

na i kolejno wszystkie wartości całkowite od $i = 1$ aż do $i = n$. Ponieważ możemy przyjąć na n jakąkolwiek, od jedności nie mniejszą wartość całkowitą, przeto wynik, do którego doszliśmy, stanowi dowód na twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Stosując twierdzenie poprzedzające do przypadku, kiedy mamy $w = 0$, otrzymujemy twierdzenie następujące:

III. *Liczba liczb wymiennych nierównych pomiędzy sobą, większych od liczby zero, ale mniejszych od dowolnie przyjętej, od zera większej liczby wymiernej, jest nieskończenie wielka.*

Spostrzegamy natychmiast, że zachodzi także i twierdzenie następujące:

IV. *Liczba liczb wymiennych, większych od jakiegokolwiek oznaczonej liczby wymiernej, jest nieskończenie wielka.*

§ 42. Działania zasadnicze na liczbach wymiennych. Na podstawie ogólnej teorii rozdziału poprzedzającego, stworzymy teorię działań zasadniczych na liczbach wymiennych, skoro tylko określimy dodawanie i mnożenie w przypadku szczególnym, kiedy dwie tylko liczby podlegać mają jednemu z tych działań. Żeby odnośne definicje wysłowić, uważajmy dwie liczby wymierne w i w' . Oczywiście zawsze zachodzić będzie jeden z trzech przypadków następujących:

1°. Obie liczby w i w' są liczbami ułamkowymi.

2°. Jedna z nich jest pewną liczbą całkowitą k , a druga — pewną liczbą ułamkową (m, p) .

3°. Obie liczby w i w' są liczbami całkowitemi.

W pierwszym przypadku nazywamy sumą i iloczynem liczb w i w' liczby wymierne, odpowiednio równe tym liczbom ułamkowym, które na podstawie teorii liczb ułamkowych przedstawiają odpowiednio sumę i iloczyn liczb ułamkowych, którymi są odpowiednio liczby wymierne w i w' .

W drugim przypadku nazywamy sumą i iloczynem liczb wymiennych w i w' liczby wymierne, odpowiednio równe liczbom ułamkowym, które na podstawie teorii liczb ułamkowych stanowią odpowiednio sumę i iloczyn liczb ułamkowych $(k, 1)$ i (m, p) .

W trzecim przypadku nazywamy sumą i iloczynem liczb wymiennych w i w' liczby wymierne, odpowiednio równe liczbom całkowitym, które stanowią na podstawie teorii liczb całkowitych sumę i iloczyn liczb w i w' .

Definicje poprzedzające oczywiście nie są sprzeczne ani z teo-

ryą działań zasadniczych na liczbach całkowitych, ani z teorią działań zasadniczych na liczbach ułamkowych, natomiast oczywiście obowiązani jesteśmy do podania dowodu na to, że powyższe definicje czynią zadość wymaganiom, omówionym w rozdziale poprzedzającym.

W tym celu posługiwać się będziemy tą samą odpowiedniością pomiędzy liczbami wymiernymi a liczbami ułamkowymi, którą określiliśmy w paragrafie poprzedzającym, a która podała nam środek do wykazania zgodności reguł porównywania ilościowego liczb wymiernych z zasadami rozdziału II-go.

Najpierw uzasadnimy twierdzenie następujące:

I. Jeżeli oznaczymy przez w i w' dwie liczby wymierne jakiegokolwiek, przez x którąkolwiek z liczb wymiernych, przedstawiających ich sumę, przez y którąkolwiek z liczb wymiernych, przedstawiających iloczyn liczb w i w' , a przez u i u' liczby ułamkowe, odpowiednio odpowiednie liczbom wymiernym w i w' , to będziemy mieli w każdym razie

$$x = u + u' \quad (1)$$

oraz

$$y = u \cdot u'. \quad (2)$$

W przypadku, kiedy jedna przynajmniej z liczb w i w' jest liczbą ułamkową, twierdzenie poprzedzające jest bezpośredniem następstwem definicji sumy i iloczynu dwóch liczb wymiernych.

Załóżmy więc, że liczby wymierne w i w' są liczbami całkowitemi, i oznaczmy przez s i p te liczby całkowite, które na podstawie teorii liczb całkowitych stanowią odpowiednio sumę i iloczyn liczb całkowitych w i w' . Mamy tedy:

$$\left. \begin{array}{l} x = s \\ y = p \end{array} \right\} \quad (3)$$

na podstawie definicji sumy i iloczynu dwóch liczb wymiernych, z których każda jest liczbą całkowitą. Z drugiej strony w rozważonym przypadku liczbami u i u' są liczby ułamkowe $(w, 1)$ i $(w', 1)$. Mamy więc:

$$\begin{array}{l} u + u' = (s, 1) \\ u \cdot u' = (p, 1) \end{array}$$

skąd

$$\left. \begin{array}{l} u + u' = s \\ u \cdot u' = p. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Z równości (3) i (4) wynikają oczywiście równości (1) i (2). Dowiedliśmy więc, że równości (1) i (2) zachodzą w każdym razie.

Obecnie łatwo już usprawiedliwić możemy definicję, określającą sumę i iloczyn dwóch liczb wymiernych.

Ponieważ na podstawie samego brzmienia definicji działań zasadniczych na liczbach wymiernych działania te wykonalne są bez zastrzeżeń, a wyniki ich oznaczone są tylko co do wartości, przeto winniśmy tylko dowieść, że wyniki dodawania i mnożenia liczb ułamkowych zależą wyłącznie od wartości liczb wymiernych, podlegających działaniu, i są oznaczone jednoznacznie. W tym celu zachowajmy wszystkie oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się przy dowodzie związków (1) i (2), i oznaczmy przez w_1 i w'_1 dwie liczby wymierne, sprawdzające równości

$$(5) \quad \begin{cases} w_1 = w \\ w'_1 = w', \end{cases}$$

a przez u_1 i u'_1 liczby ułamkowe, odpowiednio odpowiednie liczbom w_1 i w'_1 . Jeżeli tedy oznaczmy przez x_1 którąkolwiek z liczb wymiernych, przedstawiających sumę liczb w_1 i w'_1 , a przez y_1 którąkolwiek z liczb wymiernych, przedstawiających iloczyn liczb w_1 i w'_1 , to na podstawie twierdzenia polegającego na równościach (1) i (2), będziemy mieli

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = u_1 + u'_1 \\ y_1 = u_1 \cdot u'_1. \end{cases}$$

Otóż ze względu na równości (5) i na równości następujące:

$$\begin{aligned} w &= u, & w_1 &= u_1 \\ w' &= u', & w'_1 &= u'_1, \end{aligned}$$

mamy

$$\begin{aligned} u &= u_1 \\ u' &= u'_1, \end{aligned}$$

zatem, na podstawie równości (1), (2) i (6) i teorii liczb ułamkowych, mamy

$$(7) \quad \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

Ponieważ, na podstawie definicji dodawania i mnożenia liczb wymiernych, każda liczba równa liczbie, mogącej być uważaną za sumę lub iloczyn dwóch liczb wymiernych, sama uważana być

może w pierwszym przypadku za sumę, a w drugim — za iloczyn tych liczb, przeto z równości powyższych wynika, że suma x i iloczyn y dwóch jakichkolwiek liczb wymiernych w i w' uważane być mogą odpowiednio za sumę i iloczyn każdych dwóch liczb w_1 i w'_1 odpowiednio równych liczbom w i w' ; innemi słowy, wyniki dodawania i mnożenia liczb wymiernych zależą jedynie od wartości liczb, ulegających tym działaniom. Z równości (7) wypływa także jednoznaczność dodawania i mnożenia liczb wymiernych: istotnie, równości te wyrażają, iż każde dwie liczby x i y , mogące być uważane odpowiednio za sumę i iloczyn dwóch liczb wymiernych w i w' , równają się odpowiednio liczbom x_1 i y_1 jeżeli tylko liczby te przedstawiają odpowiednio sumę i iloczyn jakichkolwiek liczb wymiernych w_1 i w'_1 , byle równych odpowiednio liczbom w i w' ; ponieważ zaś każda z liczb w i w' sama sobie jest równą, przeto z równości (6) wynika w szczególności, iż dwie liczby x i x_1 , z których każda uważana być może za sumę tych samych dwóch liczb wymiernych, podobnie jak i dwie liczby y i y_1 , z których każda uważana być może za iloczyn tych samych dwóch liczb wymiernych, są równymi sobie liczbami wymiernymi; a na tem właśnie polega jednoznaczność dodawania i mnożenia liczb wymiernych.

Ostatecznie usprawiedliwiliśmy w zupełności, przyjęte przez nas definicje działań zasadniczych na liczbach wymiernych.

Ponieważ na podstawie tw. I-szego z paragrafu poprzedzającego i tw. I-szego z paragrafu niniejszego możemy zawsze przy porównywaniu ilościowym liczb wymiernych i przy wyznaczaniu wartości wyniku któregośkolwiek z działań zasadniczych na tych liczbach zastąpić te z rozważanych liczb, które nie byłyby liczbami ułamkowemi, przez liczby ułamkowe równe tym liczbom, przeto wnosimy z twierdzeń uzasadnionych w §§ 35, 36, 37 i 38, że zachodzą twierdzenia następujące:

II. *Dodawanie liczb wymiernych posiada własności łączności i przemienności.*

III. *Jeżeli dwie liczby wymierne b i b' sprawdzają nierówność*

$$b < b',$$

to w takim razie mamy

$$a + b < a + b',$$

jakąkolwiek liczbę wymierną oznaczylibyśmy przez a .

IV. Odejmowanie liczb wymiernych wykonalne jest w razie i tylko w razie, kiedy odjemnik nie jest większy od odjemnej; w razie wykonalności, odejmowanie liczb wymiernych jest działaniem jednoznaczem; w przypadku i tylko w przypadku, kiedy odjemnik równy jest odjemnej, reszta równa się zeru.

V. Mnożenie liczb wymiernych posiada własności łączności i przemienności.

VI. W stosunku do dodawania i w stosunku do odejmowania mnożenie liczb wymiernych posiada własność rozdzielności.

VII. Żeby iloczyn liczb wymiernych równał się zeru, konieczne jest i wystarczające, żeby jeden czynnik przynajmniej równał się zeru.

VIII. Jeżeli trzy liczby wymierne a , a' i b sprowadzają nierówności

$$a < a'$$

oraz

$$b > 0,$$

to w takim razie mamy

$$a \cdot b < a' \cdot b.$$

IX. Dzielenie liczb wymiernych jest wykonalne i jest działaniem jednoznaczem w razie, kiedy dzielnik liczbie zero nie jest równy: jeżeli zaś dzielnik równa się zeru, to dzielenie wykonalne jest tylko w przypadku, kiedy dzielna także równa się zeru, ale wówczas iloraz jest całkiem nieoznaczony.

§ 43. Uważajmy jakąkolwiek liczbę ułamkową

$$(m, p).$$

Na podstawie teorii, rozwiniętej w ustępach poprzedzających, mamy

$$(m, p) \cdot p = (m, p) \cdot (p, 1) = (m \cdot p, p \cdot 1) = (m \cdot p, p) = (m, 1) = m.$$

Mamy więc

$$(m, p) \cdot p = m.$$

Z równości tej wynika, że każda liczba ułamkowa uważana być może za iloraz dzielenia licznika przez mianownik. Opierając się na tym fakcie, przyjmujemy, zgodnie ze zwyczajem powszechnie przyjętym, za symbol specyficzny liczby ułamkowej o liczniku równym liczbie całkowitej m , a o mianowniku równym liczbie

całkowitej p , symbol na iloraz podziału liczby m przez liczbę p , a więc którykolwiek z symbolów następujących:

$$m:p, \quad \frac{m}{p}, \quad m/p,$$

z których każdy czytamy: m przez p . Symbol najczęściej używany jest

$$\frac{m}{p}.$$

Symbol ten dogodniejszy jest od innych o tyle, że, posługując się tym symbolem, możemy, bez obawy nieporozumień, nie tylko umówić się, żeby we wzorach, w których zaznaczamy kombinowanie pewnej liczby ułamkowej z innymi liczbami drogą dodawania i odejmowania, nie zamykać tej liczby ułamkowej w nawiasie, co możebne jest także i przy dwóch innych symbolach, ale nadto, nawet kiedy mamy oznaczyć kombinację liczby ułamkowej

$$\frac{m}{p}$$

z drugą liczbą l drogą mnożenia lub dzielenia, możemy także nawias opuszczać, przyjmując sposób pisania, uwidoczniiony na wzorach następujących:

$$l \cdot \frac{m}{p}, \quad \frac{m}{p} \cdot l, \quad l : \frac{m}{p}, \quad \frac{m}{p} : l.$$

Obecnie możemy z łatwością wykazać, że działanie dzielenia takie, jakieśmy je określili w teorii liczb całkowitych¹⁾ (porównaj ustęp o dzieleniu w § 30-tym), nie stanowi w rzeczywistości przypadku odstąpienia od ogólnych zasad, omówionych w § 30-tym. W tym celu zwróćmy się do zagadnienia następującego: przedstawić daną liczbę ułamkową

$$\frac{m}{p}$$

w postaci sumy liczby całkowitej q i liczby ułamkowej $\frac{r}{p}$, mniejszej od jedności.

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 58.

Z warunków zadania mamy natychmiast

$$m = q \cdot p + r$$

oraz

$$r < p.$$

Zatem, w razie rozwiązalności rozważanego zadania, liczba q równa się „całkowitej części ilorazu“ dzielenia liczby m przez p , a liczba r — reszcie. Z drugiej strony, jeżeli litery q i r przedstawiają te elementy, to rozwiązaniem rozważanego zadania jest oczywiście wzór

$$q + \frac{r}{p}.$$

Możemy więc powiedzieć obecnie, że działanie, określone pod nazwą dzielenia w teorii liczb całkowitych ma na celu przedstawienie ilorazu dzielnej przez dzielnik (pojmując wyrażenie iloraz tak, jakśmy ten wyraz określili w § 31-szym) w pewnej, scharakteryzowanej przed chwilą postaci i dlatego działanie to może nosić nazwę dzielenia, nie uchybiając zasadom z § 31-go; uznajemy jednocześnie, że nazwa „całkowita część ilorazu podziału liczby całkowitej m przez liczbę całkowitą p “, którą nadajemy liczbie q jest najzupełniej właściwa; ta sama liczba q zowie się także całkowitą częścią liczby ułamkowej

$$\frac{m}{p}.$$

Co do liczby ułamkowej

$$\frac{r}{p},$$

to nadajemy jej nazwę reszty ułamkowej liczby $\frac{m}{p}$.

Liczby ułamkowe, większe od zera, ale mniejsze od jedności, zowią się ułamekami właściwymi. Możemy więc powiedzieć, że działanie dzielenia liczb całkowitych ma na celu przedstawienie ilorazu w postaci liczby całkowitej, o ile to jest możebne, a w razie, gdyby iloraz nie był ani liczbą całkowitą, ani ułamkiem właściwym, — przedstawienie go w postaci sumy liczby całkowitej i ułamka właściwego.

Suma liczby całkowitej c i ułamka właściwego $\frac{\alpha}{\beta}$ zowie się

liczbą mieszaną, liczba c — częścią całkowitą, a liczba $\frac{\alpha}{\beta}$ — częścią właściwie ułamkową rozważanej liczby mieszanej. Przy rachunkach liczbowych oznaczamy liczbę mieszaną, która jest sumą liczby całkowitej q i ułamka właściwego $\frac{r}{p}$, przez symbol postaci

$$q \frac{r}{p},$$

ale symbolem tym posługujemy się wyłącznie w razie, kiedy liczby q , r i p są liczbowo oznaczone, albowiem, w przeciwnym razie, symbol

$$q \frac{r}{p}$$

mógłby łatwo być uważany za iloczyn liczby q i ułamka $\frac{r}{p}$.

§ 44. Wielkie znaczenie praktyczne ma ta okoliczność, że istnieje ścisła analogia pomiędzy ilorazami liczb wymiernych jakiegokolwiek a ilorazami liczb całkowitych czyli liczbami ułamkowymi. Omówieniu tej analogii poświęcamy ustęp niniejszy.

Stosunkiem jakiegokolwiek liczby wymiernej a do jakiegokolwiek innej liczby wymiernej b , od zera jednak odmiennej, nazywamy iloraz $a:b$; liczba a zowie się licznikiem, a liczba b mianownikiem stosunku.

Przyjmijmy

$$p = \frac{a}{b}, \quad p' = \frac{a'}{b'}, \quad (1)$$

oznaczając przez b i b' dwie od zera odmienne liczby wymierne, a przez a i a' jakiegokolwiek dwie liczby wymierne. *Związki*

$$a \cdot b' < a' \cdot b, \quad a \cdot b' = a' \cdot b \quad \text{i} \quad a \cdot b' > a' \cdot b \quad (2)$$

są równoważne odpowiednio związkom

$$p < p', \quad p = p' \quad \text{i} \quad p > p'. \quad (3)$$

Istotnie, ze związków (1) mamy

$$p \cdot b = a, \quad p' \cdot b' = a', \quad (4)$$

skąd

$$p \cdot b \cdot b' = a \cdot b', \quad p \cdot b' \cdot b = a' \cdot b,$$

zatem, w razie istnienia pierwszego, drugiego lub trzeciego ze związków (3) zachodzić będzie (§ 42, tw. VII) odpowiednio pierwszy, drugi lub trzeci ze związków (2). Odwrotnie, jeżeli zachodzi pierwszy ze związków (2), to nie może zachodzić ani drugi, ani trzeci ze związków (3), bo w takim razie zachodziłby, wbrew założeniu, drugi lub trzeci ze związków (2); analogicznie przekonalibyśmy się, że w razie istnienia drugiego lub trzeciego ze związków (2), zachodzić musi w pierwszym przypadku drugi, a w drugim trzeci ze związków (3).

Ostatecznie związki (3) i (2) są rzeczywiście odpowiednio równoważne. Zatem reguły porównywania ilościowego stosunków liczb wymiernych niczem nie różnią się od reguł porównywania ilościowego liczb ułamkowych.

Z poprzedniego wynika, że *jakakolwiek od zera odmienną liczbę wymierną oznaczilibyśmy przez λ , mamy*

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \lambda}{b \cdot \lambda}$$

jakakolwiek wartość miałaby liczba a , byleby liczba b była od zera odmienna; jeżeli więc oznaczymy przez

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$$

n stosunków, przez w jakąkolwiek liczbę wymierną oraz ogólnie przez λ_i iloraz podziału liczby w przez liczbę b_i , to mamy

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{\lambda_i \cdot a_i}{w} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Zatem, analogicznie do liczb ułamkowych, *możemy zawsze sprowadzić do wspólnego mianownika jakąkolwiek liczbę danych stosunków, ale wbrew temu, co zachodzi przy liczbach ułamkowych, możemy przyjąć za wspólny mianownik dowolnie przyjętą, byle od zera odmienną liczbę wymierną w .*

Wzór na sumę lub różnicę dwóch stosunków $\frac{a}{b}$ i $\frac{a'}{b'}$ możemy przedstawić w postaci analogicznej do wzoru na sumę lub różnicę dwóch liczb ułamkowych. Istotnie przyjmijmy, jak wyżej,

$$p = \frac{a}{b}, \quad p' = \frac{a'}{b'}.$$

Po sprowadzeniu stosunków tych do wspólnego mianownika w , otrzymamy:

$$p = \frac{a_1}{w}, \quad p' = \frac{a'_1}{w},$$

skąd

$$p \cdot w = a_1$$

$$p' \cdot w = a'_1,$$

zatem

$$(p + p') w = a_1 + a'_1$$

oraz

$$(p - p') w = a_1 - a'_1,$$

zakładając, że mamy

$$p \geq p'.$$

Z równości poprzedzających mamy

$$p + p' = \frac{a_1 + a'_1}{w}$$

$$p - p' = \frac{a_1 - a'_1}{w},$$

jak gdyby chodziło o liczby ułamkowe.

Zachowując nadal oznaczenia poprzedzające, mamy

$$(p \cdot p') \cdot (b \cdot b') = a \cdot a'$$

na podstawie związków (4) i własności przemienności i łączności mnożenia. Z uzyskanej równości wynika

$$p \cdot p' = \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'}$$

czyli

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} \quad (5)$$

znowu *analogicznie do znanych reguł z teorii liczb ułamkowych.*

Przyjmijmy w równości poprzedzającej

$$a = b' = 1,$$

wspomniana równość przyjmie tedy postać następującą:

$$\frac{1}{b} \cdot a' = \frac{a'}{b},$$

zatem iloraz podziału jakiegokolwiek liczby wymiernej a' przez liczbę wymierną b , jakąkolwiek, byle od zera odmienną, równa się iloczynowi tej liczby przez iloraz podziału jedności przez liczbę b , czyli przez odwrotność liczby b .

Analogia, której istnienie stwierdziliśmy w omówionych już przypadkach, utrzymuje się i przy dzieleniu stosunków: mamy

$$(6) \quad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'}$$

pod warunkami, że nie tylko liczby b i b' , ale także i liczba a' jest od zera odmienna. Istotnie mamy

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'}\right) \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{b'}{a'} \cdot \frac{a'}{b'}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b' \cdot a'}{a' \cdot b'} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b},$$

skąd wynika, że iloczyn

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'}$$

równa się ilorazowi

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'},$$

a na tem właśnie polega związek (6).

§ 45. Obecnie pragniemy zestawić wyniki, do których dochodzimy, zastosowując oderwaną teorię liczb wymiernych, wyłożoną w tym rozdziale, do problemu mierzenia odcinków prostoliniowych.

Oczywiście przywiedzeni jesteśmy do przyjęcia definicji następującej:

Miarą jakiegokolwiek odcinka a , współmiernego z odcinkiem nie zerowym u , przyjętym za jednostkę długości, nazywamy każdą liczbę wymierną w , równą liczbie ułamkowej, której licznik i mianownik oznaczają odpowiednio, ile razy pewna wspólna podwielokrotność odcinków a i u mieści się w każdym z tych odcinków.

Po przyjęciu tej definicji zachodzą twierdzenia następujące:

1°. Jeżeli oznaczymy przez a i a' dwa odcinki prostoliniowe, współmierne z jednostką, a przez w i w' ich miary, to związki

$$a > a', \quad a = a' \quad \text{ i } \quad a < a'$$

są zawsze odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$w > w', \quad w = w' \quad \text{i} \quad w < w'.$$

2°. Odcinek, stanowiący sumę kilku odcinków odpowiednio współmiernych z jednostką, także jest z jednostką współmierny, a miara jego równa się sumie miar odcinków, stanowiących składniki rozważanej sumy odcinków.

3°. Jeżeli miara pewnego odcinka a , współmiernego z jednostką u' , równa się pewnej liczbie wymiernej w , a miara odcinka u' , w razie przyjęcia za jednostkę innego, nie zerowego odcinka u równa się pewnej liczbie wymiernej w' , to odcinek a współmierny będzie z odcinkiem u , a miara jego, gdy przyjmiemy odcinek u za jednostkę, będzie się równała iloczynowi liczb w i w' .

Twierdzenia te stanowią oczywiście tylko nową postać, w której wyrażamy twierdzenia już uzasadnione w rozdziale IV-tym; jest to postać, która odpowiada nowym warunkom, w których znajdujemy się obecnie przez to, że w przeciwieństwie do tego, co zachodziło we wspomnianym rozdziale, nie mamy potrzeby wytwarzać sobie pojęcia liczby wymiernej, lecz posiadamy je już w postaci całkiem wyrobionej i logicznie niezależnej od problemu mierzenia odcinków prostoliniowych. Na przykład fakt, który wyraziliśmy w rozdziale IV-tym w postaci twierdzenia, według którego liczba ułankowa $\frac{m}{p}$ mniejsza jest od liczby ułankowej $\frac{m'}{p'}$, równa się jej lub jest od niej większa, zależnie od tego, czy mamy

$$m \cdot p' < m' \cdot p, \quad m \cdot p' = m' \cdot p \quad \text{lub} \quad m \cdot p' > m' \cdot p,$$

wyraża się obecnie w postaci pierwszego z trzech twierdzeń wysłownionych przed chwilą.

Sądźmy, że czytelnik na podstawie podanych wskazówek sam z łatwością rozwinie szczegółowe dowody trzech powyższych twierdzeń albo raczej wyrazi w formie, odpowiadającej warunkom obecnym, dowody już podane w rozdziale IV-tym, ale wyrażone tam w formie, zastosowanej do odmiennych warunków, w których znajdowaliśmy się wówczas.

Dalsze szczegóły możemy zatem pominąć, a to tem bardziej, że w jednym z rozdziałów późniejszych, w którym wyłożymy ogólną teorię mierzenia wielkości, jeszcze powrócimy do problemu mierzenia odcinków.

§ 46. Teorię liczb wymiernych, którą wyłożyliśmy w ustępach poprzedzających, przedstawiliśmy jako wynik oderwania od szczególnego problemu mierzenia odcinków prostoliniowych pewnych pojęć, do których badanie tego problemu przywiodło nas było. Taki sposób traktowania przedmiotu odpowiada w zupełności historycznemu przebiegowi ewolucyi pojęcia liczby wymiernej i z tej przyczyny wydaje się nam najstosowniejszym zarówno ze stanowiska filozoficznego, jak też i ze stanowiska pedagogicznego. Pragniemy jednak zaznaczyć, że już z samej teorii liczb całkowitych możemy zaczerpnąć myśl skonstruowania pojęcia liczby ułamkowej a więc także i myśl skonstruowania ogólnego pojęcia liczby wymiernej.

Oznaczmy przez a , b , a' i b' cztery liczby całkowite, zakładając przytem, że żadna z liczb b i b' nie równa się zeru. Załóżmy nadto, że liczba a podzielna jest przez b , a liczba a' — przez liczbę b' . W takim razie, na podstawie samej tylko teorii liczb całkowitych, każdy z symbolów

$$(1) \quad a:b \text{ i } a':b'$$

mieć będzie pewne znaczenie: pierwszy z nich przedstawiać będzie iloraz podziału liczby a przez liczbę b , a drugi — iloraz podziału liczby a' przez liczbę b' . Na podstawie znanych twierdzeń z teorii liczb całkowitych z łatwością uzasadnimy twierdzenia następujące:

1°. *Związki*

$$(2) \quad a:b < a':b'; \quad a:b = a':b'; \quad a:b > a':b'$$

są odpowiednio równoważne związkom następującym

$$(3) \quad |a \cdot b' < a' \cdot b; \quad a \cdot b' = a' \cdot b; \quad a \cdot b' > a' \cdot b.$$

2°. Jeżeli oznaczmy przez w jakąkolwiek, od zera odmienną wspólną wielokrotność liczb b i b' , i przyjmiemy

$$\begin{aligned} w &= k \cdot b \\ w &= k' \cdot b', \end{aligned}$$

to będziemy mieli

$$a:b + a':b' = (k \cdot a + k' \cdot a'):w.$$

3°. *Mamy*

$$(a:b) \cdot (a':b') = (a \cdot a'):(b \cdot b').$$

Do twierdzeń poprzedzających możemy nawiązać pewną uwagę, którą jednak zdołamy wysłowić w sposób precyzyjny i prosty tylko

po wprowadzeniu pewnych symbolów i wyrażeń. Zwracamy się zatem najpierw do określenia tych symbolów i wyrażeń.

Oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich elementów, z których każdy jest układem dwóch liczb całkowitych, uważanych w oznaczonym porządku.

Żeby oznaczyć pewien element zbioru (Z) , należy oczywiście określić nie tylko te dwie liczby całkowite, które razem ten element tworzą, ale jeszcze oznaczyć, która z nich uważana ma być za pierwszą, a przez to samo, która ma być uważana za drugą; pierwszej z takich dwóch liczb nadamy nazwę wyrazu pierwszego, a drugiej — wyrazu drugiego elementu zbioru (Z) .

Oznaczając przez m pierwszy wyraz, a przez p drugi wyraz pewnego elementu zbioru (Z) , przyjmiemy na sam ten element symbol następujący:

$$(m, p),$$

który czytamy: m przecinek p .

Oznaczmy przez (C) zbiór tych szczególnych elementów zbioru (Z) , z których każdy czyni zadość warunkom następującym:

1°. Drugi jego wyraz jest liczbą całkowitą, od zera odmienną.

2°. Pierwszy wyraz podzielny jest przez drugi.

Elementom zbioru (C) moglibyśmy nadać charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem i określić działania zasadnicze dla uzyskanego w ten sposób nowego rodzaju wielkości, ustanawiając definicje następujące:

1°. Oznaczony element zbioru (C) i oznaczoną liczbę całkowitą x uważamy za rzeczy wzajemnie sobie odpowiadające w razie i tylko w razie, kiedy iloraz podziału pierwszego wyrazu, rozważanego elementu zbioru (C) przez drugi wyraz równa się właśnie liczbie x .

2°. Oznaczony element (a, b) zbioru (C) uważamy za mniejszy od drugiego oznaczonego elementu (a', b') tegoż zbioru, za równy jemu albo za większy od niego zależnie od tego, czy liczba całkowita x , odpowiadająca elementowi (a, b) , mniejsza jest od liczby całkowitej x' , odpowiadającej elementowi a', b' , równa się tej liczbie lub jest od niej większa.

3°. Sumą dwóch elementów (a, b) i (a', b') zbioru (C) nazywamy każdy element tego zbioru, który odpowiada liczbie całko-

witej, stanowiącej sumę liczb całkowitych, odpowiadających odpowiednio elementom (a, b) i (a', b') .

40. Iloczynem dwóch elementów (a, b) i (a', b') zbioru (C) nazywamy każdy element zbioru (C) , który odpowiada liczbie całkowitej, stanowiącej iloczyn liczb całkowitych, odpowiadających odpowiednio elementom (a, b) i (a', b') .

Uwagę, którą mieliśmy wyżej na myśli, możemy obecnie wyrazić w sposób następujący:

Na podstawie wyżej przytoczonych twierdzeń o ilorazach liczb całkowitych, definicje powyższe, o ile chodzi o nadanie charakteru wielkości elementom zbioru (C) i o określenie działań zasadniczych w tych elementach, równoważne są definicyjom następującym:

I. *Element (a, b) zbioru (C) uważamy za mniejszy od drugiego elementu (a', b') tegoż zbioru, za równy temu elementowi lub za większy od niego, zależnie od tego, czy mamy*

$$a \cdot b' < a' \cdot b, \quad a \cdot b' = a' \cdot b \quad \text{lub} \quad a \cdot b' > a' \cdot b.$$

II. *Sumą dwóch elementów (a, b) i (a', b') zbioru (C) nazywamy każdy element tego zbioru, równy elementowi*

$$(k \cdot a + k' \cdot a', w),$$

gdzie oznaczyliśmy przez w od zera odmienną wspólną wielokrotność liczb b i b' , przyjmując jednocześnie

$$w = k \cdot b \quad \text{oraz} \quad w = k' \cdot b'.$$

III. *Iloczynem dwóch elementów (a, b) i (a', b') zbioru (C) nazywamy każdy taki element tego zbioru, który równa się elementowi*

$$(a \cdot a', b \cdot b').$$

Uwaga, którą uczyniliśmy, swoją drogą powoduje uwagę następującą: definicje powyższe nie zatraciłyby treści nawet w takim razie, gdybyśmy uważali symbole (a, b) i (a', b') jako oznaczające niekoniecznie tylko dwa elementy zbioru (C) , ale dwa elementy jakiegokolwiek zbioru (Z) . Kierując się tedy zasadą, której wielka płodność udowodniona jest historią rozwoju wiedzy, a która polega na tem, żeby każdą nową myśl, którą przy badaniach naukowych napotykamy, opracować ze stanowiska najbardziej ogólnego, zadajemy sobie pytanie następujące: czy nie byłoby możebne zastąpić w definicyjach I, II, III zbiór (C) przez szerszą część zbioru (Z) albo może nawet przez sam zbiór (Z) ?

Powiadam najpierw, że zbioru (C) nie możemy zastąpić w tych definicyach przez cały zbiór (Z) . Istotnie, przyjmijmy chwilowo, że omawiane definicje odnoszą się do przypadku, w którym uważamy symbole (a, b) i (a', b') za dwa jakiegokolwiek elementy zbioru (Z) . W takim razie przyjęta definicja równości dwóch elementów zbioru (Z) , doprowadziłaby między innymi do tego wniosku, że każdy element zbioru (Z) równy jest elementowi $(0, 0)$, którego oba wyrazy równają się zeru. Mielibyśmy więc

$$(m, p) = (0, 0) \text{ oraz } (m', p') = (0, 0),$$

jakiegokolwiek liczby całkowite oznaczylibyśmy przez m, p, m' i p' . Ponieważ zaś liczby te możemy tak dobrać, żebyśmy mieli

$$m \cdot p' \neq m' \cdot p,$$

przeto powyższe równości niekoniecznie pociągałyby za sobą równość

$$(m, p) = (m', p'),$$

jakby tego wymagała jedna z zasad, do których postanowiliśmy zawsze stosować się przy określaniu równości. Usuńmy tedy element $(0, 0)$ ze zbioru (Z) i oznaczmy przez (Z_1) zbiór, w który przechodzi wówczas zbiór (Z) .

Łatwo przekonalibyśmy się, że gdybyśmy w definicji I-szej zastąpili zbiór (C) przez zbiór szerszy (Z_1) , to nie zaszłaby żadna okoliczność niezgodna z ogólnymi zasadami, omówionymi w rozdziale II-gim. Natomiast zastępując w definicji III-ej zbiór (C) przez zbiór (Z_1) , doszlibyśmy do wyniku sprzecznego z jedną z zasad, do których postanowiliśmy stale zastosowywać się w rozdz. V-tym. Istotnie, oznaczmy przez m i p dwie od zera odmienne liczby całkowite i uważajmy iloczyn następujący:

$$(m, 0) \times (0, p). \quad (3)$$

Ponieważ każdy z symbolów $(m, 0)$ i $(0, p)$ przedstawia jeden z elementów zbioru (Z_1) , przeto, gdybyśmy w definicji III-ej zastąpili zbiór (C) przez zbiór (Z_1) , to na podstawie definicji tej i w razie wykonalności mnożenia, zaznaczonego we wzorze (3), użyłobyśmy na wartości rozważanego iloczynu wyrażenie $(0, 0)$. Ale element $(0, 0)$ zbioru (Z) do zbioru (Z_1) nie należy, a wynikiem jakiegokolwiek działania na elementach zbioru (Z_1) może tylko być, na podstawie zasad, omówionych w § 25 rozdz. V-go, tylko pewien

element tegoż zbioru. Zatem, w razie zastąpienia w definicji III-ej zbioru (C) przez zbiór (Z_1) mnożenie, zaznaczone we wzorze (3), byłoby niewykonalne, skąd wypływa, że wbrew zasadom rozdz. V-go, działanie mnożenia elementów zbioru (Z_1) nie byłoby wykonalne bez zastrzeżeń. Stwierdzamy więc, iż, zgodnie z zapowiedzią, doszlibyśmy do sprzeczności z zasadami, do których postanowiliśmy stale zastosowywać się w rozdz. V-tym, gdybyśmy w definicji III-ej zastąpili zbiór (C) przez zbiór (Z_1) .

Z powyższych uwag wynika, co następuje: pragnąc zastąpić w definicjach I-szej, II-giej i III-ej zbiór (C) przez możliwie szeroki podzbiór zbioru (Z) , możemy tylko myśleć o zastąpieniu zbioru (C) albo przez ten zbiór (W) , w który przeszedłby zbiór (Z) po usunięciu z niego wszystkich elementów postaci $(m, 0)$, albo znów przez zbiór (W_1) , w który przemieniłby się zbiór (Z) po usunięciu z niego wszystkich elementów postaci $(0, p)$. Ponieważ jednak zbiór (C) obejmuje elementy postaci $(0, p)$ i z tej przyczyny nie jest podzbiorem zbioru (W_1) , przeto teoria uzyskana, zastępując w definicjach I-szej, II-giej i III-ej zbiór (C) przez zbiór (W_1) nie mogłaby być poczytywana za rozszerzenie teorii zbioru (C) , która znów stanowi oczywiście tylko pewną postać teorii liczb całkowitych. Wobec tego pozostaje tylko do zbadania, czy w definicjach I-szej, II-giej i III-ej nie moglibyśmy zastąpić zbioru (C) przez zbiór (W) , a więc zbiór, wynikający ze zbioru (Z) drogą usunięcia z niego elementów postaci $(m, 0)$. Podstawienie to jest najzupełniej możebne i przywodzi oczywiście do zwykłej, poprzednio już w tym rozdziale wyłożonej, teorii liczb ułamkowych, a więc i do teorii liczb wymiernych wogóle.

Czytelnik osądzi zapewne, że wskazana w tym paragrafie droga do nabycia ogólnego pojęcia liczby wymiernej jest bardzo nienaturalna. Sąd taki jest niezawodnie najzupełniej uzasadniony, jak to wynika już z tego, iż teoria liczb wymiernych rozwinęła się w rzeczywistości w sposób zgoła odmienny. Nie należałoby jednak stąd wnosić, żeby rozważania obecnego paragrafu były zbyteczne. Rozważania te obeznały nas na łatwym przykładzie z taką metodą rozszerzenia nabytych już pojęć, która z pożytkiem zastosowana być może we wielu przypadkach.
