ALGORYTMY

Vol. IV • No. 8 • 1968

INSTYTUT MASZYN MATEMATYCZNYCH

A L G O R Y T M Y
Vol. IV N° 8 1968

Antoni MAZURKIEWICZ

O PROBLEMIE CZYTANIA DLA PEWNYCH JĘZYKÓW FORMALNYCH

Adres redakcji: Warszawa, ul. Koszykowa 79, tel. 28-37-29

P r a c a   d o k t o r s k a

obroniona w Instytucie Matematycznym PAN dnia 27 czerwca 1965 r.

Promotor: prof. dr Leon ŁUKASZEWICZ

Recenzenci: prof. dr Andrzej MOSTOWSKI
prof. dr Jerzy SŁUPECKI
doc. dr Zdzisław PAWLAK

SPIS TREŚCI

Używana symbolika:

$x \in W$ Oznacza przynależność elementu x do zbioru W; gdy x jest literą, a W jest słowem, oznacza przynależność litery x do słowa W.

$A < B$ Jeśli A i B są słowami, oznacza, że A jest częścią słowa B.

$U \cup W$ Oznacza sumę zbiorów U i W.

$U \cap W$ Oznacza część wspólną zbiorów U i W.

$U \times W$ Oznacza iloczyn kartezjański zbiorów U i W /tzn. zbiór wszystkich takich par uporządkowanych (x,y), że $x \in U$ i $y \in W$/.

$\bigcup_{i \in J} W_i$ Oznacza sumę tych zbiorów rodziny $\{W_i\}$, dla których $i \in J$.

$\{X_1, X_2, \ldots, X_n \mid W(X_1, X_2, \ldots, X_n)\}$ Oznacza zbiór tych i tylko tych układów uporządkowanych $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, dla których zachodzi $W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Instytut Maszyn Matematycznych
Algorytmy N^{o} 8

O PROBLEMIE CZYTANIA DLA PEWNYCH JĘZYKÓW FORMALNYCH

Antoni MAZURKIEWICZ

Pracę złożono 12.9.1966 r.

The paper deals with recognition and parsing algorithms for phrase structure languages. The main result is that for each context free language there exists a context-sensitive language which is equivalent to the given language, and on the other hand is much simpler with respect to the recognition and parsing process. The transforming and recognition algorithms are given.

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

W ostatnich latach notuje się wzrost zainteresowania praktyczną stroną problemów, dotyczących języków formalnych. Tłumaczy się to rozwojem języków programowania i potrzebą konstrukcji programów tłumaczących dla takich języków tj. programów, przekształcających zapis algorytmów w języku programowania na zapis tych algorytmów w języku maszyny cyfrowej. Języki programowania weszły obecnie w stadium formalizacji np. został stworzony formalizm, służący do opisu ich składni [1]. W związku z tym, niektóre problemy praktyczne dotyczące tych języków można wyrazić w czysto matematycznej formie. Należy do nich "problem czytania", któremu jest poświęcona niniejsza praca.

1.2. Problem czytania

Niech będzie dany pewien niepusty zbiór przedmiotów, zwanych literami. Skończony ciąg liter $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywać będziemy słowem o długości $d(X) = n$. Słowo, zawierające zero liter nazywać będziemy słowem pustym i jego długość przyjmujemy jako równą zeru. Jeśli U, V są słowami, to przez UV oznaczać będziemy konkatenację słów U, V. Językiem $\mathfrak{J}$ nazywać będziemy parę $(G(\mathfrak{J}), B(\mathfrak{J}))$, gdzie $B(\mathfrak{J})$ jest pewnym niepustym zbiorem słów, zwanym bazą języka $\mathfrak{J}$, $G(\mathfrak{J})$ jest skończonym zbiorem uporządkowanych par słów, zwanym gramatyką języka $\mathfrak{J}$. Powiemy, że słowo W jest słowem języka $\mathfrak{J}$, jeśli istnieje taki skończony ciąg słów $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$, $n \geqslant 0$, że $W = W_0$, $W_n \in B(\mathfrak{J})$ oraz dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ istnieją słowa P_i, T_i, X_i, Y_i takie, że $W_{i-1} = P_i X_i T_i$, $W_i = P_i Y_i T_i$ i $(X_i, Y_i) \in G(\mathfrak{J})$. Ciąg $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ nazywamy przy tym rozkładem syntaktycznym słowa W w języku $\mathfrak{J}$. Problemem czytania dla języka $\mathfrak{J}$ i słowa W nazwiemy następujący problem:

Dany jest język $\mathfrak{J}$ i słowo W. Należy stwierdzić, czy W jest słowem języka $\mathfrak{J}$ czy też nie.

W zagadnieniach związanych z konstrukcją programów tłumaczących większe znaczenie praktyczne posiada bardziej ogólny problem, który nazwiemy problemem czytania dla języka $\mathfrak{J}$:

Dany jest język $\mathfrak{J}$ i pewna klasa słów. Należy znaleźć algorytm pozwalający dla każdego słowa W danej klasy rozstrzygnąć problem czytania dla języka $\mathfrak{J}$ i słowa W.

W zagadnieniach tych "słowem" jest program dla maszyny cyfrowej, gramatyką - opis syntaktyczny języka, "bazą" - zazwyczaj jeden wybrany element opisu języka np. w opisie języka ALGOL 60 [8] bazą jest jednostka syntaktyczna <program>. Jest rzeczą pożyteczną, aby poszukiwany algorytm, w przypadku pozytywnego rozstrzygnięcia problemu czytania dla słowa W, określał rozkład syntaktyczny tego słowa. W większości programów tłumaczących języki programowania jeden z ich zasadniczych fragmentów stanowi algorytm czytania. Na przykład w programie tłumaczącym język SAKO [6, 7] fragment taki jest wydzielony i nosi nazwę "Identyfikatora" [9]. W ostatnim czasie problem czytania dla języków programowania jest rozpatrywany w formie jeszcze bardziej ogólnej; poszukuje się mianowicie rozwiązania następującego problemu:

Dana jest pewna klasa języków. Należy znaleźć algorytm, pozwalający rozwiązać problem czytania dla każdego języka danej klasy.

Dąży się w ten sposób do określenia konstrukcji uniwersalnych programów tłumaczących [2, 4, 5]. W niniejszej pracy rozpatruje się możliwość rozwiązania problemu czytania dla pewnej klasy języków przez sprowadzenie tego problemu do pewnej innej klasy, dla której problem ten jest stosunkowo łatwo rozwiązywalny.

1.3. Języki proste

Bezpośrednią redukcją w $\mathfrak{J}$ słowa W nazywamy takie słowo V, że istnieją słowa P, T, X, Y takie, że $W = PXT$, $V = PYT$ i $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$. Język $\mathfrak{J}$ o tej właściwości, że dla każdego słowa W języka $\mathfrak{J}$ istnieje co najwyżej jedna bezpośrednia redukcja w $\mathfrak{J}$, nazywamy prostym. Jeśli $\mathfrak{J}$ jest językiem prostym, to ma on następującą właściwość: dla każdego słowa W w tym języku istnieje dokładnie jeden ciąg słów $(W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ taki, że $W = W_0$, W_i jest bezpośrednią redukcją w $\mathfrak{J}$ słowa W_{i-1} dla $i = 1, 2, \ldots$, oraz w ciągu tym, dla pewnego $m \geqslant 0$ występuje element $W_m \in B(\mathfrak{J})$.

Ta właściwość języków prostych posiada zasadnicze znaczenie dla konstrukcji algorytmów rozstrzygających problem czytania. Można postawić pytanie następujące: dana jest pewna klasa języków; czy dla każdego języka $\mathfrak{J}$ tej klasy i pewnego zbioru słów da się skonstruować język prosty $\mathfrak{L}$ oraz słowa X, Y o tej właściwości, że problem czytania dla języka $\mathfrak{J}$ i słowa W tego zbioru jest równoważny problemowi czytania dla języka $\mathfrak{J}$ i słowa XWY. Niniejsza praca daje odpowiedź twierdzącą na to pytanie.

1.4. Twierdzenie o równoważności

Nazwijmy językiem typu 2 język $\mathfrak{J}$ o następujących właściwościach:

1^{o}. Zbiór $B(\mathfrak{J})$ jest zbiorem skończonym.

2^{o}. Dla każdego $S \in B(\mathfrak{J})$ jest $d(S) = 1$ i nie istnieją takie słowa X, Y, P, że $(XSY, P) \in G(\mathfrak{J})$.

3^{o}. Jeśli $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$ to $d(X) \geq d(Y) = 1$.

4^{o}. Nie istnieje taki ciąg słów. $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n > 0$, że $(X_{i-1}, X_i) \in G(\mathfrak{J})$ dla $i = 1,2, \ldots, n$ oraz $X_0 = X_n$. /Założenie o niecykliczności gramatyki/.

Słowo W języka $\mathfrak{J}$, dla którego nie istnieje takie słowo V, że W jest bezpośrednią redukcją w $\mathfrak{J}$ słowa V, nazywamy słowem terminalnym języka $\mathfrak{J}$. Alfabetem terminalnym języka $\mathfrak{J}$ nazywamy zbiór wszystkich liter, wchodzących w skład słów terminalnych języka $\mathfrak{J}$. Słowem w alfabecie terminalnym języka $\mathfrak{J}$ nazwiemy każde słowo, zbudowane wyłącznie z liter alfabetu terminalnego języka . Słowo takie, rzecz jasna, nie musi być słowem języka $\mathfrak{J}$. Ma miejsce następujące twierdzenie:

Dla każdego języka $\mathfrak{J}$ typu 2 istnieją takie słowa X, Y oraz języki proste $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$, o wspólnej gramatyce, że dla każdego słowa w alfabecie terminalnym $\mathfrak{J}$ zachodzi:

1^{o}. W jest słowem języka $\mathfrak{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy XWY jest słowem języka $\mathfrak{L}_1$;

2^{o}. W nie jest słowem języka $\mathfrak{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy XWY jest słowem języka $\mathfrak{L}_2$.

Z dowodu tego twierdzenia wynika jego konstrukcyjny charakter. Istotnym w konstrukcji języka $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ jest fakt uporządkowania zbioru $G(\mathfrak{J})$ i przyporządkowania w sposób wzajemnie jednoznaczny pewnych nazw jego elementom. Alfabet języków $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ zawiera alfabet języka $\mathfrak{J}$ oraz zbiór nazw wszystkich elementów gramatyki $G(\mathfrak{J})$. W tym sensie języki $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ zawierają fragment metajęzyka, opisującego język $\mathfrak{J}$. Jeśli W jest słowem języka $\mathfrak{J}$, to w myśl twierdzenia, istnieje ciąg $(U_0, U_1, \ldots, U_m)$ taki, że $U_0 = XWY$, $U_m \in B(\mathfrak{L})_1$ i U_i jest bezpośrednią redukcją w $\mathfrak{L}_1$ słowa U_{i-1}. Słowo U_m ma wówczas postać XW_nYR, gdzie $W_n \in B(\mathfrak{J})$ a słowo R opisuje za pośrednictwem przyjętych nazw elementów $G(\mathfrak{J})$ rozkład syntaktyczny słowa W z języku $\mathfrak{J}$. Języki $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ posiadają wspólną gramatykę; można więc mówić o bezpośredniej redukcji w $\mathfrak{L}$ słowa W, rozumiejąc przez to zarówno bezpośrednią redukcję w $\mathfrak{L}_1$ słowa W, jak i bezpośrednią redukcję w $\mathfrak{L}_2$ tego słowa.

1.5. Algorytm

Niżej opisany proces jest algorytmem, wynikającym z przytoczonego twierdzenia. Stanowi on rozwiązanie problemu czytania dla każdego języka typu 2 i dla każdego słowa W w alfabecie terminalnym języka $\mathfrak{T}$.

1. Na podstawie opisu języka utworzyć słowa X,Y oraz języki $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$.
2. Zbudować słowo XWY.
3. Zbadać, czy otrzymane słowo należy do bazy języka $\mathfrak{L}_1$; jeśli tak, to przejść do punktu 6, jeśli nie, to przejść do punktu 4.
4. Zbadać, czy otrzymane słowo należy do bazy języka $\mathfrak{L}_2$; jeśli tak, to przejść do punktu 7, jeśli nie, to przejść do punktu 5.
5. Utworzyć bezpośrednią redukcje w $\mathfrak{L}$ otrzymanego słowa i przejść do punktu 3.
6. Koniec procesu; słowo W jest słowem języka $\mathfrak{T}$. Ostatnio otrzymane słowo określa rozkład syntaktyczny W w języku $\mathfrak{T}$.
7. Koniec procesu; słowo W nie jest słowem języka $\mathfrak{T}$.

Powyższy proces jest opisany jednoznacznie, gdyż słowo XWY, w myśl prawa wyłączonego środka, jest słowem albo języka $\mathfrak{L}_1$ albo języka $\mathfrak{L}_2$. Stąd, na mocy faktu, że $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ są proste, wynika, że ciąg $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ taki, że $XWY = U_0$, U_i jest bezpośrednią redukcją w $\mathfrak{L}$ słowa U_{i-1} dla $i \geqslant 1$ jest przez W wyznaczony jednoznacznie. Ponadto dla pewnego $m \geqslant 0$ $U_m \in B(\mathfrak{L}_1)$, jeśli W jest słowem $\mathfrak{T}$ lub $U_m \in B(\mathfrak{L}_2)$, jeśli W nie jest słowem $\mathfrak{T}$. Dowodzi to skończoności procesu.

1.6. Realizacja maszynowa

Na podstawie zadanego języka $\mathfrak{J}$ tworzy się w pamięci maszyny tzw. "tablicę kontekstów". Mając dane słowo, wprowadza się do pamięci maszyny kolejne /od lewej/ litery danego słowa, korzystając z dwu list o organizacji "stosu" /w ang. "stack" [10]/, jednej nazywanej "stosem liter", drugiej – "stosem nazw". W momencie rozpoczęcia procesu oba stosy są puste. W trakcie procesu wpisuje się kolejne wprowadzane litery badanego słowa na stos liter. Na podstawie grupy liter, znajdującej się aktualnie na wierzchołku stosu i tablicy kontekstów określa się czynności, które trzeba wykonać na obydwu stosach. Czynności te polegają na zmianach stanu pewnych pomocniczych wskaźników, zastępowaniu grup liter na wierzchołku stosu liter przez inne, wpisywaniu bądź wymazywaniu nazw elementów gramatyki $G(\mathfrak{J})$ z wierzchołka stosu nazw.

W momencie zakończenia procesu, w przypadku pozytywnym, stos liter zawiera tylko jeden element, a mianowicie element bazy języka badanego, stos nazw zawiera ciąg nazw elementów $G(\mathfrak{J})$, określający rozkład syntaktyczny badanego słowa. W przypadku negatywnym, stos liter zawiera wszystkie litery badanego słowa, zaś stos nazw jest pusty.

2. PODSTAWOWE OKREŚLENIA I DEFINICJE

Niech $\mathfrak{R}$ będzie niepustym zbiorem przedmiotów zwanych l i t e r a m i. Skończony ciąg X liter

$$X = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

nazywamy s ł o w e m w $\mathfrak{R}$ o d ł u g o ś c i m. Ciąg zawierający zero liter nazywać będziemy s ł o w e m p u s t y m. W dalszym ciągu pracy będziemy oznaczać słowa dużymi literami alfabetu, litery – małymi. Słowo puste oznaczać będziemy symbolem $\emptyset$. Długość słowa X oznaczać będziemy przez $d(X)$; przyjmujemy $d(\emptyset) = 0$.

Dla każdych dwu słów określone jest działanie, zwane k o n k a t e n a c j ą. Mówimy, że Z jest wynikiem konkatenacji, albo krócej, konkatenacją słów $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $Y = y_1, y_2, \ldots$ $\ldots y_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$Z = x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m.$$

Konkatenacja jest działaniem łącznym, co pozwala zapisywać konkatenację kilku słów nie używając nawiasów, określających kolejność wykonywania tego działania.

Zgodnie z określeniem słowa pustego mamy dla każdego X:

$$X \emptyset = \emptyset X = X$$

Jeśli $Z = XYU$ to piszemy $Y < Z$; jeśli przy tym $Y = a$, to piszemy $a \in Z$. Prawdziwe są następujące zależności:

1. $d(XY) = d(X) + d(Y)$.
2. $d(X) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = a$ dla pewnej litery a.
3. Jeśli $X < Y$ to $d(X) \leqslant d(Y)$; w przypadku tym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y$.
4. Jeśli $d(X) = n + k$, n, k – liczby naturalne, wówczas istnieje dokładnie jedno takie U i dokładnie jedno takie V, że $X = UV$ i $d(U) = n$, $d(V) = k$.
5. Jeśli $XY = UV$ i $X < U$, to $V < Y$.

Niech $\mathfrak{W}$ oznacza dowolny zbiór słów. Przez Alf $(\mathfrak{W})$ rozumiemy zbiór wszystkich liter należących do słów zbioru $\mathfrak{W}$:

Alf $(\mathfrak{W}) = \{a \mid a \in \mathfrak{R}$ i istnieje takie $X \in \mathfrak{W}$ że $a \in X\}$. Jeśli $\mathfrak{A} = \mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$, to przez Alf $(\mathfrak{A})$ rozumiemy zbiór Alf $(\mathfrak{W}) \cup$ $\cup$ Alf $(\mathfrak{T})$.

<u>Definicja 1.1</u>

Niech $\mathfrak{W}$ oznacza zbiór wszystkich słów w $\mathfrak{R}$ i niech $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{W} \times \mathfrak{W}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{W}$. Parę $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ nazywać będziemy j ę z y k i e m o g r a m a t y c e $\mathfrak{G}$ i b a z i e $\mathfrak{B}$.

Niech $\mathfrak{J} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ będzie dowolnym językiem. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

1. $G(\mathfrak{J}) = \mathfrak{G}$,

2. $B(\mathfrak{J}) = \mathfrak{B}$.

Każdą parę $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$ nazywamy p r o d u k c j ą o p o p r z e d n i k u X i n a s t ę p n i k u Y. Każde słowo $S \in B(\mathfrak{J})$ nazywamy s ł o w e m p o d s t a w o w y m języka $\mathfrak{J}$.

3. $BR(\mathfrak{J}) = \{X,Y \mid$ istnieją takie słowa X_1, X_2 oraz produkcją $(P,Q) \in G(\mathfrak{J})$, że $X = X_1PX_2$ i $Y = X_1QX_2\}$.

Relację $BR(\mathfrak{J})$ nazywać będziemy relacją b e z p o ś r e d n i e j r e d u k c j i w $\mathfrak{J}$ lub krócej, b - r e d u k c j ą w $\mathfrak{J}$. Będziemy też mówić, że Y jest b-redukcją X w $\mathfrak{J}$, lub że X jest b e z p o ś r e d n i ą k o n s e k w e n c j ą /w skrócie: b - k o n s e k w e n c j ą/ słowa Y w $\mathfrak{J}$. Produkcję (P,Q) nazywać będziemy produkcją p r z e p r o w a d z a j ą c ą X w Y.

4. Ciąg /skończony lub nie/ słów $\{W_i\}$, $i \geqslant 0$, o tej właściwości, że

$$(W_{i-1}, W_i) \in BR(\mathfrak{J})$$

dla $i > 0$ nazywać będzie w y w o d e m w $\mathfrak{J}$.

Słowo W_o nazywamy p o c z ą t k i e m wywodu. Jeśli wywód jest skończony, to wówczas ostatnie słowo wywodu nazywamy k o ń c e m wywodu. Jeśli wywód $W_o, W_1, \ldots, W_n$ ma tę właściwość, że W_n nie ma b-redukcji w $\mathfrak{J}$, to wywód taki nazywamy p e ł n y m.

5. $R(\mathfrak{J}) = \{X,Y \mid$ istnieje skończony wywód $(W_o, W_1, \ldots, W_n)$ w $\mathfrak{J}$ taki, że $n \geqslant 0$ i $X = W_o, Y = W_n\}$.

Relację $R(\mathfrak{J})$ nazywać będziemy relacją r e d u k c j i w $\mathfrak{J}$. Jeśli $(X,Y) \in R(\mathfrak{J})$, to będziemy też mówić, że Y jest r e d u k c j ą X w $\mathfrak{J}$, lub że X jest k o n s e k w e n c j ą Y w $\mathfrak{J}$. Mówiąc o w y w o d z i e Y z X w $\mathfrak{J}$, jeśli $(X,Y) \in R(\mathfrak{J})$, będziemy mieli na myśli pewien konkretny wywód $(W_o, W_1, \ldots W_n)$ taki, że $X = W_o$, $Y = W_n$. Wywód taki będziemy nazywać w y w o d e m r e a l i z u j ą c y m redukcję (X,Y) w $\mathfrak{J}$. Liczbę naturalną n nazywać będziemy d ł u g o ś c i ą w y w o d u $(W_o, W_2, \ldots, W_n)$ i oznaczać przez $D_{\mathfrak{J}}(W_o, W_1, \ldots, W_n)$. Mówiąc o długości wywodu Y z X w $\mathfrak{J}$, jeśli $(X,Y) \in R(\mathfrak{J})$, będziemy mieli na myśli długość pewnego konkretnego wywodu, realizującego tę redukcję. Długość tego wywodu oznaczać będzie przez $D_{\mathfrak{J}}(X,Y)$.

Relacja $R(\mathfrak{J})$, jak można łatwo stwierdzić, jest przechodnia i zwrotna. Jeśli $D_{\mathfrak{J}}(X,Y) = n > 0$ to istnieje takie Z, że $(X,Z) \in R(\mathfrak{J})$, $(Z,Y) \in BR(\mathfrak{J})$, $D_{\mathfrak{J}}(X,Z) = n-1$. Istnieje też takie Z', że $(X,Z') \in BR(\mathfrak{J})$, $(Z',Y) \in R(\mathfrak{J})$ i $D_{\mathfrak{J}}(Z',Y) = n-1$.

Powiemy, że słowo X nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, jeśli nie istnieje takie Y, że $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$; w przeciwnym przypadku mówimy, że X ma redukcję w $\mathfrak{J}$. Powiemy, że X nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$, jeśli nie istnieje takie Y, że $(Y,X) \in BR(\mathfrak{J})$; w przeciwnym przypadku powiemy, że X ma konsekwencję w $\mathfrak{J}$.

6. $Red_{\mathfrak{J}}(X) = \{Y \mid (X,Y) \in R(\mathfrak{J})\}$.

Zbiór $Red_{\mathfrak{J}}(X)$ jest zbiorem wszystkich redukcji słowa X w $\mathfrak{J}$

<u>Lemmat 1.1.</u>

Niech $G(\mathfrak{J})$ będzie zbiorem skończonym.

Wówczas zbiór:

$$Alf\left(Red_{\mathfrak{J}}(X)\right)$$

jest skończony dla każdego X.

<u>Dowód</u>

Niech $\mathfrak{Z}(X) = Alf(X) \cup Alf(G(\mathfrak{J}))$. Jest oczywiście $Alf(X) \subset \mathfrak{Z}(X)$. Jeśli $Alf(X) \subset \mathfrak{Z}(X)$ i $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$, to na mocy definicji relacji $BR(\mathfrak{J})$, $Alf(Y) \subset \mathfrak{Z}(X)$. Wnioskujemy stąd przez indukcję, że każda redukcja Y słowa X ma tę własciwość, że $Alf(Y) \subset \mathfrak{Z}(X)$. Ponieważ $Alf(Red_{\mathfrak{J}}(X)) = \bigcup\limits_{Y = Red_{\mathfrak{J}}(X)} Alf(Y)$ więc $Alf(Red_{\mathfrak{J}}(X)) \subset \bigcup\limits_{X = Red_{\mathfrak{J}}(X)} \mathfrak{Z}(X) = \mathfrak{Z}(X)$.
$\mathfrak{Z}(X)$ jest zbiorem skończonym dla każdego X, gdyż $G(\mathfrak{J})$ jest zbiorem skończonym, skąd $Alf(Red_{\mathfrak{J}}(X))$ jest zbiorem skończonym.

D e f i n i c j a 1.2.

Gramatykę nazywamy c y k l i c z n ą, gdy istnieje ciąg słów: $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, $n > 0$, o tej właściwości, że dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $(P_{i-1}, P_i) \in G(\mathfrak{J})$ oraz $P_0 = P_n$. Jeśli gramatyka nie jest cykliczna, to mówimy, że jest n i e c y k l i c z n ą.

D e f i n i c j a 1.3.

Produkcje (XU, V), (PX, Q) nazywamy z a z ę b i o n y m i, gdy $UP \neq \emptyset$. Jeśli w gramatyce $\mathfrak{G}$ występują produkcje zazębione, to gramatykę tę nazywamy z a z ę b i o n ą. W przeciwnym przypadku gramatykę nazywamy n i e z a z ę b i o n ą. Słowo X nazywamy słowem z a z ę b i e n i a gramatyki $\mathfrak{G}$.

D e f i n i c j a 1.4.

Język $\mathfrak{J}$ nazywamy językiem t y p u 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $G(\mathfrak{J})$ jest skończona i niepusta oraz dla każdej produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$ zachodzi $d(X) \geqslant 1$, $d(Y) \geqslant 1$.

Język $\mathfrak{J}$ nazywamy językiem t y p u 2, jeśli jest językiem typu 1, $G(\mathfrak{J})$ jest niecykliczna, $B(\mathfrak{J})$ jest zbiorem skończonym i dla każdej produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$ zachodzi $d(Y) = 1$ oraz jeśli $S \in B(\mathfrak{J})$ to $d(S) = 1$ i dla każdych P, Q, T $(PSQ, T) \notin G(\mathfrak{J})$.

Język $\mathfrak{J}$ nazywamy językiem t y p u 3, jeśli jest językiem typu 2, $G(\mathfrak{J})$ jest niezazębiona i dla każdej produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$ zachodzi $d(X) \leqslant 2$.

P r z y k ł a d y 1.1.

1. Język $\mathfrak{R}$, typu 2:

$$G(\mathfrak{R}) = \left\{ \begin{array}{c} (a,t) \\ (at,t) \\ (b,u) \\ (aua,u) \\ (tu,s) \end{array} \right\} \qquad B(\mathfrak{R}) = \{s\}.$$

2. Język $\mathfrak{P}$, typu 3:

$$G(\mathfrak{P}) = \left\{ \begin{array}{l} (a,o) \\ (a,t) \\ (a,w) \\ (b,u) \\ (t,e) \\ (t,f) \\ (of,t) \\ (ou,v) \\ (eu,s) \\ (vw,u) \end{array} \right\} \qquad B(\mathfrak{P}) = \{s\}$$

3. Język $\mathfrak{M}$, typu 1:

$$G(\mathfrak{M}) = \left\{ \begin{array}{l} (b,u) \\ (aua,u) \\ (au\omega,\ tu\omega) \\ (at,t) \\ (\alpha tu,\ \alpha s) \end{array} \right\} \qquad B(\mathfrak{M}) = \{\alpha s \omega\}$$

D e f i n i c j a 1.5.

Słowo X nazywamy s ł o w e m j ę z y k a $\mathfrak{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $S \in B(\mathfrak{J})$ zachodzi $(X,S) \in R(\mathfrak{J})$. Jeśli ponadto X nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$, to X nazywamy s ł o w e m t e r m i n a l n y m języka $\mathfrak{J}$. Zbiór słów języka oznaczamy przez $S(\mathfrak{J})$, zbiór słów terminalnych oznaczamy przez $ST(\mathfrak{J})$.

P r z y k ł a d 1.2.

Słowo "aaaabaa" jest słowem terminalnym języka $\mathfrak{K}$, zdefiniowanego w przykładzie 1.1. Słowo "ataua" nie jest słowem terminalnym języka $\mathfrak{K}$, jest natomiast słowem tego języka.

D e f i n i c j a 1.6

Mówimy, że język $\mathfrak{J}_1$ jest równoważny językowi $\mathfrak{J}_2$, jeśli $ST(\mathfrak{J}_1) = ST(\mathfrak{J}_2)$. Piszemy wówczas $\mathfrak{J}_1 \sim \mathfrak{J}_2$. Jak można łatwo sprawdzić, relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Wykażemy obecnie, że dla każdego języka $\mathfrak{J}$ typu 2 istnieje równoważny mu język $\mathfrak{J}'$ typu 3. W tym celu wykażemy prawdziwość następujących lemmatów:

L e m m a t 1.2

Niech $(XQY,Z) \in \mathfrak{G}$ i niech $\mathfrak{G}'$ powstaje z $\mathfrak{G}$ drogą zamiany produkcji (XQY,Z) przez parę produkcji (Q,q), (XqY,Z), przy czym $q \notin Alf(\mathfrak{G})$. Wówczas dla każdego $\mathfrak{B}$:

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{G}', \mathfrak{B}).$$

D o w ó d

Niech $\mathfrak{J} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{J}' = (\mathfrak{G}', \mathfrak{B})$. Jeśli $X \in ST(\mathfrak{J})$ to istnieje wywód w $\mathfrak{J}$:

$$(W_0, W_1, \ldots, W_n) \qquad /1/$$

taki, że $W_0 = X$ i $W_n \in B(\mathfrak{J})$. Ciąg słów, powstały przez zastąpienie w /1/ każdego słowa W_i, takiego, że $W_{i-1} = UXQYV$, $W_i = UZV$ dla pewnych U i V, przez parę słów: $UXqYV$, W_i dla $i = 1,2, \ldots, n$, jest wywodem słowa $W_n \in B(\mathfrak{J})$ ze słowa X w $\mathfrak{J}'$.

Na odwrót, jeśli $Y \in ST(\mathfrak{J}')$, to istnieje wywód w $\mathfrak{J}'$:

$$(V_0, V_1, \ldots, V_m) \qquad /2/$$

taki, że $V_0 = Y$, $V_m \in B(\mathfrak{J}') = B(\mathfrak{J})$. Wówczas ciąg słów powstały z /2/ przez zastąpienie w każdym V_i litery q przez słowo Q i przez wykreślenie w tak otrzymanym ciągu każdego słowa, które jest identyczne ze słowem poprzedzającym go w tym ciągu, jest wywodem słowa Y ze słowa $V_m \in B(\mathfrak{J})$ w $\mathfrak{J}$. W ten sposób w_0 jest słowem terminalnym języka $\mathfrak{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w_0 jest słowem terminalnym języka $\mathfrak{J}'$.

L e m m a t 1.3

Dla każdego języka $\mathfrak{I}$ typu 2 istnieje język $\mathfrak{H}$ typu 2 taki, że dla każdej produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{H})$ jest $d(X) \leq 2$ i $\mathfrak{I} \sim \mathfrak{H}$.

D o w ó d

Niech $k(\mathfrak{I})$ będzie liczbą, zdefiniowaną jak następuje: dla każdej produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{I})$, niech $l(X,Y) = d(X) - 2$, gdy $d(X) > 2$ lub $l(X,Y) = 0$ gdy $d(X) \leq 2$ i

$$k(\mathfrak{I}) = \sum_{(X,Y) \in G(\mathfrak{I})} l(X,Y).$$

Ponieważ $G(\mathfrak{I})$ jest zbiorem skończonym, więc $k(\mathfrak{I})$ jest liczbą skończoną. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem $k(\mathfrak{I})$.

Jeśli $k(\mathfrak{I}) = 0$, wówczas $\mathfrak{H} = \mathfrak{I}$ spełnia tezę lemmatu, gdyż znaczy to, że dla każdej produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{I})$ jest $d(X) \leq 2$.

Załóżmy, że $n > 0$ i że lemmat jest prawdziwy dla każdego języka $\mathfrak{I}$, dla którego $k(\mathfrak{I}') = n - 1$ i niech dla języka $\mathfrak{I}$ będzie $k(\mathfrak{I}) = n$. Wówczas istnieje produkcja $(X,Y) \in G(\mathfrak{I})$ taka, że $d(X) > 2$. Niech $X = xU$, $d(U) = d(X) - 1$. Na mocy lemmatu 1.2 istnieje dla $\mathfrak{I}$ język $\mathfrak{I}'$ taki, że $\mathfrak{I} \sim \mathfrak{I}'$ i $G(\mathfrak{I}')$ powstaje z $G(\mathfrak{I})$ drogą zamiany produkcji (xU,Y) przez parę produkcji (U,v), (xv,Y). Dla tak określonej gramatyki liczba $k(\mathfrak{I}') = n - 1$, gdyż $l(xv,Y) + l(U,v) = 0 + l(X,v) - 1 = l(X,Y) - 1$, zaś dla pozostałych produkcji (P,Q) liczba $l(P,Q)$ pozostaje bez zmiany. Stąd, na mocy założenia indukcyjnego, istnieje język $\mathfrak{H}$, równoważny $\mathfrak{I}'$, o określonych w tezie lemmatu właściwościach. Na mocy przechodniości relacji $\sim$ jest $\mathfrak{I} \sim \mathfrak{H}$. Cbdo.

Przykład 1.2

Dla języka $\mathfrak{K}$, określonego w przykładzie 1.1 język $\mathfrak{H}$ o właściwości określonej w lemmacie 1.3 ma postać:

$$G(\mathfrak{H}) = \left\{ \begin{array}{l} (a,t) \\ (at,t) \\ (b,u) \\ (au,v) \\ (va,u) \\ (tu,s) \end{array} \right\} \qquad B(\mathfrak{H}) = \{s\}.$$

<u>L e m m a t 1.4</u>

Dla każdego języka $\mathfrak{H}$ typu 2, takiego, że jeśli $(X,Y) \in G(\mathfrak{H})$ to $d(X) \leqslant 2$, istnieje język $\mathfrak{J}$ typu 3, równoważny danemu: $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{J}$.

<u>D o w ó d</u>

Niech $Z(\mathfrak{H})$ będzie zbiorem wszystkich produkcji zazębionych, należących do $G(\mathfrak{H})$ i niech $m(\mathfrak{H})$ będzie ilością elementów zbioru $Z(\mathfrak{H})$. Dla każdego języka $\mathfrak{H}$ typu 2 liczba $m(\mathfrak{H})$ istnieje, gdyż $G(\mathfrak{H})$ jest zbiorem skończonym. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem $m(\mathfrak{H})$.

Jeśli $m(\mathfrak{H}) = 0$, to $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}$ spełnia tezę lemmatu.

Załóżmy, że $n > 0$ i że dla każdego języka $\mathfrak{E}$, spełniającego założenia lemmatu i takiego, że $m(\mathfrak{E})$, lemmat jest prawdziwy. Niech $m(\mathfrak{H}) = n$.

Istnieją wówczas w $G(\mathfrak{H})$ produkcje zazębione postaci:

$$(XY,Z),$$
$$(UX,V).$$

Niech $\mathfrak{E}'$ będzie językiem powstałym z $\mathfrak{H}$ przez zamianę w $G(\mathfrak{H})$ produkcji (XY,Z) parą:

$$(X,X'),$$
$$(X'Y,Z)$$

oraz niech $\mathfrak{E}$ powstaje z $\mathfrak{E}'$ przez zamianę w $G(\mathfrak{E})$ produkcji (UX,V) parą:

$$(X,X''),$$
$$(UX'',V),$$

gdzie X', X'' są słowami w alfabecie różnym od $\mathrm{Alf}(\mathfrak{H})$. Na mocy lemmatu 1.2 i przechodniości relacji $\sim$ zachodzi $\mathfrak{E} \sim \mathfrak{E}'$ i $\mathfrak{E}$ powstaje z $\mathfrak{H}$ przez zamianę w $G(\mathfrak{H})$ pary produkcji zazębionych (XY,Z) i (UX,V) czwórką niezazębionych produkcji (X,X') (X,X''), $(X'Y,Z)$, (UX'', V). Produkcje (X,X') i (X,X'') w myśl definicji 1.3 są niezazębione. Tak więc $m(\mathfrak{E}) < m(\mathfrak{H}) = n$ i na mocy założenia indukcyjnego istnieje język $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ jest typu 3. Na mocy przechodniości relacji $\sim$ zachodzi $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{H}$

Twierdzenie 1.1

Dla każdego języka $\mathfrak{J}$ typu 2 istnieje równoważny mu język $\mathfrak{P}$ typu 3.

D o w ó d

Wynika z lemmatów 1.3 i 1.4 na mocy przechodniości relacji $\sim$.

Twierdzenie to pozwala nałożyć na język badany pewne ograniczenia dotyczące budowy gramatyki tego języka, nie zmniejszając ogólności rozważań. Tak więc wszystkie następne twierdzenia, dotyczące słów terminalnych języków typu 3, pozostają prawdziwe dla języków typu 2.

P r z y k ł a d 1.3

Język $\mathfrak{P}$ typu 3 z przykładu 1.1 jest równoważny językowi $\mathfrak{K}$ typu 2, z tegoż przykładu.

3. CYKLICZNOŚĆ GRAMATYKI, WYWODY NIESKOŃCZONE, RZĄD SŁOWA

W tym paragrafie, o ile nie będzie powiedziane inaczej, język $\mathfrak{J}$ będzie językiem o bazie i gramatyce skończonej i niepustej oraz takiej, że jeśli $(X,Y) \in G(\mathfrak{J})$ to $d(X) \geqslant d(Y) = 1$. Jest on nieco ogólniejszy od języka typu 2 na skutek pominięcia założenia o niecykliczności gramatyki.

Zasadniczym celem paragrafu będzie sformułowanie zależności między cyklicznością gramatyki a istnieniem wywodów nieskończonych w języku. Ponadto określony zostanie tzw. "rząd słowa", pojęcie, z którego będziemy korzystać w § 5.

Zauważmy, że skończoność zbioru $\mathrm{Red}_{\mathfrak{I}}(X)$, co dla języków typu 2 udowodnimy poniżej, wskazuje na rozstrzygalność problemu "czytania" dla słowa X w języku $\mathfrak{I}$; można bowiem stwierdzić w skończonej liczbie kroków, czy zbiór $B(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{Red}_{\mathfrak{I}}(X)$ jest niepusty.

<u>Lemmat 2.1</u>

Jeśli $(X,Y) \in BR(\mathfrak{I})$ to $d(X) \geqslant d(Y) > 0$.

<u>Dowód</u>

Ponieważ $(X,Y) \in BR(\mathfrak{I})$, to istnieją takie X_1, X_2 i produkcja $(P,Q) \in G(\mathfrak{I})$, że $X = X_1 P X_2, Y = X_1 Q X_2$. Z definicji długości mamy $d(X) = d(X_1) + d(P) + d(X_2)$. Ponieważ język jest typu 2, zatem $d(Q) = 1 \leqslant d(P)$, stąd $d(X) \geqslant d(X_1) + d(Q) + d(X_2) = d(Y)$. Ponadto słowo puste nie jest b-redukcją w $\mathfrak{I}$ żadnego słowa X, skąd wynika $d(Y) > 0$.

<u>Wniosek 2.1</u>

Jeśli $(X,Y) \in R(\mathfrak{I})$, to $d(X) \geqslant d(Y)$. Jeśli ponadto $d(X) > 0$ to $d(Y) > 0$.

<u>Dowód</u>

Jeśli $X = Y$, to wniosek jest oczywisty; jeśli przy tym $d(X) = 0$, to $X = \emptyset = Y$ i $d(Y) = 0$. Jeśli $(X,Y) \in R(\mathfrak{I})$ i $X \neq Y$ to istnieje wywód $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ w $\mathfrak{I}$ taki, że $X = W_0$ i $Y = W_n$ oraz $(W_{i-1}, W_i) \in BR(\mathfrak{I})$ dla $i = 1,2, \ldots, n$. Na mocy lemmatu 2.1 $d(W_{i-1}) \geqslant d(W_i) > 0$ dla $i = 1,2, \ldots, n$, skąd wynika $d(X) \geqslant d(Y) > 0$.

<u>Twierdzenie 2.1</u>

Zbiór $\mathrm{Red}_{\mathfrak{I}} X$ /patrz lemmat 1.1/ jest skończony dla każdego X.

D o w ó d

Jak wynika z lemmatu 1.1 zbiór $\mathrm{Alf}(\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X))$ jest skończony dla każdego X. Niech $d(X) = k$. Wówczas na mocy lemmatu 2.1 zbiór $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X)$ jest złożony ze słów o długości k. Słów takich, utworzonych z liter skończonego alfabetu jest skończona ilość. Cbdo.

W n i o s e k 2.2

Dla każdego X zbiór wszystkich takich Y, że $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$ jest skończony.

D o w ó d

Zbiór ten jest zawarty w zbiorze $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X)$, który jest skończony.

W n i o s e k 2.3

Jeśli $(W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ jest wywodem nieskończonym w $\mathfrak{J}$, to istnieją takie liczby naturalne k, m, że $k < m$ i $W_k = W_m$.

D o w ó d

Z definicji $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X)$, $W_i \in \mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(W_0)$ dla każdego $i \geq 0$. Ponieważ $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(W_0)$ jest zbiorem skończonym, zatem w każdym nieskończonym ciągu, złożonym z elementów tego zbioru, pewien element V występuje nieskończoną ilość razy. Istnieją zatem takie $k, m, k < m$, że $V = W_k = W_m$.

W n i o s e k 2.4

Jeśli w $\mathfrak{J}$ istnieje wywód nieskończony, to dla pewnego V_0 istnieje w $\mathfrak{J}$ wywód:

$$(V_0, V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V_0)$$

i $n > 0$.

D o w ó d

Wynika wprost z wniosku 2.3 przyjmując $n = m - k$ i $V_0 = W_k$, $V_1 = W_{k+1}$, ..., $V_{n-1} = W_{m-1}$.

L e m m a t 2.2

Jeśli $d(X) = d(U)$ i $d(Y) = d(V)$ oraz $(XY, UV) \in R(\mathfrak{J})$ to $(X,U) \in R(\mathfrak{J})$ i $(Y,V) \in R(\mathfrak{J})$.

D o w ó d

Z założeń lemmatu wynika, że $d(XY) = d(UV)$. Jeśli więc $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ jest wywodem w $\mathfrak{J}$ i $XY = W_0$, $UV = W_n$ to $d(W_0) = d(W_n)$ i na mocy lemmatu 2.1 oraz wniosku 2.1 $d(W_{i-1}) = d(W_i)$ dla $i = 1,2, \ldots, n$. Określamy ciągi $X_0, X_1, \ldots, X_n$ i $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ jak następuje:

dla każdego i, $i = 0,1, \ldots, n$
$d(X_i) = d(X)$, $d(Y_i) = d(Y)$, $X_i\, Y_i = W_i$.

Mamy więc $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, $X_n = U$, $Y_n = V$. Ponadto, na mocy relacji (W_{i-1}, W_i) BR $(\mathfrak{J})$ i $d(W_{i-1}) = d(W_i)$ wynika, że istnieją takie W_i', W_i'' oraz produkcja $(p,q) \in G(\mathfrak{J})$, $d(p) = d(q) = 1$, że

$$W_{i-1} = W_i' \, p \, W_i'', \quad W_i = W_i' \, q \, W_i''.$$

Jest więc $X_{i-1}\; Y_{i-1} = W_i'p\, W_i''$, $X_i\, Y_i = W_i'q\, W_i''$ i albo $W_i'p < X_{i-1}$, wówczas $W_i'q < X_i$ oraz

$$(X_{i-1}, X_i) \in BR(\mathfrak{J}), \; Y_{i-1} = Y_i,$$

albo $pW_i'' < Y_{i-1}$, wówczas $qW_i'' < Y_i$ oraz

$$X_{i-1} = X_i, \; (Y_{i-1}, Y_i) \in BR(\mathfrak{J}).$$

W każdym bądź razie $(X_{i-1}, X_i) \in R(\mathfrak{J})$, $(Y_{i-1}, Y_i) \in R(\mathfrak{J})$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Na mocy przechodniości relacji $R(\mathfrak{J})$, $(X_0, X_n) \in R(\mathfrak{J})$, $(Y_0, Y_n) \in R(\mathfrak{J})$, co wraz z $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, $X_n = U$, $Y_n = V$ kończy dowód.

W n i o s e k 2.5

Jeśli $(XPY, XQY) \in R(\mathfrak{J})$ i $d(P) = d(Q)$, to $(P,Q) \in R(\mathfrak{J})$.

D o w ó d

Skoro $d(P) = d(Q)$, to $d(XP) = d(XQ)$ i na mocy lemmatu 2.2. $(XP,XQ) \in R(\mathfrak{J})$. Stąd powtórnie na mocy lemmatu 2.2 jest $(P,Q) \in R(\mathfrak{J})$

L e m m a t 2.3

Jeśli w $\mathfrak{J}$ istnieje wywód $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$, $n > 0$ i $V_0 = V_n$, to $G(\mathfrak{J})$ jest cykliczna.

D o w ó d

Skoro $V_0 = V_n$, zatem $d(V_0) = d(V_n)$ i na mocy lemmatu 2.1.i wniosku 2.1 $d(V_{i-1}) = d(V_i)$ dla $i = 1,2, \ldots, n$. Ponieważ $(V_0, V_1) \in BR(\mathfrak{J})$, zatem istnieją takie X,Y oraz produkcja $(P,Q) \in G(\mathfrak{J})$, że $V_0 = XPY$, $V_1 = XQY$ i ponieważ $d(V_0) = d(V_1)$, zatem $d(P) = d(Q) = 1$. Mamy ponadto $(V_1, V_n) \in R(\mathfrak{J})$, $V_n = V_0$, stąd

$$(XQY, XPY) \in R(\mathfrak{J})$$

i na mocy wniosku 2.5 $(Q,P) \in R(\mathfrak{J})$. Istnieje więc wywód w $\mathfrak{J}$:

$$(P_0, P_1, \ldots, P_m)$$

taki, że $Q = P_0$, $P = P_m$. Ponieważ $d(P) = d(Q) = 1$, zatem na mocy lemmatu 2.1 i wniosku 2.1 jest

$$d(P_i) = 1 \qquad i = 0,1, \ldots, m$$

Skoro więc $(P_{i-1}, P_i) \in BR(\mathfrak{J})$ dla $i = 1,2, \ldots, m$ to musi być $(P_{i-1}, P_i) \in G(\mathfrak{J})$ dla $i = 1,2, \ldots, m$. Do gramatyki $G(\mathfrak{J})$ należą więc produkcje:

$$\begin{aligned}
&(P,\ Q)\,, \\
&(Q,\ P_1)\,, \quad \text{gdyż}\ \ P_0 = Q, \\
&(P_1,\ P_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(P_{n-1},\ P)\,, \quad \text{gdyż}\ \ P_m = P,
\end{aligned}$$

czyli $G(\mathfrak{J})$ jest cykliczna.

L e m m a t 2.4

Jeśli $G(\tilde{\mathfrak{J}})$ jest cykliczna, to istnieje ciąg nieskończony słów:

$$(W_0,\ W_1,\ \ldots,\ W_n,\ \ldots),$$

będący wywodem w $\tilde{\mathfrak{J}}$.

D o w ó d

Jeśli $G(\mathfrak{J})$ jest cykliczna, to istnieje takie m, że produkcje:

$$\begin{aligned}
&(P_0,\ P_1), \\
&(P_1,\ P_2), \\
&\ldots\ldots \\
&(P_{m-1},\ P_m)
\end{aligned}$$

należą do $G(\mathfrak{J})$ i $P_0 = P_m$. Wówczas każdy ciąg nieskończony postaci:

$$(P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_m,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m,\ P_1,\ P_2,\ \ldots)$$

jest wywodem w $\mathfrak{J}$.

Twierdzenie 2.2

Na to, aby w $\mathfrak{J}$ istniał wywód nieskończony, potrzeba i wystarcza, aby $G(\mathfrak{J})$ była cykliczna.

Dowód

Jeśli w $\mathfrak{J}$ istnieje wywód nieskończony, to na mocy wniosku 2.4 i lemmatu 2.3 wynika, że $G(\mathfrak{J})$ jest cykliczna. Na odwrót, jeśli $G(\mathfrak{J})$ jest cykliczna, to na mocy lemmatu 2.4 w $\mathfrak{J}$ istnieje wywód nieskończony. Cbdo.

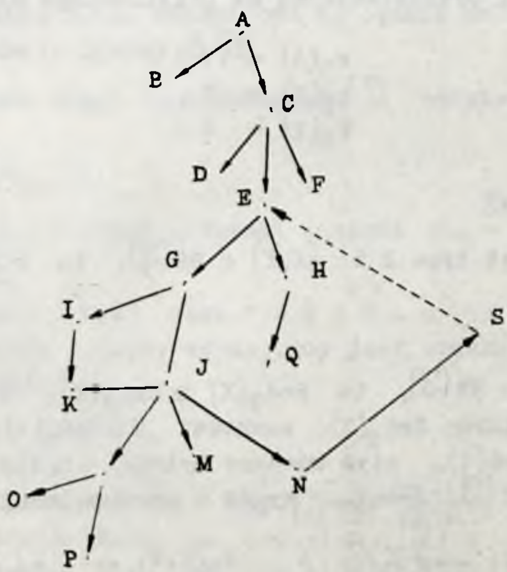
Wniosek 2.6

Jeśli $\mathfrak{J}$ jest typu 2, to nie istnieje wywód nieskończony w $\mathfrak{J}$.

Dowód

Ponieważ $\mathfrak{J}$ jest typu 2, zatem $G(\mathfrak{J})$ jest niecykliczna i na mocy twierdzenia 2.2 nie istnieje wywód nieskończony w $\mathfrak{J}$.

Twierdzenie 2.1, twierdzenie 2.2 i wniosek 2.6 można następująco zilustrować graficznie. Niech A będzie dowolnym słowem. Zbiór $Red_{\mathfrak{J}}(A)$ przedstawimy jako zbiór punktów na płaszczyźnie i jeśli $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$, $X \in Red_{\mathfrak{J}}(A)$, $Y \in Red_{\mathfrak{J}}(A)$, to punkty reprezentujące X,Y połączymy strzałką skierowaną od X do Y:



Rys. 1

Z twierdzenia 2.1 wynika, że zbiór punktów wykresu jest skończony. Wniosek 2.6 mówi, że dla języków typu 2 nie może mieć miejsca sytuacja, jaka powstaje przez połączenie strzałką punktu S z punktem E.

Należy podkreślić, że kierunek strzałki odpowiada kierunkowi <u>redukcji</u> słowa, przeciwny do kierunku <u>konsekwencji</u> słowa. Jeśli np. słowo $M \in B(\mathfrak{J})$, wówczas słowa $\mathfrak{P}$,G,E,C,A należą do $S(\mathfrak{J})$ oraz są w tej właśnie kolejności wyprowadzane z M.

Skończoność zbioru $Red_{\mathfrak{J}}(X)$ pozwala na sformułowanie następującej definicji:

Definicja 2.1

Niech $m(\mathfrak{A})$ będzie ilością elementów zbioru skończonego $\mathfrak{A}$. **Rzędem** słowa X w $\mathfrak{J}$ nazywamy liczbę naturalną $r_{\mathfrak{J}}(X)$:

$$r_{\mathfrak{J}}(X) = m\big(Red_{\mathfrak{J}}(X)\big) - 1 .$$

Przykład 2.1

Dla sytuacji, przedstawionej na przytoczonym wykresie, mamy:

$$r_{\mathfrak{J}}(A) = 17 ,$$
$$r_{\mathfrak{J}}(G) = 9 ,$$
$$r_{\mathfrak{J}}(P) = 0 .$$

Lemmat 2.5

Jeśli $\mathfrak{J}$ jest typu 2 i $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$, to $r_{\mathfrak{J}}(X) > r_{\mathfrak{J}}(Y)$.

Dowód

Skoro $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$, to $Red_{\mathfrak{J}}(X) \supset Red_{\mathfrak{J}}(Y)$. Z definicji relacji $R(\mathfrak{J})$ i zbioru $Red_{\mathfrak{J}}(X)$ zachodzi $X \in Red_{\mathfrak{J}}(X)$. Nie może być natomiast $X \in Red(Y)$, gdyż wówczas byłoby $(Y,X) \in R(\mathfrak{J})$, co łącznie z $(X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$ dawałoby wywód w następującej postaci:

$$(X,Y, \ldots, X) \quad \text{i} \quad d_{\mathfrak{J}}(X,Y, \ldots, X) > 1$$

skąd, na mocy lemmatu 2.3 $G(\mathfrak{J})$ byłaby cykliczna, co jest niemożliwe, gdyż $\mathfrak{J}$ jest typu 2.

Jest więc:

$$X \in \mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X),$$
$$X \notin \mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(Y),$$

co łącznie z $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X) \supset \mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(Y)$ mówi, że zbiór skończony $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(Y)$ jest podzbiorem właściwym zbioru skończonego $\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X)$. Stąd

$$m\left(\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(X)\right) > m\left(\mathrm{Red}_{\mathfrak{J}}(Y)\right)$$

i $r_{\mathfrak{J}}(X) > r_{\mathfrak{J}}(Y)$.

Lemmat ten będziemy stosować w dowodach przez indukcję względem $r_{\mathfrak{J}}(X)$.

4. SŁOWA ZGODNE I SPRZECZNE

W paragrafie tym określimy pewną właściwość słów języka $\mathfrak{J}$ zwaną z g o d n o ś c i ą. Zasądniczym celem paragrafu będzie wykazanie, że zgodność słowa jest warunkiem koniecznym należenia tego słowa do $S(\mathfrak{J})$. /Twierdzenie 3.1/. Właściwość ta będzie dalej pomocna przy określeniu produkcji języka $\mathfrak{L}(\mathfrak{J})$.

Niech w dalszym ciągu tego paragrafu $\mathfrak{J}$ będzie językiem typu 3.

<u>D e f i n i c j a 3.1</u>

Niech x, y, α, ω będą literami i niech α, ω nie należą do $\mathrm{Alf}(\mathfrak{J})$.

Mówimy, że para (x,y) jest z g o d n a w $\mathfrak{J}$ i piszemy $(x,y) \in \mathrm{Zg}(\mathfrak{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z następujących warunków:

1. $x \in B(\mathfrak{J})$ i $y = (\omega)$.
2. $y \in B(\mathfrak{J})$ i $x = (\alpha)$.
3. Istnieje takie v, że $(xy,v) \in G(\mathfrak{J})$.
4. Istnieją takie U,v, że $(yU,v) \in G(\mathfrak{J})$ i $(x,v) \in \mathrm{Zg}(\mathfrak{J})$.
5. Istnieją takie U,v, że $(Ux,v) \in G(\mathfrak{J})$ i $(v,y) \in \mathrm{Zg}(\mathfrak{J})$.

Mówimy, że para (x,y) jest s p r z e c z n a w $\mathfrak{J}$ i piszemy $(x,y) \in Sp(\mathfrak{J})$, jeśli $(x,y) \notin Zg(\mathfrak{J})$.

Przykład 3.1

Dla języka $\mathfrak{P}$ określonego w przykładzie 1.1 pary zgodne opisuje następująca tabelka:

lewy element pary	prawy element pary
α	s, e, t, v, o, a
s, u, w, b, a	ω
e, t, f, a	u, v, o, a, b
v, u, w, b, a	w, a
o, a	u, v, o, a, b
c, a	f, t, o, a

W każdym wierszu para pierwszych symboli stanowiących lewy i prawy element jest zgodną na mocy 1, 2 lub 3 warunku definicji; pozostałe kombinacje symboli z tego samego wiersza są zgodne na mocy warunków 4 i 5.

Tak więc, np. ostatni wiersz tabelki określa następujące pary: (c,f), (c,t), (c,o), (c,a), (a,f), (a,t), (a,o), (a,a) jako zgodne w $\mathfrak{P}$.

D e f i n i c j a 3.2

Mówimy, że słowo W jest s p r z e c z n e w $\mathfrak{J}$, jeśli istnieją takie U i V oraz para $(x,y) \in Sp(\mathfrak{J})$, że

$$W = U\,x\,y\,V.$$

Słowo W jest z g o d n e w $\mathfrak{J}$ jeśli nie jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$.

Przykład 3.2

Dla języka $\mathfrak{P}$, określonego w przykładzie 1.1 następujące słowa są zgodne:

$$\alpha\ a\ a\ a\ b\ a\ \omega$$
$$\alpha\ a\ b\ a\ a\ \omega$$
$$\alpha\ a\ b\ \omega$$
$$\alpha\ a\ a\ a\ a\ \omega$$
$$\alpha\ t\ u\ a\ a\ \omega$$
$$\alpha\ o\ o\ o\ u\ a\ a\ \omega\ ,$$

zaś następujące są sprzeczne:

$$\alpha\ a\ a\ \underline{b\ b}\ a\ \omega$$
$$\underline{\alpha\ b}\ a\ a\ \omega$$
$$\alpha\ \underline{a\ s\ a}\ b\ a\ \omega$$
$$\alpha\ c\ o\ \underline{v\ o}\ \omega$$
$$\alpha\ a\ a\ \underline{t\ \omega}\ .$$

W słowach sprzecznych podkreślono pary sprzeczne.

L e m m a t 3.2

Jeśli słowo W nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$ i $W \notin B(\mathfrak{J})$, to $\alpha W \omega$ jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$.

D o w ó d

Niech $W = x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geqslant 1$.

Jeśli dla pewnego i, $1 \leqslant i \leqslant n$, zachodzi $x_i = s$, gdzie $s \in B(\mathfrak{J})$, to $\alpha W \omega$ jest sprzeczne, chyba, że $i = n = 1$. Dla żadnego bowiem x para (x,s) lub (s,x) nie jest zgodna, na mocy definicji 1.4 i 3.1. Załóżmy więc, że dla każdego i jest $x_i \neq s$.

Jeśli $(\alpha, x_1) \in Zg(\mathfrak{J})$, to istnieją takie U_1, v_1, że

$$(x_1\ U_1,\ v_1) \in G(\mathfrak{J}), \qquad /1/$$

gdyż w przeciwnym przypadku żaden z warunków definicji 3.1 nie byłby spełniony. Ponadto $U_1 \neq \emptyset$, gdyż w tym przypadku byłoby $(x_1, v_1) \in G(\mathfrak{J})$ i słowo W miałoby bezpośrednią redukcję $v_1, x_2, \dots, x_n$.

Jeśli $(x_1, x_2) \in Zg(\mathfrak{T})$, to istnieją takie U_2, v_2, że

$$(x_2 U_2, v_2) \in G(\mathfrak{T}), \qquad /2/$$

gdyż w przeciwnym przypadku żaden z warunków definicji 3.1 nie byłby spełniony. Nie może być bowiem $(U_1 x_1, v_1) \in G(\mathfrak{T})$, gdyż produkcja ta byłaby zazębiona z produkcją /1/. Ponadto, tak jak w /1/,

$$U_2 \neq \emptyset.$$

Ogólnie, na to, aby zachodziło $(x_{i-1}, x_i) \in Zg(\mathfrak{T})$ konieczne jest, aby istniały takie U_i, v_i, $U_i \neq \emptyset$, że

$$(x_i U_i, v_i) \in G(\mathfrak{T}) \quad i = 2, \ldots, n . \qquad /3/$$

Jeśli teraz dla $i = 2,3, \ldots, n$ $(x_{i-1}, x_i) \in Zg(\mathfrak{T})$, to para (x_n, ω) musi być sprzeczna. Nie zachodzą bowiem warunki 1,2,3 i 4 definicji 3.1 i nie może spełniony być warunek 5, gdyż wówczas istniałaby produkcja $(Ux_n, v) \in G(\mathfrak{T})$, zazębiona z produkcją /3/ dla $i = n$. Tak więc słowo $\alpha W \omega$, jeśli nie identyczne z $\alpha s \omega$, musi być sprzeczne w $\mathfrak{T}$. Cbdo.

L e m m a t 3.3

Jeśli $(W, V) \in R(\mathfrak{T})$ i $\alpha W \omega$ jest sprzeczne w $\mathfrak{T}$, to $\alpha V \omega$ jest sprzeczne w $\mathfrak{T}$.

D o w ó d

Jeśli $W = V$, to dowód jest oczywisty.

Niech $(W,V) \in BR(\mathfrak{T})$. Jeśli $\alpha W \omega$ jest sprzeczne, to istnieją takie słowa W_1, W_2 i litery u, v, /być może identyczne z α lub ω /, że

$$\alpha W \omega = W_1 u x y v W_2 \quad i \quad (x,y) \in Sp(\mathfrak{T}).$$

$\alpha V \omega$ może mieć jedną z następujących postaci:

1. $\alpha V \omega = V_1 z x y v W_2$ i $(W_1 u, V_1 z) \in BR(\mathfrak{J})$.
2. $\alpha V \omega = W_1 z y v W_2$ i $(ux, z) \in G(\mathfrak{J})$.
3. $\alpha V \omega = W_1 u z v W_2$ i $(xy, z) \in G(\mathfrak{J})$.
4. $\alpha V \omega = W_1 u x z W_2$ i $(yv, z) \in G(\mathfrak{J})$.
5. $\alpha V \omega = W_1 u x y z V_2$ i $(vW_2, z V_2) \in BR(\mathfrak{J})$.

W przypadkach 1 i 5 słowo $\alpha V \omega$ jest sprzeczne, ponieważ $(x,y) \in Sp(\mathfrak{J})$. Przypadek 3 zachodzić nie może, gdyż na mocy warunku 3 definicji 3.1 i produkcji (xy,z) para (x,y) byłaby zgodna. W przypadku 2, para (z,y) jest sprzeczna, gdyż w przeciwnym przypadku, na mocy warunku 5 definicji 3.1 para (x,y) byłaby zgodna. Podobnie w przypadku 4, para (x,z) jest sprzeczna, gdyż inaczej na mocy warunku 4 definicji 3.1 para (x,y) byłaby zgodna. Tak więc w każdym przypadku słowo $\alpha V \omega$ jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$.

Jeśli sprzeczność słowa $\alpha W \omega$ pociąga sprzeczność każdej jego bezpośredniej redukcji, to i każda redukcja słowa $\alpha W \omega$ jest słowem sprzecznym. Cbdo.

Twierdzenie 3.1

Jeśli słowo $\alpha W \omega$ jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$, to $W \notin S(\mathfrak{J})$; na odwrót, jeśli $W \notin S(\mathfrak{J})$, to każdy wywód pełny ze słowa $\alpha W \omega$ w $\mathfrak{J}$ zawiera słowo sprzeczne.

D o w ó d

Jeśli $\alpha W \omega$ byłoby sprzeczne w $\mathfrak{J}$ i zachodziłoby $(W,S) \in R(\mathfrak{J})$ dla pewnego $S \in B(\mathfrak{J})$, to na mocy lemmatu 3.3 słowo $\alpha S \omega$ byłoby sprzeczne, co jest niemożliwe.

Jeśli $(W,S) \notin R(\mathfrak{J})$ dla każdego $S \in B(\mathfrak{J})$ i $(W, W_1, \ldots, W_n)$ jest wywodem pełnym w $\mathfrak{J}$ to W_n nie ma redukcji i $W_n \notin B(\mathfrak{J})$. $\alpha W_n \omega$ jest zatem na mocy lemmatu 3.2 słowem sprzecznym w $\mathfrak{J}$, co kończy dowód.

Uwaga 3.1

Ze zgodności słowa $\alpha W \omega$ nie wynika, że $W \in S(\mathfrak{J})$ np. słowo "α abaa ω" jest zgodne w $\mathfrak{P}$ /patrz przykład 1.1/, natomiast "abaa" nie należy do $S(\mathfrak{P})$.

5. WYWODY LEWOSTRONNE, POSTACI NORMALNE

Jeśli $(X,Y) \in R(\mathfrak{J})$, wówczas istnieje na ogół wiele wywodów, realizujących tę redukcję. Okazuje się jednak, że można znacznie zawęzić klasę tych wywodów, rozpatrując jedynie tzw. w y w o d y l e w o s t r o n n e Y z X. Jeśli $\mathfrak{J}$ jest językiem typu 3 wówczas istnienie wywodu słowa podstawowego S ze słowa X jest równoważne istnienie wywodu lewostronnego S z X (tw. 4.1). Wywód lewostronny ma tę właściwość, że wszystkie słowa, należące do tego wywodu mają określoną budowę, a mianowicie są w tzw. p o s t a c i n o r m a l n e j. Fakt ten będzie wykorzystany w § 5. Obecnie podamy kilka definicji i twierdzeń, dotyczących wywodów lewostronnych i postaci normalnych. W całym paragrafie język $\mathfrak{J}$ będzie językiem typu 3.

D e f i n i c j a 4.1

$LBR(\mathfrak{J}) = \{X,Y \mid (X,Y) \in BR(\mathfrak{J})$ i dla każdych X_1, X_2, Y_2 takich, że $X = X_1X_2, Y = X_1Y_2$, $(X_2,Y_2) \in BR(\mathfrak{J})$, słowo X_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{J}\}$.

Relację $LBR(\mathfrak{J})$ nazywać będziemy relacją l e w o s t r o n n e j b e z p o ś r e d n i e j r e d u k c j i w $\mathfrak{J}$, w skrócie lb - r e d u k c j ą w $\mathfrak{J}$. Będziemy też mówić, że Y jest lb-redukcją X w $\mathfrak{J}$ oraz że X jest lb-konsekwencją Y w $\mathfrak{J}$.

D e f i n i c j a 4.2

Ciąg /skończony lub nie/ słów $\{W_i\}$, $i \geqslant 0$, o tej właściwości, że

$$(W_{i-1}, W_i) \in LBR(\mathfrak{J}), \quad i = 1,2, \ldots, n, \ldots$$

nazywać będziemy w y w o d e m l e w o s t r o n n y m w $\mathfrak{J}$ lub w skrócie: l - w y w o d e m w $\mathfrak{J}$.

D e f i n i c j a 4.3

$LR(\mathfrak{J}) = \{X,Y \mid$ istnieje skończony l-wywód $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ w $\mathfrak{J}$ taki, że $n \geqslant 0$ i $X = W_0$, $Y = W_n\}$.

Relację $LR(\mathfrak{J})$ nazywać będziemy relacją r e d u k c j i l e w o s t r o n n e j w $\mathfrak{J}$, w skrócie: relacją l - r e d u k c j i w $\mathfrak{J}$.

Wszelkie definicje i warunki § 1 dotyczące redukcji i wywodu przenoszą się na l-redukcje i l-wywody z tym, że wszędzie gdzie w definicjach tych występuje słowo "redukcja" lub "wywód" lub "b-redukcja" należy rozumieć odpowiednio "l-redukcja", "l-wywód" i "lb--redukcja".

D e f i n i c j a 4.4

$N(\mathfrak{J}) = \{X \mid$ dla każdych X_1, X_2 jeśli $X = X_1X_2$ i X_1 ma redukcję w $\mathfrak{J}$ to X_2 nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}\}$.

Zbiór $N(\mathfrak{J})$ nazywać będziemy zbiorem s ł ó w n o r m a l n y c h w $\mathfrak{J}$, a słowo $X \in N(\mathfrak{J})$ nazywać będziemy słowem n o r m a l n y m w $\mathfrak{J}$, albo słowem o p o s t a c i n o r m a l n e j w $\mathfrak{J}$.

Przykład 4.2

Dla języka $\mathfrak{R}$, określonego w przykładzie 1.1 następujący wywód słowa "aaaba" nie jest lewostronny:

$$\begin{array}{l}
a\ a\ a\ \underline{b}\ a \\
a\ \underline{a}\ a\ u\ a \\
a\ t\ \underline{a}\ u\ a \\
a\ t\ \underline{o\ u}\ a \\
a\ t\ v\ \underline{a} \\
a\ t\ \underline{v\ w} \\
\underline{a}\ t\ u \\
o\ \underline{t}\ u \\
\underline{o\ f}\ u \\
\underline{t}\ u \\
\underline{e\ u} \\
s
\end{array}$$

zaś następujący jest lewostronny:

a a a b a
c a a b a
c t a b a
c f a b a
t a b a
e a b a
e c b a
e c u a
e v a
e v w
e u
s

Następujące słowa języka $\mathfrak{K}$, określonego w przykładzie 1.1, nie są w postaci normalnej:

a a a u a
a t a u a
a t v w
t u ,

zaś następujące są w postaci normalnej:

a a a b a
c f a b a
e v a
e u .

L e m m a t 4.1

Jeśli X nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$, to $X \in N(\mathfrak{J})$; jeśli X nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, to $X \in N(\mathfrak{J})$.

D o w ó d

Pierwsza część lemmatu wynika z faktu, że jeśli X nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$, to dla każdych X_1X_2 takich, że $X = X_1X_2$, X_2 nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$, bez względu na to, czy X_1 ma redukcję w $\mathfrak{J}$ czy też nie.

Druga część lemmatu wynika z faktu, że dla każdych X_1, X_2 takich, że $X = X_1 X_2$, X_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, a zatem poprzednik implikacji, występującej w definicji $N(\mathfrak{J})$, jest fałszywy, co dowodzi prawdziwości całej implikacji. /Warunek jest spełniony "w próżnię"/.

L e m m a t 4.2

Jeśli $(W,V) \in R(\mathfrak{J})$ i $V = V_1 V_2$, to istnieją takie W_1, W_2, że $W = W_1 W_2$ i $(W_1,V_1) \in R(\mathfrak{J})$, $(W_2,V_2) \in R(\mathfrak{J})$. Przy tym $D_{\mathfrak{J}}(W,V) = D_{\mathfrak{J}}(W_1 V_1) + D_{\mathfrak{J}}(W_2,V_2)$.

D o w ó d

Jeśli $D_{\mathfrak{J}}(W,V) = 0$, to $W = V$ i $W_1 = V_1$, $W_2 = V_2$ spełniają tezę lemmatu.

Załóżmy, że $D_{\mathfrak{J}}(W,V) = k > 0$ i że lemmat jest prawdziwy dla $D_{\mathfrak{J}}(W,V) = k - 1$. Istnieje zatem takie W', że $(W,W') \in BR(\mathfrak{J})$ i $(W', V) \in R(\mathfrak{J})$, przy tym $D_{\mathfrak{J}}(W', V) = k - 1$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieją takie W_1', W_2', że $(W_1', V_1) \in R(\mathfrak{J})$, $(W_2', V_2) \in R(\mathfrak{J})$, $W' = W_1' W_2'$ oraz $D_{\mathfrak{J}}(W_1',V_1) + D_{\mathfrak{J}}(W_2', V_2) = D_{\mathfrak{J}}(W', V) = k - 1$. Skoro $(W,W') \in BR(\mathfrak{J})$, zatem istnieją takie U, Z oraz $(Q,q) \in G(\mathfrak{J})$, że $W = UQZ$, $W' = UqZ$. Mogą zajść wówczas dwa przypadki:

1. $W_1' = UqX$, $W_2' = Y$ i $XY = Z$.

Wówczas $W_1 = UQX$, $W_2 = Y$ spełniają tezę lemmatu, gdyż

$$D_{\mathfrak{J}}(W_1,W_1') + D_{\mathfrak{J}}(W_2,W_2') = 1 + 0 = 1 = D_{\mathfrak{J}}(W,W') \text{ i}$$

$$D_{\mathfrak{J}}(W_1,V_1) + D_{\mathfrak{J}}(W_2,V_2) = D_{\mathfrak{J}}(W_1,W_1') + D_{\mathfrak{J}}(W_1',V_1) +$$

$$+ D_{\mathfrak{J}}(W_2,W_2') + D_{\mathfrak{J}}(W_2',V_2) = D_{\mathfrak{J}}(W_1,W_1') + D_{\mathfrak{J}}(W_2,W_2') +$$

$$+ D_{\mathfrak{J}}(W_1',V_1) + D_{\mathfrak{J}}(W_2',V_2) = 1 + k - 1 = k = D_{\mathfrak{J}}(W,V) .$$

2. $W_1' = X$, $W_2' = YqZ$ i $XY = U$.

Wówczas $W_1 = X, W_2 = YQZ$ spełniają podobnie, jak w przypadku 1, tezę lemmatu.

Lemmat 4.3

Jeśli $(xW,v) \in R(\mathfrak{J})$ i $D_{\mathfrak{J}}(xW,v) > 0$, to istnieje takie U i w, że $(xU,w) \in G(\mathfrak{J})$.

Dowód

Jeśliby w $G(\mathfrak{J})$ nie istniała produkcja postaci (xU,w), wówczas każda redukcja słowa xW byłaby postaci xV i $(W,V) \in R(\mathfrak{J})$. Jeśliby $v = xV$, wówczas musiałoby być $v = x$ i $V = \emptyset$, co jest niemożliwe z uwagi na fakt, że $(W,\emptyset) \in R(\mathfrak{J})$ dla każdego W.

Lemmat 4.4

Jeśli $(W,V) \in LBR(\mathfrak{J})$ i $(qp,r) \in G(\mathfrak{J})$ to $(qW,qV) \in LBR(\mathfrak{J})$.

Dowód

Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. że

$$(W,V) \in LBR(\mathfrak{J}),$$
$$(qW,\ qV) \notin LBR(\mathfrak{J}).$$

Skoro $(W,V) \in LBR(\mathfrak{J})$, to dla każdych W', W'', V'' takich, że $W = W'W''$, $V = W'V''$ i $(W'', V'') \in BR(\mathfrak{J})$, słowo W' nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$. Jeśliby $(qW,qV) \notin LBR(\mathfrak{J})$, znaczyłoby to, że dla pewnych W', W'', V'', takich że $W = W'W''$, $V = W'V''$ i $(W'', V'') \in BR(\mathfrak{J})$, W' nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, qW' miałoby redukcję w $\mathfrak{J}$. Jeśliby teraz $W' = \emptyset$, to wówczas istniałaby produkcja $(q,v) \in G(\mathfrak{J})$ dla pewnego v, zazębiona z (qp,r), co jest niemożliwe.

Jeśli $W' \neq \emptyset$, to istniałyby takie T, x, że $W' = xT$. Wówczas byłoby $W = xTW''$, $(W,p) \in R(\mathfrak{J})$ i na mocy lemmatu 4.3 istniałaby w $G(\mathfrak{J})$ produkcja postaci (xU,v). Z drugiej strony, ponieważ xT nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, q nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, zatem musi istnieć w $G(\mathfrak{J})$ produkcja (qx,u) dla pewnego u, zazębiona z produkcją (xU,v), co również jest niemożliwe. Tak więc $(qW,\ qV) \in LBR(\mathfrak{J})$.

L e m m a t 4.5

Jeśli $(W,Y) \in LBR(\mathfrak{J})$ to $(WX,VX) \in LBR(\mathfrak{J})$ dla każdego X.

D o w ó d

Jeśliby tak nie było, to istniałyby słowa P_1, P_2, Q_2 takie, że $WX = P_1 P_2$, $VX = P_1 Q_2$, $(P_2,Q_2) \in BR(\mathfrak{J})$, i P_1 miałoby redukcję w $\mathfrak{J}$. Nie może być $P_2 < X$, gdyż wówczas byłoby $Q_2 = P_2$ i $(P_2,P_2) \in BR(\mathfrak{J})$ co jest niemożliwe ze względu na to, że $G(\mathfrak{J})$ jest niecykliczna. Musi więc być:

$$P_2 = ZX, Q_2 = YX$$

oraz

$$P_1 Z = W, \ P_1 Y = V.$$

Skoro $(P_2,Q_2) \in BR(\mathfrak{J})$, to musi być $(Z,Y) \in BR(\mathfrak{J})$ i P_1 ma redukcję w $\mathfrak{J}$, czyli $(W,V) \notin LBR(\mathfrak{J})$, wbrew założeniu.

L e m m a t 4.6

Jeśli $(W,s) \in R(\mathfrak{J})$, to $(W,s) \in LR(\mathfrak{J})$.

D o w ó d

Należy zbudować l-wywód s z W w $\mathfrak{J}$, zakładając, że istnieje wywód:

$$(W, W_1, \dots, W_{n-1}, s) \quad w\ \mathfrak{J}.$$

Jeśli $D_{\mathfrak{J}}(W,s) = 0$, to $W = s$ i lemmat jest oczywisty. Załóżmy, że $D_{\mathfrak{J}}(W,s) = n > 0$ i że lemmat jest prawdziwy dla wywodu (W,s) o długości $< n$. Jeśli $d(W) = 1$, wówczas wywód ten jest lewostronny. Niech $d(W) > 1$. Istnieje wówczas takie k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, że $W_k = qp$, $W_{k+1} = r$ dla pewnych p,q,r. Mamy wówczas $(W,W_k) \in R(\mathfrak{J})$, $(W_k,W_{k+1}) \in BR(\mathfrak{J})$, $(W_{k+1}, s) \in R(\mathfrak{J})$. Jest więc $D_{\mathfrak{J}}(W,W_k) \leqslant n - 1 < n$, i na mocy lemmatu 4.2. istnieją takie W', W'', $(W', p) \in R(\mathfrak{J})$, $(W'', q) \in R(\mathfrak{J})$ oraz $D_{\mathfrak{J}}(W', q) + D_{\mathfrak{J}}(W'',p) = D_{\mathfrak{J}}(W, qp) < n$, zatem $D_{\mathfrak{J}}(W,q) < n$, $D_{\mathfrak{J}}(W'', p) < n$. Na mocy założenia indukcyjnego istnieją l-wywody:

$$\left(W'_0, W'_1, \ldots, q\right) \quad \text{słowa } q \text{ z } W' \text{ w } \mathfrak{J},$$

$$\left(W''_0, W''_1, \ldots, p\right) \quad \text{słowa } p \text{ z } W'' \text{ w } \mathfrak{J}.$$

Następujący wywód na mocy lemmatów 4.4. i 4.5. jest lewostronny:

$$\left(\underbrace{W'_0 W''_0, W'_1 W''_0, \ldots, qW''_0}_{\text{na mocy lematu 4.5}}, \ldots, \underbrace{qp, r, \ldots, s}_{\text{na mocy lematu 4.4}}\right)$$

jest więc zatem $\left(W'_0 W''_0, s\right) \in LR\left(\mathfrak{J}\right)$ czyli $\left(W, s\right) \in LR\left(\mathfrak{J}\right)$. Lemmat jest zatem prawdziwy dla każdego skończonego wywodu w $\mathfrak{J}$, czyli na mocy wyników § 2, dla każdego słowa W.

Lemmat 4.7

Niech $W \in N\left(\mathfrak{J}\right)$ i niech $V_1, V_2, \ldots, V_m$ będą wszystkimi różnymi bl-redukcjami słowa W w $\mathfrak{J}$. Wówczas istnieją takie $W_1, W_2, P, p_1, p_2, \ldots, p_m$, że następujące zdania są prawdziwe:

1. W_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$.
2. W_2 nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$.
3. $\left(P, p_i\right) \in G\left(\mathfrak{J}\right)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.
4. $W = W_1 P W_2$.
5. $V_i = W_1 p_i W_2$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.
6. $V_i \in N\left(\mathfrak{J}\right)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dowód

Skoro $\left(W, V_1\right) \in LBR\left(\mathfrak{J}\right)$, to istnieją takie W_1, W_2 oraz $\left(P, p_1\right) \in G\left(\mathfrak{J}\right)$, że $W = W_1 P W_2$, $V_i = W_1 p_i W_2$. Ponieważ $\left(PW_2, p_i W_2\right) \in R\left(\mathfrak{J}\right)$, zatem na mocy lewostronności redukcji $\left(W, V_i\right)$ wynika, że W_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$. Ponieważ $W \in N\left(\mathfrak{J}\right)$ i $W_1 P$ ma redukcję w $\mathfrak{J}$, więc W_2 nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$. Tak więc prawdziwe są tezy 1, 2 i 4 lemmatu. Jeśliby dla pewnego j zachodziło $W = W'_1 Q W''_2$, $V_j = W'_1 q W''_2$, W'_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$, $\left(Q, q_j\right) \in G\left(\mathfrak{J}\right)$ i $P \neq Q$, wówczas byłoby:

1. Albo $Q < W_1$, co niemożliwe, gdyż W_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$.
2. Albo $Q < W_2$, co niemożliwe, gdyż wówczas $P < W_1$ i W_1' miałoby redukcję w $\mathfrak{J}$.
3. Albo (P,p_1), (Q,q_j) byłyby zazębione, co niemożliwe w $G(\mathfrak{J})$.

Tak więc $P = Q$. Wynika stąd, że dla każdego V_i $i = 1,2,\dots m$ $W = W_1PW_2$, $V_i = W_1p_iW_2$, czyli $(P,p_i) \in G(\mathfrak{J})$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$. W ten sposób wykazana jest prawdziwość tez 3 i 5 lemmatu. Aby udowodnić 6, należy zauważyć, że dla każdych V_1^i, V_2^i takich, że $W_i = W_1^i V_2^i$ i V_1^i ma redukcję w $\mathfrak{J}$, musi być $W_1p_i < V_1^i$, gdyż W_1 nie ma redukcji. Wynika stąd, że $V_2^i < W_2$, zatem V_2^i nie ma konsekwencji, czyli $V_i \in N(\mathfrak{J})$, co kończy dowód.

Twierdzenie 4.1

Na to, aby $(W,s) \in R(\mathfrak{J})$, potrzeba i wystarcza, aby $(W,s) \in LR(\mathfrak{J})$. Jeśli przy tym W nie ma konsekwencji, to każde słowo l-wywodu s z W w $\mathfrak{J}$ jest postaci normalnej.

D o w ó d

Jeśli $(W,s) \in R(\mathfrak{J})$, to $(W,s) \in LR(\mathfrak{J})$ na mocy lemmatu 4.6. Jeśli $(W,s) \in LR(\mathfrak{J})$ to $(W,s) \in R(\mathfrak{J})$, ponieważ relacja LR jest zawarta w relacji R /patrz definicje 4.1, 4.2, 4.3/. Jeśli W nie ma konsekwencji, to na mocy lemmatu 4.1 $W \in N(\mathfrak{J})$. Z lemmatu 4.7 wynika, że l-redukcja słowa w postaci normalnej jest w postaci normalnej, co znaczy, że l-wywód ze słowa w postaci normalnej zawiera tylko słowa w postaci normalnej. Cbdo.

Twierdzenie 4.2

Niech $r_{\mathfrak{J}}(W) > 0$. Na to, aby było

$$W \in S(\mathfrak{J}),$$

potrzeba i wystarcza, aby dla pewnej lb-redukcji V słowa W w $\mathfrak{J}$ zachodziło

$$V \in S(\mathfrak{J}).$$

D o w ó d

Jeśli $W \in S(\mathfrak{J})$, to istnieje takie $s \in B(\mathfrak{J})$, że $(W,s) \in R(\mathfrak{J})$. Ponieważ $r_{\mathfrak{J}}(W) > 0$, zatem $W \neq s$ i istnieje wywód

$$\left(W,\ W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_{m-1},\ s\right)$$

w $\mathfrak{J}$ o długości m, $m > 0$. Na mocy lemmatu 4.6 istnieje wywód lewostronny:

$$\left(W,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_{k-1},\ s\right)$$

o długości $k > 0$.
Zatem jest $(V_1, s) \in LR(\mathfrak{J})$ czyli $V_1 \in S(\mathfrak{J})$ oraz V_1 jest lb-redukcją W w $\mathfrak{J}$.

Na odwrót, jeśli pewna lb-redukcja V słowa W należy do $S(\mathfrak{J})$ to i W należy do $S(\mathfrak{J})$. Cbdo.
Twierdzenie 4.1, 4.2 oraz lemmat 4.7 stanowią zasadniczy wynik tego paragrafu. Pozwalają one sprowadzić analizę wszelkich wywodów do analizy l-wywodów, podają ponadto strukturę słów, występujących w tych wywodach. Wyniki te znajdują zastosowanie w paragrafie następnym.

6. KONSTRUKCJA JEZYKA $\mathfrak{L}$

Niniejszy paragraf jest poświęcony wykazaniu, że dla danego języka $\mathfrak{J}$ typu 3 istnieje para języków $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$, typu 1, o następujących właściwościach.

Rozpatrujemy słowa W w alfabecie terminalnym języka $\mathfrak{J}$. Dla każdego takiego słowa tworzymy słowo $\alpha \lambda W \omega$, gdzie α, λ, ω nie wchodzą w skład alfabetu $\mathfrak{J}$. Języki $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ posiadają wspólną gramatykę i rozłączne bazy /przeliczalne/. Rozstrzygnięcie, czy słowo W jest słowem terminalnym języka $\mathfrak{J}$ jest równoważne rozstrzygnięciu, czy słowo $\alpha \lambda W \omega$ jest słowem języka $\mathfrak{L}_1$ czy języka $\mathfrak{L}_2$.

Języki $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ są tak skonstruowane, że słowo postaci $\alpha\lambda W\omega$ jest słowem albo języka $\mathfrak{L}_1$ albo języka $\mathfrak{L}_2$. Ponadto mają one tę właściwość, że każde słowo, będące redukcją słowa $\alpha\lambda W\omega$ posiada co najwyżej jedną bezpośrednią redukcję. Języki tego typu będziemy nazywać językami p r o s t y m i.

Ostatnie twierdzenia tego paragrafu stanowią zasadniczy wynik pracy, tzn. sprowadzanie rozstrzygania problemu przynależności słów W do języka $\mathfrak{J}$ do rozstrzygania problemu przynależności odpowiadających im słów do języków prostych $\mathfrak{L}_1$ lub $\mathfrak{L}_2$.

W dalszym ciągu tego paragrafu język $\mathfrak{J}$, jeśli nie będzie powiedziane inaczej, będzie językiem typu 3.

D e f i n i c j a 5.1

Przyporządkujmy każdej produkcji $(X,y) \in G(\mathfrak{J})$ element p pewnego zbioru, rozłączonego z $\mathrm{Alf}(\mathfrak{J})$, zwany n a z w ą produkcji (X,y). Niech przyporządkowanie to będzie wzajemnie jednoznaczne. Niech relacja:

$$(X, y, p) \in \mathrm{Prod}(\mathfrak{J})$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(X,y) \in G(\mathfrak{J})$ i p jest nazwą tej produkcji. Skończony zbiór nazw wszystkich produkcji gramatyki $G(\mathfrak{J})$ oznaczać będziemy przez $\mathfrak{N}(\mathfrak{J})$. Zbiór $\mathfrak{N}(\mathfrak{J})$ można uporządkować i niech np. relacja " $<$ " będzie relacją, która ustala porządek w zbiorze $\mathfrak{N}(\mathfrak{J})$

D e f i n i c j a 5.2

$P1(\mathfrak{J}) = \{ X,y,z \mid (X,y,z) \in \mathrm{Prod}(\mathfrak{J})$ i dla każdych u,v, takich, że $(X,u,v) \in \mathrm{Prod}(\mathfrak{J})$ zachodzi $v < z \}$.

Słowami: (X,y,z) należy do $P1(\mathfrak{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy produkcja $(X,y) \in G(\mathfrak{J})$ ma najwcześniejszą nazwę z wszystkich produkcji o poprzedniku X.

$P2(\mathfrak{J}) = \{ X,y,z \mid (X,y,z) \in \mathrm{Prod}(\mathfrak{J})$ i dla każdych u,v, takich, że $(X,u,v) \in \mathrm{Prod}(\mathfrak{J})$ zachodzi $z < v \}$.

Słowami: (X,y,z) należy do $P2(\mathfrak{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy produkcja $(X,y) \in G(\mathfrak{I})$ ma najpóźniejszą nazwę ze wszystkich produkcji o poprzedniku X.

$$N(\mathfrak{I}) = \{x,y,u,v \mid \text{istnieje takie } Q, \text{ że } (Q,x,y) \in Prod(\mathfrak{I}), (Q,u,v) \in Prod(\mathfrak{I}) \text{ i } y < v \text{ oraz dla każdych } z, w, \text{ takich, że } (Q,z,w) \in Prod(\mathfrak{I}) \text{ zachodzi } w < y \text{ lub } v < w\}.$$

Słowami: (x,y,u,v) należy do $N(\mathfrak{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy wśród produkcji o tym samym poprzedniku produkcja o następniku u ma kolejną najwcześniejszą nazwę po produkcji o następniku x.

P r z y k ł a d 5.1

Przyporządkujmy produkcjom języka $\mathfrak{P}$ /przykład 1.1/ nazwy r_i w następujący sposób:

$$\begin{aligned} r_1 &: (a,o) \\ r_2 &: (a,t) \\ r_3 &: (a,w) \\ r_4 &: (b,u) \\ r_5 &: (t,e) \\ r_6 &: (t,f) \\ r_7 &: (of,t) \\ r_8 &: (ou,v) \\ r_9 &: (eu,s) \\ r_{10} &: (vw,u) \end{aligned}$$

i niech porządek wśród nazw $\{r_i\}$ ustala relacja $\leqslant$ między wskaźnikami:

$$r_i < r_j \equiv i \leqslant j.$$

Wówczas zachodzą następujące relacje:

$$\begin{array}{ll} (a,o,r_1) \in Prod(\mathfrak{I}) & (a,w,r_3) \in P2(\mathfrak{I}), \\ (of,t,r_7) \in Prod(\mathfrak{I}) & (t,f,r_6) \in P2(\mathfrak{I}), \\ (a,o,r_1) \in P1(\mathfrak{I}) & (ou,v,r_8) \in P2(\mathfrak{I}), \\ (t,e,r_5) \in P1(\mathfrak{I}) & (o,r_1,t,r_2) \in N(\mathfrak{I}), \\ (ou,v,r_8) \in P1(\mathfrak{I}) & (e,r_5,f,r_6) \in N(\mathfrak{I}) \end{array}$$

oraz

$$(a,t,r_4) \notin \mathrm{Prod}(\mathfrak{J}) \qquad (a,c,r_1) \notin \mathrm{P2}(\mathfrak{J}),$$
$$(a,t,r_2) \notin \mathrm{P1}(\mathfrak{J}) \qquad (c,r_1,w,r_3) \notin N(\mathfrak{J}),$$
$$(t,e,r_5) \notin \mathrm{P1}(\mathfrak{J}) \qquad (t,r_2,c,r_1) \notin N(\mathfrak{J}),$$
$$(a,t,r_2) \notin \mathrm{P2}(\mathfrak{J}).$$

D e f i n i c j a 5.3

Niech symbole

$\alpha, \lambda, \mu, \gamma, \omega$

będą literami, nie należącymi ani do zbioru $\mathfrak{N}(\mathfrak{J})$, ani do zbioru $\mathrm{Alf}(\mathfrak{J})$. Niech x,y oznaczają dowolne elementy zbioru $\mathrm{Alf}(\mathfrak{J}) \cup \{\alpha, \omega\}$.

Oznaczymy przez $\mathfrak{G}(\mathfrak{J})$ zbiór par (X,Y), gdzie X i Y są słowami w alfabecie

$$\mathrm{Alf}(\mathfrak{J}) \cup \mathfrak{N}(\mathfrak{J}) \cup \{\alpha, \lambda, \mu, \gamma, \omega\}$$

i gdzie słowa te spełniają warunki określone w tabeli 1.

Na podstawie definicji 5.1 i 5.2 można łatwo stwierdzić, że każdemu słowu X o postaci $x \lambda y$ bądź $x \gamma y$ lub $x \mu y$ odpowiada dokładnie jedno słowo Y, określone w powyższej tablicy.

P r z y k ł a d 5.2

Poniżej przedstawiamy niektóre z par słów, należące do $\mathfrak{G}(\mathfrak{P})$. $\mathfrak{P}$-język określony w przykładzie 1.1.

$(\alpha \lambda a,\ \alpha c r_1 \mu)$ nr 3,
$(c \gamma r_1,\ t r_2 \mu)$ nr 5,
$(w \gamma r_3,\ a \gamma)$ nr 6,
$(\alpha \lambda b,\ \alpha \gamma b)$ nr 2,
$(c \lambda u,\ v r_8 \mu)$ nr 1,
$(r_1 \mu a,\ a r_1 \mu)$ nr 9,
$(r_1 \mu \omega,\ \mu \omega r_1)$ nr 10.

Tabela 1

X	Y	jeśli	w a r u n e k	Nr
$x\,\lambda\,y$	$uv\mu$	"	$(xy,u,v) \in P1(\mathfrak{J})$	1
	$x\,\gamma\,y$	"	$(x,y) \in Sp(\mathfrak{J})$	2
	$xuv\mu$	"	$(y,u,v) \in P1(\mathfrak{J})$ i $(x,y) \in Zg(\mathfrak{J})$	3
	$xy\lambda$		W pozostałych przypadkach	4
$x\,\gamma\,y$	$uv\mu$	jeśli	$(x,y,u,v) \in N(\mathfrak{J})$	5
	$Uv\gamma$	"	$(Uv,x,y) \in P2(\mathfrak{J})$	6
	γyx	"	$y \in \mathfrak{N}(\mathfrak{J})$ i $x \in Alf(ST(\mathfrak{J})) \cup \{\omega\}$	7
	$xy\gamma$		w pozostałych przypadkach	8
$x\,\mu\,y$	$yx\mu$	jeśli	$x \in \mathfrak{N}(\mathfrak{J})$ i $y \neq \omega$	9
	μyx	"	$x \in \mathfrak{N}(\mathfrak{J})$ i $y = \omega$	10
	$x\,\lambda\,y$	"	$x = \alpha$	11
	μxy		w pozostałych przypadkach	12

D e f i n i c j a 5.4

Językiem $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})$ nazywamy parę $(\mathfrak{G}(\mathfrak{J}), \mathfrak{B}_1(\mathfrak{J}))$, gdzie $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{J}) = \{X \mid X = \alpha\lambda s\omega R$ i $s \in B(\mathfrak{J})$ i R jest słowem w $\mathfrak{N}(\mathfrak{J})\}$.

Językiem $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J})$ nazywamy parę $(\mathfrak{G}(\mathfrak{J}), \mathfrak{B}_2(\mathfrak{J}))$ gdzie $\mathfrak{B}_2(\mathfrak{J}) = \{X \mid X = \alpha W \gamma \omega$ i W jest słowem w $Alf(ST(\mathfrak{J}))\}$.

Zauważmy, że języki $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})$ i $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J})$ mają identyczne gramatyki, tak więc relacje redukcji i konsekwencji zachodzą lub nie zachodzą równocześnie w obu językach. Zamiast więc pisać $R(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$, $R(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$ będziemy pisać $R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$. Podobnie będziemy pisać $BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$, $LBR(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$ oraz $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$.

D e f i n i c j a 5.5.

Język $\mathfrak{J}$ /dowolnego typu/ nazywamy p r o s t y m, jeśli dla każdego słowa W języka $\mathfrak{J}$ istnieje dokładnie jedno takie V, że $(W,V) \in BR(\mathfrak{J})$.

Twierdzenie 5.1

1. $B(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T}))$, $B(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T}))$ są zbiorami rozłącznymi, przeliczalnymi.
2. $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ jest zbiorem skończonym.
3. $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T})$, $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T})$ są językami typu 1, prostymi.

Dowód

1. Zbiór takich s, że $s \in B(\mathfrak{T})$ jest skończony z definicji języka typu 3. Zbiór $\mathfrak{N}(\mathfrak{T})$ jest skończony, a więc zbiór słów R w alfabecie $\mathfrak{N}(\mathfrak{T})$ jest przeliczalny jako zbiór wszystkich ciągów skończonych, utworzonych z elementów zbioru skończonego. Wynika stąd, że zbiór słów postaci $\alpha \lambda s \omega R$ jest przeliczalny. Zbiór $\mathrm{Alf}(\mathrm{ST}(\mathfrak{T}))$ jest skończony, zatem zbiór wszystkich słów w alfabecie $\mathrm{Alf}(\mathrm{ST}(\mathfrak{T}))$ jest przeliczalny, skąd zbiór słów $\alpha W \gamma \omega$ jest przeliczalny. Zbiory $B(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T}))$ i $B(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T}))$ są rozłączne, gdyż jeśli $X \in B(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T}))$ to $\lambda \in X$, jeśliby było przy tym $X \in B(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T}))$, to w słowie postaci $\alpha W \gamma \omega$ występowałaby litera λ, wbrew określeniu W.

2. Zbiór poprzedników X produkcji $(X,Y) \in G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ jest skończony na mocy skończoności $\dot{\mathrm{Alf}}(\mathrm{ST}(\mathfrak{T}))$. Każdemu poprzednikowi odpowiada dokładnie jeden następnik w $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$. Stąd zbiór wszystkich produkcji gramatyki $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ jest skończony.

3. Z postaci produkcji gramatyki $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ wynika, że jeśli $(X,Y) \in G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ to $d(X) = 3$, $d(Y) \geqslant 2$. Gramatyka $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ jest ponadto niepusta oraz na mocy punktu 2 niniejszego twierdzenia, skończona. Wynika stąd, że zarówno język $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T})$ jak i język $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T})$ jest typu 1.

Aby udowodnić fakt, że języki $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T})$ i $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T})$ są proste, zauważmy, że bazy tych języków zbudowane są ze słów zawierających dokładnie jedną z liter λ, γ, μ i że relacja bezp. konsekwencji tę własność zachowuje. Wynika stąd, że każde słowo języka $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T})$ i $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T})$ zawiera dokładnie jedną taką literę. Ponadto każde takie słowo, na mocy określenia gramatyki, posiada co najwyżej jedną bezpośrednią redukcję. Stąd zarówno język $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{T})$ jak i język $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{T})$ jest prosty. Cbdo.

L e m m a t 5.1

Jeśli słowo xW nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$ i nie jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$, to

$$(x \lambda W, xW\lambda) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})).$$

D o w ó d

Jeśli $d(W) = 0$ to teza lemmatu jest oczywista. Załóżmy, że lemmat jest prawdziwy dla $d(W_1) < n$, $n > 0$ i że $d(W) = n$. Istnieje wówczas takie q, że $W = qW_1$, $d(W_1) = n - 1 < n$ i W_1 nie ma b-redukcji w $\mathfrak{J}$.
Wówczas

$$(x \lambda qW_1, xq \lambda W_1) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$$

z produkcji o numerze 4 oraz

$$(xq \lambda W_1, xqW_1\lambda) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$$

z założenia indukcyjnego. Ponieważ

$$x \lambda qW_1 = x \lambda W,$$

$$xqW_1\lambda = xW\lambda$$

zatem lemmat jest udowodniony.

L e m m a t 5.2

Dla każdego słowa W w $Alf(\mathfrak{J})$ i dla każdego $r \in \mathfrak{N}(\mathfrak{J})$ jest:

$$(r\mu W, Wr\mu) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$$

D o w ó d analogiczny do dowodu lemmatu 5.1 z tym, że korzysta się z produkcji o numerze 9.

L e m m a t 5.3

Dla każdego słowa W w $Alf(\mathfrak{J})$ i dla każdego $x \in Alf(\mathfrak{J})$ zachodzi

$$\left(x\gamma W,\ xW\gamma \right) \in R\left(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{J})\right).$$

D o w ó d analogiczny do dowodu lemmatu 5.1 z tym, że korzysta się tutaj z produkcji o numerze 8.

L e m m a t 5.4

Dla każdego słowa W w $\mathrm{Alf}\ (\mathfrak{J})$ zachodzi

$$\left(W\mu\omega,\ \mu W\omega \right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})\right).$$

D o w ó d analogiczny do dowodu lemmatu 5.1 z tym, że korzysta się tutaj z produkcji o numerze 12.

L e m m a t 5.5

Jeśli słowo W w $\mathrm{Alf}\ (\mathfrak{J})$ nie ma b-konsekwencji w $\mathfrak{J}$ i $r \in \mathfrak{N}\ (\mathfrak{J})$, to

$$\left(W\gamma r,\ \gamma rW \right) \in R\left(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{J})\right).$$

D o w ó d analogiczny do dowodu lemmatu 5.1 z tym, że korzysta się tutaj z produkcji o numerze 7.

L e m m a t 5.6

Jeśli słowo W w $\mathrm{Alf}\ (\mathfrak{J})$ nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$ i αW jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$ to

$$\left(\alpha\lambda W,\ \alpha W\gamma\right) \in R\left(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{J})\right).$$

D o w ó d

Ponieważ αW jest sprzeczne, więc na mocy definicji 3.2 istnieją takie U, V że

$$\alpha W = UxyV \quad \text{i} \quad (x,y) \in \mathrm{Sp}\,(\mathfrak{J}).$$

Można założyć, nie zmniejszając ogólności rozważań, że słowo Ux nie jest sprzeczne w $\mathfrak{J}$.

Jeśli $U = \emptyset$ to $x = \alpha$ i $W = yV$, $\alpha\lambda W = x\lambda yV$; na mocy produkcji o numerze 2:

$$\left(x\lambda yV,\ x\gamma yV\right) \in BR\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})\right) \qquad /1/$$

i $x\gamma yV = \alpha\gamma W$, co z uwagi na lemmat 5.3 daje

$$\left(\alpha\gamma W,\ \alpha W\gamma\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})\right), \qquad /2/$$

co w przypadku $U = \emptyset$ kończy dowód.

Jeśli $U \neq \emptyset$, wówczas $U = \alpha U_1$ i

$$\alpha\lambda W = \alpha\lambda U_1 xyV .$$

Ponieważ $U_1 x$ nie ma b-redukcji w $\mathfrak{T}$ i jest zgodne w $\mathfrak{T}$ zatem, z uwagi na lemmat 5.1, mamy:

$$\left(\alpha\lambda U_1 xyV,\ \alpha U_1 x\lambda yV\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})\right). \qquad /3/$$

Na mocy produkcji o numerze 2

$$\left(\alpha U_1 x\lambda yV,\ \alpha U_1 x\gamma yV\right) \in BR\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})\right)$$

i zgodnie z lemmatem 5.3:

$$\left(\alpha U_1 x\gamma yV,\ \alpha U_1 xyV\gamma\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})\right)$$

co kończy dowód, ponieważ $\alpha U_1 xyV\gamma = \alpha W\gamma$. Cbdo.

L e m m a t 5.7

Niech $W = W_1 P W_2$ będzie słowem o postaci normalnej w $\mathrm{Alf}(\mathfrak{T})$, $\alpha W_1 P$ niech będzie zgodne w $\mathfrak{T}$ i niech $V_1, V_2, \ldots, V_m$ będą wszystkimi lb-redukcjami słowa W w $\mathfrak{T}$ oraz niech $r_1, r_2, \ldots, r_m$ będą nazwami produkcji przeprowadzających /patrz § 1/ słowo W w słowa $V_1, V_2, \ldots, V_m$, odpowiednio.
Załóżmy ponadto, że dla każdego $i = 1,2, \ldots, m-1$ zachodzi $r_i < r_{i+1}$ oraz że słowo $W_1 P$ jest zgodne w $\mathfrak{T}$.

Wówczas mają miejsce następujące relacje:

1. $(\alpha \lambda W\omega, \alpha \lambda V_1 \omega r_1) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$

2. $(\alpha V_i \gamma \omega r_i, \alpha \lambda V_{i+1} \omega r_{i+1}) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$ $\quad i = 1,2, \ldots, m-1,$

3. $(\alpha V_m \gamma \omega r_m, \alpha W\gamma\omega) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{T}))$.

D o w ó d

W myśl lemmatu 4.7 jeśli słowo W ma postać:

$$W = W_1 P W_2$$

i W_1 nie ma redukcji oraz W_2 nie ma konsekwencji w $\mathfrak{T}$, to słowa V_i są postaci

$$V_i = W_1 p_i W_2 \qquad i = 1,2, \ldots, m$$

oraz spełnione są następujące relacje:

$$(P, p_i, r_i) \in Prod(\mathfrak{T}) \qquad i = 1,2, \ldots, m.$$

Niech $P = xy$. Wówczas

$$\alpha \lambda W \omega = \alpha \lambda W_1 xy W_2 \omega. \qquad /1/$$

W_1 nie ma redukcji w $\mathfrak{T}$, zatem na mocy lemmatu 5.1:

$$(\alpha \lambda W_1 xy W_2 \omega, \alpha W_1 \lambda xy W_2 \omega) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})) \qquad /2/$$

x nie ma redukcji w $\mathfrak{T}$, zatem na mocy produkcji o numerze 4

$$(\alpha W_1 \lambda xy W_2 \omega, \alpha W_1 x \lambda y W_2 \omega) \in BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})) \qquad /3/$$

i na mocy produkcji o numerze 1

$$(\alpha W_1 x \lambda y W_2 \omega, \alpha W_1 p_1 r_1 \mu W_2 \omega) \in BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})). \qquad /4/$$

Zgodnie z lemmatem 5.2

$$(\alpha W_1 p_1 r_1 \mu W_2 \omega, \alpha W_1 p_1 W_2 r_1 \mu \omega) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{T})) \qquad /5/$$

i na mocy produkcji o numerze 10:

$$(\alpha W_1 p_1 W_2 r_1 \mu\omega \ , \ \alpha W_1 p_1 W_2 \mu\omega r_1) \in BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})). \qquad /6/$$

Z uwagi na lemmat 5.4 i z określenia V_1:

$$\alpha W_1 p_1 W_2 \mu\omega \ r_1 = \alpha V_1 \mu\omega \ r_1 \qquad /7/$$

i

$$(\alpha V_1 \mu\omega \ r_1, \ \alpha\mu V_1 \ \omega \ r_1) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})). \qquad /8/$$

Na mocy produkcji o numerze 11:

$$(\alpha\mu V_1 \ \omega \ r_1, \ \alpha\lambda V_1 \omega r_1) \in BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})). \qquad /9/$$

Zbierając /1/ - /9/ otrzymujemy pierwszą z relacji, stanowiących tezę lemmatu dla $P = xy$. Jeśli $P = y$, dowód jest analogiczny, z tym, że zamiast produkcji o numerze 1 stosuje się produkcję o numerze 3. Ponieważ w języku $\mathfrak{I}$ występują jedynie produkcje o poprzednikach albo postaci xy albo postaci x /$\mathfrak{I}$ jest typu $\mathcal{Y}$/, zatem relacja 1 tezy lemmatu jest udowodniona.

Przechodząc do relacji 2, mamy z określenia V_1:

$$\alpha \ V_1 \gamma \ \omega \ r_1 = \alpha \ W_1 p_1 W_2 \gamma \ \omega \ r_1 \qquad /10/$$

i na mocy produkcji o numerze 8 jest:

$$(\alpha W_1 p_1 W_2 \gamma\omega \ r_1, \ \alpha W_1 p_1 W_2 \omega\gamma \ r_1) \in BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{I}))$$

oraz z uwagi na lemmat 5.5

$$(\alpha W_1 p_1 W_2 \omega\gamma \ r_1, \ \alpha W_1 p_1 \gamma \ r_1 W_2 \omega) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})). \qquad /11/$$

Stąd na mocy produkcji 5:

$$(\alpha W_1 p_1 \gamma \ r_1 W_2 \omega, \ \alpha W_1 p_{1+1} r_{1+1} \mu W_2 \omega) \in BR(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})) \qquad /12/$$

Dalej analogicznie jak w /5/ – /9/ tego dowodu, mamy kolejno:

$$\left(\alpha W_1 p_{i+1} r_{i+1} \mu W_2 \omega,\ \alpha W_1 p_{i+1} W_2\, r_{i+1} \mu \omega\right) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})), \qquad /13/$$

$$\left(\alpha W_1 p_{i+1} W_2\, r_{i+1} \mu \omega,\ \alpha W_1 p_{i+1} W_2 \mu \omega\, r_{i+1}\right) \in BR(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})), \qquad /14/$$

$$\alpha W_1 p_{i+1} W_2 \mu \omega\, r_{i+1} = \alpha V_{i+1} \mu \omega\, r_{i+1}, \qquad /15/$$

$$\left(\alpha V_{i+1} \mu \omega\, r_{i+1}, \alpha \mu\ V_{i+1}\, \omega\, r_{i+1}\right) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})), \qquad /16/$$

$$\left(\alpha \mu\ V_{i+1} \omega\, r_{i+1}, \alpha \lambda\, V_{i+1} \omega\, r_{i+1}\right) \in BR(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})). \qquad /17/$$

Relacje /10/ – /17/ dają łącznie relację drugą tezy lemmatu.

Relację 3 dowodzi się analogicznie jak relację 2 z tym, że korzysta się zamiast z produkcji o numerze 5 z produkcji o numerze 6, ponieważ produkcja (P, p_m) ma w przyjętym uporządkowaniu najpóźniejszą nazwę, a zatem zachodzi relacja

$$(P,\ p_m,\ r_m) \in P_2(\mathfrak{I})$$

Cbdo.

L e m m a t 5.8

Przy założeniach i oznaczeniach poprzedniego lemmatu, jeśli $W_1 P$ jest słowem sprzecznym w $\mathfrak{I}$, wówczas

$$(\alpha \lambda\ W\omega, \alpha W\gamma\omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})).$$

D o w ó d

Jeśli $\alpha W_1 P$ jest słowem sprzecznym, to albo αW_1 jest sprzeczne, albo $\alpha W_1 = Ux$, $P = yV$ i para $(x,y) \in Sp(\mathfrak{I})$. Nie może być bowiem sprzeczne słowo P, jako poprzednik produkcji gramatyki $G(\mathfrak{I})$.

Jeśli αW_1 jest sprzeczne, to ponieważ nie ma ono redukcji w $\mathfrak{I}$, więc z lemmatu 5.6 wynika

$$(\alpha \lambda W_1 P W_2 \omega\ ,\ \alpha W_1 \gamma\ P W_2 \omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I}))$$

i z lemmatu 5.3:

$$(\alpha W_1 \gamma\ P W_2 \omega\ ,\ \alpha W_1 P W_2 \gamma \omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})).$$

Jeśli αW_1 nie jest sprzeczne, to ponieważ nie ma ono redukcji w $\mathfrak{I}$, więc na mocy lemmatu 5.1:

$$(\alpha \lambda W_1 P W_2 \omega,\ \alpha W_1 \lambda\ P W_2 \omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})).$$

Niech $\alpha W_1 = Ux$, $P = yV$. Jest więc

$$\alpha W_1 \lambda\ P W_2 \omega = Ux \lambda\ yVW_2 \omega .$$

Para (x,y) musi być sprzeczna w $\mathfrak{I}$, gdyż w przeciwnym razie słowo $\alpha W_1 P = UxyV$ nie byłoby sprzeczne, wbrew założeniu. Jest więc na mocy produkcji Nr 2:

$$(Ux \lambda yVW_2 \omega\ ,\ Ux \gamma\ yVW_2 \omega) \in BR(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I}))$$

i uwzględniając lemmat 5.3

$$(Ux \gamma\ yVW_2 \omega\ ,\ UxyVW_2 \gamma \omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})),$$

co wobec $UxyVW_2 \gamma \omega = \alpha W \gamma \omega$ kończy dowód.

<u>W n i o s e k 5.1</u> .

Jeśli $\alpha W \omega$ jest sprzeczne w $\mathfrak{I}$ i W nie ma redukcji w $\mathfrak{I}$ to

$$(\alpha \lambda W \omega,\ \alpha W \gamma \omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I})).$$

<u>D o w ó d</u>

Jeśli αW jest sprzeczne, to na mocy poprzedniego lemmatu $(\alpha \lambda W \omega,\ \alpha W \gamma \omega) \in R(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{I}))$

Jeśli αW jest zgodne, to niech

$$\alpha W = Ux$$

i wówczas $\alpha W\omega = Ux\omega$. Ponieważ Ux jest zgodne w $\mathfrak{J}$, więc para (x,ω) musi być sprzeczna. Jest więc:

$$\left(\alpha\lambda W\omega,\ \alpha W\lambda\omega\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})\right)$$

na mocy lemmatu 5.1 i

$$\alpha W\lambda\omega = Ux\lambda\omega,$$

$$\left(Ux\lambda\omega,\ Ux\gamma\omega\right) \in BR\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})\right)$$

na mocy produkcji nr 2, co wobec równości

$$\alpha W = Ux$$

daje tezę wniosku.

<u>Lemmat 5.9</u>

Niech W będzie słowem o postaci normalnej w $Alf(\mathfrak{J})$. Prawdziwe są następujące zdania:

(1) Jeśli $W \in S(\mathfrak{J})$ to dla każdego słowa R w $\mathfrak{M}(\mathfrak{J})$ istnieje takie słowo R' w $\mathfrak{M}(\mathfrak{J})$ oraz takie $s \in B(\mathfrak{J})$, że

$$\left(\alpha\lambda W\omega R,\ \alpha\lambda s\omega R'\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})\right).$$

(2) Jeśli $W \notin S(\mathfrak{J})$ to dla każdego słowa R w $\mathfrak{M}(\mathfrak{J})$ zachodzi

$$\left(\alpha\lambda W\omega R,\ \alpha W\gamma\omega R\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})\right).$$

<u>Dowód</u> przez indukcję względem rzędu $r_{\mathfrak{J}}(W)$ słowa W.

A. Niech $r_{\mathfrak{J}}(W) = 0$; wówczas W nie ma redukcji w $\mathfrak{J}$.

A1. Jeśli $W \in S(\mathfrak{J})$ to $W \in B(\mathfrak{J})$ i zdanie (1) jest prawdziwe dla $s = W$, $R' = R$.

A2. Jeśli $W \notin S(\mathfrak{J})$ to w myśl lemmatu 3.2 $\alpha W\omega$ jest słowem sprzecznym w $\mathfrak{J}$ i z wniosku 5.1 wynika
$\left(\alpha\lambda W\omega R, \alpha W\gamma\omega R\right) \in R\left(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})\right)$, co dowodzi /2/.

B. Niech $r_{\mathfrak{J}}(W) = n > 0$ i niech lemmat będzie prawdziwy dla $r_{\mathfrak{J}}(W) < n$.

Skoro W jest w postaci normalnej, to

$$W = W_1 P W_2$$

W_1 nie ma redukcji, W_2 nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$, P jest poprzednikiem pewnej produkcji w $G(\mathfrak{J})$.

Niech $(P, p_i) \in G(\mathfrak{J})$ $i = 1,2, \dots, m$ będą wszystkimi produkcjami o poprzedniku P w gramatyce $G(\mathfrak{J})$, ustawionymi w takiej kolejności, że jeśli

$$(P, p_i, r_i) \in \mathrm{Prod}\,(\mathfrak{J}) \quad i = 1,2,\dots, m,$$

to $r_i < r_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \leqslant j$.
Wówczas na mocy lemmatu 4.7 wszystkimi lewostronnymi redukcjami słowa W w $\mathfrak{J}$ są słowa:

$$V_i = W_1 p_i W_2 \qquad i = 1,2,\dots, m.$$

Jak wynika z twierdzenia 4.2 na to, aby było $W \in S(\mathfrak{J})$ potrzeba i wystarcza, aby dla pewnego k, $1 \leqslant k \leqslant m$, było

$$V_k \in S(\mathfrak{J}).$$

B.1. Niech $W \in S(\mathfrak{J})$. Można założyć, nie zmniejszając ogólności rozważań, że dla $l < k$ jest

$$V_l \notin S(\mathfrak{J}),\ V_k \in S(\mathfrak{J}).$$

Ponadto, słowo $\alpha W \omega$ jest zgodne w $\mathfrak{J}$.

Z uwagi na lemmat 2.5 jest $r_{\mathfrak{J}}(V_i) < n$, $i = 1,2,\dots, m$ i z założenia indukcyjnego

$$(\alpha \lambda V_l \omega\ r_l,\ \alpha V_l \gamma \omega r_l) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})), \qquad l = 1,2, \dots, k-1$$

oraz z lemmatu 5.7

$$(\alpha V_l \gamma \omega r_l,\ \alpha \lambda V_{l+1} \omega r_{l+1}) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})), \quad l = 1,2, \dots, k-1.$$

Łącząc te relacje, otrzymujemy

$$(V_l \gamma \omega r,\ \alpha \lambda V_{l+1} \omega r_{l+1}) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})), l = 1,2, \dots, k-1,$$

co daje po $k-1$ krotnym zastosowaniu prawa przechodniości dla relacji $R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$

$$(\alpha \lambda V_1 \omega r_1,\ \alpha \lambda V_k \omega r_k) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})).$$

Ponadto, na mocy lemmatu 5.7

$$(\alpha \lambda W \omega,\ \alpha \lambda V_1 \omega r_1) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I}))$$

oraz z założenia indukcyjnego

$(\alpha \lambda V_k \omega r_k,\ \alpha \lambda s \omega R'') \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I}))$ dla pewnego $s \in B(\mathfrak{I})$.

Z trzech ostatnich relacji dostajemy

$$(\alpha \lambda W \omega,\ \alpha \lambda s \omega R'') \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})),$$

czyli dla każdego R, oznaczając $R' = R'' R$ $(\alpha \lambda W \omega R,\ \alpha \lambda s \omega R') \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I}))$, co dowodzi prawdziwości zdania /2/.

B.2. Niech $W \notin S(\mathfrak{I})$. Wówczas, na mocy twierdzenia 4.2 dla każdego i, $i = 1,2, \ldots, m$ zachodzi

$$V_i \notin S(\mathfrak{I}).$$

B.2.1. Niech $W_1 P$ będzie zgodne w $\mathfrak{I}$. /Umożliwia to stosowanie lemmatu 5.7/.

Jest więc, ponieważ $r_{\mathfrak{I}}(V_i) < n$, z założenia indukcyjnego:

$$(\alpha \lambda V_i \omega r_i,\ \alpha V_i \gamma \omega r_i) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})),\ i = 1,2, \ldots, m$$

oraz z lemmatu 5.7:

$$(\alpha V_i \gamma \omega r_i,\ \alpha \lambda V_{i+1} \omega r_{i+1}) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})), i = 1,2, \ldots, m-1.$$

Łącząc powyższe relacje, otrzymujemy:

$$(\alpha \lambda V_i \omega r_i,\ \alpha \lambda V_{i+1} \omega r_{i+1}) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})),\ i = 1,2, \ldots, m-1.$$

Stosując m-krotnie prawo przechodniości relacji $R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I}))$ otrzymujemy:

$$(\alpha \lambda V_1 \omega r_1,\ \alpha \lambda V_m \omega r_m) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I})).$$

Ponadto, z lemmatu 5.7 mamy:

$$(\alpha \lambda W \omega,\ \alpha \lambda V_1 \omega r_1) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{I}))$$

oraz

$$\left(\alpha \lambda V_m \omega r_m,\ \alpha W \gamma \omega\right) \in R\left(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{J})\right).$$

Zbierając trzy ostatnie relacje, otrzymujemy:

$$\left(\alpha \lambda W \omega R,\ \alpha W \gamma \omega\ R\right) \in R\left(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{J})\right)$$

dla każdego R.

B.2.2. Niech $W_1 P$ będzie sprzeczne w $\mathfrak{J}$. Wówczas na mocy lemmatu 5.8 mamy dla każdego R:

$$\left(\alpha \lambda W \omega R,\ \alpha W \gamma \omega R\right) \in R\left(\mathfrak{L}\ (\mathfrak{J})\right),$$

co kończy dowód we wszystkich przypadkach. Cbdo.

<u>Twierdzenie 5.2</u>

Niech W będzie słowem w Alf $(\mathfrak{J})$ i niech W nie ma konwekwencji w $\mathfrak{J}$. Wówczas:

1. Jeśli $W \in S\ (\mathfrak{J})$, to $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_1\ (\mathfrak{J}))$.
2. Jeśli $W \notin S\ (\mathfrak{J})$, to $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$.

<u>D o w ó d</u>

Twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z definicji 5.4 i lemmatów 4.1 i 5.9.

<u>L e m m a t 5.10</u>

Dla języków $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J})$ określonych def. 5.4 nie istnieje takie X, że X jest słowem języka $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})$ i X jest słowem języka $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J})$.

<u>D o d ó d</u>

Przypuśćmy, że tak nie jest, tj. że pewne X jest zarówno słowem języka $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})$ jak i języka $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J})$. Istnieje więc taki ciąg

$$W_0,\ W_1,\ \ldots,\ W_n, \qquad /1/$$

że $n \geqslant 0$, $X = W_0$, $W_n \in B(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$ oraz

$$(W_{i-1}, W_i) \in BR(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})) \quad \text{dla} \quad i = 1,2, \ldots, n$$

Istnieje też ciąg

$$V_0, V_1, \ldots, V_m \qquad /2/$$

taki, że $m \geqslant 0$, $X = V_0$, $V_m \in B(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$ oraz $(V_{i-1}, V_i) \in BR(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$ dla $i = 1,2, \ldots, m$. Mamy $X = V_0 = W_0$; z faktu, że języki $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J})$ i $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J})$ są proste i mają wspólną gramatykę, wynika, że $W_1 = V_1$. Podobnie $W_2 = V_2$, itd. Niech $n \leqslant m$; wówczas mamy $W_n = V_n$ i na mocy /2/ zachodzi relacja $(W_n, V_m) \in R(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$; jeśli $m \leqslant n$, mamy $V_m = W_m$ i na mocy /1/ zachodzi relacja $(V_m, W_n) \in R(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$. Zatem dla pewnego $S \in B(\mathfrak{J})$, słowa W w $Alf(\mathfrak{J})$ i słowa R w $\mathfrak{N}(\mathfrak{J})$ miałaby miejsce jedna z dwóch relacji:

$$(\alpha \lambda S \omega R, \alpha W \gamma \omega) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})),$$
$$(\alpha W \gamma \omega, \alpha \lambda S \omega R) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})),$$

co nie jest możliwe z uwagi na postać produkcji gramatyki $G(\mathfrak{L}(\mathfrak{J}))$ Cbdo.

<u>L e m m a t 5.11</u>

Niech W będzie słowem w $Alf(\mathfrak{J})$ i niech W nie ma konsekwencji w $\mathfrak{J}$. Zachodzą wówczas równoważności:

1° $W \in S(\mathfrak{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$.

2° $W \notin S(\mathfrak{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$.

<u>D o w ó d</u>

1°. Jeśli $W \in S(\mathfrak{J})$, to z twierdzenia 5.2 wynika, że $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$. Jeśli $W \notin S(\mathfrak{J})$, to z tegoż twierdzenia wynika, że $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$ skąd na mocy lemmatu 5.10 wnioskujemy, że $\alpha \lambda W \omega \notin S(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$.

2°. Jeśli $W \notin S(\mathfrak{J})$, to z twierdzenia 5.2 wynika, że $\alpha \lambda W \omega \in S(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$. Jeśli $W \in S(\mathfrak{J})$, to z tegoż twierdzenia wnioskujemy, że $\alpha\lambda W\omega \in S(\mathfrak{L}_1(\mathfrak{J}))$ skąd na mocy lemmatu 5.10 wnioskujemy, że $\alpha\lambda W\omega \notin S(\mathfrak{L}_2(\mathfrak{J}))$.

Twierdzenie 5.3

Dla każdego języka $\mathfrak{K}$ typu 2 istnieją takie języki o wspólnej gramatyce $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$, typu 1, proste oraz takie słowa X, Y, że dla każdego słowa w Alf $(\mathfrak{K})$, nie posiadającego konsekwencji w $\mathfrak{K}$ prawdziwe są następujące tożsamości:

1° $W \in S(\mathfrak{K})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XWY \in S(\mathfrak{L}_1)$.

2° $W \in S(\mathfrak{K})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XWY \in S(\mathfrak{L}_2)$.

D o w ó d wynika natychmiast z lemmatu 5.11 i twierdzenia 1.1.

Na marginesie twierdzenia 5.2 i lemmatu 5.9 należy zwrócić uwagę na fakt, który wynika z dowodu lemmatu 5.9. Jeśli słowo W w alfabecie Alf $(\mathfrak{J})$ jest postaci normalnej w $\mathfrak{J}$ oraz $W \in S(\mathfrak{J})$ to wówczas istnieje takie słowo R, że

$$(\alpha\lambda W\omega,\ \alpha\lambda s\omega R) \in R(\mathfrak{L}(\mathfrak{J})).$$

Słowo R jest zbudowane z nazw produkcji gramatyki $G(\mathfrak{J})$, przy czym analizując dowód lemmatu 5.9 i stosując zasadę indukcji, można wywnioskować, że kolejne /począwszy od prawej/ litery słowa R stanowią nazwy kolejnych produkcji, określających wywód słowa s ze słowa W w $\mathfrak{J}$.

Słowo R reprezentuje to, co nazywa się r o z k ł a d e m s y n t a k t y c z n y m słowa W w $\mathfrak{J}$.

P r z y k ł a d

Następujący przykład wywodu słowa "aaaba" dotyczy określonego w przykładzie 1.1 języka $\mathfrak{P}$, typu 3, który jest równoważny językowi $\mathfrak{K}$, typu 2. Produkcje gramatyki języka $\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$ nie będą explicite wypisywane. W przykładzie będą wykorzystane tylko schematy produkcji, wymienione w definicji 5.3.

W wywodzie tym opuszczono niektóre słowa wywodu w języku $\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$, pozostawiono jedynie słowa postaci $\alpha\lambda W\omega R$ i $\alpha W\gamma\omega R$. Ponadto, słowo R będzie zbudowane ze wskaźników "i" zamiast z nazw produkcji "r_i", litery α, ω będą /z małymi wyjątkami/ opuszczone.

Słowa wywodu są ponumerowane kolejno w ten sposób, że słowa $\alpha \lambda W \omega R$ i $\alpha W \gamma \omega R$ otrzymują ten sam numer. Pary sprzeczne w $\alpha W \omega$ są podkreślone.

Wywód jest zilustrowany wykresem, którego znaczenie jest następujące: liczba zakreślona kółkiem reprezentuje słowa wywodu, zaopatrzone we wspólny numer równy danej liczbie. Strzałki ciągłe reprezentują relacje bezpośrednich redukcji w języku $\mathfrak{P}$. Numer przy strzałce ciągłej prowadzącej od słowa X do słowa Y określa produkcję z $G(\mathfrak{P})$ przeprowadzającą słowo X w słowo Y. Strzałka przerywana prowadząca od słowa X do słowa Y określa relację redukcji w języku $\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$.

Ponadto, wywód lewostronny słowa "aaaba" został w przykładzie przedstawiony w postaci dwóch innych diagramów, z których pierwszy przedstawia wywód tego słowa w języku $\mathfrak{P}$, drugi - w pierwotnym języku $\mathfrak{R}$, równoważnym $\mathfrak{P}$. Linie poziome podkreślają ciąg liter, przeprowadzanych przez produkcję w pewną literę napisaną bezpośrednio pod linią. Liczby, wypisane po lewej stronie takich linii określają numery odpowiednich produkcji. Widoczny jest bezpośrednio związek między ciągiem tych numerów a słowem R, występującym w ostatnim słowie wywodu w języku $\mathfrak{L}(\mathfrak{P})$.

1.	$\alpha \lambda a\ a\ a\ b\ a\ \omega$								
2.	$\lambda o\ a\ a\ b\ a$	1							
3.	$\lambda o\ o\ a\ b\ a$	1	1						
4.	$\lambda o\ o\ o\ b\ a$	1	1	1					
5.	$\lambda o\ o\ o\ u\ a$	4	1	1	1				
6.	$\lambda\ o\ c\ v\ a$	8	4	1	1	1			
7.	$\lambda\ o\ o\ \underline{v\ o}$	1	8	4	1	1	1		
7.	$o\ o\ v\ o\ \gamma$	1	8	4	1	1	1		
8.	$\lambda\ o\ o\ \underline{v\ t}$	2	8	4	1	1	1		
8.	$o\ o\ v\ t\ \gamma$	2	8	4	1	1	1		
9.	$\lambda o\ o\ v\ w$	3	8	4	1	1	1		
10.	$\lambda\ o\ o\ u$	10	3	8	4	1	1	1	
11.	$\lambda\ \underline{o\ v}$	8	10	3	8	4	1	1	1

11.	c v γ	8 10 3 8 4 1 1 1
10.	c c u γ	10 3 8 4 1 1 1
9.	c c v w γ	3 8 4 1 1 1
6.	c c v a γ	8 4 1 1 1
5.	c c c u a γ	4 1 1 1
4.	c c c b a γ	1 1 1
12.	λ c c t b a	2 1 1
13.	λ c c e b a	5 2 1 1
14.	λ c c e u a	4 5 2 1 1
15.	λ c c s a	9 4 5 2 1 1
15.	c c s a γ	9 4 5 2 1 1
14.	c c e u a γ	4 5 2 1 1
13.	c c e b a γ	5 2 1 1
16.	λ c c f b a	6 2 1 1
17.	λ c t b a	7 6 2 1 1
18.	λ c e b a	5 7 6 2 1 1
19.	λ c e u a	4 5 7 6 2 1 1
20.	λ c s a	9 4 5 7 6 2 1 1
20.	c s a γ	9 4 5 7 6 2 1 1
19.	c e u a γ	4 5 7 6 2 1 1
18.	c e b a γ	5 7 6 2 1 1
21.	λ c f b a	6 7 6 2 1 1
22.	λ t b a	7 6 7 6 2 1 1
23.	λ e b a	5 7 6 7 6 2 1 1
24.	λ e u a	4 5 7 6 7 6 2 1 1
25.	λ s a	9 4 5 7 6 7 6 2 1 1
25.	s a γ	9 4 5 7 6 7 6 2 1 1
24.	e u a γ	4 5 7 6 7 6 2 1 1
23.	e b a γ	5 7 6 7 6 2 1 1
26.	α λ f b a	6 7 6 7 6 2 1 1
26.	f b a γ	6 7 6 7 6 2 1 1
22.	t b a γ	7 6 7 6 2 1 1
21.	c f b a γ	6 7 6 2 1 1
17.	c t b a γ	7 6 2 1 1
16.	c c f b a γ	6 2 1 1
12.	c c t b a γ	2 1 1
27.	λ c c w b a	3 1 1

27.	c o w b a γ	3 1 1
3.	o c a b a γ	1 1
28.	λ o t a b a	2 1
29.	λ o e a b a	5 2 1
29.	o e a b a γ	5 2 1
30.	λ c f a b a	6 2 1
31.	λ t a b a	7 6 2 1
32.	λ e a b a	5 7 6 2 1
33.	λ e c b a	1 5 7 6 2 1
34.	λ e c u a	4 1 5 7 6 2 1
35.	λ e v a	8 4 1 5 7 6 2 1
36.	λ e v c	1 8 4 1 5 7 6 2 1
36.	e v c γ	1 8 4 1 5 7 6 2 1
37.	λ e v t	2 8 4 1 5 7 6 2 1
37.	e v t γ	2 8 4 1 5 7 6 2 1
38.	λ e v w	3 8 4 1 5 7 6 2 1
39.	λ e u	10 3 8 4 1 5 7 6 2 1
40.	α λ s ω	9 10 3 8 4 1 5 7 6 2 1

Literatura

[1] BACKUS J.W.: The Syntax and Semantics of the Proposed International Algebraic Language of the Zurich ACM-GAMM Conference. Information Processing, Proc. Internat. Conf. Unesco, Paris, 1959.

[2] BROOKER R.A., MORRIS D.: A General Translation Program for Phrase Structure Languages J. ACM 1962:9, 1-10.

[3] CHOMSKY N.: On Certain Formal Properties of Grammars. Information and Control, 1959, vol. 2, str.137-167.

[4] EICKEL J., PAUL M., BAUER F.L., SAMELSON K.: A Syntax Controlled Generator of Formal Language Processors. Comm. ACM 1963:8, 451-455.

[5] IRONS E.T.: A Syntax Directed Compiler for ALGOL 60. Comm. ACM 1961:3, 51-55.

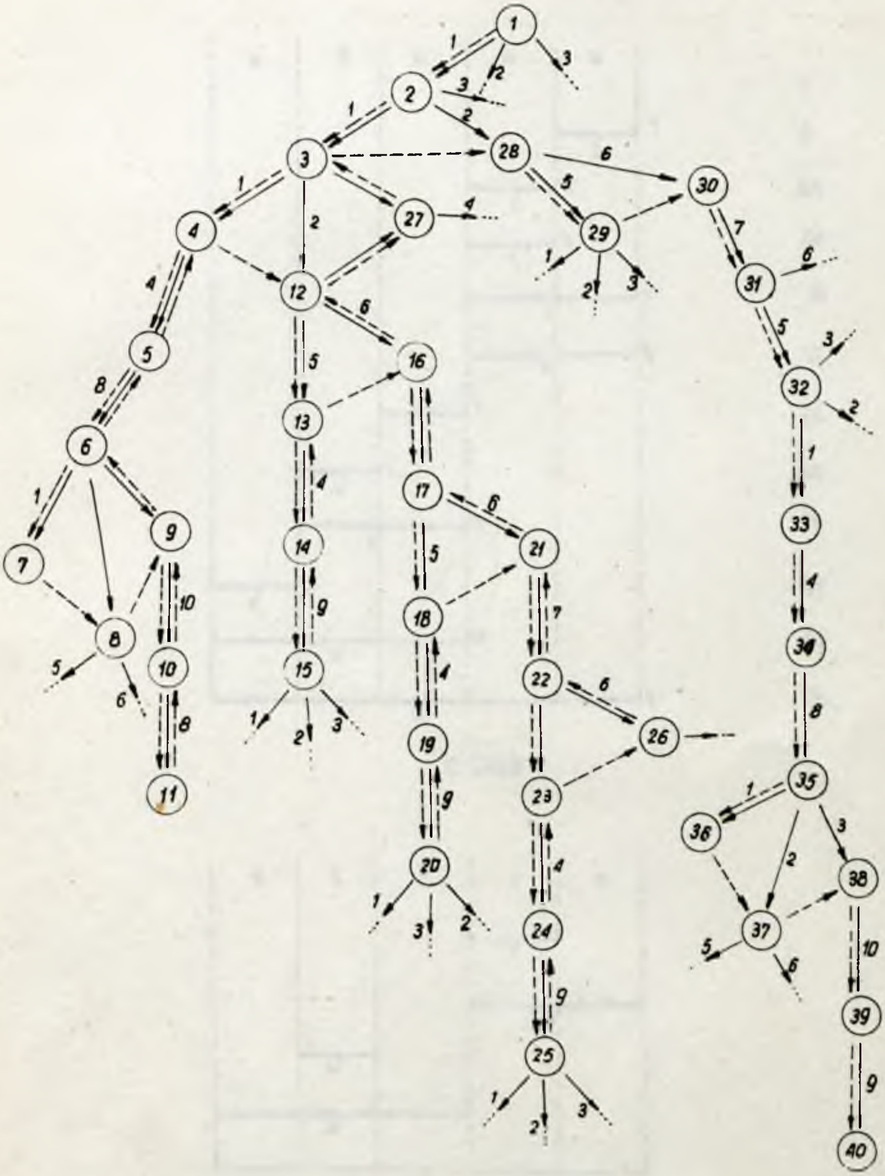
[6] ŁUKASZEWICZ L.: SAKO - an Automatic Coding System. Ann. Rev. of Automatic Programming, 1961:2, 161-176.

[7] MAZURKIEWICZ A.: Arithmetic Formulae and the Use of Subroutines in SAKO. Ann. Rev. of Automatic Programming, 1961:2, 177-195.

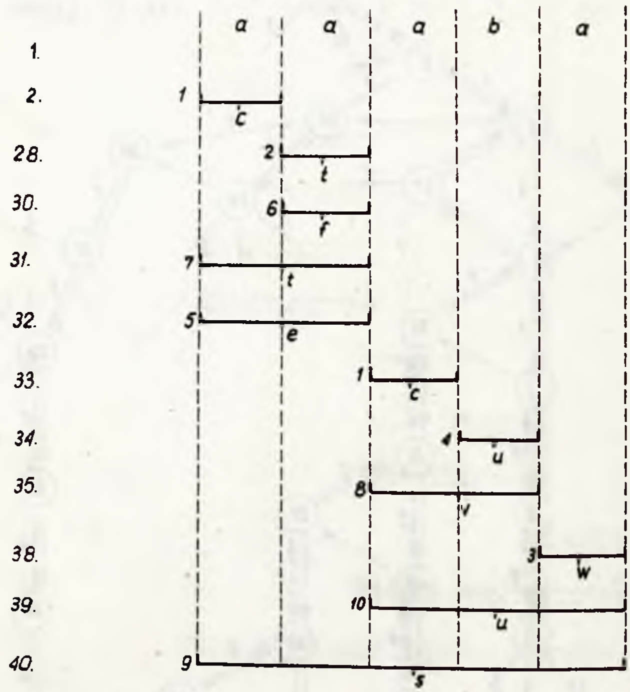
[8] NAUR P. /editor/: Report on the Algorithmic Language ALGOL 60, Comm. ACM 1960:3, 299-314.

[9] SAWICKI S.: Program identyfikujący dla translatora SAKO. Warszawa 1960 /niepublikowane/.

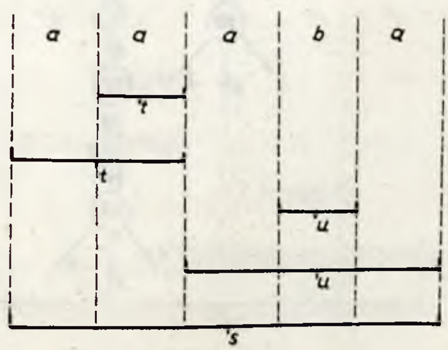
[10] SAMELSON K., BAUER F.L.: Sequential Formula Translation. Comm. ACM 1960:3, 76-83.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Druk „Znak" Zakł. 3. Zam. 282. 500.