

VIII. Powrót do problemu mierzenia odcinków prostoliniowych, liczby niewymierne, liczby bezwzględne wogóle.

§ 58. W rozdziale IV-tym podaliśmy rozwiązanie problemu mierzenia odcinków prostoliniowych, współmiernych z jednostką długości, a następnie, w rozdziale VI-tym (§ 45), omówiliśmy postać, którą przybierają wyniki rozdziału IV-go ze stanowiska czysto arytmetycznej teorii liczb wymiernych. Z drugiej znów strony wiemy z rozdziału III-go, że jakkolwiek odcinek prostoliniowy i niezerowy uważalibyśmy, zawsze istnieć będą odcinki, z tym odcinkiem niewspółmierne. Zatem, żeby rozwiązać w zupełności problem mierzenia odcinków prostoliniowych, winniśmy zbadać przypadek, kiedy chodzi o zmierzenie odcinka, z jednostką niewspółmiernego. Temu właśnie przedmiotowi poświęcamy rozdział obecny.

Rozważania, do których przystępujemy, przywiodą nas do nowego rozszerzenia pojęcia liczby; wytworzymy sobie pojęcie liczby niewymiernej, a następnie ogólne pojęcie liczby bezwzględnej. Zbiór liczb wymiernych stanowić będzie tedy część tylko zbioru liczb bezwzględnych.

Teoria liczb bezwzględnych, którą uzyskamy w rozdziale niniejszym i którą nazwiemy geometryczną teorią tych liczb, nie będzie jeszcze ostateczną teorią liczb bezwzględnych. W następnym rozdziale poddamy teorię tę krytyce, podobnie jakśmy to uczynili w rozdziale VI-tym z geometryczną teorią liczb wymiernych. Dopiero ta krytyka przywiedzie nas do teorii ostatecznej, teorii czysto arytmetycznej. Zatem, podobnie jak w rozdziale IV-tym, przy teorii liczb wymiernych, rozwinie my w rozdziale obecnym geometryczną teorię liczb bezwzględnych tylko do kresu, poza którym nie różni się już ona od teorii arytmetycznej, stanowiącej przedmiot rozdziału następnego. W szczególności z teorii działań

na liczbach bezwzględnych omówimy tylko dodawanie i mnożenie, poprzestając na przypadku, kiedy tylko dwie liczby działaniu podlegają.

§ 59. Oznaczmy przez u odcinek, przyjęty za jednostkę, a przez a odcinek, z odcinkiem u niewspółmierny. Jeżeli tedy oznaczmy przez w jakąkolwiek liczbę wymierną, a przez b odcinek, którego miarą byłaby liczba w , to odcinek b nie będzie mógł w żadnym razie równać się odcinkowi a i będzie zatem albo mniejszy albo większy od odcinka a . Możemy więc podzielić ogół liczb wymiernych na dwie kategorie czyli zbiory (A_1) i (A_2) , zaliczając do kategorii (A_1) wszystkie liczby wymierne, które są miarami odcinków, od odcinka a mniejszych, a do kategorii (A_2) wszystkie liczby wymierne, które są miarami odcinków, od odcinka a większych.

Powiadam, że zachodzą twierdzenia następujące:

A) Każdy ze zbiorów (A_1) i (A_2) obejmuje nieskończenie wiele elementów czyli jest zbiorem nieskończonym.

B) Każda liczba zbioru (A_1) mniejsza jest od każdej liczby zbioru (A_2) .

C) W zbiorze (A_1) nie istnieje liczba największa.

D) W zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

Twierdzenia te wysnujemy z łatwością z ogólnego twierdzenia następującego:

I. Jakikolwiek odcinek (oczywiście niezerowy) u przyjęlibyśmy za jednostkę długości i jakikolwiek nierówne sobie odcinki oznaczylibyśmy przez b i b' ($b < b'$), możemy zawsze wyznaczyć taką liczbę wymierną w , żeby liczba ta była miarą odcinka większego od odcinka b , ale mniejszego od odcinka b' .

Żeby twierdzenie to uzasadnić, przyjmijmy

$$c = b' - b. \quad (1)$$

Na podstawie pewnika Archimedesza (§ 13) możemy wyznaczyć taką liczbę całkowitą p , żebyśmy mieli

$$p \cdot c > u.$$

Założmy, że liczba całkowita p sprawdza tę nierówność i podzielmy odcinek u na tyle równych części, ile wynosi liczba p , oznaczając przytem przez d jedną z nich. W takim razie zachodzić będzie związek.

$$p \cdot c > p \cdot d, \quad (2)$$

skąd wynika nierówność

$$(3) \quad c > d,$$

albowiem, gdybyśmy mieli

$$c \leq d,$$

to na podstawie znanych własności sum odcinków dowiedlibyśmy drogą indukcji matematycznej, że wbrew nierówności (2) musiałby zachodzić związek

$$p \cdot c \leq p \cdot d.$$

Na podstawie znanego twierdzenia (str. 24) możemy wyznaczyć taką liczbę całkowitą m , żebyśmy mieli

$$(4) \quad (m-1) \cdot d \leq b < m \cdot d$$

Jeżeli tedy przyjmiemy

$$l = m \cdot d,$$

to mieć będziemy

$$(5) \quad l > b$$

oraz

$$l - b \leq d.$$

Ze związku tego, oraz ze związków (1) i (3) mamy

$$l - b < b' - b$$

skąd

$$(6) \quad l < b'.$$

Miarą odcinka l jest oczywiście liczba ułamkowa $\frac{m}{p}$, a ponieważ odcinek l sprawdza nierówności (5) i (6) przeto liczba $\frac{m}{p}$ jest właśnie taką liczbą, której istnienie pragnęliśmy udowodnić.

Twierdzenie A możemy obecnie uzasadnić w sposób następujący: na podstawie dopiero co dowiedzonego twierdzenia możemy wyznaczyć liczbę wymierną α_1 , która byłaby miarą odcinka, większego od odcinka zerowego, ale mniejszego od odcinka a . Liczba α_1 będzie oczywiście od zera odmienna i oczywiście będzie należeć do zbioru (A_1) . Ponieważ zaś mamy nieskończenie wiele liczb wymiernych mniejszych od α_1 a większych od zera, ponieważ dalej każda z tych liczb należy oczywiście do zbioru (A_1) , przeto zbiór (A_1) jest rzeczywiście zbiorem nieskończonym.

O tem zaś, że zbiór (A_2) jest nieskończony, możemy upewnić się bezpośrednio na podstawie aksjomatu Archimedesa: ze względu na aksjomat ten istnieje taka liczba całkowita n , że mamy

$$n \cdot u > a.$$

Liczba n należy oczywiście do zbioru (A_2) . Ponieważ zaś każda liczba wymierna, większa od n , należy także do zbioru (A_2) , a takich liczb jest nieskończenie wiele, przeto zbiór (A_2) jest rzeczywiście także zbiorem nieskończonym.

Twierdzenie B uzasadnimy w sposób następujący: oznaczmy przez α_1 jedną z liczb zbioru (A_1) , a przez α_2 jedną z liczb zbioru (A_2) . Liczba α_1 jest miarą odcinka a_1 mniejszego od odcinka a , a liczba α_2 — miarą odcinka a_2 , od odcinka a większego. Mamy więc

$$a_1 < a_2,$$

skąd

$$\alpha_1 < \alpha_2,$$

o co właśnie chodziło.

Przechodzimy do twierdzenia C . Oznaczmy znowu przez α_1 którąkolwiek z liczb zbioru (A_1) . Liczba ta jest miarą pewnego odcinka a_1 , który jest mniejszy od odcinka a . Możemy więc na podstawie twierdzenia I-szego wyznaczyć taką liczbę wymierną α'_1 , żeby liczba ta była miarą odcinka większego od a_1 , ale mniejszego od a . Oczywiście liczba α'_1 większa jest od liczby α_1 i należy do zbioru (A_1) .

Dowiedliśmy więc, że jakąkolwiek liczbę α_1 , należącą do zbioru (A_1) , pomyślelibyśmy, możemy zawsze wyznaczyć drugą liczbę α'_1 , większą od α_1 , ale także należącą do zbioru (A_1) . Zatem w zbiorze tym rzeczywiście nie istnieje liczba największa.

Żeby uzasadnić także twierdzenie D , oznaczmy przez α_2 którąkolwiek z liczb zbioru (A_2) . Liczba ta jest miarą pewnego odcinka a_2 , większego od a . Na podstawie twierdzenia I-szego możemy wyznaczyć taką liczbę wymierną α'_2 , żeby liczba ta była miarą odcinka większego od a , ale mniejszego od a_2 . Oczywiście liczba α'_2 mniejsza jest od liczby α_2 i należy do zbioru (A_2) .

Stwierdzamy zatem, że do każdej liczby α_2 zbioru (A_2) możemy dobrać drugą liczbę wymierną α'_2 , od niej mniejszą, a należącą do zbioru (A_2) . Zatem zgodnie z brzmieniem tw. D w zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

§ 60. Rozważając odcinek niewspółmierny z jednostką, przywiedzeni byliśmy do podziału zbioru liczb wymiernych na dwa zbiory (A_1) i (A_2) , które prócz innych i tę jeszcze miały własność, iż były nieskończenie liczne a przytem takie, że każda liczba zbioru (A_1) mniejsza była od każdej liczby zbioru (A_2) . Uważajmy w sposób całkiem ogólny taki podział zbioru liczb wymiernych na dwa zbiory (K_1) i (K_2) , żeby zbiory te były nieskończenie liczne i żeby każda liczba zbioru (K_1) mniejsza była od każdej liczby zbioru (K_2) . Taki podział liczb wymiernych na dwa zbiory zowie się ich przekrojem¹⁾; zbiór (K_1) nazywamy zbiorem liczb wymiernych pierwszej, a zbiór (K_2) zbiorem liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju. Jakikolwiek przekrój liczb wymiernych uważalibyśmy, zawsze zachodzi jeden z trzech przypadków następujących:

1°. W zbiorze (K_1) liczb pierwszej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju zbioru liczb wymiernych, istnieje liczba największa, ale w takim razie w zbiorze (K_2) liczb drugiej kategorii liczby najmniejszej nie ma.

2°. W zbiorze (K_2) istnieje liczba najmniejsza, ale wówczas w zbiorze (K_1) liczby największej nie ma.

3°. W zbiorze (K_1) nie istnieje liczba największa, a w zbiorze (K_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

Żeby przekonać się, że prócz wymienionych trzech przypadków żaden inny przypadek zachodzić nie może, zważmy, że bądź co bądź musi w każdym razie zachodzić jeden z dwóch przypadków następujących:

A) W zbiorze (K_1) istnieje liczba największa.

B) W zbiorze tym największa liczba nie istnieje.

Założmy, że zachodzi przypadek A i oznaczmy tedy przez w największą liczbę zbioru (K_1) . W takim razie oczywiście określić możemy zbiór (K_2) , jako zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od liczby w . Pośród tych liczb nie istnieje liczba najmniejsza, albowiem jeżeli oznaczmy którąkolwiek z nich przez w_2 , to mieć będziemy

$$w_2 > w.$$

Oznaczmy przez w'_2 liczbę wymierną, sprawdzającą nierówności

$$w_2 > w'_2 > w,$$

¹⁾ Dedekind, Was sind, was sollen die Zahlen. Braunschweig 1888.

liczba taka istnieje (istnieje nawet nieskończenie wiele takich liczb). Otóż liczba w'_2 będzie należeć do zbioru (K_2) , a będzie jednak mniejsza od liczby w_2 . Zatem, jakąkolwiek liczbę w_2 zbioru (K_2) pomyślibyśmy, możemy zawsze wyznaczyć liczbę od niej mniejszą, także należącą do zbioru (K_2) . Przeto, w zbiorze tym nie istnieje liczba najmniejsza.

Dowiedliśmy więc, że w przypadku (A) zachodzi niezawodnie pierwszy z trzech wyżej wymienionych przypadków.

Jeżeli przypadek A nie zachodzi, to jakeśmy już zaznaczyli, musi zachodzić przypadek B. Ale w takim razie oczywiście zachodzi może tylko 2-gi lub 3-ci z trzech przypadków wyszczególnionych wyżej.

Przekonywamy się więc, że rzeczywiście, jakkolwiek przekrój liczb wymiernych rozważalibyśmy, zachodzić może tylko jeden z trzech powyższych przypadków.

O tem, że każdy ze wspomnianych trzech przypadków jest możliwy, możemy przekonać się z największą łatwością. Istotnie, że trzeci przypadek jest możliwy, o tem wiemy już z paragrafu poprzedzającego; żeby zaś upewnić się, że każdy z dwóch pierwszych również jest możliwy, oznaczmy przez w jakąkolwiek, od zera odmienną liczbę wymierną; jeżeli tedy określimy zbiór (K_1) jako zbiór liczb wymiernych, nie większych od liczby w , a zbiór (K_2) — jako zbiór wszystkich innych liczb wymiernych, to oczywiście urzeczywistnimy przypadek 1-szy; jeżeli zaś określimy zbiór (K_1) , jako zbiór liczb wymiernych mniejszych od liczby w , a zbiór (K_2) — jako zbiór wszystkich innych liczb wymiernych, to urzeczywistnimy oczywiście przypadek 2-gi. Ostatecznie każdy z rozważanych trzech przypadków jest rzeczywiście możliwy.

Jeżeli pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych stanowi taki podział tego zbioru, przy którym zachodzi jeden z dwóch pierwszych przypadków wymienionych wyżej, jeżeli innemi słowy, istnieje pewna liczba wymierna w , która jest albo największa z liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju, albo najmniejsza z liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju, to wówczas zwiemy przekrój (P) przekrojem pierwszego gatunku, a liczbę wymierną w — liczbą położoną na tym przekroju.

Każdy przekrój zbioru liczb wymiernych, który nie jest przekrojem pierwszego gatunku, a więc każdy przekrój zbioru liczb

wymiernych, który oznacza taki podział zbioru liczb wymiernych, przy którym nie istnieje ani największa liczba pośród liczb wymiernych pierwszej kategorii w stosunku do tego przekroju, ani liczba najmniejsza pośród zbioru liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju, zowie się przekrojem drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych.

§ 61. Z wyjaśnień powyższych wnosimy natychmiast, że pierwszego gatunku przekrój zbioru liczb wymiernych możemy oznaczyć w zupełności, posługując się wyłącznie teorią liczb wymiernych, albowiem, skoro oznaczymy liczbę wymierną, położoną na przekroju z nadmienieniem, czy liczba ta należy do 1-szej czy do 2-giej kategorii liczb w stosunku do przekroju, o oznaczenie którego chodzi, to tem samem określimy w zupełności rozważony przekrój.

Mniej łatwo dostrzegamy, że teoria liczb wymiernych dostarczyć nam może także środków, w pewnych przypadkach przynajmniej, wystarczających do zupełnego oznaczenia przekroju drugiego gatunku. Przekonamy się jednak na przykładzie, że okoliczność ta zachodzi w rzeczywistości; ale najpierw musimy wyłożyć pewne uwagi wstępne.

Oznaczmy przez w jakąkolwiek liczbę wymierną. Oczywiście może się zdarzyć, że istnieje pewna druga liczba wymierna x , która sprawdza równanie

$$x^2 = w.$$

W takim razie orzekamy, że liczba w jest kwadratem zupełnym. Łatwo możemy przekonać się, że istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych, z których żadna kwadratem zupełnym nie jest: oznaczmy przez k jakąkolwiek liczbę całkowitą, od zera odmienną, a przez n liczbę całkowitą, która sprawdza nierówność

$$k^2 < n < (k+1)^2.$$

Powiadam, że liczba n nie jest kwadratem zupełnym. Istotnie, z nierówności, którym liczba n czyni zadość, wynika, że liczba ta nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej; ale może istnieje liczba ułamkowa x , która sprawdza równanie

$$(7) \quad x^2 = n?$$

Moglibyśmy tedy przyjąć

$$(8) \quad x = \frac{m}{p},$$

oznaczając przez

$$\frac{m}{p}$$

liczbę ułamkową nieprzywiedlną, o mianowniku p od jedności większym. Mielibyśmy tedy

$$x^2 = \frac{m^2}{p^2},$$

a liczba ułamkowa, stanowiąca prawą stronę tej równości byłaby nieprzywiedlną¹⁾. Ponieważ mamy $p > 1$, przeto liczba ułamkowa

$$\frac{m^2}{p^2},$$

nie mogłaby się równać żadnej liczbie całkowitej. Stwierdzamy więc, że wartość (8) na x nie może sprawdzać równania (7) i spostrzegamy, że możemy wysłowić twierdzenie następujące:

I. *Jeżeli pewna liczba całkowita n nie jest kwadratem innej liczby całkowitej, a takich liczb całkowitych mamy nieskończenie wiele, to liczba ta nie jest kwadratem zupełnym, czyli nie istnieje żadna liczba wymierna, której kwadrat równałby się powyższej liczbie a .*

Dowiedliśmy więc, że istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych, z których żadna kwadratem zupełnym nie jest.

Wynik ten możemy jeszcze uzupełnić, uzasadniając twierdzenie następujące:

II. *Żeby liczba ułamkowa, przedstawiona w postaci liczby ułamkowej nieprzywiedlnej $\frac{a}{b}$, była kwadratem zupełnym, jest konieczną rzeczą i wystarczającą, ażeby licznik i mianownik tej liczby były z osobna kwadratami zupełnymi.*

Ażeby tego dowieść, załóżmy, że mamy

$$x^2 = \frac{a}{b},$$

oznaczając przez x liczbę wymierną. Możemy zawsze przyjąć

$$x = \frac{m}{p}$$

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teoryi..., str. 145, tw. II-gie i uwaga na str. 146.

oznaczając przez

$$\frac{m}{p}$$

liczbę ułamkową nieprzywiedlną. W takim razie mielibyśmy

$$\frac{m^2}{p^2} = \frac{a}{b},$$

a. ponieważ na podstawie uwagi, którą mieliśmy sposobność uczynić już wyżej, liczba

$$\frac{m^2}{p^2}$$

będzie liczbą ułamkową nieprzywiedlną, a liczba

$$\frac{a}{b}$$

jest taką liczbą z założenia, przeto (§ 36, tw. III) zachodziłyby obie równości:

$$a = m^2 \quad \text{i} \quad b = p^2,$$

wyrażające właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Przechodzimy obecnie do przykładu, który mieliśmy podać.

Oznaczmy przez w jakąkolwiek, zupełnym kwadratem niebędącą, liczbę wymierną. W takim razie kwadrat jakiegokolwiek liczby wymiernej będzie mógł być tylko albo mniejszym albo większym od liczby w . Możemy więc podzielić zbiór liczb wymiernych na dwa zbiory (A_1) i (A_2) , określając zbiór (A_1) jako zbiór liczb wymiernych, których kwadraty mniejsze są od liczby w , a zbiór (A_2) — jako zbiór liczb wymiernych, których kwadraty większe są od tejże liczby w . Powiadam, że ten podział liczb wymiernych na dwie kategorie stanowi drugiego gatunku przekrój tych liczb. Istotnie:

A) Zbiór (A_1) jest nieskończony. Istotnie, liczba w jest od zera odmienna, ponieważ w razie przeciwnym byłaby kwadratem zupełnym. Zatem możemy wyznaczyć liczbę wymierną α_1 , od zera większą, ale mniejszą od liczby w .

Przyjmijmy liczbę α_1 tak, żeby ona także mniejszą była od jedności. Mamy tedy

$$\alpha_1^2 < \alpha_1 < w,$$

zatem liczba α_1 należy do zbioru (A_1) , a ponieważ każda liczba wymierna, od liczby α_1 mniejsza, należy także do zbioru (A_1) , przeto zbiór ten jest rzeczywiście nieskończony.

B) Zbiór (A_2) jest także nieskończony, albowiem, jeżeli oznaczmy przez α_2 liczbę wymierną, która sprawdzałaby obie nierówności

$$\alpha_2 > w \quad \text{ i } \quad \alpha_2 > 1,$$

to będziemy mieli

$$\alpha_2^2 > \alpha_2 > w,$$

zatem liczba α_2 , a tem bardziej liczby wymierne, od niej większe, należą do zbioru (A_2) .

C) Każda liczba α_1 zbioru (A_1) mniejsza jest od każdej liczby α_2 zbioru (A_2) . Istotnie, nie może zachodzić związek

$$\alpha_2 \leq \alpha_1,$$

ponieważ w takim razie mielibyśmy

$$\alpha_1^2 = \{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\}^2 = \alpha_2^2 + 2\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \leq \alpha_2^2,$$

skąd

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2,$$

co byłoby sprzeczne ze związkami

$$\alpha_1^2 < w < \alpha_2^2.$$

Z wyników uzyskanych pod A, B i C wypływa, że rozważany podział liczb wymiernych na zbiory (A_1) i (A_2) stanowi rzeczywiście przekrój zbioru liczb wymiernych. Powiadam, że przekrój ten jest przekrojem drugiego gatunku. Istotnie, przyjmijmy w zbiorze (A_1) jakąkolwiek liczbę α_1 .

Mamy tedy

$$\alpha_1^2 < w. \quad (9)$$

Oznaczmy przez α'_1 liczbę wymierną większą od α_1 , ale mniejszą od pewnej oznaczonej liczby; przyjmijmy na przykład

$$\alpha'_1 < \alpha_1 + 1. \quad (10)$$

Mamy

$$\alpha_1'^2 - \alpha_1^2 = (\alpha'_1 + \alpha_1)(\alpha'_1 - \alpha_1),$$

skąd

$$\alpha_1'^2 - \alpha_1^2 < (2\alpha_1 + 1)(\alpha'_1 - \alpha_1). \quad (11)$$

Możemy oczywiście przyjąć liczbę α'_1 taką, żeby liczba ta sprawdzała nie tylko nierówność (10), ale i nierówność

$$(2\alpha_1 + 1)(\alpha'_1 - \alpha_1) < w - \alpha_1^2.$$

W takim razie mamy

$$\alpha_1'^2 - \alpha_1^2 < w - \alpha_1^2,$$

skąd

$$\alpha_1'^2 < w.$$

Stwierdzamy więc, że do każdej liczby α_1 zbioru (A_1) możemy dobrać większą od niej liczbę α'_1 , która także do zbioru (A_1) należy.

Dowiedliśmy więc, że w zbiorze (A_1) liczba największa nie istnieje.

Pozostaje do okazania, że w zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza. W tym celu przyjmijmy w zbiorze (A_2) jakąkolwiek liczbę α_2 i oznaczmy przez α'_2 liczbę wymierną, od liczby α_2 mniejszą.

Mamy tedy

$$\alpha_2^2 - \alpha_2'^2 = (\alpha_2 + \alpha'_2)(\alpha_2 - \alpha'_2) < 2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha'_2).$$

Oczywiście możemy przyjąć liczbę α'_2 taką, żebyśmy mieli

$$2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha'_2) < \alpha_2^2 - w,$$

a w takim razie mamy

$$\alpha_2^2 - \alpha_2'^2 < \alpha_2^2 - w,$$

skąd

$$\alpha_2'^2 > w.$$

Zatem liczba wymierna α'_2 , mniejsza od liczby α_2 , należy do zbioru (A_2) . Możemy więc do każdej liczby α_2 zbioru (A_2) dobrać inną liczbę α'_2 , także do zbioru (A_2) należącą, która byłaby mniejszą od α_2 . Przekonywamy się więc, że w zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

Ostatecznie podział zbioru liczb wymiernych na zbiory (A_1) i (A_2) stanowi rzeczywiście przekrój drugiego gatunku.

Przykład poprzedzający poucza nas, że nawet drugiego gatunku przekrój zbioru liczb wymiernych tak może być oznaczony, żeby zadecydowanie do której z dwóch kategorii, na które rozważany przekrój dzieli zbiór liczb wymiernych, należy jakakolwiek,

przez symbol specyficzny ¹⁾ przedstawiona liczba wymierna w , wymagało tylko kolejnego wykonania na skończonej liczbie liczb wymiernych, do których należy liczba w , a które przedstawione są przez symbole specyficzne, skończonego układu (U) czynności, polegających albo na wykonaniu jednego z działań zasadniczych na dwóch liczbach, albo na porównaniu ilościowym dwóch liczb, z których każda jest albo jedną ze wspomnianych liczb wymiernych, albo wynikiem już wykonanych czynności z układu (U). Żeby wyrazić, iż pewien przekrój zbioru liczb wymiernych w taki właśnie sposób jest oznaczony, orzekamy, że przekrój ten jest arytmetycznie oznaczony.

Teraz nasuwa się pytanie: czy wszelki przekrój zbioru liczb wymiernych oznaczony być może arytmetycznie?

Doświadczenie poucza nas, że mając nie arytmetyczne, ale jednak całkiem precyzyjne określenie pewnego przekroju zbioru liczb wymiernych, nie zawsze potrafimy arytmetycznie oznaczyć ten przekrój. Natomiast z samej istoty pojęcia przekroju zbioru liczb wymiernych wynika, że skoro mamy jakiegokolwiek, byle precyzyjne, określenie (Ω) pewnego przekroju zbioru liczb wymiernych, to chociażbyśmy nie potrafili przekroju tego arytmetycznie oznaczyć, nie możemy nie przyjąć, że gdybyśmy rozporządzali umysłem dostatecznie potężnym i wykształconym, tobyśmy mogli rozważyć przekrój arytmetycznie oznaczyć.

Tę właśnie okoliczność wyrażamy, orzekając, że wszelki przekrój zbioru liczb wymiernych może być oznaczony arytmetycznie.

§ 62. Załóżmy, iż przy oznaczonej jednostce długości u , pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych i pewien odcinek prostoliniowy a znajdują się w takim ze sobą związku, że odcinek a nie jest ani mniejszy od żadnego odcinka prostoliniowego, którego miara równałaby się jednej z liczb pierwszej kategorii (A_1) liczb wymiernych w stosunku do przekroju (P), ani większy od żadnego odcinka, którego miarą byłaby jedna z liczb drugiej kategorii (A_2) liczb wymiernych w stosunku do tegoż przekroju.

Żeby wyrazić, iż przekrój (P) zbioru liczb wymiernych i odcinek prostoliniowy a znajdują się przy jednostce długości u , w powyższym ze sobą związku, orzekamy, że przekrój (P) i odcinek a

¹⁾ Za symbol specyficzny liczby ułamkowej uważamy symbol ilorazu licznika i mianownika, przedstawionych w numeracji dziesiętnej.