

III. Odcinki prostoliniowe uważane za wielkości.

§ 11. Odcinkom prostoliniowym (albo krócej „odcinkom“) nadajemy charakter oznaczonej klasy wielkości na podstawie definicyi następujących:

1°. Dwa odcinki zowią się równymi sobie, kiedy drogą prostego przeniesienia jednego z nich, albo obu, możemy doprowadzić je do zupełnego zlania się ze sobą.

2°. Jeżeli pewien odcinek, b , nie równający się pewnemu innemu odcinkowi a , jest sam częścią tego odcinka, albo równa się jego części, to okoliczność tę wyrażamy w sposób dwojaki, albo:

α) Odcinek b mniejszy jest od odcinka a ,

albo:

β) Odcinek b większy jest od odcinka a .

Definicje poprzedzające oczywiście najzupełniej czynią zadość zasadom § 8-go.

Wyrażenie odcinek oznaczonej długości oznacza którykolwiek z odcinków sprawdzających pewien taki warunek lub układ warunków, któremu tylko równe pomiędzy sobą odcinki czynią zadość.

§ 12. Uważajmy dwa odcinki a i b i oznaczmy przez a' trzeci odcinek, równy odcinkowi a , jakkolwiek położony w przestrzeni, mogący nawet zlewać się z odcinkiem a . Jeżeli przedłużymy odcinek a' z któregośkolwiek końca o odcinek równy odcinkowi b , to każdy odcinek równy odcinkowi, jaki tworzy odcinek a z tem przedłużeniem, stanowi to, co nazywamy wynikiem dodania odcinka b do odcinka a , albo sumą odcinków a i b , i co oznaczamy przez symbol

$$a + b.$$

Jeżeli każdy z dwóch odcinków c i c_1 sprawdza definicję wyniku dodania oznaczonego odcinka b do oznaczonego odcinka a , to

odcinki c i c_1 są sobie równe. Istotnie, na odcinku c znajdzie się pewien punkt B , który podzieli go na dwa odcinki AB i BC odpowiednio równe odcinkom a i b , analogicznie na odcinku c_1 znajdzie się pewien punkt B_1 , który podzieli go na dwa odcinki A_1B_1 i B_1C_1 także odpowiednio równe odcinkom a i b . Przenieśmy figurę $A_1B_1C_1$ w takie położenie, żeby punkty A_1 i B_1 złożyły się odpowiednio z punktami A i B , co uskutecznione być może, albowiem odcinki AB i A_1B_1 są sobie równe, jako równe z osobna odcinkowi a . Oznaczamy obecnie nowe położenie punktu C_1 przez C'_1 . Punkt C'_1 będzie musiał leżeć na prostej nieograniczonej, przechodzącej przez punkty A i B i będzie od punktu A oddzielony przez punkt B . Z tego wynika, że punkty C'_1 i C położone będą po tej samej stronie punktu B . Ponieważ zaś odcinki BC i BC'_1 muszą oczywiście być sobie równe, przeto punkt C'_1 musi złożyć się z punktem C , skąd wynika natychmiast, że odcinki c i c_1 są rzeczywiście sobie równe. Dowiedliśmy w ten sposób jednoznaczności¹⁾ dodawania odcinków.

Ponieważ rozumowanie poprzedzające oczywiście mogłoby być przeprowadzone bez żadnej zmiany, gdybyśmy, nie zmieniając określenia odcinka c , określili odcinek c_1 jako wynik dodania odcinka a do odcinka b , przeto możemy wysłowić twierdzenie następujące: *jakikolwiek byłyby odcinki a i b , wynik dodania odcinka b do a równa się wynikowi dodania odcinka a do b , co symbolicznie wyrażamy równością*

$$a + b = b + a.$$

Twierdzenie poprzedzające wyraża własność przemienności²⁾ działania dodawania odcinków. Ponieważ, w stosunku do sumy dwóch odcinków, role logiczne tych odcinków, na podstawie twierdzenia poprzedzającego nie różnią się od siebie, przeto, w stosunku do sumy, rozważane odcinki zowią się składnikami.

¹⁾ Oświadczamy wogóle, że pewna kombinacja oznaczonych przedmiotów określona jest jednoznacznie albo ma własność jednoznaczności, jeżeli w znaczeniu, zależnem oczywiście od natury rozważonych przedmiotów, wynikami takiej kombinacji mogą być tylko równe sobie rzeczy.

²⁾ Jeżeli, w stosunku do wyniku pewnej kombinacji oznaczonych przedmiotów, porządek, w którym ewentualnie moglibyśmy te przedmioty ułożyć, jest obojętny, to okoliczność tę wyrażamy krótko, orzekając, że rozważana kombinacja ma własność przemienności.

Pojęcie sumy kilku odcinków, uważanych w oznaczonym porządku, wysnuwamy z pojęcia sumy dwóch odcinków najzupełniej tak samo, jak wysnuliśmy pojęcie sumy kilku liczb całkowitych z pojęcia sumy dwóch liczb całkowitych¹⁾. Za symbol sumy kilku odcinków $a_1, a_2, \dots a_n$ uważanych w porządku, w jakim je wymieniliśmy, przyjmujemy symbol

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Suma oznaczonych odcinków, analogicznie do sumy oznaczonych liczb całkowitych, posiada własność przemienności, t. j. nie zależy od porządku, w którym te odcinki czyli składniki sumy dodajemy do siebie.

Twierdzenie to sprowadzamy najzupełniej taką samą metodą, jak w teorii liczb całkowitych, do przypadku trzech składników, a zatem do twierdzenia następującego: jeżeli w sumie trzech odcinków przemienimy porządek dwóch ostatnich składników, to wynik dodawania nie ulegnie zmianie. Ale to ostatnie twierdzenie winniśmy uzasadnić metodą, specjalnie do sum odcinków dostosowaną. W tym celu oznaczmy przez a, b i c trzy odcinki i uważajmy sumę

$$a + b + c.$$

Odcinek, który ją przedstawia, możemy wyznaczyć w sposób następujący: na dowolnie przyjętej prostej nieograniczonej (Δ) przyjmujemy cztery punkty A, B, C i D w taki sposób, żeby punkt, przemieszczający się po prostej (Δ) od punktu A do punktu D , napotkał, zanim dojdzie do punktu D , punkty B i C , i to w porządku, w którym te punkty wymieniliśmy, i żeby nadto odcinki

$$AB, BC, CD$$

równały się odpowiednio odcinkom a, b i c . Odcinek AD przedstawiać będzie w takim razie sumę

$$a + b + c.$$

Mamy oczywiście

$$a + b + c = AD = AB + BD$$

oraz

$$BD = b + c.$$

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 31, § 15.

Mamy zatem

$$a + b + c = a + (b + c)^1. \quad (1)$$

Rozumowanie poprzedzające stanowi oczywiście także dowód na to, że mamy

$$a + c + b = a + (c + b), \quad (2)$$

a ponieważ

$$b + c = c + b,$$

przeto, ze związków (1) i (2) mamy

$$a + b + c = a + c + b,$$

o co właśnie chodziło.

Teoria odejmowania odcinków wynika z teorii dodawania tychże najzupełniej tak samo, jak teoria odejmowania liczb całkowitych z teorii ich dodawania, należy tylko we wspomnianej teorii zastąpić liczby całkowite przez odcinki²⁾; określamy więc resztę odejmowania pewnego odcinka b od oznaczonego odcinka a jako odcinek x , sprawdzający związek

$$b + x = a; \quad (3)$$

odcinkowi a nadajemy nazwę odjemnego, a odcinkowi b — odjemnika; na resztę rozważanego odejmowania przyjmujemy symbol

$$a - b;$$

równość następująca

$$x = a - b$$

równoważną jest zatem równości (3). Odejmowanie odcinków jest oczywiście wykonalnem, jeżeli odjemnik mniejszy jest od odjemnego; żeby, analogicznie do tego, co zachodzi przy liczbach całkowitych, odejmowanie odcinków było wykonalne i w razie równości odjemnego i odjemnika, umawiamy się, że uważać będziemy punkt geometryczny za odcinek zerowy i określamy sumę odcinka zerowego i jakiegokolwiek innego odcinka a jako odcinek równy odcin-

¹⁾ Przy kombinowaniu odcinków posługujemy się nawiasami według takich samych reguł jak przy kombinowaniu liczb. (Zob. Zaremba. Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych, str. 20, § 12).

²⁾ Porównaj dalsze rozważania tego ustępu z rozdziałem o odejmowaniu w dziełku mojem, Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych.

kowi a ; z przyjętych definicyi wynika oczywiście, że warunek konieczny i wystarczający wykonalności odejmowania w teorii odcinków polega na tem, żeby odjemnik nie był większy od odjemnego.

Umawiamy się, że odcinek zerowy uważać będziemy jako mniejszy od każdego odcinka nie zerowego. Spostrzegamy natychmiast, że ta umowa nie jest sprzeczna z zasadami § 8-go.

Czytelnik udowodni z największą łatwością, że jakiegokolwiek odcinki oznaczylibyśmy przez x , x' i b , to, w razie nierówności

$$x > x'$$

zachodziłaby także nierówność

$$b + x > b + x'.$$

Na podstawie tego twierdzenia łatwo możemy dowieść, że działanie odejmowania odcinków posiada własność jednoznaczności, podobnie jak w teorii liczb całkowitych.

§ 13. Jeżeli pewien odcinek a równa się sumie tylu odcinków równych pewnemu innemu odcinkowi d , ile wynosi pewna liczba całkowita n , to okoliczność tę wyrażamy w postaci równości

$$(4) \quad a = n \cdot d,$$

którą czytamy: a równa się n razy d . Definicja ta ma oznaczoną treść, o ile liczba całkowita n nie jest mniejszą od liczby „dwa”. Żeby jednak związek (4) nie tracił znaczenia nawet w przypadkach, kiedy liczba n równa jest zeru albo jedności, umawiamy się, że uważać będziemy symbol

$$0 \cdot d$$

jako oznaczający odcinek zerowy, a symbol

$$1 \cdot d,$$

jako oznaczający sam odcinek d .

Jeżeli dwa odcinki a i d sprawdzają związek postaci (4), gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, to odcinek a zowie się wielokrotnością odcinka d , a odcinek d — podwielokrotnością odcinka a . W dziełach dawniejszych odcinek d ma także nazwę miary odcinka a , ale wyrażenie to powinno być odrzucone jako niestosowne, ponieważ obecnie używamy nazwy miara odcinka a w znaczeniu zgoła odmiennem.

Jeżeli dwa odcinki a i b posiadają pewną wspólną podwielokrotność d , to odcinki te zowią się *współmiernymi*. Ponieważ oświadczyliśmy, że w razie związku (4) nazwę miary odcinka a dla odcinka d uważamy za niestosowną, to powinniśmy byli konsekwentnie zastąpić w definicyi poprzedzającej wyraz „współmierne“ przez inne wyrażenie. Nie uczynimy jednak tego, ponieważ wyraz „współmierne“ w powyższem znaczeniu powszechnie już się przyjął, ale dodajemy, że wyrażenie „względnie wymierne“ wydawałoby się nam daleko odpowiedniejsze.

Ponieważ wszelka podwielokrotność wspólnej podwielokrotności dwóch odcinków *współmiernych* jest sama także wspólną ich podwielokrotnością, przeto dwa odcinki *współmierne* posiadają nieskończenie wiele wspólnych podwielokrotności.

Podstawowe znaczenie ma ta okoliczność, że *pary niewspółmiernych odcinków istnieją*.

Żeby się przekonać o słuszności tego twierdzenia, koniecznem jest, żebyśmy przeprowadzili szereg rozważań, opartych na tak zwanym aksjomacie Archimedesesa, a opiewającym jak następuje:

Jeżeli oznaczymy przez a i b dwa odcinki, z których b nie jest odcinkiem zerowym, to zawsze istnieć będzie taka liczba całkowita n , żebyśmy mieli

$$n \cdot b > a. \quad (5)$$

Ponieważ, przy zachowaniu oznaczeń poprzedzających, mamy w każdym razie

$$0 \cdot b \leq a,$$

(gdzie równość zachodzi tylko w razie, jeżeli odcinek a jest odcinkiem zerowym), przeto istnieje zawsze przynajmniej jedna liczba całkowita p , która sprawdza nierówność

$$p \cdot b \leq a, \quad (6)$$

jakikolwiek odcinki oznaczylibyśmy przez a i b .

Załóżmy, że odcinek b nie jest odcinkiem zerowym. W takim razie, na podstawie aksjomatu Archimedesesa, istnieć będzie także liczba całkowita n , sprawdzająca nierówność (5). Z nierówności (5) i (6) mamy

$$p < n.$$

Z nierówności tej wynika, że liczba takich wartości liczby całkowitej p , które sprawdzają nierówność (6) jest skończona. Za-

tem, pomiędzy liczbami, które przedstawiają te wartości liczby p , znajdzie się pewna największa liczba¹⁾ i . Liczba ta oczywiście sprawdzać będzie oba związki następujące:

$$(6) \quad \begin{cases} (i+1) \cdot b > a \\ i \cdot b \leq a \end{cases}$$

i będzie jedyną liczbą całkowitą tę własność mającą. Możemy więc wysłowić twierdzenie następujące: *jakikolwiek odcinek oznaczylibyśmy przez a , jeżeli tylko oznaczymy przez b odcinek nie zerowy, to zawsze istnieć będzie jedna jedyna liczba całkowita i , sprawdzająca jednocześnie każdy ze związków (6).*

Różnica

$$(7) \quad a - ib$$

zowie się resztą podziału odcinka a na części równe odcinkowi b . Reszta ta jest mniejsza od odcinka b , ponieważ w razie przeciwnym zachodziłby oczywiście, wbrew definicyi liczby całkowitej i , związek następujący:

$$(i+1)b \leq a.$$

Załóżmy, że pewien odcinek c jest resztą podziału pewnego odcinka a na części równe pewnemu odcinkowi b . W takim razie odcinki a i b z jednej strony, a odcinki b i c z drugiej, tylko jednocześnie współmiernymi być mogą, a w razie współmierności, zbiór wspólnych podwielokrotności odcinków a i b zlewa się ze zbiorem wspólnych podwielokrotności odcinków b i c . Istotnie, z definicyi odcinka c wynika, że mamy

$$(8) \quad a = i \cdot b + c$$

oznaczając przez i stosownie dobraną liczbę całkowitą. Gdyby więc pewien odcinek d był wspólną podwielokrotnością odcinków b i c i mieścił się m razy w odcinku b a p razy w odcinku c , to mielibyśmy

$$a = (i \cdot m + p) d.$$

Odcinek d byłby zatem podwielokrotnością odcinka a , a więc jako podwielokrotność odcinka b , byłby wspólną podwielokrotnością odcinków a i b .

Załóżmy teraz, iż pewien odcinek δ jest wspólną podwielo-

¹⁾ Zaremba. Zarys pierwszych zasad teoryi liczb całkowitych, str. 15 i 16.

krotnością odcinków a i b . W takim razie zachodzić będą związki postaci następującej:

$$\left. \begin{aligned} a &= k \cdot \delta, \\ b &= n \cdot \delta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie oznaczyliśmy przez k i n dwie liczby całkowite, a ponieważ, ze związku (8), mamy

$$c = a - i \cdot b,$$

przeto mamy także

$$c = (k - n \cdot i) \delta. \quad (10)$$

Związki (9) i (10) wyrażają, że odcinek δ jest wspólną podwielokrotnością odcinków b i c .

Wyniki, do których doszliśmy, możemy oczywiście łącznie wyrazić w postaci twierdzenia. o którego usasadnienie chodziło.

Przechodzimy obecnie do sprawy wyznaczania drogą konstrukcyi geometrycznej jednej ze wspólnych podwielokrotności dwóch odcinków w razie ich współmierności i najpierw czynimy uwagi następujące:

1°. Dwa odcinki zerowe są oczywiście zawsze współmierne, a każdy dowolnie przyjęty odcinek stanowi jedną z ich wspólnych podwielokrotności.

2°. Jeżeli jeden z dwóch odcinków a i b , powiedzmy a , nie jest odcinkiem zerowym, a drugi b , albo równa się odcinkowi a , albo jest odcinkiem zerowym, to w takim razie odcinki a i b są współmierne, gdyż oczywiście odcinek a sam stanowi jedną ze wspólnych podwielokrotności powyższych odcinków. Spostrzegamy jednocześnie natychmiast, że odcinek a stanowi największą ze wspólnych podwielokrotności rozważanych odcinków i że zbiór wszystkich podwielokrotności tych odcinków zlewa się ze zbiorem podwielokrotności ich największej wspólnej podwielokrotności, mianowicie odcinka a .

Ze względu na powyższe uwagi, winniśmy rozważać w dalszym ciągu tylko przypadek, kiedy chodzi o wyznaczenie wspólnej podwielokrotności dwóch odcinków nierównych sobie, z których żaden nie jest odcinkiem zerowym. Oznaczmy większy z tych odcinków przez a , a mniejszy przez b , następnie uważajmy ciąg odcinków

$$r_1, r_2, r_3, \dots \quad (11)$$

w którym dwa pierwsze odcinki określamy równościami

$$(12) \quad r_1 = a \text{ i } r_2 = b,$$

a każdy dalszy r_i — przez to, że odcinek ten ma być resztą podziału odcinka r_{i-2} na części równe odcinkowi r_{i-1} .

Trzy pierwsze wyrazy ciągu (11) oczywiście istnieć będą w każdym razie, ale może się wydarzyć, iż po doprowadzeniu rozważanego ciągu do pewnego wyrazu r_n ($n \geq 3$) wyznaczanie dalszych wyrazów będzie już niemożliwe; okoliczność ta oczywiście nastąpi w przypadku i tylko w przypadku, w którymby wyraz r_n omawianego ciągu był odcinkiem zerowym.

Żeby wyrazić, że przypadek ten właśnie zachodzi, orzekamy, że ciąg (11) jest skończony; żeby zaś wyrazić, że odcinek r_n istnieje, jakkolwiek przyjęlibyśmy wartość na n , orzekamy, że ciąg, o który chodzi, jest nieskończony.

Rozważając w dalszym ciągu jakikolwiek wyraz r_i ciągu (11) naturalnie zawsze zakładając będziemy, choć dla krótkości tego wyraźnie zaznaczać nie będziemy, że, gdyby omawiany ciąg nieskończonym nie był, to wskaźnik i ma wartość dostatecznie małą, ażeby wyraz r_i istniał.

Z definicyi ciągu (11) wynika natychmiast, że mamy stale

$$r_{i-2} \geq r_{i-1} + r_i$$

oraz

$$r_{i-1} > r_i$$

Mamy więc także

$$2r_i < r_{i-2},$$

skąd drogą indukcji matematycznej łatwo wywnioskujemy, że mamy

$$(13) \quad 2^k r_{2k+1} < r_1,$$

jeżeli tylko wyraz r_{2k+1} w ciągu (11) wogóle istnieje.

Uzasadniliśmy wyżej twierdzenie następujące: jeżeli pewien odcinek c jest resztą podziału pewnego odcinka a na części równe pewnemu odcinkowi b , to w takim razie odcinki a i b z jednej strony, a odcinki b i c z drugiej, jednocześnie tylko współmiernymi być mogą, a w razie współmierności, zbiór wspólnych podwielokrotności odcinków a i b i zbiór wspólnych podwielokrotności odcinków b i c zlewają się ze sobą. Opierając się na tem twierdzeniu, dowiedlibyśmy łatwo drogą indukcji matematycznej, że odcinki

r_1 i r_2 z jednej strony, a odcinki r_{n-1} i r_n z drugiej tylko jednocześnie współmiernymi być mogą, a w razie współmierności, zbiór wspólnych podwielokrotności odcinków r_1 i r_2 zlewa się ze zbiorem wspólnych podwielokrotności odcinków r_{n-1} i r_n , byleby odcinek r_n istniał.

Powiadam, że w razie współmierności odcinków r_1 i r_2 ciąg (11) jest skończony. Istotnie, założmy, że odcinki a i b są współmierne i oznaczmy przez d jedną ze wspólnych podwielokrotności tych odcinków. W takim razie mieć będziemy

$$r_1 = p \cdot d, \quad (14)$$

oznaczając przez p pewną liczbę całkowitą. Z drugiej zaś strony, ze względu na wynik uzyskany przed chwilą, odcinek d będzie podwielokrotnością każdego z odcinków, należących do ciągu (11). Z tego zaś wynika, że mamy

$$r_i \geq d \quad (15)$$

jakąkolwiek wartość miałby wskaźnik i , i byleby odcinek r_i nie był odcinkiem zerowym. Gdyby więc ciąg (11) był ciągiem nieskończonym, to nierówność (15) zachodziłaby przy wszystkich wartościach na i , gdyż w takim razie, jak widzieliśmy, żaden wyraz ciągu (11) odcinkiem zerowym nie mógłby być. Mielibyśmy zatem w szczególności

$$r_{2k+1} \geq d \quad (16)$$

przy wszystkich wartościach całkowitych na k .

Z tego zaś, na podstawie (13), wynikałoby, że mamy

$$2^k d < r_1, \quad (17)$$

jakąkolwiek wartość miałaby liczba k . Ponieważ znowu nierówność (17) byłaby oczywiście w sprzeczności z nierównością (14), gdybyśmy tylko na k przyjęli wartość na tyle wielką, iżby zachodziła nierówność

$$2^k > p,$$

przeto nierówność (17) nie może zachodzić przy wszystkich wartościach na k , skąd ostatecznie wynika, iż w razie współmierności odcinków r_1 i r_2 ciąg (11) rzeczywiście nieskończony być nie może.

Odwrotnie, jeżeli ciąg (11) jest skończony, to odcinki r_1 i r_2 są współmierne. Istotnie, jeżeli ciąg (11) jest skończony, to istnieje

będzie pewien ostatni wyraz r_n tego ciągu i wyraz ten będzie odcinkiem zerowym. Odcinki r_{n-1} i r_n będą tedy współmierne (odcinek r_{n-1} stanowić będzie ich największą wspólną podwielokrotność, a zbiór wszystkich wspólnych podwielokrotności odcinków r_{n-1} i r_n zlewać się będzie ze zbiorem podwielokrotności odcinka r_{n-1}). Zatem, na podstawie wyżej uzasadnionej własności ciągu (11), odcinki r_1 i r_2 zgodnie z zapowiedzią także będą współmierne, a nadto posiadać będą pewną największą wspólną podwielokrotność, którą oczywiście będzie r_{n-1} .

Z zestawienia wszystkich wyników uzyskanych wyżej, wyprowadzamy z łatwością wnioski następujące:

1°. *Jeżeli jeden przynajmniej z dwóch oznaczonych odcinków, a i b, odcinkiem zerowym nie jest, to, w razie współmierności rozważanych odcinków, posiadają one największą wspólną podwielokrotność, a zbiorem wszystkich wspólnych podwielokrotności odcinków a i b jest zbiór wszystkich podwielokrotności ich największej wspólnej podwielokrotności, którą w przypadku ogólnym, kiedy odcinki a i b są od siebie odmienne i żaden z nich zerowym odcinkiem nie jest, kiedy więc żądana największa wspólna podwielokrotność bezpośrednio znana nie jest, możemy wyznaczyć jako przedostatni wyraz ciągu (11), doprowadzając go do wyrazu zerowego.*

2°. *W razie kiedy ciąg (11) jest ciągiem nieskończonym i o ile taki przypadek jest wogóle możebny, odcinki r_1 i r_2 współmiernymi nie są.*

Z ostatniego z tych wniosków wynika, że podamy dowód istnienia odcinków niewspółmiernych, jeżeli tylko zdołamy przytoczyć jeden przykład, w którym ciąg (11) byłby ciągiem nieskończonym. Właśnie takiemu przykładowi poświęcamy paragraf następujący:

§ 14. Zamierzam udowodnić twierdzenie następujące:

Jeżeli oznaczmy przez

$$(18) \quad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$$

ciąg, jakim stałby się ciąg (11), gdyby dwa pierwsze jego wyrazy r_1 i r_2 równały się odpowiednio przeciwprostokątnej ϱ_1 i przyprostokątnej ϱ_2 dowolnie przyjętego trójkąta prostokątnego i równoramiennego, to ciąg ten będzie ciągiem nieskończonym.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, kreślimy najpierw trójkąt ABC równoramienny i prostokątny w wierzchołku A , przyjmując

$$(19) \quad AB = AC = \varrho_2.$$

W takim razie, ze względu na założenie przyjęte w twierdzeniu, zachodzić będzie równość

$$BC = \varrho_1. \quad (20)$$

Na podstawie elementów geometryi, mamy

$$BC > AB$$

oraz

$$BC < AB + AC,$$

skąd

$$\left. \begin{array}{l} \varrho_1 > \varrho_2 \\ \varrho_1 < 2\varrho_2 \end{array} \right\} \quad (21)$$

na podstawie związków (19) i (20).

Ze związków (21) wynika, że wyraz ϱ_3 w ciągu (11) jest odcinkiem nie zerowym, sprawdzającym równość

$$\varrho_3 + \varrho_2 = \varrho_1.$$

Stwierdzamy zatem co następuje:

W ciągu (11) suma $\varrho_2 + \varrho_3$ równać się będzie przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego, w którym przyprostokątne równają się odcinkowi ϱ_2 .

Powiadam, że jakkolwiek liczbę całkowitą nie mniejszą od liczby 2 oznaczylibyśmy przez k , wyraz ϱ_k ciągu (18) będzie odcinkiem, od zerowego odcinka odmiennym, a suma $\varrho_k + \varrho_{k+1}$ równać się będzie przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego, w którym każda przyprostokątnia równa się odcinkowi ϱ_k .

Załóżmy chwilowo, że dla pewnej wartości $k=p$ liczby k twierdzenie to zachodzi i uważajmy trójkąt EFG , prostokątny w wierzchołku E i taki, żebyśmy mieli

$$EF = EG = \varrho_p.$$

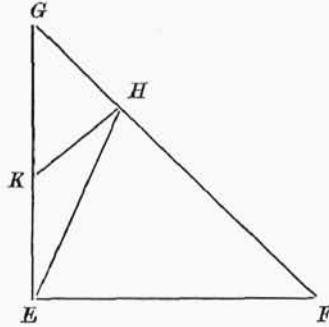
Na podstawie chwilowo przyjętego założenia odcinek ϱ_{p+1} sprawdza równość

$$FG = \varrho_p + \varrho_{p+1},$$

skąd wynika najpierw, że odcinek ϱ_{p+1} odcinkiem zerowym nie jest, a oprócz tego, że możemy wyznaczyć na przeciwprostokątnej FG trójkąta EFG taki punkt H , żeby równości

$$\left. \begin{array}{l} FH = EG = EF = \varrho_p \\ HG = \varrho_{p+1} \end{array} \right\} \quad (22)$$

zachodziły jednocześnie. Ponieważ w trójkącie równoramiennym EFH każdy z równych sobie kątów o wierzchołkach E i H mniejszy jest od kąta prostego, przeto kąt w wierzchołku H w trójkącie EHG większy będzie od kąta prostego. Zatem prostopadła poprowadzona do prostej FG przez punkt H , przejdzie przez wnętrze trójkąta GHE i przetnie z tej przyczyny odcinek EG w pewnym punkcie K , po-



łożonym pomiędzy punktami E i G . Spostrzegamy natychmiast, że w trójkącie EHK kąty, przylegające do boku EH są sobie równe, skąd wynika równość

$$(23) \quad EK = KH$$

Ponieważ równie łatwo spostrzegamy, iż w trójkącie GHK kąty przylegające do boku KG , są sobie równe, przeto mamy także

$$(24) \quad KH = GH,$$

skąd

$$(25) \quad KH = \varrho_{r+1}$$

na podstawie jednej z równości (22).

Z równości (23) i (25) wynika, że mamy

$$EK = \varrho_{r+1},$$

a ponieważ, ze względu na (22), mamy

$$EG = \varrho_r,$$

przeto reszta podziału ϱ_{r+2} odcinka ϱ_r na części równe odcinkowi ϱ_{r+1} równa się oczywiście reszcie podziału odcinka KG na części równe odcinkowi ϱ_{r+1} .

Ponieważ zaś w wierzchołku H trójkąt prostokątny KHG

jest, na podstawie równości (24), trójkątem równoramiennym, przeto mamy

$$GH < KG < 2GH$$

czyli

$$\varrho_{p+1} < KG < 2\varrho_{p+1}$$

na podstawie równości (24) i (25). Mamy więc

$$KG = \varrho_{p+1} + \varrho_{p+2}.$$

Doszliliśmy więc do wyniku następującego: gdyby przy $k=p$ okoliczność zapowiedziana wyżej zachodziła, to ona zachodziłaby także i przy $k=p+1$. Ponieważ już przedtem widzieliśmy, że okoliczność ta zachodzi przy $k=2$, przeto na podstawie zasady indukcji matematycznej omawiana okoliczność, zgodnie z zapowiedzią, zachodzi przy każdej, od liczby 2 nie mniejszej wartości liczby k . Tem samem dowiedliśmy, że ciąg (18) jest nieskończony. Z tego zaś wynika, na podstawie jednego z wniosków, wysłowionych przy końcu ustępu poprzedzającego, że w trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątnia i przyprostokątnia stanowią dwa odcinki niewspółmierne. *Udowodniliśmy więc istnienie odcinków niewspółmiernych.*

