

w rozważanym przypadku w zbiorze liczb rzeczywistych 2-giej kategorii w stosunku do przekroju ( $P$ ) liczba najmniejsza istnieć nie może.

Zwróćmy się teraz do drugiego przypadku. W tym razie liczba  $r$  oczywiście może być tylko najmniejszą liczbą w 2-giej kategorii liczb rzeczywistych w stosunku do przekroju ( $P$ ), a zbiór liczb rzeczywistych 1-szej kategorii w stosunku do tego przekroju oczywiście może być określony jako zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, mniejszych od liczby  $r$ . Ponieważ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, mniejszych od oznaczonej liczby rzeczywistej, liczba największa na podstawie tw. II-go istnieć nie może, przeto w obecnym przypadku w zbiorze liczb rzeczywistych 1-szej kategorii w stosunku do przekroju ( $P$ ) nie może istnieć liczba największa.

Uzyskane wyniki oczywiście wyrażają łącznie twierdzenie, o które właśnie chodziło.

§ 91. Ze względu na różne rozważania, oparte na pojęciu liczby rzeczywistej, koniecznem jest, żebyśmy dokładnie określili treść zdania postaci następującej: „taka a taka liczba rzeczywista jest znana lub dana“.

W pierwszej chwili mogłoby się wydawać, że treść zdania, o które chodzi, mogłaby być określona w sposób następujący: liczba rzeczywista uważana być winna za daną lub znaną, skoro znak jej jest dany, a wartość bezwzględna jest w znaczeniu, określonym w § 68-ym str. 217, liczbą bezwzględną znaną. W rzeczywistości jednak przyjmujemy inną definicyę, która, jak się przekonamy, jest bardziej szeroka.

Przedewszystkiem uzasadnimy twierdzenie następujące:

I. Oznaczmy przez  $(\Omega_1)$  i  $(\Omega_2)$  takie dwa zbiory liczb wymiernych rzeczywistych, żeby zbiory te spełniały warunki następujące:

1°. Żadna liczba zbioru  $(\Omega_1)$  nie jest większa od żadnej liczby zbioru  $(\Omega_2)$ .

2°. Jakkolwiek, byle od zera większą, liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez  $\varepsilon$ , zawsze istnieć będą dwie liczby wymierne  $w_1$  i  $w_2$ , należące odpowiednio do zbiorów  $(\Omega_1)$  i  $(\Omega_2)$ , a przytem takie, żeby zachodziła nierówność

$$w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

W takim razie istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista <sup>1)</sup>  $x$ ,

<sup>1)</sup> Zgodnie z prawem, któreśmy sobie zastrzegli, zakładamy milcząco, że równe pomiędzy sobą liczby nie są uważane za różne od siebie przedmioty.

która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(\Omega_1)$ , ani większa od żadnej liczby zbioru  $(\Omega_2)$ . Układowi zbiorów  $(\Omega_1)$  i  $(\Omega_2)$  nadajemy nazwę określnika liczby  $x$ , zbiór  $(\Omega_1)$  zowiemy pierwszą częścią, a zbiór  $(\Omega_2)$  drugą częścią tego określnika; na sam określnik przyjmujemy symbol

$$\{(\Omega_1), (\Omega_2)\}.$$

Żeby udowodnić istnienie liczby  $x$ , oznaczmy przez  $(A_1)$  zbiór wszystkich liczb wymiernych rzeczywistych, z których żadna nie jest większa od każdej z liczb zbioru  $(\Omega_1)$ , a przez  $(A_2)$  zbiór wszystkich pozostałych liczb wymiernych rzeczywistych. Ten podział zbioru liczb rzeczywistych wymiernych na dwa zbiory stanowi oczywiście pewien przekrój  $(P)$  zbioru tych liczb. Oznaczmy przez  $l$  liczbę położoną na przekroju  $(P)$ . Liczba  $l$  oczywiście nie jest mniejsza od żadnej liczby zbioru  $(\Omega_1)$ , a nadto łatwo stwierdzić możemy, że liczba  $l$  nie jest większa od żadnej liczby zbioru  $(\Omega_2)$ . Istotnie, gdybyśmy założyli, że liczba  $l$  większa jest od pewnej liczby  $w_2$  zbioru  $(\Omega_2)$  i oznaczyli przez  $w$  liczbę wymierną pośrednią pomiędzy liczbami  $l$  i  $w_2$ , to liczba  $w$  należałaby w stosunku do przekroju  $(P)$  do 1-szej kategorii liczb wymiernych, a ponieważ liczba ta większa jest od liczby  $w_2$ , od której żadna liczba zbioru  $(\Omega_1)$  większa nie jest, przeto jedna z liczb wymiernych 1-szej kategorii w stosunku do przekroju  $(P)$ , mianowicie liczba  $w$ , wbrew definicji przekroju  $(P)$ , większa byłaby od każdej liczby zbioru  $(\Omega_1)$ . Zatem wartość

$$x = l \tag{1}$$

liczby  $x$  czyni zadość warunkom twierdzenia i istnienie liczby  $x$  jest udowodnione.

Wynik ten uzyskaliśmy, opierając się tylko na pierwszym z dwóch założeń przyjętych co do zbiorów  $(\Omega_1)$  i  $(\Omega_2)$ . Opierając się na drugim, udowodnimy, że wartość na  $x$ , określona równaniem (1), jest jedyna, która warunki twierdzenia spełnia.

Istotnie, załóżmy, że wartość

$$x = l'$$

na  $x$  także warunkom tym czyni zadość.

Jeżeli tedy oznaczmy przez  $w_1$  i  $w_2$  takie dwie liczby wymierne, żeby pierwsza należała do zbioru  $(\Omega_1)$ , druga do zbioru  $(\Omega_2)$ , i żeby nadto zachodziła nierówność

$$w_2 - w_1 < \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza od zera większą, ale poza tem dowolnie przyjętą liczbę dodatnią, to ze względu na związki

$$\begin{aligned} w_1 &\leq l \leq w_2 \\ w_1 &\leq l' \leq w_2, \end{aligned}$$

z których wynika związek

$$|l - l'| \leq w_2 - w_1,$$

mielibyśmy

$$|l - l'| < \varepsilon.$$

Zatem różnica

$$l - l'$$

jest, co do wartości bezwzględnej, mniejsza od każdej od zera odmiennej liczby dodatniej. Mamy więc

$$l - l' = 0,$$

czyli

$$l = l',$$

a o to tylko chodziło.

Oznaczmy przez  $(A_1)$  1-szą kategorię a przez  $(A_2)$  2-gą kategorię liczb rzeczywistych wymiernych w stosunku do pewnego przekroju  $(P)$  zbioru wszystkich liczb rzeczywistych wymiernych. Oznaczmy nadto przez  $a$  liczbę położoną na przekroju  $(P)$ . Oczywiście zbiór  $(A_1)$  uważany być może za pierwszą, a zbiór  $(A_2)$  za drugą część pewnego określnika liczby  $a$ . Ponieważ każdej liczbie rzeczywistej odpowiada przynajmniej jeden taki przekrój zbioru liczb wymiernych (§ 90, tw. V), na którym ona jest położona, przeto *każda liczba rzeczywista posiada jeden przynajmniej określnik*. W rzeczywistości *każda liczba rzeczywista posiada nieskończenie wiele określników*. Istotnie, zachowując symbolom  $(A_1)$ ,  $a$  i  $(A_2)$  znaczenie, które im nadaliśmy przed chwilą, spostrzegamy, że z każdego ze zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$  możemy usunąć nieskończenie wiele liczb w taki sposób, żeby zbiory  $(A'_1)$  i  $(A'_2)$ , tą drogą wyprowadzone ze zbiorów  $(A_1)$  i  $(A_2)$ , uważane być mogły odpowiednio za pierwszą i drugą część pewnego określnika liczby  $a$ ; możemy na przykład usunąć ze zbioru  $(A_1)$  wszystkie liczby mniejsze od jakiejkolwiek liczby  $a_1$ , mniejszej od liczby  $a$ , a ze zbioru  $(A_2)$  — wszystkie liczby większe od dowolnie przyjętej, byle od liczby  $a$  większej, liczby  $a_2$ .

Podobnie, jak w teorii liczb bezwzględnych, orzekamy, że pewna liczba rzeczywista  $x$  jest znana, kiedy znany jest jeden

z jej określników, a określnik pewnej liczby uważamy za znany, jeżeli możemy, o ile nam czas na to pozwala, rzeczywiście rozwiązać każde zadanie typu następującego:

Oznaczywszy przez symbol specyficzny liczbę wymierną dodatnią  $\varepsilon$ , od zera większą, ale choćby jak małą, wyznaczyć symbole specyficzne<sup>1)</sup> dwóch liczb wymiernych takich, żeby jedna z nich  $w_1$  należała do pierwszej części rozważanego określnika, a druga  $w_2$  do drugiej, i żeby nadto zachodziła nierówność

$$w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

Podobnie jak w teorii liczb bezwzględnych, powyższa definicya wyrażenia „liczba znana“ równoważna jest następującej: orzeczenie, że pewna liczba rzeczywista  $x$  jest znana, wyraża, że, o ile rozporządzilibyśmy przeciągiem czasu dostatecznie długim, moglibyśmy zawsze, przyjąwszy dowolnie pewną liczbę  $\varepsilon$  od zera większą, ale choćby jak małą, rzeczywiście wyznaczyć symbole specyficzne dwóch liczb wymiernych  $w_1$  i  $w_2$ , sprawdzających związki następujące:

$$\begin{aligned} w_1 &\leq x, \\ w_2 &\geq x \end{aligned}$$

$$w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

Jeżeli dwie liczby rzeczywiste  $x$  i  $x'$  sprawdzają nierówność

$$|x - x'| < \varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza pewną od zera większą liczbę, to orzekamy, że każda z liczb  $x$  i  $x'$  przedstawia drugą z nich z błędem bezwzględnym mniejszym od  $\varepsilon$ .

Określiwszy znaczenie wyrażenia „liczba znana“, tem samem określiśmy, na czem polega wyznaczenie liczby nieznaney: wyznaczyć pewną liczbę znaczy zdobyć o niej takie wiadomości, żeby po ich zdobyciu ta liczba stała się liczbą „znaną“.

Jeżeli pewna liczba rzeczywista  $x$  jest znana, to możemy oczywiście, o ile mamy do rozporządzenia dostatecznie długi przeciąg

<sup>1)</sup> Za symbol specyficzny liczby wymiernej dodatniej uważamy symbol postaci  $+\frac{m}{p}$ , a za symbol specyficzny liczby wymiernej ujemnej symbol  $-\frac{m}{p}$ , oznaczając w obu przypadkach przez  $m$  i  $p$  dwie w dziesiętnej numeracyi przedstawione liczby całkowite.

czasu, wyznaczyć symbol specyficzny takiej liczby wymiernej, która przedstawiałaby liczbę  $x$  z błędem bezwzględnym mniejszym od dowolnie danej, przez symbol specyficzny oznaczonej, liczby wymiernej  $\varepsilon$  od zera większej. Powiadam, że odwrotnie, jeżeli, mając liczbę wymierną  $\mu$  od zera większą, przez symbol specyficzny przedstawioną, ale poza tem dowolnie daną, możemy zawsze wyznaczyć, o ile czasem skrupowani nie bylibyśmy, symbol specyficzny liczby wymiernej  $w$ , przedstawiającej liczbę  $x$  z błędem bezwzględnym mniejszym od  $\mu$ , to liczba  $x$ , w znaczeniu określonym wyżej, jest znana. Istotnie, skoro mamy

$$|x - w| < \mu,$$

to mamy także

$$w - \mu < x$$

oraz

$$w + \mu > x.$$

Jeżeli więc oznaczmy przez  $\varepsilon$  liczbę wymierną, od zera większą, przez symbol specyficzny przedstawioną, ale poza tem dowolnie daną i przyjmiemy

$$2\mu < \varepsilon, \quad w_1 = w - \mu, \quad w_2 = w + \mu,$$

to liczby  $w_1$  i  $w_2$  sprawdzać będą związki

$$\begin{aligned} w_1 &< x, & w_2 &> x \\ 0 &< w_2 - w_1 &< \varepsilon, \end{aligned}$$

a ponieważ liczby  $w_1$  i  $w_2$  z łatwością zdołamy przedstawić przez ich symbole specyficzne, przeto stwierdzamy, że liczba  $x$  rzeczywiście będzie liczbą „znaną”.

Obecnie pragniemy uwydatnić tę okoliczność, że liczba znana w znaczeniu naszej definicyi bynajmniej nie jest znana bezwzględnie; innemi słowy „znając” pewną liczbę w omawianem znaczeniu, nie zawsze będziemy mogli odpowiedzieć na wszystkie pytania, jakieby można co do tej liczby postawić. Żeby poznać granice tych wiadomości o pewnej liczbie  $x$ , które posiadamy zawsze, skoro liczba  $x$  jest „znana”, zwróćmy się do zagadnienia następującego:

Oznaczając przez  $w$  w postaci symbolu specyficznego daną liczbę wymierną, rozpoznać, który z trzech związków następujących

$$(1) \quad w < x, \quad w = x, \quad w > x$$

jest tym, który zachodzi rzeczywiście?

Jakąkolwiek liczbę wymierną  $\varepsilon$ , byle większą od zera, przedstawilibyśmy przez jej symbol specyficzny, zdołamy zawsze, poświęcając na to przeciąg czasu dostatecznie długi, wyznaczyć symbole specyficzne dwóch liczb wymiernych  $w_1$  i  $w_2$ , sprawdzających związki

$$\left. \begin{array}{l} w_1 \leq x, \quad w_2 \geq x \\ w_2 - w_1 < \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Jeżeli zachodzi jeden ze związków

$$w < x \quad \text{albo} \quad w > x,$$

to drogą prób kolejnych zdołabymy rozpoznać, który mianowicie z tych dwóch związków zachodzi w rzeczywistości.

Próby, które mamy na myśli, moglibyśmy na przykład wykonywać w sposób następujący: moglibyśmy przyjmować kolejno na  $\varepsilon$  wartości

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \dots$$

wyznaczając każdym razem liczby  $w_1$  i  $w_2$  tak, żeby one sprawdzały związki (2), i badając przy każdorazowym układzie wartości na  $w_1$  i  $w_2$ , czy zachodzi jeden ze związków

$$w < w_1 \quad \text{albo} \quad w > w_2. \quad (3)$$

Skoro dojdziemy do takiej wartości na  $\varepsilon$ , ażebyśmy mieli

$$\varepsilon < |x - w|,$$

a do takiej wartości zawsze dojdziemy wskazaną drogą, skoro, jakeśmy założyli, zachodzi nierówność

$$x \neq w,$$

to oczywiście jeden ze związków (3) i tylko pewien jeden z nich zachodzić będzie i wówczas dowiemy się, czy liczba  $w$  jest mniejsza, czy większa od liczby  $x$ . Winniśmy jednak z naciskiem zaznaczyć, że nie zawsze potrafimy oszacować a priori ilości prób koniecznych, nie zawsze więc zdołamy określić, ile czasu wymagałoby wykonanie takich prób.

Przypuśćmy teraz, że w rzeczywistości zachodzi równość

$$x = w.$$

W takim razie omawianą drogą oczywiście wcale nie zdaliśmy napewno stwierdzić, że powyższa równość rzeczywiście zachodzi, gdyż ilekolwiek prób wykonaliśmy, stwierdzilibyśmy tylko w sposób pewny, że wartość bezwzględna różnicy

$$x - w$$

jest mniejsza od najmniejszej z tych wartości na  $\varepsilon$ , którą przy próbach naszych na tę liczbę przyjmowaliśmy, ale naturalnie nie posiadilibyśmy dowodu na to, że różnica

$$x - w$$

dokładnie równa się zeru.

Z dyskusji tej wynika, że chociażby pewna liczba rzeczywista  $x$  była nam „znana“ w znaczeniu określonym wyżej, to jednak nie zawsze umielibyśmy zdecydować, czy liczba wymierna  $w$ , której symbol specyficzny jest nam znany, jest mniejsza od liczby  $x$ , równa się tej liczbie lub jest od niej większa. Z tego wynika, że tembardziej możliwą jest rzeczą, iż nie umielibyśmy wykonać porównania ilościowego dwóch liczb rzeczywistych  $x$  i  $x'$ , choćby nawet liczby te były nam „znane“. Z tych samych powodów może się wydarzyć, iż nie moglibyśmy upewnić się, czy pewna „znana“ nam liczba rzeczywista jest wymierna czy też niewymierna.

Z tychże jeszcze przyczyn możemy nie umieć dać odpowiedzi w szczególności na pytanie, czy dana liczba rzeczywista jest mniejsza od zera, równa zeru lub jest od zera większa; innemi słowy, możemy nie być w stanie stwierdzić, jaki jest znak liczby rzeczywistej „danej“. Ta ostatnia uwaga poucza nas, że, zgodnie z zapowiedzią, uczynioną na początku tego paragrafu, znaczenie, które nadaliśmy wyrażeniu „liczba rzeczywista znana“ jest szersze od znaczenia, jakie miałoby to wyrażenie, gdybyśmy byli oświadczyli, że liczbę rzeczywistą uważamy za znaną w razie, kiedy znany jej znak, oraz (w znaczeniu określonym w § 68-ym) tę liczbę bezwzględną, która równa się jej wartości bezwzględnej.

Z rozważań powyższych wynika, że wiadomości, jakie posiadamy o liczbie rzeczywistej, która nam jest „znana“ tylko w znaczeniu określonym wyżej, bynajmniej nie są wyczerpujące, jednakowoż umówiliśmy się, że wiadomości te uważać będziemy za wystarczające do tego, żeby orzec, iż rozważana liczba jest znana z przyczyn następujących:

1°. Ze stanowiska przyrodoznawstwa te wiadomości, które posiadamy o liczbie rzeczywistej, w znaczeniu przyjętem przez nas, „znanej“, są z reguły wystarczające.

2°. Jeżeli pewne liczby rzeczywiste są „znane“, to, jak się przekonamy w przyszłym paragrafie, i wartość wszelkiej kombinacji tych liczb drogą działań zasadniczych zawsze może być „wyznaczona“ z wyjątkiem jednego tylko przypadku.

3°. Wyjątkowo tylko możemy, przy wyznaczaniu liczb rzeczywistych, zdobyć głębsze wiadomości od tych, jakie posiadamy o liczbach nam „znanych“ w znaczeniu przez nas przyjętem.

4°. Jakkolwiek wiadomości nasze o liczbach „znanych“ nie są wyczerpujące, to jednakowoż, ze względu na tw. I-sze, „znając“ dwie liczby, moglibyśmy wykonać w zupełności porównanie ilościowe tych liczb, gdybyśmy tylko posiadali dostateczną potęgę logicznego myślenia i rozporządzali dostatecznie długim czasem.

§ 92. Główny cel tego paragrafu polega na wykazaniu, że wynik jakiegokolwiek kombinacji drogą działań zasadniczych liczb „znanych“ w znaczeniu, określonym w paragrafie poprzedzającym, może być „wyznaczony“ wyjawszy jeden tylko przypadek, który naturalnie dokładnie określimy. Ale najpierw zwrócimy się do pewnych ogólnych rozważań.

Jeżeli mamy pewność, że liczba rzeczywista  $x$ , którą pragniemy bliżej zbadać, sprawdza związek

$$x \geq a, \quad (1)$$

albo związek

$$x \leq b, \quad (2)$$

gdzie oznaczyliśmy przez  $a$  i  $b$  znowu pewne dwie liczby rzeczywiste, to orzekamy, w razie związku (1), że liczba  $a$  jest dolną granicą liczby  $x$ , a w razie związku (2) — że liczba  $b$  jest górną granicą liczby  $x$ . Oczywiście wszelka liczba rzeczywista  $x$  posiada nieskończenie wiele dolnych granic i nieskończenie wiele górnych granic, gdyż każda liczba mniejsza od dolnej granicy liczby  $x$  jest nową dolną granicą tej liczby, a każda liczba większa od jej górnej granicy jest nową górną granicą rozważanej liczby.

Jeżeli zachowamy poprzednie znaczenie na symbol  $x$  i oznaczymy jeszcze przez  $l$  nową liczbę rzeczywistą, to nazywamy różnicę

$$x - l$$



błędem, z którym liczba  $l$  przedstawia liczbę  $x$ ; w przypadku kiedy zachodzi związek

$$x - l \geq 0,$$

nadajemy nazwę niedoboru błędowi, z którym liczba  $l$  przedstawia liczbę  $x$ , a w razie nierówności

$$x - l \leq 0,$$

nazywamy błąd ten nadmiarem, w którym liczba  $l$  przedstawia liczbę  $x$ .

Wyrażenie granica błędu, z którym przedstawia pewna liczba rzeczywista  $l$  pewną inną liczbę rzeczywistą  $x$ , oznacza górną granicę wartości bezwzględnej błędu, w którym przedstawia liczba  $l$  liczbę  $x$ .

I. Jeżeli oznaczymy przez  $\mu$  granicę błędów, z którymi dwie liczby  $u$  i  $v$  przedstawiają odpowiednio dwie inne liczby  $x$  i  $y$ , to suma

$$u + v$$

przedstawia sumę

$$x + y$$

z błędem, którego granicą jest w każdym razie liczba  $2\mu$ .

Istotnie, jeżeli przyjmiemy

$$\begin{aligned} x &= u + \alpha, \\ y &= v + \beta, \end{aligned}$$

to mieć będziemy

$$(x + y) - (u + v) = \alpha + \beta,$$

a ponieważ mamy

$$|\alpha| \leq \mu, \quad |\beta| \leq \mu,$$

przeto mamy i

$$|(x + y) - (u + v)| \leq 2\mu,$$

a związek ten wyraża właśnie twierdzenie, o które chodzi.

II. Jeżeli oznaczymy przez  $x$  i  $y$  dwie liczby rzeczywiste jakiegokolwiek, przez  $L$  jedną ze wspólnych górnych granic wartości bezwzględnych liczb  $x$ ,  $y$ , a przez  $u$  i  $v$  dwie liczby, sprawdzające nierówności

$$|u| \leq L \quad \text{ i } \quad |v| \leq L$$

i przedstawiające odpowiednie liczby  $x$  i  $y$  z błędami co do wartości bezwzględnych, nie większemi od pewnej liczby  $\mu$ , to iloczyn  $u \cdot v$

przedstawia iloczyn  $x \cdot y$  z błędem, którego granicą jest w każdym razie liczba  $2L\mu$ .

Istotnie, przyjmijmy

$$\begin{aligned}x &= u + \alpha, \\y &= v + \beta;\end{aligned}$$

mamy tedy

$$x \cdot y - u \cdot v = (u + \alpha)(v + \beta) - uv = \alpha(v + \beta) + u\beta,$$

a ponieważ mamy

$$\begin{aligned}|v + \beta| &= |y| \leq L \\|u| &\leq L\end{aligned}$$

oraz

$$|\alpha| \leq \mu, \quad |\beta| \leq \mu,$$

przeto zachodzi nierówność

$$|x \cdot y - u \cdot v| \leq 2L\mu,$$

wyrażająca właśnie twierdzenie, o które chodziło.

III. Jeżeli oznaczmy przez  $x$  i  $y$  dwie liczby, z których  $y$  zeru równe nie jest, przez  $L$  jedną ze wspólnych górnych granic wartości bezwzględnych liczb  $x$  i  $y$ , przez  $d$  od zera odmienną dolną granicę liczby  $y$ , a przez  $u$  i  $v$  dwie liczby sprawdzające nierówności

$$|u| \leq L, \quad |v| \leq L, \quad |v| \geq d \tag{1}$$

i przedstawiające odpowiednio liczby  $x$  i  $y$  z błędami, których wspólną granicą jest pewna liczba dodatnia  $\mu$ , to w takim razie iloraz

$$u : v$$

przedstawia iloraz

$$x : y$$

z błędem, którego granicą jest w każdym razie liczba

$$\frac{2L}{d^2} \mu.$$

Istotnie, przyjmijmy znowu

$$\begin{aligned}x &= u + \alpha, \\y &= v + \beta.\end{aligned}$$

Mamy tedy

$$\frac{x}{y} - \frac{u}{v} = \frac{u + \alpha}{v + \beta} - \frac{u}{v} = \frac{v\alpha - u\beta}{(v + \beta)v}. \tag{2}$$

Jeżeli uwzględnimy związki (1) oraz związki

$$\begin{aligned} |y| &= |v + \beta| \geq d \\ |\alpha| &\leq \mu, \quad |\beta| \leq \mu, \end{aligned}$$

które wynikają z założeń twierdzenia, to wyprowadzimy łatwo z równości (2) związek

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{u}{v} \right| \leq \frac{2L\mu}{d^2},$$

wyrażający właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Zwracając się do właściwego przedmiotu tego paragrafu, uważamy kolejno każde z zadań następujących:

Zadanie I. „Wyznaczyć“ sumę algebraiczną dwóch liczb „danych“.

Zadanie II. „Wyznaczyć“ iloczyn dwóch liczb „danych“.

Zadanie III. „Wyznaczyć“ iloraz w przypadku, kiedy „dane są“ dzielna i dzielnik.

Przystępując do zadania I-go, czynimy najpierw uwagę następującą: jeżeli pewna liczba rzeczywista jest „znana“, to liczba jej symetryczna jest oczywiście również „znana“. Ponieważ zaś wszelka suma algebraiczna uważana być może za sumę zwykłą, której każdy składnik równa się pewnemu składnikowi sumy algebraicznej, albo jest liczbą pewnemu składnikowi sumy algebraicznej symetryczną, przeto, bez szkody dla ogólności, możemy przyjąć, że chodzi o wyznaczenie sumy zwykłej dwóch liczb danych. Oznaczmy liczby te przez  $x$  i  $y$ , a przez  $\varepsilon$  dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę wymierną. Jeżeli tedy wyznaczymy liczbę  $\mu$  z różnicowania

$$2\mu = l,$$

a następnie wyznaczymy dwie liczby wymierne  $u$  i  $v$  w ten sposób, żeby one przedstawiały odpowiednio liczby  $x$  i  $y$  z błędami nie przekraczającymi granicy  $\mu$ , to (tw. I) liczba

$$u + v$$

da nam rozwiązanie zadania, o które chodziło.

Ponieważ wyznaczenie symbolów specyficznych liczb  $u$  i  $v$  stanowi zadanie, które możemy rozwiązać, skoro liczby  $x$  i  $y$  są dane, przeto z tego, co poprzedza, wynika, że możemy wyznaczyć

sumę algebraiczną dwóch liczb danych, skoro kategoria (§ 83), do której należy każdy składnik, jest oznaczona.

Zanim przejdziemy do zadania II-go i III-go, uzasadnimy uwagi następujące:

**Uwaga I.** Jeżeli pewna liczba  $x$  jest znana, to możemy wyznaczyć górną granicę wartości bezwzględnej tej liczby w postaci liczby wymiernej dodatniej, określonej przez jej symbol specyficzny.

**Uwaga II.** Jeżeli pewna liczba rzeczywista  $x$  jest nam „znana“, to, przyjąwszy dowolną, byle od zera większą liczbę wymierną  $\mu$ , możemy wyznaczyć symbol specyficzny takiej liczby wymiernej  $u$ , która sprawdzałaby związek

$$|u| \leq |x|$$

i przedstawiała jednocześnie liczbę  $x$  z błędem bezwzględnym, nie przekraczającym liczby wymiernej  $\mu$ .

**Uwaga III.** Ponieważ, jakśmy stwierdzili w paragrafie poprzedzającym, nie zawsze możemy rozstrzygnąć, czy liczba rzeczywista „dana“  $x$  jest od zera odmienna, przeto nie zawsze zdołamy upewnić się, czy istnieje od zera większa dolna granica wartości bezwzględnej liczby  $x$ , a więc tem bardziej nie zawsze zdołamy rzeczony element wyznaczyć. Jeżeli jednak posiadamy symbol specyficzny takiej od zera większej liczby wymiernej  $d$ , która uważana być może za dolną granicę wartości bezwzględnej „danej“ liczby rzeczywistej  $x$ , to w takim razie możemy rozwiązać zadanie następujące: Określiwszy dowolnie przez symbol specyficzny od zera większą liczbę wymierną  $\mu$ , wyznaczyć symbol specyficzny takiej liczby wymiernej  $u$ , żeby liczba ta sprawdzała związki

$$|u| \geq d \quad \text{ i } \quad |u| \leq |x|$$

i przedstawiała jednocześnie liczbę  $x$  z błędem, którego wartość bezwzględna nie przekraczałaby liczby  $\mu$ .

Uzasadnimy najpierw uwagę I-szą. Ponieważ liczba  $x$  jest znana, przeto, przyjąwszy dowolnie pewną liczbę wymierną, powiedzmy jedność, zdołamy wyznaczyć symbole specyficzne dwóch liczb wymiernych  $a'$  i  $a''$ , sprawdzających związki

$$\begin{aligned} a'' - a' &\leq 1 \\ a' &\leq x \leq a'', \end{aligned}$$

a ponieważ wartość bezwzględna tej z liczb  $a'$  i  $a''$ , która jest większa od drugiej, oczywiście uważana być może za górną granicę liczby  $x$ , przeto stwierdzamy, że uwaga I-sza jest uzasadniona.

Żeby uzasadnić uwagę II-gą, zważmy, że będziemy mogli wyznaczyć symbole specyficzne takich dwóch liczb wymiernych  $\alpha'$  i  $\alpha''$ , żeby liczby te sprawdzały związki

$$\begin{aligned}\alpha' &\leq x \leq \alpha'', \\ \alpha'' - \alpha' &\leq \mu.\end{aligned}$$

Otóż, jeżeli liczby  $\alpha'$  i  $\alpha''$  mają ten sam znak, to dostatecznem będzie oczywiście oznaczyć przez  $u$  tę z tych liczb, której wartość jest mniejsza, żeby uzyskać rozwiązanie zadania, stanowiącego przedmiot uwagi II-giej, jeżeli zaś liczby  $\alpha'$  i  $\alpha''$  mają znaki przeciwne, to wartość zerowa na  $u$  sprawdzać będzie warunki zadania.

Żeby uzasadnić i uwagę III-cią, oznaczmy przez  $\mu'$  symbol specyficzny takiej liczby wymiernej, która czyni zadość jednocześnie związkom następującym:

$$\mu' > 0, \quad \mu' \leq \mu, \quad \mu' < d,$$

Ponieważ liczba  $x$  jest znana, przeto zdołamy wyznaczyć symbole specyficzne dwóch liczb wymiernych  $w'$  i  $w''$ , sprawdzających jednocześnie związki następujące:

$$(1) \quad \begin{aligned}w' &\leq x \leq w'', \\ w'' - w' &\leq \mu'.$$

Mamy tedy

$$\begin{aligned}x &= w' + \theta' \mu' \\ x &= w'' + \theta'' \mu',\end{aligned}$$

oznaczając przez  $\theta'$  i  $\theta''$  dwie liczby rzeczywiste, z których żadna co do wartości bezwzględnej od jedności większą być nie może. Z równań poprzedzających mamy

$$\begin{aligned}w' &= x - \theta' \mu' \\ w'' &= x - \theta'' \mu',\end{aligned}$$

ponieważ zaś mamy

$$\begin{aligned}|x| &\geq d, & 0 < \mu' < d \\ |\theta| &\leq 1, & |\theta''| \leq 1,\end{aligned}$$

przeto każda z liczb  $w'$  i  $w''$  jest od zera odmienna, a znak jakościowy żadnej z nich nie różni się od znaku jakościowego liczby  $x$ .

Ze względu na związki (1) i na to, że znaki jakościowe liczb  $w'$  i  $w''$  nie różnią się pomiędzy sobą, jedna z nich, którą oznaczmy przez  $w$ , jest co do wartości bezwzględnej niezawodnie nie większa od liczby  $x$ . Gdyby pokazało się, że mamy

$$|w| \geq d,$$

to moglibyśmy rozwiązać zadanie, rozważane w uwadze III-ciej, przyjmując

$$u = w.$$

Załóżmy więc, że mamy

$$|w| < d.$$

Dwa tylko przypadki mogą zachodzić: albo

$$w > 0,$$

albo

$$w < 0.$$

W pierwszym przypadku wartość

$$u = d$$

stanowiłaby rozwiązanie zadania, o które chodzi, a w drugim — uzyskalibyśmy oczywiście rozwiązanie tegoż zadania, przyjmując

$$u = -d.$$

Ostatecznie usprawiedliwiliśmy w zupełności i uwagę III-cią

Zwracając się do zadania II-go, oznaczmy przez  $x$  i  $y$  liczby, o iloczyn których chodzi. Ponieważ liczby te są „dane“, przeto na podstawie uwagi I-szej zdołamy wyznaczyć symbol specyficzny takiej liczby wymiernej  $L$ , która mogłaby być uważana za górną granicę wartości bezwzględnej każdej z liczb  $x$  i  $y$ . Wyznaczywszy w taki sposób liczbę  $L$ , oznaczmy przez  $\varepsilon$  zapomocą symbolu specyficznego daną liczbę wymierną od zera większą, ale poza tem dowolnie przyjętą. Przyjawszy

$$\mu = \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left. \vphantom{\mu = \frac{\varepsilon}{2L}} \right\} \quad (1)$$

zdołamy zawsze (uwaga II) wyznaczyć symbole specyficzne dwóch liczb wymiernych  $u$  i  $v$ , sprawdzających związki

$$\left. \begin{aligned} |u| &\leq |x| \\ |v| &\leq |y| \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

oraz związki

$$(3) \quad \begin{cases} |x - u| \leq \mu \\ |y - v| \leq \mu. \end{cases}$$

Ponieważ ze związków (2) i z definicyi liczby  $L$  wynikają związki

$$\begin{cases} |u| \leq L \\ |v| \leq L, \end{cases}$$

przeto na podstawie tw. II-go i wzoru (1) mamy

$$|x \cdot y - u \cdot v| < \varepsilon.$$

Zatem zadanie II-gie możemy zawsze rozwiązać.

Przystępując do zadania III-go, natychmiast spostrzegamy, że nie tylko nie zdołamy zawsze tego zadania rozwiązać, ale nawet nie zawsze zdołamy stwierdzić, czy wogóle rozwiązanie zadania tego jest możliwe, gdyż możemy nie umieć zdecydować, czy dzielnik jest od zera odmienny. Oznaczmy jednak dzielną przez  $x$ , a dzielnik przez  $y$  i załóżmy, że posiadamy symbol specyficzny takiej liczby wymiernej, od zera większej  $d$ , która uważana być może za dolną granicę wartości bezwzględnej dzielnika  $y$ .

W takim razie zadanie, o które chodzi, oczywiście jest rozwiązalne. Powiadam uadto, że łatwo możemy zadanie to rozwiązać. Istotnie, wyznaczmy najpierw symbol specyficzny liczby wymiernej  $L$ , mogącej być uważaną za górną granicę wartości bezwzględnej każdej z liczb  $x$  i  $y$ ; na podstawie uwagi I-szej nie napotkamy żadnej trudności przy wyznaczeniu liczby  $L$ .

Następnie oznaczmy przez  $\varepsilon$  liczbę wymierną, przez symbol specyficzny daną, od zera większą, ale poza tem dowolnie przyjętą i określmy liczbę  $\mu$  przez wzór

$$(1) \quad \mu = \frac{d^2}{2L} \varepsilon.$$

Ponieważ liczby  $x$  i  $y$  są dane, przeto ze względu na uwagę II-gą i III-cią zdołamy wyznaczyć symbole specyficzne dwóch liczb wymiernych  $u$  i  $v$ , sprawdzających związki

$$(2) \quad \begin{cases} |u| \leq |x|, \\ |v| \leq |y|, \end{cases}$$

związek

$$(3) \quad |v| \geq d,$$

oraz związki

$$\left. \begin{aligned} |x - u| &\leq \eta \\ |y - v| &\leq \mu. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ponieważ ze związków (2) i z definicyi liczb  $L$  wynikają związki

$$|u| \leq L, \quad |v| \leq L,$$

przeto na podstawie związków (1), (3), (4), i ze względu na tw. III-cie zachodzić będzie nierówność

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{u}{v} \right| \leq \varepsilon.$$

Związek ten wyraża, że w razie kiedy posiadamy symbol specyficzny liczby wymiernej od zera większej, mogącej być uważaną za dolną granicę wartości bezwzględnej dzielnika, jesteśmy w stanie rozwiązać zadanie III-cie.

Z tej dyskusyi trzech zadań, wysłowionych wyżej, wynikają bezpośrednio konsekwencye następujące:

Możemy „wyznaczyć” wynik wszelkiej kombinacyi liczb rzeczywistych „danych” drogą dodawania, odejmowania i mnożenia. Jeżeli zaś chodzi o taką kombinacyę liczb rzeczywistych „danych” drogą działań zasadniczych, do której wchodzi jeden lub kilka ilorazów, to nie tylko nie zawsze możemy „wyznaczyć” wynik rozważanej kombinacyi, ale nawet możemy nie umieć rozstrzygnąć, czy wynik wogóle istnieje. Jeżeli jednak jesteśmy w posiadaniu symbolów specyficznych liczb wymiernych, od zera większych, mogących być uważanymi za dolne granice wartości bezwzględnych dzielników przy tych ilorazach, które wchodzi do rozważanej kombinacyi liczb rzeczywistych, to w takim razie możemy „wyznaczyć” wynik kombinacyi, o którą chodzi.

Ta metoda wyznaczania wyniku kombinacyi liczb „danych”, która wypływa bezpośrednio z tego, cośmy uzasadnili w paragrafie niniejszym, wogóle nie najszybciej do celu prowadzi. Metody korzystne ze stanowiska techniki rachunkowej do rozwiązywania zagadnień tego rodzaju należą do teoryi rachunków przybliżonych, której ze względu na cele natury teoretycznej tego dzieła, wykladać tu nie będziemy.

**§ 93. Rozszerzenie pojęcia potęgi.** Część wyników uzyskanych w § 33-cim możemy wysłowić w sposób następujący: