

III. Jeżeli dwie liczby bezwzględne  $a$  i  $b$  sprawdzają nierówność

$$a < b,$$

to istnieje nieskończenie wiele odmiennych pomiędzy sobą liczb wymiernych, z których każda większa jest od liczby  $a$ , ale jest mniejsza od liczby  $b$ .

Istotnie, spostrzegamy natychmiast, że twierdzenie to zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy mamy  $a = 0$ , gdyż w takim razie liczba  $b$  leży na pewnym przekroju ( $Q$ ) zbioru liczb wymiernych, a każda z nieskończenie wielu liczb wymiernych od zera większych, położonych przed przekrojem ( $Q$ ) większa jest od liczby  $a$ , ale jest mniejsza od liczby  $b$ . Jeżeli zaś mamy  $a > 0$ , to liczby  $a$  i  $b$  leżeć będą na pewnych dwóch nierównorzędnych przekrojach ( $P$ ) i ( $Q$ ) zbioru liczb wymiernych. Na podstawie tw. VI-go paragrafu poprzedzającego istnieje nieskończenie wiele nierównych sobie liczb wymiernych, położonych pomiędzy przekrojami ( $P$ ) i ( $Q$ ). Każda z tych liczb oczywiście leżeć będzie na pewnym takim przekroju zbioru liczb wymiernych, który położony będzie poza przekrojem ( $P$ ), ale przed przekrojem ( $Q$ ). Zatem na podstawie tw. I-go paragrafu niniejszego, każda z nieskończenie wielu liczb wymiernych, położonych pomiędzy przekrojami ( $P$ ) i ( $Q$ ) większa będzie od liczby  $a$ , ale będzie mniejsza od liczby  $b$ . Zatem uzasadniliśmy twierdzenie, o które chodziło.

§ 68. Zanim przejdziemy do teorii działań zasadniczych na liczbach bezwzględnych, winniśmy bliżej omówić sprawę oznaczania tych liczb.

Oznaczanie liczb wymiernych nie jest połączone z żadną trudnością, albowiem posiadamy do tego symbole specyficzne, czyli metodę ogólną do przedstawienia każdej takiej liczby przez symbol, utworzony według reguł jednostajnych ze skończonej liczby pewnych symbolów podstawowych, mianowicie cyfr

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Zgoła inny jest stan rzeczy, kiedy chodzi o liczby niewymierne: nie posiadamy żadnego takiego skończonego zbioru symbolów, żebyśmy mogli przedstawić każdą liczbę niewymierną przez jakąś kombinację skończonej liczby tychże, a nawet możemy dowieść drogą całkiem ścisłego rozumowania, którego wykład na tem miejscu byłby jednak przedwczesny, że ustawienie tego rodzaju

układu symbolów jest rzeczą niemożliwą. Natomiast istnieje pewna ogólna forma oznaczania liczb bezwzględnych, którą zamierzamy tu wyłożyć i która opiera się na twierdzeniu następującem:

I. Oznaczmy przez  $(A_1)$  i  $(A_2)$  dwa zbiory (skończone lub nieskończone) liczb wymiernych, sprawdzające warunki następujące:

1°. Żadna liczba, należąca do zbioru  $(A_1)$ , nie jest większa od liczby, należącej do zbioru  $(A_2)$ .

2°. Jeżeli oznaczymy przez  $\varepsilon$ , od zera odmienną, ale poza tem dowolnie przyjętą liczbę bezwzględną, choćby jak małą, to w takim razie zawsze istnieć będą dwie takie liczby wymierne, z których jedna  $a_1$  należy będzie do zbioru  $(A_1)$  a druga  $a_2$  — do zbioru  $(A_2)$ , że różnica  $a_2 - a_1$ , która ewentualnie może być równa zeru, sprawdzać będzie w każdym razie nierówność

$$(1) \quad a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

Zbiorem  $(A_1)$  i  $(A_2)$  odpowiadać będzie zawsze jednej, i tylko jednej wartości liczba  $a$ , która nie będzie ani mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(A_1)$ , ani większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ .

Układowi zbiorów, składającemu się ze zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$ , nadamy nazwę określnika liczby  $a$ , nazywając przytem zbiór  $(A_1)$  pierwszą, a zbiór  $(A_2)$  — drugą częścią tego określnika; sam określnik przedstawiamy przez symbol  $\{(A_1), (A_2)\}$ .

Dwie nierówne sobie liczby  $x_1$  i  $x_2$ , ( $x_1 < x_2$ ), nie mogą w żadnym razie być takie, ażeby żadna z nich nie była ani mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(A_1)$  ani większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ . Istotnie, w razie istnienia liczb  $x_1$  i  $x_2$ , zawsze znalazłyby się dwie liczby wymierne  $w_1$  i  $w_2$  takie, żebyśmy mieli

$$x_1 < w_1 < w_2 < x_2,$$

a ponieważ mielibyśmy

$$a_1 \leq x_1, \quad a_2 \geq x_2,$$

jakąkolwiek liczbę zbioru  $(A_1)$  oznaczylibyśmy przez  $a_1$  i jakąkolwiek liczbę zbioru  $(A_2)$  oznaczałby symbol  $a_2$ , przeto mielibyśmy

$$a_1 < w_1 < w_2 < a_2,$$

skąd

$$a_2 - a_1 > w_2 - w_1.$$

Gdybyśmy więc przyjęli

$$\varepsilon \leq w_2 - w_1,$$

to, wbrew założeniu, nie istniałyby takie do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$  odpowiednio należące liczby  $a_1$  i  $a_2$ , żeby liczby te sprawdzały związek (1). Stwierdzamy więc, że istnieje najwyżej tylko jednej wartości liczba  $a$ , która nie byłaby ani mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(A_1)$ , ani większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ .

Żeby udowodnić istnienie liczby  $a$ , zważmy najpierw, że w przypadku wyjątkowym, w którym do zbioru  $(A_1)$  należałaby tylko jedna jedyna liczba zero, wartość zero na  $a$  czyni oczywiście zadość warunkom wymaganym od tej liczby.

Zwróćmy się obecnie do przypadku, kiedy w zbiorze  $(A_1)$  istnieje jedna przynajmniej od zera odmienna liczba  $l_1$  i oznaczmy przez  $(K_1)$  zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda albo równa się pewnej liczbie zbioru  $(A_1)$ , albo jest od pewnej liczby tego zbioru mniejsza, a przez  $(K_2)$  — zbiór wszystkich innych liczb wymiernych.

To określenie zbiorów  $(K_1)$  i  $(K_2)$  stanowi zarazem określenie pewnego przekroju  $(P)$  zbioru liczb wymiernych; istotnie, zbiór  $(K_1)$  obejmuje nieskończenie wiele liczb, albowiem już wszystkie, w nieskończonej ilości istniejące, od liczby  $l_1$  nie większe liczby wymierne, należą oczywiście do zbioru  $(K_1)$ ; zbiór  $(K_2)$  obejmuje oczywiście także nieskończenie wiele liczb, albowiem, jeżeli oznaczmy przez  $l_2$  jedną z liczb zbioru  $(A_2)$ , to wszystkie liczby wymierne większe od  $l_2$  niezawodnie należą do zbioru  $(K_2)$ ; nareszcie każda liczba zbioru  $(K_1)$  mniejsza jest od każdej liczby zbioru  $(K_2)$ , albowiem, jeżeli pewna liczba  $a_1$  należy do zbioru  $(K_1)$ , a pewna liczba  $a_2$  — do zbioru  $(K_2)$ , to nie może zachodzić związek

$$a_2 \leq a_1,$$

gdyż każda, od liczby  $a_1$  nie większa liczba należy do zbioru  $(K_1)$  a więc nie do zbioru  $(K_2)$ .

Oznaczmy przez  $x$  liczbę, położoną na przekroju  $(P)$ . Żadna liczba zbioru  $(K_1)$  nie jest większa od liczby  $x$ , a ponieważ wszystkie liczby zbioru  $(A_1)$  należą do zbioru  $(K_1)$ , przeto liczba  $x$  nie jest mniejsza od żadnej liczby tego zbioru. Jeżeli żadna liczba zbioru  $(A_2)$  do zbioru  $(K_1)$  nie należy, to wszystkie te liczby należą do zbioru  $(K_2)$  i liczba  $x$ , jako nie większa od żadnej liczby zbioru  $(K_2)$ , nie jest większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ . Jednakże nie jest wykluczony przypadek, w którymby pewna liczba  $y$  zbioru  $(A_2)$  należała do zbioru  $(K_1)$ , ale w takim razie liczba  $y$  byłaby największą

szą liczbą zbioru  $(K_1)$ , ponieważ w przypadku przeciwnym liczba  $y$  byłaby mniejsza od pewnej liczby  $y'$  zbioru  $(K_1)$  i wbrew założeniom, przyjętym co do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$ , byłaby mniejsza od pewnej liczby zbioru  $(A_1)$ , mianowicie od istniejącej zawsze w tym zbiorze pewnej, od liczby  $y'$  nie mniejszej liczby. W rozważanym przypadku mielibyśmy  $x=y$ , przeto i w tym razie liczba  $x$  nie byłaby większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ .

Zatem wartość

$$a = x$$

liczby  $a$  czyni zadość wszystkim warunkom od tej liczby wymaganym i ostatecznie stwierdzamy, że liczba  $a$  istnieje rzeczywiście w każdym razie, a to właśnie pozostawało jeszcze do udowodnienia.

Do rozważań powyższych nawiązujemy uwagę następującą: fakt istnienia liczby  $a$  uzasadniliśmy, opierając się jedynie na tem, że żadna liczba zbioru  $(A_1)$  nie jest większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ , a bynajmniej nie powołując się w tej części dowodu wysłownego wyżej twierdzenia na to, iż do każdej od zera odmiernej liczby wymiernej  $\varepsilon$  możemy dobrać liczby  $a_1$  i  $a_2$ , należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$ , tak, ażeby zachodziła nierówność

$$a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

Z tego wynika, że zachodzi twierdzenie następujące:

II. *Gdybyśmy o dwóch zbiorach  $(Z_1)$  i  $(Z_2)$  liczb wymiernych wiedzieli z pewnością to tylko, że żadna liczba zbioru  $(Z_1)$  nie jest większa od żadnej liczby zbioru  $(Z_2)$ , to już stąd moglibyśmy wywnioskować, że istnieje przynajmniej jedna liczba bezwzględna, nie mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(Z_1)$ , ani większa od żadnej liczby zbioru  $(Z_2)$ .*

III. *Każda liczba bezwzględna  $a$  posiada przynajmniej jeden określnik.*

Istotnie, oznaczmy przez  $(A_1)$  zbiór wszystkich liczb wymiernych, nie większych od liczby  $a$ , a przez  $(A_2)$  zbiór wszystkich liczb wymiernych, nie mniejszych od tejże liczby  $a$ ; jeżeli liczba  $a$  równa jest zero, to zbiór  $(A_1)$  zawierać będzie tylko liczbę zero, we wszystkich innych przypadkach zbiór  $(A_1)$  będzie nieskończony; co do zbioru  $(A_2)$ , to zbiór ten będzie nieskończony w każdym razie. Oczywiście żadna liczba zbioru  $(A_1)$  nie będzie większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ . Oznaczmy przez  $\varepsilon$  choćby jak małą

liczbę, byle od zera odmienną, a przez  $\eta$  liczbę wymierną większą od zera, ale mniejszą od  $\varepsilon$  i uważajmy ciąg następujący:

$$0, \eta, 2\eta, 3\eta, \dots n \cdot \eta.$$

Jeżeli oznaczymy przez  $w_2$  jedną z liczb zbioru  $(A_2)$  i przyjmujemy liczbę całkowitą  $n$  taką, żebyśmy mieli

$$n \cdot \eta \geq w_2,$$

to ostatni wyraz powyższego ciągu należeć będzie do zbioru  $(A_2)$ ; ponieważ zaś pierwszy wyraz ciągu tego należy do zbioru  $(A_1)$ , przeto znajdują się w rozważanym ciągu dwa sąsiednie wyrazy

$$i \cdot \eta \quad \text{i} \quad (i+1) \cdot \eta,$$

z których pierwszy należeć będzie do zbioru  $(A_1)$ , a drugi do zbioru  $(A_2)$ . Ponieważ dalej różnica tych wyrazów równa się liczbie  $\eta$  mniejszej od liczby  $\varepsilon$ , przeto stwierdzamy, że jakkolwiek małą, byle od zera odmienną wartość przyjąlibyśmy na  $\varepsilon$ , zawsze istnieje będzie pewna liczba  $a_1 = i\eta$  w zbiorze  $(A_1)$  i pewna liczba  $a_2 = (i+1)\eta$  w zbiorze  $(A_2)$  takie, żebyśmy mieli

$$a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

Z tego wynika, że zbiór  $(A_1)$  możemy przyjąć za pierwszą część, a zbiór  $(A_2)$  za drugą część pewnego określnika liczby  $a$ . Zatem uzasadniliśmy twierdzenie, o które chodziło.

IV. W pierwszej części  $(A_1)$  określnika jakiegokolwiek liczby bezwzględnej  $a$  znajduje się zawsze jedna przynajmniej liczba większa od każdej liczby wymiernej mniejszej od liczby  $a$ <sup>1)</sup>, a w drugiej części  $(A_2)$  rozważanego określnika znajduje się zawsze jedna przynajmniej liczba mniejsza od każdej liczby wymiernej, większej od liczby  $a$ .

Istotnie, oznaczmy przez  $w_1$  jakąkolwiek liczbę wymierną, sprawdzającą nierówność

$$w_1 < a$$

i załóżmy, iż wbrew brzmieniu twierdzenia, nie istnieje w zbiorze  $(A_1)$  liczba większa od liczby  $w_1$ .

<sup>1)</sup> Gdyby liczba  $a$  równała się zeru, to nie istniałaby liczba wymierna mniejsza od niej; zatem w tym przypadku wyjątkowym pierwsza część twierdzenia byłaby oczywiście bezprzedmiotowa.

W takim razie każda liczba  $\alpha_1$  zbioru  $(A_1)$  sprawdzać będzie związek

$$(1) \quad \alpha_1 \leq w_1.$$

Oznaczmy przez  $w'_1$  jakąkolwiek liczbę wymierną, sprawdzającą nierówność

$$(2) \quad w_1 < w'_1 < a.$$

Na podstawie tw. III-go z § 67-go liczba  $w'_1$  istnieć będzie niezawodnie. Ale, jeżeli oznaczymy przez  $\alpha_2$  jakąkolwiek liczbę zbioru  $(A_2)$ , to mieć będziemy

$$\alpha_2 \geq a.$$

Zatem ze względu na jedną z nierówności (2) zachodzić będzie nierówność

$$(3) \quad \alpha_2 > w'_1.$$

Ze związków (1) i (3) wynika nierówność

$$(4) \quad \alpha_2 - \alpha_1 > w'_1 - w_1.$$

Ponieważ na podstawie jednej z nierówności (2) różnica

$$w'_1 - w_1$$

jest od zera większa, przeto istniałaby taka liczba bezwzględna  $\varepsilon$ , która sprawdzałaby nierówność

$$0 < \varepsilon < w'_1 - w_1,$$

zatem ze względu na nierówność (4) i wbrew podstawowej własności określników, nie istniałyby takie do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$  odpowiednio należące liczby  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , które sprawdzałyby nierówność

$$\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon.$$

Z tego wynika, iż zgodnie z brzmieniem twierdzenia zawsze istnieć będzie w zbiorze  $(A_1)$  liczba większa od każdej liczby wymiernej, mniejszej od liczby  $a$ .

Całkiem analogicznie upewniamy się, że w zbiorze  $(A_2)$  istnieje zawsze jedna przynajmniej liczba mniejsza od każdej liczby wymiernej  $w_2$ , większej od liczby  $a$ , albowiem, gdyby wbrew brzmieniu twierdzenia okoliczność ta nie zachodziła, to nie istniałyby

takie dwie liczby  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1$  i  $(A_2)$ , które sprawdzałyby nierówność

$$\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon,$$

gdybyśmy przyjęli na  $\varepsilon$  wartość od zera większą, ale mniejszą od różnicy

$$w_2 - w'_2,$$

gdzie oznaczylibyśmy przez  $w'_2$  jakąkolwiek liczbę wymierną, która sprawdzała by nierówności

$$a < w'_2 < w_2.$$

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Natychmiastowem prawie następstwem powyższego twierdzenia jest twierdzenie następujące:

V. *Jeżeli pewna liczba bezwzględna a nie należy sama do pierwszej części  $(A_1)$  pewnego swego określnika, to w zbiorze  $(A_1)$  nie istnieje liczba największa i zbiór ten obejmuje nieskończenie wiele nierównych pomiędzy sobą liczb; jeżeli zaś rozważana liczba a nie należy do drugiej części  $(A_2)$  pewnego swego określnika, to w zbiorze  $(A_2)$  nie istnieje liczba najmniejsza i zbiór ten obejmuje nieskończenie wiele nierównych pomiędzy sobą liczb.*

Istotnie, jeżeli liczba  $a$  sama do zbioru  $(A_1)$  nie należy, to, przyjąwszy w zbiorze tym jakąkolwiek liczbę  $\alpha_1$ , mieć będziemy

$$\alpha_1 < a.$$

Zatem, na podstawie twierdzenia poprzedzającego, w zbiorze  $(A_1)$  znajdzie się pewna liczba  $\alpha'_1$  większa od liczby  $\alpha_1$ , a stąd wynika, że w zbiorze  $(A_1)$  rzeczywiście największa liczba istnieć nie będzie i że zbiór ten obejmować będzie nieskończenie wiele nierównych pomiędzy sobą liczb. Jeżeli zaś liczba  $a$  nie należy do zbioru  $(A_2)$ , to każda liczba  $\alpha_2$  tego zbioru większa będzie od liczby  $a$  i z tej przyczyny do każdej liczby tego zbioru można będzie, ze względu na twierdzenie poprzedzające, dobrać w tymże zbiorze liczbę od niej mniejszą. Zatem, w rozważanem założeniu, w zbiorze  $(A_2)$  nie będzie istniała liczba najmniejsza i zbiór ten obejmować będzie nieskończenie wiele nierównych pomiędzy sobą liczb.

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Z tego twierdzenia wynika natychmiast twierdzenie następujące:

VI. Jeżeli pewien zbiór liczb wymiernych  $(A_1)$  stanowi pierwszą część, a pewien drugi zbiór liczb wymiernych  $(A_2)$  — drugą część określania pewnej liczby niewymiernej  $a$ , to w zbiorze  $(A_1)$  nie istnieje liczba największa, a w zbiorze  $(A_2)$  nie istnieje liczba najmniejsza, a każdy ze zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$  będzie obejmował nieskończenie wiele nierównych pomiędzy sobą liczb.

Istotnie, ponieważ liczba  $a$ , jako liczba niewymierna, nie może należeć ani do zbioru  $(A_1)$  ani do zbioru  $(A_2)$ , przeto, na podstawie tw. V-go, zbiory te posiadają rzeczywiście wysłowione w niniejszym twierdzeniu własności. Opierając się na tw. V-tem, uzasadnimy ważne bardzo twierdzenie następujące:

VII. Drugą część  $(A_2)$  określania  $\{(A_1), (A_2)\}$  jakiegokolwiek liczby bezwzględnej  $a$ , możemy zawsze zastąpić przez zbiór  $(A'_2)$  wszystkich tych liczb zbioru  $(A_2)$ , które są mniejsze od dowolnie przyjętej, byle od liczby  $a$  większej liczby wymiernej  $w_2$ , a w przypadku, kiedy pewna liczba wymierna  $w_1$  jest mniejsza od liczby  $a$ , możemy zastąpić pierwszą część  $(A_1)$  określania liczby  $a$  przez zbiór  $(A'_1)$  wszystkich tych liczb zbioru  $(A_1)$ , które są większe od liczby  $w_1$ .

Istotnie, na podstawie tw. V-go istnieć będzie zawsze jedna przynajmniej liczba w zbiorze  $(A'_2)$ . Innymi słowy, zbiór  $(A'_2)$  pustym zbiorem w żadnym razie nie będzie. Z drugiej znów strony oczywiście żadna liczba zbioru  $(A_1)$  nie będzie mogła być większa od od żadnej liczby zbioru  $(A'_2)$ . Zatem, żeby uzasadnić pierwszą część twierdzenia, należy tylko dowieść, iż do dowolnie przyjętej liczby  $\varepsilon$ , byle od zera większej, można dobrać dwie liczby  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A'_2)$ , w taki sposób, żeby zachodziła nierówność.

$$(1) \quad \alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon.$$

Otóż możemy w każdym razie wyznaczyć liczby  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  tak, żeby liczby te należały odpowiednio do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$  i żeby nadto zachodziła nierówność (1). Gdybyśmy tedy uzyskali na  $\alpha_2$  wartość nie należącą do zbioru  $(A'_2)$ , to dostatecznem byłoby oczywiście zastąpić tę wartość na  $\alpha_2$  przez wartość równą jakiegokolwiek liczbie zbioru  $(A'_2)$ , żeby układ liczb wymiernych  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$

czynił zadość wszystkim warunkom zadania. Przejdźmy tedy do drugiej części twierdzenia. Załóżmy, iż pewna liczba wymierna  $w_1$  sprawdza nierówność

$$w_1 < a.$$

(Żeby liczba taka istniała, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby liczba  $a$  była od zera większa). Na podstawie tw. V-go zbiór  $(A'_1)$  pustym zbiorem nie będzie; z drugiej strony oczywiście żadna liczba zbioru tego nie będzie większa od żadnej liczby zbioru  $(A_2)$ , nareszcie, jeśli oznaczymy przez  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  dwie liczby należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$ , i to takie, żeby zachodziła nierówność (1), gdzie oznaczyliśmy, jak wyżej, przez  $\varepsilon$  dowolnie naprzd daną, byle od zera większą liczbę bezwzględną, to w przypadku, w którymby liczba  $\alpha_1$  do zbioru  $(A'_1)$  nie należała, każda liczba  $\alpha'_1$  zbioru  $(A'_1)$  sprawdzałaby nierówność

$$\alpha_2 - \alpha'_1 < \varepsilon.$$

Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Natychmiastowem następstwem powyższego twierdzenia jest to, iż każda liczba bezwzględna posiada nieskończenie wiele określników. Okoliczność tę moglibyśmy łatwo sprawdzić i bezpośrednio, zważywszy, iż, jak to czytelnik z łatwością sam uzasadni, każdą z obu części określnika oznaczonej liczby możemy sobie pomyśleć jako utworzoną na przykład wyłącznie z liczb ułamkowych, których mianowniki byłyby równe potęgom oznaczonej dowolnie, byle od jedności większej, liczby całkowitej  $q$ .

W dalszym ciągu uważać będziemy liczbę bezwzględną za liczbę daną lub znaną, jeżeli będzie dany lub znany jeden z określników tej liczby; sam zaś określnik uważać będziemy za element dany lub znany w tym przypadku, kiedy o tym określniku ( $\Omega$ ) posiadać będziemy wiadomości wystarczające do rzeczywistego rozwiązania, o ile brakiem czasu nie bylibyśmy skrupowani, zadania następującego:

Oznaczysz przez symbol specyficzny od zera większą, ale choćby jak małą liczbę wymierną  $\varepsilon$ , przedstawić przez symbole specyficzne takie dwie liczby wymierne  $a_1$  i  $a_2$ , należące odpowiednio do pierwszej i drugiej części określnika ( $\Omega$ ), żebyśmy mieli

$$a_2 - a_1 < \varepsilon.$$



Poprzedzając określenie znaczenia wyrażenia „liczba bezwzględna dana lub znana“ równoważne jest oczywiście definicyi następującej: pewna liczba bezwzględna  $a$  uważana jest za daną lub znaną w tym przypadku, kiedy moglibyśmy, o ile brakiem czasu nie bylibyśmy skrupowani, rzeczywiście zawsze rozwiązać zagadnienie następujące: oznaczywszy przez symbol specyficzny, od zera odmienną, ale choćby jak małą liczbę wymierną  $\varepsilon$ , przedstawić przez symbole specyficzne dwie liczby wymierne  $a_1$  i  $a_2$ , sprawdzające jednocześnie wszystkie związki następujące:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a \\ a_2 &\geq a \\ a_2 - a_1 &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ wyznaczenie jakiegokolwiek elementu w każdym razie ma na celu zdobycie takich wiadomości o tym elemencie, ażeby rozważany element stał się elementem znanym, przeto określając warunki, przy których liczbę bezwzględną uważamy za znaną, określiliśmy tem samem, na czem polegać będzie dla nas sprawa wyznaczenia liczby bezwzględnej, określonej w jakimkolwiek sposób.

§ 69. Definicję dodawania liczb ułamkowych, podaną w § 19-tym i rozszerzoną następnie w § 20-tym do liczb wymiernych wogóle, możemy oczywiście rozszerzyć do liczb bezwzględnych jakichkolwiek, wprowadzając definicyę następującą:

*Wynikiem dodania jakiegokolwiek liczby bezwzględnej  $b$  do jakiegokolwiek drugiej liczby bezwzględnej  $a$ , czyli sumą liczb  $a$  i  $b$  nazywamy liczbę  $x$ , przedstawiającą, przy oznaczonej jednostce długości  $u$ , miarę sumy  $X$  odcinków  $A$  i  $B$ , których miary równają się odpowiednio liczbom  $a$  i  $b$ .*

Definicja powyższa oczywiście nie może doprowadzić do żadnej sprzeczności z podaną poprzednio definicyą dodawania liczb wymiernych; na podstawie definicyi tej suma dwóch liczb bezwzględnych oczywiście zawsze istnieje i posiada własność przemienności, a nadto, jeżeli założymy, że pewna liczba bezwzględna  $b'$  sprawdza związek

$$(1) \quad b' > b,$$

to mieć będziemy

$$(2) \quad a + b' > a + b,$$

albowiem, jeżeli oznaczmy przez  $B'$  odcinek, którego miarą byłaby liczba  $b'$ , to mieć będziemy:

$$B' > B \quad (3)$$

ze względu na (1), a więc także i

$$A + B' > A + B,$$

skąd znów natychmiast wynika nierówność (2).

Żeby okazać, iż omawiana definicja dodawania liczb bezwzględnych sprawdza w zupełności warunki, omówione w rozdziale V-tym, należy tylko dowieść, że wybór jednostki długości na wartość sumy dwóch liczb bezwzględnych żadnego wpływu nie wywiera. W tym celu udowodnimy, że możemy wyznaczyć wartość  $x$  sumy  $a + b$ , skoro tylko dane będą liczby  $a$  i  $b$ . Oznaczmy przez  $(A_1)$  i  $(A_2)$  pierwszą i drugą część tego określnika liczby  $a$ , który jest dany, a przez  $(B_1)$  i  $(B_2)$  elementy analogiczne, odnoszące się do liczby  $b$ . Następnie oznaczmy przez  $(X_1)$  zbiór liczb, z których każda jest sumą jednej liczby zbioru  $(A_1)$  i jednej liczby zbioru  $(B_1)$ , a przez  $(X_2)$  zbiór liczb, z których każda jest sumą jednej liczby zbioru  $(A_2)$  i jednej liczby zbioru  $(B_2)$ ; oczywiście żadna liczba zbioru  $(X_1)$  nie może być większa od żadnej liczby zbioru  $(X_2)$ .

Jakikolwiek odcinek przyjęlibyśmy za jednostkę, liczba  $x$  nie może być ani mniejsza od żadnej liczby  $x_1$  zbioru  $(X_1)$  ani większa od żadnej liczby  $x_2$  zbioru  $(X_2)$ . Z drugiej strony mamy w każdym razie

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 \\ x_2 &= a_2 + b_2, \end{aligned}$$

oznaczając przez  $a_1, a_2, b_1$  i  $b_2$  cztery liczby wymierne, należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1), (A_2), (B_1), (B_2)$ . Jakąkolwiek liczbę wymierną od zera odmienną oznaczylibyśmy przez  $\varepsilon$ , możemy zawsze tak dobrać  $a_1, a_2, b_1$  i  $b_2$ , żebyśmy mieli

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &< \varepsilon' \\ b_2 - b_1 &< \varepsilon'. \end{aligned}$$

Możemy więc dobrać liczby  $x_1$  i  $x_2$  tak, żebyśmy mieli

$$x_2 - x_1 < 2\varepsilon',$$

a ponieważ możemy przyjąć

$$2\varepsilon' = \varepsilon,$$

oznaczając przez  $\varepsilon$  liczbę wymierną daną, od zera odmienną, ale mogącą być dowolnie małą, przeto stwierdzamy, że możemy wyznaczyć liczby wymierne  $x_1$  i  $x_2$  tak, żebyśmy mieli

$$x_2 - x_1 < \varepsilon.$$

Dochodzimy ostatecznie do wyniku następującego: zbiory  $(X_1)$  i  $(X_2)$  uważać możemy odpowiednio za pierwszą i drugą część pewnego określника znanego, który określa sumę  $x$  liczb  $a$  i  $b$ , bez względu na wybór jednostki długości.

Wynik ten nie tylko daje nam pewność, że omawiana definicya dodawania liczb wymiernych i ten warunek sprawdza, iżby suma dwóch liczb tylko od ich wartości zależała, ale oczywiście stanowi jeszcze ogólne rozwiązanie problemu wyznaczenia sumy dwóch liczb bezwzględnych danych.

§ 70. Definicję mnożenia, którą dla liczb wymiernych podaliśmy w § 21-szym, możemy oczywiście rozszerzyć do liczb bezwzględnych jakichkolwiek. Uwaga ta przywodzi nas do przyjęcia definicyi następującej:

*Iloczynem oznaczonej liczby bezwzględnej  $a$ , przyjętej za mnożną, przez oznaczoną liczbę bezwzględną  $b$ , przyjętą za mnożnik, nazywamy liczbę, która w przypadku szczególnym, kiedy mnożna  $a$  równa się zeru, sama równa się zeru, a w innych przypadkach jest liczbą określoną w sposób następujący: przyjmawszy dowolnie pewien odcinek  $U$ , od odcinka zerowego odmienny, oznaczamy przez  $U'$  odcinek, którego miara, przyjmując za jednostkę długości odcinek  $U$ , równa się mnożnej  $a$ , a przez  $X$  — odcinek, którego miara, przyjmując odcinek  $U'$  za jednostkę, równa się liczbie  $b$ ; w takim razie mająca być określona wartość iloczynu  $a \cdot b$  będzie liczba  $x$ , równająca się mierze odcinka  $X$ , gdy przyjmiemy za jednostkę odcinek  $U$ .*

Spostrzegamy natychmiast, że dla usprawiedliwienia tej definicyi winniśmy tylko dowieść, że wartość iloczynu od wyboru odcinka  $U$  nie zależy. Okoliczność ta jest bezpośrednio oczywista w razie, kiedy mnożna równa się zeru. Spostrzegamy także natychmiast, że w przypadku, kiedy mnożna jest od zera odmienna, ale mnożnik równy jest zeru, iloczyn  $a \cdot b$  równa się zeru, podobnie jak w przypadku, kiedy mnożna równa jest zeru, albowiem w takim razie odcinek  $X$  jest odcinkiem zerowym. Jeżeli więc jeden z czynników  $a$  lub  $b$  równa się zeru, to iloczyn równa się także zeru i dlatego w tym razie od odcinka  $U$  bynajmniej nie zależy

Pozostaje zatem do bliższego zbadania przypadek, w którym żaden z czynników  $a$  i  $b$  zeru nie jest równy. W tym celu oznaczmy przez  $(A_1)$  pierwszą część pewnego określnika liczby  $a$ , przez  $(A_2)$  drugą część tego określnika, a przez  $(B_1)$  i  $(B_2)$  analogiczne elementy, odnoszące się do liczby  $b$ . Założmy nadto, że wspomniane określniki liczb  $a$  i  $b$  tak są dobrane, żeby żadna liczba, należąca do jednego ze zbiorów  $(A_2)$  lub  $(B_2)$ , nie była większa od pewnej liczby wymiernej  $l$ , oczywiście większej od każdej z liczb  $a$  i  $b$ . Założenie to możemy przyjąć na podstawie tw. VII-go z paragrafu poprzedzającego. Żeby posunąć się dalej, uzasadnimy najpierw twierdzenie pomocnicze następujące:

*Jeżeli oznaczmy przez  $A$  odcinek, którego miarą jest pewna liczba wymierna  $w$ , gdy przyjmiemy za jednostkę pewien odcinek  $B$ , a przez  $A'$  odcinek, którego miarą jest ta sama liczba wymierna  $w$ , ale w przypadku, kiedy za jednostkę przyjmujemy pewien odcinek  $B'$  od odcinka  $B$  większy, to w takim razie mamy*

$$A < A'. \quad (1)$$

Żeby twierdzenie to udowodnić, zważmy, że mamy w każdym razie

$$w = \frac{m}{p},$$

oznaczając przez  $m$  i  $p$  licznik i mianownik pewnej liczby ułamkowej  $\frac{m}{p}$ . Jeżeli tedy oznaczmy przez  $D$  i  $D'$  odcinki, sprawdzające równości

$$\begin{aligned} B &= p \cdot D \\ B' &= p \cdot D', \end{aligned}$$

to będziemy mieli

$$D < D', \quad (2)$$

albowiem drogą indukcji matematycznej łatwo dowieść, że w razie związku

$$D \geq D'$$

wbrew założeniu mielibyśmy

$$B \geq B'.$$

Z nierówności (2) wynika, że mamy

$$m \cdot D < m' \cdot D',$$

a ponieważ

$$A = m \cdot D$$

$$A' = m' \cdot D',$$

przeto stwierdzamy, że nierówność (1) rzeczywiście zachodzić będzie,

Powracając do badania iloczynu  $a \cdot b$ , oznaczmy przez  $a_1, a_2, b_1$  i  $b_2$  cztery liczby, należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1), (A_2), (B_1)$  i  $(B_2)$ , przez  $U'_1$  i  $U'_2$  odcinki, których miarami byłyby odpowiednio liczby  $a_1$  i  $a_2$ , w razie przyjęcia za jednostkę odcinka  $U$ , przez  $X_1$  odcinek, którego miarą byłaby liczba  $b_1$ , w razie przyjęcia za jednostkę odcinka  $U'_1$ , przez  $X_2$  odcinek, którego miarą byłaby liczba  $b_2$ , w razie przyjęcia za jednostkę odcinka  $U'_2$ , a przez  $X'_1$  i  $X'_2$  odcinki, których miarami byłyby odpowiednio liczby  $b_1$  i  $b_2$  w razie przyjęcia za jednostkę odcinka  $U'$ .

Na podstawie związków

$$a_1 \leq a \leq a_2$$

mamy

$$U'_1 \leq U \leq U'_2,$$

zatem ze względu na twierdzenie przygotowawcze, dopiero co dowiedzione, zachodzić będą związki

$$X_1 \leq X'_1$$

$$X'_2 \leq X_2,$$

a ponieważ mamy

$$b_1 \leq b \leq b_2,$$

przeto mamy także

$$X'_1 \leq X \leq X'_2,$$

mamy więc

$$(3) \quad X_1 \leq X \leq X_2.$$

Na podstawie teorii mnożenia liczb wymiernych, liczby, stanowiące odpowiednio miary odcinków  $X_1$  i  $X_2$ , w razie przyjęcia za jednostkę odcinka  $U$ , równać się będą iloczynom  $a_1 \cdot b_1$  i  $a_2 \cdot b_2$ , a ponieważ przyjmując tę samą jednostkę długości, miarę odcinka  $X$  oznaczyliśmy przez  $x$ , przeto na podstawie związków (3) mamy

$$(4) \quad a_1 \cdot b_1 \leq x \leq a_2 \cdot b_2,$$

jakkolwiek odcinek oznaczylibyśmy przez  $U$ .

Oznaczmy przez  $(C_1)$  zbiór wszystkich liczb, z których każda jest iloczynem jednej liczby zbioru  $(A_1)$  i jednej liczby zbioru  $(B_1)$ , a przez  $(C_2)$  zbiór wszystkich liczb, z których każda jest iloczynem jednej liczby zbioru  $(A_2)$  i jednej liczby zbioru  $(B_2)$ . Powiadam, że zbiór  $(C_1)$  uważany być może za pierwszą, a zbiór  $(C_2)$  za drugą część określnika pewnej liczby. Istotnie, ponieważ mamy

$$a_1 \leq a_2, \quad b_1 \leq b_2,$$

oznaczając, jak wyżej, przez  $a_1, a_2, b_1, b_2$  liczby, należące odpowiednio do zbiorów  $(A_1), (A_2), (B_1)$  i  $(B_2)$ , przeto mamy związek

$$a_1 \cdot b_1 \leq a_2 \cdot b_2,$$

który także uważany być może za następstwo związków (4) i który wyraża, że żadna liczba zbioru  $(C_1)$  nie jest większa od żadnej liczby zbioru  $(C_2)$ . Z drugiej strony mamy:

$$a_2 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1 = a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1), \quad (5)$$

a ponieważ żadna liczba, należąca do jednego ze zbiorów  $(A_2)$  lub  $(B_2)$ , od oznaczonej liczby wymiernej  $l$ , na podstawie założenia przyjętego wyżej, większa być nie może, ponieważ więc każda liczba, należąca do jednego ze zbiorów  $(A_1)$  lub  $(B_1)$ , od liczby  $l$  mniejsza być musi, przeto mamy

$$a_2 \leq l \quad \text{oraz} \quad b_1 < l,$$

skąd, na podstawie równości (5), wynika nierówność

$$a_2 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1 \leq l \cdot (b_2 - b_1) + l \cdot (a_2 - a_1). \quad (6)$$

Ale, jakkolwiek liczbę wymierną, od zera odmienną, oznaczilibyśmy przez  $\varepsilon'$ , możemy liczby  $b_1, b_2, a_1$  i  $a_2$  tak dobrać, żebyśmy mieli

$$b_2 - b_1 < \varepsilon' \quad \text{oraz} \quad a_2 - a_1 \leq \varepsilon',$$

w którymto razie zachodzić będzie nierówność

$$a_2 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1 < 2l \cdot \varepsilon', \quad (7)$$

na podstawie związku (6).

Zważmy obecnie, że jakąkolwiek liczbę wymierną, od zera odmienną, ale choćby jak małą, oznaczylibyśmy przez  $\varepsilon$ , będziemy mogli przyjąć liczbę  $\varepsilon'$  taką, żebyśmy mieli

$$2 \cdot l \cdot \varepsilon' = \varepsilon$$

i wyznaczyć następnie  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  i  $b_2$  w ten sposób, iżby zachodziła nierówność (7), która w takim razie pociągnie za sobą nierówność

$$(8) \quad a_2 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_1 < \varepsilon.$$

Ostatecznie, możemy zawsze tak dobrać liczby  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  i  $b_2$ , żeby zachodziła nierówność (8).

Stwierdzamy więc, że zbiory  $(C_1)$  i  $(C_2)$  spełniają i drugi z dwóch warunków koniecznych i wystarczających, ażebyśmy zbiory te uznać mogli odpowiednio za pierwszą i drugą część określnika oznaczonej liczby. Zważywszy, iż nierówności (4) wyrażają, że liczba  $x$  nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(C_1)$ , ani większa od żadnej liczby zbioru  $(C_2)$ , dochodzimy do twierdzenia następującego:

I. *Wartość  $x$  iloczynu  $a \cdot b$  jest liczba określona przez określnik, którego pierwszą częścią jest zbiór  $(C_1)$ , a drugą — zbiór  $(C_2)$ .*

Z twierdzenia tego wypływa najpierw, że *wartość iloczynu dwóch liczb bezwzględnych zależy jedynie od wartości czynników*, co właśnie było do udowodnienia, ażeby usprawiedliwić w zupełności powyższą definicyę mnożenia. Następnie z tegoż twierdzenia wynika, że *działanie mnożenia liczb bezwzględnych posiada własność przemienności*, albowiem zbiory  $(C_1)$  i  $(C_2)$  nie uległyby żadnej zmianie, gdybyśmy za mnożną przyjęli liczbę  $b$ , a za mnożnik — liczbę  $a$ . Nadto, ponieważ określnik, składający się ze zbiorów  $(C_1)$  i  $(C_2)$ , jest, w znaczeniu określonym w paragrafie poprzedzającym, znany w przypadkach, kiedy znane są rozważane wyżej określniki liczb  $a$  i  $b$ , przeto *twierdzenie, które uzyskaliśmy, dostarcza nam rozwiązania problemu wyznaczenia iloczynu dwóch danych liczb bezwzględnych.*

Bezpośredni następstwem powyższej definicyi mnożenia jest twierdzenie następujące:

II. *Jeżeli zamiast pewnej jednostki długości  $U'$  wprowadzimy nową jednostkę  $U$ , to liczba, stanowiąca miarę jakiegokolwiek odcinka*

*po wprowadzeniu jednostki  $U$ , równać się będzie iloczynowi liczby, stanowiącej miarę pierwotnej jednostki  $U'$  po wprowadzeniu nowej, przez liczbę, stanowiącą miarę rozważanego odcinka przed wprowadzeniem nowej jednostki.*

Z przyczyn wymienionych w § 58-ym nie rozwijamy już w tym rozdziale dalej teorii liczb bezwzględnych.

