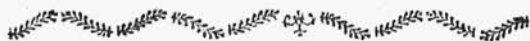


GEOMETRYA,



ROZDZIAŁ II.

NIEKTÓRE POTRZEBNIEJSZE PODANIA Z GEOMETRYI POCZĄTKOWEY.

(Kontynuacja 1go Rozdziału.)

§ I. TWIERDZENIE I. *Wielkości przydatne zamieniają się na przeciwne, gdy powiększając się coraz bardziej, przechodzą przez ilość nieskończenie wielką, lub gdy coraz bardziej zmniejszając się przychodzą przez zero.*

Niechby z dwóch linii równoodległych *Fig: 1*
AB; i *CD*, jedna *AB* obracała się wkoło niewzruszonego punktu *E*, z którego spuścmy prostopadłą *EF* na *CD*; pierwszy punkt przecięcia wyznaczyć się nie daie. Bo gdyby nim był n. p. punkt *H*, możnaby wziąć dalej punkt *φ* i ściągnąć linią *Eφ*, która więc pierwej przecięłaby *CD* niżeli *EH*. Ze więc to zawsze ma miejsce poki *FH* jest wyznaczoney długości, można więc, mówić, że pierwszy ten punkt przecięcia nieskończenie jest oddalonym od punktu *F* to jest przewyższa wszelką długość wyznaczoną, że zatym dwie linie równoodległe przecinają się, ale w punkcie nieskończenie oddalonym od takiego iak tu *F*. Do tego nie nienależy oddalenie ich *EF* bo o ich położeniu tylko jest mowa

Gdy linia *AB* z równoodległego swego położenia coraz bardziej w lewo wkoło *E* obracać się będzie, będą przypadać przecięcia iey z *CD* po lewey stronie *EF*, w pun-

kie K, L, M tak, że oddalenia KF, LF, MF coraz mniejszemi się stana, tak, że gdy linia AB przypadnie na EF oddalenie to staie się o. poczym znówuby się w prawo powiększały. Pierwsze nazwać można *przydaynemi*, drugie zaś *uiemnymi*. Przeyście więc z przydaynych na uiemne staie się w nie-*skończonym* (*infini*) i w zero.

Fig: 2 § 2. TWIERDZENIE 2. *Kąt przy środku koła iest dwa razy większym od kąta przy okręgu na tymże łuku spierającego się.*

Dla dowiedzenia, że kąt acb iest dwa razy tak wielki iak adb , ściagniemy średnicę dc : podzieli się kąt przy środku acb na dwa inne, z tych ecb iest rowny do dwóch wewnętrznych d i b w troykącie cdb , ponieważ iak te tak i on, są spełnieniami kąta acb do dwóch kątów prostych; że zaś kąty d i b są sobie równe iako przy podstawie w Troykącie rownoramiennym, iest zatym kąt ecb dwa razy większym od cdb : podobnież kąt ace iest 2 razy większym od ade , zaczym i cały kąt acb 2 razy większy od adb .

Fig: 3 WNIOSEK 1. Wynika z tąd, że *wszystkie kąty w iednymże odcinku koła są sobie rowne.*

Odcinkiem koła (*segmentum*) nazywa się iego część iak tu $adba$ zawarta między łukiem i cienciwą. Kąty w nim iak d, d, d , są wszystkie rowne, bo każdy z nich iest połową kąta przy środku c .

WNIOSEK 2. Wystawuiąc sobie cienciwę ab posuwaiącą się coraz bardziey do góry w rownoodległym od pierwszego położeniu, powiększać się oraz będzie i łuk, na którym się wspiera, że zaś ten iest miarą kąta przy środku, powiększać się będzie oraz i ten, a zaczym i kąt przy okręgu, który iest iego połową: ztąd wnosi się z łatwością, że *kąty w odcinku większym od półkola są wszy-*

Kąt ostry i równy między sobą; w półkółku są proste, a w odcinku mniejszym od niego wszystkie rozwarte i także równe

§ 3. TWIERDZENIE 3. *Kąt odcinka jest równy kątom w odcinku na przemian.* Fig: 4

Kątem odcinka nazywa się kąt zawarty między styczną i cięciwą jak tu *bađ*. Styczną zaś (tangens) jest linia jak tu *ađ*, która w jednym tylko punkcie dotyka się koła, aby więc miała tę własność, trzeba żeby była prostopadłą do promienia poprowadzonego do tego punktu dotknięcia: wtedy bowiem będzie miała każdy punkt za kołem prócz punktu dotknięcia. Odcinkiem zaś na przemian jest odcinek *aeba* względem odcinka *afba*.

Po poprzedzonym tym objaśnieniu łatwo nam będzie dowieść własność ich w twierdzeniu wyrażoną.

W trójkącie *abe* jest kąt *b* prostym iako w półkółku, zaczynam *a* i *e* ważą i kąt prosty: zaś kąty *r* i *s* ważą także i kąt prosty, odciągawszy więc od obydwóch równych sum kąt *r* zostanie się *s=t*.

§ 4. ZADANIE 1. *Na danej linii zrobić odcinek zawierający w sobie kąt dany.* Fig: 4

Niech będzie *s* dany kąt a linią *ab*.

Dzielię ją na dwie równe części w *g*: wystawiam stąd do niej prostopadłą *cg*, którą przecinam w *c* inną prostopadłą z *a* do *ađ* wystawioną. Nakreśliwszy koło promieniem *ac* te da mi żądany odcinek *aeba*.

§ 5. ZADANIE 2. *Mając dane położenie trzech punktów wyznaczyć czwarty, od którego poprowadzone trzy linie do danych punktów, zawierały dwa kąty dane.* Fig: 5

Niech będą dane te trzy punkta *a, b, d*, a kąty *o* i *n*.

Robię na linii *ab* odcinek *afba* zawierający w sobie kąt *o* : podobnież na linii *bd* odcinek *bfdb* zawierający w sobie kąt *n*; punkt przecięcia ich łuków *f* jest żądanym punktem.

§ 6. TWIERDZENIE 4. Jeżeli cztery linie są w proporcji Geometrycznej; to prostokąt z dwóch skrajnych jest równy prostokątowi z dwóch średnich: i wzajemnie

Dla dowiedzenia tego wystawmy sobie, że w § 78. litery $a:b=c:d$ znaczą linie: ztąd i następujące wynikają wnioski.

WNIOSEK 1. Jeżeli dwa prostokąty są równe co do powierzchni jest ieden z dwóch skrajnych, a drugi z dwóch średnich linii.

WNIOSEK 2. Jeżeli trzy linie są w stosunku ciągłym będzie kwadrat z średniej równy do prostokątu z skrajnych i wzajemnie.

Fig:6 § 7. TWIERDZENIE 5: Jeżeli w jakimś trójkącie poprowadzimy linią równoodległą od iednego boku, przecinie ta dwa inne boki na części proporcjonalne.

Niech będzie *de* równoodległą od *ab* będzie $c d : d a = c e : e b$.

Ściągnąwszy bowiem *ae* i *db* są równe trójkąty *dea* i *deb* co do powierzchni, iako na iedneyże postawie *de* i między iednemiż równoodległemi *ab* i *de* (co się ściśle dowodzi w początkowej Geometrii). Zaś trójkąt *cde* : *dea* = $c d : d a$ mają bowiem wierzchołek spólny w *e*, zaczym zawierają się iak ich podstawy (co także dokładnie dowieść się daie) wynikną więc ztąd proporcye.

$$\begin{array}{l} \Delta \quad cde : dea = cd : da \\ \quad \quad cde : deb = ce : eb \\ \hline \text{a z tąd} \quad cd : da = ce : eb. \end{array}$$

WNIOSEK 1. Pomniąc na odmiany, które z proporcją uczynić można (§ 79) łatwo te i tu przystosować się daią.

WNIOSEK 2. Gdyby kąt ced był równy kątowi dea , byłby i kąt eab równy kątowi $dec = eba$, a z tąd trójkąt abe równoramien-
nym, mianowicie $ae = eb$. z tąd proporcya

$$cd : da :: ce : ea$$

To jest, jeżeli podzielimy kąt trójkąta na dwie równe części, linia to czyniąca przedłużona dostatecznie, podzieli bok trójkąta na dwie części, które będą w tymże samym stosunku co i dwa inne boki: i wzajemnie

UWAGA. Powyższe twierdzenie jest fundamentalnym w dowodzeniu przypadków, w których dwa trójkąty są podobne.

Umieszczam je tu razem

Dwa trójkąty są podobne.

1°. Jeżeli trzy kąty w iednym są równe trzem kątom im odpowiadającym w drugim trójkącie.

2°. Jeżeli trzy boki w iednym są proporcjonalne względem trzech boków w drugim.

3°. Jeżeli kąt w iednym jest równy kątowi w drugim, a dwa boki obejmujące kąt w pierwszym, są proporcjonalne do takich boków w drugim. Nakoniec

4°. Są jeszcze podobnemi, jeżeli mają kąty po iednym kącie sobie równe, i dwa boki, z którychby ieden był przyległy, a drugi przeciwległy danemu kątowi, proporcjonalne; bok zaś przeciwległy kątowi, powinien być większy od przyległego.

Na tym twierdzeniu 5 zasadzają się następujące zadania.

Fig: 6 § 8. ZADANIE 3. *Wynaleść linią czwartą geometrycznie proporcjonalną do trzech linii danych.*

Niech będą te linie dane f, g, h .

Robię iakikolwiek kąt c , przenoszę na jego ramiona cd , ce równe do f i g i ściągam de : na pierwszym ramieniu biorę ca równe do h i przez a prowadzę ab równoległą od de ; otrzymam cb czwartą żadaną.

WNIOSEK. Gdyby dwie średnie linie były sobie równe, wynalazłaby się tym sposobem trzecia ciągle geometrycznie proporcjonalna do dwóch linii danych: podobnież czwarta i t. d. można więc i wykreśleniem geometrycznym podwoić, potroić i t. d. stośunek dany. (§91)

UWAGA. Szukanie czwartej geometrycznie proporcjonalnej odpowiada Regule ze trzech prostej w Arytmetyce.

Fig: 7 § 9. ZADANIE 4. *Podzielić linią daną na równe części.*

Niech daną linią będzie ab do podzielenia na 5 części

Prowadzę linią ag przekładam na nią 5 równych części iak ac wzięta na oko, ściągam gb , a przez punkta c, d, e, f prowadzę równoległe od gb , te przetną ab w żadanych punktach.

WNIOSEK. Gdyby ac, cd, de i t. d. były w danym stośunku, podzieliłaby się podobnież ab .

Fig: 8 UWAGA. Do podzielenia linii na bardzo małe części służy, tak nazwany podział *No-niusza*. Daymy na to, że chcę podzielić linią ab na 30 równych części.

Zrobiwszy na ab iakikolwiek prostokąt $ablk$ dzielię jeden jego bok ab na 5 równych części a kl na 6 i od tych podziałów spuszczaam prostopadłe do środkowej linii cm :

de jest różnicą między $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ częścią linii *ab*,
to jest $=\frac{6}{30}-\frac{4}{30}=\frac{2}{30}$ *ab*,
Podobnież $fg=\frac{2}{30}$ *ab* i t. d.

Gdybyśmy podzielili *ab* na 11 równych części a *kl* na 12 byłaby *de* $\frac{1}{12}$ iedenastey części linii *ab*, gdybyśmy więc zamiaśc *ab*, *cm*, *kl* wzięli łuki od iednegoż środka nakreślone i zamknięte promieniami przez końce łuku odpowiadającego linii *ab* poprowadzonymi: i gdyby do tego łuk ten zawierał 11 stopniow, znaczyłaby część *de* $\frac{1}{12}$ iednego stopnia czyli 60 minut, zaczym 5 minut; *fg* znaczyłaby 10 minut i t. d.

Jakoż przyłącza się łuk taki ruchomy do kątomierzow; i za pomocą iego brać można dokładnie kąty do 5 minut; bez niego zaś zaledwo mogą być mierzone kąty w polu dokładnie do $\frac{1}{4}$ stopnia, czyli 25 minut.

§ 10. TWIERDZENIE 6. *Jeżeli sobie obierzemy punkt wewnątrz koła lub za kołem, i przez niego poprowadzimy linie przecinające okrąg koła po obu stronach, będą iego oddalenia od punktow przecięcia na iedney stronie, w stosunku odwrotnym względem takich przecięć na drugiej stronie leżących.*

Niech będą obranemi punktami *a* i *a* i li- Fig: 9
nie przezeń poprowadzone przecinające o- 10
kręgi w *d*; *c*; *b* i *e*. Sciągniemy *db* i *ec*. Troy-
kąty *dba*, *cae* są podobne (§ 2 wn. 1. i § 7 n^o 1)
z tąd wynika proporcya

$$ac : ad = ae : ab.$$

WNIOSEK 1. Twierdzenie to inaczey tak się wyrazić może

Dwie cienciwy przecinaia się na części odwrotnie proporcjonalne

zaś dla punktu obranego za kołem ;

Linie przecinaiające koło, czyli sieczne (se-

cantes) są w stosunku odwrotnym względem ich części za kołem

Albo jeszcze inaczej

Prostokąt z dwóch części jednej cienciw, jest równy prostokątowi z dwóch części drugiej

Prostokąt z całej siecznej i z jej części za kołem jest równy prostokątowi z drugiej siecznej i z jej części za kołem.

WNIOSEK 2. Jeżeli jedna z cienciw jest średnicą, a druga do niej prostopadłą, wynika ztąd $ac \times cb = cd^2$

Fig: 11 To jest wyprowadzwszy do średniej prostopadłą od jakiegokolwiek punktu na niej obranego, aż do zejścia się z okręgiem koła, będzie ta średnie geometrycznie proporcjonalną między dwoma częściami średnicy.

WNIOSEK 3. Sciągnawszy ad i db trójkąt adb jest prostokątnym przy d (§ 2. wn. 2), de zaś jego wysokością, ztąd wysokość taka jest średnią geometrycznie proporcjonalną między dwoma częściami przeciwprostokątnej. Takżé $\triangle ade$ i $\triangle edb$ i $\triangle adb$ więc $ab : ad : ae$; i $ab : bd : be$

WNIOSEK 4. Dla siecznych zaś: gdy się jedna z nich ad coraz bardziej oddalać będzie od drugiej ae , zbliżać się także będą co raz bardziej do siebie punkta przecięcia e i d , a przez to samo sieczna do jej części za kołem, czyli podstawa prostokąta do wysokości, także jeżeli jedna z linii poprowadzonych od punktu za kołem jest sieczną, a druga styczną, wyniknie Twierdzenie.

Prostokąt z całej siecznej i z jej części za kołem, jest równy kwadratowi z styczney. Z wniosku 2go wynika

§ 11. ZADANIE 5. Wynaleść średnie ciągłe geometrycznie proporcjonalną, między dwoma liniami danemi.

Niech będą danemi liniami ac i cb .

Złączywszy je do kupy nakreślę na ab półkoło i wyprowadzam od punktu złączenia c prostopadłą $c\partial$, która jest średnią żądaną.

UWAGA. Szukanie takiej średniej linii odpowiada wyciąganiu pierwiastków kwadratowych w Arytmetyce, podzielić więc można i stosunek między liniami, tak, że się otrzyma jego $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ część i t. d.

§ 12. ZADANIE 6. Od punktu danego za kołem poprowadzić do niego styczną.

Niech będzie dany punkt a

Ściągę ac : nakreślę na niej półkoło abc ; punkt przecięcia b wyznacza mi położenie linii ab , która jest styczną z kołem, bo ściągawszy promień cb , kąt abc jest prostym (§ 2 Wn. 2. § 3)

Fig:
12.

WNIOSEK. Gdyby dany ten punkt był wyznaczonym na okręgu, n. p. b ściągącby tylko ko trzeba promień cb i wyprowadzić do niego prostopadłą ab .

§ 13. TWIERDZENIE 7. Jeżeli dwa koła przecinają się, to linia łącząca ich środki dzieli ich wspólną cienciwę na dwie równe części i jest do niej prostopadłą.

Ściągawszy promienie, wynikną trójkąty cbe , cef , które mając trzy boki w jednym równym trzem bokom w drugim, przystać do siebie będą mogły, zaczynam i kąt $bce = ecf$. Wziąwszy więc trójkąty bcl , fcl , te także we wszystkich względach będą sobie równe mianowicie $bl = fl$ i cl prostopadła do bf .

Fig: 5

WNIOSEK I. Toż samo ma miejsce, kiedy koła przecinają się wewnątrz

Fig:
13.

Takim samym sposobem dowodzi się, że $c\partial$ dostatecznie przedłużona podzieli wspólną cienciwę ab na dwie równe części, i będzie do niej prostopadłą.

Obrawszy sobie na linii przechodzącej przez środki koła punkta coraz niżej iak c i od nich nakreśliwszy koła przechodzące przez końce cienciwy a, b łuk każdego następującego koła coraz mniej wznosić się będzie nad cienciwę, i coraz się bardziej do niej zbliżać, tak że możnaby mówić, każda cienciwa jest toż samo co łuk przechodzący przez iey końce i promieniem nieskończenie wielkim nakreślony.

Figura: WNIOSEK I. Jeżeli dwa koła przecinające

14. się coraz bardziej oddalają od siebie będą, zmniejszać się będzie coraz bardziej ich wspólna cienciwa, a raczej oddalenie punktów przecięcia; tak dalece, że zamieni się na koniec na punkt, i dwa koła już nie przecinają, ale dotykać się będą wewnątrz lub zewnątrz: Cienciwa zaś zamieni się na styczną wspólną obydwom kołom w ich dotknięciu i prostopadłą do linii łączącej ich środki.

WNIOSEK 3. Im większymi promieniami ge, gf i t. d. nakreślmy łuki, tym bardziej te zbliżać się będą do stycznej ab i mniej krzywymi się stają: nazwawszy zaś *elementem* częśćkę nieskończenie małą łuku przy g ta będzie miała dyрекcyą stycznej ab .

§ 14. ZADANIE 7. Na danej linii zrobić figurę podobną do danej.

- Figura:* Trzeba na linii ab zrobić figurę podobną
15. do $ABCDE$

Dzielię ją przekątnymi na trójkąty i do tych robię podobne, zaczawszy od ABC , do którego robię trójkąt podobny na ab , albo szukając czwartych proporcjonalnych do trzech wyrazów znaniomych, lub też robiąc kąty równe. I tak ieden po drugim: albo też przekładam ab na AB przez b prowadzę równoodległą do BC ; prze c równo-

odległą od CD i t. d. uformuie się figura $abcde$ podobna do $ABCDE$: bo będzie miała wszystkie kąty równe i boki koło nich proporcjonalne, co z łatwością dowodzić się daie.

§ 15. TWIERDZENIE 8. *Figury podobne są w stosunku dwumnożnym ich boków sobie odpowiadających.*

To jest jeżeli n. p. podstawa jest 2, 3, 4 i t. d. razy większą od drugiej będzie pierwsza figura 4, 9, 16 i t. d. razy większą od drugiej: i ogólnie jeżeli podstawy zawierają się iak $m:n$ będą się miały do siebie figury iak $m^2:n^2$.

Przekonać się nam nayprzod o tym potrzeba na prostokątach podobnych. Jeżeli podstawa iednego $AB:ab=5:3$ muszą być także i wysokości $AD:ad=5:3$. Poprowadzwszy przez punkta podziału linie równo-odległe od dwóch boków przyległych każdego prostokąta, podzieli się pierwszy na 25 takich prostokącików, iakich drugi mieć będzie 9:—Zrobiwszy kwadraty na podstawach AB, ab albo na wysokościach AD i ad . Każda para z tych także się będzie zawierać iak 25:9. ponieważ będzie mógł pierwszy być podzielonym na 25 takich kwadracików, iakich drugi będzie miał 9.

Toż stanowić można i dla trójkątów podobnych, które są połowami prostokątów podobnych, i ogółem dla iakichkolwiek dwóch figur podobnych, które zawsze podzielić można przekątnemi na trójkąty, z których każde dwa odpowiadające sobie będą podobne.

Dla przeświadczenia się o tym zupełnego służy własność ta równych stosunków, że *summa wszystkich poprzedników tak się ma*

Fig. 16.

do summy wszystkich następników iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

$$a : na$$

$$b : nb$$

$$c : nc$$

$$d : nd$$

$$a+b+c+d : n(a+b+c+d)$$

Jak ostatniego tak i każdego z osobna stosunku jest wykładnikiem n .

Poprzedniki mogą wyrażać troykąty składające pierwszą figurę, a następники drugą, będą się więc zawierać figury podobne iak każda para troykątów podobnych one składających, to jest iak kwadraty z boków, sobie odpowiadających.

§ 16. ZADANIE 8. *Wynałeść ogólną ekspresyą wielkości okręgu koła, lub iego powierzchni z danej średnicy.*

Im większą liczbę damy bokom Wielokąta foremnego opisanego na kole tym bardziey obwód iego zbliżać się będzie do okręgu koła, a powierzchnia iego do powierzchni koła. *Sposobem wyczerpania* (methodo exhaustionis) dawnych, dowieść można dokładnie, że podwajając coraz liczbę boków wielokąta opisanego na kole, można uczynić różnicę między iego obwodem i okręgiem koła, lub iego powierzchnią i koła mnieyszą od wyznaczoney różnicy, by też ta iak najmnieyszą była. Można więc uważać koła iak wielokąt foremny o nieskończeniu wielu bokach. A z tąd przystosować do koła własności wielokąta foremnego na kole opisanego i własności wielokątów foremnych o równej liczbie boków, zaczym sobie podobnych; mianowicie *koło jest takżę równe do troykąta mającego za podstawę iego okrąg, a za wysokość promień. Q.*

kągi koł rozmaitych tak się zawierają iak ich promienie. Zaczynam stosunek okręgu koła do swego promienia iest jednoślajney wielkości. Miał więc raz wyrażony stosunek, ten w liczbach już przez to samo można wynaleść zwyczajną proporcją, długość okręgu koła podług danego promienia lub średnicy. Jakoż wynalezionym iest stosunek ten średnicy do okręgu koła

$$=7:22 \text{ (podług Archimedesa)}$$

$$113:355 \text{ (podług Metiusza)}$$

1:3,141592.... i t. d. do 35 znaków dziesiątych podług *Van Ceulen Hollendra*. W ostatnim stosunku bierze się średnica za jedność, im więcej weźmiemy dziesiątych z następnika tym dokładniej wynaydziemy okrąg podług danej średnicy. Nazwiemy ogółem literą *P*, liczbę 3,141..., to iest 3 z tyłą dziesiątnymi, ile dokładność naszego rachunku wyciąga; literą *∂* daną średnicę *p* szukany okrąg; *a* powierzchnią koła wyniknie z tąd

$$1 : P = \partial : p = P\partial$$

$$4 : P = \partial^2 : a = \frac{P\partial^2}{4}$$

Druga proporcya wyraża, że kwadrat opisany na kole, to iest, z średnicy ma się do koła iak 4 : *P*. Ponieważ obydwie figury są równe do trójkątów, równe wysokości mających, to iest promień, zaczynam tak się zawierać iak podstawy (Rozd: 1 §98) Jeżeli nazwiemy promień koła literą *r* będzie

$$p = P_2 r$$

$$a = P_1 r^2$$

DE MAXIMIS & MINIMIS.

§ 17. Jest część Geometrii, w której się zaprzatamy iedynie relacyą pełności i obwodow, czyli ogólniey granic figur: dochodzi się w niey w iakim razie są one naywiększemi w iakim naymniejszych. Wyborne w tym rodzaju mamy w księgarniach dzieło J. P. Lhuillier.

TWIERDZENIE 9. *Między wszystkich prostokątami o równym obwodzie zawiera kwadrat największą powierzchnią.*

Figura 17. Zrobmy kwadrat *ac* mający za obwód linią *eb*: poprowadźmy w nim przekątną *bd* a przez punkt na niey *o* poprowadźmy równoodległe od dwóch iego bokow przyległych: prostokąty przez które nieprzechodzi przekątna są sobie równe. Przedłużmy *po*, do której wziąwszy równą *pg*, i dokończywszy prostokątu *hf* ten ma tenże sam obwód co i kwadrat; jest zaś sam równy do mieysca *abcnop* ponieważ *hp=oc*: Zaczyn jest kwadrat *ac* większym od niego kwadratem *pn*. Im zaś bardziej zbliżać się będzie podstawa do wysokości w prostokącie; tym mnieyszą będzie ta różnica. Kwadrat *ac* jest większym od prostokąta *li* kwadratem *sq*.

Można toż samo i krociey dowieść.

$$\begin{aligned} (ab+am)(ab-am) &= ab^2 - am^2 \quad (\text{Aryt: § 69}) \\ \text{czyli } hf &= ab^2 - am^2 \\ \text{z tąd } hf+am^2 &= ab^2 \end{aligned}$$

To jest kwadrat z *ab* przewyższa zawsze prostokąt tegoż co i on obwodu kwadraciem, który tym mnieyszym staie się im bardziej podstawa prostokątu zbliży się do wysokości.

UWAGA. W układaniu wewnętrznego rozporządzenia domu, powinni mieć wzgląd Architekci na tę własność.

§ 18. ZADANIE 9. *Wykreślić linię Logarytmową.*

Figur;
18.

Wystawmy od dwóch końców linii ac prostopadłe ab i cd weźmy ostatnią n. p. 10 razy większą od pierwszej. Poczym od środka e linii ac wystawmy prostopadłą ef i weźmy ją równą do średniej ciągle geometrycznie proporcjonalnej między ab i cd (§ 11). Takąż weźmy gh między ab i ef i t. d. podzieli się stosunek linii $ab : cd$ coraz na $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ i t. d. Przez końce tych średnie ciągle geometrycznie proporcjonalnych poprowadziwszy linię $bhfk$ ta jest żądaną linią logarytmową.

PRZYSTOSOWANIE ROZBIORU DO GEOMETRYI.

§ 19. ZADANIE 10. *Zamienić dany trójkąt na czworobok tejże co i on powierzchni i podstawy; i w którymby bok przeciwległy podstawie był od niej równoodległy, a z dwóch drugich boków ieden miał toż położenie względem podstawy co i bok trójkąta, a drugi położenie dane.*

Figur;
19.

Już widzieliśmy w § 102 na czym zawisła istota Rozbioru.

Wystawiamy więc sobie tu iakoby żądanym czworobokiem już był wykreślony czworobok $bçfe$. Gdy się mówi, że rozbiór prowadzi bez zawodu do rozwiązania zadania; przypuszcza się zawsze w tym, który go przedsięwzię, pewny dowcip, pokazujący mu drogę, którą postępować trzeba i pierwiastkowe wykreślenie (*constructio*) zdolne do odkrycia stosunków, które roztrząsa: dotego że posiada gruntownie podania przynajmniej początkowej geome-

tryi i ma one zawsze, że tak powiem w pamięci na dorędziu.

Prowadzę ad równoodległą od bc : en i bh równoodległą od dc i spuściam bg prostopadłą do ad Idzie tu tylko o wynalezienie

linii $dn=ef$

Niech będzie $dn=x$

$$bc=a$$

$$ad=b$$

bg wysokość $\triangle abc=c$

$$\triangle abc = \text{Cwo. } ebcf = d$$

$$ah: bg = ek: bi \text{ (bo } \triangle abh \sim ebk \text{)}^*$$

$$b-a: c = x-a: cx-ca$$

$$\frac{b-a}{b-a}$$

czworobok $bcfe = ebk + bcfk$

$$\text{czyli } d = x-a \frac{(cx-ca)}{2(b-a)} + a \frac{(cx \cdot ca)}{b-a}$$

$$= \frac{cx^2 - 2acx + a^2c + 2acx - 2a^2c}{2(b-a)}$$

$$= \frac{cx^2 - a^2c}{2(b-a)} = \frac{c(x^2 - a^2)}{2(b-a)}$$

$$\text{z tąd } 2d(b-a) = cx^2 - a^2$$

$$cx^2 = 2d(b-a) + a^2$$

$$x = \frac{2d(b-a) + a^2}{c}$$

$$= a(b-a) + a^2 \text{ ponieważ } \frac{2d}{c} = a$$

$$= ab - a^2 + a^2 = ab$$

$$\text{zaczynam } x = \sqrt{ab}$$

Rozwiązanie. Szukam średnie geometrycznie proporcjonalnej między ad i bc (§11) przenoszę ją od d do n , przez n prowadzę równoodległą od cd przecinającą ab w e i

* \sim jest znakiem podobieństwa.

przez e prowadzę równoodległą ef od bc uformuie mi się żądany czworobok $ebcf$.

§ 20. ZADANIE 2 Podzielić daną figurę na 3 równe części liniami równoodległymi od podstawy. Figura 20.

Niech będzie dana figura $abcdef$ do podzielenia na 3 równe części.

Szukam iey powierzchni (Rozd: 1 § 99).

taniech będzie $= 10950$ Łok.

iey $\frac{1}{3}$ część $= 3650 \dots$

Niech ab zawiera 100 łokci (podług skali fig: 42. Tab. II). Wyfokość troykąta równego do $\frac{1}{3}$ figury, a mającego za podstawę ab iest $= 2.3650 = 73$ łok. (Rozd: 1. § 97). Wysta-

100

wiam więc prostopadłą do podstawy, biorę na niey $gh = 73$ (podług skali) ściagam ai troykąt abi iest równy do $\frac{1}{3}$ figury. Ten więc tylko zamieniam ieszcze na czworobok $abim$ sposobem w § 19 podanym.

Dochodzę ze skali, że mn zawiera 118 łokci. Będzie więc znówu troykąta równego do $\frac{1}{3}$ figury, a mającego za podstawę mn wyfokość $= 3650 = 62$ blisko. Biorę więc

59

$op = 62$ i i zamieniam podobnymże co i pierwey sposobem troykąt mnc na czworobok iemu równy $mnrq$; Że zaś wypada mi tu iego kawałek ftq za figurą, ściagam rf prowadzę przez q linią qs równoodległą od rf i ściagam sr . Troykąty sqf , sqr są równe co do powierzchni, bo mają spólną podstawę sq , a wierzchołki na linii rf równoodległej od podstawy: odciągawszy więc wspólną ich część sqt zostanie $tqf = str$. Zaczynam zamieniam tylko ieszcze troykąt str na czworobok $trvu$ dla otrzymania drugiey

linii podziału *uw.* Gdyby po obu stronach figury wypadały takie trójkąty jak tu *stq*, trzeba by wynaleść ich powierzchnią z ich podstaw i wysokości wziętych, podług skali, tę powierzchnią podzielić przez połowę ostatecznej linii podziału, padającej wewnątrz figury; dla otrzymania wysokości trójkąta, którego by jeszcze przydać trzeba do ostatniego czworoboka, reszta jak wyżej.

UWAGA. Chcąc dokładniej tę robotę wykonać, trzeba by wynaleść przez rachunek trygonometryczny linie, które tu ze skali bierzemy.

Sądzę, że sposób ten na myśl mi przychodzący, da początkowym iakieźkolwiek wyobrażenie podziału figur na równe części liniami równoodległymi.

Figur: § 21. ZADANIE 3. Będąc dane koło z linią 21. zewnątrz lub wewnątrz jego znaleźć taki punkt na okręgu, żeby poprowadzwszy od niego linie do końców danej linii, i ściągnąwszy linią łączącą punkta, przecięcia tych ostatnich linii z okręgiem koła, ta była od danej linii równoodległą.

PRZYGOTOWANIE. Niech będzie żądany punkt ∂ , a e równoodległą od ab .

Przez a prowadzę styczną ag (§ 12.) a. przez e styczną eh (§ 12. Wn.)

DOCHODZENIE. Kąt $feh = \partial$ (§ 3) $= cha$ (Roz: 1. § 43). zaś kąt a jest spólny do obydwóch trójkątów ach , $a\partial b$, są więc te podobne (§ 7 Uwaga). z tąd proporcya

$$a\partial : ab = ah : ae$$

$$\text{zaczynam } a\partial \times ae = ab \times ah \text{ (§ 6)}$$

$$= ag^2 \text{ (§ 10. Wnio: 4.)}$$

ROZWIĄZANIE. Szukam trzeciej ciągle geometrycznie proporcjonalnej do ab i ag (§ 8 Wnio:) przekładam ją od a do h . Przez

h prowadzę styczną dotykającą się koła w *e*. Nakoniec przez ten punkt prowadzę *ef* równoodległą od *ab*, linie poprowadzone przez *ae* i *bf* przedłużone dostatecznie zeydą się w punkcie na okręgu koła.

Znayduię rozwiązanie tego i następującego Zadania w wybornym dziele Pana *Montukli* pod tytułem *Histoire des Mathématiques p. M. Montucla &c. 2 T. 4^o Paris 1758*. Z niego biorę następującą uwagę.

§ 22. UWAGA I. „Dwojakim sposobem postępuje się w Geometrii, albo złożonym (*methodo synthetica*), albo też rozbiorowym (*methodo analitica*). Pierwszego używa się chcąc kogo przeświadczyć o prawdziwie już odkrytey, zaczyna się tu od zaśad (a *principis*) od prawd już wiadomych, a postępując od wniosku do wniosku w nieprzerwanym paśmie, przystępuje się nakoniec do tego, co się dowieść miało.

Postępowanie rozbiorowym sposobem, iak widzimy, zupełnie jest przeciwnym pierwszemu. Tu przyimniemy za prawdę co dopiero ma być dowiedzionym. Wyprowadzamy z tąd coraz nowe wnioski, poki nie zaydziemy, do czego oczywiście prawdziwego lub fałszywego, jeżeli podanie jest Twierdzeniem; zaś mogącego być wykonanym lub nie, jeżeli jest Zadaniem. Z tąd też i nazwiska tych dwóch sposobow; w pierwszym składamy; łączemy wiele prawd, z których związku wypływa nowa. W drugim zaś rozbieramy podanie ieszcze niewiadome na jego części, wszystkie koniecznie prawdziwe, jeżeli Podanie jest prawdziwym, fałszywe zaś przeciwnie. W pierwszym postępujemy od prostego (*simple*) do składowego, od wiadomego do niewiadomego, że tak powiem od pnia do gałęi, w drugim

zaś przechodziemy z łózonego do pojedynczego, z niewiadomego do wiadomego od gałęzi do pnia.

UWAGA 2. Pierwszego samego prawie zostawili nam wyborne wzory dawni Geometrzy Granice, które sobie zamierzyłem, niedozwalając mi zastanowić się obszerniej nad temi dwoma wielkiej wagi sposobami. Obydwa jednaż ćwiczącemu się w nich wielkiej wagi korzyści i do znacznego stopnia doskonałości doprowadzić go mogą: pierwszym mianowicie nabywa praktyczney logiki, umysłu tego geometrycznego, który nie samym tylko geometrom jest istotnie potrzebnym, a drugim smaku do wynalazków.

W reszcie raz prawda rozbiorowym sposobem odkryta; syntetycznym dowiedzioną być może, iako się na poprzedzającym zadaniu przeświadczyć o tym można przewróciwszy na wspak rozwiązanie: z tąd nowe iey pierwiźństwo od nowszych zwiłzcza geometrow przyznane, lecz za to w pierwszym w caley swej piękności pokazuje się iasność: dla tego też tak ją sobie polubił Newton. Tym sposobem napisał on nieśmiertelne swe dzieło: *Principia Mathematica Philosophiae naturalis*. Służyć one może za wzor tym, którzy chcą śledzić natury tajemnicę z pożytkiem dla siebie i dla drugih.

UWAGA 3. Można sobie nie mało ulżyć rozwiązanie Zadania rozbiorowym sposobem, zrobiwszy wprzod figurę ile możności dokładnie, choć probowaniem (par tatone-ment). Łatwo bowiem tak postrzeże się, iakie kąty równe, iakie linie proporcjonalne; z tąd iakie troykąty podobne i t. d.

Następujące podanie pokazuje iak użyć tego sposobu w wyszukiwaniu Twierdzeń.

§ 23. TWIERDZENIE. Linia *ab* iest podsta. *Fig.*
wa nieskończenie wielu trojkątów, których 22
 dwa boki *aD* *Db* lub *aD* *Db* zawsze mają mie-
 dzy sobą iednoślajny stosunek, iaka iest linja
 krzywa, czyli po geometrycznemu iakie iest
 miejsce geometryczne * *wszystkich wierzchoł-*
ków tych trojkątów.

Przygotowanie. Podzieliwszy *ab* tak, że-
 by odcinki iey były w danym stosunku *ae* :
eb (§ 9) szukam punktu *f* takiego, żeby ie-
 szcze było *af* : *bf* = *ae* : *eb* co z małą nieco
 odmianą sposobu § 9. wykonać się daie. Wi-
 dzę z tąd, że *e* i *f* będą końcami tej krzy-
 wey linii, ponieważ można uważać *aeb* ia-
 ko granicę trojkąta *aDb*, gdy iego kąt *∠*
coraz roztwartszym się staie: zaś *afb* iak
 granicę trojkąta *aDb*, gdy kąt iego *∠* nayo-
 strzeyszym się staie. Musi więc linia ta być
 krzywą.

Dochodzenie. Daymy na to, że iest koło-
 wą; i nakreślmy ją na linii *ef*. Aby nią
 w samey rzeczy była, trzeba, żeby poprowa-
 dziwszy od iakiego na niey punktu *∠* linie
da, *db*, te były w stosunku *ae* : *eb*.

Sciągam *de* i *dc*. Trojkąt *adc* iest podobny
 do trojkąta *bDc* ponieważ kąt *c* iest spólny

$$\text{do tego } ade = eDb \text{ (§ 7 Wn: 2)}$$

$$ceD = cDe \text{ (Roz: 1. § 61)}$$

$$\text{więc } cbD = ceD + eDb = cDe + ade \\ = adc$$

$$\text{z tąd } ac : eD = cD : cb$$

$$\text{czyli } ac : ce = ce : cb$$

$$\text{differentian: } ac : ce : ce : cb = ac : ce \text{ (§ 79)}$$

$$\text{Rozwiązanie } ae : eb = ad : Db.$$

* *Miejscem geometrycznym nazywa się zbior punktów.*
z których każdy rozwiąznie zadanie.

Takim miejscem geometrycznym iest tak *adb* fig. 3.
 dla wierzchołków trojkątów mających przy nich ką-
 ty równe, i spólną podstawę.