney jest równy, wykładnikowi dzielnika, będzie tedy

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^0 (\S 71) = \frac{8}{8} = 1$$

$$\text{ogólnie } \frac{a^3}{a^3} = a^0 = 1$$

$$\text{nayogólnie } \frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$$

To jest, że mnogość iakiegokolwiek bądz pierwiastku podniesiona do stopnia zero, jest toż samo co ieden.

Trzeci przypadek jest ten, gdy wykładnik w dzielniku jest większym od wykładnika w podzielney.

$$\text{n. p. } \frac{2^3}{2^5} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\text{i ogólnie } \frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{a^2}$$

W pierwszym mianowicie przypadku jest mnogość większą od iedności, w drugim do niej równą, w trzecim od niej mnieyszą.

Lub co na iedno wychodzi mnogości z przydaynymi wykładnikami są większe od iedności.

Jeżeli mają za wykładnika zero, są równe do iedności.

Jeżeli zaś wykładnik jest ujemnym, jest wtedy mnogość mnieyszą od iedności: i może się wyrazić właściwym ułamkiem, mającym za licznika 1, a za mianownika mnogość tę z przydaynym wykładnikiem.

§ 73. Pamiętając co się o gatunku mnogości, to jest o kwadratach i sześciannach i o ich pierwiastkach mówiło; można też samo i tu przyłożyć.

$$\text{I tak ogółem } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\text{i wzajemnie } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{Także } (2 \times 3)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \times 3^2 = 36$$

$$\text{ogólniey } (ab)^3 = a \times b \times ab \times ab = a^3 b^3$$

$$\text{ieszcze ogólniey } (ab)^m = a^m b^m \quad a^m b^m$$

*Takby się tą regułą wyraziła. Aby wynieść produkt do mnogości iakiego stopnia, trzeba wynieść każdy z czynników iego do tego stopnia: i wzajemnie*

Można częstokroć obeysć się bez znakow pierwiastkowych, wyrażając wielkości pod niemi, pod kształtem mnogości

$$\text{i tak } \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$$

bo iak sześcian pierwszego tak i drugiego wyrazu jest 8 (70)

$$\text{i ogółem } \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Co powinno być wykładnikiem mnogości samo w oczy wpada. Redukcyja ta jest wielce przydatną w rachunkach.

§ 74. Widzieliśmy w poprzedzających §§ iak jest wygodnie objaśniać sobie zwyczajnemi liczbami prawdy ogólnie na literach odkryte. Takim to sposobem przeświadczylibyśmy się o prawdziwie następującej Reguły.

*Aby wprowadzić iaki czynnik pod znak pierwiastkowy, trzeba przywiodłszy go do mnogości stopnia, który znak pierwiastkowy wyraża, rozmnazyc przez niego wszystkie wyrazy pod znakiem pierwiastkowym. I wzajemnie: dla wyprowadzenia iakiego czynnika z pod znaku pierwiastkowego, trzeba przez niego podzielić wszystkie wyrazy pod znakiem pierwiastkowym, i poprzedzić ten iego pierwiastkiem. n. p.*

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \sqrt{m^2 + n^2} &= \frac{1}{b} \sqrt{a^2 m^2 + a^2 n^2} = a \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{b^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 m^2 + a^2 n^2}{b^2}} \\
&= \frac{an}{b} \sqrt{\frac{m^2}{n^2} + 1} = \frac{an}{b} \sqrt{1 + \frac{n^2}{m^2}}
\end{aligned}$$

§ 75. Początkowi zastanawiają się często-  
kroć nad pewnemi odmianami, ponieważ  
dobyć ich prawdy uśiłują, zamiast spra-  
wdzenia onych Daymy na to żebyśmy zamiast

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ położyli } ab$$

zrobiwszy w samej rzeczy kwadraty, któ-  
re tylko są tu naznaczone, i wykonawszy  
odciąganie, doydziemy, że ta wielka expre-  
sja przywodzi się do tej krótkiej  $ab$ .

Podobnież poznamy takim sposobem, że

$$2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

