

## XVI. Ułamki łańcuchowe.

§ 137. Przyjawszy dowolnie dwa ciągi skończone liczb, z których pierwszy

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2 \dots a_n,$$

obejmuje  $n + 1$  wyrazów ( $n \geq 1$ ), a drugi

$$(2) \quad b_1, b_2, b_3 \dots b_n,$$

tylko  $n$  elementów, możemy dla każdej, byle od jedności nie mniejszej, a od liczby  $n$  nie większej wartości liczby całkowitej  $p$ , określić znaczenie symbolu  $W_p$  w sposób następujący: W razie równości

$$p = 1,$$

symbolu  $W_1$  oznacza wzór

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1},$$

a przy każdej innej wartości  $k + 1$  liczby  $p$  symbol  $W_{k+1}$  przedstawia wzór, w który przeszedłby wzór  $W_k$ , gdybyśmy zastąpili we wzorze  $W_k$  liczbę  $a_k$  przez wyrażenie

$$a_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}.$$

Definicja powyższa rzeczywiście określa wzór  $W_p$  dla każdej, byle od jedności nie mniejszej, a od liczby  $n$  nie większej wartości liczby całkowitej  $p$ , jakkolwiek od jedności nie mniejszą wartość miałaby liczba  $n$ . Istotnie, znaczenie symbolu  $W_1$  określiliśmy bezpośrednio, i to w taki sposób, iż liczba  $a_1$  wchodzi do wzoru, który przedstawia symbol  $W_1$ .

Z drugiej znów strony, gdyby dla pewnej wartości  $p = k$  liczby  $p$  wzór  $W_k$  był ustawiony i gdyby nadto liczba  $a_k$  do wzoru

tego wchodziła, to na podstawie powyższej definicyi wartości  $p=k+1$  liczby  $p$  odpowiadałby oznaczony wzór  $W_{k+1}$ , a do wzoru tego wchodziłaby liczba  $a_{k+1}$ , bylebyśmy mieli

$$k+1 \leq n.$$

Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej rozważana definicya rzeczywiście określa wzór  $W_p$  dla wszystkich wyżej oznaczonych wartości wskaźnika  $p$ , jakkolwiek, byle od jedności nie mniejszą, wartość miała liczba  $n$ .

Na przykład, dla  $p=2$  mamy

$$a_0 = \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}},$$

dla  $p=3$  mamy

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}},$$

zakładając oczywiście w pierwszym przypadku, że liczba  $n$  nie jest mniejszą od liczby 2, a w drugim, że liczba ta nie jest mniejsza od liczby 3.

Wzór  $W_p$  zowie się ułamkiem łańcuchowym lub ułamkiem ciągłym, liczba  $a_0$  — początkowym jego wyrazem, układ liczb  $b_i, a_i$  ( $i \leq p$ ) — ogniwnem rzędu  $i$  ułamka łańcuchowego  $W_p$ , liczba  $b_i$  — licznikiem, a liczba  $a_i$  — mianownikiem tego ogniwa.

Zamiast wyrażeń licznik ogniwa rzędu  $i$  i mianownik ogniwa rzędu  $i$  oznaczonego ułamka łańcuchowego używać będziemy niekiedy wyrażenia, licznik rzędu  $i$  i mianownik rzędu  $i$  rozważanego ułamka łańcuchowego.

Rozszerzając nieco znaczenie wyrazu ułamek łańcuchowy, zastrzegamy sobie prawo nadawania nazwy ułamka łańcuchowego o zerze ogniwach każdej liczbie, która w takim razie stanowi początkowy i jedyny wyraz ułamka łańcuchowego.

W razie nierówności

$$q < p$$

ułamek łańcuchowy  $W_q$  zowie się reduktem rzędu  $q$  ułamka łańcuchowego  $W_p$ .

Rzecz jasna, zdarzyć się może, że jedno z dzieleń zaznaczonych we wzorze, stanowiącym na podstawie definicyi powyższej ułamek łańcuchowy, jest niewykonalne lub nieoznaczone; w takim razie rozważany ułamek łańcuchowy nie posiada, rzecz jasna, żadnej oznaczonej wartości; okoliczność tę wyrażać będziemy krótko, orzekając, że wspomniany ułamek łańcuchowy ma postać iluzoryczną.

Żeby usunąć wszelkiego rodzaju nieporozumienia nadmieniamy, że oznaczony ułamek łańcuchowy może posiadać oznaczoną wartość, chociażby pewne redukt y jego miały postać iluzoryczną; mamy na przykład

$$1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{1}} = 2,$$

pomimo, iż redukt pierwszego rzędu powyższego ułamka łańcuchowego, mianowicie ułamek łańcuchowy

$$1 + \frac{1}{0},$$

ma postać iluzoryczną.

Ze stanowiska techniki drukarskiej i techniki pisarskiej wzory, którym daliśmy nazwę ułamków łańcuchowych, są w razie, kiedy liczba ogni w większa jest od jednośc, bardzo niedogodne.

Z tej przyczyny używa się różnych symbolów do przedstawiania ułamków łańcuchowych. Tu poprzestaniemy na podaniu dwóch najbardziej dogodnych sposobów do przedstawiania rzeczonych wyrażeń.

**Pierwszy sposób.** Znakowanie, które pragniemy określić teraz, nabiera sobie właściwego charakteru tylko w razie, kiedy liczba ogni ułamka łańcuchowego większa jest od jednośc. Zatem symbolem ułamka łańcuchowego, który redukuje się do początkowego wyrazu  $a_0$ , będzie sam symbol  $a_0$ , a symbolem ułamka łańcuchowego, którego początkowym wyrazem jest pewna liczba  $a_0$ , a licznikiem i mianownikiem pierwszego i jedyne go ogniwa odpowiednio pewne liczby  $b_1$  i  $a_1$ , będzie symbol

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1}.$$

Natomiast symbol ułamka łańcuchowego o  $k+1$  ogniwach ( $k \geq 1$ ) tworzymy, dopisując po prawej stronie symbolu reduktu rzędu  $k$  rzeczzonego ułamka łańcuchowego wyrażenie

$$+ \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}},$$

gdzie  $b_{k+1}$  i  $a_{k+1}$  oznaczają odpowiednio licznik i mianownik ogniwa rzędu  $k+1$ .

Jeżeli oznaczymy przez  $a_0$  początkowy wyraz, a przez  $b_k$  i  $a_k$  ogólnie odpowiednio licznik i mianownik pewnego ułamka łańcuchowego o  $n$  ogniwach, to symbolem tego ułamka łańcuchowego będzie na podstawie powyższych umów symbol

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n}.$$

Gdyby w szczególności zachodziła na przykład równość

$$n = 4,$$

to symbol powyższy przyjąłby postać następującą:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_4} + \frac{b_4}{a_4}.$$

**Drugi sposób.** Oznaczając przez  $s$  dowolnie przyjętą liczbę, a przez  $b_i$  i  $a_i$  ogólnie wyrazy  $i$ -tego rzędu dwóch ciągów o równej liczbie  $n$  wyrazów, przez  $v$  jakąkolwiek liczbę całkowitą, od  $n$  nie większą, a przez  $\mu$  liczbę całkowitą od zera większą, ale od liczby  $v$  nie większą, mamy niekiedy powody do rozważania ułamka łańcuchowego, którego wyrazem początkowym byłaby liczba  $s$ , a licznikiem i mianownikiem ogniwa rzędu  $k$  ( $\mu \leq k \leq v$ ) odpowiednio liczby  $a_{\mu+k-1}$  i  $b_{\mu+k-1}$ .

Taki ułamek łańcuchowy, którego symbolem w razie posługiwania się symbolistyką określoną poprzednio i istnienia nierówności

$$v > \mu + 1$$

byłby symbol

$$s + \frac{b_\mu}{a_\mu} + \frac{b_{\mu+1}}{a_{\mu+1}} + \dots + \frac{b_v}{a_v},$$

oznaczamy krótko przez symbol następujący:

$$\left\{ s, \frac{b_i}{a_i} \right\}_{i=\mu}^v.$$

§ 138. Oznaczmy ogólnie przez  $a_0$  jakąkolwiek liczbę, a przez  $a_i$  i  $b_i$  ogólnie wyrazy rzędu  $i$  dwóch ciągów nieskończonych.

W takim razie ciąg nieskończony

$$(1) \quad \left\{ a_0, \frac{b_1}{a_1} \right\}_{i=1}^{i-1}, \left\{ a_0, \frac{b_i}{a_i} \right\}_{i=1}^2, \left\{ a_0, \frac{b_i}{a_i} \right\}_{i=1}^3, \dots$$

czyli ciąg, którego  $n$ -tym wyrazem jest ułamek łańcuchowy

$$(2) \quad \left\{ a_0, \frac{b_i}{a_i} \right\}_{i=1}^n,$$

zowie się ułamkiem łańcuchowym nieskończonym, ułamek łańcuchowy (2) — redukt rzędu  $n$  tego ułamka łańcuchowego nieskończonego, układ liczb  $(b_i, a_i)$  — ogniwnem rzędu  $i$ , a liczby  $b_i$  i  $a_i$  licznikiem i mianownikiem tego ogniwa.

Powyższy ułamek łańcuchowy nieskończony oznaczamy przez symbol

$$(3) \quad \left\{ a_0, \frac{b_i}{a_i} \right\}_{i=1}^{\infty},$$

albo i przez symbol

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots$$

Żeby wyrazić, iż każdy wyraz ciągu (1) ma oznaczoną wartość, a sam ten ciąg jest zbieżny, orzekamy, że ułamek łańcuchowy (1) jest zbieżny. Granicę ciągu (1) zwiemy w takim razie wartością ułamka łańcuchowego (2), który wówczas oczywiście przybiera charakter wielkości.

Ze stanowiska rachunków liczbowych najważniejsze ułamki łańcuchowe są te, w których mianownik każdego ogniwa równa się liczbie od jedności nie mniejszej, a licznik jedności. Takie ułamki łańcuchowe zowią się ułamiakami łańcuchowymi regularnymi. W dziele tem poprzestaniemy wyłącznie na badaniu ułamków łańcuchowych regularnych. Wobec tego używać będziemy często dla krótkości, wyrażenia „ułamek łańcuchowy“ zamiast wyrażenia „ułamek łańcuchowy regularny“.

§ 139. I. *Każdy ułamek łańcuchowy regularny skończony, a więc każdy redukt jakiegokolwiek ułamka łańcuchowego regularnego skończonego lub nieskończonego ( $L$ ) ma oznaczoną wartość. Jeżeli oznaczymy przez  $a_0$  wyraz początkowy ułamka łańcuchowego ( $L$ ) oraz ogólnie*

przez  $a_k$  mianownik ogniwa rzędu  $k$  jeżeli nadto określimy liczby  $P_n$  i  $Q_n$ , przyjmując

$$\left. \begin{aligned} P_{-1} &= 1, & Q_{-1} &= 0, \\ P_0 &= a_0, & Q_0 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} P_k &= P_{k-1}a_k + P_{k-2}, \\ Q_k &= Q_{k-1}a_k + Q_{k-2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

przy każdej wartości całkowitej liczby  $k$  od jedności nie mniejszej, ale o ile chodzi o ułamek łańcuchowy skończony, od liczby ogniw ułamka ( $\mathcal{L}$ ) nie większej, to w takim razie mamy

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k}, \quad (3)$$

oznaczając przez  $R_k$  wartość reduktu rzędu  $k$  ułamka łańcuchowego ( $\mathcal{L}$ ), albo wartość tego ułamka łańcuchowego, gdyby liczba  $k$  równała się liczbie jego ogniw.

Żeby twierdzenie powyższe uzasadnić, zważmy najpierw, że na podstawie zasady indukcji matematycznej wzory (1) i (2) nie tylko określają w zupełności liczby  $P_k$  i  $Q_k$  dla wszystkich w twierdzeniu rozważanych wartości wskaźnika  $k$ , ale dają jeszcze wartości od zera większe na liczby  $Q_k$ . Następnie zważmy, że mamy

$$R_0 = a_0 = \frac{a_0}{1}$$

oraz

$$R_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

czyli

$$R_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1};$$

stwierdzamy więc, że wzór (3) rzeczywiście zachodzi dla  $k=0$  i dla  $k=1$ .

Założmy chwilowo, że wzór (3) zachodzi dla wszystkich od pewnej liczby całkowitej  $p$  ( $p \geq 1$ ) nie większych wartości liczby  $k$ . Ze względu na wzory (2) mamy tedy

$$R_p = \frac{P_{p-1}a_p + P_{p-2}}{Q_{p-1}a_p + Q_{p-2}}, \quad (4)$$

Ponieważ zaś  $R_p$  przechodzi w  $R_{p+1}$  przez podstawienie wyrażenia  $a_p + \frac{1}{a_{p+1}}$  na miejsce liczby  $a_p$ , ponieważ nadto liczby  $P_{p-1}$ ,  $P_{p-2}$ ,  $Q_{p-1}$  i  $Q_{p-2}$  od wartości liczby  $a_p$  nie zależą, przeto ze wzoru (4) mamy

$$R_{p+1} = \frac{P_{p-1} \left( a_p + \frac{1}{a_{p+1}} \right) + P_{p-2}}{Q_{p-1} \left( a_p + \frac{1}{a_{p+1}} \right) + Q_{p-2}},$$

skąd

$$R_{p+1} = \frac{(P_{p-1}a_p + P_{p-2})a_{p+1} + P_{p-1}}{(Q_{p-1}a_p + Q_{p-2})a_{p+1} + Q_{p-1}}.$$

Ze wzoru tego mamy

$$R_{p+1} = \frac{P_p a_{p+1} + P_{p-1}}{Q_p a_{p+1} + Q_{p-1}} = \frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}},$$

uwzględniając równości

$$\begin{aligned} P_p &= P_{p-1}a_p + P_{p-2}; & P_{p+1} &= P_p a_{p+1} + P_{p-1} \\ Q_p &= Q_{p-1}a_p + Q_{p-2}; & Q_{p+1} &= Q_p a_{p+1} + Q_{p-1}, \end{aligned}$$

które zachodzą na podstawie definicyi wyrażen  $P_p$  i  $Q_p$ .

Ostatecznie stwierdzamy, że gdyby wzór (3) zachodził dla wszystkich od liczby  $p$  ( $p \geq 1$ ) nie większych wartości liczby  $k$ , to wzór ten zachodziłby jeszcze i dla  $k = p + 1$ , a ponieważ stwierdziliśmy wyżej, że powyższy wzór zachodzi dla wartości 0 i 1 liczby  $k$ , przeto wzór ten zachodzi dla każdej od liczby zero nie mniejszej, a od liczby ogniw ułamka ( $\mathcal{E}$ ) nie większej wartości liczby  $k$ . Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

II. *Liczby, które oznaczyliśmy ogólnie przez  $P_k$  i  $Q_k$  w twierdzeniu poprzedzającym, sprawdzają równość*

$$(5) \quad P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k$$

przy każdej od zera nie mniejszej, a od liczby ogniw odnośnego ułamka łańcuchowego nie większej wartości liczby  $k$ .

Istotnie, na podstawie wzorów (1) stwierdzamy bezpośrednio, że równość (5) zachodzi przy  $k = 0$ . Gdyby zaś dla  $k \leq p$  ( $p \geq 0$ )

równość (5) zachodziła, to równość ta zachodziłaby i dla  $k = p + 1$ ,  
albowiem przyjmując  $k = p + 1$  we wzorach (2), mamy

$$\begin{aligned} P_{p+1} &= P_p a_{p+1} + P_{p-1} \\ Q_{p+1} &= Q_p a_{p+1} + Q_{p-1}, \end{aligned}$$

skąd

$$P_p Q_{p+1} - P_{p+1} Q_p = P_p Q_{p-1} - P_{p-1} Q_p;$$

gdybyśmy więc mieli

$$P_{p-1} Q_p - P_p Q_{p-1} = (-1)^p,$$

to mielibyśmy rzeczywiście

$$P_p Q_{p+1} - P_{p+1} Q_p = -(-1)^p = (-1)^{p+1}.$$

Zatem na podstawie indukcji matematycznej twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

III. Jeżeli pewien ułamek łańcuchowy jest ułamkiem łańcuchowym regularnym, to reduktę rzędu nieparzystego tworzą ciąg malejący w znaczeniu ściślejszem, a reduktę rzędu parzystego — ciąg wzrastający w znaczeniu ściślejszem; nadto każdy redukt rzędu parzystego mniejszy jest od każdego reduktu rzędu nieparzystego.

Istotnie, zachowując oznaczenia tw. I-go i opierając się na temże twierdzeniu, mamy

$$R_{k+1} = \frac{P_k a_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k a_{k+1} + Q_{k-1}}$$

$$R_{k-1} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}},$$

skąd

$$R_{k+1} - R_{k-1} = \frac{(P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k) a_{k+1}}{(Q_k a_{k+1} + Q_{k-1}) Q_{k-1}},$$

a ponieważ na podstawie twierdzenia poprzedzającego mamy

$$(-1)^k = P_{k-1} Q_k - P_k Q_{k-1} = -(P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k),$$

przeto

$$R_{k+1} - R_{k-1} = \frac{-(-1)^k a_{k+1}}{(Q_k a_{k+1} + Q_{k-1}) Q_{k-1}}. \quad (6)$$

Ponieważ liczby  $a_{k+1}$ ,  $Q_{k-1}$  i  $Q_k$  są dodatnie, przeto w razie, kiedy liczba  $k$  równa się liczbie parzystej  $2t$ , mamy

$$R_{2t+1} - R_{2t-1} < 0$$



na podstawie równości (6), jeżeli zaś liczba  $k$  równa się liczbie nieparzystej  $2t + 1$ , to z równości (6) mamy

$$R_{2t+2} - R_{2t} > 0.$$

Zatem ciąg reduktów rzędu nieparzystego jest rzeczywiście malejący, a ciąg reduktów rzędu parzystego — wzrastający w znaczeniu ściślejszem.

Pozostaje tylko do udowodnienia, że każdy redukt rzędu parzystego mniejszy jest od każdego reduktu rzędu nieparzystego. Uważajmy w tym celu jakikolwiek redukt rzędu nieparzystego  $R_{2t+1}$  i jakikolwiek redukt  $R_{2j}$  rzędu parzystego, nadto uważajmy różnicę  $R_{k+1} - R_k$ , gdzie przez  $k$  oznaczamy liczbę całkowitą, której bliższe określenie zostawiamy na później. Na podstawie tw. I-go mamy:

$$R_{k+1} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$$

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k},$$

skąd

$$R_{k+1} - R_k = \frac{P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1}}{Q_kQ_{k+1}},$$

a ponieważ na podstawie tw. II-go mamy

$$P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = -(-1)^{k+1} = (-1)^k,$$

przeto

$$(7) \quad R_{k+1} - R_k = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}.$$

Oznaczmy przez  $t$  większą z liczb  $i$  i  $j$ , albo wspólną ich wartość, gdyby liczby te były równe pomiędzy sobą, i przyjmijmy

$$k = 2t;$$

mamy tedy

$$(8) \quad R_{2t+1} - R_{2t} > 0$$

na podstawie równości (7), a ponieważ mamy

$$t \geq i, \quad t \geq j,$$

ponieważ nadto, jakeśmy już stwierdzili, redukty rzędu nieparzystego tworzą ciąg malejący, a redukty rzędu parzystego — ciąg wzrastający, przeto mamy

$$R_{2t+1} \geq R_{2i+1}, \quad R_{2j} \leq R_{2t};$$

mamy zatem

$$R_{2j} < R_{2i+1}$$

ze względu na nierówność (8). Uzasadniliśmy więc w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

U w a g a I. Równość (7), czyli

$$R_{k+1} - R_k = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k+1}}, \quad (9)$$

którą uzasadniliśmy, dowodząc twierdzenia powyższego, wyraża sama twierdzenie, na którym w dalszym ciągu wypadnie nam się opierać.

U w a g a II. Z twierdzenia powyższego wnosimy, że wartość ułamka łańcuchowego skończonego większa jest od wyrazu początkowego i od każdego reduktu rzędu parzystego, ale jest mniejsza od każdego reduktu rzędu nieparzystego.

IV. *Wszelki ułamek łańcuchowy regularny, nieskończony ( $\mathcal{L}$ ) jest zbieżny, a wartość jego większa jest od każdego reduktu rzędu parzystego, ale jest mniejsza od każdego reduktu rzędu nieparzystego.*

Istotnie, zachowując oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się wyżej, uważajmy ciągi

$$R_1, R_3, R_5, \dots, R_{2i-1} \dots \quad (10)$$

i

$$R_2, R_4, R_6, \dots, R_{2i} \dots \quad (11)$$

Na podstawie twierdzenia poprzedzającego ciągi te są ciągami monotonicznymi i ograniczonymi, zatem (str. 491, tw. II) ciągi te są zbieżne. Z drugiej strony, przyjmując

$$k = 2i - 1$$

w równości (9), mamy

$$R_{2i} - R_{2i-1} = \frac{-1}{Q_k Q_{k+1}}. \quad (12)$$

Powiadam, że mamy

$$Q_i \geq t, \quad (13)$$

jakąkolwiek od jedności nie mniejszą liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez  $t$ . Istotnie, ponieważ na podstawie jednego ze wzorów (2) mamy

$$Q_1 = a_1,$$

a liczba  $a_1$  od jedności mniejszą nie jest, przeto nierówność (13) zachodzi przy  $t=1$ . Gdyby zaś nierówność (13) zachodziła w razie, kiedy mamy  $t < k$ , to ona zachodziłaby i przy  $t=k$ , albowiem na podstawie drugiego ze wzorów (2) mamy

$$Q_k = Q_{k-1}a_k + Q_{k-2};$$

ponieważ zaś mielibyśmy

$$Q_{k-1} \geq k-1.$$

a mamy

$$a_k \geq 1,$$

ponieważ mielibyśmy nadto

$$Q_{k-2} \geq 1,$$

chociażby nawet liczba  $k$  równała się liczbie 2, ze względu na równość

$$Q_0 = 1$$

z układu (1), przeto mielibyśmy rzeczywiście

$$Q_k > k-1+1=k$$

Z rozważań powyższych wynika, że związek (13) rzeczywiście zachodzi. Zatem na podstawie równości (12) mamy

$$|R_{2i} - R_{2i-1}| \leq \frac{1}{k(k+1)},$$

skąd wynika, że ciąg

$$R_2 - R_1, R_4 - R_3, R_6 - R_5, \dots, R_{2i} - R_{2i-1} \dots$$

jest ciągiem zbieżnym o granicy równej zeru.

Zatem granice ciągów (10) i (11) są pomiędzy sobą równe. Z tego zaś wynika, że ciąg

$$R_1, R_2, R_3 \dots$$

jest ciągiem zbieżnym, którego granica  $g$  równa się wspólnej wartości granic ciągów (10) i (11); innymi słowy, ułamek łańcuchowy ( $\mathcal{L}$ ) jest rzeczywiście zbieżny, a wartość jego  $g$  równa się wspólnej wartości  $g$  granic ciągów (10) i (11).

Ponieważ liczba  $g$  mniejsza jest od każdego wyrazu ciągu (10), ale większa od każdego wyrazu ciągu (11), przeto wartość ułamka

łańcuchowego ( $\mathcal{E}$ ), zgodnie z brzmieniem twierdzenia, większa jest od każdego reduktu rzędu parzystego, ale mniejsza od każdego reduktu rzędu nieparzystego. Uzasadniliśmy zatem w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

V. *Uważajmy jakikolwiek ułamek łańcuchowy ( $\mathcal{E}$ ) regularny, skończony lub nieskończony. Ułamek łańcuchowy ( $\mathcal{E}$ ) będzie mieć w każdym razie oznaczoną wartość  $x$  na podstawie tw. I-go i twierdzenia poprzedzającego. Powiadam, że przy zachowaniu oznaczeń tw. I-go mamy*

$$x = \frac{P_{k-1}x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}}, \quad (14)$$

oznaczając przez  $k$  liczbę całkowitą i dodatnią nie mniejszą od liczby 2 ani większą od liczby ogniów ułamka łańcuchowego ( $\mathcal{E}$ ) i określając liczbę  $x_k$  w sposób następujący: jeżeli liczba  $k$  równa się liczbie ogniów ułamka łańcuchowego ( $\mathcal{E}$ ), to mamy

$$x_k = a_k,$$

jeżeli zaś liczba  $k$  mniejsza jest od liczby ogniów, to mamy

$$x_k = \left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^n, \quad (15)$$

albo

$$x_k = \left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^{\infty}, \quad (16)$$

zależnie od tego, czy liczba ogniów ułamka łańcuchowego ( $\mathcal{E}$ ) równa się pewnej skończonej liczbie lub jest nieskończoną. Liczba  $x_k$  zowie się mianownikiem uzupełnionym ogniwa rzędu  $k$ .

Żeby twierdzenie powyższe uzasadnić, załóżmy najpierw, że liczba ogniów ułamka łańcuchowego ( $\mathcal{E}$ ) równa się pewnej liczbie skończonej  $n$  ( $n \geq 2$ ). W przypadku szczególnym, kiedy mamy  $k = n$ , wzór (14) jest natychmiastowem następstwem definicji liczb  $P_k$  i  $Q_k$ , oraz wzoru

$$x = \frac{P_k}{Q_k},$$

który w takim razie zachodzi na podstawie tw. I-go. W przypadku, kiedy mamy

$$n = k + 1$$

wzór (14) zachodzi, albowiem, oznaczając, jak poprzednio, przez  $R_k$  redukt rzędu  $k$  rozważanego ułamka łańcuchowego, mamy:

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}a_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}a_k + Q_{k-2}},$$

a ponieważ w rozważanym przypadku  $R_k$  przechodzi w  $x$  przez podstawienie wyrażenia

$$a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$$

czyli wyrażenia

$$\left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^{k+1},$$

w miejsce liczby  $a_k$ , przeto w przypadku, o który chodzi, wzór (14) rzeczywiście jest ważny.

Założmy chwilowo, że wzór (14) zachodzi jeszcze w razie, kiedy mamy

$$k+1 \leq n \leq k+p$$

czyli

$$(17) \quad 1 \leq n-k \leq p \quad (p \geq 1),$$

i przyjmijmy

$$(18) \quad n-k = p+1.$$

Mamy tedy

$$R_{n-1} = \frac{P_{k-1} \left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^{n-1} + P_{k-2}}{Q_{k-1} \left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^{n-1} + Q_{k-2}}.$$

Zważmy obecnie, co następuje:

1°. Wzór poprzedzający na  $R_{n-1}$  przechodzi we wzór na  $x$  przez podstawienie wyrażenia

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$$

na miejsce liczby  $a_{n-1}$ .

2°. Symbol  $a_{n-1}$  nie wchodzi do żadnego z wyrażeń

$$P_{k-1}, P_{k+2}, Q_{k-1} \text{ i } Q_{k-2}.$$

3°. Jeżeli w wyrażeniu

$$\left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^{n-1}$$

zastąpimy  $a_{n-1}$  przez

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n},$$

to wyrażenie to przemieni się w wyrażenie

$$\left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^n$$

na podstawie samej definicji rozważanego wyrażenia.

Z uwag tych wynika, że ze względu na wzór (15) przy rozważanem założeniu wzór (14) zachodziłby jeszcze, gdyby liczba  $n$  miała wartość

$$n = k + p + 1,$$

wynikającą z równania (18). Gdyby więc wzór (14) zachodził przy wszystkich, związki (17) sprawdzających wartościach różnicy  $n - k$ , to wzór ten zachodziłby także i przy wszystkich, związki

$$1 \leq n - k \leq p + 1$$

sprawdzających wartościach tej różnicy. Ponieważ zaś stwierdziliśmy wyżej bezpośrednio, że wzór (14) zachodzi w przypadkach, kiedy mamy

$$n - k = 0 \quad \text{ i } \quad n - k = 1,$$

przeto omawiany wzór zachodzi przy wszystkich wartościach skończonych, od zera nie mniejszych, różnicy  $n - k$ .

Przejdźmy obecnie do przypadku, kiedy ułamek łańcuchowy ( $E$ ) jest nieskończony. W takim razie na podstawie uzyskanych już wyników mamy na redukt  $R_{k+t}$  rzędu  $k + t$  ( $t \geq 1$ ) wzór następujący:

$$R_{k+t} = \frac{P_{k-1}y_t + P_{k-2}}{Q_{k-1}y_t + Q_{k-2}}, \quad (19)$$

przyjmując

$$y_t = \left\{ a_k; \frac{1}{a_i} \right\}_{i=k+1}^{k+t}.$$

Równanie (16) określa liczbę  $x_k$  jako granicę ciągu nieskończonego

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

Ponieważ zaś na podstawie tw. IV-go granica  $x_k$  tego ciągu położona jest pomiędzy liczbami  $y_1$  i  $y_2$ , które są dodatnie, przeto liczba  $x_k$  jest liczbą dodatnią; ponieważ mamy nadto

$$Q_{k-1} > 0, \quad Q_{k-2} > 0,$$

przeto mamy

$$Q_{k-1}x_k + Q_{k-2} > 0.$$

Zatem na podstawie wzoru (19) granica ciągu

$$(20) \quad R_{k+1}, R_{k+1}, R_{k+3}, \dots$$

równa się

$$\frac{P_{k-1}x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}},$$

a ponieważ granica ciągu (20) przedstawia właśnie wartość  $x$  ułamka łańcuchowego  $(\mathcal{E})$ , przeto stwierdzamy, że wzór (14) zachodzi i w przypadku obecnym. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

VI. *Każdy redukt ułamka łańcuchowego regularnego, poczynwszy od reduktu rzędu 1-go, przedstawia w przybliżeniu wartość rozważanego ułamka łańcuchowego z błędem mniejszym od błędu, z którym go przedstawia w przybliżeniu redukt, poprzedzający bezpośrednio redukt rozważany.*

Istotnie, na podstawie twierdzenia poprzedzającego mamy

$$x = \frac{P_k x_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k x_{k+1} + Q_{k-1}},$$

w założeniu, że liczba ogniw jest większa od  $k$ , skąd

$$\begin{aligned} x - \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1}}{Q_k(Q_k x_{k+1} + Q_{k-1})} \\ \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - x &= \frac{(P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1})x_{k+1}}{Q_{k-1}(Q_k x_{k+1} + Q_{k-1})}, \end{aligned}$$

a ponieważ na podstawie tw. II-go mamy

$$P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k,$$

przeto mamy

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} x - \frac{P_k}{Q_k} &= \frac{(-1)^k}{Q_k(Q_k x_{k+1} + Q_{k-1})} \\ \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} - x &= \frac{(-1)^k x_{k+1}}{Q_{k-1}(Q_k x_{k+1} + Q_{k-1})} \end{aligned} \right.$$

Ponieważ mamy

$$(22) \quad x_{k+1} \geq a_{k+1} \geq 1,$$

ponieważ nadto

$$Q_k > Q_{k-1},$$

przeto mamy

$$x_{k+1}Q_k > Q_{k-1},$$

skąd

$$\frac{x_{k+1}}{Q_{k-1}} > \frac{1}{Q_k}.$$

Na podstawie nierówności tej mamy ze wzorów (21)

$$\left| x - \frac{P_k}{Q_k} \right| < \left| x - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right|,$$

na czem właśnie polega twierdzenie, o które chodzi. W dowodzie tym zakładaliśmy, że liczba  $k$  mniejsza jest od liczby ogniw rozważanego ułamka łańcuchowego, ale gdyby liczba  $k$  właśnie wspomnianej liczbie równała się, to mielibyśmy

$$x - \frac{P_k}{Q_k} = 0,$$

a ponieważ różnica

$$\left( x - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) - \left( x - \frac{P_k}{Q_k} \right) = \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{-(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}}$$

od zera jest odmienna, przeto i w tym przypadku twierdzenie musiałoby zachodzić.

§ 140. Obecnie przechodzimy do badania ułamków łańcuchowych regularnych, w których wyraz początkowy równa się jakiegokolwiek liczbie całkowitej, a mianownik każdego ogniw liczbie całkowitej od jedności nie mniejszej. Takim ułamkiem łańcuchowym damy nazwę ułamków łańcuchowych arytmetycznych.

Jeżeli ostatnie ogniwo pewnego ułamka łańcuchowego arytmetycznego równa się jedności, to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że rozważany ułamek łańcuchowy jest przywiedlny. Wszelki ułamek łańcuchowy arytmetyczny, który nie jest przywiedlny, zowie się ułamkiem łańcuchowym arytmetycznym nieprzywiedlnym. Zatem wszelki ułamek łańcuchowy nieskończony, jako ostatniego ogniw nie posiadający i już dlatego przywiedlnym być nie mogący, zawsze jest nieprzywiedlny.

Ułamek łańcuchowy arytmetyczny przywiedlny możemy zawsze sprowadzić do ułamka łańcuchowego nieprzywiedlnego, w którym liczba ogniw o jedność jest mniejsza od liczby ogniw rozważanego ułamka łańcuchowego. Jeżeli bowiem pewien ułamek łańcuchowy