

X. Liczby względne.

§ 79. Uważajmy cztery liczby bezwzględne a, b, a' i b' , sprawdzające związki

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \geq b \\ a' \geq b' \end{array} \right.$$

i przyjmijmy

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a - b \\ x' = a' - b' \end{array} \right.$$

Związki

$$(3) \quad x < x', \quad x = x' \quad \text{ i } \quad x > x',$$

są odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b' < a' + b \\ a + b' = a' + b \\ a + b' > a' + b. \end{array} \right.$$

Istotnie, załóżmy, że zachodzi pierwszy ze związków (3). Mamy tedy

$$x + b' < x' + b'$$

czyli

$$(a - b) + b' < (a' - b') + b' = a'.$$

Mamy więc

$$(a - b) + b' < a',$$

a zatem

$$\{(a - b) + b'\} + b < a' + b.$$

Ponieważ zaś na podstawie własności przemienności dodawania mamy

$$\{(a - b) + b'\} + b = \{(a - b) + b\} + b' = a + b',$$

przeto stwierdzamy ostatecznie, że pierwszy ze związków (3) pociąga za sobą związek

$$a + b' < a' + b.$$

Analogicznie stwierdzilibyśmy, że w razie istnienia drugiego ze związków (3) zachodziłby drugi ze związków (4), a w razie trzeciego — trzeci. Odwrotnie, jeżeli zachodzi pierwszy ze związków (4), to musi zachodzić pierwszy ze związków (3), albowiem, w razie przeciwnym, zachodziłby drugi lub trzeci ze związków (3), a zatem wbrew założeniu zachodziłby na podstawie tego, cośmy już uzasadnili, drugi lub trzeci ze związków (4). Analogicznie dowiedlibyśmy, że w razie istnienia drugiego ze związków (4) zachodziłby drugi ze związków (3), a w razie trzeciego ze związków (4) — trzeci ze związków (3). Stwierdzamy więc, że związki (3) i (4) rzeczywiście są odpowiednio równoważne.

Twierdzenie o równoważności związków (3) i (4) utraciłoby treść, gdyby choć jeden ze związków (1) nie zachodził, albowiem w takim razie jedna przynajmniej z liczb x lub x' przestałaby istnieć, gdyż działanie zaznaczone w jednym przynajmniej ze wzorów (2) byłoby niewykonalne. Natomiast jakiegokolwiek wartości miałyby liczby a, b, a' i b' , a więc bez względu na to, czy one sprawdzają związki (1) czy nie, liczby te zawsze sprawdzać będą jeden i tylko pewien jeden ze związków (4).

Fakt ten daje nam możliwość wprowadzenia nowego rodzaju wielkości, którym nadajemy nazwę liczb względnych, określając je przez definicję następującą:

Wyraz liczba względna oznacza wszelki układ dwóch liczb bezwzględnych, uważany za element takiego zbioru wszystkich dwójek liczb bezwzględnych, który, na podstawie pewnej umowy, podanej niżej, stanowi oznaczoną klasę wielkości w ściślejszym znaczeniu. Ponieważ w stosunku do rzeczonyj umowy każda z dwóch liczb bezwzględnych, które łącznie stanowią jedną liczbę względną, ma właściwą sobie rolę, przeto odróżniamy te dwie liczby bezwzględne jedną od drugiej odrębnymi nazwami; jedną z nich zowiemy pierwszym, a drugą drugim wyrazem liczby względnej. Tymczasowo przyjmiemy za symbol liczby względnej, której pierwszym wyrazem byłaby pewna liczba bezwzględna a , a drugim — pewna liczba bezwzględna b , symbol

$$(a, b).$$

Charakterystyczna dla liczb względnych umowa, nadająca liczbom tym charakter wielkości, brzmi jak następuje:

Dowolnie przyjętą liczbę względną (a, b) uważamy za znajdującą się w pierwszym, w drugim lub w trzecim ze związków

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, b) < (a', b') \\ (a, b) = (a', b') \\ (a, b) > (a', b') \end{array} \right.$$

z jakąkolwiek drugą liczbą względną (a', b') , zależnie od tego, czy liczby bezwzględne a, b, a' i b' sprawdzają pierwszy, drugi, czy trzeci ze związków (4).

Obecnie winniśmy udowodnić, że powyższa umowa spełnia wszystkie te warunki, do których w rozdziale II-gim postanowiliśmy zawsze zastosowywać się przy ustawianiu reguł porównywania ilościowego elementów jakiegokolwiek zbioru. Spostrzegamy natychmiast, że pewne z tych warunków oczywiście są spełnione tak, iż pozostaje jeszcze tylko bliżej zbadać, czy, oznaczając przez (a, b) , (a', b') i (a'', b'') trzy liczby względne, możemy słusznie twierdzić, że

A) Równości

$$(6) \quad (a, b) = (a', b') \quad \text{i} \quad (a', b') = (a'', b'')$$

pociągają za sobą równość

$$(7) \quad (a, b) = (a'', b'').$$

B) Związki

$$(8) \quad (a, b) < (a', b') \quad \text{i} \quad (a', b') < (a'', b'')$$

pociągają za sobą związek¹⁾

$$(9) \quad (a, b) < (a'', b'').$$

Założmy najpierw, że liczby (a, b) , (a', b') i (a'', b'') sprawdzają związki (6). Mamy tedy

$$\begin{aligned} a + b' &= a' + b \\ a' + b'' &= a'' + b', \end{aligned}$$

skąd

$$(a + b') + (a' + b'') = (a' + b) + (a'' + b')$$

czyli

$$(a + b'') + (a' + b') = (a'' + b) + (a' + b'),$$

¹⁾ Obacz uwagę w odsyłaczu na str. 97.

a to na podstawie własności łączności i przemienności dodawania liczb bezwzględnych. Z równości powyższej mamy

$$a + b'' = a'' + b.$$

Zatem równości (6) rzeczywiście pociągają za sobą równość (7). Załóżmy obecnie, że zachodzą związki (8). Mamy tedy

$$\begin{aligned} a + b' &< a' + b \\ a' + b'' &< a'' + b', \end{aligned}$$

skąd, uwzględniając własności łączności i przemienności sum liczb bezwzględnych, natychmiast wyprowadzamy nierówność

$$(a + b'') + (a' + b') < (a'' + b) + (a' + b')$$

skąd

$$a + b'' < a'' + b.$$

Zatem twierdzenie B rzeczywiście zachodzi.

Ostatecznie umowa, określająca reguły porównywania ilościowego liczb bezwzględnych, czyni zadość wszystkim warunkom, o które chodziło.

Bezpośredni następstwem reguł porównywania ilościowego liczb względnych jest twierdzenie następujące:

Wartość liczby względnej nie ulega zmianie ani wskutek dodania dowolnie przyjętej tej samej liczby bezwzględnej do każdego z jej wyrazów, ani wskutek odjęcia tej samej liczby bezwzględnej od każdego z nich, naturalnie pod warunkiem, żeby w razie odejmowania działanie to było wykonalne.

§ 80. Stwierdzamy z łatwością, że w następstwie przyjętych przez nas reguł porównywania ilościowego liczb względnych zachodzi twierdzenie następujące:

I. Oznaczmy przez a , b , a' i b' cztery liczby bezwzględne i uważajmy liczby względne (a, b) i (a', b') . Jeżeli liczby a , b , a' i b' sprawiają związki

$$a \geq b \quad \text{ i } \quad a' \geq b',$$

to związki

$$\begin{aligned} (a, b) &< (a', b') \\ (a, b) &= (a', b') \\ (a, b) &> (a', b') \end{aligned}$$

są odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$\begin{aligned} a - b &< a' - b' \\ a - b &= a' - b' \\ a - b &> a' - b'. \end{aligned}$$

Wobec tego powstaje myśl o przyjęciu takich definicji działań zasadniczych na liczbach względnych, żeby zachodziło twierdzenie następujące:

II. Jeżeli, przy zachowaniu oznaczeń twierdzenia poprzedzającego, oznaczymy jeszcze przez e , f , g i h cztery nowe liczby bezwzględne, to w razie nierówności

$$a \geq b \quad \text{ i } \quad a' \geq b'$$

równość

$$(a, b) + (a', b') = (e, f)$$

pociągać będzie za sobą związek

$$e \geq f$$

i równoważna będzie równości

$$(a - b) + (a' - b') = e - f,$$

a równość

$$(a, b) \cdot (a', b') = (g, h)$$

pociągać będzie za sobą związek

$$g \geq h$$

i równoważna będzie równości

$$(a - b) \cdot (a' - b') = g - h.$$

Oczywiście nie możemy mieć z góry pewności, czy ustawienie takich definicji działań dodawania i mnożenia na liczbach względnych, ażeby twierdzenie poprzedzające zachodziło, jest możliwe, ale możemy chwilowo założyć, że tak jest, przyjmując na siebie obowiązek zbadania a posteriori, czy definicje, do których przywodzi to założenie, nie uchybiają ani ogólnym zasadom logiki, ani zasadom rozdziału V-go; nadto zaznaczamy, że na podstawie zasad omówionych w rozdziale V-tym, ugruntowanie całej teorii działań zasadniczych na jakichkolwiek wielkościach, a więc i na liczbach względnych, wymaga wprowadzenia definicji dodawania i mnożenia

tylko w przypadku szczególnym, kiedy dwie tylko liczby działaniu ulegać mają.

§ 81. Dodawanie. Zakładając, że liczby bezwzględne a , b , a' i b' sprawdzają związki

$$a \geq b \quad \text{ i } \quad a' \geq b',$$

mamy

$$(a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b').$$

Kierując się tedy myślą przewodnią, zaznaczoną w paragrafie poprzedzającym, przyjmujemy na dodawanie liczb względnych definicyę następującą:

Sumą

$$(a, b) + (a', b')$$

dwóch liczb względnych (a, b) i (a', b') nazywamy wszelką liczbę względną, równą liczbie względnej

$$(a + a', b + b').$$

Żeby ze stanowiska ogólnych zasad, przez nas przyjętych (§ 25), definicya ta wogóle uważana być mogła za definicyę pewnego działania, koniecznem jest i wystarczającym, żeby zachodziły dwa twierdzenia następujące:

1°. Jeżeli pewna liczba względna (x, y) uważana być może za sumę

$$(a, b) + (a', b')$$

pewnych dwóch liczb względnych (a, b) i (a', b') , to i każda liczba względna, równa liczbie x , za tęż sumę uważana być może.

2°. Jeżeli pewna liczba względna (x, y) uważana być może za sumę

$$(a, b) + (a', b') \tag{10}$$

liczb względnych (a, b) i (a', b') , to liczba ta może być także uważana za sumę

$$(c, d) + (c', d') \tag{11}$$

liczb względnych (c, d) i (c', d') , jeżeli tylko zachodzą równości

$$\left. \begin{aligned} (c, d) &= (a, b) \\ (c', d') &= (a', b'). \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Ponieważ pierwsze z tych dwóch twierdzeń zachodzi oczywiście na podstawie samego brzmienia definicji dodawania liczb względnych, chodzi więc tylko o uzasadnienie drugiego. Z równości (12) mamy

$$\begin{aligned}c + b &= a + d \\c' + b' &= a' + d'.\end{aligned}$$

skąd wynika równość

$$(c + c') + (b + b') = (d + d') + (a + a').$$

która wyraża, że mamy

$$(a + a', b + b') = (c + c', d + d').$$

Jeżeli więc pewna liczba względna (x, y) uważana być może za sumę

$$(a, b) + (a', b')$$

i równa się zatem liczbie $(a + a', b + b')$ to w razie równości (12) ta sama liczba równa się liczbie $(c + c', d + d')$ i z tej przyczyny uważana być może za sumę

$$(c, d) + (c', d').$$

Rozumowanie poprzedzające nie tylko stanowi dowód twierdzenia, które pragnęliśmy uzasadnić, ale prócz tego oczywiście jest jeszcze dowodem jednoznaczności dodawania liczb względnych.

Ostatecznie powyższa definicja dodawania liczb bezwzględnych jest rzeczywiście ze stanowiska ogólnych zasad rozdziału V-go definicją pewnego działania, a nadto działanie, określone tą definicją, jest działaniem jednoznacznym. Ponieważ zaś na podstawie rozważanej definicji dodawanie liczb względnych oczywiście wykonalne jest bez żadnych zastrzeżeń, przeto definicja ta czyni zadość i temu warunkowi (§ 31), żeby dodawanie było działaniem wykonalnym bez zastrzeżeń. Zatem ze stanowiska ogólnej teorii, rozwiniętej w rozdziale V-tym, usprawiedliwiliśmy w zupełności naszą definicję dodawania liczb względnych. Ze względu na drogę, która przywiodła nas do definicji dodawania liczb względnych, twierdzenie II-gie paragrafu poprzedzającego zachodzi niezawodnie co do działania dodawania. Nadto, spostrzegamy natychmiast, że dodawanie liczb względnych posiada własności łączności i przemienności. Powiadam, że *nierówność*

$$(13) \quad u < u'$$

pociąga za sobą zawsze nierówność

$$v + u < v + u', \quad (14)$$

gdzie oznaczyliśmy przez u , u' i v liczby względne.

Istotnie, żeby uwidocznic pierwszy i drugi wyraz każdej z liczb względnych u , u' i v , przyjmijmy

$$\begin{aligned} u &= (a, b) \\ u' &= (a' b') \\ v &= (c, d). \end{aligned}$$

Na podstawie nierówności (13), mamy tedy

$$a + b' < a' + b,$$

mamy więc

$$(a + c) + (b' + d) < (a' + c) + (b + d),$$

a nierówność ta wyraża, że mamy

$$(a + c, b + d) < (a' + c, b' + d),$$

skąd wynika, że nierówność (14) rzeczywiście jest następstwem koniecznym nierówności (13).

§ 82. Odejmowanie. Ponieważ dodawanie liczb względnych posiada własność przemienności, przeto (§ 31) istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania liczb bezwzględnych, a resztą odejmowania jakiegokolwiek liczby względnej (a', b') , przyjętej za odjemnik, od jakiegokolwiek liczby względnej (a, b) , przyjętej za odjemną, jest liczba względna (x, y) , sprawdzająca równanie

$$(a', b') + (x, y) = (a, b). \quad (1)$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia, na którym zakończyliśmy paragraf poprzedzający, nierówność

$$u \neq u',$$

gdzie oznaczyliśmy przez u i u' dwie liczby względne, pociąga za sobą nierówność

$$v + u \neq v + u',$$

jakąkolwiek liczbę względną oznaczylibyśmy przez v , przeto (§ 29, tw. I i II) odejmowanie liczb względnych jest (w razie wykonalności) działaniem jednoznacznym.

Ponieważ

$$(a', b') + (x, y) = (a' + x, b' + y),$$

przeto równość (1) równoważna jest równości

$$(2) \quad b + a' + x = a + b' + y,$$

której zawsze możemy uczynić zadość, przyjmując

$$(3) \quad \begin{cases} x = a + b' \\ y = a' + b. \end{cases}$$

Z tego wynika, że odejmowanie liczb względnych jest wbrew temu, co zachodzi przy tych rodzajach liczb, z którymi obeznaliśmy się poprzednio, działaniem wykonalnem bez zastrzeżeń.

Uzyskane już wyniki możemy wysłowić w postaci twierdzenia następującego:

I. *Odejmowanie liczb względnych jest działaniem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.*

Zaznaczmy, że prócz wartości (3) na x i y , istnieje nieskończenie wiele innych takich układów wartości na liczby bezwzględne x i y , które sprawdzają równanie (2). Istotnie, przyjmąwszy na x jakąkolwiek wartość

$$x = \lambda,$$

byle taką, żebyśmy mieli

$$b + a' + \lambda \geq a + b',$$

uczynimy zadość równaniu (2), przyjmując

$$y = b + a' + \lambda - (a + b').$$

Ponieważ jednak już wyżej stwierdziliśmy, że odejmowanie liczb względnych jest w razie wykonalności działaniem jednoznaczem, przeto, pomimo iż prócz wartości (3) na x i y istnieje nieskończenie wiele innych, równanie (2) sprawdzających układów wartości na te liczby bezwzględne, mamy niezawodnie

$$(4) \quad (a, b) - (a', b') = (a + b', b + a').$$

Równość ta wyraża oczywiście ogólną regułę odejmowania liczb względnych. Żeby regułę tę wyrazić w sposób najodpowiedniejszy, określimy najpierw pojęcie symetrii dwóch liczb względnych i nawiążemy parę uwag do tego pojęcia.

Każda liczba względna, równa tej liczbie względnej (y, x) , która wynika z liczby względnej dowolnie przyjętej (x, y) drogą zamiany pierwszego wyrazu na drugi, a drugiego na pierwszy, zowie się liczbą *symetryczną* liczbie (x, y) .

Łatwo okazać możemy, że zachodzą twierdzenia następujące:

A) Jeżeli pewna liczba względna (u, v) symetryczna jest liczbie względnej (x, y) , to liczba (x, y) jest symetryczna liczbie (u, v) .

B) Liczba względna (u, v) , symetryczna liczbie względnej (x, y) , która jest symetryczna pewnej trzeciej liczbie względnej (p, q) , jest równa liczbie (p, q) .

C) Każda liczba względna (u, v) , równa liczbie względnej (x, y) , symetrycznej pewnej trzeciej liczbie względnej (p, q) , jest sama symetryczna liczbie (p, q) .

Istotnie, jeżeli założenie tw. A jest spełnione, to mamy

$$(u, v) = (y, x).$$

Ale równość ta równoważna jest równości

$$u + x = v + y,$$

równoważnej znów równości

$$(x, y) = (v, u),$$

która wyraża, iż zgodnie z brzmieniem twierdzenia A liczba (x, y) symetryczna jest liczbie (u, v) .

Przypuścimy, że spełnione są założenia twierdzenia B. W takim razie mamy

$$(u, v) = (y, x) \tag{\alpha}$$

oraz

$$(x, y) = (q, p).$$

Ze względu na twierdzenie A, ostatnia równość równoważna jest równości

$$(p, q) = (y, x).$$

Zestawiając równość tę z równością (α) , zyskujemy równość

$$(u, v) = (p, q),$$

która właśnie wyraża twierdzenie B.

Przypuśćmy nareszcie, że liczby (u, v) , (x, y) i (p, q) sprawdzają założenie twierdzenia C. Mamy tedy

$$\begin{aligned}(u, v) &= (x, y) \\ (x, y) &= (q, p),\end{aligned}$$

skąd

$$(u, v) = (q, p),$$

a ta równość wyraża właśnie twierdzenie C.

Powróćmy obecnie do równości (4). Mamy

$$(a + b', b + a') = (a, b) + (b', a'),$$

a ponieważ

$$(a, b) + (b', a') = (a, b) + (u, v),$$

jeżeli tylko liczba (u, v) sprawdza równanie

$$(u, v) = (b', a').$$

przeto regułę, którą wyraża równość (4), możemy wysłowić w postaci twierdzenia następującego:

II. *Przy odejmowaniu liczb względnych reszta równa się sumie odjemnej i liczby symetrycznej odjemnikowi.*

Spostrzegamy z łatwością, że dwie liczby symetryczne wogóle nie są pomiędzy sobą równe, a warunek konieczny i wystarczający, ażeby dwie liczby, symetryczne pomiędzy sobą, były prócz tego i równe sobie, polega na tem, iżby w każdej z nich pierwszy wyraz równał się drugiemu. Innemi słowy ogólną postać liczby względnej, symetrycznej samej sobie, możemy przedstawić przez symbol

$$(a, a),$$

gdzie a oznacza dowolnie przyjętą liczbę bezwzględną. Uwaga ta prowadzi nas do definicyi następującej:

Każda liczba względna, symetryczna samej sobie, zowie się autosymetryczną liczbą względną.

Spostrzegamy z największą łatwością, że wszystkie liczby autosymetryczne są pomiędzy sobą równe, a każda liczba względna, równa liczbie względnej autosymetrycznej, jest sama liczbą autosymetryczną.

Zwracając się do równości (4), spostrzegamy natychmiast, że zachodzi twierdzenie następujące:

III. Przy odejmowaniu liczb względnych reszta równa się wspólnej wartości liczb względnych autosymetrycznych w razie, ale tylko w razie, kiedy odjemnik i odjemna są równemi pomiędzy sobą liczbami.

Na podstawie definicyi odejmowania twierdzenie to równoważne jest twierdzeniu następującemu:

IV. Żeby wynik dodawania pewnej liczby względnej x do dowolnie przyjętej drugiej liczby względnej l równał się liczbie l , koniecznem jest i wystarczającym, żeby liczba x równała się wspólnej wartości liczb względnych autosymetrycznych.

W § 39-tym przyjęliśmy ogólną definicyę następującą: Jeżeli w pewnym zbiorze (Z) dodawaniu mogących ulegać wielkości istnieje taki element μ , żeby po oznaczeniu przez a i x dwóch elementów zbioru (Z) równość

$$x = \mu \quad \text{ i } \quad a + x = a,$$

były sobie równoważne, to w takim razie zowiemy wspólną wartość wszystkich, elementowi μ równych elementów zbioru (Z) modułem dodawania elementów zbioru (Z). Ze względu na dalsze zastosowanie podajemy ogólne twierdzenie następujące:

V. Jeżeli istnieje moduł dodawania elementów pewnego zbioru wielkości (Z), a element μ zbioru tego równa się modułowi dodawania, to w takim razie, oznaczawszy przez a dowolnie przyjęty element zbioru (Z), nie tylko mamy

$$a + \mu = a, \tag{1}$$

ale i

$$a - \mu = a. \tag{2}$$

Istotnie, na podstawie ogólnej definicyi odejmowania równość (2) równoważna jest równości

$$a = a + \mu,$$

która znów równoważna jest równości (1). Zatem równość (2) równoważna jest równości (1), a ponieważ ta równość zachodzi na podstawie definicyi modułu dodawania, przeto zgodnie z brzmieniem twierdzenia, równość (2) także zachodzić musi.

Powracając do teoryi liczb względnych, spostrzegamy natychmiast, że teoria ta daje nam nowy przykład istnienia modułu dodawania, gdyż tw. III-cie i równoważne mu tw. IV-te oczywiście równoważne są twierdzeniu następującemu:

VI. *Moduł dodawania liczb względnych istnieje i równa się wspólnej wartości liczb względnych autosymetrycznych.*

Czytelnik z łatwością sam udowodni twierdzenie następujące:

VII. *Suma dwóch liczb względnych, pomiędzy sobą symetrycznych, równa się modułowi dodawania; odwrotnie, jeżeli suma dwóch liczb względnych równa się modułowi dodawania, to te liczby są pomiędzy sobą symetryczne.*

§ 83. **Pojęcie sumy algebraicznej.** Oznaczmy przez μ moduł dodawania liczb względnych i uważajmy skończony ciąg dowolnie przyjętych liczb względnych

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Następnie oznaczmy przez s_0 liczbę względną, określoną równaniem

$$(2) \quad s_0 = \mu.$$

a przez s_k ($1 \leq k \leq n$) liczbę względną, która zależnie od wartości wskaźnika k , na podstawie dowolnie przyjętych umów, ma być wyznaczona albo z równania

$$(3) \quad s_k = s_{k-1} + a_k,$$

albo z równania

$$(4) \quad s_k = s_{k-1} - a_k.$$

W takim razie wartość każdego wyrazu ciągu

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_n,$$

a więc w szczególności i wyrazu s_n , oznaczona będzie w zupełności na podstawie zasady indukcji matematycznej. Przy takim określeniu liczba s_n zowie się sumą algebraiczną liczb (1), a same te liczby — jej składnikami. Przy oznaczeniach, którymi posługiwaliśmy się, symbol a_k oznacza to, co zwiemy składnikiem rzędu k sumy algebraicznej s_n ; składnik a_k zwiemy składnikiem pierwszej lub drugiej kategorii sumy algebraicznej zależnie od tego, czy zachodzi wzór (3), czy wzór (4) przy rozważonej wartości wskaźnika k . Żeby przy układaniu symbolu na sumę algebraiczną z uwidocznieniem składników uniknąć potrzeby wprowadzania tych nawiasów, które na podstawie ogólnych reguł tworzenia wzorów arytmetycznych, powinnyby być wprowadzone, umawiamy się, że będziemy stosować się do reguły następującej: