

a ponieważ liczby (1) są pomiędzy sobą liniowo niezależne, przeto mamy

$$a_k - a'_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

skąd już bezpośrednio wynika to, cośmy mieli wykazać.

§ 157. Przy dalszem badaniu zbioru (Z) założymy, że pewien zasadniczy układ jednostek

$$l_1, l_2, \dots, l_n \quad (1)$$

został w jakikolwiek bądź sposób oznaczony, i określać będziemy każdą liczbę l zbioru (Z), którą zapagniemy oznaczyć, przez taki układ liczb rzeczywistych

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \quad (2)$$

który sprawdza równanie

$$l = \sum_{k=1}^n a_k l_k. \quad (3)$$

Przy tych warunkach nadamy zasadniczemu układowi jednostek (1) nazwę układu referencyjnego, a liczbom rzeczywistym (2) — nazwę współrzędnych liczby l .

W dalszych rozważaniach założymy, że jednostki zasadnicze, które razem tworzą układ referencyjny, zostały w jakiś sposób uszeregowane. Wobec tego każda jednostka zasadnicza układu referencyjnego posiadać będzie pewną liczbę porządkową; tę liczbę porządkową nazwiemy rzędem odnośnej jednostki. Współrzędne liczby zbioru (Z) także uważać będziemy jako uszeregowane w pewnym porządku, a mianowicie w takim, żeby w każdym iloczynie, stanowiącym jeden ze składników we wzorze postaci (3) na liczbę l zbioru (Z), liczba porządkowa współrzędnej równała się liczbie porządkowej jednostki układu referencyjnego. Liczby porządkowe współrzędnych liczby zbioru (Z) nazywać będziemy rzędami tychże

Posługując się oznaczeniami, użytymi we wzorze (3), naturalnie przyjmować będziemy, o ile wyraźnie nie zaznaczymy rzeczy przeciwnej, że wskaźnik w symbolach l_k i a_k oznacza wspólny rząd jednostki l_k i współrzędnej a_k .

Usprawiedliwienie powyższych definicyi polega oczywiście na

tem, że ze względu na tw. III-cie paragrafu poprzedzającego *każdej* liczbie zbioru (Z) odpowiada *dokładnie jeden układ wartości na jej współrzędne*.

Oznaczmy przez l i l' dwie jakiekolwiek liczby zbioru (Z) , przez

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

współrzędne liczby l , a przez

$$a'_1, a'_2, \dots a'_n$$

współrzędne liczby l' . Przy tych oznaczeniach współrzędna rzędu jakiegokolwiek k sumy

$$l + l',$$

oczywiście w każdym razie równać się będzie sumie

$$a_k + a'_k,$$

a współrzędna tegoż rzędu różnicy

$$l - l',$$

różnicy

$$a_k - a'_k.$$

Ale jakie będą miały wartości współrzędne iloczynu

$$(4) \quad l \cdot l'?$$

Na podstawie własności 6^o (§ 154) zbioru (Z) i wzorów

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \sum_{p=1}^n a_p l_p, \\ l' = \sum_{q=1}^n a'_q l_q, \end{array} \right.$$

mamy w każdym razie

$$l \cdot l' = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (a_p l_p) \cdot (a'_q l_q)$$

skąd

$$(6) \quad l \cdot l' = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (a_p a'_q) \cdot (l_p l_q)$$

na podstawie własności 7^o i 10^o (§ 154) zbioru (Z) .

Ponieważ zaś każdy iloczyn postaci

$$l_p l_q$$

równa się oznaczonej liczbie zbioru (Z) , przeto mamy

$$l_p \cdot l_q = \sum_{k=1}^n \zeta_{p,q,k} l_k, \quad (7)$$

oznaczając przez

$$\zeta_{p,q,1}, \zeta_{p,q,2}, \zeta_{p,q,3}, \dots, \zeta_{p,q,n}$$

pewne liczby rzeczywiste, odpowiednio równe współrzędnym liczby zbioru (Z) , równej iloczynowi $l_p l_q$.

Oznaczywszy ogólnie przez x_k współrzędną rzędu k iloczynu $l \cdot l'$, innemi słowy, przyjąwszy

$$l \cdot l' = \sum_{k=1}^n x_k l_k, \quad (8)$$

gdzie

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (9)$$

oznaczają pewne liczby rzeczywiste, mamy

$$x_k = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \zeta_{p,q,k} \cdot a_p \cdot a'_q \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

na podstawie równości (6) i (7).

Z tego wynika, co następuje: *Gdyby wartość liczby rzeczywistej $\zeta_{p,q,k}$ była nam znana, jakąkolwiek od jedności nie mniejszą, a od liczby n nie większą wartość całkowitą miałby każdy ze wskaźników p, q i k , to na podstawie wzorów (10) moglibyśmy wyznaczyć współrzędne iloczynu dwóch jakichkolwiek liczb zbioru (Z) w zależności od współrzędnych mnożnej i współrzędnych mnożnika.* Z tego wynika, że wartości liczb rzeczywistych $\zeta_{p,q,k}$ mają podstawowe znaczenie w teorii zbioru liczb (Z) .

Wobec tego winniśmy wziąć liczby $\zeta_{p,q,k}$ pod bliższą rozprawę. Liczbom tym damy nazwę *współrzędnych iloczynów jednostkowych*, umawiając się jednocześnie, że przez wyrażenie iloczyn jednostkowy rozumiemy każdy iloczyn postaci $l_p \cdot l_q$.

U w a g a A. Jeżeli, rozważając symbole

$$(11) \quad \xi_{p,q,k} \quad (p, q, k = 1, 2, 3, \dots n)$$

bez względu na znaczenie, które nadaliśmy im wyżej, przyjmiemy na nie całkiem dowolny układ wartości rzeczywistych (U), to z układem tym będziemy mogli skojarzyć oznaczony zbiór liczb (L), a to w sposób następujący: Oznaczmy przez (ξ) zbiór wszystkich elementów, z których każdy jest oznaczonym ciągiem liczb rzeczywistych o n wyrazach, przyjmując jednocześnie za symbol tego elementu zbioru (Z), jakim jest oznaczony ciąg liczb rzeczywistych

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

o n wyrazach, symbol

$$(a_1, a_2, \dots a_n).$$

Następnie przyjmijmy umowy następujące:

1°. Równość

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = (a'_1, a'_2, \dots a'_n)$$

dwóch elementów zbioru (ξ) wyraża, że zachodzi następujący układ równości

$$a_k = a'_k \quad (k = 1, 2, \dots n)$$

2°. Definicję dodawania elementów zbioru (Z) stanowi równość następująca

$$(a_1, a_2, \dots a_n) + (a'_1, a'_2, \dots a'_n) = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n).$$

3°. Definicja mnożenia elementów zbioru (ξ) stanowi równość

$$(a_1, a_2, \dots a_n) \cdot (a'_1, a'_2, \dots a'_n) = (x_1, x_2, \dots x_n),$$

gdzie liczby rzeczywiste

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

winny być wyznaczone ze wzorów (10).

Definicje powyższe czynią oczywiście zadość zarówno zasadom rozdziału II-go, jak też i zasadom rozdziału V-go. Zatem możemy je rzeczywiście przyjąć. Po przyjęciu tych definicji zbiór (ξ) stanie się oznaczonym zbiorem liczb, którego natura oznaczona będzie w zupełności, skoro układ (U) wartości, które mają być przyjęte na liczby $\xi_{p,q,k}$, zostanie oznaczony. Rzeczony zbiór liczb stanowi właśnie zbiór liczb (L), który mieliśmy na myśli.

U w a g a B. *A priori* nie mamy oczywiście żadnej pewności, żeby zbiór liczb (L) koniecznie posiadał wszystkie w § 154-tym wyszczególnione własności zbioru (Z) , przekonamy się nawet później, że okoliczność ta wogóle nie zachodzi, ale spostrzegamy z największą łatwością, że jeżeli układ wartości (U) przyjęty na liczby $\xi_{p,q,k}$ uważany być może za układ współrzędnych iloczynów jednostkowych przy oznaczonym układzie referencyjnym oznaczonego zbioru liczb (Z) , posiadającego wszystkie własności wyszczególnione w § 154-tym, to w takim razie zbiór (L) będzie izomorficzny zbiorowi (Z) , a jakkolwiek liczba $\sum_{k=1}^n a_k l_k$ zbioru (Z) i liczba $(a_1, a_1, \dots a_n)$ zbioru (L) uważane być mogą za elementy homologiczne obu zbiorów.

U w a g a C. Przy całkiem oznaczonym zbiorze liczb (Z) , posiadającym wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, współrzędne iloczynów jednostkowych posiadają oznaczone wartości tylko o tyle, o ile został oznaczony ten zasadniczy układ jednostek, który przyjęty ma być za układ referencyjny.

Uwagi A i B mogłyby nas skłonić do rozszerzenia naszych badań: moglibyśmy przystąpić do badania zbioru liczb (L) nie ograniczając z góry nieчем wartości liczb $\xi_{p,q,k}$; na tej drodze zgłębialibyśmy naturę zbioru liczb (Z) , jako szczególnego przypadku zbioru (L) . Badania w tym kierunku rzeczywiście były dokonywane¹⁾, ale wykład tych badań zawiódłby nas bardzo daleko i doprowadziłby ostatecznie do skromnych wyników, gdyż zbiory liczb, które nie posiadają wszystkich własności, wyszczególnionych w § 154, zbyt już głęboko różnią się od liczb rzeczywistych, ażeby mogły mieć, przy obecnym stanie nauki przynajmniej, większe znaczenie naukowe. Wobec tego przyjmiemy inną metodę, która także wynika z powyższych uwag: podobnie jak w paragrafach poprzedzających, będziemy i w dalszym ciągu badać konieczne następstwa założenia, że zbiór (Z) posiada własności, wyszczególnione w § 154-tym, usiłując skorzystać przytem z uwagi C w ten sposób, żeby wykryć taki zasadniczy układ jednostek w zbiorze (Z) , aby po przyjęciu tego układu za układ referencyjny współrzędne iloczynów jednostkowych przybrały możliwie prosty układ wartości. Następnie, opie-

¹⁾ Stolz u. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Leipzig, 1900, p. 293 i dalsze.

Encyclopédie des Sciences mathématiques. T. I, vol. 1, Fasc. 3.

rając się na uwagach A i B , zbadamy, czy wszystkie te typy liczb, których istnienie nie byłoby sprzeczne z uzyskanymi wynikami, rzeczywiście istnieją.

§ 158. W paragrafie tym zamierzamy uzasadnić pewne ważne twierdzenie, które doprowadzi nas do wykrycia szczególnie korzystnego układu referencyjnego w zbiorze liczb (Z); ale wprzód uważamy za konieczne pewne rozważania wstępne.

Ze względu na ogólną, na początku § 33-go podaną definicję potęgi o wykładniku całkowitym od zera większym, symbol

$$x^m$$

ma określone znaczenie, jakąkolwiek liczbę całkowitą, byle od jedności nie mniejszą oznaczałaby litera m i jakąkolwiek liczbę zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez x . Nadto na podstawie własności łączności mnożenia liczb zbioru (Z) i tw. I-go § 33-go mamy

$$x^m \cdot x^p = x^{m+p},$$

jakąkolwiek liczbę zbioru (Z) oznaczylibyśmy przez x , byleby tylko m i p oznaczały liczby całkowite, od zera większe.

Uwagi te przywodzą nas do wprowadzenia do teorii zbioru (Z) dobrze znanych wyrażeń z elementarnej algebry przez przyjęcie definicji następujących:

Jednomianem całkowitym kilku liczb zbioru (Z) zwiemy iloczyn jakiejkolwiek oznaczonej liczby a tego zbioru przez iloczyn potęg o wykładnikach całkowitych i dodatnich rzeczonych liczb; liczba a zowie się w takim razie współczynnikiem jednomianu, a suma powyższych wykładników — stopniem tego jednomianu.

Suma kilku jednomianów całkowitych kilku liczb zbioru (Z) zowie się wielomianem tych liczb; współczynniki wspomnianych jednomianów stanowią współczynniki wielomianu, a stopień jednomianu największego stopnia — stopniem wielomianu. Jednomiany, których sumą jest oznaczony wielomian, zowią się jego wyrazami.

Z własności liczb zbioru (Z), wyszczególnionych w § 154-tym, wynika nasychmiast, że wszelką kombinację drogą dodawania, odejmowania i mnożenia wielomianów całkowitych o współczynnikach rzeczywistych jednej i tej samej liczby x zbioru (Z)

możemy przekształcić tak, jak gdyby symbol x oznaczał liczbę rzeczywistą, liczbowo nie oznaczoną. Winniśmy dodać, że zastrzeżenie, według którego uwaga powyższa obejmuje tylko wielomiany jednej liczby zbioru (Z) o współczynnikach rzeczywistych ma istotne znaczenie, a to z tej przyczyny, iż mnożenie liczb zbioru (Z) w ogóle własności przemienności nie posiada. Na przykład, jeżeli oznaczymy przez a i b dwie liczby rzeczywiste, przez x jakąkolwiek liczbę tego zbioru, a przez m i p liczby całkowite dodatnie, to na podstawie własności łączności mnożenia liczb zbioru (Z) i na podstawie własności przemienności iloczynu dwóch czynników, z których jeden jest liczbą rzeczywistą, mamy:

$$\begin{aligned}(ax^m)(bx^p) &= a(x^m \cdot b) \cdot x^p = a(b \cdot x^m)x^p \\ &= a \cdot b \cdot x^m \cdot x^p = (a \cdot b) \cdot x^{m+p}.\end{aligned}$$

Otóż, gdyby liczba b liczbą rzeczywistą nie była, to druga z powyższych równości byłaby wątpliwa i wątpliwem byłoby, czy mamy

$$(a \cdot x^m) \cdot (b \cdot x^p) = (a \cdot b) \cdot x^{m+p}.$$

Jako drugi przykład uważajmy iloczyn:

$$(a \cdot x \cdot y) \cdot (b \cdot x \cdot y),$$

gdzie oznaczyliśmy przez a i b dwie liczby rzeczywiste, a przez x i y dwie jakiejkolwiek liczby zbioru (Z). Mamy:

$$\begin{aligned}(a \cdot x \cdot y) \cdot (b \cdot x \cdot y) &= (a \cdot x) \cdot (y \cdot b) \cdot x \cdot y = (a \cdot x)(b \cdot y) \cdot x \cdot y \\ &= a \cdot (x \cdot b) \cdot y \cdot x \cdot y = a \cdot (b \cdot x) \cdot y \cdot x \cdot y \\ &= (a \cdot b) \cdot x \cdot y \cdot x \cdot y;\end{aligned}$$

ale, ponieważ mnożenie liczb zbioru (Z) może nie posiadać własności przemienności, przeto wątpliwem jest, czy mamy:

$$x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2,$$

zatem nie mamy i pewności, czy zachodzi równość:

$$(a \cdot x \cdot y) \cdot (b \cdot x \cdot y) = (a \cdot b) \cdot x^2 \cdot y^2.$$

Przechodzimy obecnie do twierdzenia, które mieliśmy na myśli. Twierdzenie to opiewa jak następuje:

Jeżeli jakąkolwiek liczbą x zbioru (Z) liczbą rzeczywistą nie jest, to liczba ta sprawdza równanie postaci następującej:

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = 0, \tag{1}$$

gdzie oznaczyliśmy przez α i β dwie liczby rzeczywiste, z których liczba β jest od zera odmienną liczbą.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, przyjmijmy jakikolwiek zasadniczy układ jednostek zbioru (Z)

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$

za układ referencyjny. Mamy tedy:

$$(2) \quad x^m = \sum_{k=1}^n c_{m,k} l_k,$$

oznaczając przez m liczbę całkowitą od zera większą, a przez

$$c_{m,1}, c_{m,2}, \dots, c_{m,n}$$

liczby rzeczywiste, które według terminologii, wprowadzonej w § 157-ym, są współrzędnymi liczby zbioru (Z) równej wyrażeniu

$$x^m.$$

Ponieważ liczba 1 należy do zbioru (Z) , przeto i ona mieć będzie oznaczone współrzędne

$$(3) \quad c_{0,1}, c_{0,2}, \dots, c_{0,n}.$$

Innymi słowy, mamy

$$(4) \quad 1 = \sum_{k=1}^n c_{0,k} \cdot l_k,$$

oznaczając przez symbole (3) pewne liczby rzeczywiste.

Uważajmy macierz następującą:

$$\begin{array}{cccc} c_{0,1}, & c_{0,2}, & \dots & c_{0,n} \\ c_{1,1}, & c_{1,2}, & \dots & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \dots & c_{n,n} \end{array}$$

w której element k -ty i -tego wiersza równa się

$$c_{i,k}$$

Ponieważ powyższa macierz obejmuje $n+1$ wierszy, a tylko n kolumn, przeto rząd macierzy tej od liczby n większy być nie może. Zatem istnieje taki układ $(n+1)$ liczb rzeczywistych

$$A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A_0,$$

które nie wszystkie równe są zeru, żebyśmy mieli

$$A_n c_{n,k} + A_{n-1} c_{n-1,k} + \dots + A_1 c_{1,k} + A_0 c_{0,k} = 0 \\ (k = 1, 2, 3, \dots n).$$

Z drugiej strony równania poprzedzające pociągają za sobą na podstawie równań (2) i (4) oraz tw. IV z § 155-go równanie następujące:

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0.$$

Ponieważ liczby A_k są liczbami rzeczywistymi, z których nie wszystkie równe są zeru, ponieważ nadto liczba A_0 , jeżeli jest od zera odmienna, oczywiście nie może być jedyną od zera odmienną liczbą pośród liczb A_k , przeto wynik, do którego dochodzimy, możemy wysłowić w sposób następujący: *Każda liczba x zbioru (Z) sprawdza pewne równanie algebraiczne o współczynnikach rzeczywistych.* Innymi słowy, każdej liczbie x zbioru (Z) odpowiada pewien wielomian całkowity o współczynnikach rzeczywistych jednej nieoznaczonej liczby z , stopnia co najmniej pierwszego, $f(z)$, taki, iż mamy

$$f(x) = 0. \quad (5)$$

Zważmy obecnie, że na podstawie klasycznej teorii równań i wielomianów algebraicznych możemy, uważając symbol z za symbol liczby rzeczywistej, liczbowo nie oznaczonej, przedstawić wielomian $f(z)$ o współczynnikach rzeczywistych w postaci iloczynu skończonej liczby czynników, z których jeden równa się niezależnej od liczby z ale od zera odmiennej liczbie, a każdy inny jest albo postaci

$$z - \alpha,$$

albo postaci

$$(z - \alpha)^2 + \beta^2,$$

gdzie α , α i β oznaczają od liczby z niezależne liczby rzeczywiste, z których β jest w każdym razie od zera odmienną liczbą. Z drugiej strony ponieważ, jakśmy stwierdzili wyżej, reguły przekształcania sum, różnic i iloczynów wielomianów całkowitych o współczynnikach rzeczywistych jakiegokolwiek jednej liczby zbioru (Z) nie różnią się od analogicznych reguł dla wielomianów całkowitych o współczynnikach rzeczywistych jednej nieoznaczonej liczby rze-

czywistej, przeto twierdzenie dopiero co przytoczone nie traci znaczenia względem wielomianów całkowitych o współczynnikach rzeczywistych jakiegokolwiek liczby zbioru (Z) . Zatem wielomian $f(x)$ równa się w każdym razie iloczynowi skończonej liczby czynników, z których jeden jest od zera odmienną liczbą rzeczywistą, a każdy inny — albo dwumianem postaci

$$x - a,$$

albo wyrażeniem postaci

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

gdzie a , α i β oznaczają liczby rzeczywiste, z których liczba β jest od zera odmienna.

Opierając się na tym fakcie i na tw. IV § 155-go, wnosimy z równania (5), że każda liczba x zbioru (Z) sprawdza albo równanie postaci

$$x - a = 0,$$

albo równanie postaci

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = 0,$$

gdzie zachowano poprzednie znaczenie dla symbolów a , α i β . Jeżeli liczba x liczbie rzeczywistej równa nie jest, to liczba ta nie może sprawdzać równania postaci pierwszego z równań poprzedzających. Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia liczba taka sprawdzać musi rzeczywiście równanie postaci (1).

§ 159. Uważając w dalszym ciągu symbol (Z) za symbol zbioru liczb (Z) , posiadającego wszystkie własności wyszczególnione w § 154, przystępujemy, w myśl metody naszkicowanej przy końcu § 157-go, do poszukiwania najbardziej dogodnego układu referencyjnego w zbiorze (Z) . Opierając się na tw. II z § 156-go, z łatwością stwierdzić możemy, że przy wyborze układu referencyjnego jedna z jednostek zasadniczych, które układ referencyjny mają tworzyć, może być przyjęta dowolnie, z tem jedynie zastrzeżeniem, żeby liczba, za tę jednostkę przyjęta, od zera była odmienna. Przyjmujemy tedy na liczbę tę, l_1 , w układzie referencyjnym

$$(1) \quad l_1, l_2, \dots, l_n$$

wartość

$$(2) \quad l_1 = 1.$$

W takim razie już żadna z liczb

$$l_2, l_3, \dots, l_n$$

liczbie rzeczywistej równać się nie będzie mogła. Zatem na podstawie twierdzenia, udowodnionego na §-cie poprzedzającym, mamy

$$(l_k - \alpha_k)^2 + \beta_k^2 = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (3)$$

oznaczając przez α_k i β_k liczby rzeczywiste, z których te, które oznaczyliśmy przez symbole β_k , są od zera odmiennymi liczbami. Przyjmijmy

$$l_k - \alpha_k = \beta_k l'_k \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (4)$$

oraz

$$l_1 = l'_1. \quad (5)$$

Ze względu na równości (2) i (5) równości (4) są równoważne następującym:

$$l_k = \alpha_k l'_1 + \beta_k l'_k \quad (k = 2, 3, \dots, n). \quad (6)$$

Dołączając równanie (5) do równania (6), uzyskujemy układ równań, które, uważane za równania o niewiadomych

$$l'_1, l'_2, \dots, l'_n,$$

stanowią układ n równań liniowych o n niewiadomych o wyznaczniku następującym:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \dots 0 \\ \alpha_2, & \beta_2, & 0, & 0 \dots 0 \\ \alpha_3, & 0, & \beta_3, & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \alpha_n, & 0, & 0, & 0 \dots \beta_n \end{vmatrix} = \beta_2 \cdot \beta_3 \cdot \beta_4 \dots \beta_n.$$

Ponieważ żadna z liczb rzeczywistych

$$\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$$

zeru równa nie jest, przeto wyznacznik poprzedzający jest od zera odmienny. Z tego wynika, że układ liczb

$$l'_1, l'_2, \dots, l'_n$$

jest jednym z układów zasadniczych liczb zbioru (Z) .

Ponieważ mamy

$$l'_1 = 1,$$

oraz

$$l_k^2 = -1 \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

przeto uzyskujemy wynik, który możemy wysłować w sposób następujący:

W zbiorze liczb (Z) istnieje zawsze taki zasadniczy układ jednostek

$$l_1, l_2, \dots, l_n,$$

żebyśmy mieli

$$l_1 = 1,$$

oraz

$$l_k^2 + 1 = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

§ 160. W rozważaniach poprzedzających zakładaliśmy mierzając, że rząd n zbioru (Z) jest od jedności większy. Uczyniliśmy to z tej przyczyny, że w razie równości

$$n = 1$$

zbiór (Z) byłby oczywiście izomorficzny dobrze już znanemu nam zbiorowi liczb rzeczywistych. Ponieważ zaś z twierdzenia, na którym zakończyliśmy paragraf poprzedzający, wynika, że, w razie równości

$$n = 2$$

zbiór (Z) byłby izomorficzny zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, który znów należy do dobrze nam znanego typu liczb, przeto w dalszym ciągu zakładając będziemy, że rząd n zbioru (Z) większy jest od liczby 2. Ponieważ na podstawie twierdzenia, uzasadnionego w paragrafie poprzedzającym, istnieje w zbiorze (Z) taki zasadniczy układ jednostek

$$l_1, l_2, \dots, l_n,$$

żebyśmy mieli

$$(1) \quad \begin{cases} l_k^2 + 1 = 0 & (k = 2, 3, \dots, n), \\ l_1 = 1 \end{cases}$$

przeto możemy przyjąć ten zasadniczy układ jednostek za układ referencyjny. Uczynimy to i, oznaczwszy przez a i b dwie jakiegokolwiek, byle od zera odmienne liczby rzeczywiste, przyjmijmy

$$(2) \quad x = al_k + bl_i,$$

zakładając przytem, że zachodzą nierówności następujące:

$$\left. \begin{array}{l} k > 1, \quad t > 1 \\ k \neq t \end{array} \right\} \quad (3)$$

Ponieważ liczby rzeczywiste a i b są od zera odmiennie, przeto liczba x , określona równaniem (2), liczbą rzeczywistą być nie może, gdyż ze względu na równość $l_1 = 1$, równość (2) może być napisana w postaci

$$al_k + bl_t - xl_1 = 0,$$

a równość ta wyrażałaby w razie, gdyby liczba x była liczbą rzeczywistą, iż wbrew definicyi układu referencyjnego liczby l_1, l_2, \dots, l_n nie są liniowo niezależne. Zatem na podstawie twierdzenia § 158-go, liczba x sprawdzać będzie równanie postaci

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = 0, \quad (4)$$

gdzie α i β oznaczają dwie liczby rzeczywiste, z których β jest liczbą od zera odmienną. Na podstawie wzoru (2) mamy:

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 &= (al_k + bl_t - \alpha)^2 = (al_k + bl_t - \alpha)(al_k + bl_t - \alpha) \\ &= a^2 l_k^2 + b^2 l_t^2 + ab(l_k l_t + l_t l_k) \\ &\quad - 2\alpha(al_k + bl_t) + \alpha^2, \end{aligned}$$

skąd

$$(x - \alpha)^2 = -a^2 - b^2 + ab(l_k l_t + l_t l_k) - 2\alpha(al_k + bl_t) + \alpha^2$$

na podstawie równości (1). Wobec tego równanie (4) przyjmuje postać następującą:

$$-a^2 - b^2 + ab(l_k l_t + l_t l_k) - 2\alpha(al_k + bl_t) + \alpha^2 + \beta^2 = 0. \quad (5)$$

Ponieważ żadna z liczb rzeczywistych a i b liczbie zero równą nie jest, przeto równanie (5) równoważne jest równaniu

$$l_k l_t + l_t l_k = 2\delta_{k,t} + \lambda l_k + \mu l_t, \quad (6)$$

gdzie oznaczyliśmy przez λ , μ i $\delta_{k,t}$ liczby rzeczywiste, określone wzorami następującymi:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{k,t} = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2ab} \\ \lambda = \frac{2\alpha}{b} \\ \mu = \frac{2\alpha}{a} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Ponieważ mamy

$$l_1 = 1,$$

przeto możemy równanie (6) napisać w postaci następującej:

$$l_k l_t + l_t l_k = \lambda l_k + \mu l_t + 2\delta_{k,t} l_1,$$

a stąd wynika bezpośrednio, że równanie (6) wyraża, co następuje: współrzędne rzędów

$$1, k \text{ i } t$$

wyrażenia

$$l_k l_t + l_t l_k$$

równają się odpowiednio liczbom rzeczywistym

$$2\delta_{k,t}, \lambda \text{ i } \mu$$

a współrzędne innych rzędów (o ile one wogóle istnieją, o ile więc liczba n od liczby 3 jest większa) — liczbie zero.

Z uwag tych wynika, że liczby δ_{kt}, λ i μ mają wartości, które zależeć mogą do liczb l_k i l_t , ale są w każdym razie niezależne od liczb a i b . Uwaga ta, w połączeniu z tą okolicznością, iż wzory (7) zachodzą, jakiegokolwiek, byle od zera odmiennie wartości miałyby liczby a i b , doprowadza do ważnego następstwa: Z ostatnich dwóch równań układu (7) mamy

$$b\lambda - a\mu = 0.$$

Równanie to zachodzi przy wszystkich, byle od zera odmiennych wartościach na a i b , a wartości liczb λ i μ od liczb a i b nie zależą. Mamy więc w szczególności

$$\lambda - \mu = 0,$$

oraz

$$2\lambda - \mu = 0,$$

skąd

$$\lambda = \mu = 0.$$

Na podstawie tych równań z równania (6) mamy:

$$(8) \quad l_k l_t + l_t l_k = 2\delta_{kt}.$$

Możemy więc wysłowić twierdzenie następujące:

I Jeżeli rząd n zbioru liczb (Z) większy jest od liczby 2, a układ referencyjny

$$(9) \quad l_1, l_2, \dots, l_n,$$

tak został dobrany, żebyśmy mieli

$$l_1 = 1, \quad (10)$$

oraz

$$l_k^2 + 1 = 0, \quad (k = 2, 3, \dots, n), \quad (11)$$

co na podstawie twierdzenia paragrafu poprzedzającego zawsze uskutecznione być może, to w takim razie nierówności

$$k > 1, \quad t > 1, \quad k \neq t \quad (12)$$

pociągają za sobą związki postaci

$$l_k l_t + l_t l_k = 2 \delta_{kt}, \quad (13)$$

gdzie symbol δ_{kt} oznaczają liczby rzeczywiste, które oczywiście sprawdzają równości

$$\delta_{kt} = \delta_{tk}. \quad (14)$$

Liczby δ_{kt} nie są bynajmniej jakimikolwiek liczbami rzeczywistymi. Żeby przekonać się o tem, przyjmijmy

$$x = \sum_{s=2}^n x_s l_s, \quad (15)$$

oznaczając przez

$$x_2, x_3, \dots, x_n \quad (16)$$

dowolnie przyjęte liczby rzeczywiste. Mamy tedy:

$$x^2 = \sum_{s=2}^n x_s^2 l_s^2 + \sum_{t=3}^n x_t \sum_{k=2}^{t-1} x_k (l_k l_t + l_t l_k),$$

skąd

$$x^2 = - \sum_{s=2}^n x_s^2 + 2 \sum_{t=3}^n x_t \sum_{k=2}^{t-1} x_k \delta_{kt}$$

na podstawie związków (11) i (13). Równość poprzedzającą możemy napisać w postaci następującej:

$$x^2 = -f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (17)$$

oznaczając przez $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wielomian jednorodny drugiego stopnia, czyli formę drugiego stopnia liczb (16), o współczynnikach rzeczywistych, określony wzorem następującym:

$$f(x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{s=2}^n x_s^2 - 2 \sum_{t=3}^n x_t \sum_{k=2}^{t-1} x_k \delta_{kt}. \quad (18)$$

Jeżeli tylko nie każda z liczb (16) równa się zeru, to liczba x nie jest liczbą rzeczywistą. Zatem na podstawie twierdzenia § 158-go liczbie x odpowiadać będą dwie liczby rzeczywiste α i β , z których β będzie od zera odmienna, takie, żebyśmy mieli

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = 0,$$

czyli

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Ponieważ na podstawie wzoru (17) kwadrat x^2 liczby x jest liczbą rzeczywistą, przeto mamy

$$\alpha = 0.$$

Mamy więc

$$x^2 + \beta^2 = 0,$$

a ponieważ liczba β jest od zera odmienną liczbą, przeto mamy

$$x^2 < 0.$$

Zatem na podstawie równości (18), mamy

$$(19) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0.$$

Z tego wynika, że zachodzi twierdzenie następujące:

II. Wzorem (18) określony wielomian jednorodny drugiego stopnia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ liczb rzeczywistych (16) ma tę własność, iż sprawdza nierówność (19), jeżeli tylko nie wszystkie liczby (16) mają wartości zerowe.

Z teorii form kwadratowych wiemy, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby forma kwadratowa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ miała powyższą własność, polega na tem, żeby współczynniki δ_{ik} tej formy kwadratowej sprawdzały pewne nierówności. Wspomnianych nierówności nie piszemy, ponieważ fakt, że zachodzi wysłownione przed chwilą twierdzenie, stanowi dostateczną podstawę do dalszych rozważań; ale istnienie rzeczonych nierówności stanowi dowód na to, że zgodnie z tem, cośmy byli zapowiedzieli wyżej, liczby rzeczywiste δ_{ik} bynajmniej nie mogą przybierać jakichkolwiek wartości.

§ 161. Obecnie zamierzamy uzasadnić twierdzenie następujące:

Jeżeli rząd n zbioru (Z) większy jest od liczby 2, to w takim razie istnieje w zbiorze tym taki zasadniczy układ jednostek

$$(1) \quad i_1, i_2, \dots, i_n$$