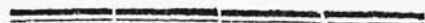

D O D A T K I



PIERWSZA CZĘŚĆ DODATKOW

ARITMETYKA

i DAJSZE ROZPROWADZENIE GEOMETRYI.



ROZDZIAŁ I.

Początkowe wiadomości o liczbach i czyn-
ności na nich działania.

§ 1. **N**auka podająca sposoby iak z wiadomych liczb dochodzić nieznaomych, za pomocą znakow na ten koniec wynalezionych nazywa się *Arytmetyką*. Z iey znaczenia wynika konieczność mowienia nieco o liczbach.

§ 2. Granice, które sobie w tych dodatkach zamierzyłem, niedozwalają mi rozwlekać się nad początkami i doskonaleniem znakow, których używano do wyrażenia liczb. To mi tylko spomnieć tu trzeba, że znaki te iak nayprostszy być powinny. Znaione każdemu od dzieciństwa znaki te liczebne 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0. nazwane *Cyframi*, a ostatnia zero przekonują każdego iak zamiarowi swemu zadosyć czynią, i iak dalece warte by one przekładano nad znaki, u Rzymian używane, i kościelną liczbą teraz mianowane. Sprowadzenie ich do Europy w dzieśiatym wieku winniśmy uczonemu Papieżowi *Silwestrowi II.* pod imieniem Gerbert pierwey znanemu.

Ten rodem z Aurilliaku w Auvergne nabył ich od Saracenow w Hiszpanii, dokąd był w młodym swym wieku pojechał dla uczenia się umiejętności od Arabow, którzy co do nauk tym byli względem Chrześcian, czym niegdyś Egipcyanie względem Greków nauki eheiwych.

§ 3. Każda rzecz z tych, które liczymy wzięta pojedynczo, nazywa się *jednością*: *Liczbą* zaś wielość tych jedności. Aby wyżej wyrażonemi cyframi wszystkie liczby wyrazić było można, zgodzono się na następujące prawidło; *Każda cyfra po lewej stronie obok innej stojąca, waży dziesięć razy więcej od tej, która po niej prawej stronie znajduje się.*

§ 4. Za pomocą tej reguły każdą już liczbę wymówić i wypisać byłoby można. Lecz równie iak się starano wyrażać liczby iak najbardziej na piśmie pojedynczemi znakami, słowne też wyrazy, iak najkrótszemi być powinny; aby więc unikać ustawicznego dziesięciu powtarzania, zgodzono się, aby nazwać *stem*, wielkość dziesięć razy dziesięć powtórzoną; *Tysiącem* dziesięć razy sto; *millionem* tysiąc razy tysiąc; *billionem*, *trillionem* i t. d. million razy wzięty million, billion i t. d. Dla wygodniejszego wymawiania liczby, zwłaszcza przy większej, zgodzono się, aby ją następującym wypisywać sposobem.

5 673 947 205 743 980 563 835 643.

Tak się zaś wymawia. Pięć kwadrillionow, sześć kroć siedmdziesiąt i trzy tysiący, dziewięć set czterdzieści siedm trillionow, dwakroć pięć tysięcy siedmset czterdzieści i trzy billionow, dziewięć kroć ośmdziesiąt tysięcy pięćset sześćdziesiąt i trzy millionow, ośmkroć sto trzydzieści pięć tysięcy sześćset

czterdzieści i trzy proſtych iedności. Tych oſtatnich wyrażenie opuſzcza ſię; w próżnych zaś mieyſcach kładą ſię zera, odſtępują ſię trochę ſta od ſłow, a co ſiodma cyfra dopiſnuje ſię u góry rodzaj millionow. Właſciwie powinniſby ſię mówić: trzy i czterdzieści i ſześć ſet i t. d. gdybyſmy od prawey ku lewey ſtronie czytali iak wſchodnie narody, od których dzieſiątkowy ſpoſob liczenia mamy: a tedy nie trzeba byłoby robić tych oddziałow i znaczkow. Można przy tęy okazyi tę ſobie uczynić.

Uwaga: że krotkimi ſłownemi wyrazami i mało znakami, wyrazić można niezmiernie wiele wyobrażeń, które rozmaitość liczb w ſobie zawiera: podaje przeto pochoſp do doſkonaleſienia ięzykow; pożyteczna i eſt, oraz perorować lubiącym

Cztery arytmetyczne działania na liczbach całkowitych.

DODAWANIE.

§ 5. *Doſdawaniem* (additio) nazywa ſię to poſtępowanie, którym dochodziemy liczby wyrażającej, wiele dwie lub więcej liczb razem czynią. Podpiſują ſię na ten koniec liczby iedne pod drugimi tak, żeby iedności pod iednościami, dzieſiątki pod dzieſiątkami, ſta pod ſtami i t. d. przypadały. Wyſzzy rodzaj iedności z doſdawania niſzſzey kolumny wypadający, zachowuje ſię w pamięci dla doſdania ich do kolumny naſtępującej, takież iedności w ſobie mającej.

Wzor poſtępowania.

34567239269453.

8291234726.

9007334562394.

Summa 43582865066573.

O D C I A G A N I E.

§ 6. Postępowanie, którym się dochodzi liczby wyrażającej wiele się zostanie z iakiej liczby, gdy od niej inną mniejszą odeymiemy; nazywa się *odciąganiem* (substractio). Liczba, której się tak doszło nazywa się *resztą* lub *różnicą*, lub *nadmiarem* (excessus) większey od mniejszey. Może się trafić, że cyfra od której inną odciągamy mniej w sobie zawiera iedności od tey, która pod nią stoi: pożyczą się natenczas zaraz następuiącej wyższej iedności: i na ten koniec kładzie się nad nią punkt.

Jeżeli iest kilka zerow iedno koło drugiego, uważają się w odciąganiu iak 9, punkt zaś umieszcza się aż nad pierwszą za niemi cyfrą.

Wzor postępowania.

2300005672924.

234567280832.

reszta 2065438392092.

Ze tak pożyczac można, widac oczywiscie; można bowiem iak tu uważać 924 iak 800 i 124 odciągamy więc 2 od 4, 30 od 124 i 800 od 800.

M N O Ż E N I E.

§ 7. Jeżeli wypada, dodać dwie lub więcej liczb równych, takowa robota skróconą być może i tak

	3264		3264
zamiaſt	3264	piſzę	2
	6528		6528

Wypisuje się mianowicie ta liczba: pod nią ta, która wyraża wiele razy ma być powtorzona: pierwsza nazywa się *mnożną* (multiplicandus) druga *mnożącą* (multi-

plicator) obydwie zaś razem czynnikami (factores) a trzecia iak tu 6526 *wieloczynem* (productum). Postępowanie zaś same mnożeniem (multiplicatio),

§ 8. Aby potrafić każde mnożenie odprawić, trzeba umieć na pamięć wszystkie produkta z rozmnożenia pojedynczych cyfer wypadające. Te znajdują się w następującej *tablicy rozmnożenia* od wynalazcy *Pitagorefową tablicą* nazwanej.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Wzor postępowania.

$$\begin{array}{r}
 36723452 \text{ mnożna} \\
 6743 \text{ mnożąca} \\
 \hline
 110170356 \\
 146893808 \\
 257064164 \\
 220340712 \\
 \hline
 247626236836 \text{ Wieloczyn.}
 \end{array}$$

Dla tym lepszego zrozumienia, że się tak a nie inaczej postępować powinno, i że każdy rząd o iedne mieysce daley ku lewey stronie zaczynać potrzeba, pokłaść sobie można zero wciąż pod 6, 8 i 4., czym widoczniey okaże się do iakiego rodzaju ie-

dności, początkowe cyfry w każdym rzędzie należą.

DZIELENIE.

§ 8. Gdybyśmy chcieli wiedzieć, wiele razy jedna liczba w drugiej się znajduje, musielibyśmy ją tyle razy od drugiej odciągać ile można, i tak doszedłbyśmy, że 5 znajduje się w 15 razy 3.

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 5 \\
 \hline
 10 \\
 5 \\
 \hline
 5 \\
 5 \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

Ta robota może być skróconą za pomocą poprzedzającej tablicy do rozmnożenia; szukać mi bowiem tylko trzeba 15 między produktami, poczym po lewej stronie między pojedynczemi cyframi liczby danej 5, w górnym rzędzie pojedynczych cyfer znajdzie 3 żadaną cyfrę nad 15 stojącą. Tym postępowaniem dochodzę oraz na wiele równych części dzieli się liczba, iak tu 15 na 3 równe części, z których każda jest 5; Dla tego też nazywa się *dzieleniem* (divisio). Części zaś w nie wchodzące są, liczba, którą dzieli, nazwana od tego *podzielną* (dividendus), liczba, przez którą dzieli *dzielnikiem* (divisor): i liczba wyrażająca wiele razy pierwsza w drugiej znajduje się, *wielorazem* (quotus).

Dzielnik, Podzielna, Wieloraz.

5 15 3

§ 10 Jeżeli podzielna z więcej niż z dwóch cyfer składa się, a dzielnik jest tylko

poiedynczą, mogą i tu użyć wygodnie tabliczki do rozmnożenia.

Wzor postępowania.

$$6) \overset{32x}{39258} \mid 6543.$$

Szukam mianowicie między produktami w tabliczce takiego, któryby najbardziej zbliżał się do 39, tym jest 36; wieloraz z tą wypadający jest 6 i zostaje mi się jeszcze 3 które dla pamięci u góry zapisuję sobie: poczym szukam produktu zbliżającego się najbardziej do 32; tym jest 30 a wieloraz 5; i postępuję sobie dalej iak wprzod.

§ 11 Jeżeli i dzielnik z kilku cyfer jest złożonym; dla skrocenia porównywią się tylko początkowe cyfry w obydwóch wyrazach, gdy szukamy wielorazu.

Wzor postępowania.

$$\begin{array}{r|l}
 36723452 & 247626236836 \mid 6743 \\
 & \underline{220340712} \\
 & 272855248 \\
 & \underline{257064164} \\
 & 157910843 \\
 & \underline{146893808} \\
 & 110170356 \\
 & \underline{110170356}
 \end{array}$$

Niektórzy kładą dzielnika nad wielorazem w ten sposob.

$$\begin{array}{r|l}
 247626236836 & 36723452 \\
 & \underline{} \\
 & 6743
 \end{array}$$

w czym wynaydowanie produktow jest wygodniejszy.

§ 12. Zanim przytąpię do wykładania innego liczb rodzaju, spomnieć mi tu jeszcze

trzeba nieco, o wyłożonych dopiero czterech arytmetycznych działaniach: tym zaś są te bardziej warte, by je dobrze rozważyć i pojąć, że są fundamentem, dalszych i całej nauki rachunkowej.

A najprzód co do dodawania.

Jeżeli się znajduie wiele rzędów jeden pod drugim, można dla ulgi podzielić je sobie na części, oddzielając iedne od drugich horyzontalnemi kreskami; poczym szukać summy każdej części z osobna i te pojedyncze summy zebrać do kupy. Dla sprawdzenia zaś i doysścia czy się rachuiąc błędu nie popełniło; jeżeli się z razu z góry na doł liczyło, liczy się drugi raz idąc z dołu do góry.

Co do odciągania: tego probą iest dodawanie iakoż w § 6 dodawszy rząd, który się odciąga do reszty, wypadnie rząd, od którego się odciągało.

Jeżeli w dodawaniu dwa się tylko znajdują rzędy do dodania, można uczynić probę przez odciąganie iednego z nich od summy, wypadnie z tąd drugi rząd.

Dodawanie więc i odciąganie, służą sobie wzajemnie za probę.

Obaczemy zaraz, że wzajemność ta, ma też mieysce i względem mnożenia i dzielenia, które to działania są gatunkiem dodawania i odciągania.

§ 13 W mnożeniu; podzieliwszy produkt przez iednego z czynników, otrzyma się drugi: a w dzieleniu rozmnożywszy wieloraz przez dzielnika, wypadnie podzielona. Przeświadczyć się o tym można za rzuceniem oka na poprzedzające dwa przykłady § 8 i § 11. Służy więc dzielenie za probę mnożeniu.

Dla tym lepszego objaśnienia sobie sposobu, którego w dzieleniu trzymać się należy, można kłaść cyfry podług ich ważności miejscowej, to jest z dopisaniami zerami: a tak tym lepiej przekonać się ztąd; iak skrocony sposób w § 11 podany jest wygodnym.

Jeżeli początkowe cyfry iak w dzielniku tak w podzielney, bardzo są małemi w porównaniu zaraz po nich następujących, można je uważać iak iednością powiększoną. I tak

$$\begin{array}{r|l} 38 & 798 \quad | \quad 21 \\ \hline & 76 \\ \hline & 33 \\ & 38 \\ \hline & \end{array}$$

Uważam 3 iak 4 a 7 iak 8 i mówię 4 w 8 razy 2.

§ 14. Co do samychże liczb te rozdzielaia się na *porządki*. I tak w liczbie 63452 iest 5 *pierwszego porządku*: to iest zawiera w sobie dziesiątki pierwszego porządku, 4 iest drugiego porządku, 3 trzeciego i t. d. Mogłaby się więc taż liczba i tak wyrazić 60000 więcej 3000 więcej 400 więcej 50 więcej 2, lub kładąc nad cyframi małe cyferki wyrażające iakiego są porządku, lub co na iedno wychodzi, wiele po nich następnie zerow, a zamiast słownego wyrażenia więcej kładąc znaczek + taż sama liczba taką by iestzcze postać miała $6^4 + 3^3 + 4^2 + 5^1 + 2$. Wyrażenie 26^{42} znaczyłoby, że po 26 następnie zerow czterdzieści i dwa, bez których wypisywania tu obejdzie się: i znaczyłoby 26 septillionow.

§ 15 Skrocenia tego z korzyścią użyć można w mnożeniu i dzieleniu. Jeżeli bowiem

przypada rozmnożyć iaką cyfrę wyższego porządku przez pojedynczą cyfrę, będzie o-
czywiście produkt tegoż samego porządku.
I tak

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ \hline 7 \\ 12 \\ \hline 42 \end{array}$$

znaczy 42 porządku 12go lub 4200000000000000
Gdyby 7 także było iakiego porządku na-
przykład 2go, to jest 100 razy było wię-
kszym przez to samo i produkt sto razy
większym stałby się powinien (§7): będzie
więc w produkcie summa obydwóch porzą-
dków. Prostszy sposóbem tak się ta re-
gła wyraża. *Jeżeli w czynnikach znajduią
się na końcu zera; rozmnażają się cyfry iak
zwyczajnie; do produktu zaś tak wynale-
zionego; dopisuje się tyle zerow, ile ich ra-
zem jest w obydwóch czynnikach*

W dzieleniu więc wzajemnie, dzielą się
Cyfry iak zwyczajnie, do wielorazu zaś
dopisuje się tyle zerow, ile ich jest, wię-
cey w podzielney od znajdujących się w
dzielniku.

Przykład dla mnożenia.

$$\begin{array}{r} 260000 \\ 72000 \\ \hline 52 \\ 182 \\ \hline 1872000000 \end{array}$$

dla dzielenia.

$$\begin{array}{r} 72(000) \overline{) 18720000(000} \quad | \quad 260000 \\ \underline{144} \\ 432 \\ \underline{432} \end{array}$$

Jeżeli

Jeżeli więc iak w podzielney tak w dzielniku iednakowa jest liczba zerow opuszczając się zupełnie. Tu przy początku nie trzeba nam ieszcze uważać przypadku, w którym więcej jest zerow w dzielniku iak w podzielney.

§ 16. Mnożenie i dzielenie tę ieszcze mają własność, że w pierwszym iedność tyle razy znajduje się w iednym z czynników, ile razy drugi czynnik w produkcie. W dzieleniu zaś ma się iedność do dzielnika iak wieloraz do podzielney. Ze więc w mnożeniu na iedno wychodzi, który z czynników przez drugi rozmnożemy.

Już z poprzedzających przykładow przekonać się o tym można. Następującym sposobem, w którym zamiast cyfer, innych znakow używam ieszcze iasniey pokazuje się to:

dla mnożenia.

dla dzielenia.

$$\begin{array}{rcl}
 A \text{ **** } B \text{ ****} &) & \text{****} \mid \text{***} \\
 \text{****} & \partial & \text{****} \mid w \\
 C \text{ **** } D & & \text{****} \mid \\
 & & p
 \end{array}$$

Rząd $A C$ znaczący tu mnożącą, znajduje się w produkcie $A B C D$ razy 4; ieden z tych znaczkow znaczący tu iedność, znajduje się w rzędzie $A B$ czyli mnożney także razy 4.

Toż i w dzieleniu iedność znajduje się w wielorakie w razy 3; dzielnik ∂ tyleż razy znajduje się w podzielney p .

Wynika ztąd ta własność dzielenia i mnożenia; Jeżeli iednego z czynników weźmiemy 2, 3, i t. ∂ . razy większym lub mniejszym stanie się i produkt 2, 3, i t. ∂ . razy większym, lub mniejszym. Jeżeli w dzieleniu powiększymy lub zmniejszymy podzieln-

na, powiększy się lub zmniejszy wieloraz takimże sposobem. Przeciwnie zaś w dzielniku. *Ten im większy weźmiemy, tym mniejszym stanie się wieloraz i wzajemnie* Ztąd dalej wynika, że *rozmnożysz iak dzielnika tak podzielna przez iednąż liczbę nieodmieni się wieloraz*

§ 17 Dla skrocenia ile możliwości i samegoż na liczbach działania, i ich własności dochodzenia, zgodzono się na używanie pewnych pojedynczych znaków. Dla czterech poprzedzających działań, są te następujące: $+$ — x : . Pierwszy znaczy dodawanie i wyraża się słownie *więcej*, drugi odciąganie, lub *mniej*, trzeci mnożenie, czwarty dzielenie. I tak

$$6 + 2 \text{ czyni } 8$$

$$6 - 2 \text{ - - - } 4$$

$$6 \times 2 \text{ - - - } 12$$

$$9 : 3 \text{ - - - } 3$$

Dla poznania zaś czy dwie iakie wielkości są równie lub nie, i która z nich w ostatnim razie jest od drugiej większą, służą trzy następujące znaki $= > <$. Pierwszy znaczy *równość*, drugi *większość*, trzeci *mniejszość*: i tak $2 + 3 = 5$

$$5 > 3$$

$$3 < 5$$

znaczy, że 2 dodane do 3 czynią 5, że 5 jest więcej niż 3 a 3 mniej od 5.

§ 18 W dochodzeniu zaś liczb nieznanomych z wiadomych, naywygodniey, naykrociey i nayogulniey wyrażają się te, i ogółem każde wielkości literami z alfabetu. I tak w § 16 nazwaliśmy podzielna *p* dzielnika *d*, wieloraz *w*.

Nazwawszy dwie iakiekolwiek liczby, iedną *a* drugą *b* takby można krótko i ogulnie

wyrazić cztery poprzedzające Arytmetyczne działania

dodawanie $a + b$

odciąganie $a - b$

mnożenie $a \times b$

dzielenie $a : b$

§ 19. W dochodzeniu nieznaomych liczb z danych wiadomych arcy użytecznym i jeszcze jest prawidło dobrze wszystkim znane, ale nie w całej swej obszerności w iakiey się tu bierze; tym jest następujące.

Jeżeli dwie liczby iakożkolwiek będąc wyrażone, są sobie równe: to powiększyszy je lub zmniejszywszy za równo, czy to przez mnożenie lub dzielenie, dodawanie lub odciąganie; zawsze równe zostaną. Za pomocą tey własności doyiść można nieznaomey liczby, która takiemi działaniami ma związek z znanomi. Na to tylko pamiętać w tym trzeba: że dwa przeciwne działania niszczą się wzajemnie.

Jakoż jeżeli n. p. do 2 przydam 3 mam 5, od których odciągnąwszy znowu też same 3 otrzymuję znowu 2 iak gdybym do nich ani dodawał, ani od nich odeymował 3. Także $(2 \times 3) : 3 = 2$. Zamykają się w nawiasie te liczby, z którymi ma się osobne działanie wykonać.

Niechby przypadało doyiść nieznaomey liczby, a w następującym wyrażeniu

$$3 \times 4 \times a = 6 \times 8.$$

Widzę oczywiście, że podzielić mi tylko trzeba a przez 12, żeby się samo zostało, lecz toż samo i na drugiey stronie uczyniwszy otrzymuję

$$a = 48 : 12 = 4.$$

Przytóżowanie poprzedzającej teoryi do praktyki.

§ 20. Teoryi przytóżowaniem są zapytania w poźyciu zdarzające się i w książkach Arytmetyki *Przykładami* nazwane. Raz wiedząc własności liczb i iak dochodzić niewiadomych z danych, złatwością one rozumieć można. Ta tylko w tym zachodzi odmiana, że w nich zawsze iakowys gatunek rzeczy znaczą liczby n. p. Złote, łokcie, korce, i t. d. i dla tego dla różnienia ich od pierwszych nazwanych *oddzielnemi* (numeri abstracti) nazwano je *imiennemi* lub *wielorakiemi*.

Każdy wie, że jeżeli łokieć sukna kosztował 20 Zł: 30 łokci tego sukna kosztować będzie 30 razy więcej, to jest 600 Zł: lub że trzeba rozmnożyć liczbę złotych wyrażających cenę iednego łokcia przez liczbę łokci, co się już wie z poprzedzającego. I wzajemnie gdyby wiadoma była cena iednego łokcia, i cena wszystkich, trzeba by tylko doysć wiele razy pierwsza w drugiej znajduie się, lub podzielić drugą przez pierwszą dla doyscia liczby łokci: iak tu 20 w 600 Zł: znajduie się 30 razy.

Gdyby była wyrażona cena iednego łokcia w Dukatach Złotych i groszach, trzeba by rozmnażać każdy z tych gatunkow przez liczbę łokci, dla doyscia ich ceny. Można by też i wszystkie wyższe gatunki przywieść do najniższego: lecz na ten koniec trzeba wiedzieć *wiele wyższy gatunek zawiera w sobie niższych iedności, i przez tę liczbę rozmnożyć go.*

Gdyby łokieć sukna kosztował 2 dukaty: 3 Zł: gr: 15, wieleżby kosztowało 36 łokci?

2 duk: 3 zł: 15 gr:

$$\begin{array}{r}
 18 \\
 \hline
 36 \text{ zł:} \qquad 1185 \text{ gr:} \\
 3 \qquad \qquad \qquad 36 \\
 \hline
 39 \text{ zł:} \qquad 7110 \\
 30 \qquad \qquad \qquad 3555 \\
 \hline
 15 \text{ Odpowiedź } 42660 \text{ gr:} \\
 1170 \\
 \hline
 1185 \text{ gr:}
 \end{array}$$

I wzajemnie aby wynaleść, wiele niższy gatunek zawiera w sobie wyższych, *trzeba go dzielić przez każdy następujący wyższy: i tak wynalezioną cenę w groszach zamienilibyśmy na wyższy gatunek następującym sposobem.*

$$\begin{array}{r}
 3(0|42660 \text{ gr:} | 18) \ 1422 \text{ zł:} | 79 \text{ dukatow.} \\
 126 \\
 \hline
 162 \\
 162
 \end{array}$$

42660 groszy jest toż samo co 1422 Zł: lub 79 dukatow.

