

IX. Arytmetyczna teoria liczb bezwzględnych wogóle.

§ 71. Uwagi natury krytycznej, uczynione w § 34-tym co do geometrycznej teorii liczb wymiernych, wyłożonej w rozdziale IV-tym, moglibyśmy oczywiście zastosować i do geometrycznej teorii liczb bezwzględnych, rozwiniętej w rozdziale poprzedzającym. W takim razie znaczenie wspomnianych uwag nie tylko nie zmniejszyłoby się, ale przeciwnie, nabrałoby większej jeszcze doniosłości. Istotnie, dyskusya rozwinięta w § 63-cim przywodzi nas do wyniku następującego: żeby uzasadnić twierdzenie podstawowe, podane w § 64-tym, a polegające na tem, że przy oznaczonej jednostce długości, odpowiada nie tylko każdemu odcinkowi prostoliniowemu oznaczona liczba bezwzględna, stanowiąca jego miarę, ale odwrotnie, każdej liczbie bezwzględnej odpowiada oznaczonej długości odcinek, którego miara równa się właśnie rozważanej liczbie, zniewoleni jesteśmy do wprowadzenia nowego, zbędnego dla geometrycznej teorii liczb wymiernych aksjomatu, za który uważać możemy jedno z równoważnych sobie twierdzeń I, II, III z § 63-go, albo też oczywiście jakiekolwiek inne twierdzenie, równoważne jednemu a więc i każdemu z trzech twierdzeń poprzedzających. Fakt ten tem bardziej zaważyć musi przy powzięciu decyzji ugruntowania ogólnej teorii liczb bezwzględnych na podstawach czysto arytmetycznych, a więc wyłącznie na pojęciu liczby całkowitej, że najbardziej oczywisty z aksjomatów, na wprowadzeniu którego moglibyśmy poprzestać, ażeby ugruntować geometryczną teorię liczb bezwzględnych, mianowicie twierdzenie III-cie z § 63-go, bynajmniej nie posiada tych cech prostoty i przejrzystości, któremi odznaczają się aksjomaty, wystarczające do ugruntowania geometrycznej teorii liczb wymiernych. Ze stanowiska ewolucyi ogólnego pojęcia liczby okoliczność poprzedzająca miała znaczenie decydujące, albowiem ona właśnie

sprawiła, że konieczność wprowadzenia czysto-arytmetycznej teorii liczb niemal powszechnie jest już uznana i coraz liczniejszych zyskuje zwolenników.

Ponieważ rozwinęliśmy już w rozdziale VI-tym teorię liczb wymiennych, opartą wyłącznie na pojęciu liczby całkowitej, przeto każda teoria, oparta wyłącznie na pojęciu liczby wymiernej, uważana być winna za teorię czysto arytmetyczną. Zatem zadaniem niniejszego rozdziału będzie wysnuć wyłącznie z pojęcia liczby wymiernej ugruntowaną już w rozdziale poprzedzającym, ale na innych podstawach opartą, ogólną teorię liczb bezwzględnych, zastrzegając sobie na przyszłość takie ponowne opracowanie problemu mierzenia odcinków prostoliniowych, przy którym rozwiązanie tego problemu stanowiłoby tylko zastosowanie do przypadku szczególnego ogólnej teorii liczb bezwzględnych.

§ 72. Na czele teorii, którą zamierzamy rozwinąć, stawiamy pojęcie przekroju zbioru liczb wymiennych, przyjmując już w § 60-tym podaną definicję tego pojęcia, a więc definicję następującą:

Przekrojem zbioru liczb wymiennych nazywamy taki podział (P) zbioru tego na dwa nieskończone liczne zbiory, żeby każda liczba jednego z tych zbiorów, zbioru (K_1), mniejsza była od każdej liczby drugiego zbioru (K_2); zbiór (K_1) zowie się zbiorem liczb wymiennych pierwszej, a zbiór (K_2) — zbiorem liczb wymiennych drugiej kategorii w stosunku do odnośnego przekroju.

Opierając się wyłącznie na arytmetycznej teorii liczb wymiennych, uzyskaliśmy w § 60-tym wyniki, które możemy wyrazić w sposób następujący: Jakikolwiek przekrój (P) zbioru liczb wymiennych rozważalibyśmy, zachodzić może tylko jeden z dwóch przypadków następujących:

1°. Istnieje pewna jedna jedyna liczba wymierna w , którą jest albo największa z liczb, należących do zbioru liczb wymiennych pierwszej kategorii (K_1) w stosunku do rozważanego przekroju, — albo najmniejsza z liczb, należących do drugiej kategorii (K_2) liczb wymiennych w stosunku do tego przekroju, przy czem każda z dwóch alternatyw powyższych wyklucza drugą. Liczba w , o ile istnieje, zowie się liczbą położoną na przekroju (P), a sam ten przekrój zowie się w takim razie przekrojem pierwszego gatunku zbioru liczb wymiennych.

2°. Nie istnieje żadna liczba wymierna, położona na rozwa-

żanym przekroju. W takim razie przekrój ten zowie się przekrojem drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych.

Wiemy już wprowadzić z rozdziału poprzedzającego, że istnieją rzeczywiście i przekroje pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernych i przekroje drugiego gatunku tego zbioru liczb, ale winniśmy zastanowić się nad tem, czy możemy uzasadnić te fakta, opierając się wyłącznie na pojęciu arytmetycznem liczby wymiernej i nie odwołując się do żadnych pojęć natury geometrycznej. Spostrzegamy natychmiast, że tak jest. Istotnie, przyjąwszy dowolnie liczbę wymierną w od zera większą, określimy oczywiście pewien przekrój (P) pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernych, oświadczając, iż zaliczamy do pierwszej kategorii (K_1) liczb wymiernych w stosunku do przekroju (P) zbiór wszystkich liczb wymiernych mniejszych od liczby w , albo zbiór wszystkich tych liczb, oraz samą liczbę w , a do drugiej kategorii (K_2) — wszystkie liczby wymierne, nie należące do zbioru (K_1). Pozostaje tylko do uzasadnienia istnienie przekrojów drugiego gatunku liczb wymiernych, a w tym celu należy tylko podać przykład na taki przekrój. Żeby tego dokonać przyjmujemy dowolnie taką liczbę wymierną l , która nie byłaby kwadratem zupełnym (§ 61) i dzielimy liczby wymierne na dwie klasy (K_1) i (K_2), oświadczając, że do klasy (K_1) zaliczamy każdą liczbę wymierną, której kwadrat mniejszy jest od liczby l , a do klasy (K_2) każdą inną, czyli taką, której kwadrat jest większy od liczby l ; taki podział liczb wymiernych na dwie klasy stanowi, jakżeśmy się przekonali w § 61-szym, opierając się wyłącznie na pojęciach czysto arytmetycznych, drugiego gatunku przekrój zbioru liczb wymiernych. Uwagi powyższe znajdują się już w rozdziale poprzedzającym, zatem w rzeczywistości fakt istnienia obu gatunków przekrojów zbioru liczb wymiernych został już uzasadniony na podstawach czysto arytmetycznych w rzeczonym rozdziale, tylko na wspomnianem miejscu fakt ten wyraziliśmy, orzekając, iż posiadamy przykłady czysto arytmetycznego oznaczenia każdego z obu gatunków przekrojów zbioru liczb wymiernych. Ze stanowiska, które zajmujemy obecnie, orzeczenie, iż pewien przekrój zbioru liczb wymiernych istnieje, wyraża to samo, co ze stanowiska, zajmowanego przez nas w rozdziale poprzedzającym, wyrażało orzeczenie, iż rozważany przekrój zbioru liczb wymiernych może być oznaczony czysto arytmetycznie.

W rozdziale poprzedzającym poświęciliśmy § 66-ty głębszemu

zbadaniu pojęcia przekroju zbioru liczb wymiernih. Wyniki, do których doszliśmy, mają podstawowe znaczenie i ze względu na teorię, którą zamierzamy rozwinąć obecnie.

Ponieważ rozważania § 66-go oparliśmy wyłącznie na podstawach czysto arytmetycznych, przeto nie zachodzi potrzeba ponownego uzasadnienia wspomnianych wyników. Natomiast sądzimy, iż ułatwimy czytelnikowi zrozumienie dalszych wywodów, powtarzając na tem miejscu najważniejsze definicje, podane w § 66-tym i wysławiając powtórnie twierdzenia, uzasadnione we wspomnianym paragrafie.

Uważajmy jakikolwiek przekrój (P) zbioru liczb wymiernih i jakąkolwiek liczbę wymierną w , nie położoną na tem przekroju; żeby wyrazić, iż liczba w należy w stosunku do przekroju (P) do pierwszej kategorii liczb wymiernih, orzekamy, że ta liczba położona jest przed przekrojem (P) ; żeby zaś wyrazić, że liczba w należy do drugiej kategorii liczb wymiernih w stosunku do rozważanego przekroju, orzekamy, że ta liczba położona jest poza przekrojem (P) . Mamy tedy twierdzenie następujące:

I. *W zbiorze (A_1) liczb wymiernih, położonych przed jakimkolwiek, dowolnie oznaczonym przekrojem (P) zbioru liczb wymiernih, nie istnieje liczba największa, a w zbiorze (A_2) liczb wymiernih, położonych poza przekrojem (P) , nie istnieje liczba najmniejsza.*

II. *Pomiędzy jakimkolwiek przekrojem (P) zbioru liczb wymiernih a jakąkolwiek, na przekroju tym nie położoną liczbą wymierną w znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernih.*

III. *Jakąkolwiek liczbę wymierną, byle od zera większą, oznaczylibyśmy przez ε i jakikolwiek przekrój (P) zbioru liczb wymiernih rozważalibyśmy, zawsze istnieć będą dwie liczby wymierne a_1 i a_2 takie, żeby liczba a_1 położona była przed przekrojem (P) , a liczba a_2 poza tym przekrojem i żeby nadto zachodziła nierówność*

$$a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

Jeżeli każda liczba wymierna, położona przed jednym z dwóch przekrojów (P) i (Q) zbioru liczb wymiernih położona jest i przed drugim, a każda liczba wymierna, położona poza jednym z rozważanych przekrojów, położona jest i poza drugim, to ten stan rzeczy wyrażamy, orzekając, iż przekroje (P) i (Q) są równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernih. Na podstawie tej definicji mamy twierdzenia następujące:

IV. Jeżeli dwa przekroje zbioru liczb wymiernych są równorzędne, to przekroje te są zawsze jednocześnie albo pierwszego gatunku albo drugiego gatunku. W pierwszym przypadku liczby wymierne, położone na rozważanych przekrojach, są sobie równe, a w drugim — rozważane przekroje zlewają się ze sobą.

V. Dwa przekroje (P) i (P') zbioru liczb wymiernych są równorzędne w każdym z trzech przypadków następujących:

1°. W przypadku, kiedy zbiór liczb wymiernych, położonych przed przekrojem (P) , i zbiór liczb wymiernych, położonych przed przekrojem (P') , zlewają się ze sobą.

2°. W przypadku, kiedy zbiór liczb wymiernych, położonych poza przekrojem (P) , i zbiór liczb wymiernych, położonych poza przekrojem (P') , zlewają się ze sobą.

3°. W przypadku, kiedy każda liczba, położona przed przekrojem (P) , położona jest i przed przekrojem (P') , a każda liczba, położona poza przekrojem (P) , położona jest i poza przekrojem (P') .

VI. Jeżeli dwa przekroje zbioru liczb wymiernych nie są równorzędne, to istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych, położonych pomiędzy tymi przekrojami; pewien jeden z rozważanych przekrojów położony jest przed wszystkimi wspomnianymi liczbami, a drugi — poza wszystkimi temi liczbami. Nadto w zbiorze liczb wymiernych, położonych pomiędzy dwoma przekrojami zbioru wszystkich liczb wymiernych, nie istnieje ani liczba najmniejsza, ani liczba największa.

Żeby wyrazić, iż pewien jeden przekrój (P) z dwóch nierównorzędnych przekrojów zbioru liczb wymiernych położony jest przed liczbami wymiernymi, położonymi pomiędzy przekrojem (P) a drugim przekrojem (Q) , orzekamy, że przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , albo, że przekrój (Q) położony jest poza przekrojem (P) . Przyjąwszy tę definicyę, mamy twierdzenia następujące:

VII. Jeżeli pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych położony jest przed pewną liczbą wymierną, która sama położona jest przed pewnym drugim przekrojem (Q) zbioru liczb wymiernych, to przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) .

VIII. Jakiegokolwiek dwa przekroje (P) i (Q) zbioru liczb wymiernych rozważalibyśmy, zawsze zachodzi jeden, ale jeden tylko, z trzech przypadków następujących:

1°. Przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) .

2°. Przekrój (P) położony jest poza przekrojem (Q) .

3°. Przekroje (P) i (Q) są równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych.

Poprzedzający układ twierdzeń, uzasadnionych w § 66-tym, uzupełniamy obecnie. dołączając jeszcze do tego układu dwa nowe twierdzenia.

IX. Uważajmy trzy przekroje (P) , (Q) i (R) zbioru liczb wymiernych i załóżmy, że przekrój (P) równorzędny jest przekrojowi (Q) , a przekrój (Q) przekrojowi (R) . W takim razie przekrój (P) równorzędny będzie przekrojowi (R) .

Istotnie, uważajmy jakąkolwiek liczbę wymierną w , nie położoną na przekroju (P) . Jeżeli liczba w położona jest przed przekrojem (P) , to ona będzie położona i przed przekrojem (Q) , a stąd wynika, że liczba w położona będzie także i przed przekrojem (R) . Gdyby zaś liczba w położona była poza przekrojem (P) , to ona byłaby położona także poza przekrojem (Q) , a więc i poza przekrojem (R) . Wnosimy stąd na podstawie trzeciej części tw. V-go, że przekroje (P) i (R) są rzeczywiście równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych.

X. Uważajmy znowu trzy przekroje (P) , (Q) i (R) zbioru liczb wymiernych i załóżmy, że przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , a przekrój (Q) — przed przekrojem (R) . W takim razie przekrój (P) położony będzie przed przekrojem (R) .

Istotnie, oznaczmy przez w jedną z liczb wymiernych, położonych pomiędzy przekrojami (Q) i (R) ; liczba w położona będzie poza przekrojem (Q) , ale przed przekrojem (R) . Z drugiej strony liczba ta nie może być położona ani na przekroju (P) , ani przed tym przekrojem, gdyż w obu przypadkach przekrój (P) byłby, wbrew założeniu, położony poza przekrojem (Q) . Zatem liczba w położona będzie poza przekrojem (P) . Ponieważ zaś rozważana liczba położona jest przed przekrojem (R) , przeto na podstawie tw. VII-go przekrój (P) rzeczywiście położony będzie przed przekrojem (R) .

§ 73. Za definicję liczby niewymiernej przyjmujemy i obecnie definicję podaną w § 64-tym:

Liczbą niewymierną nazywamy każdy symbol, stanowiący arytmetyczne oznaczenie pewnego drugiego gatunku przekroju zbioru liczb wymiernych.

Żeby wyrazić, że pewien przekrój drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych tym właśnie jest przekrojem, który oznaczony jest pewną liczbą niewymierną, orzekamy, zgodnie z terminologią

już przyjętą w rozdziale poprzedzającym, że ta liczba niewymierna położona jest na rozważanym przekroju.

Stosując się i w dalszym ciągu do terminologii, wprowadzonej w rozdziale poprzedzającym, nazywamy liczbą bezwzględną każdy element zbioru, uzyskanego przez połączenie w jeden zbiór zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych.

Na podstawie wprowadzonych dotychczas definicji, możemy orzec, że każdej liczbie bezwzględnej, która nie jest liczbą wymierną równą liczbie zero, odpowiada przynajmniej jeden taki przekrój zbioru liczb wymiernych, na którym liczba ta jest położona, mianowicie, jeżeli rozważana liczba jest liczbą niewymierną, to istnieje jeden, i tylko jeden przekrój zbioru liczb wymiernych, na którym liczba ta jest położona; jeżeli zaś rozważana liczba jest liczbą wymierną *w* (od zera odmienną), to istnieją dokładnie dwa takie przekroje zbioru liczb wymiernych, iż liczba ta położona jest na każdym z nich, ale przekroje te są równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych i różnią się pomiędzy sobą tem tylko, że w stosunku do jednego z nich liczba *w* jest liczbą wymierną pierwszej kategorii, a w stosunku do drugiego — drugiej.

Z uwag poprzedzających wynika bezpośrednio twierdzenie następujące:

Jeżeli pewna liczba bezwzględna l, wymierna lub niewymierna, położona na każdym z pewnych dwóch przekrojów (P) i (Q) zbioru liczb wymiernych, to przekroje (P) i (Q) są równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych.

§ 74. Przechodzimy obecnie do ustawienia definicji, nadających liczbom bezwzględnym charakter wielkości w znaczeniu ścisłym.

Zachowując nadal bez żadnej zmiany te reguły porównywania ilościowego liczb wymiernych pomiędzy sobą, któreśmy przyjęli, rozwijając teorię liczb wymiernych, określamy reguły porównywania ilościowego liczb wymiernych z liczbami niewymiernymi i liczb niewymiernych pomiędzy sobą, przyjmując definicje następujące:

1°. *Orzeczenie, że dwie liczby bezwzględne, z których jedna przynajmniej jest liczbą niewymierną, są sobie równe, wyraża, że liczby te położone są na przekrojach równorzędnych zbioru liczb wymiernych.*

Ponieważ przekrój równorzędny jakiegokolwiek przekrojowi drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych w rzeczywistości zawsze

z tym przekrojem w zupełności się zlewa (§ 72, tw. IV), przeto na podstawie powyższej definicyi liczba niewymierna żadnej liczbie wymiernej równą być nie może, a równa się każdej takiej, i tylko takiej liczbie niewymiernej, która położona jest na tym samym przekroju zbioru liczb wymiernych, co ona sama.

2°. Oznaczona liczba wymierna w uważana jest za mniejszą lub za większą od oznaczonej liczby niewymiernej φ , zależnie od tego, czy liczba ta położona jest przed, czy też poza przekrojem zbioru liczb wymiernych, na którym leży liczba niewymierna φ .

Definicja ta jest całkiem wyraźna, albowiem przekrój zbioru liczb wymiernych, na którym leży liczba φ , jest przekrojem drugiego gatunku, skąd wynika, że liczba w na przekroju tym położona być nie może i dlatego leżeć musi albo przed wspomnianym przekrojem albo poza nim.

3°. Z dwóch nierównych sobie liczb niewymiernych uważamy za mniejszą tę, która leży na przekroju, położonym przed przekrojem, na którym leży liczba druga.

Definicja ta jest równie wyraźna, jak poprzedzająca, albowiem dwie nierówne sobie liczby niewymierne nie mogą być położone, ze względu na definicyę równości liczb niewymiernych, na przekrojach równorzędnych, a z dwóch przekrojów nierównorzędnych pewien jeden jest zawsze (§ 72, tw. VIII) położony przed drugim.

Warunki konieczne i wystarczające, ażeby definicje poprzedzające czyniły zadość ogólnym zasadom z rozdziału II-go, polegają na tem, żeby zachodziły twierdzenia następujące¹⁾:

I. Jakikolwiek dwie liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez a i b , zawsze zachodzi jeden, i tylko jeden ze związków następujących:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{lub} \quad a > b.$$

II. Jakikolwiek dwie liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez a i b , równość

$$a = b$$

równoważna jest równości

$$b = a.$$

III. W zbiorze wszystkich liczb bezwzględnych, równych oznaczonej liczbie bezwzględnej a , znajduje się i sama liczba a .

¹⁾ Obacz uwagę podaną w odsyłaczu na str. 97.

IV. Jeżeli trzy liczby bezwzględne a , b i c sprawdzają równości

$$a = b \quad \text{ i } \quad b = c,$$

to wówczas zachodzi i równość

$$a = c.$$

V. Związki

$$a < b \quad \text{ i } \quad b > a,$$

gdzie oznaczylibyśmy przez a i b dwie liczby bezwzględne, stanowią zawsze równoważne sobie związki.

VI. Jeżeli trzy liczby bezwzględne a , b i c sprawdzają związki

$$a < b \quad \text{ oraz } \quad b < c,$$

to w takim razie zachodzi i związek

$$a < c.$$

Zwracając się do definicyi, ustawionych na czele tego paragrafu, i uwzględniając uwagi, które poczyniliśmy przy tych definicyach, spostrzegamy natychmiast, że z twierdzeń poprzedzających, twierdzenia I, II, III i V zachodzą oczywiście. Zatem pozostaje do uzasadnienia twierdzenia IV i VI.

W tym celu uzasadnimy najpierw dwa twierdzenia przygotowawcze następujące:

VII. Wartość równa zero jest najmniejszą wartością, jaką może mieć liczba bezwzględna.

VIII. Jeżeli żadna z pewnych dwóch liczb bezwzględnych liczbie zero równa nie jest, jeżeli więc każda z rozważanych liczb uważana być może za liczbę, położoną na pewnym przekroju zbioru liczb wymiernych, to liczby te równe są sobie w razie, i tylko w razie, kiedy położone są na równorzędnych przekrojach zbioru liczb wymiernych; w przypadku nierówności rozważanych dwóch liczb, mniejsza położona jest na przekroju zbioru liczb wymiernych, położonym przed przekrojem, na którym leży liczba druga.

Twierdzenie VII-me jest prawie całkiem oczywiste; oznaczmy przez a jakąkolwiek, liczbie zero nierówną liczbę bezwzględną; jeżeli liczba a jest liczbą wymierną, to mamy

$$a > 0$$

na podstawie teorii liczb wymiernych; jeżeli zaś liczba a jest liczbą niewymierną, to liczba 0 położona jest przed tym przekrojem zbioru liczb wymiernych, na którym położona jest liczba a , zatem i w tym przypadku zachodzi nierówność

$$a > 0,$$

a to na podstawie drugiej z definicyi, wysłowionych na czele niniejszego paragrafu.

Obecnie, zwracamy się do uzasadnienia tw. VIII-go. Oznaczmy przez a i b dwie od zera odmienne liczby bezwzględne i załóżmy najpierw, że mamy

$$a = b. \quad (1)$$

Jeżeli obie liczby a i b są liczbami wymiernymi, to na podstawie tego czem jest ten przekrój zbioru liczb wymiernych, na którym oznaczona liczba wymierna jest położona, przekroje, na których położone są liczby a i b są równorzędnymi przekrojami zbioru liczb wymiernych; jeżeli zaś jedna z liczb a lub b jest liczbą niewymierną, to okoliczność poprzedzająca zachodzi na podstawie pierwszej z definicyi, ustawionych na początku niniejszego paragrafu.

Założmy teraz, że zachodzi nierówność

$$a < b \quad (2)$$

i oznaczmy przez (P) i (Q) te przekroje zbioru liczb wymiernych, na których położone są odpowiednio liczby a i b .

Jeżeli obie liczby a i b są liczbami niewymiernymi, to przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) bezpośrednio na podstawie trzeciej z definicyi, ustawionych na początku niniejszego paragrafu. Jeżeli liczba a jest liczbą wymierną, a b liczbą niewymierną, to na podstawie drugiej z definicyi, ustawionych na początku tegoż paragrafu, liczba a będzie liczbą wymierną położoną przed przekrojem (Q) zbioru liczb wymiernych.

Zatem na podstawie tw. II-go z § 72-go istnieć będzie liczba wymierna w , położona pomiędzy liczbą a a przekrojem (Q) . Liczba w oczywiście będzie większa od liczby a . Zatem liczba w położona będzie poza przekrojem (P) zbioru liczb wymiernych.

Z uwag tych wynika na podstawie tw. VII-go z § 72-go, iż przekrój (P) położony będzie i w przypadku obecnym przed przekrojem (Q) . Możliwy jest jeszcze przypadek, iż liczba a jest liczbą

niewymierną, a liczba b liczbą wymierną. W takim razie powołując się na twierdzenia wspomniane przed chwilą, znowu stwierdzilibyśmy z łatwością, iż przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) . Jedyny, nie uwzględniony jeszcze przypadek, który wydarzyć się może, jest ten, że obie liczby a i b byłyby liczbami wymiernymi. W takim razie każda liczba wymierna w , sprawdzająca nierówności

$$a < w < b,$$

oczywiście położona byłaby poza przekrojem (P) , ale przed przekrojem (Q) . Zatem na podstawie tw. VII-go z § 72-go i w tym przypadku przekrój (P) położony byłby przed przekrojem (Q) . Ostatecznie dowiedliśmy, że w razie równości (1) liczby a i b położone są na równorzędnych przekrojach zbioru liczb wymiernych, a w razie nierówności (2) — liczba a położona jest na przekroju (P) zbioru liczb wymiernych, położonym przed tym przekrojem (Q) zbioru liczb wymiernych, na którym położona jest liczba a .

Pozostaje tedy tylko do okazania, iż odwrotnie, jeżeli przekroje (P) i (Q) zbioru liczb wymiernych, na których położone są odpowiednio liczby a i b , są równorzędne, to zachodzi równość (1); jeżeli zaś przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , to zachodzi nierówność (2).

Otóż w pierwszym przypadku liczby a i b nie mogłyby nie być sobie równe, ponieważ na podstawie już uzasadnionych wyników w takim razie jeden z przekrojów (P) lub (Q) położony byłby, wbrew założeniu, przed drugim; w drugim zaś przypadku nie mogłby zachodzić żaden ze związków

$$a = b \quad \text{albo} \quad a > b,$$

gdyż w takim razie, na podstawie tego cośmy już dowiedli wyżej, przekrój (P) w żadnej z tych dwóch ewentualności nie mógłby być położonym przed przekrojem (Q) , a ponieważ zachodzi niezawodnie zawsze jeden ze związków

$$a < b, \quad a = b \quad \text{lub} \quad a > b,$$

przeto, jeżeli przekrój (P) położony jest przed przekrojem (Q) , to zgodnie z brzmieniem twierdzenia, zachodzi niezawodnie nierówność (2). Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Przystępujemy obecnie do przedstawienia dowodów nie uzasadnionych jeszcze twierdzeń IV i VI. W tym celu zachowujemy oznaczenia, w których twierdzenia te wysłowiliśmy i najpierw zwracamy się do przypadku szczególnego, w którym mamy

$$a = 0. \quad (1)$$

Jeżeli prócz równości poprzedzającej zachodzą jeszcze równości

$$a = b \quad \text{oraz} \quad b = c, \quad (2)$$

to w takim razie liczby a , b i c są liczbami wymiernymi. Istotnie na podstawie uwagi, uczynionej przy pierwszej z definicji, wysłowionych na czele tego paragrafu, liczba bezwzględna równa liczbie wymiernej, jest sama również liczbą wymierną. Ponieważ zaś liczba zero jest liczbą wymierną, przeto z równości (1) i (2) wynika kolejno, że liczby a , b i c są rzeczywiście liczbami wymiernymi. Ale skoro liczby a , b i c są liczbami wymiernymi, to na podstawie teorii liczb wymiernych równości (2) pociągają za sobą równość

$$a = c.$$

Zatem udowodniliśmy tw. IV-te w przypadku szczególnym, kiedy zachodzi równość (1).

Zakładając w dalszym ciągu, iż równość (1) zachodzi, przypuścimy, że mamy

$$b < c. \quad (3)$$

W takim razie równość

$$c = 0 \quad (4)$$

nie może zachodzić, albowiem na podstawie twierdzenia VII-go związku (3) i (4) jednocześnie zachodzić nie mogą. Ale skoro równość (4) nie zachodzi, to na podstawie tw. VII-go liczba a , jako równa zeru, mniejsza będzie od liczby c . Z tego wynika, że w razie równości (1) zachodzi i twierdzenie VI-te.

Przechodzimy tedy do przypadku, w którym mamy

$$a > 0. \quad (5)$$

Jeżeli nierówność ta zachodzi, to, na podstawie tw. VIII-go, założenie, iż jedna z liczb b lub c równa jest zeru, byłoby w sprze-

czności z założeniami każdego z twierdzeń IV i VI. Zatem, którekolwiek z tych twierdzeń pragnęlibyśmy uzasadnić, możemy opierać się na tem, że w przypadku nierówności (5), żadna z liczb a , b i c równa zeru nie będzie. Z tego wynika, że w przypadku, o który właśnie chodzi obecnie, istnieć będą trzy przekroje (P), (Q) i (R) zbioru liczb wymiernych, na których położone będą odpowiednio liczby a , b i c .

Na podstawie twierdzenia VIII-go, w razie równości

$$a = b \quad \text{ i } \quad b = c$$

przekroje (P) i (Q) z jednej strony, a przekroje (Q) i (R) z drugiej, będą przekrojami równorzędnymi zbioru liczb wymiernych, zatem (§ 72, tw. IX) w rozważanym przypadku przekroje (P) i (R) także będą przekrojami równorzędnymi, a stąd wynika, na podstawie tw. VIII-go, iż zachodzić będzie równość

$$a = c.$$

Zatem uzasadniliśmy w zupełności tw. IV-te.

Przypuśćmy teraz, że liczby a , b i c sprawdzają związki:

$$a < b \quad \text{ oraz } \quad b < c.$$

W takim razie (tw. VIII) przekrój (P) położony będzie przed przekrojem (Q), który znów położony będzie przed przekrojem (R). Zatem (§ 72, tw. X) przekrój (P) położony będzie przed przekrojem (R), skąd wynika na podstawie tw. VIII-go obecnego paragrafu, że liczby a i c sprawdzać będą, zgodnie z brzmieniem tw. VI-go, nierówność

$$a < c.$$

Ostatecznie, ze stanowiska ogólnych zasad rozdziału II-go, usprawiedliwiliśmy w zupełności definicję, któremi określiliśmy reguły porównywania ilościowego liczb bezwzględnych. Obecnie pragniemy uzasadnić pewne następstwa tych reguł.

IX. *Pomiędzy dwiema jakiegokolwiek, byle nie równymi sobie liczbami bezwzględnymi a i b ($a < b$), istnieje nieskończenie wiele nierównych sobie liczb wymiernych.*

Istotnie, jeżeli mamy

$$a = 0,$$

to nieskończony zbiór nierównych sobie liczb wymiernych większych od zera, a położonych przed przekrojem zbioru liczb wymiernych, na którym leży liczba b , stanowi właśnie zbiór liczb wymiernych, położonych pomiędzy liczbami a i b ; jeżeli zaś liczba a nie jest równa zeru, to każda z liczb a i b położona jest na pewnym przekroju zbioru liczb wymiernych, a zbiór liczb wymiernych, położonych pomiędzy tymi przekrojami, jest oczywiście zbiorem liczb wymiernych, położonych pomiędzy liczbami a i b .

Możemy posunąć się dalej i udowodnić twierdzenie następujące:

X. *Pomiędzy dwiema nierównymi sobie liczbami bezwzględnie istnieje nieskończenie wiele nierównych sobie liczb niewymiernych.*

Ze względu na twierdzenie dopiero co uzasadnione, uzasadnimy oczywiście twierdzenie obecne, jeżeli dowiedzimy, że pomiędzy dwiema, nierównymi sobie, od zera większymi liczbami wymiennymi a i b ($a < b$), położona jest zawsze przynajmniej jedna liczba niewymierna. Możemy oczywiście przyjąć

$$a = \frac{m}{p}, \quad b = \frac{m'}{p}, \quad (1)$$

oznaczając przez m , m' i p trzy od zera odmienne liczby całkowite.

Mamy tedy

$$m < m', \quad (2)$$

ponieważ oznaczenia tak przyjęliśmy, żeby było

$$a < b.$$

Mamy oczywiście

$$\frac{m^2}{p^2} < \frac{m^2 + 1}{p^2} < \frac{m'^2}{p^2}, \quad (3)$$

albowiem, ze względu na (2) i na to, że liczby m i m' są liczbami całkowitemi, mamy

$$m' \geq m + 1,$$

skąd

$$m'^2 \geq m^2 + 2m + 1,$$

a ponieważ liczba m jest od zera odmienna, przeto ze związku poprzedzającego mamy

$$m'^2 > m^2 + 1.$$

Liczba

$$(4) \quad \frac{m^2 + 1}{p^2}$$

nie jest zupełnym kwadratem (§ 61), ponieważ, gdybyśmy mieli

$$\frac{m^2 + 1}{p^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

oznaczając przez

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

pewną liczbę ułamkową, mielibyśmy

$$m^2 + 1 = \left(\frac{\alpha p}{\beta} \right)^2,$$

co mogłoby zachodzić tylko w razie, gdyby istniała (§ 61) liczba całkowita, której kwadrat równałby się liczbie $m^2 + 1$, a taka liczba całkowita nie istnieje, gdyż kwadrat liczby całkowitej, nie większej od m , mniejszy jest od $m^2 + 1$, a kwadrat każdej liczby całkowitej, większej od m , większy jest od $m^2 + 1$. Zatem liczba (4) rzeczywiście nie jest kwadratem zupełnym. Możemy tedy oznaczyć (§ 61) pewien drugiego gatunku przekrój (P) zbioru liczb wymiernych, oświadczając, że każda liczba wymierna, której kwadrat jest mniejszy od liczby

$$\frac{m^2 + 1}{p^2},$$

leży przed przekrojem (P), a każda liczba wymierna, której kwadrat większy jest od tej liczby, leży poza tym przekrojem. Na przekroju (P) położona jest pewna liczba niewymierna x , która na podstawie związków (1) i (2) sprawdza nierówności

$$a < x < b.$$

Dowiedliśmy więc istnienie liczby niewymiernej pośredniej pomiędzy liczbami a i b , a o to tylko chodziło.

§ 75. W § 68-ym zastanawialiśmy się już nad sprawą oznaczania liczb bezwzględnych. Ponieważ wszystkie pojęcia i twierdzenia, którymiśmy się tam posługiwali, zostały już w rozdziale obecnym ugruntowane na podstawach czysto arytmetycznych, przeto odsyłamy czytelnika do § 68-go, nadmienając, że zachowujemy