

Istotnie¹⁾, żeby nadać liczbom zespolonym charakter wielkości w znaczeniu ściślejszem, należy tylko określić, co ma właściwie wyrażać nierówność

$$(a, b) < (a', b'),$$

gdzie oznaczyliśmy przez a, b, a' i b' cztery liczby rzeczywiste. Otóż możemy umówić się, że powyższa nierówność wyraża w razie nierówności

$$a \neq a',$$

iż mamy

$$a < a',$$

a w razie równości

$$a = a',$$

że zachodzi nierówność

$$b < b'.$$

Stwierdzamy z największą łatwością, że, nie wykraczając przeciwko zasadom rozdziału II-go, umowę tę możemy dołączyć do definicyi ustawionych wyżej. Zatem przekonywamy się, że nadanie liczbom zespolonym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem jest rzeczywiście rzeczą możliwą. W rzeczywistości możnaby, bez wykroczenia przeciwko zasadom rozdziału II-go, jeszcze inne nadać znaczenie nierównościom postaci

$$(a, b) < (a', b').$$

Ponieważ jednak, jakśmy zaznaczyli wyżej, nie zachodzi potrzeba nadawania liczbom zespolonym charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszem, przeto w dalszym ciągu uważać będziemy liczby zespolone za wielkości tylko w znaczeniu szerszem.

§ 147. Spostrzegamy z największą łatwością, że zachodzą twierdzenia następujące:

I. *Dodawanie liczb zespolonych posiada własność łączności i przemienności.*

II. *Jeżeli dwie liczby zespolone (a, b) i (a', b') sprawdzają nierówność*

$$(a, b) \neq (a', b'),$$

to w takim razie mamy

$$(u, v) + (a, b) \neq (u, v) + (a', b'),$$

jakąkolwiek liczbę zespoloną oznaczylibyśmy przez (u, v) .

¹⁾ J. Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Funktionen, 1870, p. 41.

III. Ze względu na tw. I-sze (§ 29 i 31) istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania liczb zespolonych. Działanie to jest jednoznaczne i wykonalne bez zastrzeżeń, a to według wzoru następującego:

$$(a, b) - (a', b') = (a - a', b - b').$$

IV. W zbiorze liczb zespolonych istnieje (str. 93) moduł dodawania, a moduł ten równa się liczbie zespolonej

$$(0, 0).$$

Przechodzimy teraz do twierdzeń mniej oczywistych.

V. Mnożenie liczb zespolonych posiada własność łączności.

Ze względu na tw. I-sze § 28-go, uzasadnimy to twierdzenie, skoro wykazemy, że zachodzi równość

$$(1) \quad \{(a, b) (a', b')\} \cdot (a'', b'') = (a, b) \cdot \{(a', b') \cdot (a'', b'')\}.$$

Otóż mamy

$$\begin{aligned} \{(a, b) \cdot (a', b')\} \cdot (a'', b'') &= (aa' - bb', ab' + ba') \cdot (a'', b'') = \\ &= ([aa' - bb'] a'' - [ab' + ba'] b'', [aa' - bb'] b'' + [ab' + ba'] a'') = \\ &= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - ba'b'', aa'b'' + ab'a'' + ba'a'' - bb'b''). \end{aligned}$$

W sposób całkiem analogiczny upewnimy się, że mamy

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \{(a', b') \cdot (a'', b'')\} &= \\ &= aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - ba'b'', aa'b'' + ab'a'' + ba'a'' - bb'b''). \end{aligned}$$

Stwierdzamy więc, że równość (1) rzeczywiście zachodzi, a o to tylko jeszcze chodziło.

VI. Mnożenie liczb zespolonych posiada własność przemienności.

Istotnie, ze wzorów

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (a', b') &= (aa' - bb', ab' + ba') \\ (a', b') \cdot (a, b) &= (a'a - b'b, a'b + b'a) \end{aligned}$$

wynika równość

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b),$$

która wyraża, że w razie istnienia dwóch czynników twierdzenie zachodzi. Z tego zaś wynika na podstawie tw. V-go paragrafu niniejszego i tw. II-go § 28-go, że twierdzenie zachodzi w rzeczywistości bez względu na liczbę czynników.

VII. Żeby iloczyn jakiegokolwiek skończonej liczby liczb zespolonych równał się modułowi dodawania, koniecznem jest i wystarcza, żeby jeden przynajmniej czynnik równał się modułowi dodawania.

Powiadam najpierw, że przy dwóch czynnikach twierdzenie zachodzi. Istotnie, równość

$$(a, b) \cdot (a', b') = (0, 0) \quad (1)$$

równoważna jest układowi

$$\begin{aligned} a \cdot a' - b \cdot b' &= 0 \\ a \cdot b' + b \cdot a' &= 0, \end{aligned}$$

a równości te pociągają za sobą równości

$$\begin{aligned} a(a'^2 + b'^2) &= 0 \\ b(a'^2 + b'^2) &= 0, \end{aligned}$$

z których wynika, że albo jest

$$a = b = 0, \quad (2)$$

albo $a'^2 + b'^2 = 0$, t. j.

$$a' = b' = 0, \quad (3)$$

Ponieważ zaś każdy z układów (2) i (3) stanowi warunek wystarczający, ażeby zachodziła równość (1), przeto przy dwóch czynnikach twierdzenie zachodzi rzeczywiście. Dalej drogą indukcji matematycznej wnosimy już łatwo, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

VIII. Mnożenie liczb zespolonych posiada własność rozdzielności w stosunku do mnożenia i do odejmowania.

Powiadam najpierw, że twierdzenie zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy chodzi o iloczyn sumy dwóch liczb zespolonych (a, b) i (a', b') jakiegokolwiek i trzeciej liczby zespolonej (a'', b'') . Istotnie, ze względu na własność przemienności mnożenia liczb zespolonych wykażemy, że okoliczność ta zachodzi, jeżeli tylko udowodnimy, że zachodzi równość

$$\{(a, b) + (a', b')\} (a'', b'') = (a, b) \cdot (a'', b'') + (a', b') \cdot (a'', b'') \quad (1)$$

bez względu na wartości liczb zespolonych (a, b) , (a', b') i (a'', b'') . Otóż mamy

$$\begin{aligned} \{(a, b) + (a', b')\} (a'', b'') &= (a + a', b + b') \cdot (a'', b'') = \\ &= ([a + a'] \cdot a'' - [b + b'] \cdot b'', [a + a'] \cdot b'' + [b + b'] \cdot a'') \end{aligned} \quad (2)$$

oraz

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot (a'', b'') &= (aa'' - bb'', ab'' + ba'') \\ (a', b') \cdot (a'', b'') &= (a'a'' - b'b'', a'b'' + b'a'')\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}(3) \quad & (a, b) \cdot (a'', b'') + (a', b') \cdot (a'', b'') = \\ & = ([a + a'] a'' - [b + b'] b'', [a + a'] b'' + [b + b'] a''),\end{aligned}$$

a z równości (2) i (3) wynika właśnie równość (1), którą pragniemy uzasadnić.

Opierając się na uzyskanym wyniku i uwzględniając tw. I-sze § 30-go oraz tw. II-gie § 32-go, stwierdzamy natychmiast, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

IX. Ze względu na własność przemienności mnożenia liczb zespolonych istnieje (§ 31) jeden tylko rodzaj dzielenia liczb zespolonych. Jeżeli dzielnik (a', b') jest od modułu dodawania odmienny, to bez względu na wartość dzielnej (a, b) dzielenie jest wykonalne, a iloraz jest określony jednoznacznie i może być wyznaczony według wzoru

$$(1) \quad (a, b) : (a', b') = \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \right).$$

Jeżeli zaś dzielnik równa się modułowi dodawania, to dzielenie jest wykonalne tylko w razie, kiedy dzielna także równa się modułowi dodawania, ale w takim razie iloraz jest całkiem nieoznaczony.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, należy tylko zbadać problem wyznaczenia liczby zespolonej (x, y) z równania

$$(2) \quad (a' b') \cdot (x, y) = (a, b).$$

W przypadku szczególnym, kiedy dzielnik (a', b') równa się modułowi dodawania $(0, 0)$, zachodzi na podstawie tw. VII-go równość

$$(a', b') \cdot (x, y) = (0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0)$$

bez względu na wartość liczby (x, y) ; wnosimy stąd natychmiast, że w przypadku, kiedy dzielnik równa się modułowi dodawania, dzielenie jest wykonalne zgodnie z brzmieniem twierdzenia tylko w razie, kiedy i dzielna równa się modułowi dodawania, i prowadzi wówczas do wyniku całkiem nieoznaczonego. Zakładamy tedy, że mamy

$$(3) \quad (a', b') \neq (0, 0).$$

Mamy w każdym razie

$$(a', b') \cdot (x, y) = (a'x - b'y, b'x + a'y),$$

zatem równanie (2) równoważne jest układowi następującemu:

$$\left. \begin{aligned} a'x - b'y &= a \\ b'x + a'y &= b. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ponieważ na podstawie nierówności (3) jedna przynajmniej z liczb rzeczywistych a' i b' jest od zera odmienna, ponieważ zatem mamy niezawodnie

$$a'^2 + b'^2 > 0,$$

przeto istnieje dokładnie jeden układ wartości na x i y , sprawdzających równania (4), a mianowicie

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2},$$

$$y = \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

Wnosimy stąd natychmiast, że twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

X. Jeżeli oznaczmy przez u , v i w trzy liczby zespolone, to warunek konieczny i wystarczający, ażeby równość

$$u \cdot v = u \cdot w \quad (1)$$

równoważna była równości

$$v = w, \quad (2)$$

a zatem nierówność

$$u \cdot v \neq u \cdot w \quad (3)$$

nierówności

$$v \neq w, \quad (4)$$

polega na nierówności

$$u \neq (0, 0). \quad (5)$$

1°. Warunek podany w twierdzeniu jest konieczny, jeżeli bowiem on spełniony nie jest, jeżeli więc zachodzi równość

$$u = (0, 0),$$

to na podstawie tw. VII-go równość (1) zachodzi bez względu na wartości liczb zespolonych v i w , a więc i w razie kiedy (2) nie zachodzi.

2°. Rzeczony warunek jest wystarczający. Istotnie, jeżeli warunek ten jest spełniony, jeżeli więc zachodzi nierówność (5), to równość (1) pociąga za sobą równość (2), gdyż w razie przeciwnym iloraz podziału wspólnej wartości q iloczynów $u.v$ i $u.w$, przez liczbę u nie byłby oznaczony jednoznacznie pomimo nierówności (5), a więc wbrew tw. IX-temu. Ponieważ zaś równość (2) pociąga za sobą równość (1) na podstawie jednoznaczności mnożenia, przeto równości (1) i (2) są rzeczywiście pomiędzy sobą równoważne. Z równoważności zaś równości (1) i (2) wynika, że nierówność (3) równoważna jest nierówności (4).

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

XI. *W zbiorze liczb zespolonych istnieje moduł mnożenia (str. 292) i równa się liczbie zespolonej*

$$(1, 0).$$

Istotnie, opierając się na tw. IX-tem, stwierdzamy z łatwością, że warunek konieczny i wystarczający, ażeby zachodziła równość

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$$

bez względu na wartość liczby zespolonej (a, b) , polega na równości

$$(x, y) = (1, 0),$$

a równość ta wyraża właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Z twierdzeń uzasadnionych w paragrafie niniejszym wnosimy z największą łatwością, że zbiór liczb zespolonych posiada wszystkie własności, wyszczególnione w § 97-ym. Zatem cała teoria, rozwinięta w rzeczonym paragrafie, stosuje się w szczególności i do liczb zespolonych pospolitych.

§ 148. *Zbiór (Z_0) wszystkich tych liczb zespolonych, z których każda jest liczbą zespoloną o drugim wyrazie równym zeru, a więc zbiór wszystkich liczb zespolonych postaci $(a, 0)$, izomorficzny jest zbiorowi (R) liczb rzeczywistych, a przytem elementami homologicznymi w obu zbiorach są: liczba zespolona i liczba rzeczywista równa pierwszemu wyrazowi liczby zespolonej.*

Istotnie, jeżeli liczbę zespoloną postaci $(a, 0)$ i liczbę rzeczywistą l uważać będziemy za odpowiadające pomiędzy sobą elementy w razie, i tylko w razie, kiedy zachodzi równość

$$l = a,$$

to ta odpowiedniość wzajemna elementów zbiorów (Z_0) i (R) oczywiście czynić będzie zadość (§ 95) trzem pierwszym warunkom izomorficznym tych dwóch zbiorów wielkości. Chodzi więc tylko o warunek 4-ty.

Otóż jeżeli przy wspomnianej odpowiedniości wzajemnej liczb rzeczywistych i liczb zespolonych zbioru (Z_0) jakimkolwiek liczbom zespolonym $(a, 0)$ i $(a', 0)$ odpowiadają odpowiednio liczby rzeczywiste l i l' , to sumie $(a, 0) + (a', 0)$ odpowiadać będzie suma $l + l'$, a iloczynowi $(a, 0) \cdot (a', 0)$ iloczyn $l \cdot l'$. Istotnie mamy

$$\begin{aligned}(a, 0) + (a', 0) &= (a + a', 0) \\ (a, 0) \cdot (a', 0) &= (a \cdot a', 0),\end{aligned}$$

a ponieważ ze względu na równości

$$l = a \quad \text{ i } \quad l' = a'$$

mamy

$$\begin{aligned}l + l' &= a + a' \\ l \cdot l' &= a \cdot a',\end{aligned}$$

przeto wyrażenia $l + l'$ i $l \cdot l'$ przedstawiają istotnie liczby rzeczywiste, odpowiednio odpowiadające liczbom zespolonym, przedstawionym przez wzory

$$(a, 0) + (a', 0) \quad \text{ i } \quad (a, 0) \cdot (a', 0).$$

Uzasadniliśmy przeto w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego możemy w sposób, omówiony w § 95-tym, „zespolic” zbiór liczb rzeczywistych i zbiór liczb zespolonych w jeden zbiór liczb. Uczyńmy to rzeczywiście i umówmy się, że odtąd obejmować będziemy nazwą liczby zespolonej nie tylko wszelką liczbę zespoloną, ale także i wszelką liczbę rzeczywistą, uważając zatem liczby rzeczywiste za szczególne liczby zespolone.

Jeżeli tedy oznaczmy przez l jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, a przez a i b pierwszy i drugi wyraz jakiegokolwiek liczby zespolonej (a, b) , to mieć będziemy:

$$\begin{aligned}l + (a, b) &= (l, 0) + (a, b) = (a + l, b) \\ l \cdot (a, b) &= (l, 0) \cdot (a, b) = (al, bl).\end{aligned}$$

Na podstawie tych równości mamy:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= a + b \cdot (0, 1).\end{aligned}$$

Mamy więc
przyjmując
Liczba zespolona

$$(a, b) = a + bi,$$

$$i = (0, 1).$$

$$i = (0, 1)$$

zowie się jednostką urojoną (dawniej liczby zespolone nazywały się, w niestosownem przeciwstawieniu liczbom rzeczywistym, liczbami urojonemi). Stosownie moglibyśmy liczbie zespolonej $(0, 1)$ nadać nazwę drugiej jednostki zasadniczej liczb analitycznych, uważając jednocześnie wyrażenie pierwsza jednostka zasadnicza liczb analitycznych za nową nazwę liczby jedność.

Przedstawiając liczbę zespoloną w postaci $a + bi$ przy zachowaniu poprzedniego znaczenia symbolów a , b i i , zwiemy liczbę a częścią rzeczywistą, a liczbę b współczynnikiem jednostki urojonej liczby zespolonej $a + bi$. Mamy

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Zatem kwadrat jednostki urojonej równa się liczbie -1 .

Z twierdzenia tego wynika, co następuje: Przedstawiając zgodnie z symbolistyką najbardziej rozpowszechnioną liczby zespolone przez symbole postaci

$$a + bi,$$

gdzie a i b oznaczają dwie liczby rzeczywiste, a symbol i jednostkę urojoną, możemy reguły rachowania liczbami zespolonemi przedstawić w postaci jedynej reguły następującej: *Liczby zespolone należy traktować tak, jak gdyby liczby te były dwumianami całkowitymi o współczynnikach rzeczywistych liczby rzeczywistej liczbowo nieoznaczonej*

$$i,$$

z tą tylko odmianą, iż kwadrat symbolu

$$i$$

należy uważać za liczbę równą liczbie

$$-1.$$

Że reguła powyższa jest uzasadniona, tego, ze względu na wyniki uzyskane poprzednio, oczywiście udowadniać obecnie nie potrzeba; ale zapytać się możemy, czy reguła ta wystarcza do wyznaczenia części rzeczywistej i współczynnika jednostki urojonej liczby zespolonej, równej wynikowi jakiegokolwiek kombinacji liczb zespolonych danych drogą działań zasadniczych. Spostrzegamy na-

tychmiast, że okoliczność ta zachodzi w razie dodawania lub odejmowania, albowiem mamy

$$\begin{aligned}(a + bi) + (a' + b'i) &= a + bi + a' + b'i \\ &= (a + a') + (b + b')i\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}(a + bi) - (a' - b'i) &= a + bi - a' - b'i \\ &= (a - a') + (b - b')i.\end{aligned}$$

Omawiana okoliczność zachodzi także i przy mnożeniu. Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + (ab' + a'b)i + bb'i^2 \\ &= aa' - bb' + (ab' + a'b)i.\end{aligned}$$

Pozostaje więc tylko do rozważenia przypadek dzielenia. Uważajmy tedy iloraz

$$\frac{a + bi}{a' + b'i},$$

zakładając, że dzielnik jest od zera odmienny. Mamy tedy

$$a'^2 + b'^2 > 0,$$

zatem liczba

$$a' - b'i$$

będzie liczbą zespoloną od zera odmienną; mamy więc

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{aa' + (a'b - ab')i - bb'i^2}{a'^2 + b'^2 i^2},$$

skąd

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i.$$

Stwierdzamy więc, że powyższa reguła rzeczywiście jest we wszystkich przypadkach wystarczająca.

Przed chwilą mieliśmy sposobność rozważania dwóch liczb zespolonych $a' + b'i$ i $a - b'i$, które tylko znakiem współczynnika jednostki urojonej pomiędzy sobą się różniły. Dwie takie liczby zespolone zowią się liczbami zespolonemi, ze sobą sprzężonemi.

Zwracając się do tw. IV-go i XI-go paragrafu poprzedzającego, spostrzegamy natychmiast, że na podstawie wyników paragrafu niniejszego możemy wysłowić twierdzenia następujące:

Moduł dodawania liczb zespolonych równa się zeru.

Moduł mnożenia liczb zespolonych równa się jedności.

Z uzyskanych przez nas twierdzeń o liczbach zespolonych wynika bezpośrednio, że pośród rodzajów liczb, objętych przez teorię wyłożoną w § 97-ym, znajdują się i liczby zespolone.

§ 149. Jakąkolwiek liczbę zespoloną $a + bi$ rozważalibyśmy, zawsze istnieć będzie liczba rzeczywista nie ujemna ϱ i liczba θ taka, żebyśmy mieli

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho \cos \theta = a \\ \varrho \sin \theta = b. \end{cases}$$

Istotnie, z równań tych mamy

$$(2) \quad \varrho^2 = a^2 + b^2.$$

Ze względu na związki

$$(3) \quad \varrho \geq 0$$

równanie (2) określa liczbę ϱ w zupełności.

Załóżmy teraz, że liczba ϱ sprawdza związki (2) i (3). W przypadku szczególnym, kiedy mielibyśmy

$$a = b = 0,$$

mielibyśmy także

$$\varrho = 0$$

i uczynilibyśmy zatem zadość równaniom (1), przyjmując na θ jakąkolwiek wartość. Jeżeli zaś jedna przynajmniej z liczb a i b jest od zera odmienna, to mamy

$$\varrho > 0$$

i równania (1) są oczywiście równoważne równaniom następującym:

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\varrho} \\ \sin \theta = \frac{b}{\varrho}. \end{cases}$$

Ponieważ zaś na podstawie równania (2) mamy

$$\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\varrho}\right)^2 = 1,$$

przeto ze względu na znane twierdzenie z goniometrii istnieje nieskończenie wiele wartości liczby θ , sprawdzających równanie (4); jeżeli jedną z nich oznaczymy przez θ_0 , to mamy na θ ogólny wzór następujący

$$(5) \quad \theta = \theta_0 + 2n\pi,$$

oznaczając, jak zwykle, przez π stosunek okręgu koła do średnicy, a przez n liczbę całkowitą dowolną.

Liczba ρ zowie się modułem, a liczba θ argumentem liczby zespolonej $a + bi$. Moduł liczby zespolonej zowie się także jej wartością bezwzględną. Jeżeli jakikolwiek symbol x oznacza pewną liczbę zespoloną, to moduł tej liczby zespolonej czyli jej wartość bezwzględną oznaczamy przez

$$|x|.$$

Na podstawie powyższej dyskusji równań (1) mamy twierdzenie następujące: *Każda liczba zespolona ma moduł określony jednoznacznie, a argument jej ma nieskończenie wiele wartości; w przypadku szczególnym, kiedy moduł równa się zeru, argument jest całkiem nieoznaczony; jeżeli zaś moduł jest od zera odmienny, to wzór (5), gdzie oznaczyliśmy przez θ_0 jedną z wartości argumentu, a przez n liczbę całkowitą (ujemną lub dodatnią), jest ogólnym wzorem na argument θ rozważanej liczby zespolonej.* Możemy oczywiście dodać, że moduł i którakolwiek z wartości argumentu określają jednoznacznie odnośną liczbę zespoloną.

Spostrzegamy natychmiast, co następuje:

1°. Żeby liczba zespolona równała się zeru, koniecznem jest i wystarczy, żeby jej moduł równał się zeru.

2°. Żeby dwie liczby zespolone od zera odmienne były pomiędzy sobą równe, koniecznem jest i wystarczy, żeby moduły tych liczb były pomiędzy sobą równe, a różnica argumentów równała się wielokrotności liczby 2π .

3°. Zmiana znaku argumentu liczby zespolonej bez zmiany wartości bezwzględnej tegoż i bez zmiany wartości modułu przemienia rozważaną liczbę zespoloną na liczbę zespoloną z nią sprzężoną.

4°. Iloczyn jakiegokolwiek liczby zespolonej przez liczbę zespoloną z nią sprzężoną równa się kwadratowi wspólnej wartości modułów obu liczb.

I. Moduł sumy lub różnicy dwóch liczb zespolonych nie jest ani mniejszy od różnicy modułów tych liczb, ani większy od ich sumy.

Ponieważ mamy

$$a + bi - (a' + b'i) = a + bi + (-a') + (-b')i,$$

a moduł liczby zespolonej

$$(-a') + (-b')i$$

oczywiście równa się modułowi liczby

$$a' + b'i,$$

przeto przy uzasadnieniu wysłowionego twierdzenia możemy poprzestać bez szkody dla ogólności na rozważaniu przypadku sumy. Ponieważ mamy

$$a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i,$$

przeto na moduł R sumy

$$a + bi + a' + b'i$$

mamy równanie

$$(1) \quad R^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2 = \varrho^2 + 2(aa' + bb') + \varrho'^2,$$

oznaczając przez ϱ i ϱ' moduły liczb $a + bi$ i $a' + b'i$. Z drugiej znów strony mamy

$$(aa' + bb')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (ab' + a'b)^2,$$

skąd

$$(aa' + bb')^2 \leq \varrho^2 \varrho'^2.$$

Mamy więc

$$- \varrho \varrho' \leq aa' + bb' \leq + \varrho \varrho'.$$

Na podstawie tych związków wynikają z równania (1) związki następujące:

$$R^2 \leq \varrho^2 + 2\varrho\varrho' + \varrho'^2 = (\varrho + \varrho')^2$$

$$R^2 \geq \varrho^2 - 2\varrho\varrho' + \varrho'^2 = (\varrho - \varrho')^2,$$

skąd

$$|\varrho - \varrho'| \leq R \leq \varrho + \varrho'.$$

Związki te wyrażają właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika natychmiast wniosek następujący:

Moduł sumy algebraicznej liczb zespolonych w żadnym razie od sumy modułów składników większy być nie może.

II. *Moduł iloczynu dowolnej liczby liczb zespolonych równa się iloczynowi modułów tych liczb, a jedna z wartości argumentu — sumie ich argumentów.*

Oznaczmy przez ϱ i ϱ' moduły, a przez θ i θ' argumenty dwóch liczb zespolonych x i x' . Mamy tedy

$$x = \varrho \cos \theta + i\varrho \sin \theta,$$

$$y = \varrho' \cos \theta' + i\varrho' \sin \theta',$$

skąd

$$xy = \varrho\varrho' (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i\varrho\varrho' (\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta)$$

czyli

$$xy = \varrho\varrho' \cos (\theta + \theta') + i\varrho\varrho' \sin (\theta + \theta').$$

Równość ta wyraża twierdzenie, o które chodziło przy dwóch czynnikach. Ponieważ zaś drogą indukcji matematycznej możemy natychmiast sprawdzić, że twierdzenie zachodzi, jakkolwiek, byleby od liczby 2 nie mniejsza była liczba czynników, przeto uważamy twierdzenie za uzasadnione.

Z twierdzenia powyższego wynika natychmiast, że *moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych w razie, gdy dzielnik jest od zera odmienny, równa się ilorazowi modułu dzielnej przez moduł dzielnika, a jedna z wartości argumentu — reszcie odejmowania argumentu dzielnika od argumentu dzielnej.*

III. *Pierwiastek n -tego stopnia jakiegokolwiek, byle od zera odmiennych liczb zespolonej (lub rzeczywistej) a posiada dokładnie tyle odmiennych pomiędzy sobą wartości, ile wynosi liczba całkowita i dodatnia n .* Innymi słowy, istnieje dokładnie n odmiennych pomiędzy sobą liczb zespolonych takich, żeby n -ta potęga każdej z nich równała się liczbie a .

Żeby twierdzenie to uzasadnić, przyjmijmy

$$a = \varrho (\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1)$$

oznaczając przez ϱ moduł, a przez θ argument liczby a , i usiłujmy wyznaczyć moduł R i argument φ liczby zespolonej x , sprawdzając równanie

$$x^n = a. \quad (2)$$

Na podstawie tw. II-go mamy:

$$x^n = R^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3)$$

Ponieważ stwierdziliśmy wyżej, że warunek konieczny i wystarczający równości dwóch liczb zespolonych od zera odmiennych polega na równości modułów i na tem, żeby różnica argumentów była wielokrotnością liczby 2π , przeto z równości (1), (2) i (3) mamy

$$R^n = \varrho \quad (4)$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad (5)$$

oznaczając przez k liczbę całkowitą dowolną.

Jakąkolwiek wartość miałaby liczba k , możemy zawsze przyjąć

$$(6) \quad k = nt + \nu,$$

oznaczając przez t i ν dwie liczby całkowite, z których druga, ν , sprawdza nierówności

$$(7) \quad 0 \leq \nu < n.$$

Na podstawie wzoru (6) równość (5) równoważna jest następującej:

$$(8) \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi + 2t\pi.$$

Ponieważ równanie (4) określa liczbę dodatnią R jednoznacznie, a z drugiej strony wartość liczby całkowitej t na wartość liczby x pozostaje bez wpływu, przeto wszelką taką wartość liczby x , która sprawdza równanie (2), możemy przedstawić przez wzór następujący:

$$(9) \quad x = R \left\{ \cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{\nu}{n} 2\pi \right) \right\},$$

gdzie ν oznacza liczbę całkowitą, sprawdzającą związki (7). Z drugiej strony wzór (9) daje na x wartość sprawdzającą równanie (2), jakąkolwiek wartość całkowitą przyjęlibyśmy ν , a nadto różnica dwóch takich wartości na φ , które wynikają ze wzoru (8), przyjmując kolejno na ν dwa związki (7), sprawdzające odmienne pomiędzy sobą wartości, w żadnym razie wielokrotnością liczby 2π być nie może. Zatem mamy dokładnie tyle równości (2) sprawdzających wartości liczby x , ile tychże dostarcza wzór (8), przyjmując kolejno na ν wartości

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Przeto zgodnie z brzmieniem twierdzenia równanie (2) posiada dokładnie n rozwiązań w stosunku do niewiadomej x .

Uwaga. Pierwiastek n -tego stopnia liczby zespolonej równej zeru oczywiście ma jedną tylko wartość, która równa się zeru.

§ 150. Obecnie pragniemy podać geometryczną interpretację liczb zespolonych, zastosowując te liczby do problemu mierzenia wektorów w płaszczyźnie. Ale w tym celu koniecznem jest wprowadzenie pojęcia płaszczyzny zorientowanej i temu przedmiotowi poświęcamy niniejszy paragraf.

Przyjawszy w oznaczonej płaszczyźnie (P) oznaczoną oś (x)