



ROZDZIAŁ IV.

S T E R E O M E T R Y A.

§ 63. **U**Ważaliśmy dotąd pojedynczo linie co do ich wielkości i położenia wzajemnego, powierzchnie zaś tylko co do ich wielkości. Teraz i na wzajemne położenie płaszczyzn mieć wzgląd będziemy, a gdy te zewzład zamykać będą miejsca, powstanie z tąd ciało geometryczne. Istotę ciała geometrycznego, powierzchni linii, punktów objaśnić sobie możemy następującym przykładem. Wystawmy sobie n. p. kostkę do grania włożoną w воск roztopiony; po ostygnięciu zaś jego wyjętą z niego bez najmniejszego ścian poruszenia: zostanie się w wosku próżne miejsce mające kształt i wielkość kostki. Taka rozległość kostki iakąśmy tu powzięli zmyłowe wyobrażenie nazywa się *ciałem geometrycznym*, czyli *bryłą* (solidum: corpus). Z znaczenia jego wynika, że się wcale niema względu na cząstki materyalne, z iakich się składa, lecz tylko na jego rozciągłości wzdłuż, w szerz i w głąb. Gdy zważemy części ograniczające ciało geometryczne, potrzeżemy, że te mają tylko rozciągłość wzdłuż i w szerz; grubości zaś mieć nie mogą, bo inaczej byłyby częściami ciała geometrycznego nie zaś granicą jego; granicą bowiem iakiej rzeczy jest to gdzie się ta rzecz kończy. To czym jest ciało geometryczne ograniczonym, nazywa się *powierzchnią*. Powierzchnia więc niema grubości. W kostce czyli sześciianie składa się powierzchnią z sześciu kwadratów zupełnie sobie równych.

Każdy z tych kwadratów jest ograniczony czterema liniami jego bokami nazwanemi, te znowu jako granice powierzchni, niemożę mieć szerokości, bo inaczej nie byłyby granicami powierzchni. Końce linii nazywają się punktami; z znaczenia ich wynika, że niemożę być linii częścią, zaczyn żadnych części mieć nie mogą. W praktyce staramy się zbliżyć do tych oryginałów, wyrażając punkt kropką iak najmnieyszą linię zaś kreską iak nacyieńszą; co wielce przykłada się do doskonałości wykreślenia (constructio).

Mimo prostoty tych wyobrażeń punktów, linii ciała geometrycznego są tacy, którzy ich bytności nie uznają. Można by im uczynić zapytanie iak wielkiemi chcą, żeby przyjęto w geometryi punkta, iak grubemi linie? Podrożnemu dochodzącemu długości drogi śmiesznie by się wydawało, gdyby chciano, żeby miał oraz wzgląd i na iey szerokość. Lecz chcącemu uchodzić za uczonego, zdaie być niegodnym iego potwierdzenia, to co zdrowy rozum uznaje. Trzeba mu ofobliwości w zdaniu, a gdy się na te zdobyć niemoże, iefzcze wygodney wątpliwości pozorem pokryć swą niewiedomość, byleby tylko swej próżności lub niewiedomości dogodzić.

W Journal Litt. Septembre 1713 p. 188 to o Algiebrze było umieszczonym. Rozsądny autor piszący przeciw Matematyce tak się tłumaczy. „Quelle liaison y a-t-il entre les choses elles mêmes, & cet obscur grimoire de lettres peut-etre jettées au hazard.,.

Spectatum admissi risum teneatis amici.

Zaraz przy początku dawane powyższe definicje punktów, linii, powierzchni, ciał geometrycznych mogą w samey rzeczy dać

pochoy początkowym do powątpiewania o ich bytności z uszczerbkiem umiejętności: piszącym zaś dlatego przeciw prawdóm geometrycznym nie lepszego poradzić nie można, iak żeby się ich uczyli.

Przystępujemy teraz do uważania rozmaitego położenia, które mieć mogą linie względem płaszczyzn i płaszczyzny względem siebie. Zachodzi w tym niejakieś podobieństwo do twierdzeń już stanowionych względem linii na iedneyże płaszczyźnie uważanych: i innych prawd już w początkach geometryi wyrażonych.

O POŁOŻENIACH PŁASZCZYZN.

§ 64. TWIERDZENIE I. *Jeżeli linia jest prostopadłą do dwóch linii przez iey spodek na płaszczyźnie poprowadzonych, jest nią oraz i do każdej trzeciej tak poprowadzonej.* Figura 47.

Jeżeli linia ab jest prostopadłą do cb i db jest oraz prostopadłą i do trzeciej be

Objaśnić sobie to można kartą zgietą przez połowę. Zgięcie to wyraża linia ab : spodnie zaś krawędzie karty, linie cb , bd . Obrociwszy iedną z stron karty przypadnie dolna iey krawędź, na którakolwiek z takich linii iaką jest be .

WNIOSEK I. I wzajemnie jeżeli ab jest prostopadłą do cb , be i bd ; płaszczyzna przechodząca przez cb i bd przechodzić oraz będzie i przez be .

WNIOSEK 2. Jeżeli linia jest prostopadłą do dwóch takich linii iak są w twierdzeniu wyrażone, jest oraz i do trzeciej, zaczym i do wszystkich przez iey spodek poprowadzonych, a z tąd oraz prostopadłą do płaszczyzny. *Aby więc linia była prosto-*

padłą do płaszczyzny, trzeba żeby do dwóch tylko takich linii była prostopadłą.

Figur: § 65 TWIERDZENIE 2. Jeżeli dwie linie są
48. prostopadłe do płaszczyzny, są oraz równoodległe, lub na iedneyże płaszczyźnie.

Linie ab , cd są prostopadłe do płaszczyzny gh .

Ściągam bd , wystawiam df prostopadłą do bd i biorę ją równą do be , ściągam bf , ed , ef . Trykąt bdf przystać może do trykątka ebf zaczynam $bf = ed$ Toż mówić można i o trykątach i kątach w nich $ebf = edf$, że zaś pierwszy jest prostym, więc i drugi: z tąd fd jest prostopadłą do bd , de , dc , zaczynam płaszczyznę przechodzącą przez cd i bd przechodzi oraz i przez ed (§ 64. Wnio. 1) zaczynam i przez linią ab .

WNIOSEK. Jeżeli iedna z dwóch równoodległych jest prostopadłą do płaszczyzny, będzie nią oraz i druga.

Figur: § 66 ZADANIE Spuścić do płaszczyzny pro-
49. stopadłą od punktu nad nią danego

Trzeba spuścić od punktu a prostopadłą do płaszczyzny hi .

Prowadzę na niey linią de . Przez a i de prowadzę płaszczyznę. Przez trzy bowiem punkta nie na iedney linii wyznacza się położenie płaszczyzny; równie iak położenie linii prostej przez dwa punkta. W tey wprowadzoney płaszczyźnie spuszczam prostopadłą ac do de . W płaszczyźnie hi wystawiam bc prostopadłą do de . Przez ac i bc prowadzę płaszczyznę i w niey z punktu a prostopadłą ab na bc . Ta ab będzie prostopadłą żadaną. Dla dowiedzenia tego prowadzę przez b równoodległą fb do dc . Ponieważ dc jest prostopadłą do ac i bc , jest więc prostopadłą i do płaszczyzny abc (§ 64) zaczynam i fg prostopadłą do teyże płaszczyzny

zny (§. 65. *Wn.*) mianowicie do ab i bc i wzajemnie ab jest taką do bc i bf zaczynam do płaszczyzny hi .

Wniosek 1. Kąt iak acb nazywa się kątem pochyłości linii ac do płaszczyzny. Jest on zawartym między tą linią ukośną i inną od c do b poprowadzoną.

Wniosek 2. Chcąc wystawić od c prostopadłą do płaszczyzny hi spuścić by trzeba od iakiego punktu nad nią a prostopadłą ab , a przez c poprowadzić do niej równoodległą.

§. 67. TWIERDZENIE 3 Jeżeli dwie linie są równoodległe każda od trzeciej, będą też między sobą równoodległemi.

Jak ab tak ef będąc równoodległemi od cd Figu: między sobą są oraz równoodległemi. Bo 50. obrawszy sobie punkt g poprowadzmy w obu płaszczyznach linie gi , gh prostopadłe do cd . Linia gd jest prostopadłą do płaszczyzny ghi (§. 64.) zaczynam i linie ab i ef (§. 65.) a ztąd i równoodległe między sobą.

§. 68. TWIERDZENIE 4 Jeżeli dwie linie przecinające się są równoodległe względem dwóch Figu: innych linii przecinających się na innej płaszczyźnie: będą kąty między niemi zawarte równe. ab i bc są równoodległe względem de i ef ma byż kąt b równy do c . 51.

Biorę $de=ab$; $ef=bc$ i ściągamy linie ad , be , ef , ac , dc . Poformują się same równoległoboki: w ostatnim dc jest $ac=df$; zaczynam troyką abc przystaie do troykąta def a w szczególności kąt $b=c$.

§. 69. Kątem pochyłości dwóch płaszczyzn Figu: $a\delta$, ae jest kąt gcf zawarty między dwoma 52. prostopadłymi cg , cf wysławionymi w obydwóch płaszczyznach do ich spólnego przecięcia ab od punktu c na nim obranego. Nazywa się on miarą pochyłości dwóch płaszczyzn bo tak się powiększa i zmniejsza.

fza iak te płaszczyzny oddalaia się lub zbliżaią do siebie, obracaiąc się w koło ich spólnego przecięcia. Do tego iest zawsze iednostayney wielkości; gdziekolwiek bowiem tak go sobie poprowadziwszy, będzie rowny kątowi gcf (§ 68.)

Figura 53. § 70 TWIERDZENIE 5. Jeżeli dwie płaszczyzny przecinaiaące się są prostopadłemi do trzeciej, będzie też takim i ich spólne przecięcie: a kąty ich pochyłości przeciwległe będą sobie równe. Spólnym przecięciem płaszczyzn cd i ef prostopadłych do gh iest ab prostopadła do cb i bf iako to z znaczenia płaszczyzny prostopadłej wynika.

Kąt zaś cbf iest rowny kątowi kbi iako w wierzchołku przeciwległe.

Figura 54. § 71. TWIERDZENIE 6. Jeżeli dwie płaszczyzny są równoodległemi, przecięte przez trzecią, będą oraz takimi ich spólne przecięcia.

Spólne przecięcia $a c$, $b d$ dwóch płaszczyzn fe i hg przeciętych przez trzecią ab cd są równoodległemi, bo gdyby niemi nie były, przedłużone dostatecznie zeyść by się musiały zaczym i płaszczyzny na których się znayduią, co by było przeciw przypuszczeniu.

§ 72 TWIERDZENIE 7. Jeżeli linia iest prostopadłą razem do dwóch płaszczyzn, te muszą być równoodległemi.

Niech będzie ab prostopadłą do ef i hg . Poprowadzmy przez a b iakąkolwiek płaszczyznę $abcd$ ta będzie prostopadłą do płaszczyzn ef i hg bo iey kąty pochyłości z niemi będą prostemi. Przecięciami ich będą ac i bd : gdyby więc płaszczyzny fe i hg zeyść się gdzie mogły, musiałyby się oraz zeyść i linie ac i db które są prostopadłe do ab .

§ 73. TWIERDZENIE 8. *Linie nie znajdujące się na jednej płaszczyźnie rozdziela się 55. płaszczyznami równoodległymi na części proporcjonalne.*

Niech będą dwoma takimi liniami ab i cd . Prowadzę płaszczyznę przez ab i c ; toż przez d i ac tych wspólnym przecięciem jest ac . Przeciąwszy te dwie płaszczyzny trzema innymi od siebie równoodległymi, poprowadzonymi przez a g i b wspólne ich przecięcia z abc będą gf i bc równoodległe od siebie (§. 71) dla tejże przyczyny ef równoodległa od ad . Z podobieństwa więc trójkątów które się tu poformują wynika,

$$ag : gb = af : fc \\ = de : ec$$

O CIAŁACH GEOMETRYCZNYCH:

§. 74. Objaśniliśmy już znaczenie ciała geometrycznego w §. 63 kształt jego zawisł od płaszczyzn któremi jest zamknięty. Można w ogólności podzielić ciała geometryczne na graniałostłupnie, ostrosłupne i kulę.

Graniałostłupem (Prisma) nazywa się ciało geometryczne mające dwie podstawy we wszystkim sobie równe, równoodległe i podobnie położone, inne zaś jego ściany są prostokątami albo równoległobokami, mającemi każdy dwa boki przeciwległe w obydwóch podstawach.

Takimi graniałostłupnemi ciałami, są fig: 56, 57, 58, 59, 61.

Z tych każda ma swe osobne nazwisko.

§. 75. fig: 56 nazywa się *kością* czyli *sześcianem* (cubus). Jest ten ograniczonym sześciu ścianami, które są kwadratami zupełnie sobie równymi. Ich zaś kąty formują ośm rogów nazwanych *kątami bryłowemi* (anguli solidi). Każdy z nich jest ograniczonym trze-

ma kątami prostymi. Summa zaś wszystkich kątów płaskich ograniczających iakikolwiek bądź kąt bryłowy nie może czynić 4 kątów prostych bo to jest własnością kątów w koło iednego punktu na płaszczyźnie leżących. Jeżeli zaś kąty płaskie ograniczające dwa kąty bryłowe, są sobie wzajemnie równe, będą też niemi i kąty ich pochyłości, iako też i obydwie kąty bryłowe. Dokładnie się to dowieść daie. Ze ciało te jest ze wszystkich nayprostszym bierze się za miarę innych iako to niżej obaczemy.

§. 76. fig. 57. nazywa się *równoległościannem* mianowicie *prostokątnym* (Parallelopi-pedum rectangulum, jeżeli krawędzie iego *ac*, *bf*, *eg*, *dh*, są prostopadłemi do podstawy *abcd*. Ograniczonym jest szeście prostokątami, z których każde dwa przeciwległe są równe we wszystkich i równoodległe od siebie; każda zaś ściana jest prostopadłą do innych czterech z którymi ma spólne krawędzie.

Jako sposób wynaydowania powierzchni prostokąta jest fundamentem Planimetrii, tak też sposób wynaydowania pełności równoległościannu prostokątnego jest zasadą mierzenia pełności ciał geometrycznych czyli brył. Okażemy więc sposób ten na fig: 57.

Niech *as* wyraża iedność n. p. stopę, którą jest mierzona długość, szerokość i wysokość równoległościannu. Niech mianowicie znajduie się ta 5 razy w *ab*; 2 razy w *ad*, i 3 razy w *ac*. Będzie można podzielić podstawę *ac* na 10 stop kwadratowych; na tych umieścić można 10 stop szesciennych takich iaką jest iedna *si*. Takich zaś warstw iaką jest pierwsza złożona z 10 stop szesciennych, tyle położyć można iednę na drugiey, ile jest

stop na wysokości *ac* iak tu 3. Zawiera więc równoległoscian prostokątny 30 stop sześciennych to jest tyle ile wypada rozmnożywszy przez siebie trzy wymiary w liczbach wyrażone, długość, szerokość i wysokość. I ogułem nazwawszy równoległoscian prostokątny *R*, zaś długość, szerokość, i wysokość wyrażone liczbami, których iednością jest cal, stopa lub inna miara, *a, b, c* jest ogułem $R=abc$

§. 77. Jeżeli krawędzie *ac, bf* i t. d. są pochyłemi do podstawy, nazywa się tedy ciało to *równoległoscianem*. W tym się różni od prostokątnego że tu wszystkie ściany są równoległobokami. *Wysokością* iego nazywa się oddalenie iego postaw zaczym prostopadłą spuszczone od punktu obranego na iedney podstawie do drugiej. Dowieść można ściśle, że równoległoscian nie prostokątny jest równy prostokątnemu, jeżeli mają równe podstawy i równe wysokości więc i równoległoscianu nie prostokątnego wynayduie się pełność rozmnożywszy podstawę przez wysokość.

§ 78. fig 58. zachowuie nazwiśko *grania- stołupa* mianowicie *prostego* jeżeli krawędzie iego są do podstawy prostopadłemi, *ukośnego* zaś przeciwnie. Nazywa się do iego trójkątnym czworobocznym i t. d. pódług figury podstawy. Ponieważ wystawić sobie można zamiennym na równoległoscian prostokątny o równej z nim podstawie i wysokości; wynayduie się więc i iego pełność czyli bryłowatość (*soliditas*) rozmnożywszy podstawę przez iego wysokość.

§. 79. fig. 59. jest także gatunkiem grania stołupa i nazywa się *walcem* (*Cylinder*). Można sobie wystawic iakoby był utworzony obrotem prostokąta *fcbe* w koło boku *fc* który się na-

zywa jego *osią* (axis). Boki *fe*, *ch* są promieniami koł służących mu za podstawy, zaś *be* zachowuje nazwisko *boku walca* i tworzy swym obrotem powierzchnią krzywą jego. Tę wyślawić sobie można iako złożoną z nieskończenie wązkich prostokąciów, a to uważając koła służące za podstawy iako wielokąty foremne o nieskończenie wielu bokach: wynika stąd że *powierzchnia krzywa walca jest równa do prostokątu mającego za podstawę okrąg z jego podstawy a za wysokość bok jego*. Ze zaś w tym względzie może być uważany iako graniastośłup więc i pełność jego czyli *brytowość* wynajduie się *rozmnóżywszy podstawę jego przez wysokość*: By też był i ukośnym to jest gdyby *os* jego *fo* była do podstawy pochyłą. Dla powierzchni nieuchodziłaby w tym razie powyższa reguła.

§. 80 fig: 60. nazywa się *ostroślupem* (Pyramis). Ten wyślawić sobie można utworzony, obrawwszy nad figurą *ABCDE* punkt *F* i przez niego i boki figury poprowadziwszy płaszczyzny, które będą jego ścianami, każda zaś trójkątem którego wysokość iak *FH* nazywa się *wysokością ścienną* *ostroślupa*; lecz w tym tylko razie gdy *ostroślup* ma za podstawę fig: foremną i jest prostym to jest wysokość jego *FG* przypada na środek podstawy. Inaczej zaś nazywa się *ostroślup* ukośnym, ma także swoje nazwiska od podstawy to jest nazywa się *trójkątnym* *czworokątnym* i t. d. Przeciawszy go płaszczyzną równoległą od podstawy, przecięcie to *abcde* jest podobnym do podstawy. Bo ponieważ *ABF* *on abF* (§. 71.)

wynika stąd $AB:ab=AF:aF$

także $EA:ea=AF:aF$

zaczynamy $AB:ab=AE:ae$

Toż i dla każdej pary boków podstawy. Ką-
ty zaś $A=a$; $B=b$ i t d (§ 68)

$$ABCD E : abcde = AB^2 : ab^2 (\S 15) = AF^2 : af^2 \\ = FH^2 : fh^2 = FG^2 : fg^2 .$$

Jak wynaleść iego pełność z następującej
figury poznamy.

§. 81. *Graniastośłup troykatny może być Figu-
podzielony na 3 ośtrośłupy równe co do peł- 61.
ności,*

Poprowadźmy płaszczyznę przez e i ac
ta odetnie od graniastośłupa, ośtrośłup troy-
katny $abce$ mający też samą podstawę i wy-
sokość co i graniastośłup. Poprowadziwszy
płaszczyznę przez a i ef ta odetnie, także
ośtrośłup $defa$. Zostanie się jeszcze trzeci
ośtrośłup mający za podstawę efc równą do
 ebc , a wierzchołek w a , zaczynam równy do
pierwszego.

Można sobie to objaśnić jeszcze na figurze
z drewna zrobionej.

Wynajdując się więc pełność ośtrośłupa
troykatnego rozmnożywszy iego podstawę
przez trzecią część wysokości: bo przez całą
wysokość rozmnożywszy, byłaby ta pełność
3 razy większą. Ponieważ zaś można roz-
łożyć każdy inny graniastośłup na troykatne,
iako też i ośtrośłup na inne teży co i on podsta-
wy i wysokości, a to podzieliwszy podstawy
na troykaty przekątnemi, i poprowadziwszy
płaszczyzny przez każdą parę sobie przeciw-
ległych w graniastośłupie, w ośtrośłupie zaś
przez iego wierzchołek i zmianowane prze-
kątne. Wic i ogółem *wynajdując się peł-
ność iakiegokolwiek bądź ośtrośłupa rozmno-
żywszy podstawę iego przez trzecią część ie-
go wysokości.*

§. 82. fig. 62. nazywa się *ośtrokręgiem*
(*Cónus*). Ten wystawić sobie można utwo-
rzony obrotem troykata prostokątnego,

CDB w koło CD , który się nazywa *osią* (axis) ostrokągu. DB jest promieniem podstawy a CB przeciwprostokątna bokiem ostrokągu. Nazywa się *prostym*, jeżeli oś jego CD jest do podstawy prostopadłą; *ukośnym* zaś przeciwnie.

Jakośmi uważali walec iako gatunek graniastosłupów, tak też brać można ostrokągu iako gatunek ostrosłupów. Z tąd *pełność* jego wynagduie się rozmnożywszy podstawę jego przez trzecią część wysokości. Powierzchnia zaś równą jest do trójkąta mającego za podstawę okrąg podstawy, a za wysokość bok ostrokągu: jeżeli jest prostym, bo inaczej trudniej ją wynaleść, dla odmiennia się coraz wysokości ściennej.

§ 83. Przeciawfzy ostrokągu płaszczyznę równoodległą od podstawy, przecięcie to jest do niego podobnym (§80) zatym także kołem, a z tąd iak i wyżej koło z DB i koło z $db = DB^2 : db^2 = CB^2 : cb^2 = CD^2 : cd^2$. Miejsce zawarte między dwoma kołami z DB i db i częścią powierzchni krzywey ostrokągu zawartą między okręgami tych koł nazywa się *ostrokągiem ściętym* (cognus truncatus). równie iak w fig. 60 część ostrosłupa $AB CDE$, $ab cde$ nazywa się *ostrosłupem ściętym*.

Pełność ostrokągu ściętego wynagduie się rozmnożywszy przez siebie trzy koła, z których dwa są jego podstawami, a trzecie średnie geometrycznie proporcjonalnym między nimi, przez $\frac{1}{3}$ wysokości jego: czyli równą jest do trzech ostrokągow o takich podstawach i wysokości.

Dla zrozumienia dowodzenia tej propozycji, trzeba najprzód wiedzieć, że bryły podobne są w stosunku sześciennym ich krawędzi sobie odpowiadających; co niżej

okazanym będzie. Powtóre, że różnica dwóch sześcianów jest równa do równoległoscianu mającego za wysokość różnicę ich boków, a za podstawę sumę z trzech kwadratów, z których dwa są podstawami (zeszcianów, a trzeci średnie geometryczne proporcjonalny między niemi; co na figurze z drzewa objaśnić sobie można.

Dowodzenie.

$$\begin{aligned} \text{Ost. cały } ABC: \text{odc.} &= AB^3:ab^3 \text{ (bo są podobne)} \\ \text{Ost. cały} &: \text{ście.} = AB^3:AB^2-ab^3 \text{ (Aryt. §79)} \\ &= AB^3:AB-ab(AB^2+ab^2+\text{fig. } p^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ostr. cały: 1go ost.} &= CD:DD \text{ (dla ro. po d. f.)} = Cq:Aa \\ &= AB^2:AB^2-ab^2 \text{ (bo } \triangle CAB \text{ } \triangle Cab) \\ \text{1y Ostr.: 3Ostro.} &= AB^2:AB^2+ab^2+\text{fig. } p^2 \text{ (dla ro. wyf)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zaczy. Ost. cały: 3ostr.} &= AB^3:AB-ab(AB^2+ab^2+\text{fig. } p^2) \\ \text{zakład Ostrok. cały: Ostr. ściętego} &= \text{Ost. cały: 3 ostr. okręg.} \end{aligned}$$

Ze zaś w ostatniej proporcji są równe poprzedniki, będą też niemi i następnikami.

§ 84. Powierzchnia zaś Ostr. okręgu ścię. Fig. tego prostego jest równa do prostokąta mającego za podstawę okrąg średnic arytmetycznie proporcjonalny między obydwojną a kłęgami podstaw, a za wysokość tego wyłokość ścienną czyli boków.

Niech ab wyraża długość okręgu podstaw wy większej, ac okrąg podstawy mniejszej, zaś ad wysokość ścienną czyli bok ostr. okręgu prostego ściętego: czworobok $abcd$ wystawia wielkość powierzchni krzywej tego ostr. okręgu ściętego. Podzieliwszy wysokość tego w e na dwie równe części, i poprowadziwszy eg równoodległą od ab , a przez g równoodległą do ad aż do zejścia się w h z przedłużeniem linii dc , uformuje się prostokąt ah równy czworobokowi $abcd$ dla równości trójkątów

bfg, cgh ; zaczym i powierzchnię krzywey o-
strokręgu ściętego. Ma zaś za wysokość
 ad , a za podstawę $af=eg$, która jest śre-
dnia arytmetycznie proporcjonalną między
 ab i dc , czyli połową ich summy, ponieważ
 $ci=\frac{1}{2}(ak+dc)$ zaś $ig=\frac{1}{2}kb$ dla podobieństwa
trojkątów cig, ckb .

§ 85 Następujące wyrażenie powierzchni
krzywey Ostrokręgu ściętego prostego, po-
służy nam do wynalezienia, do czego jest
równa powierzchnia krzywa kuli.

W poprzedzającym § wynależliśmy, że po-
wierzchnia krzywa ostrokręgu ściętego, ufor-
mowana obrotem boku Bb (fig. 62) w koło
osi Dd jest równa do prostokąta z $Bb \times O$ -
krąg z FE .

Z podobień. trój. $FE G, Bb H$ wynika proporc.

$$FE : EG = bH : Bb$$

zaczym Okrąg z FE : Okr. z $FG = Dd : Bb$

z kąd $Bb \times$ Okrąg z $FE = Dd \times$ Okr. z FG .

To jest powierzchnia krzywa Ostrokręgu
prostego ściętego, jest równa do prostoką-
ta mającego wysokość tę samą co i ostro-
krąg ścięty, a za podstawę okrąg z prostoką-
padłej wysławionej do boku od jego śro-
dka, aż do zejścia się z osią.

Fig. 64. § 86. Niech półkoła ABq obraca się w ko-
ło średnicy AB , aż na swoje pierwsze miej-
sce opowróci, ślad po tym obrocie zostawio-
ny jest Kulą (Sphera, czyli globus). AB
nazywa się jego osią (Axis); końcem A
i B biegunami kuli. Półokrąg zaś AqB u-
formuje powierzchnię krzywa kuli.

Ta jest równa do prostokąta mającego za
wysokość oś AB , a za podstawę okrąg z Cd ,
czyli z promienia koła tworzącego kulę
swym obrotem; koło to nazwiemy wielkim
dla różnienia go od innych koł przecina-
jących.

cych kulę, a przez środek iey nieprzecho-
dzących, są one bowiem zawsze od niego
mniejszyemi.

Podzieliwszy AB , na niekończenie małe
części, które tu dla wyraźności większemi
bierzemy w p, p . i t. d. poprowadzimy przez
te punkta prostopadle do osi, i pościgay-
my liniami ich końce q, q i t. d. Te będą
cienciwami łukow niekończenie małych,
zaczynamy za nie wziętemi być mogą. Obró-
tem swym wkoło osi formowałyby powie-
rzchnie krzywe ostrokregow ściętych u-
tworzonych czworobokami p, p, q, q . Każdego
zaś ostrokregu ściętego powierzchnia krzy-
wa utworzona cienciwą qq , jest równa do
prostokąta z pp przez okrąg z Cr (§85) lub
z promienia Ca dla niekończenie małej
różnicy iego od Cr . Więc i summa tych
wszystkich powierzchni krzywych, czyli
powierzchnia krzywa kuli jest równa do
prostokąta z summy tych wysokości, to jest
z AB przez okrąg z AC .

Jest zatem cała powierzchnia kuli 4 razy
większą od iey koła wielkiego, czyli równą
do koła mającego za promień iey osi lub
średnice.

§ 87. Jeżeli sobie wystawimy wielościan
(Polyedrum) o niekończenie wieli ścianach,
opisany na kuli, to jest taki któregoby ścia-
ny dotykały się powierzchni krzywej kuli,
summa ich może być wzięta za powie-
rzchnią krzywą kuli dla niekończenie ma-
łej różnicy; pełność zaś wielościanu za
pełność kuli dla teyże przyczyny. Popro-
wadziwszy płaszczyzny przez środek kuli
i przez krawędzie ścian iego, podzieli się
cały wielościan na ostrosłupy mające za pod-
stawy ściany wielościanu, a za wysokość
promień kuli. Będą więc wszystkie, a z tad

i pełność kuli równa do jednego ostrosłupa, a raczey ostrokągu mającego za podstawę koło równe do całej powierzchni kuli, a za wysokość iey promień. *Wynayduie się więc pełność kuli rozmnożywszy iey powierzchnią krzywą przez $\frac{1}{3}$ promienia.*

Pomniawizy co się mówiło w § 16 o powierzchni koła, wynikaia następujące ogólne expresse.

$$\text{Powierzchnia kuli} = 4Pr^2 = P\partial^2$$

$$\text{Bryłowość kuli} = \frac{4}{3}Pr^3 = \frac{P\partial^3}{3}$$

Figura 65. § 88. Niech półkole FGH , prostokąt $FEGB$ i trójkąt FGB obracaią się w koło boku FG , iako osi, uformuią swemi obrotami kulę z CG walec $ABED$, który nazwiemy opisanym na kuli i ostrokrąg ABF

$$\text{Kula z } CG \text{ iest} = \frac{CG \times 4}{3} \text{ ko. w. } (\S 87 = \frac{4CG \times k. w.}{3})$$

$$\text{zaś walec opis.} = \frac{2CG \times \text{koło. w.}}{3} = \frac{6.CG \times k. w.}{3}$$

$$\text{więc kula : walcą opisanego} = 2 : 3$$

Zaczynam kula z ostrokągiem równa do walcą opisanego na kuli.

Podobnie dla powierzchni krzywej kuli.

$$\text{ta iest} = \frac{2}{3} CG \times \text{okrąg z } CG$$

$$\text{zaś cała powierz. walca, op.} = \frac{3}{2} CG \times \text{ok. z } CG$$

$$\text{więc powierzchnia kuli : całej wal.} = 2 : 3$$

Zaczynam powierzchnie kuli i walca w tymże stosunku co i ich pełności.

UWAGA 1. Jest to wynalazkiem Archimedeśa, który mu tak był miłym, że go w nadgrobkę swym wyryć kazał; i po tey to figurze 65 poznał go Cicero będąc kwestorem w Sycylii.

UWAGA 2. Wiedząc jakim sposobem wy-
nayduie się powierzchnia i pełność ciał geo-
metrycznych, potrafi sobie każdy dla ćwi-
czenia zadawać przykłady, które tu opu-
szczają się dla krótkości.

O CIAŁACH PODOBNYCH.

§ 89 Ciałami podobnemi są te, które są
podobnemi płaskimi figurami utworzone,
czyli których wymiary iednostayny zachowu-
ją stosunek. I tak na fig. 62 ostroką-
g ABC iest podobny do ostrokągu abc , bo są
obydwa utworzone podobnemi troykątami
 CDB Cdb . Takież ciałami byłyby i dwa
walce utworzone podobnemi prostokątami.
Kule są dla teyże przyczyny podobnemi
ciałami. Równoległosciany prostokątne są
podobne, jeżeli ich wymiary, to iest dłu-
gości, szerokości i wysokości są w iedno-
staynym stosunku. Będą w tym razie kąty
bryłowe równe i wszystkie ściany wzajem-
nie do siebie podobne. Co i do inney ie-
szcze definicyi ciał podobnych pochop dać
może.

Doydźmy teraz ich stosunku. Niech bę-
dą trzy krawędzie, czyli wymiary iedne-
go równoległoscianu prostokątnego A, B, C
drugiego a, b, c . Niech będzie pierwszy R
drugi r będzie

$$R : r = \frac{A : a}{B : b} = \frac{A : a}{A : a} = A^1 : a^1$$

$$C : c \quad A : a$$

Podobnież i dwie iakiekolwiek bryły po-
dobne są w stosunku ich sześcianow z ich
krawędzi sobie odpowiadających czyli ich
stosunku dwumnożnym. I tak jeżeli n. p.

promień kuli jest 2, 3, 4 i t. d. razy większym od drugiego, będzie też powierzchnia 4, 9, 16 i t. d. razy pełność, zaś 8, 27, 64 i t. d. razy większą od drugiej powierzchni i kuli. Dla jakichkolwiek dwóch ciał podobnych, możnaby je wystawić sobie podzielone na ostrosłupy podobne mające w każdym spólny wierzchołek w dwóch punktach podobnie leżących wewnątrz ich. Dowodzenie byłoby także co i w § 15.

