

zaś wnosimy, uwzględnając właściwą treść związków (10) i (11), że równość

$$ab = ba,$$

o którą jedynie jeszcze chodziło jest rzeczywiście spełniona.

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie podane na czele niniejszego paragrafu, a tem samem uzasadniliśmy i przypadek szczególny tego twierdzenia, polegający na tw. II-giem paragrafu poprzedzającego.

Z tw. I-go niniejszego paragrafu wynika bezpośrednio twierdzenie następujące.

II. *Gdybyśmy z układu twierdzeń wyszczególnionych w § 169-tym usunęli twierdzenia (12, G_6) i (16, G_7), to rzeczony układ i po tej zmianie nie przestałby stanowić układu własności charakterystycznych typu liczb rzeczywistych.*

§ 174. Paragraf ten poświęcimy udowodnieniu tw. III-go. Żeby rzeczzone twierdzenie uzasadnić, należy tylko podać przykład takiego zbioru liczb (N, AP) Desarguesa, dla którego nie zachodziłyby ani postulat Archimedes'a, ani twierdzenie, wyrażające własność przemienności mnożenia. Przykład, który zamierzamy podać, nie różni się zasadniczo od przykładu podanego przez samego Hilberta w dziele cytowanym wyżej kilkakrotnie, ale żeby uzyskać większą jasność, przedstawimy definicje zasadnicze, określające zbiór liczb, o które chodzi, w postaci odmiennej od tej, którą przyjął był Hilbert.

Oznaczmy przez (D) układ umów, na podstawie których każde dwójce liczb całkowitych rzeczywistych odpowiada, w razie, kiedy oznaczymy, która mianowicie z liczb całkowitych, stanowiących razem jedną taką dwójkę, uważana ma być za pierwszą, a która za drugą, oznaczona liczba rzeczywista i załóżmy, że układ umów (D) czyni zadość warunkom następującym.

Jeżeli oznaczymy przez a_{ik} liczbę rzeczywistą, która na podstawie układu umów (D) odpowiada układowi liczb całkowitych

$$i \quad i \quad k$$

w przypadku, kiedy liczbę i uważamy za pierwszą, a liczbę k za drugą, to w takim razie:

1° Istnieje pewna taka liczba całkowita p , iż nierówność

$$(1) \quad i < p$$

pociąga za sobą równość

$$a_{ik} = 0. \quad (2)$$

bez względu na wartość liczby k .

2°. Jeżeli liczba i nierówności (1) nie sprawdza, to przy pewnych wartościach na k równość (2) może nie zachodzić, ale każdej wartości liczby całkowitej i odpowiada taka liczba całkowita, ujemna, zerowa lub dodatnia q_i , iż nierówność

$$k < q_i \quad (3)$$

pociąga za sobą równość (2).

Żeby wyrazić, że każda liczba oznaczonego zbioru nieskończonego (Z) pewnych liczb rzeczywistych odpowiada w powyższy sposób każdej dwójce liczb całkowitych, uważanych w oznaczonym porządku, orzekać będziemy, że zbiór (Z) stanowi oznaczony element zbioru (Z, Z).

Uważajmy oznaczony element a zbioru (Z, Z). Na podstawie dopiero co podanej definicji, element a zbioru (Z, Z) jest sam pewnym zbiorem nieskończonym liczb rzeczywistych. Każdej z tych liczb rzeczywistych damy nazwę wyrazu elementu a . Żeby pewien wyraz w oznaczonego elementu a zbioru (Z, Z) był rzeczą określoną w zupełności, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby określone były rzeczy następujące:

1°. Wartość wyrazu w .

2°. Ta dwójka liczb całkowitych, którym odpowiada wyraz w .

3°. Ta liczba i rzeczony dwójki liczb całkowitych, która w tej dwójce uważana ma być za pierwszą, a więc tem samem i ta liczba k tejże dwójki, która w rozważanej dwójce ma być uważana za drugą,

Liczbę całkowitą i nazywać będziemy odciętą, a liczbę całkowitą k -rzedną wyrazu w . Obie liczby całkowite i i k obejmujemy pod wspólną nazwą współrzędnych wyrazu w .

Obecnie przechodzimy do wyszczególnienia definicji nadających zbiorowi (Z, Z) charakter zbioru liczb. Żeby definicje te wyśłowić, oznaczmy:

1°. Przez a i b dwa jakiegokolwiek elementy zbioru (Z, Z).

2°. Przez a_{ik} ten wyraz elementu a , którego odcięta i i rzedna k równają się odpowiednio liczbom całkowitym

$$i \text{ i } k.$$

3°. Przez $b_{m,n}$ ten wyraz elementu b , którego odcięta i rzędna równają się odpowiednio liczbom całkowitym

$$m \text{ i } n.$$

Przyjąwszy te oznaczenia, wprowadzamy definicje następujące:

A) *Równość*

$$(4) \quad a = b$$

wyraża, że równość

$$a_{ik} = b_{ik}$$

zachodzi bez względu na wartości wskaźników

$$i \text{ i } k.$$

B) Jeżeli elementy a i b zbioru (Z, Z) nie są równe pomiędzy sobą, to na wykonanie porównania ilościowego tychże przyjmujemy regułę, która brzmi jak następuje: wyznaczamy najpierw takie dwie liczby całkowite α i β , żeby zachodziły okoliczności następujące.

1°. *Nierówność*

$$i < \alpha$$

pociąga za sobą równość

$$a_{i,k} = b_{i,k},$$

bez względu na wartość wskaźnika k .

2°. Istnieje jedna przynajmniej taka wartość β wskaźnika k , przy której zachodzi nierówność

$$a_{\alpha,k} \neq b_{\alpha,k}.$$

3°. *Nierówność*

$$k < \beta$$

pociąga za sobą równość

$$a_{\alpha,k} = b_{\alpha,k}.$$

4°. *Mamy*

$$a_{\alpha,\beta} \neq b_{\alpha,\beta}.$$

Wyznaczwszy liczby α i β w taki sposób, żeby cztery powyższe warunki były spełnione, upewniamy się, czy liczby rzeczywiste $a_{\alpha,\beta}$ i $b_{\alpha,\beta}$ sprawdzają nierówność

$$a_{\alpha,\beta} < b_{\alpha,\beta},$$

czy też nierówność

$$a_{\alpha,\beta} > b_{\alpha,\beta}.$$

W pierwszym przypadku orzekamy, że zachodzi nierówność

$$a < b,$$

a w drugim —, że elementy a i b czynią zadość nierówności

$$a > b.$$

C) Sumę

$$a + b$$

określamy jako taki element zbioru (Z, Z) , którego wyraz o odciętej i a rzędnej k , równa się sumie

$$a_{ik} + b_{ik}$$

przy wszystkich wartościach całkowitych na współrzędne

$$i \text{ i } k.$$

Żeby po przyjęciu tych definicyi nadać zbiorowi (Z, Z) charakter zbioru liczb, należy tylko jeszcze określić mnożenie elementów tego zbioru. W tym celu czynimy uwagę następującą: jeżeli oznaczymy przez

$$\varphi(k, m)$$

wyrażenie jakiegokolwiek, byle posiadające oznaczoną wartość rzeczywistą przy każdym układzie wartości rzeczywistych i całkowitych liczb k i m , jeżeli nadto oznaczymy przez α i β dwie liczby rzeczywiste i całkowite jakiegokolwiek, to zachodzić będą okoliczności następujące:

1^o. Do liczb α i β zawsze można będzie dobrać takie cztery liczby całkowite i dodatnie

$$p, p', q \text{ i } q', \quad (5)$$

żeby w następstwie zwiększenia którychkolwiek albo wszystkich tych liczb, przybywać mogły do sumy

$$\sum_{k=-q}^{q'} \sum_{m=-p}^{p'} \varphi(k, m) \alpha_{\alpha-m, k} b_{m, \beta-k} \quad (6)$$

tylko składniki równe zeru, i żeby zatem zwiększenie pewnych z pośród liczb (5) albo i wszystkich tych liczb pozostawało bez wpływu na wartość rzeczonyj sumy

2°. Jeżeli na liczbę α przyjmimy wartość sprawdzającą nierówność postaci

$$(7) \quad \alpha < N,$$

gdzie N oznacza liczbę całkowitą stosownie dobraną, to suma (6) równać się będzie zeru bez względu na wartość liczby β i na wartości liczb (5).

Żeby uzasadnić pierwszą część powyższej uwagi, należy tylko zważyć, iż na podstawie definicji zbioru (Z, Z) zwiększenie pewnych albo wszystkich liczb układu (5) w przypadku, kiedy one już miały dostatecznie wielkie wartości, może tylko spowodować wejście do sumy (6) nowych składników postaci

$$\varphi(k, m) a_{\alpha-m, k} \cdot b_{m, \beta-k},$$

w których jeden przynajmniej z czynników

$$a_{\alpha-m, k} \quad \text{lub} \quad b_{m, \beta-k}$$

równa się zeru. Słuszność drugiej części uwagi, o którą chodzi, wynika stąd, że, jeżeli, oznaczwszy przez N liczbę całkowitą ujemną o wartości bezwzględnej dostatecznie wielkiej, przyjmimy na α wartość, sprawdzającą nierówność (7), to jeden przynajmniej z czynników iloczynu

$$a_{\alpha-m, k} \cdot b_{m, \beta-k}$$

będzie, na podstawie ogólnej definicji elementów zbioru (Z, Z) , niezawodnie równać się zeru, bez względu na wartości liczb

$$k \quad \text{i} \quad \beta - k.$$

Z uwagi dopiero co uzasadnionej wynika, że określimy iloczyn dwóch elementów zbioru (Z, Z) jako nowy element tego zbioru, jeżeli, jak to rzeczywiście uczynimy, przyjmimy definicję następującą.

D) Iloczynem, za mnożną przyjętego, elementu a zbioru (Z, Z) przez drugi, za mnożnik przyjęty element b tegoż zbioru zowiemy ten element c rozważanego zbioru, którego wyraz $e_{\alpha\beta}$ o współrzędnych α i β wyznaczamy ze wzoru

$$(8) \quad e_{\alpha\beta} = \sum_{k=-q}^{q'} \sum_{m=-p}^{p'} \varphi(k, m) a_{\alpha-m, k} \cdot b_{m, \beta-k},$$

gdzie wartość funkcji $\varphi(k, m)$ określamy równością

$$\varphi(k, m) = 2^{km} 1, \quad (9)$$

a na liczby całkowite i dodatnie

$$p, p', q \text{ i } q'$$

przyjmujemy wartości na tyle wielkie, żeby w następstwie zwiększenia pewnych albo i wszystkich tych liczb do sumy (8) przybywały tylko składniki zerowe i wartość samej sumy nie ulegała zatem żadnej zmianie.

Oznaczmy przez (NPA) zbiór liczb, którym staje się zbiór (Z, Z) po przyjęciu definicji A, B, C i D . Czytelnik sam stwierdzi z łatwością, że zbiór liczb (NPA) sprawdza wszystkie twierdzenia podane w § 169-tym w grupie I-szej, skąd wynika w szczególności, że powyższe definicje nie sprzeciwiają się ani zasadom rozdziału II-go, ani zasadom rozdziału V-go. Bardzo też łatwym do stwierdzenia jest i ta okoliczność, że zbiór (NPA) sprawdza cztery pierwsze z twierdzeń, podanych w § 169-tym w grupie II-giej. Natomiast nie jest bezpośrednio widoczną ta okoliczność, że zbiór (NPA) sprawdza i 5-te twierdzenie, a więc tw. (15, G_6) grupy II-giej § 169-go.

Żeby przekonać się, że okoliczność ta w rzeczywistości zachodzi, zważmy, że wzór (8) równoważny jest następującemu:

$$e_{\alpha\beta} = \sum_{i, k, m, n} \varphi(k, m) a_{ik} \cdot b_{mn},$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie te układy wartości na wskaźniki i, k, m, n , przy których zachodzą związki następujące:

$$i + m = \alpha, \quad k + n = \beta, \quad a_{ik} \cdot b_{mn} \neq 0.$$

Jeżeli więc przy zachowaniu powyższych oznaczeń, przedstawimy jeszcze przez c_{rs} wyraz o współrzędnych r i s dowolnie

¹⁾ Zamiast powyższej definicji funkcji $\varphi(k, m)$ moglibyśmy funkcję tę określić trochę ogólniej, przyjmując na nią wzór

$$\varphi(k, m) = l^{km},$$

gdzie l oznaczałoby dowolnie wybraną, byle od zera większą a od jedności odmienną liczbę rzeczywistą.

obranej liczby c zbioru (NPA), to wzór na wyraz $x_{\mu\nu}$, o współrzędnych μ i ν , iloczynu $x = (a \cdot b) \cdot c$ będziemy mogli przedstawić w postaci następującej:

$$(10) \quad x_{\mu\nu} = \sum_{i, k, m, n, r, s} \varphi(k, m) \cdot \varphi(k + n, r) a_{ik} \cdot b_{mn} \cdot c_{rs},$$

gdzie przy sumowaniu należy objąć wszystkie te układy wartości na wskaźniki i, k, m, n, r, s , przy których zachodzą jednocześnie związki następujące:

$$i + m + v = \mu, \quad k + n + s = \nu, \quad a_{ik} \cdot b_{mn} \cdot c_{rs} \neq 0.$$

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez $y_{\mu\nu}$ wyraz iloczynu $y = a \cdot (b \cdot c)$, równorzędny wyrazowi $x_{\mu\nu}$ iloczynu $x = (a \cdot b) \cdot c$, to mieć będziemy

$$(11) \quad y_{\mu\nu} = \sum_{i, k, m, n, r, s} \varphi(k, m + r) \varphi(n, r) a_{ik} b_{mn} c_{rs}.$$

Zwracając się do równości (9), określającej znaczenie symbolu $\varphi(k, m)$, uzyskujemy natychmiast wzory następujące:

$$\begin{aligned} \varphi(k + n, r) &= 2^{(k+n)r} \\ \varphi(k, m + r) &= 2^{k(m+r)} \\ \varphi(n, r) &= 2^{nr}. \end{aligned}$$

Na podstawie tych wzorów i wzoru (9) mamy

$$\begin{aligned} \varphi(k, m) \cdot \varphi(k + n, r) &= 2^{km+kr+nr} \\ \varphi(k, m + r) \cdot \varphi(n, r) &= 2^{km+kr+nr}, \end{aligned}$$

zatem

$$\varphi(k, m) \cdot \varphi(k + n, r) = \varphi(k, m + r) \cdot \varphi(n, r).$$

Uwzględniając tę równość, wnosimy ze wzorów (10) i (11), że równorzędne wyrazy $x_{\mu\nu}$ i $y_{\mu\nu}$ iloczynów $(a \cdot b) \cdot c$ i $a \cdot (b \cdot c)$, a zatem i same te iloczyny, są równe pomiędzy sobą. Dowiedliśmy więc, że zbiór (NPA) sprawdza rzeczywiście tw. (15, G_6) § 169-go.

Co się zaś tyczy tw. (16, G_7), to ono dla zbioru liczb (NPA) nie zachodzi, albowiem jeżeli określimy liczby a i b rzeczonego zbioru, przyjmując na wyraz a_{01} liczby a wartość

$$a_{01} = 1,$$

na wyraz b_{10} liczby b wartość

$$b_{10} = 1,$$

a na pozostałe wyrazy każdej z liczb a i b wartości zerowe, to w każdym z iloczynów

$$a \cdot b \quad \text{ i } \quad b \cdot a$$

tylko wyraz o odciętej i rzędnej równych jedności będzie od zera odmienny, ale w iloczynie $a \cdot b$ wspomniany wyraz równać się będzie liczbie 2, a w iloczynie $b \cdot a$ — liczbie 1.

Czytelnik sam udowodni, że zbiór liczb (NPA) sprawdza wszystkie twierdzenia podane w grupach III i IV w § 169-tym. Z drugiej znów strony, ze względu na tw. II-gie § 172-go udowodnione w § 173-cim, mamy z góry pewność, że zbiór liczb (NPA) nie może sprawdzać tw. ($28, G_{12}$) § 169-go; nadto łatwo możemy okoliczność tę sprawdzić bezpośrednio, zważywszy, że przy tych wartościach liczbowych wyrazów liczb a i b zbioru (NPA), jakie rozważaliśmy przed chwilą w celu stwierdzenia, że mnożenie liczb zbioru (NPA) własności przemienności nie posiada, liczba b jest od modułu dodawania liczb zbioru (NPA) większa, a jednak suma ilukolwiek składników równych liczbie b jest zawsze mniejsza od liczby a .

Ostatecznie więc zbiór (NPA) jest przykładem zbioru liczb Desarguesa, który nie jest ani zbiorem liczb Pascala, ani zbiorem liczb Archimedeses. Zatem uzasadniliśmy w zupełności tw. III-cie § 172-go.

§ 175. Na zakończenie uzasadnimy jeszcze jedno twierdzenie Hilberta¹⁾, które rzuca nowe światło na znaczenie postulatu Archimedeses i może być wysłowione w sposób następujący:

Twierdzenie ($29, G_{13}$) stałoby się błędnem, gdybyśmy usunęli z kompleksu 28-miu twierdzeń, wysłowionych przed nim, tw. ($28, G_{12}$), nie zastępując to twierdzenie przez jakieś inne.

Żeby twierdzenie to uzasadnić oznaczmy przez (L) zbiór liczb dowolnie dany, byle sprawdzający twierdzenia, wyszczególnione w § 169-tym w grupach I, II, III i IV.

Na pojęciu zbioru (L) możemy oprzeć definicyę nowego zbioru liczb (T) w sposób ściśle analogiczny do tego, w jaki oparliśmy definicyę zbioru (NA), rozważanego w § 171-szym, na pojęciu zbioru liczb rzeczywistych. W tym celu należy tylko przyjąć definicyę następującą:

¹⁾ Hilbert, Grundlagen der Geometrie, p. 23, Teubner, 1909.

A) Wyrażenie „liczba zbioru“ (T) oznacza nieskończony zbiór pewnych liczb zbioru (L), odpowiadających liczbom całkowitym w taki sposób, żeby dla każdej liczby a zbioru (T) spełnione były warunki następujące:

α) Każdej liczbie całkowitej ujemnej, zerowej lub dodatniej m odpowiada oznaczona liczba a_m zbioru (L), zwana wyrazem rzędu m liczby a zbioru (T).

β) Liczbie a zbioru (T) odpowiada pewna taka liczba całkowita p , iż nierówność

$$m < p$$

pociąga za sobą równość

$$a_m = \mu,$$

gdzie μ oznacza moduł dodawania liczb zbioru (L).

B) Równość dwóch liczb zbioru (T) wyraża, że równorzędne wyrazy tych liczb są równymi pomiędzy sobą liczbami zbioru (L).

C) Jeżeli oznaczymy przez a i b jakiejkolwiek dwie liczby zbioru (T), a przez a_m i b_m odpowiednio wyrazy rzędu m tych liczb, to nierówność

$$a < b$$

wyraża, że istnieje pewna taka liczba całkowita k , iż zachodzą okoliczności następujące: nierówność

$$m < k$$

pociąga za sobą równość

$$a_m = b_m,$$

a wyrazy a_k i b_k rzędu k liczb a i b sprawdzają nierówność

$$a_k < b_k.$$

D) Wynikiem dodania oznaczonej liczby b zbioru (T) do drugiej liczby a tegoż zbioru nazywamy każdą taką liczbę zbioru (T), w której wyraz każdego rzędu m równa się sumie wyrazów rzędu m liczb a i b .

E) Poczynem jakiejkolwiek liczby a zbioru (T), przyjętej za mnożną, przez jakąkolwiek drugą liczbę b tegoż zbioru, przyjętą za mnożnik, nazywamy każdą taką liczbę c rozważanego zbioru, w której wyraz c_m rzędu m wyznaczony być może, jakakolwiek byłyby liczba całkowita m , z ogólnego wzoru następującego.

$$(1) \quad c_m = \sum_{i=0}^m a_i b_{m-i},$$

gdzie oznaczyliśmy ogólnie przez a_i wyraz rzędu i liczby a , przez b_{m-i} wyraz rzędu $m-i$ liczby b , a przez s i t dwie liczby całkowite i dodatnie tak dobrane do liczby m , żeby w razie zwiększenia jednej z nich, albo obu, do sumy (1) mogły tylko przybyć składniki równe modułowi dodawania liczb zbioru (L).

Uwaga. Istnienie liczb całkowitych s i t , rozważanych w definicji E nie jest rzeczą oczywistą bezpośrednio, ale rozumowanie, którem posługiwaliśmy się przy uzasadnieniu uwagi na str. 827, może być bezpośrednio zastosowane, ażeby udowodnić istnienie rzeczonych liczb s i t .

Czytelnik z łatwością sam stwierdzi co następuje:

1°. Zbiór (T) sprawdza wszystkie twierdzenia, podane w § 169 w grupach I, II, III i IV.

2°. Zbiór (L) izomorficzny jest w znaczeniu ściślejszem podzbirowi (T_0) zbioru (T), utworzonemu ze wszystkich tych liczb zbioru (T), z których każda posiada najwyżej jeden wyraz od modułu dodawania odmienny, mianowicie wyraz rzędu zero.

Jeżeli zespolicmy (§ 95) zbiór (L) ze zbiorem (T), to uzyskamy nowy zbiór liczb (T'), który także będzie sprawdzać wszystkie twierdzenia, podane w § 169-tym w grupach I, II, III i IV, a który prócz wszystkich liczb zbioru (L) obejmować będzie i takie liczby, z których żadna nie będzie równa jednej z liczb zbioru (L). Istnienie zbioru (T') stanowi oczywiście dowód na twierdzenie, które chcieliśmy uzasadnić.



nr. 100