

K. II. 1130 VII/12

# ALGORYTMY

VOL. VII • No. 12 • 1970



INSTYTUT MASZYN MATEMATYCZNYCH

---

ALGORYTMY  
Vol. VII N<sup>o</sup> 12 1970



Copyright © 1970 - by Instytut Maszyn Matematycznych, Warszawa

Poland

Wszelkie prawa zastrzeżone



K o m i t e t R e d a k c y j n y

Antoni MAZURKIEWICZ (red. nacz.), Krzysztof MOSZYŃSKI, Zdzisław PAWLAK,  
Jan WIERZBOWSKI, Andrzej WIŚNIEWSKI, Ryszard ZIELIŃSKI,  
Witold WUDEL (sekr. red.)

Adres Redakcji: Warszawa, ul. Krzywłokiego 34, tel. 28-37-29



T R E Ś Ć  
С О Д Е Р Ж А Н И Е  
C O N T E N T S

<b>M. Głowacki</b>		
ON REGULAR VAN WIJNGAARDEN'S GRAMMARS . . . . .	5	
O REGULARNYCH GRAMATYKACH VAN WIJNGARDENA		
O РЕГУЛЯРНОЙ ГРАММАТИКЕ ВАН ВЕЙНГАРДЕНА		
<b>J. Małuszyński</b>		
STRUKTURA PODGRAMMATYK GRAMATYKI BEZKONTEKSTOWEJ . . . . .	21	
СТРУКТУРА ПОДГРАММАТИК ГРАММАТИКИ		
НЕПОСРЕДСТВЕННО СОСТАВЛЯЮЩИХ		
THE LATTICE OF CF-GRAMMAR SUBGRAMMARS		
<b>R. Zieliński</b>		
ON CONVERGENCE OF A RANDOMIZED OPTIMIZATION PROCEDURE . . . . .	29	
O ZBIEŻNOŚCI PEWNEJ STOCHASTYCZNEJ PROCEDURY OPTYMIZACJI		
O СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА СЛУЧАЙНОГО		
ПОИСКА		
<b>S. Budkowski</b>		
O PEWNEJ METODZIE GENERACJI WSPÓLRZĘDNYCH PUNKTÓW RÓWNOMIERNIE		
ROZMIESZCZONYCH W KOSTCE N-WYMIAROWEJ . . . . .	33	
O НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ ГЕНЕРИРОВАНИЯ КООРДИНАТ		
ТОЧЕК РАВНОМЕРНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В N-МЕРНОМ КУБЕ		
SOME METHOD OF COORDINATES' GENERATION CONSIDERING POINTS		
EQUALLY SPACED IN THE N-DIMENSIONAL CUBE		



ON REGULAR VAN WIJNGAARDEN'S  
GRAMMARS

by Marek GLOWACKI

Received December 15th, 1969

This paper concerns a certain class of grammars of the formal languages as it was introduced by Van Wijngaarden (1968) for the syntax description of algorithmic language ALGOL 68. A certain subset of this class, named the class of regular Van Wijngaarden's grammars, is considered. It is proved that the class of languages generated by regular Van Wijngaarden's grammars coincides with the class of context sensitive languages.

TABLE OF NOTATION

$N$	denotes the set of integers, including zero
$ A $	denotes the number of elements in a finite set $A$
$A^*$	denotes the set of all words over an alphabet $A$ , including the empty word denoted by $\epsilon$ .
$A^+ = A^* - \{\epsilon\}$ .	
$l(w)$	denotes the length of a word $w$
$\text{Sub}(v, x \rightarrow w)$	denotes the word obtained from a word $v$ by replacing all occurrences of the letter $x$ by the word $w$



## 1. INTRODUCTORY CONCEPTS

We shall use the concept of a context sensitive and context free languages in the sense given by Ginsburg (1966a).

DEFINITION 1. A linear bounded automaton (abbreviated lba) is a 5-tuple  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ , where

- (i)  $Q$  is a finite, nonempty set (of states),
- (ii)  $T$  is a finite, nonempty set (of inputs), where  $Q \cap T = \emptyset$
- (iii)  $\delta$  is a mapping of  $Q \times T$  into the subsets of  $Q \times T \times \{-1, 1, 0\}$ ,
- (iv)  $q_0$  is an element of  $Q$  (the start symbol),
- (v)  $F \subseteq Q$  (the set of final states).

The formalism involved in describing the movement of an lba is now given.

DEFINITION 2. A configuration of the lba  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  is a word in  $T^*QT^*$ . Let  $\vdash_A^*$  /or  $\vdash_A^*$  when  $A$  is understood/ be a transitive closure of binary relation  $\vdash$  defined on  $T^*QT^*$  as follows. For  $u, v$  arbitrary elements of  $T^*$  and  $c$  in  $T$ , write

- (i)  $ucpav \vdash uqcbv$  if  $\delta(p, a)$  contains  $(q, b, -1)$ ,
- (ii)  $upav \vdash uqbv$  if  $\delta(p, a)$  contains  $(q, b, 0)$ ,
- (iii)  $upav \vdash ubqv$  if  $\delta(p, a)$  contains  $(q, b, 1)$ .

This definition and its interpretation were given by Ginsburg (1966b).

A word  $w \in T^+$  is accepted by an lba  $A$  if for some  $u \in T^+$  and  $p \in F$  we have  $q_0 w \vdash_A^* up$ . The set of words accepted by  $A$  is denoted by  $T(A)$ .

A set  $X$  is a context sensitive language if and only if there is an lba  $A$  such that  $T(A) = X$  (Ginsburg's theorem, 1966b).

## 2. VAN WIJNGAARDEN'S GRAMMARS

The definition given below somewhat differs from the original Van Wijngaarden's one. The formalism involved is similar to the well-known Backus notation.

DEFINITION 3. A Van Wijngaarden's grammar (abbreviated v-grammar) is a 7-tuple  $G = (M, V, T, B, R_M, R_L, \sigma)$ , where

- (i)  $M$  is a finite set (of metanotions),
- (ii)  $V$  is a finite, nonempty set (the alphabet of notions),
- (iii)  $T$  is a finite, nonempty set (of terminal letters),
- (iv)  $B$  contains two different elements (notion boundary markers). In this paper we always assume that  $B = \{ \langle, \rangle \}$ ,
- (v)  $M, V, T$  and  $B$  are pairwise disjoint,
- (vi)  $R_M$  is a finite subset of  $M \times (V \cup M)^*$ . Each element  $(m, p)$  of  $R_M$  is called a production of metalanguage and is written  $m \rightarrow p$ .

Before defining the remaining elements of  $G$  we introduce the following terms: each element of  $PN = \{ x : x = \langle y \rangle, \text{ with } y \in (M \cup V)^+ \}$  is called a protonotion of  $G$  and each element of  $N = \{ x : x = \langle y \rangle \text{ with } y \in V^+ \}$  is called a notion of  $G$ . Each element of  $(PN \cup T)^*$  or  $(N \cup T)^*$  is called a list of protonotion or list of notions respectively.

- (vii)  $R_L$  is a finite, nonempty set of pairs  $(p, l)$ ,  $p$  in  $PN$  and  $l$  in  $(PN \cup V)^*$ . Each element  $(p, l)$  of  $R_L$  is called production of language and is usually written  $p:l$ .
- (viii)  $\sigma$  is an element of  $N$ .

For each v-grammar  $G$  let  $\{G_m\}_{m \in M}$  be a family of context free grammars, where  $G_m = (M \cup V, V, R_L, m)$ .

DEFINITION 4. a) A production  $r:k$  is said to be an extension of production  $p:l$  provided  $p:l = r:k$  or  $r:k = \text{Sub}(p:l, m \rightarrow v)$  for some metanotion  $m$  and some  $v$  in  $L(G_m)$ .



b) A protonotion  $r$  is said to be an extension of protonotion  $p$  if a production  $r:\epsilon$  is an extension of  $p:\epsilon$ .

DEFINITION 5. A production  $p:l$  is the terminal production of the grammar  $G$  if there exist productions  $p_1:l_1, \dots, p_k:l_k = p:l$  such that (i)  $p_1:l_1$  is in  $R_L$ ; and (ii)  $p_{i+1}:l_{i+1}$  is an extension of  $p_i:l_i$  for each  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . The set of all terminal productions of grammar  $G$  is denoted by  $P_G$ .

DEFINITION 6. The set of protonotions generated in  $G$  by protonotion  $p$  is the least set  $PN(p)$  such that: (i)  $p$  is in  $PN(p)$ ; (ii) if  $r$  is in  $PN(p)$ , then any extension of  $r$  is in  $PN(p)$ . Instead, the set of notions generated in  $G$  by protonotion  $p$  is the set  $N(p) = PN(p) \cap N$ .

Remark that the sets  $P_G, PN(p), N(p)$  are recursive because they are generated from some initial words by substitution of a number (less than IMI) of words belonging to some context-free languages. For each context free grammar, it is recursively solvable whether the language generated by this grammar is finite or not. Hence, it is recursively solvable whether sets  $P_G, PN(p), N(p)$  are finite or not for each protonotion  $p$ .

DEFINITION 7. For given  $v$ -grammar  $G$  let  $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$  (or  $\overset{*}{\Rightarrow}$  when  $G$  is understood) be a transitive closure of binary relation  $\Rightarrow$  defined on  $(N \cup T)^*$  as follows. For  $l, k$  in  $(N \cup T)^*$ ,  $k \overset{*}{\Rightarrow} l$  if there exist  $k_1, k_2, k_3$  in  $(N \cup T)^*$  such that

$$(i) \quad l = k_1 k_2 k_3,$$

$$(ii) \quad k = k_1 p k_3,$$

(iii)  $p:k_2$  is a terminal production of  $G$  (is in  $P_G$ ).

DEFINITION 8. If  $G$  is a  $v$ -grammar, then the subset of  $T^* L(G) = \{x \in T^* : \emptyset \overset{*}{\Rightarrow} x\}$  is called a language generated by  $G$ .

LEMMA 1. For each  $v$ -grammar  $G$  there exists a  $v$ -grammar  $H$  such that  $L(G) = L(H)$  and  $\epsilon$  is not in  $L(H_m)$  for each meta-notion  $m$  of  $H$ .

**P r o o f:** Let  $G = (M, V, T, B, R_M, R_L, \sigma)$  be a  $v$ -grammar. Since  $G_m$  is context free for each  $m$  in  $M$ , it is recursively solvable whether  $\epsilon$  is in  $L(G_m)$  or not (Ginsburg, 1966a). Furthermore (Bar-Hillel, 1964) we can effectively construct a set  $R'_M$  such that for each  $G'_M = (M \cup V, V, R'_M, m)$  ( $m$  in  $M$ ) we have  $L(G'_M) = L(G_m) - \epsilon$ .

Let  $H = (M, V, T, B, R'_M, R'_L, \sigma)$ , where  $R'_L$  is the least set such that (i)  $R'_L$  includes  $R_L$ , (ii) if  $p:l$  is in  $R'_L$  and  $m$  is a metanotion such that  $\epsilon$  is in  $L(G_m)$ , then  $r:k = \text{Sub}(p:l, m \rightarrow \epsilon)$  is in  $R'_L$  provided  $r$  is in  $PN$  and  $k$  is in  $(PN \cup T)^*$ .

For given sets  $M$  and  $R_L$  the construction of  $R'_L$  is effective.

Note that each production in  $R'_L$  is in  $R_L$  or it can be received from some production belonging to  $R_L$  by using number substitution of the form  $m \rightarrow \epsilon$ . Thus,  $P_G$  includes  $P_H$ . The reverse inclusion is obvious, from which  $L(G) = L(H)$  and the lemma holds.

**LEMMA 2.** For each  $v$ -grammar  $G$  there exists a  $v$ -grammar  $H$  such that  $L(G) = L(H)$  and for each metanotion  $m$  of  $H$  the language  $L(H_m)$  is infinite.

**P r o o f:** Let  $G = (M, V, T, B, R_M, R_L, \sigma)$  be a  $v$ -grammar. For each grammar  $G_m$  ( $m$  in  $M$ ) it is effectively solvable whether  $L(G_m)$  is finite or not. Hence, we can effectively construct sets:

$$F = \{m \in M : L(G_m) \text{ is finite}\} = \{m_1, \dots, m_n\}$$

$$L_1 = L(G_{m_1}) \text{ for } i = 1, \dots, n$$

and the sequence  $R_0, \dots, R_n$  defined as follows: let  $R_0 = R_L$  and for  $i = 1, \dots, n$  let  $R_i = \{\text{Sub}(p:l, m_i \rightarrow w) : w \in L_i \text{ and } p:l \in R_{i-1}\}$ . In (Ginsburg, 1966a) is proved (lemma 1.4.7) that it is effective to construct the set of production  $R'_M$  such that for each  $G'_M = (M \cup V - F, V, R'_M, m)$  and for each  $m$  in  $M - F$  holds  $L(G_m) = L^m(G'_M)$ .



Let  $H = (M - F, V, T, B, R'_M, R_n, \sigma)$ . Then, for each meta-  
 notion  $m$  of  $H$ ,  $L(H_m)$  is infinite. It is easy to see that  
 $P_G = P_H$  because the construction of  $R_n$  consists of number  
 substitutions which generate the set of terminal productions  
 of  $G$ . Then  $L(H) = L(G)$ .

### 3. REGULAR VAN WIJNGAARDEN'S GRAMMARS

It is known (Sintzoff, 1967) that, in general, the lan-  
 guage generated by a Van Wijngaarden's grammar may not be re-  
 cursive.

To individuate nontrivial class of  $v$ -grammars generating  
 recursive languages a notion of a regular grammar is intro-  
 duced. The class of regular  $v$ -grammars is somehow analogous to  
 the class  $\omega$ -regular grammars introduced by Mazurkiewicz (1969).

For  $v$ -grammar  $G = (M, V, T, B, R'_M, R'_L, \sigma)$  let  $D$  and  $L$  be  
 mappings defined as follows.

$$\begin{aligned}
 D &: (M \cup V \cup T \cup B)^* \rightarrow \mathcal{N} \\
 D(s) &= l(s) \quad \text{for } s \in (M \cup V \cup T)^*, \\
 D(b) &= D(\epsilon) = 0 \quad \text{for } b \in B, \\
 D(uv) &= D(u) + D(v) \text{ for } u, v, \in (M \cup V \cup T \cup B)^*. \\
 L &: (FN \cup T)^* \rightarrow \mathcal{N} \\
 L(\epsilon) &= 0 \\
 L(x) &= 1 \quad \text{for } x \in FN \cup T, \\
 L(uv) &= L(u) + L(v) \text{ for } u, v \in (FN \cup T)^*
 \end{aligned}$$

DEFINITION 9. A  $v$ -grammar  $G$  is said to be regular

- (i) if  $m \rightarrow v$  is in  $R'_M$ , then  $v \neq \epsilon$ ,
- (ii) if  $p:l$  is in  $R'_L$ , then  $l \neq \epsilon$ ,
- (iii) for each production  $p:l$  in  $R'_L$  and  $m$  in  $M$ , if  $L(G_m)$   
 is infinite, then  $m$  occurs in  $l$  at least as  
 many times as in  $p$ ,



- (iv) for each production  $p:r$  in  $R_L$ , if  $r$  is in  $PN \cup T$  and  $N(p)$  is infinite, then  $D(p) \leq D(r)$ .

According to the note following definition 7, for each v-grammar  $G$  effectively solvable whether (i), ..., (iv) holds or not.

LEMMA 3. For each v-grammar  $G = (M, V, T, B, R_M, R_L, \sigma)$  there exists a regular v-grammar  $H = (M', V, T, B, R'_M, R'_L, \sigma)$  such that

- (1)  $P_H = P_G$ ,
- (2) if  $m \rightarrow w$  is in  $R'_M$  then  $w \neq \epsilon$ ,
- (3) if  $p:l$  is in  $R'_L$  then  $l \neq \epsilon$ ,
- (4) for each production  $p:l$  in  $R'_L$  every metanotion which occurs in  $p$  also occurs, at least as many times as in  $l$ ,
- (5) for each production  $p:r$  in  $R'_L$  such that  $r \in PN \cup T$ ,  $p$  is a notion or  $D(p) \leq D(r)$ .

*P r o o f*: It immediately arises from Lemma 1. We construct  $H$  by elimination of metanotion which generate finite sets and by number extensions of production to perform /5/.

Let  $H = (M', V, T, B, R'_M, R'_L, \sigma)$  be a v-grammar such that (2), ..., (5) hold and let  $a_H, s_H$  be numbers defining by equations:

$$a_H = \max \{ D(p) + D(l) \mid p:l \text{ is in } R'_L \}$$

$$s_H = \max \{ D(p) : p:r \text{ in } R'_L \text{ and } p, r \text{ in } N \}$$

by definition  $a_H, s_H$  we have

- (6) if  $s:l$  is in  $R'_L$ , then  $D(s) \leq D(l) + a_H$
- (7) for  $p, r$  in  $PN \cup T$ , if  $p:r$  is in  $R'_L$ , then
 
$$D(p) \leq \max \{ s_H, D(r) \}$$

Remark, if conditions (6), (7) respectively hold for  $s:l \in R'_L$  and  $p:r \in R'_L$  then for each nonempty  $v$  in  $V^*$  and  $m$  in  $M'$  we have

$$D(\text{Sub}(s, m \rightarrow v)) \leq D(\text{Sub}(l, m \rightarrow v)) + a_H$$

$$D(\text{Sub}(p, m \rightarrow v)) \leq D(\text{Sub}(r, m \rightarrow v))$$

It implies the following lemma

LEMMA 4. If H is v-grammar such that (2), ..., (5) hold, then for each terminal production  $s:l$  in  $P_H$ ,  $D(s) \leq D(l) + a_H$  and for each production  $p:r$  in  $P_H$  such that  $r$  is a single notion ( $r$  in  $N \cup T$ ) we have

$$D(p) \leq \max \{s_H, D(r)\}$$

LEMMA 5. For each regular v-grammar G there exist numbers  $a_G, s_G$  such that

$$(8) \text{ if } l \Rightarrow k \text{ and } L(l) < L(k), \text{ then } D(l) \leq D(k) + a_G$$

$$(9) \text{ if } l \stackrel{*}{\Rightarrow} k \text{ and } L(l) = L(k), \text{ then } D(l) \leq \max \{s_G, D(k)\}$$

P r o o f: Let H be a grammar defined in proof of Lemma 3 and let  $a_G = a_H$ ,  $s_G = s_H$ . Since  $P_H = P_G$ , we obtain (7) and (8) from Lemma 6 and Definition 8.

LEMMA 6. For each regular v-grammar G there exist numbers  $a_G, s_G$  such that

$$(10) \text{ if } l \stackrel{*}{\Rightarrow} k, \text{ then } D(l) \leq L(k) a_G + \max \{s_G, D(k)\}$$

P r o o f: Let G be a regular v-grammar. If  $l \stackrel{*}{\Rightarrow} k$ , then by definition 8 there exists a sequence  $l_0, k_0, l_1, k_1, \dots, l_n, k_n$  ( $0 \leq n \leq L(k)$ ) with the following properties:

$$l_0 = l$$

$$l_i \stackrel{*}{\Rightarrow} k_i \quad \text{and } L(l_i) = L(k_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$k_i \Rightarrow l_{i+1} \quad \text{and } L(k_i) \leq L(l_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$k_n = k$$

From Lemma 5 there exist numbers  $a_G, s_G$  such that



$$\begin{aligned} D(l_i) &\leq \max \{s_G, D(k_i)\}, & i = 0, 1, \dots, n \\ D(k_i) &\leq D(l_{i+1}) + a_G, & i = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Collecting these inequalities together we obtain

$$D(l) \leq a_G \cdot n + \max \{s_G, D(k_i)\} \leq L(k) a_G + \max \{s_G, D(k)\}$$

**THEOREM 1.** For each regular  $v$ -grammar  $G$  there exists number  $b_G$  such that  $x$  is in  $L(G)$  if and only if  $x$  is generated by using productions belonging to set

$$P_G(x) = \{p : l \in P_G : D(p) \leq b_G l(x) \text{ and } D(l) \leq b_G l(x)\}$$

**P r o o f:** Let  $G$  be a regular  $v$ -grammar and let  $x$  be in  $L(G)$ . From Lemma 6 there exist numbers  $a_G, s_G$  such that in derivation  $\sigma \Rightarrow x$  we use only those productions  $p : l \in P_G$  which perform

$$D(p) \leq L(x) a_G + \max \{s_G, D(x)\} \text{ and } D(l) \leq L(x) a_G + \max \{s_G, D(x)\}$$

Since  $x$  is in  $T^*$ , then  $L(x) = D(x) = l(x)$  and we have:

$$D(p) \leq L(x) a_G + \max \{s_G, l(x)\} \leq (a_G + 1) l(x) + s_G (a_G + s_G + 1) l(x)$$

$$D(l) \leq (a_G + s_G + 1) l(x)$$

It may be that  $v$ -grammar is not regular because the condition (i) is not satisfied but, instead, the following one holds:

- (v) for each metanotion  $m$  such that  $\epsilon$  is in  $L(G)$  and for each production  $p:r$  in  $P_L$  such that  $r$  is in  $PN \cup T$ ,  $m$  occurs in  $r$  exactly as many times as in  $p$ .

For such a grammar, there exists a regular one which generates the same language. We construct it by using the method given in the proof of Lemma 1. Below, grammars performing (ii), ..., (v) will be also called regular. The grammar being regular in this sense is the one considered in the proof of the next theorem.



## 4. REGULAR v-GRAMMARS AND CONTEXT SENSITIVE GRAMMARS

**THEOREM 2.** For each linear bounded automaton  $A$  there exists the regular v-grammar  $G$  such that  $T(A) = L(G)$ .

**P r o o f:** Let  $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$  be an lba. Let  $\sigma$  be a new symbol. For each element  $a$  in  $T$ , let  $\bar{a}$  be an abstract symbol and let  $T' = \{\bar{a} : a \in T\}$ . Let  $G = (M, Q, \cup T' \cup \{\sigma\}, T', \{<, >\}, R_M, R_L, <\sigma>)$ , where  $M = \{\text{WORD1}, \text{WORD2}, \text{LETTER}\}$ ,  $R_M$  contains the following productions:

LETTER  $\rightarrow \bar{a}$  for each  $\bar{a}$  in  $T'$   
 WORD1  $\rightarrow$  LETTER WORD1  
 WORD1  $\rightarrow$  LETTER  
 WORD1  $\rightarrow \epsilon$   
 WORD2  $\rightarrow$  WORD1

and for  $p, q$  in  $Q$ ,  $s, z$  in  $T$ ,

- /1/ for each  $p$  in  $F$ ,  $R_L$  contains  $<\sigma> : <\text{WORD1 } p>$   
 /2/ if  $(q, s, 1)$  is in  $\delta(p, z)$ , then  $R_L$  contains  
 $<\text{WORD1 } \bar{s} q \text{ WORD2}> : <\text{WORD1 } p \bar{z} \text{ WORD2}>$   
 if  $(q, s, -1)$  is in  $\delta(p, z)$ , then  $R_L$  contains  
 $<\text{WORD1 } q \text{ LETTER } \bar{s} \text{ WORD2}> : <\text{WORD1 LETTER } p \bar{z} \text{ WORD2}>$   
 if  $(q, s, 0)$  is in  $\delta(p, z)$ , then  $R_L$  contains  
 $<\text{WORD1 } q \bar{s} \text{ WORD2}> : <\text{WORD1 } p \bar{z} \text{ WORD2}>$   
 /3/ moreover,  $R_L$  contains the following productions:  
 $<q_0 \text{ WORD2}> : <\sigma \text{ WORD2}>$   
 $<\sigma \bar{s} \text{ WORD2}> : s <\sigma \text{ WORD2}>$ , for each  $s$  in  $T$   
 $<\sigma \bar{s}> : s$ , for each  $s$  in  $T$ .

For an arbitrary word  $x$ , let  $\bar{x}$  be the word obtained from  $x$  by replacing the occurrence of any  $a \in T$  by symbol  $\bar{a}$ . The set of terminal productions, obtained from productions given by /3/, contains productions which allow for doing a derivation  $<q_0 \bar{x}> \Rightarrow <\sigma \bar{x}> \xRightarrow{*} x$  (for  $x$  in  $T^*$ ).

Remark that if we have a notion of the form  $<q_0 \bar{x}>$  and relation  $<q_0 \bar{x}> \Rightarrow a$  holds, then  $a = <\sigma \bar{x}>$  or  $a = <\delta>$ , where  $\sigma \vdash_A q_0 x$ .

In the first case, there exists just one derivation  $\langle \sigma \bar{x} \rangle \xRightarrow{*} x$ , in the second case, to derivate  $\langle \bar{c} \rangle$  we must use a terminal production obtained from a production given by (2). Hence,  $x$  is in  $L(G)$  if and only if  $\langle \sigma \rangle \xRightarrow{*} \langle q_0 \bar{x} \rangle$ . Productions given by (1) are used only once in each derivation, so that each derivation is of the form:  $\langle \sigma \rangle \Rightarrow \langle \bar{y} p \rangle \xRightarrow{*} \langle q_0 \bar{x} \rangle \xRightarrow{*} x$ . Therefore we have:  $x$  is in  $L(G)$  if and only if there exist  $y$  in  $T^*$  and  $p$  in  $F$  such that  $\langle \bar{y} p \rangle \xRightarrow{*} \langle q_0 \bar{x} \rangle$ . In this derivation we use only terminal productions obtained by extension of productions defined in (2). Remark that if  $\langle \bar{c}_1 \rangle : \langle \bar{c}_2 \rangle$  is such production, then  $c_2 \mid_A c_1$  and inversely. Hence,  $\langle \bar{y} p \rangle \xRightarrow{*} \langle q_0 \bar{x} \rangle$  if and only if  $q_0 x \mid_A^* yp$ . Therefore,  $x$  is in  $L(G)$  if and only if  $x$  is in  $T(A)$ . It is easy to verify that  $G$  satisfies (ii)-(v) so that Theorem 2 holds.

**THEOREM 3.** For each regular  $v$ -grammar  $G$  the language  $L(G)$  is context sensitive.

**P r o o f:** It is known (Kuroda, 1964) that language  $X$  is context sensitive if and only if there exists an lba  $A = (Q, \Sigma \cup \{\#\}, \delta, q_0, F)$  with the following properties:

- (1)  $X \subseteq \Sigma^*$
- (2)  $\#$  is not in  $\Sigma$ .
- (3) If  $\delta(p, \#)$  contains  $(q, b, n)$ , then  $b = \#$
- (4)  $T(A) = \# X \#$ .

To prove the theorem it suffices to construct an lba  $A$  satisfying (1)-(4), for  $X = L(G)$ .

Let  $G = (M, V, T, \{\langle, \rangle\}, R_M, R_L, \sigma)$  be a regular  $v$ -grammar and let  $x$  be in  $L(G)$ . Then there exists a sequence  $x_0 = \sigma, x_1, \dots, x_n = x$  such that  $x_i \Rightarrow x_{i+1}$  by using production  $p_i : l_i$  in  $P_G$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ). By Theorem 1 there is an integer  $b_G$  such that for arbitrary  $x$  in  $L(G)$  we have:

$$D(x_i) \leq b_G l(x), \quad D(p_i) \leq b_G l(x), \quad D(l_i) \leq b_G l(x).$$



If protonotions of  $G$  are regarded as words in alphabet including sets  $M$ ,  $V$ ,  $T$  and  $\{<, >\}$ , we have:

$$(5) l(x_1) \leq 3 b_G l(x), l(p_1) \leq 3 b_G l(x), l(l_1) \leq 3 b_G l(x).$$

Hence, during a derivation of  $x$  in  $G$ , we operate on words satisfying (5). Now we construct an lba  $A$  performing  $T(A) = L(G)$ .

Let alphabet  $\Sigma$  of  $A$  include set  $T$  and contain auxiliary symbols of the form:

$$\begin{bmatrix} s \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

where  $s$  is in  $T$  and  $w_1, \dots, w_n$  are arbitrary words in  $\Sigma^*$  not longer than  $3 \cdot b_G$ , ( $n = |M| + 3$ ).

Let  $x = s_1 \dots s_m$  be the initial word on the tape of  $A$ . At first, if  $x$  is in  $T^*$  the automaton transforms its configuration from  $q_0 \# x \#$  to:

$$\# q_1 \begin{bmatrix} s_1 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} s_m \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \end{bmatrix} \#$$

This transformation may be done by lba by using some number of auxiliary symbols and states. From this time onward there will be auxiliary symbols on the tape of  $A$ . Therefore, each configuration will be of the form:

$$\# \begin{bmatrix} s_1 \\ w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{bmatrix} \dots q \begin{bmatrix} s_1 \\ w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} s_m \\ w_{1m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{bmatrix} \#$$



Let  $X = x = s_1 \dots s_m$ ,  $R_j = w_{j1} \dots w_{jm}$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Lba A can be regarded as a machine transforming words  $X, R_1, \dots, R_n$  in  $\Sigma^*$ .

After the above initial movements we have:

$$(6) X = x, R_1 = \sigma, R_2 = R_3 = \dots = R_n = \epsilon$$

Now we give a flow diagram (Fig. 1) for the machine which operates on words  $X, R_1, \dots, R_n$  satisfying (6) on start.

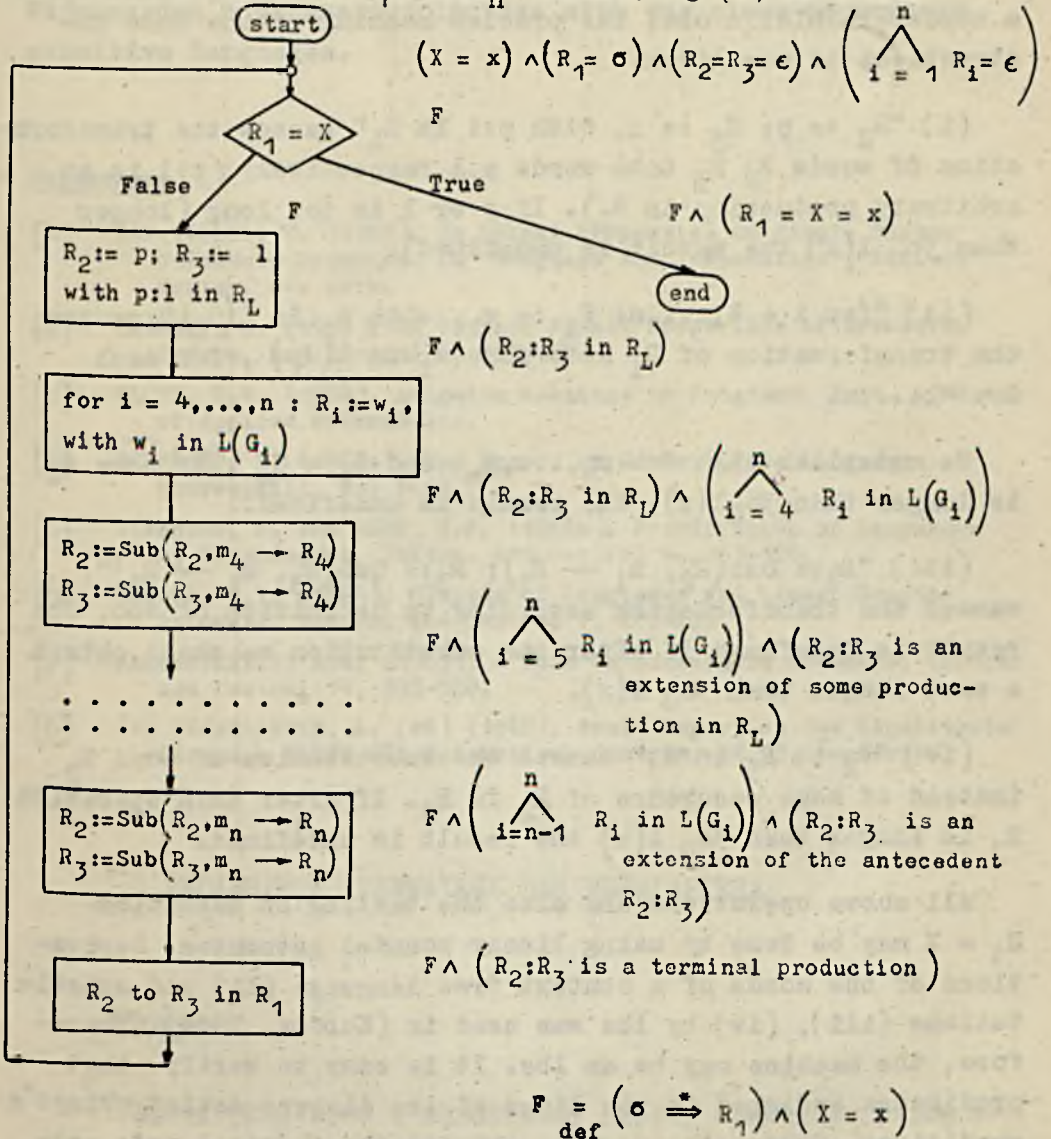


Fig. 1

To substantiate this construction we use Floyd's method (Floyd, 1968). According to this, to each line of the flow diagram there is assigned a predicate. If this assignment satisfies the conditions given by Floyd, the machine attains the terminal mode only if the relation given by the terminal line predicate holds.

The machine described by the diagram should be regarded as a nondeterministic one. The precise meaning of the node instructions is now given.

(i) " $R_2 := p; R_3 := l$ , with  $p:l$  in  $R_L$ " causes the transformation of words  $R_2 R_3$  into words  $p,l$  respectively ( $p:l$  is an arbitrary production in  $R_L$ ). If  $p$  or  $l$  is too long (longer than  $\exists b_G l(x)$  the result is undefined).

(ii) "for  $i = 4, \dots, n: R_1 := w_i$ , with  $w_i$  in  $L(G_1)$ " causes the transformation of  $R_1$  into some  $w_i$  in  $L(G_1)$ , for each  $i = 4, \dots, n$ .

We establish that  $M = m_4, \dots, m_n$  and  $G_1 = G_{m_1}$ . If some  $w_i$  is longer than  $\exists b_G l(x)$ , the result is undefined.

(iii) " $R_2 := \text{Sub}(R_2, m_1 \rightarrow R_1); R_3 := \text{Sub}(R_3, m_1 \rightarrow R_1)$ " causes the transformation according to definition of Sub. The result is undefined if after the substitution we shall obtain a word longer than  $\exists b_G l(x)$ .

(iv) " $R_2$  to  $R_3$  in  $R_1$ " causes the substitution of word  $R_3$  instead of some occurrence of  $R_2$  in  $R_1$ . If after this operation  $R_1$  is longer than  $\exists b_G l(x)$  the result is undefined.

All above operations and also the testing of condition  $R_1 = X$  may be done by using linear bounded automaton. Derivations of the words of a context free language (ii) and substitutions (iii), (iv) by lba was used in (Kuroda, 1964). Therefore, the machine may be an lba. It is easy to verify that predicates assigned to the lines of the diagram satisfy Floyd's conditions. Hence, the machine obtains the terminal node only



if  $(\sigma \xrightarrow{*} R_1) \cap (R_1 = X = x)$  holds, i.e. only if  $x$  is in  $L(G)$ . On the other hand, if  $x$  is in  $L(G)$ , then the machine simulating a derivation of  $x$  also attains the terminal node. Hence,  $L(G)$  is machine accepted and the theorem holds.

From Theorems 2 and 3 we have the following result:

**THEOREM 4.** The class of languages generated by regular Van Wijngaarden's grammars coincides with the class of context sensitive languages.

### References

- [1] BAR-HILLEL, Y. (1961), On Formal Properties of Simple Phrase Structure Grammars. In "Language and Information", Addison Wesley, New York.
- [2] CHOMSKY, N. (1959), On Certain Formal Properties of Grammars. Inform. and Control 2, 137-167.
- [3] FLOYD, R.W. (1968), Assigning Meanings to Programs. Proc. of Symp. of Applied Mathematics.
- [4] GINSBURG, S. (1966a), The Theory of Context Free Languages. McGraw-Hill, New York.
- [5] GINSBURG, S. and ROSE, G.F. (1966b), Preservation of Languages by Transducers. Inform. and Control 9, 153-176.
- [6] KURODA, S.Y. (1964), Classes of Languages and Linear-Bounded Automata. Inform. and Control 7, 207-223.
- [7] MAZURKIEWICZ, A.W. (1969), A Note on Enumerable Grammars. Inform. and Control 14, 555-558.
- [8] VAN WIJNGAARDEN, A. (ed) (1968), Draft Report on the Algorithmic Language ALGOL 68. Mathematisch Centrum, MR 93, Amsterdam.

О РЕГУЛЯРНОЙ ГРАММАТИКЕ ВАН ВЕЙНГАРДЕНА

### Резюме

Работа относится к некоторому классу грамматики формализованных языков согласно Ван Вейнгардену (1968) для описа-



ния синтаксиса алгоритмического языка АЛГОЛ 68. Рассматривается подсхема этого класса, так называемый класс регулярной грамматики Ван Биингардена. Доказано, что класс языков создаваемых регулярными граматиками Ван Биингардена совпадает с классом языков чувствительных к содержанию.

STRUKTURA PODGRAMATYK GRAMATYKI  
BEZKONTEKSTOWEJ

Jan MALUSZYŃSKI

Pracę złożono 12.3.1969

Praca zawiera definicję podgramatyki gramatyki bezkontekstowej. Na zbiorze wszystkich podgramatyk gramatyki bezkontekstowej definiuje się działania sumy i iloczynu. Uzyskuje się w ten sposób algebrę, która jest strukturą.

1. WSTĘP

W pracy [4] zostało wprowadzone dla celów praktycznych pojęcie podgramatyki gramatyki bezkontekstowej. Obecnie rozszerzymy nieco definicję podgramatyki i na zbiorze wszystkich podgramatyk dowolnej gramatyki bezkontekstowej określimy dwuargumentowe działania sumy i iloczynu. Wykażemy, że otrzymana w ten sposób algebra jest strukturą.

2. PODGRAMATYKI GRAMATYKI BEZKONTEKSTOWEJ

Słowem  $\alpha$  nad alfabetem  $V$  nazywamy dowolny skończony ciąg symboli, z których każdy należy do skończonego zbioru  $V$ . Zbiór wszystkich słów nad alfabetem  $V$  oznaczamy  $V^*$ .

Definicja 1

Gramatyką bezkontekstową  $G$  nazywamy czwórkę  $G = (V, T, P, B)$ , przy czym:

$V$  jest alfabetem gramatyki,  
 $T \subseteq V$  nazywa się alfabetem terminalnym,  
 $P \subseteq (V-T) \times V^*$  jest skończonym zbiorem produkcji,  
 $B \subseteq (V-T)$  nazywa się bazą.

Zapis  $u \rightarrow \xi$  oznacza, że  $(u, \xi) \in P$ ;  $u$  nazywa się lewą stroną produkcji,  $\xi$  prawą stroną produkcji. Można wykazać [5], że definicja 1 jest równoważna (w sensie klasy generowanych języków) ogólnie przyjętej [1] definicji gramatyki bezkontekstowej, według której baza gramatyki jest zawsze zbiorem co najwyżej jednoelementowym. Zauważmy, że definicja 1 obejmuje przypadek gramatyki bezkontekstowej o pustym alfabcie, którą będziemy oznaczali  $G \stackrel{df}{=} (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$  i nazywali gramatyką pustą.

Następnikiem dowolnego elementu  $a \in V$  w gramatyce  $G = (V, T, P, B)$  nazywamy każdy taki element  $b \in V$ , że istnieje produkcja postaci  $a \rightarrow \omega b v$ ,  $\omega, v \in V^*$ .

### Definicja 2

Domkniętym podalfabetem gramatyki bezkontekstowej  $G = (V, T, P, B)$  nazywamy taki podzbiór alfabetu  $V$ , do którego wraz z każdym elementem należą wszystkie następniki tego elementu w gramatyce  $G$ .

W szczególności zbiór pusty oraz każdy podzbiór alfabetu terminalnego dowolnej gramatyki bezkontekstowej jest domkniętym podalfabetem tej gramatyki.

### Lemat 1

Suma  $Z$  domkniętych podalfabetów  $X$  i  $Y$  gramatyki bezkontekstowej  $G$  jest domkniętym podalfabetem tej gramatyki.

Dowód. Przypuśćmy, że lemat 1 jest fałszywy. Istnieje wówczas element  $b \in (V-Z)$ , który jest następnikiem w gramatyce  $G$  elementu  $a \in Z = X \cup Y$ . W przypadku gdy  $a \in X$ ,  $X$  wbrew założeniu nie jest domkniętym podalfabetem gramatyki  $G$ . W przypad-



ku, gdy  $a \in Y$  otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że  $Y$  jest domkniętym podalfabetem gramatyki  $G$ . obdo.

### Lemat 2.

Iloczyn  $Z$  domkniętych podalfabetów  $X$  i  $Y$  gramatyki bezkontekstowej  $G$  jest domkniętym podalfabetem tej gramatyki.

Dowód. Przypuśćmy, że lemat 2 jest fałszywy. Istnieje wówczas element  $b \in (V-Z)$ , który jest następnikiem w gramatyce  $G$  elementu  $b \in Z = X \cap Y$ . Wynika stąd wbrew założeniu, że zarówno  $X$  jak i  $Y$  nie są domkniętymi podalfabetami gramatyki  $G$ . Wobec tego lemat jest prawdziwy. obdo.

### Definicja 3

Podgramatyką gramatyki bezkontekstowej  $G = (V, T, P, B)$  nazywamy gramatykę bezkontekstową  $H = (V_H, T_H, P_H, B_H)$ , o następujących własnościach:

$V_H$  jest domkniętym podalfabetem gramatyki  $G$ ,

$$T_H = T \cap V_H,$$

$$P_H = \{ (u, \xi) \in P \mid u \in V_H \},$$

$$B_H = (B \cap V_H) \cup \left\{ a \in V_H \mid \begin{array}{l} \exists a \in \xi \\ (u, \xi) \in P - P_H \end{array} \right\}$$

Z definicji 3 wynika następujący ważny wniosek:

### Wniosek 1

Każdy domknięty podalfabet dowolnej gramatyki bezkontekstowej wyznacza jednoznacznie pewną podgramatykę tej gramatyki.

## 3. ALGEBRA PODGRAMATYK

Dana jest gramatyka bezkontekstowa  $G = (V, T, P, B)$ . Oznaczmy przez  $S(G)$  zbiór wszystkich podgramatyk gramatyki  $G$ . Zbiór ten jest oczywiście niepusty i skończony.

Definicja 4

Jeżeli  $F = (V_F, T_F, P_F, B_F) \in S(G)$  oraz  $H = (V_H, T_H, P_H, B_H) \in S(G)$  to podgramatykę  $K = (V_K, T_K, P_K, B_K) \in S(G)$  taką, że  $V_K = V_F \cup V_H$  nazywamy sumą podgramatyk  $F$  i  $H$  i zapisujemy to w następujący sposób:  $K = F \Upsilon H$ , a podgramatykę  $L = (V_L, T_L, P_L, B_L) \in S(G)$  taką, że  $V_L = V_F \cap V_H$  nazywamy iloczynem podgramatyk  $F$  i  $H$  i zapisujemy to w następujący sposób:  $L = F \downarrow H$ .

Twierdzenie 1

Skończona algebra  $(S(G), \Upsilon, \downarrow)$  jest strukturą.

Dowód. Należy wykazać, że spełnione są aksjomaty struktury tj. dla dowolnych  $X, Y, Z \in S(G)$  zachodzi:

1.  $X \downarrow (Y \downarrow Z) = (X \downarrow Y) \downarrow Z$ ,
2.  $X \Upsilon (Y \Upsilon Z) = (X \Upsilon Y) \Upsilon Z$ ,
3.  $X \downarrow Y = Y \downarrow X$ ,
4.  $X \Upsilon Y = Y \Upsilon X$ ,
5.  $X \downarrow X = X$ ,
6.  $X \Upsilon X = X$ ,
7.  $X \downarrow (Y \Upsilon X) = X$ ,
8.  $X \Upsilon (Y \downarrow X) = X$ .

Wykażemy, że spełniony jest aksjomat 1. W tym celu na mocy wniosku 1 wystarczy udowodnić, że  $V_{X \downarrow (Y \downarrow Z)} = V_{(X \downarrow Y) \downarrow Z}$ .  
 $V_{X \downarrow (Y \downarrow Z)} = V_X \cap (V_Y \cap V_Z) = (V_X \cap V_Y) \cap V_Z = V_{(X \downarrow Y) \downarrow Z}$ .  
 W analogiczny sposób, przez wykonanie odpowiednich działań nad alfabetami można wykazać spełnianie pozostałych aksjomatów. obdo.

Dla dowolnego  $a \in V$  zdefiniujemy indukcyjnie domknięty podalfabet  $\tilde{N}_a^G$ :

1.  $a \in \tilde{N}_a^G$ ,
2. jeżeli  $u \in \tilde{N}_a^G$ , to każdy następnik elementu  $u$  w gramatyce  $G$  należy do  $\tilde{N}_a^G$ ,



3. żadne inne elementy nie należą do zbioru  $\tilde{N}_a^G$ .

Jak widać zbiór  $\tilde{N}_a^G$  jest najmniej licznym domkniętym podalfabetem gramatyki  $G$  zawierającym element  $a$ . Każdy zbiór  $\tilde{N}_1^G$ ,  $1 \in V$  wyznacza pewną podgramatykę  $A_1 \in S(G)$ . Zbiór wszystkich podgramatyk  $A_1$  gramatyki  $G$  oznaczymy  $A(G)$ .

### Twierdzenie 2

Każda niepusta podgramatyka  $X \in S(G)$  jest sumą skończonej liczby podgramatyk ze zbioru  $A(G)$ .

Dowód.  $X = \bigcup_{1 \in V_X} A_1$  c.d.o.

$$1 \in V_X$$

Powyższe oczywiste twierdzenie pokazuje związek między definicją podgramatyki podaną w pracy [4] i definicją 3.

Wprowadzone pojęcia zilustrujemy przykładem pochodzącym z pracy [4]:

### Przykład 1

Dana jest gramatyka bezkontekstowa  $G = (V, T, P, B)$ :

$$V = \{w s m i a b ; \cdot +\},$$

$$T = \{a b ; \cdot +\},$$

$$P = \{w \rightarrow s w \rightarrow w; m w \rightarrow w; s s \rightarrow i + i \ m \rightarrow i \cdot i \ i \rightarrow a \ i \rightarrow i b \ i \rightarrow i a\},$$

$$B = \{w\}.$$

Określimy zbiór:  $S(G) = A(G) \cup R(G)$ :

$$A(G) = \{A_w, A_s, A_m, A_1, A_i, A_+, A_\cdot, A_a, A_b\},$$

$$A_w = G$$

$$A_s = (\{s i a b +\}, \{a b +\}, \{s \rightarrow i + i \ i \rightarrow a \ i \rightarrow i b \ i \rightarrow i a\}, \{s\}),$$

$$A_m = (\{m i a b \cdot\}, \{a b \cdot\}, \{m \rightarrow i \cdot i \ i \rightarrow a \ i \rightarrow i b \ i \rightarrow i a\}, \{m\}),$$

$$A_1 = A_m \cup A_s,$$

$$A_i = (\{i\}, \{i\}, \emptyset, \{i\}),$$

$$A_+ = (\{+\}, \{+\}, \emptyset, \{+\}),$$

$$A_\cdot = (\{\cdot\}, \{\cdot\}, \emptyset, \{\cdot\}),$$

$$A_a = (\{a\}, \{a\}, \emptyset, \{a\}),$$

$$A_b = (\{b\}, \{b\}, \emptyset, \{b\}).$$



Zbiór  $R(G)$  zawiera gramatykę pustą oraz  $2^5-6$  podgramatyk, których alfabety są wszystkimi dotychczas niewymienionymi podzbiórami alfabetu terminalnego gramatyki  $G$ , a zbiory produkcji tych podgramatyk są zbiorami pustymi.

#### 4. ZAKOŃCZENIE

Z twierdzenia 1 wynika, że na zbiorze  $S(G)$  określony jest częściowy porządek. W pracy [4] wskazano, że porządek ten może być wykorzystany dla usprawnienia procesu analizy syntaktycznej. Dzięki znajomości struktury gramatyki można bowiem w niektórych przypadkach rozbić proces analizy na poszczególne etapy oraz wyznaczyć czynności, które mogą być wykonywane jednocześnie. Uzyskuje się też na ogół dodatkowe warunki konieczne, które pozwalają usprawnić wykrywanie błędów syntaktycznych.

Wydaje się, że badania struktur gramatyk bezkontekstowych mogłyby doprowadzić do sformułowania pewnych kryteriów optymalizacji gramatyki bezkontekstowej pod względem ułatwienia analizy syntaktycznej.

#### Literatura

- [1] GINSBURG S.: The Mathematical Theory of Context-Free Languages. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1966.
- [2] RASIOWA H., SIKORSKI R.: The Mathematics of Metamathematics. PWN, Warszawa 1963.
- [3] ABRAMSON H.D.: Partial Ordering of the Syntax Elements of a Language. BIT Bind 8, 1968, Nr 1.
- [4] MAŁUSZYŃSKI J.: Analiza syntaktyczna przy użyciu separatorów. Prace sympozjum "Naukowe Problemy Maszyn Matematycznych - Zakopane 68", PWN (w przygotowaniu).
- [5] MAŁUSZYŃSKI J.: Metoda rozkładu syntaktycznego słów języków bezkontekstowych. Praca magisterska, UW 1968.

СТРУКТУРА ПОДГРАММАТИК ГРАММАТИКИ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ  
СОСТАВЛЯЮЩИХ

Резюме

Работа содержит определение подграмматики грамматики непосредственных составляющих. На множестве всех подграмматик грамматики непосредственных составляющих определяется операция объединения и пересечения. Таким способом получается алгебра являющаяся структурой.

THE LATTICE OF CF-GRAMMAR SUBGRAMMARS

Summary

The paper contains the definition of CF-grammar subgrammar. The operations of union and intersection are defined on the set of all CF-grammar subgrammars. In this way one obtains the algebra which is a lattice.





ON CONVERGENCE OF A RANDOMIZED  
OPTIMIZATION PROCEDURE

Ryszard ZIELIŃSKI

Received December 21st, 1968

A randomized optimization procedure is considered, and the Theorem of Driml and Hans [1] is generalized.

Let  $X$  be a set and  $T$  a real valued function on it. It is assumed that  $T$  is bounded from below and the problem is to approximate the point in which  $T$  achieves its minimum. In applications it is assumed that the function  $T$  is unknown but its value can be calculated accurately in any point  $x \in X$ . The following minimum seeking procedure is considered: choose  $x_0 \in X$  at random; if points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  are chosen, choose a point  $x_{n+1} \in X$  according to a probability distribution depending on the points  $x_0, x_1, \dots, x_n$  and values  $T(x_0), T(x_1), \dots, T(x_n)$ . It is expected that - under appropriate conditions imposed on the sampling - the sequence  $\{x_n\}$  tends to the point in which the function achieves minimum.

In [1] the problem is formulated as follows:

Let  $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$  be a probability space,  $(X, \mathfrak{F})$  a measurable linear space,  $R$  the space of real numbers and  $\mathcal{R}$  the  $\mathcal{G}$  - algebra of all Borell subsets of  $R$ . Let  $T$  be a measurable mapping of  $(X, \mathfrak{F})$  into  $(R, \mathcal{R})$ . Let  $\varepsilon > 0$  be a fixed number. Let  $\{g_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , be a sequence of independent

identically distributed random variables  $\Omega \rightarrow X$ . The following procedure is considered:

$$f_1(\omega) = x_0 \text{ for every } \omega \in \Omega$$

( $x_0$  being an arbitrary point in  $X$ ),

$$f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \text{if } T(f_n(\omega) + \xi_1(\omega)) \geq T(f_n(\omega)) - \varepsilon, \\ f_n(\omega) + \xi_n(\omega), & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1)$$

$f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , being random variables  $\Omega \rightarrow X$ .

In [1] the following theorem is proved:

Theorem. If for every  $x \in X$  and for every  $\delta > 0$

$$\mu \{ \omega : T(x + \xi_1(\omega)) \leq T_0 + \delta \} > 0, \quad (2)$$

where  $T_0 = \inf_{x \in X} T(x)$ , then  $\{f_n\}$  tends (in any topology introduced in the space  $X$ ) with probability 1 to a random variable  $f_0$  which has the property

$$\mu \{ \omega : T(f_0(\omega)) \leq T_0 + \varepsilon \} = 1. \quad (3)$$

Let us denote

$$A_0 = \{ x : T(x) \leq T_0 + \varepsilon \}.$$

We shall prove the thesis of the theorem changing the condition (2) into the condition: for every  $x \in X \setminus A_0$  we have:

$$\mu \{ \omega : T(x + \xi_1(\omega)) < T(x) - \varepsilon \} > 0. \quad (3')$$

Proof. To prove the sure of convergence of the sequence  $\{f_n\}$  in any topology - see [1]. We shall prove, that  $f_0(\omega)$  satisfies (3).

Let us denote

$$A_i = \{ x : T_0 + i \varepsilon < T(x) \leq T_0 + (i+1) \varepsilon \}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Obviously we have

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{if } i \neq j \quad \text{and} \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = X.$$

Consider the sequence of random variables  $h_n$ :

$$h_n(\omega) = i \quad \text{if} \quad f_n(\omega) \in A_i.$$

Because of independence of  $\xi_n$  the random variables  $h_n$  form a Markov chain with states  $0, 1, 2, \dots$  and transition probabilities  $p_{ij}$ , for which in view of (1):

$$p_{ij} = 0, \quad \text{if } i < j; \quad p_{00} = 1, \quad (4)$$

and in view of (2'):

$$p_{ii} < 1, \quad \text{if } i > 1. \quad (5)$$

From (4) and (5) we conclude, that the state 0 is an absorbing barrier and all the remainder states are transient ones. Thus the chain  $h_n(\omega)$  achieves the state 0 with probability 1 independently of initial distribution of  $h_1(\omega)$ . So we have  $\mu\{\omega : T(f_0(\omega)) \leq T_0 + \varepsilon\} = \mu\{\omega : f_0(\omega) \in A_0\} = \mu\{\omega : h_0(\omega) = 0\} = 1$ , q.e.d.

#### References

- [1] DRIML M., HANS O.: On a Randomized Optimization Procedure. Transactions of the Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Publ. House of the Czech. Acad. of Sc., Prague 1967.



## О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Резюме

Рассмотрена одна стохастическая процедура оптимизации и указывается обобщение теоремы Дримля - Ганса [1].

O PEWNEJ METODZIE GENERACJI WSPÓLRZĘDNYCH  
PUNKTÓW RÓWNOMIERNIE ROZMIESZCZONYCH W  
KOSTCE N-WYMIAROWEJ

Stanisław BUDKOWSKI

Pracę złożono 8 marca 1969

Opisano metody generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych w kostce n-wymiarowej oparte o wykorzystanie ciągłego i nieciągłego odwzorowania odcinka  $[0,1]$  na kostkę n-wymiarową  $[0,1]^n$ . Punkty odcinka określone są ciągiem liczb złotych. Praca stanowi kontynuację opracowań H. Steinhausa i Z. Zubrzyckiej, którzy podali metody generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych odpowiednio w odcinku oraz w kwadracie.

Opisana metoda została m.in. wykorzystana do realizacji ciągu punktów próbkowych w algorytmie optymalizacji układów logicznych metodą ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych.

## 1. WSTĘP

Rozmieszczenie punktów w kostce n-wymiarowej jest równomierne, jeżeli liczba punktów znajdujących się w dowolnie wybranym podzbiorze tej kostki jest proporcjonalna do objętości tego podzbioru.

Znana metoda generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych w przestrzeni n-wymiarowej polega na kolejnym generowaniu liczb losowych o rozkładzie równomiernym i utożsamianiu grup n takich liczb ze współrzędnymi punktów w kostce n-wymiarowej. W przypadku tej metody przekonanie o równo-



mierności rozmieszczenia punktów oparte jest na wykonanych testach statystycznych dla generatora liczb losowych.

W artykule niniejszym opisano metody generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych w kostce  $n$ -wymiarowej oparte na wykorzystaniu liczb złotych. Stanowi to kontynuację pracy H. Steinhausa [1], który podał taką metodę dla kostki 1-wymiarowej (odcinka) i pracy L. Zubrzyckiej [2], która podała taką metodę dla kostki 2-wymiarowej (kwadratu).

Współrzędne punktów mogą być generowane zarówno przy wykorzystaniu specjalnego programu dla maszyny cyfrowej jak i przez stosunkowo prosty układ elektroniczny.

Opisana metoda generacji współrzędnych punktów została zastosowana do optymalizacji układów logicznych [5], [9].

## 2. ALGORYTM GENERACJI DLA ODCINKA $[0,1]$

H. Steinhaus zauważył [1], że postulat równomiernego rozmieszczenia punktów można spełnić, wybierając jako kolejne punkty kolejne reszty modulo 1 z wielokrotności dowolnej liczby niewymiernej  $v$ . Kolejne punkty są więc zadane przez kolejne wyrazy nieskończonego ciągu  $\{z_h\}$ , którego  $h$ -ty wyraz opisany jest zależnością

$$z_h = h \cdot v - E(h \cdot v), \quad |z_h = \{0,1\}, \quad E - \text{funkcja entier.} \quad (1)$$

Równomierność rozmieszczania punktów wynika z własności ekwipartycji liczb niewymiernych sformułowanej w 1911 przez W. Sierpińskiego w postaci następującego twierdzenia:

Dla dowolnej liczby niewymiernej  $v$  i dowolnego pododcinka  $J \subset [0,1]$  o długości  $|J|$ , jeżeli

$$z_h = h \cdot v - E(h \cdot v) \quad (2)$$

oraz  $L(m, J) = \text{card} \{z_h : 0 < h \leq m, z_h \in J\}$ ,



to spełniona jest następująca relacja graniczna

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L(m, J)}{m} = |J| \quad (3)$$

Innymi słowy dla dostatecznie dużej liczby prób  $m$ , liczba generowanych punktów ciągu  $z_h$  wpadających do dowolnego pododcinka  $J \subset [0, 1]$  jest wprost proporcjonalna do długości tego pododcinka oraz - co należy podkreślić - nie zależy od położenia tego pododcinka w odcinku  $[0, 1]$ . Jak widać ciąg  $z_h$  jest równomiernie rozmieszczony w odcinku  $[0, 1]$ .

Opierając się na oszacowaniu podanym przez A. Ostrowskiego [6]

$$|L(m, J) - m|J|| \leq 36 M \log m, \quad (4)$$

słusznym dla  $m > 10$  oraz przy założeniu, że mianowniki rozwinięcia liczby niewymiernej  $v$  na ułamek łańcuchowy nie przekraczają pewnej liczby  $M$ , H. Steinhaus zaproponował, aby za liczbę niewymierną przyjąć liczbę złotą<sup>1</sup>  $z = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0,618033\dots$  dla której  $M = 1$ . Jak dotąd nie ma dowodu na to, że nie istnieje taka liczba niewymierna, różna od liczby złotej, dla której ekwipartycja będzie lepsza tzn. wyrażenie  $|4|$  nie da się oszacować lepiej z góry<sup>2</sup>. Według H. Steinhausa jest jednak wysoce prawdopodobne, że takiej liczby nie ma.

### 3. ALGORYTM GENERACJI DLA KWADRATU $[0, 1]^2$

L. Zubrzycka [2] pokazała sposób równomiernego rozmieszczania punktów w kwadracie oparty o ciągłe odwzorowanie odcinka na kwadrat. Podany algorytm przejścia od każdej kolejnej liczby  $z_h$  ( $h = 1, 2, \dots$ ) na parę liczb  $(k_1^h, k_2^h)$ , która opisuje punkt w kwadracie będący obrazem punktu  $z_h$  z odcinka jednostkowego, składa się dla każdego  $h$  z 3 kroków:

<sup>1</sup> Liczba złota wynika ze złotego podziału odcinka jednostkowego na dwie części z 1 i  $1-z$ , tak aby  $1:z = z:(1-z)$ .

<sup>2</sup> Identyczny wynik otrzymuje się, jeżeli za liczbę niewymierną przyjąć liczbę srebrną będącą uzupełnieniem do 1 liczby złotej.

1. Rozwinięcia liczby  $z_h$  w systemie dziesiętnym

$$z_h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 9^{-j}, \quad \alpha_j = \{0, 1, \dots, 8\}, \quad (5)$$

2. Zamiany kolejnych cyfr dziesiętnych  $\alpha_w$  ( $w = 1, 2, \dots$ ) na pary cyfr trójkowych  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$ ;  $\delta_{w1}, \delta_{w2} = \{0, 1, 2\}$  wskutek czego  $z_h$  reprezentowane jest przez ciąg cyfr trójkowych  $(\delta_{11} \delta_{12} \delta_{21} \delta_{22} \delta_{31} \delta_{32} \dots \delta_{w1} \delta_{w2} \dots)$ ,

3. Przyjęcia

$$k_1^h = \sum_{w=1}^{\infty} \delta_{w1} 3^{-w},$$

$$k_2^h = \sum_{w=1}^{\infty} \delta_{w2} 3^{-w}. \quad (6)$$

Ponieważ krok 2-gi w cytowanej pracy nie jest podany explicite podamy poniżej pełny opis analogicznego algorytmu tzn. również opartego o ciągłe odwzorowanie odcinka  $[0, 1]$  na kwadrat  $[0, 1]^2$ , a różniące się od podanego przez L. Zubrzycką tym, że otrzymane współrzędne  $k_1^h, k_2^h$  są przedstawione w pozycyjnym systemie dwójkowym, a nie trójkowym.

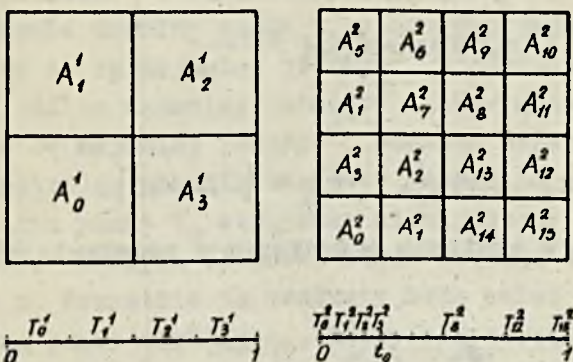
Ponieważ większość obecnych maszyn cyfrowych wykorzystuje dwójkowy system zapisu liczb, więc algorytm taki jest bardziej przydatny do zastosowań praktycznych.

Ciągłe odwzorowanie odcinka na kwadrat, na którego podstawie podamy algorytm generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych w kwadracie, buduje się w sposób następujący [7]:

Podzielmy jednostkowy odcinek  $T$  na 4 równe części  $T_0^1, T_1^1, T_2^1, T_3^1$  (indeksy dolne określają kolejność ich występowania na odcinku  $T$  od lewej do prawej strony). Podzielmy kwadrat jednostkowy  $A$  na 4 równe kwadraty  $A_0^1, A_1^1, A_2^1, A_3^1$



(rys. 1)<sup>3</sup>. Odcinki  $T_1^1$  oraz kwadraty  $A_i^1$  ( $i \in \{0,1,2,3\}$ ) nazywać będziemy odpowiednio odcinkami i kwadratami pierwszego przybliżenia. Podzielmy następnie każdy z odcinków pierwszego przybliżenia znowu na 4 równe odcinki i oznaczmy odcinki częściowe otrzymane z podziału odcinka  $T_0^1$  przez  $T_{00}^2, T_{01}^2, T_{02}^2, T_{03}^2$ , z podziału odcinka  $T_1^1$  przez  $T_{20}^2, T_{21}^2, T_{22}^2, T_{23}^2$  i wreszcie z podziału odcinka  $T_3^1$  przez  $T_{30}^2, T_{31}^2, T_{32}^2, T_{33}^2$ .



Rys. 1

Szesnaście tak otrzymanych odcinków  $T_{00}^2, \dots, T_{33}^2$  nazywać będziemy odcinkami drugiego przybliżenia. Podzielmy obecnie każdy z czterech kwadratów  $A_0^1, A_1^1, A_2^1, A_3^1$  na cztery kwadraty - otrzymamy 16 kwadratów drugiego przybliżenia, przy czym kwadraty  $A_{01}^2, A_{02}^2, A_{03}^2, A_{04}^2$  są zawarte w kwadracie pierwszego przybliżenia  $A_0^1$ , kwadraty  $A_{10}^2, A_{11}^2, A_{12}^2, A_{13}^2$  - w kwadracie  $A_1^1$ , kwadraty  $A_{20}^2, A_{21}^2, A_{22}^2, A_{23}^2$  - w kwadracie  $A_2^1$  i wreszcie kwadraty  $A_{30}^2, A_{31}^2, A_{32}^2, A_{33}^2$  - w kwadracie  $A_3^1$ .

Oznaczmy przez

$$T^{n-1} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 000 \dots; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \{0,1,2,3\} \quad (7)$$

<sup>3</sup> Istnieje naturalnie kilka innych sposobów rozmieszczenia kwadratów  $A_0^1, A_1^1, A_2^1, A_3^1$  w kwadracie jednostkowym  $A$  niż to zostało pokazane na rys. 1.



pewien odcinek  $(n-1)$ -szego przybliżenia. Wtedy odcinki  $n$ -tego przybliżenia zawarte w tym odcinku  $(n-1)$ -szego przybliżenia można oznaczyć jako:

$$\begin{aligned} T^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 000\dots \\ T^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 000\dots \\ T^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 200\dots \\ T^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 300\dots \end{aligned} \quad (8)$$

Przyjmijmy, że

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n), \quad \alpha_j = \{0, 1, 2, 3\}$$

jest rozwinięciem w systemie pozycyjnym o podstawie  $+4$  pewnej liczby  $k$

$$k = \sum_{j=0}^n \alpha_{n-j} \cdot 4^j \quad (9)$$

Wtedy  $T_k^n$  oznacza  $k$ -ty odcinek  $n$ -tego przybliżenia. Ustalmy, że kolejność występowania  $4^n$  odcinków  $n$ -tego przybliżenia na odcinku jednostkowym od lewej do prawej określa liczba  $k$ .

Analogicznie rozumując przyjmijmy, że  $A_k^n$  oznacza  $k$ -ty kwadrat  $n$ -tego przybliżenia. Ustalmy również, celem spełnienia warunku ciągłości odwzorowania<sup>4</sup>, że kwadraty  $n$ -tego przybliżenia  $A_k^n$  ( $k = 0, 1, \dots, 4^n - 1$ ) rozmieszczone są w kwadracie jednostkowym tak, aby dla dowolnego  $p$  kwadraty  $A_p^n$  i  $A_{p \pm 1}^n$  miały punkt wspólny. Można zauważyć, że wystarczy w tym celu tak rozmieścić kwadraty  $n$ -tego przybliżenia, aby ostatni i pierwszy kwadrat  $n$ -tego przybliżenia otrzymane z podziału dwu sąsiednich kwadratów  $n-1$ -szego przybliżenia miały wspólny punkt.

<sup>4</sup> Odwzorowanie jest ciągle gdy przez dostateczne zbliżenie punktów odcinka można osiągnąć dowolne zbliżenie odpowiadających im punktów kwadratu.

Podział odcinków i kwadratów można kontynuować nieskończenie długo. W miarę wzrostu  $n$  zarówno długości odcinków kolejnych przybliżeń jak i długości boków kwadratów kolejnych przybliżeń zdygają się do zera.

Przyporządkujemy obecnie każdemu odcinkowi  $n$ -tego przybliżenia  $T_k^n$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ) kwadrat  $A_k^n$  również  $n$ -tego przybliżenia mający ten sam numer  $k$  co i odcinek. Otrzymamy wtedy dla każdego  $n$  odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między odcinkami a kwadratami tego samego przybliżenia. Rozważmy obecnie dowolny punkt  $t_0$  z odcinka jednostkowego  $T$ . Punkt ten należy do co najmniej jednego<sup>5</sup> z odcinków pierwszego przybliżenia, do co najmniej jednego<sup>5</sup> z odcinków drugiego przybliżenia, do co najmniej jednego<sup>5</sup> odcinka trzeciego przybliżenia itd. Rozpatrując obecnie kwadraty, które odpowiadają odcinkom zawierającym punkt  $t_0$  otrzymamy nieskończony zstępujący ciąg kwadratów<sup>6</sup>, których długości boków zdygają się do zera wraz ze wzrostem  $n$ . Wszystkie te kwadraty będą wobec tego miały dokładnie jeden punkt wspólny  $a_0$ , który przyporządkujemy punktowi  $t_0$ <sup>7</sup>. Wynika to ze znanego [28] w topologii twierdzenia, które orzeka: jeżeli  $F_m$  są podzbiorami domkniętymi i niepuścymi zbioru zwartego  $R$  oraz tworzą ciąg zstępujący

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m \supset \dots \quad (10)$$

i ponadto ze wzrostem  $m$  średnice zbiorów  $F_m$  dążą do zera, to iloczyn

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m \cap \dots \quad (11)$$

składa się dokładnie z jednego punktu.

<sup>5</sup> I nie więcej niż do dwu; do dwu należy wtedy, gdy jest on punktem podziału na odcinki kolejnych przybliżeń. Np. punkt  $t_0$  oznaczony na rys. 1 należy do odcinków  $T_0^1, T_1^1$  oraz do  $T_3^2, T_4^2$ .

<sup>6</sup> Zgodnie z odnośnikiem (5) istnieć mogą dwa takie ciągi np.  $A_0^1, A_3^2, \dots$  i  $A_1^1, A_4^2, \dots$ .

<sup>7</sup> Można zauważyć, że w przypadku opisanym w odnośniku (5) i (6)  $A_0^1 \supset A_3^2 \dots = A_1^1 \supset A_4^2 \dots$  czyli otrzymamy ten sam punkt  $a_0$ , który przyporządkujemy punktowi  $t_0$ .



Zgodnie z powyższym każdemu punktowi odcinka  $T$  odpowiada jeden określony punkt kwadratu.

Aby pokazać, że opisane odwzorowanie jest przekształceniem odcinka na kwadrat<sup>8</sup> należy jeszcze wykazać, że każdy punkt kwadratu odpowiada co najmniej jednemu punktowi odcinka. Rozpatrzmy dowolny punkt  $a_0$  zawarty w kwadracie jednostkowym. Oznaczmy przez  $A_1^1, A_1^2, A_1^3, \dots$  nieskończony ciąg kwadratów kolejnych przybliżeń, w których zawarty jest punkt  $a_0$  ( $\dots \subset A_1^3 \subset A_1^2 \subset A_1^1$ ). Nieskończony ciąg odcinków odpowiadających tym kwadratom jest następujący:  $T_1^1, T_1^2, T_1^3, \dots$ . Ponieważ każdy z tych odcinków zawiera się w poprzednim ( $\dots \subset T_1^3 \subset T_1^2 \subset T_1^1$ ) i długość tych odcinków w miarę wzrostu rzędu kolejnego przybliżenia maleje do zera więc wszystkie te odcinki - zgodnie z uprzednio przytoczonym twierdzeniem - mają dokładnie jeden punkt wspólny  $t_0$ . Punktowi  $t_0$  odcinka  $T$  odpowiada właśnie punkt  $a_0$  kwadratu  $A$ .

Można zauważyć, że odwzorowanie to nie jest wzajemnie jednoznaczne - jeden i ten sam punkt kwadratu może odpowiadać kilku różnym punktom odcinka  $T$ . Na przykład punkt będący wspólnym wierzchołkiem kwadratów drugiego przybliżenia  $A_1^2, A_2^2, A_{13}^2, A_{14}^2$  odpowiada czterem różnym punktom odcinka  $T$ .

Można natomiast zauważyć, że podane odwzorowanie jest ciągłe. Wynika to bezpośrednio z opisanego poprzednio sposobu rozmieszczania kwadratów kolejnych przybliżeń w kwadracie  $A$ . Jeżeli  $t_0$  jest dowolnym punktem odcinka  $T$ , to dla dowolnego  $n$  każdy punkt  $t$  tego odcinka, dostatecznie bliski punktu  $t_0$ , będzie zawarty wraz z  $t_0$  w tym samym lub w sąsiednim odcinku  $n$ -tego przybliżenia. Wówczas punkty  $a_0$  i  $a$  odpowiadające punktom  $t_0$  i  $t$  będą zawarte w tym samym lub sąsiednim kwadracie  $n$ -tego przybliżenia. Biorąc więc punkty  $t$  dostatecznie bliskie punktu  $t_0$  otrzymamy punkty  $a$  dowolnie bliskie  $a_0$ .

<sup>8</sup> Gdyby wykazać, że każdy punkt kwadratu odpowiada dokładnie jednemu punktowi odcinka, to odwzorowanie byłoby wzajemnie jednoznaczne.



Podany powyżej sposób ciągłego odwzorowania odcinka na kwadrat pozwala na określenie współrzędnych  $k_1^h, k_2^h$  punktu w kwadracie na podstawie liczby  $z_h$ . Rozwijając bowiem liczbę  $z_h$  w systemie czwórkowym

$$z_h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 4^{-j}, \quad (12)$$

gdzie  $\alpha_j = \{0, 1, 2, 3\}$  otrzymamy nieskończony ciąg liczb  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_w, \dots$ , przy czym  $\alpha_1$  jest numerem kwadratu pierwszego przybliżenia, w którym zawarty jest punkt odpowiadający  $z_h$ ,  $\alpha_2$ , jest numerem zawartego w nim kwadratu drugiego przybliżenia, w którym zawarty jest punkt odpowiadający  $z_h$  itd.

Zmieniając obecnie - według specjalnego algorytmu - cyfry  $\alpha_w$  tego rozwinięcia na pary cyfr  $\delta_{w1}^h, \delta_{w2}^h$ ;  $\delta_{w1}, \delta_{w2} = \{0, 1\}$  uzyskuje się szukane współrzędne  $k_1^h, k_2^h$  punktu w kwadracie określone następującymi wzorami:

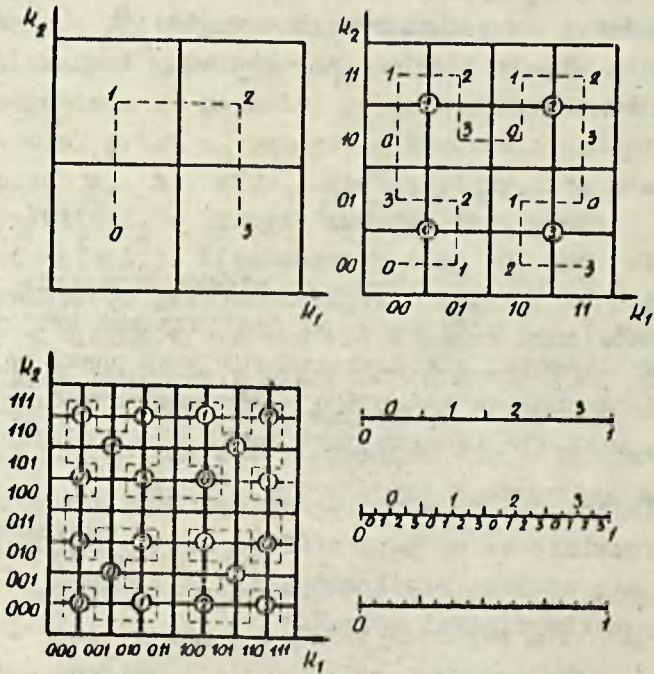
$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_w \dots) \rightarrow (\delta_{11} \delta_{12} \delta_{21} \delta_{22} \dots \delta_{w1} \delta_{w2} \dots),$$

$$k_1^h = \sum_{w=1}^{\infty} \delta_{w1} 2^{-w} = (\delta_{11} \delta_{21} \dots \delta_{w1} \dots)_{+2}, \quad (13)$$

$$k_2^h = \sum_{w=1}^{\infty} \delta_{w2} 2^{-w} = (\delta_{12} \delta_{22} \dots \delta_{w2} \dots)_{+2}.$$

Dla ułatwienia określenia sposobu przechodzenia od  $\alpha_w$  na parę cyfr  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$  na rys. 2 na osiach  $k_1$  i  $k_2$  oznaczono skalę<sup>9</sup> w systemie pozytywnym o podstawie +2 i ponumerowano kolejne kwadraty w ramach tego samego rzędu przybliżenia (odpowiadają one cyfrom  $\alpha_j$ ). Ze względu na możliwości wykonania rysunku podziałę zakończono na 3-cim przybliżeniu. W tabelach 1, 2, 3 podano sposób zamiany trzech cyfr rozwinięcia czwórkowego  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  na odpowiednie pary cyfr  $\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21},$

<sup>9</sup> Naturalnie można również podać skalę w innym systemie dwójkowym np. o podstawie (-2). Wtedy liczbę  $z_h$  należy jednak rozwijać w systemie pozytywnym (-4).



Rys. 2

$\delta_{22}$ ;  $\delta_{31}$ ;  $\delta_{32}$ . Analogicznie podać można tabelki dla liczb  $\alpha_4$ ,  $\alpha_5$ ,  $\alpha_6$ , ...; ze względu na ich rozmiary nie są one jednak przytoczone. Istnieją 4 różne funkcje  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$  odwzorowujące  $\alpha_w$  na parę cyfr  $\delta_{w1}$ ,  $\delta_{w2}$  zależnie od  $\alpha_{w-1}$ ,  $\alpha_{w-2}$ , ...,  $\alpha_1$ .

Tabela 1

$\alpha_1$	$\delta_{11}$	$\delta_{12}$
0	0	0
1	0	1
2	1	1
3	1	0
$\psi_1$		



Tabela 2

$\alpha_2$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = \{1, 2\}$		$\alpha_1 = 3$	
	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$
0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
2	1	1	1	1	0	0
3	0	1	1	0	1	0
	$\Psi_2$		$\Psi_1$		$\Psi_3$	

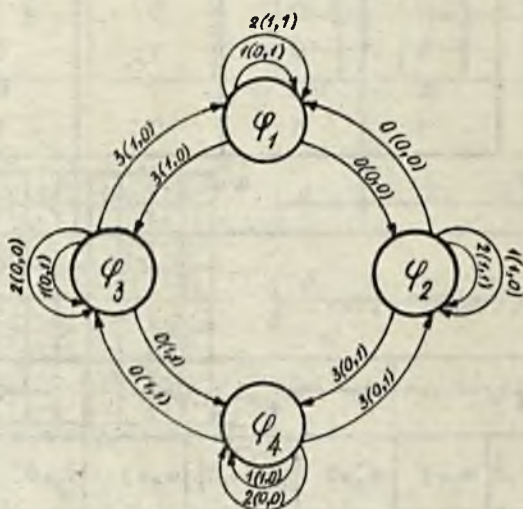
Tabela 3

$\alpha_3$	$\alpha_1 = 0$						$\alpha_1 = \{1, 2\}$						$\alpha_1 = 3$					
	$\alpha_2 = 0$		$\alpha_2 = \{1, 2\}$		$\alpha_2 = 3$		$\alpha_2 = 0$		$\alpha_2 = \{1, 2\}$		$\alpha_2 = 3$		$\alpha_2 = 0$		$\alpha_2 = \{1, 2\}$		$\alpha_2 = 3$	
	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{31}$	$\delta_{32}$
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
2	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
	$\Psi_1$		$\Psi_2$		$\Psi_4$		$\Psi_2$		$\Psi_1$		$\Psi_3$		$\Psi_4$		$\Psi_3$		$\Psi_1$	

Na podstawie takich tabel określić można graf przejść i wyjść automatu realizującego odwzorowanie nieskończonych ciągów cyfr ozwórkowych  $\alpha_w$  ( $w = 1, 2, \dots$ ) na nieskończone ciągi cyfr dwójkowych  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$ . Graf takiego automatu pokazany jest na rys. 3. Obok gałęzi wpisano wartości  $\alpha$  powodujące przejście automatu do następnego stanu zgodnie ze strzałką w danej gałęzi oraz (w nawiasie) wartościami  $\delta_1, \delta_2$ , jakie pojawiają



się przy tym przejściu na wyjściu automatu. Zauważmy, że można wybrać dowolny z czterech stanów jako stan początkowy, co wynika z czterech różnych możliwości rozmieszczenia kwadratów pierwszego przybliżenia w kwadracie jednostkowym. W przypadku takiego ich rozmieszczenia jakie ukazano na rys. 3 stanem początkowym jest stan  $\psi_1$ .



Rys. 3

Dla ilustracji określmy dwójkowe rozwinięcia współrzędnych punktu w kwadracie będącego obrazem  $Z_1$ , tzn. pierwszego wyrazu ciągu  $\{Z_n\}$ . Rozwijając liczbę  $Z_1 = 0,618033\dots$  w systemie pozycyjnym o podstawie +4 otrzymamy rozwinięcie

$$\left( \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \right)_{+4} = \left( 2 \ 1 \ 3 \ \dots \right)_{+4} .$$

Wynika stąd, że obraz punktu  $Z_1$  w kwadracie leży w 2-gim kwadracie 1-szego przybliżenia, 1-szym kwadracie 2-giego przybliżenia zawartym w 2-gim kwadracie 1-szego przybliżenia itd.

Posługując się tabelami 1, 2, 3 lub grafem z rys. 3 znajdujemy rozwinięcia dwójkowe

$$\left( \delta_{11} \ \delta_{12} \ \delta_{21} \ \delta_{22} \ \delta_{31} \ \delta_{32} \ \dots \right) = \left( 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \dots \right) .$$

Stąd rozwinięcie w systemie pozycyjnym o podstawie +2 współrzędnych  $k_1^1$ ,  $k_2^1$  obrazu punktu  $Z_1$  w kwadracie mają postać

$$k_1^1 = \left( 1 \ 0 \ 1 \ \dots \right)_{+2} ; \quad k_2^1 = \left( 1 \ 1 \ 0 \ \dots \right)_{+2} .$$

Jak dotąd przyjmowaliśmy milcząco, że za pośrednictwem omówionego ciągłego odwzorowania odcinka jednostkowego na kwadrat jednostkowy ciąg punktów równomiernie rozmieszczonych na odcinku (dzięki własności ekwipartycji) przekształca się na ciąg punktów równomiernie rozmieszczonych w kwadracie. Nie ma na to jak dotąd formalnego dowodu. O tym, że tak może być świadczy tylko pewna liczba wykonanych eksperymentów.

Stopień zbliżenia do równomiernego rozmieszczenia punktów można określić, obliczając tzw. Steinhausa wskaźniki zgęszczenia  $S$  [2] definiowane jako stosunek wariancji  $\sigma^2$  do średniej liczby punktów zawartych w kostkach elementarnych powstałych przy pewnym regularnym podziale boków kwadratu czyli

$$S = \frac{\sigma^2}{k} ,$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i , \tag{14}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_i - k)^2 ,$$

przy czym  $k_i$  - liczba punktów zawartych w  $i$ -tym kwadracie elementarnym,  $N$  - liczba kwadratów elementarnych.

Im  $S$  jest bliższe zeru tym rozmieszczenie jest bliższe do równomiernego. W przypadku gdy  $S \gg 1$  istnieją duże skupienia punktów w pewnych obszarach i duże rozrzedzenia w innych.

W celu określenia współczynnika Steinhausa wykonano następujący eksperyment: kwadrat  $[0,1]^2$  podzielono na 9, 25, 49,



169, 361, 841 kwadratów elementarnych i za pomocą specjalnego programu dla maszyny UMC-10 określono dla każdego z podziałów i dla różnej liczby prób współczynnik  $S$ . W wyniku otrzymano, że nie przekracza on 0,57.

W tabeli 4 podano wyniki części eksperymentów. W kolumnie  $h$  podano liczbę prób, dla której obliczono wskaźnik Steinhausa  $S$ , a w kolumnie  $j$  podano dodatkowo stosunek liczby punktów, które trafiły do pewnego kwadratu elementarnego (wybranego przypadkowo) o objętości podanej nad tą kolumną do liczby wygenerowanych punktów (kolumna  $h$ ).

Wskaźnik Steinhausa pozwala również na porównanie (z punktu widzenia równomierności rozmieszczenia punktów w kwadracie) metody generacji opartej o liczby złote i metody opartej o ich losowe wybieranie z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa. Przy losowym rozmieszczaniu punktów wskaźnik  $S = 1$ , gdyż liczba punktów trafiających w kwadrat elementarny ma rozkład Poissona, a więc wariancję równą średniej [2]. W rzeczywistości  $S$  dla losowego rozmieszczania punktów różni się od 1, gdyż istniejące generatory liczb losowych spełniają warunki przypadkowości jedynie z pewnym przybliżeniem. Wskaźniki Steinhausa otrzymane przy losowym rozmieszczaniu punktów z wykorzystaniem generatora liczb losowych opracowanego dla maszyny UMC-10 (opartego o algorytm Rotenberga [3]) wahały się w granicach 1,1 do 1,3.

Można zauważyć, że wykonane testy ( $S$  i  $j$ ) są podobne do testu  $\chi^2$  i testu częstości jakie wykonuje się dla generatorów liczb losowych o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa.

#### 4. ALGORYTM GENERACJI DLA KOSTKI $n$ -WYMIAROWEJ $[0,1]^n$

Znane jest w topologii twierdzenie [8], które orzeka: każde continuum lokalnie łukowo spójne jest ciągłym obrazem odcinka. Z twierdzenia tego wynika, że kostka  $n$ -wymiarowa jest



ciągłym obrazem odcinka. Chcąc określić odwzorowanie odcinka na kostkę n-wymiarową w sposób analogiczny do określonego dla kwadratu napotyka się jednak na trudności przedstawienia graficznego umożliwiającego określenie funkcji odwzorowującej. Zauważmy, że główną trudnością stojącą na przeszkodzie sformułowaniu metody generacji współrzędnych punktów równomiernie rozmieszczonych w kostce n-wymiarowej za pośrednictwem uogólnienia opisanej poprzednio metody dla kwadratu jest sposób odwzorowywania cyfr czwórkowych  $\alpha_w$  na parę cyfr dwójkowych  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$ .

Ze względu na konieczność zapewnienia ciągłości odwzorowania nie można było przy tym stosować do kodowania cyfr  $\alpha_w$  pary cyfr  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$  pozycyjnego systemu dwójkowego. Przypomnijmy również, że współrzędne  $k_1^h, k_2^h$  w przypadku kostki  $[0,1]^2$ , po określeniu par  $\alpha_{w1}, \alpha_{w2}, \alpha_{w3}, \alpha_{w4}, \dots, \alpha_{w-1}$  powstawały w ten sposób, że kolejne cyfry rozwinięcia  $k_1^h$  otrzymywano, biorąc co drugą cyfrę dwójkową  $\delta_{w1}$ , począwszy od pierwszej cyfry dwójkowej  $\delta_{w1}$ , a  $k_2^h$  począwszy od  $\delta_{w2}$ .

Gdyby można było przyjąć za dopuszczalne takie kodowanie cyfr  $\alpha_w$  ( $\alpha_w = \{0,1,2,1\}$ ) parą cyfr  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$  ( $\delta_{w1}, \delta_{w2} = \{0,1\}$ ), w którym  $\delta_{w1}, \delta_{w2}$  stanowią kolejne cyfry rozwinięcia  $\alpha_w$  w pozycyjnym systemie dwójkowym, to zagadnienie określenia explicite funkcji odwzorowującej ciąg  $\{z_h\}$  na ciąg  $\{(k_1^h, k_2^h, \dots, k_n^h)\}$  mogłoby być rozwiązane stosunkowo prosto. Istotnie, zamiast rozwijać w pozycyjnym systemie czwórkowym liczbę  $z_h$ , a następnie każdą cyfrę tego rozwinięcia w pozycyjnym systemie dwójkowym, można by po prostu rozwinąć liczbę  $z_h$  w systemie pozycyjnym dwójkowym i chcąc określić obraz  $z_h$  w kostce n-wymiarowej zadany współrzędnymi  $(k_1^h, k_2^h, \dots, k_n^h)$  wystarczyłoby określić co n-te cyfry tego rozwinięcia, począwszy od pierwszej dla  $k_1^h$ , od drugiej dla  $k_2^h$ , od trzeciej dla  $k_3^h$  itp. Zbiory takich cyfr dwójkowych podane w sposób uporządkowany określałyby kolejne cyfry rozwinięcia dwójkowego w systemie pozycyjnym o podstawie (+2) liczb  $k_1^h, k_2^h, \dots, k_n^h$ .

Można zauważyć, że w takim przypadku odwzorowanie odcinka na kostkę  $n$ -wymiarową nie jest ciągle. Z drugiej jednak strony nie widać powodu do ograniczenia się do poszukiwania jedynie odwzorowań ciągłych, gdyż sama własność ich ciągłości specjalnie nas nie interesuje. Interesuje nas natomiast czy przy takim odwzorowaniu rozłożenie punktów w kostce będzie dostatecznie równomierne. Jeżeli za miarę równomierności rozłożenia przyjmą współczynnik Steinhausa, to wydaje się, że przy takim odwzorowaniu nie nastąpi istotna zmiana jego wartości.

Przesłanki powyższe znalazły potwierdzenie w wielu wykonanych eksperymentach, których część została zestawiona w tabeli 5 w postaci badania współczynnika Steinhausa i wartości "j" dla takiego odwzorowania. Postawiono pytanie czy tego rodzaju postępowanie zapewnia ekwipartycję punktów w kostce  $n$ -wymiarowej, analogicznie jak ciągi liczb niewymiernych (złoty) rozmieszczonych na odcinku.

A.J. Blikle na prośbę autora udowodnił w sposób formalny słuszność przyjętej hipotezy, nazywając tak powstałe ciągi ciągami ekwipartywnymi w kostce  $[0,1]^n$ .

Definicja. Ciągiem ekwipartywnym  $\xi = \{\xi_h\}$  w kostce  $[0,1]^n$  nazywamy ciąg, dla którego  $\xi$  - pseudomiara  $|A|_\xi$  definiowana jako

$$|A|_\xi = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} L_\xi(A, m), \quad (15)$$

przy czym

$$A - \text{przedział } n\text{-wymiarowy } A \subset [0,1]^n,$$

$$L_\xi(A, m) =_{\text{def}} \text{Card} \{ \xi_h; 0 < h \leq m, \xi_h \in A \}$$

pokrywa się z miarą Lebesgue'a na wszystkich przedziałach  $n$ -wymiarowych.

Rozważmy teraz następujące nieciągłe odwzorowanie odcinka  $[0,1]$  na kostkę  $[0,1]^n$ .





Jak udowodnił A.J. Blikle tak określona funkcja odwzorowuje odcinek  $[0,1]$  na kostkę  $[0,1]^n$  bez jednego punktu  $(1,1,1,\dots,1)$  w taki sposób, że dla każdej liczby niewymiernej  $v$ , ciąg ekwipartywny

$$z_h = h.v - E(h.v) \quad (21)$$

w odcinku  $[0,1]$  przechodzi na ciąg ekwipartywny  $\{\xi_h\}$  w kostce  $[0,1]^n$ .

Funkcję  $f(k)$  konstruuje się w sposób następujący. Niech przez  $m$ -ty regularny podział odcinka  $[0,1]$  rozumie się podział na  $2^{n \cdot m}$  równych odcinków ( $n$ -wymiar kostki, na którą odwzorowuje się odcinek jednostkowy).

Niech przez  $m$ -ty regularny podział kostki  $[0,1]^n$  rozumie się podział na  $2^{n \cdot m}$  równych kostek

$$[0,1]^n = [b_1 2^{-m}, (b_1 + 1) 2^{-m}] \times \dots \times [b_n 2^{-m}, (b_n + 1) 2^{-m}],$$

gdzie

$$0 < b_1, b_2, \dots, b_n \leq 2^m - 1,$$

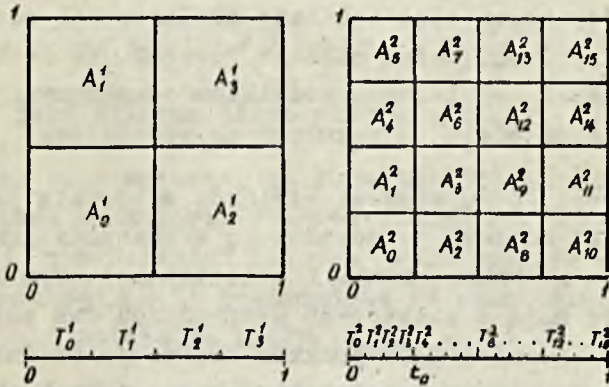
$b_1, b_2, \dots, b_n$  - liczby całkowite,

$\times$  - symbol iloczynu kartezjańskiego.

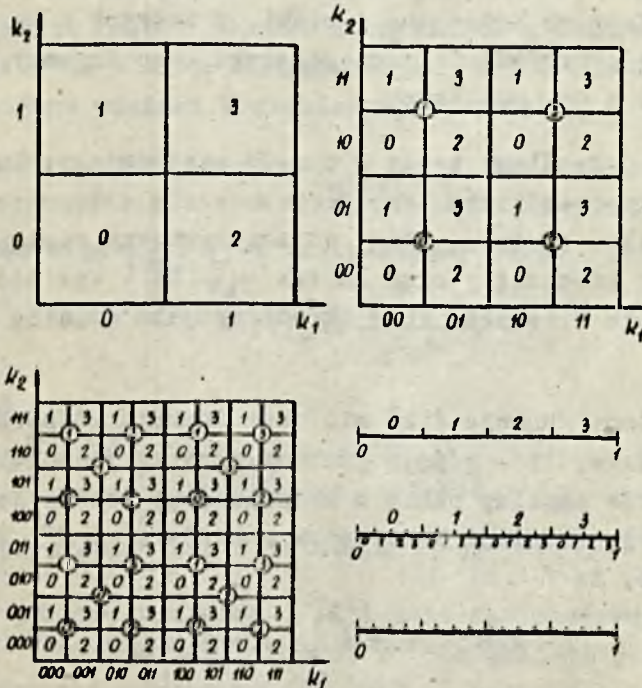
Każdemu odcinkowi  $m$ -tego regularnego podziału odcinka  $[0,1]$  przyporządkowuje się wzajemnie jednoznacznie pewną kostkę  $m$ -tego regularnego podziału kostki  $[0,1]^n$ . Na przykład dla  $n=2$  przyporządkowanie to buduje się podobnie jak to zostało omówione dla odwzorowania ciągłego. Różnica polega na tym, że inaczej numeruje się kwadraty kolejnych przybliżeń (kolejnych regularnych podziałów); można ją zauważyć, porównując np. rys. 1 i 2 odpowiednio z rys. 4 i 5. Obecnie 4 kwadraty dowolnego przybliżenia rozmieszczone wewnątrz kwadratów poprzedniego przybliżenia ponumerowane są zawsze w ten sam sposób. Poprzednio było to niedopuszczalne z punktu widzenia ciągłości odwzorowania, tzn. tak jak dla pierwszego przybliżenia (1-szego regularnego podziału). Sposób rozmieszczenia



kwadratów pierwszego przybliżenia w kwadracie jednostkowym wynika natomiast z przyjętego a priori systemu pozycyjnego +2, w którym mają być przedstawiane liczby h.



Rys. 4



Rys. 5

Tak określone przyporządkowanie odcinków na kostki dla dowolnego  $m$ -tego regularnego podziału oznaczmy przez  $\varphi$ . W kwestii przyporządkowania  $\varphi$  można pokazać, że każdy zstępujący ciąg odcinków regularnych podziałów odwzorowuje się na zstępujący ciąg kostek regularnych podziałów. Ponieważ  $\varphi$  jest wzajemnie jednoznaczne więc istnieje odwzorowanie odwrotne  $\varphi^{-1}$ , w kwestii którego można pokazać również, że każdy zstępujący ciąg kostek regularnych podziałów odwzorowuje się na zstępujący ciąg odcinków regularnych podziałów.

Każdemu zstępującemu ciągowi odcinków odpowiada jednoznacznie pewien punkt odcinka jednostkowego wyznaczony jako jego granica (patrz cytowane powyżej twierdzenie). Tym niemniej tę samą granicę mają w niektórych przypadkach dwa różne ciągi zstępujące, gdy granica jest punktem krańcowym odcinków wszystkich kolejnych regularnych podziałów. Można jednak określić funkcję jednoznaczną  $\psi$  przyporządkowującą punktom odcinka ciągi zstępujące do nich zbieżne, np. umawiając się, że bierzemy - gdy jest to konieczne - ciągi, w których numer odcinka pierwszego przybliżenia zawierającego rozpatrywany punkt jest mniejszy z dwu możliwych.

Funkcję  $f$  określamy teraz w sposób następujący: Punktom  $k \in [0, 1]$  przyporządkowujemy jednoznacznie zstępujący ciąg  $\varphi(k)$  przedziałów odcinka, który odwzorowujemy następnie funkcją  $\varphi$  na zstępujący ciąg kostek  $\varphi[\varphi(k)]$ . Wartość funkcji  $f$  w punkcie  $k$ , czyli  $f(k)$  określamy jako granicę ciągu  $\varphi[\varphi(k)]$ .

Tak określona funkcja  $f(k)$  nie jest funkcją różnowartościową na odcinku, tzn. różnym punktom odcinka jednostkowego odpowiadać może wspólny punkt w  $n$ -wymiarowej kostce jednostkowej. Ścisłej, istnieją takie pary punktów  $k'$  i  $k''$  odcinka jednostkowego, że

$$k' \neq k'' \quad \text{ale} \quad f(k') = f(k''). \quad (22)$$



Można jednak udowodnić, że

$$(\forall k', k'' \in [0,1]) (f(k') = f(k'') \rightarrow (k' - k'') \in W). \quad (23)$$

gdzie  $W$  jest zbiorem liczb wymiernych. Z drugiej strony pokazuje się, że

$$(\forall i, j \in \mathbb{N}) [(i \neq j) \rightarrow (z_j - z_i) \notin W], \quad (24)$$

gdzie  $\mathbb{N}$  jest zbiorem liczb naturalnych.

Wynika stąd wniosek, że funkcja  $f(k)$  jest funkcją różnowartościową na zbiorze punktów ciągu  $\{z_h\}$ . Innymi słowy funkcja  $f(k)$  nie "zlepia" żadnych dwóch punktów ciągu  $\{z_h\}$ , gdyż punkty odcinka  $[0,1]$  posiadające te same obrazy w kostce  $[0,1]^n$  nie należą do ciągu  $\{z_h\}$ .

Niech  $f(T)$  będzie zbiorem wszystkich obrazów punktów z odcinka  $T$ . Wtedy, jeżeli  $T$  jest odcinkiem  $m$ -tego regularnego podziału kostki  $[0,1]^n$  to  $f(T)$  jest kostką  $m$ -tego regularnego podziału kostki  $[0,1]^n$ . Korzystając z różnowartościowości funkcji  $f$  na zbiorze punktów ciągu  $\{z_h\}$  można udowodnić, że dla każdego odcinka  $T$  regularnego podziału

$$|T|_z = |f(T)|_{f(z)} \quad (25)$$

Ponieważ ciąg  $\{z_h\}$  jest ekwipartywny, więc

$$|T|_z = \frac{1}{2^{n \cdot m}}. \quad (26)$$

Stąd

$$|f(T)|_{f(z)} = \frac{1}{2^{n \cdot m}}, \quad (27)$$

co rzeczywiście jest objętością kostki  $f(T)$ .

Aby pokazać, że ciąg  $\{f(z)\}$  jest ekwipartywny w kostce  $[0,1]^n$  pokazuje się jeszcze, że dla każdego przedziału  $n$ -wymiarowego  $A$  w kostce  $[0,1]^n$  (a nie tylko dla kostek regularnego podziału)

$$|A| f(z)$$

jest równe objętości tego przedziału.

To, że jest tak rzeczywiście udowadnia się, aproksymując przedział  $A$  dwoma ciągami przedziałów  $\{B_i\}$  i  $\{C_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , gdzie dla każdego  $i$ :

$B_i$  jest najmniejszym zbiorem zawierającym  $A$  będącym sumą kostek  $i$ -tego regularnego podziału,

$C_i$  jest największym zbiorem zawartym w  $A$  będącym sumą kostek  $i$ -tego regularnego podziału.

W ten sposób naszkicowano podany przez A.J. Bliklego dowód twierdzenia, że dla każdego  $v$  będącego liczbą niewymierną funkcja  $f$  odwzorowuje ciąg

$$z_n = h.v - E(h.v)$$

na ciąg ekwipartywny w kostce  $[0, 1]^n$ .

Tak więc przyjęta przez autora hipoteza, w oparciu o eksperymentalne wyznaczanie współczynników Steinhausa dla takiego odwzorowania, okazała się słuszna.

##### 5. UWAGI O MOŻLIWOŚCI GENEROWANIA WSPÓLRZĘDNYCH PUNKTÓW RÓW- NOMIERNIE ROZMIESZCZONYCH W KOSTCE $[0, 1]^n$ PRZY POMOCY MASZYNY CYFROWEJ

Liczby  $z_n$  są liczbami niewymiernymi, a w praktyce ze względu na skończoną długość słowa maszynowego operować możemy jedynie na ich skończonych rozwinięciach. Ciąg  $\{z_n\}$  jest więc wtedy okresowy. Określmy okres powtarzania takiego ciągu. Niech  $v$  oznacza odpowiednio bliskie przybliżenie liczby niewymiernej  $v$  powstałe poprzez uwzględnienie jedynie skończonej liczby cyfr rozwinięcia liczby  $v$ . Niech  $T$  oznacza okres powtarzania ciągu  $\{\bar{z}_n\}$

$$\bar{z}_n = h.\bar{v} - E(h.\bar{v}). \quad (28)$$



Twierdzenie

Jeżeli  $\bar{v} = \frac{p}{q}$ , gdzie  $\frac{p}{q}$  jest ułamkiem nieskracalnym, to okres powtarzania ciągu  $\{\bar{z}_h\}$  równy jest  $T = q$ .

Dowód

Okres ciągu  $\{\bar{z}_h\}$  równy jest z definicji najmniejszej liczbie naturalnej  $T$  spełniającej

$$\bar{z}_{h+T} = \bar{z}_h \quad \text{dla } h = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Liczba taka naturalnie istnieje. Wobec tego

$$\bar{v}(h+T) - E[\bar{v}(h+T)] = \bar{v} \cdot h - E(\bar{v} \cdot h). \quad (30)$$

Stąd

$$\bar{v} \cdot T = E[\bar{v}(h+T)] - E(\bar{v} \cdot h). \quad (31)$$

Jest więc prawdą, że liczba naturalna  $T$  spełnia powyższe równanie wtedy i tylko wtedy gdy  $\bar{v} \cdot T$  jest liczbą całkowitą.

Rzeczywiście: Jeżeli  $\bar{v} \cdot T$  jest liczbą całkowitą, to

$$E[\bar{v}(h+T)] = E(\bar{v} \cdot h + \bar{v} \cdot T) = E(\bar{v} \cdot h) + \bar{v} \cdot T,$$

a więc równanie (31) jest spełnione. Jeżeli równanie (31) jest spełnione, to oczywiście  $\bar{v} \cdot T$  jest liczbą całkowitą, co wynika z postaci prawej strony równania (31). Jeżeli teraz  $\bar{v} = \frac{p}{q}$ , gdzie  $\frac{p}{q}$  jest ułamkiem nieskracalnym, to oczywiście najmniejszą liczbę  $T$  taką aby  $\frac{p}{q} \cdot T$  było liczbą całkowitą jest  $q$  c.b.d.o.

Przy obliczeniach numerycznych liczbę  $v$  przedstawiamy w postaci rozwinięcia dwójkowego

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^k a_i 2^{-i}.$$

Załóżmy, że jest to najkrótsze rozwinięcie dwójkowe liczby  $v$ , tzn.  $a_k \neq 0$ . Wtedy ułamek nieskracalny reprezentujący  $v$  jest postaci:

$$\frac{\sum_{i=1}^k a_i 2^{k-i}}{2^k} .$$

Z powyższego i z podanego twierdzenia wynika następujący wniosek.

### Wniosek

Jeżeli liczbę  $\bar{v}$  uzyskujemy, biorąc  $k$  cyfr rozwinięcia dwójkowego liczby  $v$ , przy czym  $k$ -ta cyfra tego rozwinięcia równa jest 1, to okres powtarzania ciągu  $\bar{z}_h$  wynosi  $T = 2^k$ .

Z powyższego widać, że dla przeciętnych długości słów maszynowych rzędu 30 okres powtarzania ciągu  $z_h$  jest wystarczająco duży dla zastosowań praktycznych. Dla dużych  $n$ , w przypadku stosowania metody opartej o nieciągłe odwzorowanie odcinka na kostkę  $n$ -wymiarową, może się okazać konieczne operowanie na słowach o kilkakrotnej długości, gdyż inaczej liczba cyfr rozwinięcia dwójkowego współrzędnych  $k_i^h$ ,  $i=1,2,\dots,n$  może okazać się zbyt mała.

## 6. PORÓWNANIE OPISANYCH METOD GENERACJI WSPÓLRZEDNYCH PUNKTÓW RÓWNOMIERNIE ROZMIESZCZONYCH W KOSTCE $[0,1]^n$

Omówione metody różnią się zasadniczo tym, że opierają się odpowiednio o ciągłe i nieciągłe odwzorowania odcinka na kostkę. Wszystkie znane metody oparte o ciągłe odwzorowanie odcinka na kostkę mają następujące wady:

1. Algorytm odwzorowania ciągu  $\{z_h\}$  na ciąg wektorów  $n$ -wymiarowych

$$\{ (k_1^h, k_2^h, \dots, k_n^h) \}$$

komplikuje się w miarę wzrostu  $n$ .



2. Każde ciągle odwzorowanie odcinka na kostkę nie jest wzajemnie jednoznaczne, tzn. istnieją punkty w kostce, z których każdy odpowiada kilku różnym punktom z odcinka. Np. zgodnie z twierdzeniem Hahna-Mazurkiewicza dla każdego odwzorowania ciągłego odcinka na kwadrat istnieje nieskończenie wiele punktów kwadratu, z których każdy odpowiada conajmniej trzem różnym punktom odcinka.

Należy jednak zauważyć, że sformułowania w p. 2 dotyczą wszystkich punktów odcinka, podczas gdy w rzeczywistości interesuje nas tylko to czy odwzorowanie punktów z odcinka określonych ciągiem  $\{z_h\}$  na punkty kostki jest wzajemnie jednoznaczne. Autor nie zna jak dotąd formalnego na to dowodu, tzn. że w ciągu  $\{z_h\}$  nie występują punkty, których obrazem w kostce byłby ten sam punkt. Podczas przeprowadzanych eksperymentów nie stwierdzono ich istnienia.

Wad tych nie posiada metoda oparta o nieciągle odwzorowanie odcinka na kostkę n-wymiarową. Po pierwsze znana jest ogólna postać funkcji odwzorowującej  $z_h$  na  $(k_1^h, k_2^h, \dots, k_n^h)$  (n-dowolne). Po drugie A.J. Blikle udowodnił, że tylko te punkty odcinka mają identyczne obrazy w kostce, których odległość jest liczbą wymierną, podczas gdy różnica dowolnych dwóch wyrazów ciągu  $\{z_h\}$  jest liczbą niewymierną.

O równomierności rozmieszczenia punktów w kostce, których współrzędne zostały określone w oparciu o metodę ciągłego odwzorowania odcinka na kostkę świadczą tylko eksperymentalne wyniki z badania współczynnika Steinhaus'a, którego wartość zależy od przyjętego a priori podziału na obszary elementarne. Równomierność rozmieszczenia punktów w kostce, których współrzędne określone są w oparciu o metodę nieciągłego odwzorowania odcinka na kostkę, jest formalnie udowodniona przez udowodnienie własności ekwipartycji.

Z powyższych rozważań wynika, że metoda oparta o nieciągle odwzorowanie odcinka na kostkę n-wymiarową jest bardziej pre-  
dykcyjna do zastosowania w chwili obecnej.

Tabela 4

+0049 kwadratów			+0,560000
h	s	j	
+00000000049	+0,489796	+0,551020	
+00000000098	+0,204082	+0,561224	
+00000000147	+0,190476	+0,544218	
+00000000196	+0,244898	+0,556122	
+00000000245	+0,163265	+0,546939	
+00000000294	+0,149660	+0,554422	
+00000000343	+0,163265	+0,556851	
+00000000392	+0,147959	+0,551020	
+00000000441	+0,113379	+0,555556	
+00000000490	+0,126531	+0,555102	
+00000000539	+0,163265	+0,558442	
+00000000588	+0,163265	+0,557823	
+00000000637	+0,163265	+0,555730	
+00000000686	+0,142857	+0,558309	
+00000000735	+0,119728	+0,557823	
+00000000784	+0,135204	+0,559949	
+00000000833	+0,112845	+0,560624	
+00000000882	+0,124727	+0,560091	
+00000000931	+0,105263	+0,561762	
+00000000980	+0,108163	+0,560204	
+0169 kwadratów			+0,240000
h	s	j	
+00000000169	+0,473373	+0,242604	
+00000000338	+0,437870	+0,242604	
+00000000507	+0,331361	+0,248521	
+00000000676	+0,307692	+0,248521	
+00000000845	+0,267456	+0,246154	
+00000001014	+0,220907	+0,248521	
+00000001183	+0,231615	+0,245139	
+00000001352	+0,229290	+0,243343	
+00000001521	+0,182774	+0,243918	
+00000001690	+0,181065	+0,243195	
+00000001859	+0,192577	+0,242066	
+00000002028	+0,167653	+0,242110	
+00000002197	+0,167501	+0,242148	
+00000002366	+0,191885	+0,242181	
+00000002535	+0,185404	+0,242209	
+00000002704	+0,176036	+0,242604	
+00000002873	+0,197007	+0,241907	
+00000003042	+0,203156	+0,241946	
+00000003211	+0,201806	+0,241981	
+00000003380	+0,225444	+0,241420	



Tabela 5

+0049 kwadratów		+0,560000
h	s	j
+00000000049	+0,816327	+0,510204
+00000000098	+0,530612	+0,530612
+00000000147	+0,585034	+0,551020
+00000000196	+0,673469	+0,551020
+00000000245	+0,506122	+0,559184
+00000000294	+0,571429	+0,557823
+00000000343	+0,588921	+0,559767
+00000000392	+0,469388	+0,561224
+00000000441	+0,485261	+0,553288
+00000000490	+0,461224	+0,561224
+00000000539	+0,404453	+0,565863
+00000000588	+0,428571	+0,562925
+00000000637	+0,370487	+0,563579
+00000000686	+0,376093	+0,564140
+00000000735	+0,321088	+0,563265
+00000000784	+0,321429	+0,562500
+00000000833	+0,328932	+0,561825
+00000000882	+0,390023	+0,563492
+00000000931	+0,367347	+0,561762
+00000000980	+0,320408	+0,559184
+0169 kwadratów		+0,240000
h	s	j
+00000000169	+0,579882	+0,236686
+00000000338	+0,615385	+0,233728
+00000000507	+0,524655	+0,236686
+00000000676	+0,434911	+0,235207
+00000000845	+0,366864	+0,229586
+00000001014	+0,360947	+0,233728
+00000001183	+0,368555	+0,234150
+00000001352	+0,318047	+0,235947
+00000001521	+0,265615	+0,236029
+00000001690	+0,274556	+0,234911
+00000001859	+0,272189	+0,237224
+00000002028	+0,271203	+0,237673
+00000002197	+0,242148	+0,238052
+00000002366	+0,240913	+0,237954
+00000002535	+0,218540	+0,237475
+00000002704	+0,216716	+0,237056
+00000002873	+0,233902	+0,237383
+00000003042	+0,212360	+0,238659
+00000003211	+0,202429	+0,238555
+00000003380	+0,182840	+0,238757

Pewne wątpliwości budzić może jednak to, dlaczego jako liczbę niewymierną przyjmować liczbę złotą. Nie jest przecież udowodnione, że uzyska się wtedy lepszą ekwipartycję w sensie oszacowania (4). Przesłanką do takiej decyzji jest tylko to, że w chwili obecnej nie jest znana żadna inna liczba niewymierna, która pozwalałaby uzyskać lepszą ekwipartycję na odcinku, i przypuszczenie, że lepsza ekwipartycja ciągu  $\{z_n\}$  pozwala uzyskać lepszą ekwipartycję w kostce  $n$ -wymiarowej. Tak więc zagadnienie to pozostaje nadal otwarte i będzie można je rozwiązać dopiero po udowodnieniu przez matematyków odpowiednich twierdzeń.

#### Literatura

- [1] STEINHAUS H.: Liczby złote i żelazne. Zastosowania matematyki t. III, zeszyt 1, 1956.
- [2] ZUBRZYCKA K.: O rozmieszczaniu punktów próbkowych na płaszczyźnie. Zastosowania matematyki, t. V, zeszyt 2, 1960.
- [3] ROTENBERG A.: A New Pseudo-random Number Generator. JACM N<sup>o</sup>, 1960.
- [4] BUDKOWSKI S.: O pewnych metodach optymalizacji układów logicznych. Rozprawa doktorska, Warszawa 1967.
- [5] BUDKOWSKI S.: Optymalizacja układu logicznego negacji sumy metodą ślepego przeszukiwania przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Rozprawy Elektrotechniki N2, 1969.
- [6] OSTROWSKI A.: Bemerkung zur Theorie der Diaphantischen Approximation, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität, 1, 1922 oraz 3, 1924.
- [7] PARCHOMIENKO A.S.: Co to jest linia, Warszawa 1961.
- [8] KURATOWSKI K.: Wstęp do teorii mnogości i topologii, Warszawa 1955.
- [9] BUDKOWSKI S.: O pewnych metodach optymalizacji układów logicznych. Archiwum Autom. i Telem. N<sup>o</sup> 4, 1969.



## О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ ГЕНЕРИРОВАНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК, РАВНОМЕРНО РАСПОЛОЖЕННЫХ В N-МЕРНОМ КУБЕ

### Резюме

Описываются методы генерирования координат точек, равномерно расположенных в  $n$ -мерном кубе, которые основаны на отображении отрезка  $[0,1]$  в  $n$ -мерной куб. Точки отрезка определяются величиной золотого сечения. Статья является продолжением работ Н.Стейнгауза и З.Зубжискей, которыми приводятся методы генерирования координат точек, равномерно расположенных на отрезке и в квадрате.

Описанный метод используется, в частности, для реализации последовательности точек выборки методом слепого поиска в пространстве переменных.

### SOME METHOD OF COORDINATES' GENERATION CONSIDERING POINTS EQUALLY SPACED IN THE $n$ -DIMENSIONAL CUBE

### Summary

The methods of coordinate generation in case of points equally spaced in the  $n$ -dimensional cube are described. These methods employ both continuous and discrete mapping of segment  $[0,1]$  into  $n$ -dimensional cube, while the segment points are defined by means of the sequence of gold numbers. The paper is a continuation of works of H. Steinhaus and Z. Zubrzycka who have shown methods of coordinate generation in case of points equally spaced in both segment and quadrangle.

The described method was employed in order to generate the sequence of sample points in the logic circuits' optimisation algorithm by means of free scanning of the decision variables' space.

