

XV. Zastosowanie liczb dziesiętnych do przedstawiania jakichkolwiek liczb rzeczywistych.

§ 129. Zanim przystąpimy do właściwego przedmiotu niniejszego rozdziału, uzupełnimy najpierw terminologię, którą wprowadziliśmy w rozdziale VII-ym (§ 50 i 52) do teorii liczb dziesiętnych. W rzeczonym rozdziale posługiwaliśmy się szeregiem zdań, do których wchodziły wyrażenia „rząd jednostki dziesiętnej” i „rząd cyfry liczby dziesiętnej” pomimo, żeśmy nie określili z osobna znaczenia żadnego z tych wyrażen. Okoliczność ta nie spowodowała żadnej niejasności, ani żadnego braku ścisłości, gdyż określiliśmy w sposób ścisły przez osobną definicyę treść każdego ze zdań, których częścią składową były rzeczone wyrażenia, ale z natury rzeczy nasuwa się pytanie, czy nie można byłoby zastąpić wszystkich tych definicyi przez dwie tylko definicye, z których jedna określiłaby znaczenie wyrażenia „rząd jednostki dziesiętnej”, a druga — wyrażenia „rząd cyfry liczby dziesiętnej”. Otóż obecnie, opierając się na pojęciu liczby ujemnej, uzyskanem w rozdziale XI-tym, możemy łatwo definicye takie ustawić. Spostrzegamy z łatwością, że dowolnie przyjętej jednostce dziesiętnej d odpowiada dokładnie jedna liczba całkowita p , na którą wypaść może, zależnie od wartości jednostki dziesiętnej d , jakakolwiek wartość ujemna lub dodatnia taka, żebyśmy mieli

$$(1) \quad d = \frac{1}{10^k}$$

czyli

$$d = 10^{-k}.$$

Zatem możemy przyjąć definicye następujące:

I. Wyrażenie *rząd danej jednostki dziesiętnej d oznacza tę liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną k , która sprawdza równanie (1).*

II. *Rzędem cyfry liczby dziesiętnej, skończonej lub nieskończonej, zowiemy rząd jednostki dziesiętnej, której cyfrą w rozważanej liczbie dziesiętnej jest właśnie ta cyfra.*

Czytelnik sprawdzi bez najmniejszej trudności, że po przyjęciu powyższych dwóch definicji zdania wygłoszone na początku tego paragrafu przybierają właśnie to znaczenie, które nadaliśmy im byli przez definicje, podane w § 50 i 52. Wobec tego ostatecznie przyjmujemy obie definicje podane przed chwilą, a nadto przyjmujemy jeszcze definicję następującą: *oznaczywszy przez k jakąkolwiek liczbę całkowitą, zowiemy reduktem rzędu k oznaczonej liczby dziesiętnej nieskończonej λ redukt tej liczby (§ 52), doprowadzony do cyfry jednostek dziesiętnych rzędu k czyli wartości*

$$\frac{1}{10^k}.$$

Dwie liczby dziesiętne nieskończone, w których każde dwie cyfry równorzędne są pomiędzy sobą równe, zowią się identycznymi pomiędzy sobą liczbami dziesiętnymi. Jeżeli każde dwie ze wszystkich tych liczb dziesiętnych nieskończonych, które sprawdzają pewien układ warunków (U), są pomiędzy sobą identyczne, to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że istnieje jedna tylko liczba dziesiętna nieskończona, sprawdzająca układ warunków (U).

§ 130. Jeżeli zestawimy definicję liczby dziesiętnej nieskończonej, podaną w § 52-gim z definicją szeregu nieskończonego (§ 119), to natychmiast stwierdzimy, że wyrażenie „liczba dziesiętna nieskończona“ oznacza szereg nieskończony postaci

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}, \quad (1)$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, byle nie większą od oznaczonej liczby całkowitej dodatniej lub ujemnej m , a symbol c_k przedstawia w razie nierówności

$$k < p,$$

cyfrę zero, a w razie związku

$$k \geq p$$

którąkolwiek z dziesięciu cyfr numeracyi dziesiętnej.

Ponieważ składniki szeregu (1) równają się liczbom dodatnim odpowiednio nie większym od składników szeregu geometrycznego

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$

o ilorazie równym

$$\frac{1}{10},$$

przeto szereg ten jest w każdym razie zbieżny bezwzględnie. Z drugiej strony, uwzględniając ogólną definicyę symbolu c_k , spostrzegamy natychmiast, że wartość sumy szeregu (1) nie zależy od tego, jaką z pośród tych wartości całkowitych na p , które sprawdzają nierówność

$$p \leq m,$$

rzeczywiście we wzorze (1) przyjmiemy. Wobec tego *umawiamy się, że uważać będziemy szereg nieskończony, stanowiący oznaczoną liczbę dziesiętną, za jeden z symbolów, oznaczających liczbę, która przedstawia sumę rzeczonoego szeregu.* Na podstawie tej umowy zbiór wszystkich liczb dziesiętnych nieskończonych przemienia się na pewien podzbiór zbioru liczb rzeczywistych i tem samem przybiera charakter zbioru wielkości w znaczeniu ściślejszem.

§ 131. Niektóre z wyników, uzyskanych w rozdziale VII-ym, możemy przedstawić, opierając się na definicyach, podanych w paragrafach poprzedzających rozdziału niniejszego, w postaci szczególnie dogodnej. Jeżeli uwzględnimy z jednej strony tw. II-gie § 56-go, a z drugiej wyniki, uzyskane w § 57-ym, to stwierdzimy natychmiast, że zachodzi twierdzenie, które wysłowione być może obecnie w sposób następujący:

I. Oznaczmy przez φ całkiem dowolnie przyjętą liczbę dziesiętną peryodyczną, przez m taką od jedności nie mniejszą liczbę całkowitą, żeby cyfra rzędu m liczby φ należała do cyfr regularnych tej liczby, przez A liczbę (nie cyfrę) jednostek dziesiętnych rzędu $m - 1$ (czyli wartości $\frac{1}{10^{m-1}}$) liczby φ , przez Ω wartość któregośkolwiek z peryodów liczby dziesiętnej φ , wreszcie przez p liczbę cyfr tego peryodu; przy tych oznaczeniach mamy w każdym razie

$$(1) \quad \varphi = \frac{A(10^p - 1) + \Omega}{10^{m-1}(10^p - 1)},$$

a liczba ułamkowa po prawej stronie tej równości jest liczbą ułamkową rodną w stosunku do liczby φ w razie i tylko w razie, kiedy zachodzi nierówność

$$\Omega < 10^p - 1,$$

kiedy, innemi słowy, peryod zasadniczy liczby φ nie redukuje się do jednej dziewiątki.

Równość (1) możemy łatwo uzasadnić niezależnie od wyników, uzyskanych w § 56-tym i 57-mym, w sposób następujący: drogą indukcji matematycznej bez trudności stwierdzamy, że na redukt R_{m+kp-1} ($k \geq 1$) liczby dziesiętnej φ mamy wzór następujący:

$$R_{m+kp-1} = \frac{A}{10^{m-1}} + \frac{\Omega}{10^{m-1}} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{10^p} \right)^i \quad (2)$$

Z drugiej zaś strony, ponieważ mamy

$$\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} R_t,$$

przeto mamy także

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{m+kp-1}.$$

Zatem, ze względu na wzór (2), mamy

$$\varphi = \frac{A}{10^{m-1}} + \frac{\Omega}{10^{m-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^p} \right)^k \quad (3)$$

Ale na podstawie teorii szeregów geometrycznych zachodzi równość następująca:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^p} \right)^k = \frac{1}{10^p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} = \frac{1}{10^p - 1}.$$

Otóż, opierając się na tej równości, wyprowadzamy natychmiast z równości (3) wzór (1), o uzasadnienie którego właśnie chodziło.

II. Każda liczba dziesiętna peryodyczna, o peryodzie jednocyfrowym, równym liczbie dziewięć, równa się pewnej liczbie dziesiętnej skończonej. Innemi słowy, każdej liczbie dziesiętnej peryodycznej φ o peryodzie jednocyfrowym, równym liczbie 9, odpowiada równa jej liczba dziesiętna peryodyczna ψ o peryodzie zerowym.

Istotnie, jeżeli we wzorze (1) podstawimy na p i Ω wartości

$$p = 1, \quad \Omega = 9,$$

to uzyskamy na φ wzór następujący:

$$\varphi = \frac{A + 1}{10^{m-1}},$$

a równość ta wyraża właśnie, że liczba dziesiętna peryodyczna, która sprawdza założenia twierdzenia, rzeczywiście równa się liczbie dziesiętnej skończonej.

Ponieważ zaś dowolnie przyjęta liczba dziesiętna skończona oczywiście równa się pewnej liczbie dziesiętnej peryodycznej o peryodzie zerowym, przeto zgodnie z brzmieniem twierdzenia okoliczność, iż liczba dziesiętna peryodyczna, sprawdzająca założenia twierdzenia, równa się pewnej liczbie dziesiętnej skończonej, może być wyrażona w postaci następującej: rzeczony liczbie dziesiętnej peryodycznej odpowiada równa jej liczba dziesiętna peryodyczna o peryodzie zerowym.

Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

§ 132. Z faktów, z którymi obeznaliśmy się w § 56-tym i 57-mym, wynika, że liczby dziesiętne peryodyczne o peryodzie jednocyfrowym, równym liczbie 9, wyróżniają się od innych liczb dziesiętnych nieskończonych pewnymi osobliwościami, a twierdzenia, które podamy w paragrafie niniejszym, przyczynią się do większego jeszcze uwydatnienia tej okoliczności.

Ze względu na taki stan rzeczy wprowadzamy definicyę następującą:

*Wyrażenie **liczba dziesiętna normalna** oznacza taką liczbę dziesiętną nieskończoną, która nie jest liczbą dziesiętną peryodyczną o peryodzie jednocyfrowym, równym liczbie 9.*

Liczby dziesiętne normalne posiadają pewne własności podstawowe, które wyrazić możemy w postaci twierdzeń następujących:

I. Oznaczmy przez φ jakąkolwiek liczbę dziesiętną normalną, a przez m taką liczbę całkowitą, ujemną lub dodatnią, żeby każda, rzędu niższego od cyfry rzędu $m + 1$, cyfra liczby φ równała się zeru. W takim razie zachodzi zawsze nierówność

$$(1) \quad \varphi < \frac{1}{10^m}.$$

II. Redukt jakiegokolwiek rzędu m dowolnie przyjętej liczby dziesiętnej normalnej przedstawia wartość tej liczby z niedoborem mniejszym od $\frac{1}{10^m}$.

III. Uważajmy dwie liczby dziesiętne normalne λ i λ' , zakładając przytem, że liczby te nie są pomiędzy sobą identyczne. W takim razie istnieć będzie pewna najmniejsza taka liczba całkowita m , ujemna lub dodatnia, żeby cyfra c_m rzędu m liczby λ już nie była równa cyfrze c'_m tegoż rzędu w liczbie λ' . Powiadam, że nierówność

$$c_m < c'_m \quad (2)$$

równoważna jest nierówności

$$\lambda < \lambda' \quad (3)$$

a nierówność

$$c_m > c'_m \quad (4)$$

— nierówności

$$\lambda > \lambda'. \quad (5)$$

IV. Żeby dwie liczby dziesiętne normalne były pomiędzy sobą równe, koniecznem jest i wystarcza, żeby liczby te były pomiędzy sobą identyczne.

Z trzech twierdzeń poprzedzających, tw. I-sze winno być uważane za zasadnicze, gdyż twierdzenia pozostałe stanowią bezpośrednie prawie następstwa rzeczonego twierdzenia.

Żeby uzasadnić tw. I-sze, oznaczmy przez ψ taką liczbę dziesiętną nieskończoną, żeby w liczbie tej cyfra rzędu $m+1$ i każda cyfra rzędu wyższego równała się liczbie 9, a każda inna cyfra — zeru. Mamy tedy oczywiście z jednej strony

$$\varphi < \psi, \quad (6)$$

a z drugiej

$$\psi = \frac{9}{10^{m+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k,$$

skąd

$$\psi = \frac{1}{10^m}. \quad (7)$$

Na podstawie tej równości wynika z nierówności (6) nierówność (1), na której właśnie polega rozważane twierdzenie.

Zanim przejdziemy do uzasadnienia dalszych twierdzeń, czynimy uwagę następującą: założenie tw. I-go, polegające na tem, żeby liczba dziesiętna nieskończona φ była liczbą dziesiętną nor-

malną, ma znaczenie istotne, albowiem, gdybyśmy tego założenia nie wprowadzili, tobyśmy nie wykluczyli przypadku, w którym liczba φ byłaby identyczna liczbie ψ , a w takim razie równość

$$\varphi = \psi$$

nie byłaby wykluczona, skąd znów ze względu na równość (7) wynika, że liczba φ niekoniecznie musiałaby sprawdzać nierówność (1), gdyż przypadek, w którym mielibyśmy

$$\varphi = \frac{1}{10^m},$$

nie byłby wykluczony.

Żeby uzasadnić tw. II-gie oznaczmy przez λ_m redukt rzędu m liczby dziesiętnej nieskończonej λ . Mamy tedy

$$\lambda = \lambda_m + \varphi,$$

oznaczając przez φ pewną liczbę dziesiętną nieskończoną, która oczywiście sprawdzać będzie założenie tw. I-go i z tego powodu spełniać będzie nierówność (1).

Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia redukt λ_m przedstawiać będzie rzeczywiście liczbę λ z niedoborem mniejszym od liczby

$$\frac{1}{10^m}.$$

Spostrzegamy z łatwością, że założenie, ograniczające naturę liczby λ , a polegające na tem, że liczba dziesiętna nieskończona λ jest liczbą dziesiętną normalną, ma i przy tem twierdzeniu, znaczenie istotne.

Przechodząc do uzasadnienia tw. III-go, upewnijmy się najpierw, że liczba, którą w twierdzeniu tem oznaczyliśmy przez m , rzeczywiście istnieć będzie. W tym celu oznaczmy ogólnie przez c_k i c'_k odpowiednio cyfry rzędu k w liczbach dziesiętnych nieskończonych λ i λ' . Na podstawie ogólnej definicyi liczby dziesiętnej nieskończonej istnieć będzie pewna taka liczba całkowita p , żeby związek

$$k \leq p$$

pociągał za sobą równości

$$c_k = c'_k = 0.$$

Z drugiej znów strony, ponieważ liczby λ i λ' nie są pomiędzy sobą identyczne, przeto istnieć będzie niezawodnie jedna przy-

najmniej, oczywiście od p większa taka liczba całkowita q , żebyśmy mieli

$$c_q \neq c'_q,$$

a stąd wynika, że pośród tych wartości całkowitych na k , które sprawdzają związki

$$p < k \leq q, \quad (8)$$

istnieć będzie przynajmniej jedna taka, żebyśmy mieli

$$c_k \neq c'_k. \quad (9)$$

Gdyby istniała jedna tylko wartość na k , przy której zachodziłyby jednocześnie związki (8) i (9), to oczywiście ona byłaby właśnie rozważaną w twierdzeniu liczbą m . Gdyby zaś istniało więcej, niż jedna wartość na k , sprawdzająca jednocześnie związki (8) i (9), to pośród wartości tych istniałaby pewna najmniejsza, a ta najmniejsza wartość liczby k byłaby oczywiście rozważaną w twierdzeniu liczbą m .

Oznaczmy przez λ_{m-1} i λ'_{m-1} odpowiednio redukty rzędu $m-1$ liczb λ i λ' . Mamy tedy

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_{m-1} + \frac{c_m}{10^m} + \varphi \\ \lambda' &= \lambda'_{m-1} + \frac{c'_m}{10^m} + \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

oznaczając przez φ i φ' dwie liczby dziesiętne nieskończone, które na podstawie tw. II-go sprawdzają związki

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \varphi < \frac{1}{10^m} \\ 0 &\leq \varphi' < \frac{1}{10^m}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ponieważ na podstawie definicyi liczby m mamy

$$\lambda_{m-1} = \lambda'_{m-1},$$

przeto ze wzorów (10) wynika równość

$$\lambda - \lambda' = \frac{c_m - c'_m}{10^m} + \varphi - \varphi'. \quad (12)$$

Na podstawie nierówności (11) mamy

$$(13) \quad |\varphi - \varphi'| < \frac{1}{10^m},$$

a ponieważ liczby c_m i c'_m są dwiema nierównymi pomiędzy sobą liczbami całkowitemi, przeto mamy

$$(14) \quad \left| \frac{c_m - c'_m}{10^m} \right| \geq \frac{1}{10^m}.$$

Ze związków (12), (13) i (14) wynika bezpośrednio, że nierówność (2) równoważna jest nierówności (3), a nierówność (4) nierówności (5). Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło. Porównyując twierdzenie to z tw. I-szem § 50-go, stwierdzamy, że reguły porównywania ilościowego liczb dziesiętnych nieskończonych normalnych nie różnią się od reguł porównywania ilościowego liczb dziesiętnych skończonych.

Ponieważ tw. IV-te paragrafu niniejszego należy do bezpośrednich następstw tw. III-go, przeto uzasadniliśmy w zupełności wszystkie twierdzenia, które zamierzaliśmy udowodnić.

Twierdzenie II-gie paragrafu poprzedniego poucza nas, że tw. III-cie i IV-te paragrafu obecnego, zarówno jak tw. I-sze i II-gie, przemieniłyby się na twierdzenia błędne, gdybyśmy w tych twierdzeniach opuścili zastrzeżenie, polegające na tem, że twierdzenia te odnoszą się nie do liczb dziesiętnych nieskończonych jakichkolwiek, lecz tylko do liczb dziesiętnych normalnych.

Oznaczmy przez λ jakąkolwiek liczbę dziesiętną normalną, a przez l liczbę (nie cyfrę) jednostek dziesiętnych rzędu zero. Mamy tedy

$$\lambda = l + \varphi,$$

oznaczając przez φ liczbę dziesiętną normalną, w której wszystkie cyfry rzędu niższego od cyfry rzędu 1-szego równają się zero. Na podstawie tw. I-go mamy

$$\varphi < 1;$$

z tego powodu zowiemy liczbę l częścią całkowitą liczby λ .

§ 133. Każdą liczbą ujemną x przedstawić możemy w postaci różnicy kształtu następującego:

$$(1) \quad x = a - b,$$

oznaczając przez a i b dwie liczby dodatnie. W praktyce rachunkowej przyjmujemy często

$$a = 0,$$

a w takim razie liczba b przedstawia wartość bezwzględną liczby x ; liczne są jednak przypadki, w których dogodniej jest przyjąć na b wartość całkowitą, a na a wartość mniejszą od jedności. Ten drugi sposób przedstawiania liczb ujemnych jest całkiem ogólny, tak samo, jak i pierwszy, a każdej oznaczonej wartości liczby x odpowiada jeden tylko układ wartości na a i b , czyniący zadość powyższym warunkom. Istotnie, wspomniane warunki są równoważne następującym: liczba b , na którą z równości (1) wynika wzór

$$b = -x + a,$$

ma być najmniejszą liczbą całkowitą, sprawdzającą związek

$$b \geq -x,$$

a liczba a winna mieć taką wartość, żeby zachodziła równość (1). Otóż warunkowi, odnoszącemu się do liczby b , odpowiada oczywiście zawsze jedna i tylko jedna wartość tej liczby, a ponieważ każdej wartości na b odpowiada na podstawie równości (1) przy oznaczonej wartości liczby x jedna i tylko jedna wartość liczby a , przeto stwierdzamy, że druga metoda przedstawiania liczb ujemnych jest rzeczywiście całkiem ogólna i nie powoduje żadnej dwuznaczności co do wartości liczb dodatnich, które łącznie mają przedstawiać oznaczoną liczbę ujemną x na podstawie wzoru (1).

Ponieważ w przypadku, kiedy znany jest pewien określnik (§ 91) oznaczonej liczby rzeczywistej x , możemy zawsze wyznaczyć taką wartość całkowitą na liczbę b , żeby we wzorze (1) liczba a miała niezawodnie wartość dodatnią, przeto z wyjaśnień powyższych wnosimy, że wszelka ogólna metoda do przedstawiania liczb dodatnich, danych w znaczeniu określonym w § 91-szym, podaje nam ogólną metodę do przedstawiania „danych” liczb rzeczywistych jakichkolwiek. Wobec tego w dalszym ciągu rozważać będziemy tylko problem przedstawiania liczb dodatnich, a twierdzenie podstawowe, na którym będziemy się przytem opierać, opiewa, jak następuje:

Każdej liczbie rzeczywistej L , byle od zera nie mniejszej, odpowiada jedna, ale tylko jedna, równa jej liczba dziesiętna normalna λ .

Twierdzenie to wyrażamy niekiedy także w sposób następujący:
Każda od zera nie mniejsza liczba rzeczywista L rozwinięta być może na liczbę dziesiętną normalną, która określona jest w zupełności, skoro wartość liczby L jest dana.

Jeżeli wogóle istnieje liczba dziesiętna normalna, równa liczbie L , to istnieje tylko jedna jedyna, albowiem gdyby dwie liczby dziesiętne normalne λ i λ' sprawdzały równości

$$\lambda = L$$

i

$$\lambda' = L,$$

to zachodziłaby równość

$$\lambda = \lambda',$$

skąd wynika ze względu na tw. IV-te paragrafu poprzedzającego, że liczby λ i λ' byłyby pomiędzy sobą identyczne. Zatem pozostaje tylko do uzasadnienia istnienie liczby λ . W tym celu czynimy uwagi następujące:

Gdyby pewna liczba dziesiętna normalna λ sprawdzała równość

$$(1) \quad \lambda = L,$$

to ze względu na tw. II-gie paragrafu poprzedzającego redukt liczby λ , λ_m , dowolnie przyjętego rzędu m , przedstawiałby liczbę L z niedoborem mniejszym od

$$\frac{1}{10^m}.$$

Odwrotnie, gdyby redukt λ_m oznaczonej liczby dziesiętnej nieskończonej λ przedstawiał liczbę L z niedoborem mniejszym od

$$\frac{1}{10^m}$$

przy każdej wartości całkowitej liczby m , to liczba λ sprawdzałaby równość (1) i byłaby liczbą dziesiętną normalną. Istotnie, gdyby okoliczność ta zachodziła, to mielibyśmy

$$(2) \quad 0 \leq L - \lambda_m < \frac{1}{10^m},$$

skąd

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = L,$$

a równość ta wyraża właśnie, że zachodzi równość (1). Ale jeszcze nie mamy pewności, że liczba λ byłaby liczbą dziesiętną normalną. Ze związków (1) i (2) mamy

$$0 \leq \lambda - \lambda_m < \frac{1}{10^m}, \quad (3)$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez m . Otóż, gdyby liczba λ nie była liczbą dziesiętną normalną, to przy wartościach na m takich, żeby cyfra rzędu $m+1$ i wszystkie cyfry rzędów wyższych liczby λ równały się dziewięciu, jeden ze związków (3), mianowicie nierówność

$$\lambda - \lambda_m < \frac{1}{10^m}$$

jużby nie zachodziła, a natomiast zachodziłaby równość

$$\lambda - \lambda_m = \frac{1}{10^m}.$$

Zatem przy rozważanych założeniach liczba λ byłaby rzeczywiście liczbą dziesiętną normalną, sprawdzającą równość (1).

Z uwag powyższych wynika, że uzasadnimy w zupełności twierdzenie, o które chodzi, jeżeli tylko wykażemy, że zachodzi twierdzenie następujące:

Każdej liczbie rzeczywistej L , byle od zera nie mniejszej, odpowiada taka liczba dziesiętna nieskończona λ , której redukt λ_m rzędu m przedstawia liczbę L z niedoborem mniejszym od

$$\frac{1}{10^m},$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą oznaczylibyśmy przez m .

Twierdzenie to uzasadniliśmy już w § 53-cim (tw. I-sze rzeczzonego paragrafu) w przypadku szczególnym, kiedy liczba L jest liczbą wymierną.

Na tym przypadku szczególnym musieliśmy wówczas poprzestać, ponieważ wtedy nie wprowadziliśmy jeszcze pojęcia liczby niewymiernej. W rzeczywistości jednak rozumowanie, przeprowadzone we wspomnianem miejscu, stanowi po rozwinięciu teorii liczb niewymiernych ogólny dowód rozważanego twierdzenia. Istotnie, rozumowanie to opiera się wyłącznie na twierdzeniu, które możemy

wyrazić obecnie w sposób następujący: jakąkolwiek od zera nie mniejszą liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez L i jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną przedstawiałby symbol m , istnieje zawsze jedna i tylko jedna liczba całkowita X_m taka, żeby wyrażenie

$$\frac{X_m}{10^m}$$

przedstawiało przybliżenie liczbę L z niedoborem mniejszym od jednostki dziesiętnej rzędu m czyli wartości $\frac{1}{10^m}$. Otóż twierdzenie to możemy z łatwością udowodnić całkiem ogólnie w sposób następujący. W każdym razie istnieje będzie taka liczba całkowita i dodatnia n , żebyśmy mieli

$$L < \frac{n}{10^m}.$$

Zatem w ciągu

$$\frac{0}{10^m}, \frac{1}{10^m}, \frac{2}{10^m}, \dots$$

znajdą się dwa sąsiednie wyrazy

$$\frac{\alpha}{10^m} \quad \text{i} \quad \frac{\alpha+1}{10^m}$$

takie, żebyśmy mieli

$$\frac{\alpha}{10^m} \leq L < \frac{\alpha+1}{10^m}.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$X_m = \alpha,$$

to wyrażenie

$$\frac{X_m}{10^m}$$

oczywiście przedstawiać będzie przybliżenie liczbę L z niedoborem mniejszym od jednostki dziesiętnej rzędu m . Zatem uzasadniliśmy twierdzenie pomocnicze, o które chodziło, a tem samem uzasadniliśmy i to twierdzenie, które właściwie mieliśmy udowodnić.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą L , byle od zera nie mniejszą, i liczbę dziesiętną normalną λ , równą liczbie L . Wyra-

zenia: *cyfra rzędu m liczby L , liczba jednostek dziesiętnych rzędu m liczby L , wartość przybliżona liczby L , doprowadzona do cyfry rzędu m , i część całkowita liczby L oznaczają odpowiednio cyfrę rzędu m liczby λ , liczbę jednostek dziesiętnych rzędu m liczby λ , redukt rzędu m liczby λ i część całkowitą liczby λ . Ponieważ na podstawie twierdzenia dopiero co udowodnionego liczba dziesiętna normalna λ zawsze istnieje i określona jest w zupełności, jeżeli tylko wartość liczby L jest dana, przeto elementy, uważane w powyższych definicjach, zawsze istnieją i określone są bez żadnej dwuznaczności w zależności od wartości liczby L .*

Zazwyczaj w technice rachunkowej usiłujemy wyznaczać wartości przybliżone liczb rzeczywistych, byle od zera nie mniejszych, w postaci reduktów liczb dziesiętnych normalnych, odpowiednio równych rozważanym liczbom rzeczywistym, gdyż ten właśnie sposób postępowania jest zawsze prawie najdogodniejszy.

§ 134. Przechodzimy do bliższego zbadania problemu, polegającego na wyznaczeniu wszystkich cyfr oznaczonej, od zera większej liczby L , aż do cyfry pewnego rzędu p włącznie. Oczywiście winniśmy założyć, że znamy pewien określnik (§ 68) liczby L , albowiem z jednej strony oczywiście nie mogą zgoła istnieć żadne ogólne reguły do wyznaczenia określnika liczby, o której wiemy tylko, że wartość jej określona jest w zupełności pewnymi warunkami natury bliżej nieokreślonej, a z drugiej — ustawienie metody do wyznaczania cyfr oznaczonej liczby aż do cyfry dowolnie danego rzędu stanowi poznanie pewnego szczególnego określnika tej liczby.

Zakładamy tedy, że możemy liczbowo rozwiązać zadanie następujące w stosunku do pewnej liczby dodatniej L : mając przez symbol specyficzny przedstawioną liczbę wymierną ε od zera większą, ale poza tem dowolnie daną, wyznaczyć w postaci symbolu specyficznego taką liczbę wymierną w od zera nie mniejszą, żeby liczba ta przedstawiała liczbę L z niedoborem mniejszym od liczby ε .

Założenie powyższe równoważne jest założeniu, iż przy danej, w postaci symbolu specyficznego przedstawionej wartości liczby ε , od zera większej, ale dowolnie przyjętej, możemy wyznaczyć symbol specyficzny takiej liczby wymiernej w' , która przedstawiałaby liczbę L z nadmiarem mniejszym od liczby ε .

Istotnie, rozwiązawszy pierwsze zadanie, uzyskamy rozwiązanie drugiego, przyjmując

$$w' = w + \varepsilon,$$

jeżeli zaś posiadamy rozwiązanie drugiego, to możemy uzyskać natychmiast rozwiązanie pierwszego, przyjmując

$$w = w' - \varepsilon;$$

jeżeli mamy

$$w' - \varepsilon \geq 0,$$

lub

$$w = 0,$$

gdybyśmy mieli

$$w' - \varepsilon < 0.$$

Przyjmijmy

$$\varepsilon = 10^{-k},$$

oznaczając przez k liczbę całkowitą, którą bliżej określimy później. Na podstawie założenia, które przyjęliśmy, moglibyśmy, oznaczwszy liczbowo liczbę całkowitą k , wyznaczyć liczbę wymierną w taką, żebyśmy mieli

$$(1) \quad 0 \leq w \leq L,$$

oraz

$$(2) \quad L - w < \varepsilon = 10^{-k}.$$

Na podstawie reguł zamiany liczby wymiernej na liczbę dziesiętną moglibyśmy, wyznaczwszy liczbę w — wyznaczyć ogólnie każdą cyfrę liczby w . Mielibyśmy tedy

$$(3) \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i},$$

oznaczając przez n stosownie dobraną liczbę całkowitą, na którą może wypaść jakakolwiek wartość ujemna, dodatnia lub równa zero. Gdyby przypadkowo liczba w równała się liczbie dziesiętnej skończonej, to, počawszy od pewnej cyfry c_β dostatecznie wysokiego rzędu, wszystkie cyfry liczby w równałyby się zero. Możemy założyć, że mamy

$$(4) \quad n \leq k;$$

gdyby bowiem okoliczność ta zrazu nie zachodziła, to moglibyśmy ją zawsze urzeczywistnić, gdyż przy oznaczonej wartości liczby w

wartość, którą możemy przyjąć na n we wzorze (3), podlega (§ 130) tylko warunkowi

$$n \leq \alpha,$$

gdzie α oznacza rząd najniższego rzędu, od zera większej cyfry c_α liczby w . Założymy więc, że liczba n rzeczywiście sprawdza warunek (4); założmy nawet, co będzie dogodnym później, że zachodzi także nierówność

$$n \leq \alpha - 2. \quad (5)$$

Na podstawie związków (1) i (2) liczba w' , określona równaniem

$$w' = w + \frac{1}{10^k}, \quad (6)$$

oczywiście sprawdza nierówność

$$L < w' \quad (7)$$

i przedstawia przybliżenie liczbę L z nadmiarem mniejszym od wartości jednostki dziesiętnej 10^{-k} , a na podstawie wzoru (3) mamy ze wzoru (6)

$$w' = \sum_{i=n}^{k-1} \frac{c_i}{10^i} + \frac{c_k + 1}{10^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i}. \quad (8)$$

Gdybyśmy mieli

$$c_k < 9,$$

to wyrażenie

$$c_k + 1$$

przedstawiałaby oczywiście cyfrę rzędu k liczby w' , a każda inna cyfra tej liczby równałaby się cyfrze równorzędnej liczby w . Gdyby zaś zachodziła równość

$$c_k = 9$$

i gdybyśmy jednocześnie mieli

$$c_{k-1} < 9,$$

to cyfra rzędu $k - 1$ liczby w' równałaby się sumie

$$c_{k-1} + 1,$$

cyfra zaś rzędu k — zeru, a każda inna cyfra — cyfrze równorzędnej liczby w . Żeby objąć zarazem wszystkie możliwe przypadki, ozna-

czamy przez μ liczbę całkowitą, byle od zera nie mniejszą, tak dobraną, żeby w każdym razie zachodziła nierówność

$$(9) \quad c_{k-\mu} < 9,$$

i żeby nadto w razie nierówności

$$(10) \quad \mu > 0$$

zachodziły równości

$$(11) \quad c_{k-\mu+t} = 9 \quad (t = 1, 2, 3, \dots, \mu).$$

Oczywiście zawsze istnieć będzie jedna, ale tylko jedna wartość na μ , spełniająca warunki powyższe.

Uwzględnivszy znaczenie litery μ , spostrzegamy, że zachodzić będzie w każdym razie związek

$$(12) \quad k - \mu + 1 \geq a,$$

gdzie a ma to samo znaczenie, co w nierówności (5).

Przy powyższem określeniu liczby μ dwa przypadki szczególne, rozważane wyżej, odpowiadają wartościom 0 i 1 liczby μ , a przy każdej innej wartości tej liczby wszystkie cyfry liczby w' , od cyfry rzędu $k - \mu + 1$ aż do cyfry rzędu k włącznie, równają się zeru, cyfra rzędu $k - \mu$ liczby w' równa się liczbie

$$c_{k-\mu} + 1,$$

wszystkie zaś inne cyfry równają się równorzędnym cyfrom liczby w .

Uwzględnivjąc uwagi powyższe oraz nierówność

$$k - \mu > n,$$

która wynika ze związków (12) i (5), uzyskujemy na liczbę w' wzór następujący:

$$(13) \quad w' = \sum_{i=n}^{k-\mu-1} \frac{c_i}{10^i} + \frac{c_{k-\mu} + 1}{10^{k-\mu}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i},$$

gdzie cyfry liczby w' są uwidocznione.

Ze wzorów (3) i (13) wynika, że w liczbach w i w' cyfry rzędu

$$k - \mu - 1$$

i wszystkie cyfry równorzędne rzędów niższych są pomiędzy sobą równe.

Zatem gdyby w pewnej liczbie dziesiętnej normalnej istniała cyfra rzędu

$$k - \mu - 1,$$

albo rzędu niższego, nierówna cyfrze równorzędnej w liczbie w , to na podstawie tw. III-go § 132-go ta liczba byłaby albo mniejsza od każdej z liczb w i w' , albo większa od każdej z nich. Ponieważ zaś na podstawie związków (1) i (7) liczba L nie jest ani mniejsza od liczby w , ani większa od liczby w' , przeto zachodzi twierdzenie następujące:

I. W liczbie L cyfra rzędu

$$k - \mu - 1$$

i każda cyfra rzędu niższego równa się cyfrze równorzędnej liczby w .

Powiadam, że zachodzi jeszcze twierdzenie następujące:

II. Jeżeli oznaczymy ogólnie przez x_i cyfrę rzędu i liczby L , to zachodzić będzie albo równość

$$x_{k-\mu} = c_{k-\mu}, \quad (14)$$

albo równość

$$x_{k-\mu} = c_{k-\mu} + 1, \quad (15)$$

zależnie od tego, czy liczba l' określona wzorem

$$l' = \sum_{i=n}^{k-\mu-1} \frac{c_i}{10^i} + \frac{c_{k-\mu} + 1}{10^{k-\mu}} \quad (16)$$

i przedstawiająca zatem redukt rzędu $k - \mu$ liczby dziesiętnej normalnej, równej liczbie w , czyni zadość nierówności

$$l' > L, \quad (17)$$

czy też związkowi

$$l' \leq L. \quad (18)$$

W pierwszym z tych przypadków cyfra rzędu k i każda cyfra rzędu niższego liczby L równa się cyfrze równorzędnej liczby w .

W drugim z powyższych przypadków cyfra rzędu k i każda cyfra niższego rzędu liczby L równa się cyfrze równorzędnej liczby w' .

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy najpierw, że jedna z równości (14) lub (15) rzeczywiście w każdym razie zachodzi

będzie, albowiem gdyby żadna z nich nie zachodziła, to mielibyśmy albo

$$(19) \quad x_{k-\mu} < c_{k-\mu},$$

albo

$$(20) \quad x_{k-\mu} > c_{k-\mu} + 1.$$

Otóż na podstawie tw. III-go § 132-go w razie nierówności (19) mielibyśmy

$$L < w,$$

w razie zaś nierówności (20) —

$$L > w';$$

tymczasem żadna z tych alternatyw w rzeczywistości zachodzić nie może, gdyż na podstawie związków (1) i (7) mamy

$$w \leq L < w'.$$

Żeby posunąć się dalej, przyjmijmy

$$(21) \quad l_{k-\mu} = \sum_{i=n}^{k-\mu} \frac{c_i}{10^i}.$$

Ze względu na (16) mamy tedy

$$(22) \quad l' = l_{k-\mu} + \frac{1}{10^{k-\mu}}.$$

Jeżeli zachodzi równość (14), to ze względu na tw. I-sze i na wzór (21) liczba $l_{k-\mu}$ przedstawia redukt rzędu $k - \mu$ liczby dziesiętnej normalnej λ równej liczbie L . Zatem (§ 133) w tym przypadku zachodzić będzie nierówność (17). Gdyby natomiast zachodziła równość (15), to na podstawie tw. I-go redukt liczby dziesiętnej normalnej λ równałby się liczbie l' , a stąd wynika, że w takim razie zachodziłby związek (18). Odwrotnie, w razie nierówności (17) zachodziłaby równość (14), a w razie istnienia związku (18) — równość (15), gdyż założenie, iż tak nie jest, oczywiście prowadzi do sprzeczności.

Założmy, że zachodzi równość (14), i uważajmy redukt rzędu k , l_k , liczby w . Mamy

$$(23) \quad l_k = \sum_{i=n}^k \frac{c_i}{10^i}$$

oraz

$$l' = l_k + \frac{1}{10^k}, \quad (24)$$

ze względu na wzór (22) i na to, iż w razie nierówności

$$\mu > 0$$

zachodzą równości (11).

Ponieważ, jakśmy stwierdzili wyżej, równość (14) pociąga za sobą nierówność (17), ponieważ nadto na podstawie jednego ze związków (1) mamy

$$l_k \leq L,$$

przeto ze wzorów (23) i (24) wynika, że redukt l_k liczby dziesiętnej normalnej, równej liczbie w , przedstawia liczbę L z niedoborem mniejszym od

$$\frac{1}{10^k}.$$

Zatem (§ 133) cyfra rzędu k i wszystkie cyfry niższych rzędów liczby L równają się rzeczywiście równorzędnym cyfrom liczby w .

Pozostaje jeszcze do zbadania przypadek, w którym zachodzi równość (15). W tym celu zważmy, że redukt rzędu k , l'_k , liczby dziesiętnej normalnej, równej liczbie w' , sprawdza w każdym razie równość

$$l_k = l'. \quad (25)$$

Istotnie, okoliczność ta jest oczywista w przypadku, kiedy mamy

$$\mu = 0,$$

ale ona zachodzi i w razie nierówności

$$\mu > 0,$$

o czem przekonywamy się z łatwością, zważywszy, że wówczas cyfry liczby w' od cyfry rzędu $k - \mu + 1$ aż do cyfry rzędu k włącznie równe są zeru.

Ponieważ zakładamy, że zachodzi równość (15), ponieważ z drugiej strony stwierdziliśmy, że równość ta pociąga za sobą związek (18), przeto na podstawie równości (25) zachodzi równość

$$l'_k \leq L. \quad (26)$$

Z definicji liczby l'_k i tw. II-go § 132-go wynika, że mamy

$$l'_k \leq w' < l'_k + \frac{1}{10^k}.$$

Zatem na podstawie nierówności (7) mamy

$$(27) \quad L < l'_k + \frac{1}{10^k}.$$

Na podstawie związków (26) i (27) redukt l'_k liczby dziesiętnej normalnej, równej liczbie w' , jest zarazem i reduktom rzędu k liczby dziesiętnej normalnej, równej liczbie L ; innemi słowy, cyfra rzędu k i każda cyfra rzędu niższego liczby L równa się cyfrze równorzędnej liczby w' .

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Czytelnik przypomni sobie, że właściwym przedmiotem tego paragrafu jest zagadnienie następujące: wyznaczyć cyfry liczby L , od zera większej, aż do cyfry danego rzędu p włącznie, w założeniu, że dany jest jeden określnik liczby L .

Żeby wyniki, do których doszliśmy, zastosować do tego zagadnienia, czynimy uwagę następującą: jeżeli na liczbę, którą w powyższych rozważaniach oznaczyliśmy przez k , przyjmiemy jakąkolwiek oznaczoną wartość, to zazwyczaj nie będziemy mogli przewidzieć, jaka wartość przypadnie na liczbę, którą oznaczyliśmy byli przez μ . Ponieważ jednak najczęściej uzyskujemy wartość zerową na μ , przeto zazwyczaj przyjmujemy

$$k = p + 1.$$

Jeżeli po wyznaczeniu liczby w przy tej wartości na k pokaże się, że mamy rzeczywiście

$$\mu = 0,$$

to na podstawie tw. I-go uzyskamy oczywiście rozwiązanie zagadnienia, o które chodzi.

Jeżeli zaś na μ przypadnie wartość od zera większa, to na podstawie tw. II-go rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do wykonania porównania ilościowego liczb l' i L .

Dyskusya rozwinięta w § 91-szym poucza nas, że wykonanie tego porównania połączone być może niekiedy z trudnościami, prze-

kraczącemi nasze siły. Zatem *nie posiadamy żadnej całkiem ogólnej metody oznaczania cyfr danej liczby* (§ 129) *dodatkowej*. Natomiast liczne są przypadki szczególne, w których posiadamy metody regularne do rozwiązywania tego zagadnienia; najprostsze z nich omówimy w paragrafach następujących.

§ 135. Wiemy (§ 94), że każdej od zera większej liczbie a odpowiada dokładnie jedna liczba także od zera większa x , która sprawdza równanie

$$x^m = a,$$

gdzie oznaczyliśmy przez m daną liczbę całkowitą od jedności większą. Zwążając, w interesie prostszego wysławiania się, znaczenie wyrażenia pierwiastek n -tego stopnia, przyjmować będziemy w dalszym ciągu za nazwę liczby x wyrażenie pierwiastek m -tego stopnia liczby a , zamiast wyrażenia „dodatni pierwiastek m -tego stopnia tej liczby“. W przypadkach szczególnych, kiedy liczba m równa się liczbie 2, albo liczbie 3, zowiemy liczbę x odpowiednio pierwiastkiem kwadratowym albo sześciennym liczby a .

Istnieje ogólna metoda do wyznaczania wszystkich cyfr aż do cyfry dowolnie danego rzędu pierwiastka danego stopnia m danej liczby a w przypadku, kiedy posiadamy środki do wyznaczania wszystkich cyfr liczby a aż do cyfry dowolnie danego rzędu. Żeby podać przykład zastosowania ogólnych rozważań, wyłożonych w paragrafie poprzedzającym, omówimy metodę tę, poprzestając jednak dla krótkości na przypadkach, w których chodzi o pierwiastek kwadratowy lub sześcienny; czytelnik z łatwością sam spostrzeże, w jaki sposób należałoby postępować, gdyby chodziło o pierwiastek stopnia jakiegokolwiek.

Jakąkolwiek liczbę, byle od zera większą, oznaczylibyśmy przez L , zawsze istnieje jedna i tylko jedna liczba całkowita N , sprawdzająca związek

$$N^2 \leq L < (N+1)^2.$$

Liczba N zowie się całkowitą częścią pierwiastka kwadratowego liczby L i jest oczywiście największą liczbą całkowitą, której kwadrat od liczby L większy nie jest.

Różnica

$$L - N^2$$

zowie się resztą z wyznaczania części całkowitej pierwiastka kwadratowego liczby L .