

mniejsza wartość p_0 na p , której odpowiadać będzie taka wartość na m , żeby związek (1) pociągał za sobą związek (2), ale, a priori nie jest wykluczona ewentualność, w której, przy poprzedzającym określeniu liczb m_0 i p_0 , związek (5) nie pociągałby za sobą związku (6), gdyż dałoby się pomyśleć, iż nierówność $i \geq m_0$ pociąga za sobą równość $c_{i+p} = c_i$ tylko przy wartościach na p większych od p_0 , a nierówność $i \geq m$ — równość $c_{i+p_0} = c_i$ — tylko przy wartościach na m większych od m_0 .

Otóż na podstawie twierdzenia poprzedzającego wspomniany przypadek zajść nie może; gdyby owa okoliczność wykluczona nie była, to zapowiedź, iż rozważamy najmniejsze wartości na m i p , przy których związek (1) pociąga za sobą związek (2) nie miałyby znaczenia precyzyjnego.

Założmy, że liczby m i p mają najmniejsze takie wartości, przy których związek (1) pociągałby za sobą związek (2). W takim razie peryod

$$c_m, c_{m+1}, \dots, c_{m+p-1},$$

zowie się peryodem zasadniczym liczby dziesiętnej peryodycznej λ , a cyfra c_m i cyfry rzędu wyższego liczby λ zowią się cyframi regularnymi rozważanej liczby dziesiętnej peryodycznej.

W razie równości

$$m = 1$$

liczba λ zowie się liczbą dziesiętną czysto-peryodyczną, jeżeli zaś mamy

$$m > 1,$$

to liczba λ ma nazwę liczby dziesiętnej mieszano-peryodycznej, a cyfry

$$c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$$

zowią się cyframi nieregularnymi liczby λ .

§ 55. I. *Liczba dziesiętna nieskończona λ , przedstawiająca wynik rozwinięcia jakiegokolwiek liczby wymiernej L na liczbę dziesiętną, jest liczbą dziesiętną peryodyczną. Jeżeli liczba L może być przemieniona dokładnie na liczbę dziesiętną, to peryod liczby λ równa się zeru; w razie przeciwnym, peryod ten jest od zera odmienny.*

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, że zawsze możemy przyjąć:

$$L = \frac{w}{b}, \quad (1)$$

oznaczając przez w i b dwie liczby całkowite, z których b jest od zera odmienna. Pragnąc zapewnić dalszym rozważaniom możliwie największy stopień ogólności, nie będziemy zakładali, iż liczba ułamkowa

$$\frac{w}{b}$$

jest liczbą ułamkową nieprzywiedlną.

Ponieważ redukt liczby λ , doprowadzony do cyfry jednostek dziesiętnych jakiegokolwiek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, przedstawia wartość przybliżoną α liczby $\frac{w}{b}$, doprowadzoną do cyfry jednostek dziesiętnych tejże wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, przeto tw. I-sze z § 51-go uważane być może za regułę ogólną do wyznaczenia reduktów tej liczby dziesiętnej λ , która przedstawia wynik rozwijania liczby ułamkowej $\frac{w}{b}$ na liczbę dziesiętną nieskończoną. Żeby tę regułę wysłowić w postaci najdogodniejszej do dalszych rozważań, oznaczamy przez μ liczbę dziesiętną nieskończoną, którą określamy w sposób następujący: liczba jednostek dziesiętnych wartości $10^0 = 1$ liczby μ równa się liczbie całkowitej w , a cyfra jednostek dziesiętnych wartości $\frac{1}{10^k}$, jakąkolwiek od zera większą wartość całkowitą miałyby liczba k , równa się w liczbie dziesiętnej nieskończonej μ cyfrze zero.

Posługując się liczbą dziesiętną nieskończoną μ , możemy wysłowić rozważaną przed chwilą regułę w sposób następujący: redukt α liczby dziesiętnej nieskończonej λ , doprowadzony do cyfry jednostek dziesiętnych jakiegokolwiek wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$, równa się iloczynowi

$$X \cdot \frac{10^\alpha}{10^\beta},$$

gdzie oznaczyliśmy przez X całkowitą część ilorazu podziału przez b liczby W jednostek dziesiętnych wartości $\frac{10^\alpha}{10^\beta}$ w liczbie dziesiętnej nieskończonej μ .

Na podstawie reguły poprzedzającej liczba L_0 jednostek wartości $10^0 = 1$ w liczbie λ równać się będzie całkowitej części ilorazu liczby w przez liczbę b .

Oznaczmy odnośną resztę przez r_0 i uważajmy dwa ciągi następujące:

$$r_0, r_1, r_2, \dots \quad (2)$$

$$c_1, c_2, c_3, \dots \quad (3)$$

gdzie pierwszy wyraz pierwszego ciągu jest określoną już liczbą r_0 , a dalsze wyrazy tegoż ciągu i wszystkie wyrazy drugiego określamy w sposób następujący: przy każdej, od jedności nie mniejszej wartości wskaźnika k symbole c_k i r_k oznaczają odpowiednio całkowitą część ilorazu i resztę podziału przez b iloczynu $10 \cdot r_{k-1}$. Definicja poprzedzająca określa oczywiście w zupełności ciągi (2) i (3).

Powiadam, że wyraz c_k rzędu k w ciągu (3) przedstawia cyfrę jednostek wartości $\frac{1}{10^k}$ w liczbie λ . Zdanie to równoważne jest następującemu:

Oznaczając przez L_k liczbę jednostek wartości $\frac{1}{10^k}$ w liczbie λ , mamy wzór

$$L_k = L_0 \cdot 10^k + c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \dots + c_{k-1} \cdot 10 + c_k. \quad (4)$$

Żeby dowieść, że okoliczność ta zachodzi rzeczywiście, zważmy najpierw, iż na podstawie reguły wspomnianej przed chwilą, liczba L_k równa się w każdym razie całkowitej części ilorazu podziału przez liczbę b liczby jednostek wartości $\frac{1}{10^k}$ w liczbie μ , a więc liczby — $w \cdot 10^k$; następnie założmy chwilowo, że wzór (4) zachodzi, o ile wskaźnik k nie jest większy od pewnej liczby całkowitej i ($i \geq 0$), umawiając się przytem, że dla $k=0$ wyrażenie, stanowiące prawą stronę równości (4), przedstawia L_0 , i założmy nadto, że w razie związku $k \leq i$ reszta podziału r'_k liczby $w \cdot 10$ przez liczbę b równa się wyrazowi r_k ciągu (2). Mamy tedy:

$$w \cdot 10^i = (L_0 10^i + c_1 10^{i-1} + c_2 10^{i-2} + \dots + c_{i-1} \cdot 10 + c_i) \cdot b + r_i. \quad (5)$$

Ponieważ liczba L_{i+1} jest całkowitą częścią ilorazu podziału przez b liczby $w \cdot 10^{i+1}$, której liczba dziesiątków równa się liczbie $w \cdot 10^i$, przeto na podstawie teorii dzielenia liczb całkowitych zachodzą okoliczności następujące:

1°. Liczba dziesiątków liczby L_{i+1} równa się całkowitej części L_i ilorazu podziału przez b liczby $w \cdot 10^i$.

2°. Ponieważ pozostała reszta równa się liczbie r_i , przeto, oznaczając ogólnie przez c'_k cyfrę jednostek dziesiętnych wartości $\frac{1}{10^k}$ liczby dziesiętnej nieskończonej λ , cyfra jednośc c'_{i+1} liczby L_{i+1} równa się ilorazowi podziału przez b sumy

$$10 \cdot r_i + \text{cyfra jednośc liczby } w \cdot 10^{i+1} = 10 \cdot r_i + 0 = 10 \cdot r_i.$$

3°. Reszta dzielenia poprzedzającego równa się reszcie r'_{i+1} podziału liczby $w \cdot 10^{i+1}$ przez liczbę b .

Zatem na podstawie chwilowo przyjętego założenia, mamy

$$\begin{aligned} c'_{i+1} &= c_{i+1} \\ r'_{i+1} &= r_{i+1}. \end{aligned}$$

Gdyby więc równość (4) i równość

$$(6) \quad r'_k = r_k$$

zachodziły w razie, kiedy mamy $k \leq i$, to równości te zachodziłyby także i w razie, kiedy mamy $k = i + 1$. Ponieważ zaś dla $k = 0$ równość (6) zachodzi rzeczywiście na podstawie definicji symbolu r_0 a równość (4) redukuje się do tożsamości

$$L_0 = L_0,$$

albowiem umówiliśmy się wyżej, że dla $k = 0$ wyrażenie

$$L_0 \cdot 10^k + c_1 \cdot 10^k + c_2 \cdot 10^{k-2} + \dots + c_{k-1} 10 + c_k$$

przedstawia ma liczbę L_0 , przeto równości (4) i (6) zachodzą przy wszystkich wartościach na k , na podstawie zasady indukcji matematycznej.

Zatem, w szczególności, wyraz jakiegokolwiek rzędu c_k w ciągu (4) przedstawia rzeczywiście cyfrę jednostek wartości $\frac{1}{10^k}$ w liczbie λ .

Obecnie możemy już łatwo uzasadnić peryodyczność liczby dziesiętnej nieskończonej λ .

Ponieważ każdy wyraz ciągu (3), jako reszta podziału pewnej liczby całkowitej przez liczbę całkowitą od zera odmienną b , jest liczbą całkowitą, od liczby b mniejszą, a rozważany ciąg jest ciągiem nieskończonym, przeto nie każde dwa wyrazy tego ciągu będą

odmienne od siebie miały wartości. Oznaczmy przez r_{m-1} taki wyraz najniższego rzędu w ciągu (3), żeby w ciągu tym istniał drugi wyraz jemu równy. Oznaczmy tedy przez r_{m+p-1} taki wyraz najniższego rzędu ciągu (3), ażebyśmy mieli

$$r_{m+p-1} = r_{m-1}. \quad (7)$$

Powiadam, że wówczas związek

$$i \geq m \quad (8)$$

pociągać będzie za sobą równość następującą:

$$r_{i+p-1} = r_{i-1}. \quad (9)$$

Istotnie, założmy chwilowo, że nierówność (8) pociąga za sobą równość (9), a to w tym przypadku, kiedy wskaźnik i nie jest większy od pewnej liczby k . Mamy tedy

$$r_{k+p-1} = r_{k-1},$$

a ponieważ r_k i r_{k+p} stanowią odpowiednio reszty podziału liczb $10r_{k-1}$ i $10r_{k+p-1}$ przez liczbę b , przeto, ze względu na powyższą równość, będziemy mieć

$$r_{k+p} = r_k.$$

Gdyby więc związek (8) pociągał za sobą równość (9) pod warunkiem, żeby liczba i nie była większa od pewnej liczby k ($k \geq m$), to związek (8) pociągałby za sobą równość (9), byleby tylko liczba i nie była większa od liczby $k+1$, a ponieważ w razie $i=m$ równość (9) nie różni się od równości (7), która zachodzi niezawodnie, przeto związek (9) rzeczywiście zachodzi przy wszystkich, związkowi (8) czyniących zadość, wartościach na wskaźnik i .

Wnosimy stąd natychmiast, że związek (8) pociąga także za sobą równość

$$c_{i+p} = c_i, \quad (10)$$

albowiem liczby c_{i+p} i c_i stanowią odpowiednio całkowite części ilorazów podziału równych sobie liczb r_{i+p-1} i r_{i-1} przez liczbę b .

Dowiedliśmy więc, że liczba dziesiętna nieskończona λ jest liczbą dziesiętną peryodyczną o peryodzie ω , określonym przez wzór:

$$\omega = c_m \cdot 10^{p-1} + c_{m+1} \cdot 10^{p-2} + \dots + c_{m+p-2} \cdot 10 + c_{m+p-1}. \quad (11)$$

Jeżeli peryod ω liczby λ równa się zeru, to w takim razie cyfra c_m i wszystkie cyfry rzędów wyższych liczby λ równają się zeru i liczba L , na podstawie tw. II-go z § 53-go, może być dokładnie zamieniona na liczbę dziesiętną skończoną; gdy zaś peryod ω liczby λ jest od zera odmienny, to liczba L nie może być przemieniona dokładnie w liczbę dziesiętną, ponieważ (§ 53) wynikiem rozwinięcia na liczbę dziesiętną nieskończoną liczby dziesiętnej skończonej jest liczba dziesiętna nieskończona, której wszystkie cyfry, poczynając od pewnej cyfry dostatecznie wysokiego rzędu, równe są zeru, a w razie obecnym liczba λ oczywiście własności tej nie posiada.

Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Z twierdzenia tego wynika, że zgodnie z tem, cośmy zapowiedzieli w § 53-cim, nie każda liczba dziesiętna nieskończona uważana być może za wynik rozwinięcia liczby wymiernej na liczbę dziesiętną nieskończoną.

Uzyskane wyniki możemy uzupełnić, uzasadniając twierdzenie następujące:

II. Przy powyższem określeniu liczb m i p liczby te mają najmniejsze z tych wartości, przy których wogóle związek (8) pociąga za sobą równość (10), skąd wynika, że peryod ω , określony wzorem (11), jest peryodem zasadniczym liczby λ , a w razie nierówności $m > 1$, cyfry

$$c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$$

są nieregularnymi cyframi rozważanej liczby dziesiętnej peryodycznej.

Istotnie, ponieważ liczba λ jest liczbą dziesiętną peryodyczną, przeto istnieć będą (§ 54, tw. II) pewne dwie najmniejsze liczby całkowite m' i p' , ($m' \geq 1$), ($p' \geq 1$), takie, żeby związek

$$(12) \quad i \geq m'$$

pociągał za sobą związek

$$(13) \quad c_{i+p'} = c_i.$$

Z definicyi ciągów (3) i (4) mamy ogólnie

$$(14) \quad 10 \cdot r_{i-1} = b \cdot c_i + r_i.$$

Ponieważ w równości tej litera i oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą od jedności nie mniejszą, przeto możemy zastąpić w rozważanej równości i przez $i + p'$.

W taki sposób uzyskamy równość

$$10 r_{i+p'-1} = b \cdot c_{i+p'} + r_{i+p'}.$$

Założmy, że liczba i sprawdza warunek (12), w takim razie z równości poprzedzającej mamy

$$10 r_{i+p'-1} = b \cdot c_i + r_{i+p'} \quad (15)$$

ze względu na równość (13), która w rozważanym przypadku zachodzić będzie.

Z równości (14) i (15) wynika, że w razie związku

$$r_{i-1} \leq r_{i+p'-1}$$

mamy

$$r_i \leq r_{i+p'},$$

a w razie nierówności

$$r_{i-1} > r_{i+p'-1}$$

— nierówność

$$r_i > r_{i+p'}.$$

Jeżeli więc oznaczymy ogólnie przez d_k różnicę liczb r_k i $r_{k+p'}$, to na tej podstawie, że związek (12) pociąga za sobą równości (14) i (15), związek (12) pociąga za sobą i związek:

$$10 \cdot d_{i-1} = d_i, \quad (16)$$

skąd znowu wynika, że związek (12) pociąga za sobą związek

$$d_{i-1} = 10^{i-m} d_{m-1}, \quad (17)$$

albowiem dla $i = m$ związek ten jest prostą tożsamością, a gdyby rozważany związek zachodził przy pewnej od m nie mniejszej wartości na i , to ze względu na równość (16) omawiany związek zachodziłby jeszcze, gdybyśmy liczbę i o jedność zwiększyli, z czego wnosimy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że związek (17) rzeczywiście zachodzić będzie, byleby liczba i sprawdzała warunek (12). Gdyby liczba d_{m-1} była od zera odmienna, to ze względu na wzór (17), moglibyśmy na i znaleźć wartość tak wielką, ażebyśmy mieli

$$d_{i-1} > b,$$

co przy żadnej wartości na i w rzeczywistości zachodzić nie może, ponieważ d_{i-1} jest różnicą liczb r_{i-1} i $r_{i+p'-1}$, z których każda jest od liczby b mniejsza.

Mamy więc

$$d_{m-1} = 0$$

oraz ogólnie

$$d_{i-1} = 0,$$

byłoby liczba i sprawdzała związek (12).

Ostatecznie więc, związek (12) pociąga za sobą równość

$$(18) \quad r_{i+p'-1} = r_{i-1}.$$

Zatem, w szczególności, mamy

$$r_{m'+p'-1} = r_{m'-1},$$

a ponieważ oznaczyliśmy przez m i p możliwie najmniejsze liczby, od jedności nie mniejsze, lecz takie, żeby zachodziła równość (7), przeto nie może zachodzić żadna z nierówności

$$m' < m \quad \text{ i } \quad p' < p.$$

Z drugiej znów strony nie może także zachodzić żaden ze związków

$$m' > m \quad \text{ i } \quad p' > p,$$

gdyż oznaczyliśmy przez m' i p' takie najmniejsze liczby całkowite (§ 54, tw. II), żeby związek (12) pociągał za sobą związek (13). Mamy więc równości:

$$m = m' \quad \text{ oraz } \quad p = p',$$

które właśnie wyrażają twierdzenie, o dowód którego chodziło.

§ 56. Wobec wyników uzyskanych w paragrafie poprzedzającym, nasuwają się pytania następujące:

1°. Od jakiej właściwości liczby ułamkowej zależy istnienie lub nieistnienie cyfr nieregularnych w liczbie dziesiętnej peryodycznej, na którą rozważaną liczbę ułamkową możemy rozwinąć.

2°. Czy każda a priori dowolnie dana liczba dziesiętna peryodyczna λ uważana być może za wynik rozwinięcia na liczbę dziesiętną nieskończoną oznaczonej liczby ułamkowej $\frac{w}{b}$, która o ile istnieje, zowie się liczbą ułamkową rodłą w stosunku do liczby dziesiętnej peryodycznej λ ; wyznaczyć, w razie jej istnienia, liczbę ułamkową rodłą danej liczby dziesiętnej.

Żeby na pytania te, które w blizkim ze sobą związku znaj-

dują się, odpowiedzieć, zachowajmy najpierw wszystkie oznaczenia paragrafu poprzedzającego i uważajmy liczby L_{m-1} i L_{m+p-1} , z których pierwsza oznacza w liczbie dziesiętnej peryodycznej λ liczbę jednostek dziesiętnych wartości $\frac{1}{10^{m-1}}$, których cyfra poprzedza bezpośrednio pierwszą cyfrę regularną, a druga — liczbę jednostek dziesiętnych wartości $\frac{1}{10^{m+p-1}}$, których cyfra jest p -tą cyfrą regularną liczby λ , gdzie znów p przedstawia liczbę cyfr peryodu liczby λ o najmniejszej liczbie cyfr. Mamy tedy:

$$w \cdot 10^{m-1} = L_{m-1} \cdot b + r_{m-1} \quad (19)$$

oraz

$$w \cdot 10^{m+p-1} = L_{m+p-1} \cdot b + r_{m+p-1}, \quad (20)$$

skąd

$$w \cdot 10^{m-1} (10^p - 1) = (L_{m+p-1} - L_{m-1}) b \quad (21)$$

albowiem mamy

$$r_{m+p-1} - r_{m-1} = 0,$$

na podstawie równości (7).

Ponieważ zaś oznaczyliśmy przez ω peryod zasadniczy liczby dziesiętnej peryodycznej λ , przeto mamy jeszcze oczywiście

$$L_{m+p-1} = L_{m-1} \cdot 10^p + \omega. \quad (22)$$

Z równości (21) mamy:

$$\frac{w}{b} = \frac{L_{m+p-1} - L_{m-1}}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)}$$

skąd

$$\frac{w}{b} = \frac{L_{m-1} \cdot (10^p - 1) + \omega}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)} \quad (23)$$

ze względu na wzór (22).

Z równości (23) wypływa twierdzenie następujące:

I. Jeżeli uważać będziemy symbol ω za peryod zasadniczy a priori danej liczby dziesiętnej peryodycznej λ , której peryod obejmuje p cyfr, a L_{m-1} — za symbol, oznaczający liczbę jednostek dziesiętnych, których cyfra poprzedza bezpośrednio pierwszą cyfrę regularną, to w razie istnienia w stosunku do liczby λ liczby ułamkowej rodnej $\frac{w}{b}$, wartość liczby $\frac{w}{b}$ byłaby określona przez wzór (23), a ponieważ na

podstawie twierdzenia I-go z § 53-go, liczba dziesiętna nieskończona, na którą rozwinięć możemy daną liczbę, tylko od wartości tej liczby zależy, przeto, możemy uzupełnić wniosek poprzedzający dodając, że w razie istnienia liczby ułamkowej rodnej w stosunku do liczby λ , każda liczba ułamkowa $\frac{w}{b}$, która sprawdza równanie (23), uważana być może za liczbę ułamkową rodną w stosunku do liczby λ .

Z twierdzenia poprzedzającego wynika, że pozostaje do zbadania, czy wynikiem rozwinięcia liczby ułamkowej

$$(24) \quad \frac{L_{m-1} \cdot (10^p - 1) + \omega}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)}$$

na liczbę dziesiętną nieskończoną jest rzeczywiście liczba λ .

W tym celu uważajmy całkiem ogólnie liczbę ułamkową następującą:

$$(25) \quad \frac{A \cdot (10^p - 1) + \Omega}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)},$$

gdzie oznaczyliśmy przez A całkiem dowolnie przyjętą liczbę całkowitą, przez m i p dwie, od jedności nie mniejsze, ale poza tem jakiekolwiek liczby całkowite, a przez Ω — liczbę całkowitą najwyższej p -cyfrową, ale poza tem jakąkolwiek. Wyrażenie (25) jest ogólniejszej natury od wyrażenia (24); żeby sobie należycie uświadomić wzajemny stosunek tych wyrażeń, zwróćmy się najpierw do przykładu:

$$A = 327, \quad m = 3, \quad p = 4 \quad \text{ i } \quad \Omega = 2727$$

i uważajmy liczbę dziesiętną peryodyczną

$$3, \dot{2}7.$$

Gdybyśmy byli mogli przyjąć

$$L_{m-1} = 327, \quad m = 3, \quad p = 4 \quad \text{ i } \quad \omega = 2727,$$

to powinny istnieć liczba dziesiętna peryodyczna λ o własnościach następujących:

1°. Liczba jednostek wartości $\frac{1}{10^3}$ w tej liczbie równa się 327.

2°. Liczba jednostek wartości $\frac{1}{10^6}$ w tej liczbie równa się liczbie 3272727.

3°. Cyfra jednostek wartości $\frac{1}{10^3}$ należy już do cyfr regularnych.

4°. Liczba λ posiada peryody 4-cyfrowe (z których jeden z konieczności już równa się liczbie 2727).

5°. Peryod 2727 jest zasadniczym peryodem liczby λ .

6°. Cyfra jednostek wartości $\frac{1}{10^3}$ jest pierwszą cyfrą regularną liczby λ .

Czterem pierwszym warunkom czyni zadość liczba dziesiętna peryodyczna

$$3, \dot{2}7$$

i tylko ta jedna liczba, ale liczba ta nie czyni zadość ani 5-mu, ani 6-mu warunkowi.

Zatem w wyrażeniu (24), liczby L_{m-1} i ω rozważanych wartości przyjąć nie mogą.

Natomiast spostrzegamy z łatwością, że liczbom A i Ω odpowiada w każdym razie jedna i tylko jedna liczba dziesiętna peryodyczna φ , w której

1°. liczba jednostek wartości $\frac{1}{10^{m-1}}$ równa się liczbie A ,

2°. liczba jednostek wartości $\frac{1}{10^{m+p-1}}$ równa się liczbie $A \cdot 10^p + \Omega$,

3°. cyfra jednostek wartości $\frac{1}{10^m}$ należy już do cyfr regularnych,

4°. istnieją peryody p -cyfrowe (z których jeden równa się już z konieczności liczbie Ω), ale stwierdzamy zarazem, że wbrew temu, co zawsze zachodzi przy liczbie λ , odpowiadającej w sposób analogiczny wzorowi (24), peryod Ω może nie być peryodem zasadniczym, a cyfra jednostek wartości $\frac{1}{10^m}$ — może nie być pierwszą cyfrą regularną.

Powiadam, że zachodzi twierdzenie następujące.

II. Jeżeli tylko liczba Ω nie jest liczbą p -cyfrową, której wszystkie cyfry są dziewiątkami, jeżeli więc liczba Ω nie jest największą liczbą p -cyfrową, jeżeli, jednym słowem, mamy

$$\Omega < 10^p - 1, \quad (26)$$

to liczba ułamkowa (25) jest liczbą ułamkową rodną w stosunku do liczby φ ; jeżeli zaś mamy

$$(27) \quad \Omega = 10^p - 1,$$

to liczba ułamkowa (25) nie jest liczbą ułamkową rodną w stosunku do liczby φ .

Istotnie, w przypadku wyjątkowym, kiedy zachodzi równość (27), mamy

$$\frac{A \cdot (10^p - 1) + \Omega}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)} = \frac{A + 1}{10^{m-1}},$$

skąd wynika, że liczba (25) równa się tedy liczbie dziesiętnej skończonej i dlatego wynikiem rozwinięcia jej na liczbę dziesiętną nieskończoną rzeczywiście nie jest liczba φ , lecz pewna liczba dziesiętna peryodyczna o peryodzie równym zeru.

Zwróćmy się obecnie do przypadku ogólnego, kiedy zachodzi nierówność (26). Oczywiście mamy tożsamościowo:

$$\{A \cdot (10^p - 1) + \Omega\} 10^{m-1} = A \cdot 10^{m-1} \cdot (10^p - 1) + \Omega \cdot 10^{m-1}$$

oraz

$$\{A \cdot (10^p - 1) + \Omega\} 10^{m+p-1} = (A \cdot 10^p + \Omega) \cdot 10^{m-1} (10^p - 1) + \Omega \cdot 10^{m-1}$$

Mamy więc

$$(28) \quad w \cdot 10^{m-1} = A \cdot b + \Omega \cdot 10^{m-1}$$

$$(29) \quad w \cdot 10^{m+p-1} = (A \cdot 10^p + \Omega) \cdot b + \Omega \cdot 10^{m-1},$$

przyjmując

$$(30) \quad \begin{cases} w = A \cdot (10^p - 1) + \Omega \\ b = 10^{m-1} (10^p - 1). \end{cases}$$

Na podstawie nierówności (26), mamy

$$(31) \quad \Omega \cdot 10^{m-1} < b.$$

Zatem, liczba A i liczba $A \cdot 10^p + \Omega$ równają się odpowiednio całkowitym częściom ilorazów podziału przez liczbę b liczby $w \cdot 10^{m-1}$ i liczby $w \cdot 10^{m+p-1}$, a odnośne reszty są równymi pomiędzy sobą liczbami, których wspólną wartość przedstawia wyrażenie $\Omega \cdot 10^{m-1}$.

Z tego wynika, że liczba dziesiętna nieskończona λ , na którą możemy rozwinąć liczbę $\frac{w}{b}$, przy wartościach (30) na liczby w i b ma własności następujące:

1°. Liczba jednostek wartości $\frac{1}{10^{m-1}}$ w liczbie λ równa się liczbie A .

2°. Liczba jednostek wartości $\frac{1}{10^{m+p-1}}$ w tejże liczbie λ równa się liczbie $A \cdot 10^p + \Omega$.

Powiadam, że liczba λ ma jeszcze następującą własność: jeżeli oznaczymy w niej ogólnie przez c_k cyfrę jednostek wartości $\frac{1}{10^k}$, to związek

$$i \geq m \quad (32)$$

pociągać będzie za sobą równość

$$c_{i+p} = c_i. \quad (33)$$

Istotnie, załóżmy, że przy tworzeniu ciągów (2) i (3) przyjęliśmy na w i b wartości (30). W takim razie wyraz c_k rzędu jakiegokolwiek k w ciągu (4) przedstawiać będzie właśnie ten element, który przed chwilą oznaczyliśmy przez ten sam symbol, a nadto wyrazy r_{m+1} i r_{m+p-1} ciągu (2) sprawdzać będą równania następujące:

$$\begin{aligned} r_{m-1} &= \Omega \cdot 10^{m-1} \\ r_{m+p-1} &= \Omega \cdot 10^{m-1}, \end{aligned}$$

albowiem dowiedliśmy w paragrafie poprzedzającym, że jakikolwiek wyraz r_k ciągu (3) równa się reszcie podziału liczby $w \cdot 10^k$ przez b , a widzieliśmy wyżej, że przy wartościach (30) na w i b reszty podziału przez b liczby $w \cdot 10^{m-1}$ i liczby $w \cdot 10^{m+p-1}$ równają się jedna i druga liczbie $\Omega \cdot 10^{m-1}$.

Z powyższych równości mamy

$$r_{m-1} = r_{m+p-1}, \quad (34)$$

gdzie oczywiście symbole m i p przedstawiają liczby całkowite, w inny sposób określone, aniżeli te, któreśmy w paragrafie poprzedzającym przez te same symbole oznaczyli; z tej przyczyny obecnie liczby m i p niekoniecznie najmniejsze mają wartości, przy których równość (34) zachodzi.

Ponieważ jednak dowód, podany w paragrafie poprzedzającym na to, że związek (8) pociąga za sobą równość (10), opiera się wyłącznie na równości (7), a bynajmniej nie na tem, że liczby m i p najmniejsze mają wartości, przy których równość ta zachodzi,

przeto możemy obecnie wywnioskować z równości (34), że związek (32) pociąga za sobą (33).

Z tego wynika, że liczba dziesiętna nieskończona, na którą możemy rozwinąć liczbę ułamkową (25) w przypadku, kiedy zachodzi nierówność (26), zlewa się z liczbą dziesiętną peryodyczną, którą oznaczyliśmy przez φ . Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Natychmiastowem następstwem twierdzeń I-go i II-go jest twierdzenie następujące:

III. Warunek konieczny i wystarczający, ażeby oznaczonej liczbie dziesiętnej peryodycznej λ odpowiadała liczba ułamkowa rodna, polega na tem, żeby w razie, kiedy peryod zasadniczy jedną tylko cyfrę obejmuje, cyfra ta nie była dziewiątką. Kiedy warunek ten jest spełniony, liczbą ułamkową rodną jest każda liczba $\frac{w}{b}$, sprawdzająca równanie:

$$(35) \quad \frac{w}{b} = \frac{L_{m-1} \cdot (10^p - 1) + \omega}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)},$$

gdzie oznaczyliśmy przez p liczbę cyfr, objętych przez peryod zasadniczy, przez ω wartość tego peryodu, przez m rząd najniższego rzędu cyfry regularnej, a przez L_{m-1} liczbę jednostek wartości $\frac{1}{10^{m-1}}$.

Na podstawie twierdzeń powyższych możemy jeszcze uzasadnić twierdzenie następujące:

IV. Warunek konieczny i wystarczający, ażeby wynikiem rozwinięcia na liczbę dziesiętną nieskończoną oznaczonej liczby ułamkowej nieprzywiedlnej $\frac{w}{b}$ była liczba dziesiętna czysto peryodyczna, polega na tem, żeby mianownik b nie był podzielny ani przez 2 ani przez 5; jeżeli warunek ten spełniony nie jest, jeżeli więc mamy na liczbę b wzór następujący:

$$b = b_1 \cdot 2^\alpha \cdot 5^\beta,$$

gdzie oznaczyliśmy przez b_1 liczbę, która nie jest podzielna ani przez 2 ani przez 5, a przez α i β dwie liczby całkowite, z których jedna przynajmniej jest od zera odmienna, to, rozwijając liczbę $\frac{w}{b}$ na liczbę dziesiętną nieskończoną, otrzymamy liczbę dziesiętną mieszano-pery-

dyczną, w której liczba cyfr nieregularnych równać się będzie większej z liczb α i β , albo wspólnej ich wartości, gdyby one były równe sobie.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwróćmy się do równości (35). Równość ta równoważna jest następującej:

$$10^{m-1} \cdot (10^p - 1) \cdot w = \{L_{m-1}(10^p - 1) + \omega\} \cdot b.$$

Załóżmy, że liczba $\frac{w}{b}$ jest liczbą ułamkową nieprzywiedną.

W takim razie liczby w i b będą liczbami względnie pierwszymi, a ponieważ na podstawie równości poprzedzającej liczba b jest dzielnikiem iloczynu

$$10^{m-1} \cdot (10^p - 1) w,$$

przeto liczba b jest dzielnikiem liczby

$$10^{m-1} (10^p - 1). \quad (36)$$

Żeby posunąć się dalej, uzasadnimy uwagę następującą: jeżeli liczba całkowita, którą przedstawia wzór

$$10^{m'-1} (10^{p'} - 1). \quad (37)$$

gdzie oznaczyliśmy przez m' i p' dwie od jedności nie mniejsze liczby całkowite, podzielna jest przez liczbę b , to mamy zarazem

$$m' \geq m \quad (38)$$

i

$$p' \geq p. \quad (39)$$

Wprawdzie przy rozwijaniu dowodu twierdzenia niniejszego opierać się będziemy tylko na równości (38), ale uzasadnimy i nierówność (39), żeby uwidocznic, w jaki sposób obie te nierówności ze wspólnego źródła wypływają.

Załóżmy, iż wyrażenie (37) przedstawia liczbę całkowitą podzielną przez liczbę b ; mamy tedy

$$10^{m'-1} (10^{p'} - 1) = b \cdot f, \quad (40)$$

oznaczając przez f pewną liczbę całkowitą.

Oznaczmy przez $L'_{m'-1}$ i ω' całkowitą część ilorazu i resztę podziału iloczynu $w \cdot f$ przez liczbę $10^{p'} - 1$. Będziemy tedy mieli)

$$w \cdot f = (10^{p'} - 1) L'_{m'-1} + \omega', \quad (41)$$

$$\omega' < 10^{p'} - 1. \quad (42)$$

Z równości (41) mamy:

$$w \cdot f \cdot b = \{(10^{p'} - 1) L'_{m'-1} + \omega'\} b,$$

skąd ze względu na równość (40) mamy:

$$10^{m'-1} (10^{p'} - 1) w = \{(10^{p'} - 1) L'_{m'-1} + \omega'\} b.$$

Z równości poprzedzającej mamy:

$$(43) \quad \frac{w}{b} = \frac{(10^{p'} - 1) L'_{m'-1} + \omega'}{10^{m'-1} (10^{p'} - 1)}.$$

Na podstawie tw. II-go, wynikiem rozwinięcia liczby ułamkowej

$$\frac{(10^p - 1) L'_{m'-1} + \omega'}{10^{m'-1} (10^{p'} - 1)}$$

na liczbę dziesiętną nieskończoną jest liczba dziesiętna peryodyczna, w której cyfra jednostek wartości $\frac{1}{10^m}$ jest już niezawodnie cyfrą regularną, a liczba cyfr jednego z peryodów równa się liczbie p' . Ponieważ ze względu na równość (43) liczba dziesiętna poprzedzająca nie może różnić się od liczby dziesiętnej nieskończonej λ , na którą rozwinąć możemy liczbę ułamkową

$$\frac{w}{b},$$

ponieważ nadto w liczbie λ cyfra jednostek dziesiętnych wartości $\frac{1}{10^m}$ jest pierwszą cyfrą regularną, a liczba cyfr peryodu o najmniejszej liczbie cyfr równa się liczbie p , przeto, zgodnie z zapowiedzią, każdy ze związków (38) i (39) niezawodnie rzeczywiście zachodzi będzie.

Jakąkolwiek wartość miałaby liczba całkowita b , mamy:

$$b = 2^{\alpha'} 5^{\beta'} b_1,$$

oznaczając przez b_1 liczbę całkowitą niepodzielną przez żadną z liczb 2 i 5, a przez α' i β' pewne liczby całkowite, dla których wartości zerowe wykluczone nie są. Założmy, że wyrażenie (37) podzielne jest przez liczbę b .

Ponieważ liczby

$$b_1 \quad \text{i} \quad 10^{m'-1}$$

są liczbami względnie pierwszymi, przeto liczba

$$10^{p'} - 1$$

podzielna będzie przez liczbę b_1 ; ponieważ z drugiej strony liczba

$$2^{\alpha'} \cdot 5^{\beta'}$$

jest liczbą względnie pierwszą w stosunku do liczby

$$10^{p'} - 1,$$

choćbyśmy nawet mieli

$$\alpha' = \beta' = 0,$$

gdyż wówczas

$$2^{\alpha'} \cdot 5^{\beta'} = 1,$$

a liczba 1 jest liczbą względnie pierwszą z każdą liczbą całkowitą, przeto liczba

$$10^{m'-1}$$

podzielna jest przez liczbę $2^{\alpha'} 5^{\beta'}$.

Zważywszy, że odwrotnie liczba, którą przedstawia wzór (37) oczywiście podzielna będzie przez liczbę b , jeżeli tylko liczba

$$10^{m'-1}$$

podzielna będzie przez wyrażenie

$$2^{\alpha'} 5^{\beta'},$$

a liczba

$$10^{p'} - 1$$

— przez liczbę b_1 , wnosimy natychmiast z uwag powyższych, iż warunek konieczny i wystarczający, ażeby liczba (37) podzielna była przez liczbę b polega na tem, żeby liczby

$$10^{m'-1} \text{ i } 10^{p'} - 1$$

odpowiednio podzielne były przez

$$2^{\alpha'} \cdot 5^{\beta'} \text{ i } b_1.$$

Oznaczmy przez γ' większą z liczb α' i β' , albo wspólną ich wartość, gdyby liczby te były równe sobie. Powiadam, że mamy

$$m - 1 = \gamma'.$$

Istotnie, stwierdziliśmy wyżej, że wzór (36) przedstawia liczbę podzielną przez b . Zatem, na podstawie dopiero co uzyskanych warunków podzielności liczby postaci (37) przez liczbę b , mamy

$$(44) \quad m - 1 \geq \gamma'.$$

Z drugiej strony, uwzględniając powtórnie podzielność wyrażenia (36) przez b i warunki podzielności liczby postaci (37) przez tenże dzielnik, spostrzegamy, że wyrażenie (37) podzielne będzie przez b , jeżeli przyjmiemy

$$m' - 1 = \gamma', \quad p' = p.$$

Zatem, na podstawie związku (38) mamy:

$$m - 1 \leq \gamma'.$$

Zestawiając związek ten ze związkiem (44), stwierdzamy, że mamy rzeczywiście

$$(45) \quad m - 1 = \gamma',$$

Ponieważ objęliśmy w rozumowaniu poprzedzającym i przypadek, kiedy mamy

$$\gamma' = 0,$$

przeto równość (45) wyraża w zupełności twierdzenie, o uzasadnienie którego chodziło.

Twierdzenia III-cie i IV-te stanowią oczywiście odpowiedzi na zapytania, postawione na czele tego paragrafu.

Z faktów uzasadnionych przy dowodzeniu twierdzenia poprzedzającego i z twierdzeń uzasadnionych przedtem wynika, jako następstwo natychmiastowe, twierdzenie następujące:

V. Oznaczmy przez w i b licznik i mianownik liczby dziesiętnej nieprzywiedlnej, a przez b_1 największy, przez żadną z liczb 2 i 5 niepodzielny dzielnik liczby b (liczba b_1 oczywiście równą będzie liczbie b w razie, kiedy ta ostatnia nie będzie podzielna ani przez 2 ani przez 5). W takim razie liczba cyfr peryodu zasadniczego liczby dziesiętnej peryodycznej λ , na którą rozwiniąć możemy liczbę ułamkową $\frac{w}{b}$, równać się będzie najmniejszej, od jedności nie mniejszej, wartości całkowitej na p , przy której liczba $10^p - 1$ podzielna będzie przez liczbę b_1 ; nadto, jeżeli liczba p ma jakąkolwiek, od jedności nie mniejszą, ale

taką wartość, żeby liczba $10^p - 1$ przez liczbę b_1 była podzielna, to istnieje peryod liczby λ , obejmujący p cyfr.

§ 57. Oznaczmy przez λ jakąkolwiek liczbę dziesiętną peryodyczną, przez $\frac{1}{10^m}$ wartość jednostek, których cyfra jest pierwszą cyfrą regularną liczby λ , przez L_{m-1} liczbę jednostek wartości $\frac{1}{10^{m-1}}$ w liczbie λ , przez p liczbę cyfr peryodu zasadniczego a przez ω wartość tego peryodu. Jeżeli tedy w stosunku do liczby λ istnieje liczba ułamkowa rodna, to na podstawie twierdzenia I go paragrafu poprzedzającego wspomniana liczba ułamkowa rodna równać się będzie liczbie

$$\frac{L_{m-1} \cdot (10^p - 1) + \omega}{10^{m-1} \cdot (10^p - 1)}. \quad (46)$$

Z drugiej strony widzieliśmy, że jedyny przypadek, w którym liczbie λ nie odpowiada żadna liczba ułamkowa rodna, jest ten, kiedy mamy

$$\left. \begin{aligned} p &= 1 \\ \omega &= 9. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Jaki jest stosunek, który w tym przypadku wyjątkowym zachodzi pomiędzy liczbą (46) a liczbą λ ?

Założmy, że równości (47) są spełnione, i oznaczmy przez L wartość, którą przybiera wówczas wyrażenie (46). Mamy tedy:

$$L = \frac{L_{m-1} + 1}{10^{m-1}}. \quad (48)$$

Oznaczmy przez x_k redukt liczby dziesiętnej peryodycznej λ , doprowadzony do cyfry jednostek wartości $\frac{1}{10^k}$, zakładając przytem, że mamy

$$k \geq m - 1. \quad (49)$$

Na podstawie równości (47) mamy

$$x_k = \frac{L_{m-1} \cdot 10^{k-m+1} + 9(10^{k-m} + 10^{k-m-1} + \dots + 10 + 1)}{10^k}$$

czyli

$$x_k = \frac{L_{m-1} \cdot 10^{k-m+1} + (10 - 1)(10^{k-m} + 10^{k-m-1} + \dots + 10 + 1)}{10^k},$$

umawiając się przytem, że, przy $k = m - 1$, wyrażenie

$$10^{k-m} + 10^{k-m-1} + \dots + 10 + 1,$$

zastępować będziemy przez zero.

Ponieważ mamy ogólnie

$$(y - 1)(y^{\alpha} + y^{\alpha-1} + y^{\alpha-2} + \dots + y + 1) = y^{\alpha+1} - 1,$$

przeto wzór powyższy możemy przedstawić w postaci następującej:

$$x_k = \frac{L_{m-1} \cdot 10^{k-m+1} + 10^{k-m+1} - 1}{10^k}.$$

skąd

$$x_k = \frac{L_{m-1} + 1}{10^{m-1}} - \frac{1}{10^k},$$

zatem, ze względu na (48), mamy

$$x_k = L - \frac{1}{10^k}$$

czyli

$$(50) \quad L - x_k = \frac{1}{10^k}.$$

Gdybyśmy byli przyjęli

$$k < m - 1,$$

to, jak czytelnik z łatwością sam sprawdzi, zachodziłaby nierówność

$$L - x_k < \frac{1}{10^k}.$$

Ostatecznie, mamy w każdym razie

$$(51) \quad L - x_k \leq \frac{1}{10^k},$$

a w przypadku, kiedy liczba k sprawdza nierówność (49), zachodzi nadto równość (50). Ponieważ do dowolnie przyjętej, od zera odmienniejszej, ale choćby jak małej liczby ϵ , możemy tak dobrać liczbę całkowitą n , żeby nierówność

$$(52) \quad k \geq n$$

pociągała za sobą nierówność

$$\frac{1}{10^k} < \epsilon,$$

przeto stwierdzamy, opierając się na związku (51), że do liczby ε możemy zawsze tak dobrać n , żeby nierówność (52) pociągała za sobą nierówność

$$L - x_k < \varepsilon.$$

Zatem, jakkolwiek mały byłby błąd ε , którego przekroczyć nie chcielibyśmy, redukty dostatecznie wysokiego rzędu liczby λ przedstawiałyby wartość liczby L z błędem mniejszym od ε , całkiem analogicznie do tego, co zachodzi w tym przypadku, kiedy rozważamy taką liczbę dziesiętną peryodyczną, która posiada liczbę ułamkową rodą, i kiedy porównujemy liczbę ułamkową rodą z reduktami tej liczby dziesiętnej peryodycznej, różnica zaś polega na tem, że obecnie, przy dostatecznie wielkich wartościach na k , zachodzi związek (50), a nie związek

$$L - x_k < \frac{1}{10^k},$$

który zachodziłby przy wszystkich wartościach na k , gdyby liczba L była liczbą ułamkową rodą rozważanej liczby dziesiętnej peryodycznej.
