

ROZDZIAŁ VII.

O LOGARYTMACH.

§91. Jużemy wyżej mówili o składaniu iakichkolwiek stosunkow: składanie równych stosunkow da nam pochoop do mowienia o Logarytmach.

Jeżeli $a:b=b:c$ iest $a:c=a:b+b:c=a:b+ab::2(a:b)$.

to iest stosunek z $a:c$ iest złożonym z dwóch stosunkow równych, z których każdy iest równy do stosunku $a:b$. Nazywa się taki stosunek *dwumnożnym* (ratio duplicata a nie dupla) i wzajemnie stosunek $a:b=\frac{1}{2}(a:c)$ i nazywa się względem niego *dwudzielnym* (subduplicata).

Jeżeli $a:b=b:c=c:d$ stosunek $a:d$ iest złożonym z trzech, z których każdy iest równy do $a:b$ iest więc $a:d=3(a:b)$ i wzajemnie $a:b=\frac{1}{3}(a:d)$. Stosunek $a:d$ nazywa się *troymnożnym* (ratio triplicata) względem stosunku $a:b$, który się nazywa iego *troydzielnym* (subtriplicata).

W dwumnożnym stosunku są wyrazy kwadratami, a w troymnożnym sześcianami, względem wyrazow poiedynczych stosunkow.

ponieważ $a:c=\left[\frac{a:b}{a:b}\right]=a^2:b^2$ (§84 W n.3).

także $a:d=\left[\frac{a:b}{a:b}{a:b}\right]=a^3:b^3$

Od tego też mają nazwiłka stosunkow dwumnożnych i troymnożnych względem

poiedynczych $a:b$ które się ich *pierwiałtkami* nazwać mogą.

Stofunki powyższe tak się w krotkości wyrażają

dwumnożny $a:b:c$

troymnożny $a:b:c:d$

i mówi się, że formułą *proporcją ciągłą*, iako się już w § 77 mówiło.

Lub też nazwawszy pierwszy wyraz a a wykładnika n będzie

stofunek troymnożny $a:n a:n^2 a:n^3 a$ (§ 78)

§ 92. Można tym sposobem i więcej jeszcze przydąć wyrazow, i na ten czas formowałyby *szereg geometryczny* n . p.

7; 14; 28; 56; 112; 224; i t. d.

podzieliwszy każdy z wyrazow przez najpierwszy zamieni się poprzedzający szereg na inny

1 2 4 8 16 32 i t. d.

to jest na taki, którego wyrazy w tymże samym co i pierwszy stofunku znajdować się będą, i zaczynający się od 1.

Wiadomość ta i użyteczność przyśtosowań z ostatniego wyrażenia szeregow sprawia, że takie tylko uważać będziemy.

§ 93. Jeżeli pierwszy wyraz stofunku geometrycznego jest $=1$ a drugi $=a$ to szereg ten zawierać w sobie będzie same mnogości drugiego wyrazu.

M 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128;

N 1; a ; a^2 ; a^3 ; a^4 ; a^5 ; a^6 ; a^7 ; ... a^m ; a^{m+1}

L 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ... m ; $m+1$

Szereg M służy za przykład i zawiera w sobie same mnogości z 2, szereg N wystawia ogólnie szereg geometryczny, a w L są umieszczone wykładniki do mnogości w N należące, i formułą *szereg Arytmetyczny* liczb naturalnych.

§ 94. *Każdy do tego z wyrazów szeregu L n. p. 4 wyraża, że stosunek $1:a^4$ złożonym jest z czterech takich stosunków jakim jest najpierwszy $1:a$ i nazywa się Logarytmem wyrazu nad nim stojącego w szeregu N. n. p. 5 jest logarytmem a^5 . Są przeto logarytmy miarą stosunków, ponieważ ich wielkość iak widzimy wyznaczą: są oraz miarą i liczb, które są także stosunkami, drugim ich wyrazem jest jedność, n. p. 5 jest logarytmem 32; czyli stosunku 32:1 bo ten jest $3\frac{1}{2}$ albo 32.*

§ 95. Zostawiwszy w L też same co i pierwey wyrazy, a odmieniwszy a w szeregu N, odmieniają się wszystkie wyrazy w N: ważność tedy wyrazu a , którego logarytmem jest 1 dała mu nazwisko *podstawy* logarytmów: złączone zaś wyrazy szeregu N podług wziętey podstawy a z szeregiem L formują tak nazwane *systema*, czyli *układ* logarytmów.

§ 96. Rzuciwszy okiem na szeregi N i L lub M i L ważną ich własność postrzegamy. *Produkt z wyrazów szeregu M odpowiada summie wyrazów pod pierwszemi stojących w szeregu L i wzajemnie wieloraz z dwóch pierwszych, różnicy z dwóch drugich*

$$\text{I tak } 2 \times 8 = 16 \text{ (z szeregu M)}$$

$$1 + 3 = 4 \text{ (z szeregu L)}$$

$$\frac{3}{2} = 4$$

$$3 - 1 = 2$$

Z łatwością dowodzi się toż samo i ogólniej biorąc wyrazy z szeregu N. Przypomnieć tu sobie tylko trzeba to, co się mówiło § 70 i 71.

Z tąd dalsze wnioski, wynikają: że aby mieć logarytmi odpowiadający mnogości ia-

kiego stopnia, trzeba tylko rozmnożyć logarytm pierwiastku przez ten stopień

$$\text{Lg } 4^3 = 2 \times 3 = 6$$

zaś 6 odpowiada liczbie 64, która jest mnożącą żadaną.

I wzajemnie, aby wyciągnąć pierwiastek iakiego stopnia z liczby, iako mnogość tegoż stopnia uważanej, trzeba tylko logarytm iey podzielić przez ten stopień, otrzymam z tąd logarytm odpowiadający żadanemu pierwiastkowi.

$$\text{Lg } \sqrt[3]{64} = \frac{6}{3} = 2$$

zaś 2 jest logarytmem 4 żadanego pierwiastku.

§ 97. Na tych kilku przykładach przeświadczyliśmy się o wielkiej wagi własnościach szeregów *N* i *L*. Gdyby w szeregu *N* znajdowały się liczby w ich naturalnym porządku zaczawszy od 1go, a w szeregu *L* ich logarytmy, już dla liczb w tych dwóch szeregach znajdujących się zamieniłoby się mnożenie na dodawanie, dzielenie na odciąganie: trudne wyciąganie pierwiastków na dzielenie przez ich stopień, czyniąc same działania na logarytmach.

Prędkość z iaką można tym sposobem odprawiać rachunki, dała pochoch do ułożenia i wyrachowania zwyczajnych Tablic logarytmowych, których używamy. W nich wzięto za podstawę 10, że zatył układ logarytmow jest

K 1; 10; 100; 1000; 10000;

L 0; 1; 2; 3; 4;

W szeregu *K* na który się tu zamienia powyższy szereg *N*, szukano pośrednich liczb, aby się ciągnęły w naturalnym porządku. Na ten koniec szukano średnich cią-

gle geometrycznie proporcjonalnych n. p. między 1 i 10 poty, pokiby iaka z nich nie zbliżyła się do iakiey pośredniej liczby całkowitey między 10. n. p. trzeba było szukać 24 średnich takich proporcjonalnych między 1 i 10, tą średnią wynalezioną i 10 i t. d. to jest wyciągać 24 razy pierwiastki kwadratowe, dla wynalezienia takiego, któryby się najbardziej zbliżał do 5: aby otrzymać logarytm tego, trzeba było podobnie szukać 24 średnich ciągle arytmetycznie proporcjonalnych między 0 i 1. Takim niezmiernie zmudnym sposobem są w fałszywej rzeczy wynalezione logarytmy, których używamy, aż do 10000: luboć dla liczb pierwszych między sobą tylko odprawić trzeba byłoby tę robotę, bo dla składowych, wydawną się logarytmy przez dodawanie (§ 96.)

§ 98. Zostaie mi tu jeszcze przełożyć w krotkości.

Używanie zwyczajnych Tablic logarytmowych.

Ponieważ logarytmy wyrazow między 1 i 10 powinny być większe od 0 a mniejsze od 1; podobnież liczb między 10 i 100, muszą być większemi od 1, a mniejszemi od 2, składać się więc muszą logarytmy liczb między 1 i 10, z zero całkowitych i ułamku właściwego; wyrazow między 10 i 100, z 1 i ułamku właściwego, między 100 i 1000 z 2 i ułamku właściwego i t. d. całkowita więc w logarytmie najważniejszą jest jego częścią, ponieważ z niej poznać można dorazu iakiego rodzaju, tą jedności w najwyższej cyfrze liczby całkowitey, dla tego też nazywano ją *cechą* (characteristica) logarytmu. Ułamek właściwy wyrażony jest

w dziesiątnych z przybliżeniem w $\frac{1}{1000000}$ częściach jedności, dla tego też widzimy w tablicach 7 znaków dziesiątnych przy cefze. Reszta ta logarytmu z dziesiątnych złożona, nazywa się mantysą.

Łatwo poznać można cechę logarytmu danej liczby całkowitej. Z ostatnich dwóch rzędów *K* i *L* widzimy, że ta powinna mieć w sobie tyle jedności, ile liczba całkowita ma cyfer mniej jedną; i wzajemnie z danej cechy poznać można z wielu cyfer składać się powinna liczba całkowita.

Na tych poprzedzonych wiadomościach załadza się rozwiązanie następujących za-
pytań nayeściej zdarzających się w rachunku z logarytmami.

Zadanie 1. Mając daną liczbę nieznaną, iącą się w zwyczajnych Tablicach logarytmowych wynaleść ię logarytm i wzajemnie

Rozwiązanie. Szukam logarytmu tej liczby w tyśiącach tylko, odciągam go od zaraz następującego większego; różnicę tę rozmnażam przez pozostałą część danej liczby, a od produktu odcinam z prawej strony tyle cyfer, ile ich było w części, przez którą rozmnożyłem, pozostałe dodać do mniejszego logarytmu, którego ieszczę cechę tak powiększam, żeby w niej tyle było jedności, ile ma liczba całkowita w sobie cyfer mniej jedną.

Przykład. Wynaleść Logarytm

$$\begin{array}{r}
 14189. \\
 \text{Lg } 14190 = 4,1519824 \\
 \underline{14180 = 4,1516762} \\
 10 \qquad 3062 \\
 \qquad \qquad 9 \\
 \qquad \qquad 2755(8 \\
 \qquad \underline{4,1516762} \\
 \text{Lg } 14189 = 4,1519528
 \end{array}$$

Re-

Reguła ta zasadza się natym, że stosunek różnic między całkowitemi jest prawie równy stosunkowi, różnic między logarytmami iak ta

$$10 : 3062 = 9 : 2756$$

Wykładnikiem pierwszego stosunku jest 3062, równe iak i drugiego.

Wzajemnie, aby wynaleść liczbę odpowiadającą logarytmowi nieznanemu, się w tablicach na wlpak tylko tę regułę o-
brocić trzeba.

Przegląd. Wynaleść liczbę odpowiadającą logarytmowi 4,1519518.

$$\begin{array}{r} \text{Lg } 14190 = 4,1519324 \\ \text{Lg } 14180 = 4,1516762 \\ \hline \begin{array}{r} 10 \qquad 3062 \quad 3062) \quad 27560 \\ \underline{27558} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,1519518 \\ 4,1516762 \\ \hline 27558 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 9 \\ 2 \end{array} \right.$$

Liczba żądana jest 14189.

Reguła na to, zasadzająca się także na pod-
przedzającej proporcji byłaby następująca:

*Szukam w Tablicach logarytmu z cechą 3, najbar-
dziej zbliżającego się do danego i
mniejszego od niego odciągam go od wyż-
szego; tenże sam odciągam od danego; do o-
statniej różnicy, która jest zawsze mniej-
szą dopisuję tyle zerów, ile cecha dana ma
więcej jedności od 3, i dzielę ją przez pier-
wszą różnicę w Tablicach, wieloraz ztąd
wypadający dopisuję do liczby całkowitej
wynalezioney.*

Widać złatwością w czym tę robotę skró-
cić można: mianowicie obeydzie się bez
wypisywania całkiem logarytmów. Do te-
go ponieważ i różnicę na pamięć odprawić
można, całe działanie przywodzi się w pier-
wszym razie do mnożenia różnicy między

logarytmami, przez liczbę całkowitą, a w drugim do dzielenia iedney różnicy przez drugą.

Z tego wzoru łatwo się także poznać iak sobie postępować trzeba, gdy są większe liczby całkowite lub dziesiętne przy nich i wzajemnie.

§ 99. Zadanie 2. *Wynaleść logarytm ułomku.*

Rozwiązanie 1°. Ponieważ ułomek jest wielorazem wypadającym z podzielenia licznika przez mianownika.

Jeżeli więc ułomek jest niewłaściwym, odciągamy tylko logarytm jego mianownika od logarytmu licznika.

Przykład. Wynaleść logarytm $\frac{7}{6}$

$$Lg\ 7 = 0.8450980$$

$$Lg\ 6 = 0.7781512$$

$$Lg\ \frac{7}{6} = 0.0669468 = Lg\ 1.166$$

Szukam mianowicie w tablicach tego $Lg\ 2$ cechą 3, i dorazu wynadę liczbę 1166, którą przez 1000 podzieliwszy otrzymuję oraz dany ułomek w dziesiętnych wyrażony.

2° Aby się dowiedzieć czyni będą logarytmy ułomków właściwych, układam wstecz szereg K, L

$$\begin{array}{ccccccc} 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 & K \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & L \end{array}$$

Są więc logarytmy właściwych ułomków ujemnymi

Przykład. $Lg\ \frac{6}{7} = -0.0669468$

Aby znieść tę ujemność tak sobie postępuję

$$1 \div Lg\ 6 = 1.7781512$$

$$Lg\ 7 = 0.8450980$$

$$Lg\ \frac{6}{7} = 0.9330532 - 1$$

$$= 3.9330532 - 4 = Lg\ 0.8571$$

To jest: powiększam *cachę* \lg z licznika tyla ogółem iednościami, żebym od niego mógł odciągnąć \lg z mianownika. Loga. rytym z tąd wypadający miałby w cęsie tyle iedności za wiele, ilem ich nadto przydał; umieszczam ie więc na boku z znakiem ujemnym (iak tu—1).

Pod tym podpisany \lg ieszcze toż samo waży co i pierwszy; różnica bowiem zostanie ieszcze taż sama, gdy po obu stronach przydam po 3.

$\lg 3.9330532$ odpowiada liczbie całkowitey 8571, którą ieszcze podzielić trzeba przez 10000 bo tey jest $\lg 4$, otrzymuję więc 0,8571 ułomek $\frac{6}{7}$ w dziesiątnych wyrażony.

§ 100. Zadanie 3. Wynaieść pierwiastek mnogości iakiegokolwiek bądź słopnia.

Przykład. Wynaieść pierwiastek $\sqrt[4]{\frac{7892^3}{6453^2}}$

$\lg 7892 = 3.8971871$
 rozmnożony przez $\underline{3}$

$11,6915613$
 także $2 \lg 6453 = 7,6195234$

4.0720379
 podzielony przez 4 = 0,0180095
 Pierwiastek żądany = 10,42

Sam iuż ostatni przykład przekonywa nas iak wielce użytecznemi są logarytmy.

Przystosowanie ich do reguł ze trzech sam sobie każdy uczynić potrafi.

Niżey ieszcze bardziey przekonamy się o ich użytku w rachunkach trygonometrycznych. Jan Neper Baron Merchistonu szkot, jest ich wynalazcą przy początku zeszłego wieku, zaś Henryk Briggs wygodnie ie ułożył, i tak iak ich teraz używamy.