

skąd

$$i_2 i_3^2 = (\alpha + \beta i_2 + \gamma i_3) i_3 = \alpha i_3 + \beta i_2 i_3 + \gamma i_3^2,$$

czyli

$$-i_2 = \alpha i_3 + \beta i_2 i_3 - \gamma,$$

skąd znowuż na podstawie wzoru (1) wynika równość

$$-i_1 = \alpha i_3 + \beta (\alpha + \beta i_2 + \gamma i_3) - \gamma$$

czyli

$$-i_2 = \beta \alpha - \gamma + \beta^2 i_2 + (\alpha + \beta \gamma) i_3.$$

Z równości tej mamy

$$\beta \alpha - \gamma = 0, \quad \beta^2 = -1, \quad \alpha + \beta \gamma = 0.$$

Ponieważ liczba β jest liczbą rzeczywistą, przeto druga z równości powyższych zachodzić nie może. Zatem założenie, iż mamy

$$n = 3$$

doprowadza do następstwa niemożliwego. Przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia liczba n liczbie 3 równać się nie może.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika, że pozostaje tylko do zbadania przypadek, kiedy mamy

$$n = 4.$$

Przedmiotowi temu poświęcamy paragraf następujący.

§ 163. Założmy chwilowo, że pośród zbiorów liczb (Z), posiadających wszystkie własności wyszczególnione w § 154-tym, istnieje pewien zbiór liczb czwartego rzędu (Z_4), i oznaczmy przez

$$i_1, i_2, i_3, i_4 \tag{1}$$

normalny układ jednostek (§ 162) tego zbioru liczb.

Mamy tedy

$$i_1 = 1, \quad i_2^2 + 1 = 0, \quad i_3^2 + 1 = 0, \quad i_4^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} i_2 i_3 + i_3 i_2 &= 0 \\ i_3 i_4 + i_4 i_3 &= 0 \\ i_4 i_2 + i_2 i_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Na podstawie tw. II-go § 162-go zachodzić będzie jeszcze jedna z równości:

$$i_2 i_3 i_4 = +1 \quad \text{albo} \quad i_2 i_3 i_4 = -1.$$

Drogą prostej zmiany oznaczeń możemy zawsze tego dopiąć, żeby zachodziła naprzód oznaczona z dwóch równości powyższych. Istotnie, na podstawie pierwszej równości (3) mamy

$$i_2 i_3 i_4 = - i_3 i_2 i_4;$$

zatem, gdybyśmy mieli

$$(\alpha) \quad i_2 i_3 i_4 = \varepsilon,$$

oznaczając przez ε pewną jedną z liczb

$$+1 \text{ i } -1,$$

to mielibyśmy

$$(\beta) \quad i_3 i_2 i_4 = -\varepsilon.$$

Z tego zaś wynika, że w razie równości (α) moglibyśmy urzeczywistnić równość (β), przemieniając pomiędzy sobą znaczenia symbolów i_2 i i_3 . W dalszych rozważaniach przyjmijmy takie oznaczenia, żebyśmy mieli

$$(4) \quad i_2 i_3 i_4 = -1.$$

Mnożąc równość tę obustronnie przez i_4 , otrzymujemy

$$i_2 i_3 i_4^2 = -i_4,$$

skąd

$$(5) \quad i_2 i_3 = i_4.$$

Mnożąc znów tę równość obustronnie przez i_3 , otrzymujemy

$$i_2 i_3^2 = i_4 i_3,$$

skąd

$$-i_2 = i_4 i_3$$

na podstawie drugiej z równości (2); a ponieważ na podstawie drugiego z równań (3) mamy

$$i_4 i_3 = -i_3 i_4,$$

przeto mamy

$$(6) \quad i_3 i_4 = i_2.$$

Z tej równości mamy nareszcie

$$i_3 i_4^2 = i_2 i_4,$$

skąd

$$-i_3 = i_2 i_4$$

na podstawie 4-tej z równości (2); a ponieważ

$$i_2 i_4 = -i_4 i_2$$

na podstawie 3-ciej z równości (3), przeto mamy

$$i_4 i_2 = i_3 \quad (7)$$

Na podstawie równości (2), (5), (6) i (7) możemy przedstawić każdy iloczyn dwóch liczb układu (1) w postaci sumy iloczynów liczb rzeczywistych (z których jedna tylko będzie od zera odmienna) przez te liczby. Zestawiamy odnośne wzory w tabelce następującej:

$$\left. \begin{aligned} i_1^2 &= i_1 \\ i_2^2 &= i_3^2 = i_4^2 = -i_1 \\ i_2 i_3 &= -i_3 i_2 = i_4 \\ i_4 i_2 &= -i_2 i_4 = i_3 \\ i_3 \cdot i_4 &= -i_4 \cdot i_3 = i_2 \\ i_1 i_2 &= i_2 i_1 = i_2 \\ i_1 i_3 &= i_3 i_1 = i_3 \\ i_1 i_4 &= i_4 i_1 = i_4. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zwróćmy się teraz do układu tych liczb rzeczywistych, które w § 157-ym oznaczone zostały przez symbole

$$\xi_{p, q, k} \quad (p, q, k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

$$\text{Przyjawszy} \quad n = 4,$$

możemy zestawić wszystkie te liczby w tabelce następującej:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{1,1,1}, \xi_{1,1,2}, \xi_{1,1,3}, \xi_{1,1,4} \dots & (1) \\ \xi_{2,2,1}, \xi_{2,2,2}, \xi_{2,2,3}, \xi_{2,2,4} \dots & (2) \\ \xi_{3,3,1}, \xi_{3,3,2}, \xi_{3,3,3}, \xi_{3,3,4} \dots & (3) \\ \xi_{4,4,1}, \xi_{4,4,2}, \xi_{4,4,3}, \xi_{4,4,4} \dots & (4) \\ \xi_{2,3,1}, \xi_{2,3,2}, \xi_{2,3,3}, \xi_{2,3,4} \dots & (5) \\ \xi_{4,2,1}, \xi_{4,2,2}, \xi_{4,2,3}, \xi_{4,2,4} \dots & (6) \\ \xi_{3,4,1}, \xi_{3,4,2}, \xi_{3,4,3}, \xi_{3,4,4} \dots & (7) \\ \xi_{3,2,1}, \xi_{3,2,2}, \xi_{3,2,3}, \xi_{3,2,4} \dots & (8) \\ \xi_{2,4,1}, \xi_{2,4,2}, \xi_{2,4,3}, \xi_{2,4,4} \dots & (9) \\ \xi_{4,3,1}, \xi_{4,3,2}, \xi_{4,3,3}, \xi_{4,3,4} \dots & (10) \\ \xi_{1,2,1}, \xi_{1,2,2}, \xi_{1,2,3}, \xi_{1,2,4} \dots & (11) \\ \xi_{1,3,1}, \xi_{1,3,2}, \xi_{1,3,3}, \xi_{1,3,4} \dots & (12) \\ \xi_{1,4,1}, \xi_{1,4,2}, \xi_{1,4,3}, \xi_{1,4,4} \dots & (13) \\ \xi_{2,1,1}, \xi_{2,1,2}, \xi_{2,1,3}, \xi_{2,1,4} \dots & (14) \\ \xi_{3,1,1}, \xi_{3,1,2}, \xi_{3,1,3}, \xi_{3,1,4} \dots & (15) \\ \xi_{4,1,1}, \xi_{4,1,2}, \xi_{4,1,3}, \xi_{4,1,4} \dots & (16) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie każdy wiersz zaopatrzyliśmy w pewien numer porządkowy uwidoczniiony po stronie prawej.

Jeżeli przy wartości

$$n = 4$$

na n zastąpimy we wzorach (7) na str. 751 liczby

$$l_1, l_2, l_3, l_4,$$

odpowiednio przez

$$i_1, i_2, i_3, i_4,$$

to ze względu na równości (8) liczby $\xi_{p,q,k}$ przyjmą wartości, przy których tabelka (9) przemieni się w tabelkę następującą:

$$(10) \left\{ \begin{array}{llll} 1, & 0, & 0, & 0 \dots (1) \\ -1, & 0, & 0, & 0 \dots (2) \\ -1, & 0, & 0, & 0 \dots (3) \\ -1, & 0, & 0, & 0 \dots (4) \\ 0, & 0, & 0, & 1 \dots (5) \\ 0, & 0, & 1, & 0 \dots (6) \\ 0, & 1, & 0, & 0 \dots (7) \\ 0, & 0, & 0, & -1 \dots (8) \\ 0, & 0, & -1, & 0 \dots (9) \\ 0, & -1, & 0, & 0 \dots (10) \\ 0, & 1, & 0, & 0 \dots (11) \\ 0, & 0, & 1, & 0 \dots (12) \\ 0, & 0, & 0, & 1 \dots (13) \\ 0, & 1, & 0, & 0 \dots (14) \\ 0, & 0, & 1, & 0 \dots (15) \\ 0, & 0, & 0, & 1 \dots (16), \end{array} \right.$$

w której numery porządkowe wierszy uwidocznione są znowu po prawej stronie.

Gdybyśmy, nie uwzględniając znaczenia, jakie mają w teorii zbioru liczb (Z) liczby $\xi_{p,q,k}$, tworzące tabelkę (9), przyjęli na liczby te całkiem dowolnie oznaczony układ wartości rzeczywistych (U), to na podstawie uwagi A (str. 752) § 157-go moglibyśmy skojarzyć z układem wartości (U) na liczby $\xi_{p,q,k}$ oznaczony zbiór liczb (L). Przyjmijmy na elementy $\xi_{p,q,k}$ tabelki (9) taki układ wartości, żeby ta tabelka zlała się z tabelką (10) i oznaczmy przez (L_4) ten szczególny zbiór liczb, jakim stanie się przy tych warunkach zbiór (L). Jeżeli zbiór (Z_4), którego istnienie założyliśmy chwilowo

(zob. początek paragrafu niniejszego), rzeczywiście istnieje, to na podstawie uwagi B (str. 753) § 157-go zbiór (L_4) izomorficzny będzie zbiorowi (Z) . Ale jeżeli zbiór (Z_4) istnieje, jeżeli więc zbiór (L_4) izomorficzny jest zbiorowi (Z_4) , to pewien podzbiór zbioru (L_4) izomorficzny będzie zbiorowi liczb rzeczywistych, a po zespoleniu (§ 95) zbioru liczb (L_4) ze zbiorem liczb rzeczywistych uzyskaliśmy oznaczony zbiór liczb, który sam będzie mógł być uważany za zbiór (Z_4) . Zatem, żeby upewnić się, czy zbiór liczb (Z_4) istnieje, możemy nadać rozważaniom naszym bieg następujący. Zbadamy najpierw, czy w zbiorze liczb (L_4) istnieje podzbiór izomorficzny zbiorowi liczb rzeczywistych. Gdyby się pokazało, że okoliczność ta nie zachodzi, to ten wynik naszych badań stanowiłby dowód na to, że zbiór (Z_4) nie istnieje. Jeżeli zaś stwierdzimy, że rozważana okoliczność zachodzi, to zespolenie zbioru liczb ze zbiorem (L_4) będzie możliwe i pozostanie tylko do zbadania, czy zbiór liczb (Z_4) , taką drogą uzyskany, posiada wszystkie własności, wyszczególnione w § 154, i jest przytem rzeczywiście rzędu 4.

Na podstawie umów, wprowadzonych przy rozwijaniu uwagi A (str. 752) § 157, liczba zbioru (L_4) jest czterowyrzowym układem liczb rzeczywistych, a symbolem tej liczby zbioru (L_4) , którą stanowi czterowyrzowy ciąg

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

dowolnie przyjętych liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, a_4 , jest symbol

$$(a_1, a_2, a_3, a_4);$$

równość

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

wyraża, że mamy

$$a_k = b_k \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

na dodawanie liczb zbioru (L_4) mamy wzór

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4), \end{aligned} \quad (11)$$

a na mnożenie —

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (12)$$

gdzie liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3 i x_4 winny być wyznaczone ze wzorów

$$x_k = \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \xi_{p,q,k} \cdot a_p \cdot b_q, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

z uwzględnieniem przytem tej okoliczności, iż liczby $\xi_{p,q,k}$ te mają wartości, przy których tabelka (9) zlewa się z tabelką (10); mamy więc:

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4 \\ x_2 = a_3 b_4 - a_4 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ x_3 = a_4 b_2 - a_2 b_4 + a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ x_4 = a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_1 b_4 + a_4 b_1 \end{cases}$$

Oznaczmy przez (R') ten podzbiór zbioru liczb (L_4) , który obejmuje wszystkie liczby postaci

$$(l', 0, 0, 0),$$

gdzie l' oznacza liczbę rzeczywistą o wartości dowolnej.

Zbiór liczb (R') izomorficzny jest zbiorowi (R) wszystkich liczb rzeczywistych. Istotnie, umówmy się, że uważać będziemy za odpowiadające sobie wzajemnie każdą taką liczbą $(l', 0, 0, 0)$ zbioru (R') i każdą taką liczbę l zbioru (R) , żebyśmy mieli

$$l = l'.$$

Ta odpowiedniość wzajemna liczb obu zbiorów oczywiście sprawdza 2 pierwsze warunki (§ 95) izomorfizmu. Ponieważ dalej równość

$$(a', 0, 0, 0) = (b', 0, 0, 0)$$

w razie równości

$$a = a' \text{ i } b = b'$$

równoważna jest równości

$$a = b,$$

przeto rozważana odpowiedniość liczb zbiorów (R') i (R) czyni zadość i trzeciemu warunkowi izomorfizmu. Ale warunek 4-ty też jest spełniony, jeżeli bowiem przyjmiemy

$$(a', 0, 0, 0) + (b', 0, 0, 0) = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$(a', 0, 0, 0) \cdot (b', 0, 0, 0) = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

i założymy, że liczby rzeczywiste a', b', a i b sprawdzają równości

$$a = a', \quad b = b',$$

to na podstawie wzorów (11), (12) i (13) mieć będziemy

$$u_1 = a + b, \quad u_2 = u_3 = u_4 = 0,$$

oraz

$$v_1 = a \cdot b, \quad v_2 = v_3 = v_4 = 0.$$

Zatem zbiory liczb (R) i (R') są rzeczywiście pomiędzy sobą izomorficzne.

Ponieważ podzbiór (R') zbioru (L_4) izomorficzny jest zbiorowi liczb rzeczywistych, przeto możemy zespolić (§ 95) zbiór liczb rzeczywistych ze zbiorem (L_4) . Oznaczmy przez (Z'_4) zbiór liczb w taki sposób uzyskany. Powiadam, że *zbiór (Z'_4) posiada wszystkie własności, wysłowione w paragrafie 154*. Istotnie, spostrzegamy natychmiast, że zbiór (Z'_4) posiada trzy pierwsze z własności wyszczególnionych w § 154-tym, a ponieważ ze wzoru (11) wynika bezpośrednio, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby zachodziła równość

$$b + x = b,$$

gdzie oznaczyliśmy przez b i x dwie liczby zbioru (Z'_4) , polega na równości

$$x = (0, 0, 0, 0) = 0,$$

przeto zbiór (Z'_4) posiada także własność 4°. Ze wzorów (12) i (13) wynika bezpośrednio, że zbiór (Z'_4) posiada własność 5°. Na podstawie tychże wzorów i wzorów (11) zbiór (Z'_4) posiada własność 6°, albowiem jeżeli przyjmiemy

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \quad C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4),$$

oznaczając przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ liczby rzeczywiste, to na podstawie wspomnianych dopiero co wzorów mieć będziemy

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \alpha_4 + \beta_4) \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \\ &= (u_1, u_2, u_3, u_4), \end{aligned} \quad (14)$$

oznaczając przez u_1, u_2, u_3, u_4 wartości, jakie przyjmują liczby

x_1, x_2, x_3, x_4 po podstawieniu na $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ we wzorach (13) wartości następujących;

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha_k + \beta_k \\ b_k &= \gamma_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

W sposób analogiczny łatwo stwierdzamy, że zachodzi równość

$$(15) \quad C \cdot (A + B) = (v_1, v_2, v_3, v_4),$$

gdzie oznaczyliśmy przez v_1, v_2, v_3 , i v_4 wartości, jakie wynikałyby ze wzorów (13) na x_1, x_2, x_3 i x_4 w razie równości następujących:

$$\begin{aligned} a_k &= \gamma_k \\ b_k &= \alpha_k + \beta_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Z drugiej strony, na podstawie wzorów (12) i (13) otrzymujemy

$$(16) \quad \begin{cases} A \cdot C = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4), \\ B \cdot C = (u''_1, u''_2, u''_3, u''_4), \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} C \cdot A = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4), \\ C \cdot B = (v''_1, v''_2, v''_3, v''_4), \end{cases}$$

gdzie oznaczyliśmy odpowiednio przez

$$u'_1, u'_2, u'_3, u'_4;$$

$$u''_1, u''_2, u''_3, u''_4;$$

$$v'_1, v'_2, v'_3, v'_4;$$

i

$$v''_1, v''_2, v''_3, v''_4;$$

te układy wartości, jakie dostarczają kolejno wzory (13) na liczby

$$x_1, x_2, x_3, x_4,$$

gdy liczby $a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4$ wyznaczamy raz ze wzorów

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha_k, \\ b_k &= \gamma_k; \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

drugi raz ze wzorów:

$$\begin{aligned} a_k &= \beta_k, \\ b_k &= \gamma_k; \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

trzeci raz ze wzorów:

$$\begin{aligned} a_k &= \gamma_k \\ b_k &= \alpha_k, \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

a po raz czwarty ze wzorów

$$\begin{aligned} a_k &= \gamma_k \\ b_k &= \beta_k. \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Spostrzegamy z łatwością, że mamy:

$$u_k = u'_k + u''_k \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

oraz

$$v_k = v'_k + v''_k.$$

Zatem ze względu na wzory (16) zachodzi równość

$$A \cdot C + B \cdot C = (u_1, u_2, u_3, u_4), \quad (18)$$

a ze względu na wzory (17)

$$C \cdot A + C \cdot B = (v_1, v_2, v_3, v_4). \quad (19)$$

Z równości (14) i (18) mamy

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad (20)$$

a z równości (17) i (19)

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B. \quad (21)$$

Z równości (20) i (21) wynika (§ 30 tw. I), że zbiór (Z'_4) posiada rzeczywiście własność 6^o wykazu, podanego w § 154-tym.

O tem, że zbiór (Z'_4) posiada także własność 7^o rzeczonego wykazu, przekonujemy się w sposób następujący: Uważajmy jakąkolwiek liczbę c_1, c_2, c_3, c_4 zbioru (Z'_4) i oznaczmy przez

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

wyrażenie, w jakie przemieniłyby się prawe strony równości (13), gdybyśmy, zastąpiwszy najpierw symbole

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

przez

$$x_1, x_2, x_3, x_4,$$

a symbole

$$b_1, b_2, b_3, b_4$$

przez

$$c_1, c_2, c_3, c_4,$$

podstawili następnie w uzyskanych wzorach wartości (13) na

$$x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Oczywiście mamy

$$(22) \quad \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4)\} \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4) = \\ = (y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Z drugiej zaś strony, jeżeli oznaczymy przez

$$t_1, t_2, t_3, t_4$$

wartości, jakie wypadłyby ze wzorów (13) na

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

w przypadku, w którym postawilibyśmy na miejsce liczb

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

liczby

$$b_1, b_2, b_3, b_4,$$

a na miejsce tych ostatnich liczby

$$c_1, c_2, c_3, c_4,$$

to mielibyśmy

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4);$$

mamy więc

$$(23) \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4)\} = \\ = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

oznaczając przez

$$z_1, z_2, z_3, z_4$$

wartości, które otrzymaliśmy na x_1, x_2, x_3, x_4 ze wzorów (13), przyjmując

$$b_k = t_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Ponieważ po wyrażnem wypisaniu wzorów na $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ z łatwością stwierdzimy, że równości

$$y_k = z_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

zachodzą identycznie, przeto wnosimy ze wzorów (22) i (23), że zachodzi równość

$$(24) \quad \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4)\} \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4) = \\ = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4)\},$$

i to bez względu na wartości liczb

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ i } (c_1, c_2, c_3, c_4).$$

Równość (23) wyraża, że mnożenie liczb zbioru (Z'_4) posiada własność łączności w razie trzech czynników. Zatem mnożenie liczb zbioru (Z'_4) posiada własność łączności (§ 29 tw. I) bez względu na liczbę czynników. Innymi słowy, zbiór (Z'_4) posiada rzeczywiście własność 7^o wykazu § 154-go.

Żeby dowieść, iż zbiór (Z'_4) posiada własność 8^o, zwróćmy się do wzorów (13). Uwzględniając identyczności:

$$\begin{aligned}(a_3 b_4 - a_4 b_3) a_1 b_2 + (a_4 b_2 - a_2 b_4) a_1 b_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 b_4 &= 0 \\ (a_3 b_4 - a_4 b_3) a_2 b_1 + (a_4 b_1 - a_2 b_4) a_3 b_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_4 b_1 &= 0,\end{aligned}$$

stwierdzamy łatwo, że mamy

$$\begin{aligned}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (a_3 b_4 - a_4 b_3)^2 + (a_4 b_2 - a_2 b_4)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \\ &+ (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1)^2 + (a_1 b_4 + a_4 b_1)^2.\end{aligned}$$

Po łatwym przekształceniu z jednej strony sumy trzech pierwszych składników prawej strony tej równości, a z drugiej trzech pozostałych, uzyskujemy wzór następujący:

$$\begin{aligned}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) - \\ &- (a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)^2 + a_1^2(b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) + b_1^2(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + \\ &+ 2a_1 b_1(a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4).\end{aligned}$$

Ponieważ zaś mamy

$$\begin{aligned}x_1^2 &= a_1^2 b_1^2 - 2a_1 b_1(a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) + \\ &+ (a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)^2;\end{aligned}$$

przeto

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) + \\ &+ a_1^2(b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) + b_1^2(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + a_1^2 b_1^2.\end{aligned}$$

Zatem ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^1.\end{aligned}\quad (25)$$

Zwracając się do równości (12), możemy natychmiast, opierając się na równości (25) i uwzględniając tę okoliczność, iż symbole

$$x_k, a_k, b_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

¹⁾ Równość ta wyraża ciekawe twierdzenie z teorii liczb zbioru (Z'_4) ; twierdzenie to jest całkiem analogiczne do twierdzenia o liczbach zespolonych pospolitych, według którego moduł iloczynu dwóch takich liczb równa się iloczynowi modułów czynników.

przedstawiają liczby rzeczywiste, z łatwością się przekonać, że mamy

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) \neq (0, 0, 0, 0) \neq 0,$$

jeżeli tylko nie zachodzą ani wszystkie równości układu

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

ani wszystkie równości układu

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

Innemi słowy, iloczyn dwóch liczb zbioru (Z'_4) jest od modułu dodawania odmienny, jeżeli tylko mnożna i mnożnik są od modułu dodawania odmienne. Ale na tem właśnie polega własność 8^o wykazu § 154-go.

Zbiór (Z'_4) posiada własność 9^o tegoż wykazu bezpośrednio na podstawie swej definicyi.

O tem, że zbiór ten posiada własność 10^o rzeczonego wykazu, przekonywamy się w sposób następujący: Na podstawie reguły, którą wyrażają łącznie równości (12) i (13), mamy:

$$\begin{aligned} l \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (l, 0, 0, 0) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (lb_1, lb_2, lb_3, lb_4), \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) \cdot l &= (b_1, b_2, b_3, b_4) \cdot (l, 0, 0, 0) = (lb_1, lb_2, lb_3, lb_4) \end{aligned}$$

jakiegokolwiek liczby rzeczywiste oznaczyliśmy przez

$$l, b_1, b_2, b_3, b_4.$$

Otóż z powyższych równości wynika równość

$$l \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4) \cdot l,$$

wyrażająca tę własność zbioru (Z'_4) , którą pragnęliśmy udowodnić.

Mamy jeszcze wykazać, że zbiór (Z'_4) posiada własność 11^o z wykazu § 154-go. W tym celu przyjmijmy na elementy wyznacznika następującego

$$(26) \quad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

jakiegokolwiek takie wartości rzeczywiste, żebyśmy mieli

$$(27) \quad \Delta \neq 0.$$

Jeżeli tedy przyjmiemy

$$l_k = (b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, b_{k4}) \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (28)$$

to każdej liczbie

$$l = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

zbioru (Z'_4) odpowiadać będzie taki układ liczb rzeczywistych

$$a_1, a_2, a_3, a_4,$$

żebyśmy mieli

$$l = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4, \quad (29)$$

gdyż równość ta równoważna jest układowi

$$b_s = b_{1,a_1} + b_{2,a_2} + b_{3,a_3} + b_{4,a_4} \quad (s = 1, 2, 3, 4),$$

który ze względu na nierówność (27) posiada w stosunku do nie-
wiadomych

$$a_1, a_2, a_3, a_4$$

zawsze jedno tylko rozwiązanie.

Ostatecznie zbiór (Z'_4) posiada wszystkie własności, wyszczególnione w wykazie z § 154.

Zbiór liczb (Z'_4) jest 4-tego rzędu. Istotnie liczby

$$l_1, l_2, l_3, l_4, \quad (30)$$

określone wzorami (9), są liniowo niezależne, albowiem jeżeli zwrócimy się do zagadnienia, polegającego na wyznaczeniu takiego układu liczb rzeczywistych

$$C_1, C_2, C_3, C_4, \quad (31)$$

żebyśmy mieli

$$\sum_{k=1}^4 C_k \cdot l_k = 0, \quad (32)$$

to natychmiast stwierdzimy, że liczby (32) sprawdzać winny układ równań następujący:

$$\sum_{k=1}^n C_k \cdot b_{k,i} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Ponieważ zaś wyznacznik Δ tych równań liniowych jednorodnych sprawdza nierówność (27), przeto równość (32) zachodzi tylko przy wartościach zerowych na liczby rzeczywiste (31). Za-

tem układ (30) jest zasadniczym układem jednostek zbioru (Z'_4), a więc sam ten zbiór jest rzeczywiście rzędu 4-go.

Zbiór liczb (Z'_4) znany jest pod nazwą kwaternionów, nadany mu przez jego odkrywcę Hamiltona.

Zwracając się do uwagi *B* na str. 753, możemy z góry przewidzieć co następuje: *jeżeli określimy liczby*

$$(33) \quad i_1, i_2, i_3, i_4$$

zbioru (Z'_4) równaniami

$$(34) \quad \begin{cases} i_1 = (1, 0, 0, 0) \\ i_2 = (0, 1, 0, 0) \\ i_3 = (0, 0, 1, 0) \\ i_4 = (0, 0, 0, 1), \end{cases}$$

to układ (33) będzie takim zasadniczym układem jednostek zbioru (Z'_4), który sprawdzać będzie równości (2) i (8). Łatwo stwierdzamy *a posteriori*, że okoliczność ta zachodzi: układ (33) jest zasadniczym układem jednostek zbioru (Z'_4), gdyż liczby (33) są oczywiście liniowo niezależne, a na każdą liczbę (a_1, a_2, a_3, a_4) tego zbioru mamy oczywiście wzór

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4,$$

o tem zaś, że równości (8) rzeczywiście zachodzą, przekonywamy się łatwo na podstawie ogólnych wzorów (12) i (13).

W teorii zbioru liczb (Z'_4) czyli kwaternionów najdogodniej jest przyjąć za układ referencyjny zasadniczy układ jednostek (33), określony równaniami (34). Wobec tego uważamy za normalną postać kwaternionu wyrażenie

$$(35) \quad a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4,$$

gdzie a_1, a_2, a_3, a_4 oznaczają jakiekolwiek liczby rzeczywiste, a i_1, i_2, i_3, i_4 — kwaterniony, określone wzorami (34). Ponieważ na podstawie pierwszego z równań (34) mamy

$$i_1 = 1,$$

przeto możemy zastąpić wyrażenie (35) przez prostsze nieco wyrażenie następujące:

$$(36) \quad a_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4.$$

W praktyce, idąc za przykładem samego Hamiltona, zastępujemy symbole

$$i_2, i_3, i_4$$

przez symbole nieco prostsze

$$i, j, k \quad (36)$$

i piszemy zatem kwaternion w postaci sumy następującej:

$$a + bi + cj + dk, \quad (37)$$

oznaczając przez a, b, c, d jakiekolwiek liczby rzeczywiste.

Na podstawie definicji symbolów (36) oraz równości (2) i (8), mamy

$$\left. \begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Na tym właśnie układzie równości opierają się reguły techniki rachunkowej z kwaternionami, ale nie rozwijając w tym rozdziale dalej teorii kwaternionów, odsyłamy czytelnika do specjalnych dzieł o tym przedmiocie. Teoria kwaternionów, uważana jako narzędzie do badań naukowych, ma tylko znaczenie drugorzędne i dlatego szczegółowe rozwijanie tej teorii w ogólnym kursie arytmetyki teoretycznej nie byłoby odpowiednie. Cel nasz polegał na zbadaniu, czy istnieją pośród zbiorów liczb, posiadających wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, zbiory liczb 4-tego rzędu. Otóż na to pytanie możemy obecnie odpowiedzieć wyczerpująco twierdzeniem następującem:

Pośród zbiorów liczb, posiadających wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, istnieją zbiory liczb 4-go rzędu, a każdy z nich należy do typu kwaternionów.

Twierdzenie to jest tylko streszczeniem głównych wyników, uzyskanych w niniejszym paragrafie.

Istotnie dowiedliśmy, że niezawodnie istniejący zbiór liczb, któryśmy oznaczyli przez (Z'_4) , a któremu później daliśmy nazwę kwaternionów, jest zbiorem liczb, który posiada wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, i jest przytem 4-go rzędu zbiorem tego rodzaju. Zatem dowiedliśmy istnienia zbiorów, rozważanych w twierdzeniu.

Z drugiej znów strony dowiedliśmy, że w każdym zbiorze

liczb, który posiada własności, wyszczególnione w § 154-tym, i jest przytem 4-go rzędu zbiorem tego rodzaju, istnieje zasadniczy układ jednostek i_1, i_2, i_3, i_4 , sprawdzających związki (2) i (4), a nadto widzieliśmy, że zbiór liczb, posiadający taki zasadniczy układ jednostek, jest izomorficzny zbiorowi (Z_4) czyli kwaternionom. Stwierdzamy więc, żeśmy rzeczywiście uzasadnili wyżej wszystkie części twierdzenia.

§ 164. Opierając się na wynikach, uzyskanych w paragrafach poprzednich, łatwo już możemy uzasadnić twierdzenie następujące:

Istnieją dokładnie trzy odmienne od siebie typy zbiorów liczb, posiadających wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, a mianowicie:

- 1°. *Typ liczb rzeczywistych.*
- 2°. *Typ liczb zespolonych pospolitych.*
- 3°. *Typ kwaternionów.*

O tem, że pośród zbiorów liczb, posiadających własności wyszczególnione w § 154-tym, istnieją rzeczywiście zbiory liczb typów, wyszczególnionych w twierdzeniu, i tylko zbiory liczb tych typów, wiemy już bezpośrednio na podstawie twierdzeń, uzasadnionych w paragrafach powyższych, ale pozostaje jeszcze do udowodnienia, że rzeczzone typy liczb są rzeczywiście pomiędzy sobą odmienne.

Spostrzegamy natychmiast, że zbiór kwaternionów nie jest izomorficzny ani zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, ani zbiorowi liczb rzeczywistych, gdyż mnożenie kwaternionów własności przemienności nie posiada, a mnożenie liczb każdego zbioru liczb izomorficznego zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, albo zbiorowi liczb rzeczywistych oczywiście własność przemienności posiada.

Powiadam, że zbiór liczb zespolonych pospolitych nie jest izomorficzny zbiorowi liczb rzeczywistych. Istotnie, załóżmy, że pewien zbiór liczb (R) izomorficzny jest zbiorowi liczb zespolonych pospolitych (Z_p) .

Dowolnie przyjętej liczbie a zbioru (R) odpowiadać będzie liczba homologiczna a' w zbiorze (Z_p) . W tymże zbiorze na podstawie znanych własności liczb zespolonych pospolitych zawsze znajdzie się taka liczba x' , żebyśmy mieli

$$(1) \quad x'^2 = a'.$$

Liczbie x' zbioru (Z_p) odpowiadać będzie liczba homologiczna x w zbiorze (R) , a ze względu na równanie (1) liczba x sprawdzać będzie równanie

$$x^2 = a. \quad (2)$$

Zatem, jeżeli tylko oznaczony zbiór liczb (R) izomorficzny jest zbiorowi liczb zespolonych pospolitych, to dowolnie przyjętej liczbie a tego zbioru odpowiada zawsze jedna przynajmniej, równanie (2) sprawdzająca liczba x tegoż zbioru (R) . Ponieważ zaś nie każdej liczbie rzeczywistej a odpowiada równanie (2) sprawdzająca, druga liczba rzeczywista x , gdyż w przypadku, kiedy liczba a jest ujemna, nie istnieje wartość rzeczywista na x , sprawdzająca równanie (2), przeto zbiór liczb rzeczywistych nie jest izomorficzny zbiorowi liczb zespolonych pospolitych. Ostatecznie więc stwierdzamy, że typy liczb, wymienione w twierdzeniu, są rzeczywiste pomiędzy sobą odmienne, a o to tylko chodziło.

§ 165. Ponieważ, wyszczególniając własności zbioru liczb (Z) , mającego stanowić przedmiot naszych badań, wyraźnie zaznaczyliśmy, że nie wykluczamy przypadku, w którymby zbiór ten był zbiorem wielkości tylko w znaczeniu szerszem, przeto w żadnym ustępie rozważań naszych o zbiorze (Z) nie zakładaliśmy, żeby zbiór ten był zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem. Z drugiej znów strony oczywiście nie rozwinęliśmy żadnych rozważań sprzecznych z założeniem, żeby zbiór (Z) był zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem. Z tego nie wynika jednak jeszcze bezpośrednio, żeby po wprowadzeniu założenia, iż zbiór liczb (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, wszystkie wyniki, do których doszliśmy, zachowały swoje znaczenie, albowiem *a priori* nie jest wykluczeniem, żeby w następstwie tego jednego założenia, iż zbiór (Z) jest zbiorem wielkości w znaczeniu ściślejszem, różnaitość typów, do których mógłby należeć zbiór (Z) , nie mogła być uszczuplona.

Otóż w rzeczywistości *okoliczność ta nie zachodzi*. Żeby przekonać się o tem, należy tylko dowieść, że każdemu zbiorowi liczb (Z) , posiadającemu wszystkie własności, wyszczególnione w § 154-tym, można, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału II-go, nadać charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem. Istotnie, w zbiorze (Z) możemy wybrać dowolnie pośród zasadniczych układów jednostek pewien układ

$$l_1, l_2, \dots, l_n$$