

VI. *Moduł dodawania liczb względnych istnieje i równa się wspólnej wartości liczb względnych autosymetrycznych.*

Czytelnik z łatwością sam udowodni twierdzenie następujące:

VII. *Suma dwóch liczb względnych, pomiędzy sobą symetrycznych, równa się modułowi dodawania; odwrotnie, jeżeli suma dwóch liczb względnych równa się modułowi dodawania, to te liczby są pomiędzy sobą symetryczne.*

§ 83. **Pojęcie sumy algebraicznej.** Oznaczmy przez μ moduł dodawania liczb względnych i uważajmy skończony ciąg dowolnie przyjętych liczb względnych

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Następnie oznaczmy przez s_0 liczbę względną, określoną równaniem

$$(2) \quad s_0 = \mu.$$

a przez s_k ($1 \leq k \leq n$) liczbę względną, która zależnie od wartości wskaźnika k , na podstawie dowolnie przyjętych umów, ma być wyznaczona albo z równania

$$(3) \quad s_k = s_{k-1} + a_k,$$

albo z równania

$$(4) \quad s_k = s_{k-1} - a_k.$$

W takim razie wartość każdego wyrazu ciągu

$$s_0, s_1, s_2, \dots, s_n,$$

a więc w szczególności i wyrazu s_n , oznaczona będzie w zupełności na podstawie zasady indukcji matematycznej. Przy takim określeniu liczba s_n zowie się sumą algebraiczną liczb (1), a same te liczby — jej składnikami. Przy oznaczeniach, którymi posługiwaliśmy się, symbol a_k oznacza to, co zwiemy składnikiem rzędu k sumy algebraicznej s_n ; składnik a_k zwiemy składnikiem pierwszej lub drugiej kategorii sumy algebraicznej zależnie od tego, czy zachodzi wzór (3), czy wzór (4) przy rozważonej wartości wskaźnika k . Żeby przy układaniu symbolu na sumę algebraiczną z uwidocznieniem składników uniknąć potrzeby wprowadzania tych nawiasów, które na podstawie ogólnych reguł tworzenia wzorów arytmetycznych, powinnyby być wprowadzone, umawiamy się, że będziemy stosować się do reguły następującej:

przedstawiając liczbę s_1 (zgodnie z ogólnymi prawidłami) przez symbol

$$\mu + a_1$$

lub przez symbol

$$\mu - a_1,$$

zależnie od tego, czy przy $k = 1$ zachodzi wzór (3), czy też wzór (4), tworzymy, po uzyskaniu już symbolu na s_{k-1} ($k \geq 2$), symbol na s_k , dopisując po prawej stronie tego symbolu, lecz nie zamykając go w nawiasie, symbol

$$+ a_k$$

lub symbol

$$- a_k,$$

zależnie od tego, czy przy rozważanej wartości na zachodzi wzór czy wzór (4), a więc zależnie od tego, czy przy rozważanej wartości wskaźnika k , składnik a_k należy do pierwszej czy też do drugiej kategorii składników sumy algebraicznej, którą pragniemy przedstawić.

Uważajmy dla przykładu sumę algebraiczną s czterech składników, oznaczając pierwszy składnik przez a , drugi przez b , trzeci przez c , a czwarty przez d . Żeby określić w zupełności sumę algebraiczną, o którą chodzi, przyjmijmy, że dwa pierwsze składniki i składnik 4-ty należą do drugiej kategorii, a składnik 3-ci do 1-szej. W takim razie, na podstawie powyższej umowy, będziemy mieli na wartość sumy algebraicznej s wzór następujący:

$$s = \mu - a - b + c - d,$$

a wzór ten równoważny będzie wzorowi

$$s = [(\mu - a) - b] + c - d,$$

jakiśmy wyprowadzili na liczbę s z ogólnych reguł tworzenia wzorów arytmetycznych.

I. Zachowując oznaczenia, które posługiwaliśmy się przy wystawieniu definicji sumy algebraicznej, oznaczmy ogólnie przez a'_k liczbę równą lub symetryczną liczbie a_k , zależnie od tego, czy składnik a_k sumy algebraicznej s_n jest składnikiem pierwszej czy drugiej kategorii. W takim razie liczba s_n równać się będzie zwykłej sumie liczb

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n. \quad (5)$$

Innemi słowy będziemy mieli

$$(6) \quad s_n = a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_n.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, przyjmijmy

$$(7) \quad s'_0 = \mu$$

oraz ogólnie

$$(8) \quad s'_k = s'_{k-1} + a'_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

Z równości (2) i (7) mamy

$$s_0 = s'_0,$$

a gdybyśmy mieli

$$(9) \quad s_{k-1} = s'_{k-1}$$

przy pewnej od jedności nie mniejszej wartości na k , to mielibyśmy i

$$(10) \quad s_k = s'_k.$$

Istotnie, gdyby składnik a_k był pierwszej kategorii składnikiem sumy s_n , to mielibyśmy

$$(11) \quad a'_k = a_k$$

oraz

$$(12) \quad s_k = s_{k-1} + a_k$$

i równości (8), (9), (11) i (12) pociągałyby za sobą równość (10), gdyby zaś składnik a_k był drugiej kategorii składnikiem sumy algebraicznej s_n , to mielibyśmy

$$(13) \quad s_k = s_{k-1} - a_k$$

oraz

$$(14) \quad s_{k-1} - a_k = s_{k-1} + a'_k$$

ze względu na symetrię liczb a_k i a'_k i na tw. I-sze z paragrafu poprzedzającego, a ponieważ równości (8), (9), (13) i (14) pociągają za sobą równość (10), przeto i w przypadku omawianym równość (9) pociągałaby za sobą równość (10).

Z uzyskanych wyników wnosimy, na podstawie zasady indukcji matematycznej, że mamy

$$s_n = s'_n,$$

a równość ta równoważna jest równości (6), na której właśnie twierdzenie polega.

II. *Dowolna przemiana porządku składników sumy algebraicznej s_n pozostaje bez wpływu na jej wartość, byleby żaden składnik nie był przeniesiony z pierwszej kategorii do drugiej, albo z drugiej do pierwszej.*

Istotnie, oznaczmy przez S_n sumę algebraiczną, na którą przemieniałaby się suma algebraiczna s_n , gdybyśmy w jakikolwiek sposób przemienili porządek składników tej sumy, nie przenosząc jednak żadnego składnika z 1-szej kategorii do 2-giej, albo z 2-giej do 1-szej. Na podstawie tw. I-go sumy algebraiczne s_n i S_n równają się odpowiednio dwom zwykłym sumom, które tylko porządkiem składników różnić się od siebie mogą. Ponieważ te dwie zwykłe sumy są sobie równe, przeto sumy s_n i S_n także są sobie równe, a na tem właśnie polega twierdzenie, o uzasadnienie którego chodziło.

Oznaczmy przez a jakąkolwiek liczbę względną i przyjmijmy umowę polegającą na tem, żeby symbol

$$- a,$$

który czytamy: mniej a , uważany był za symbol liczby symetrycznej liczbie a , a symbol

$$+ a,$$

który czytamy: więcej a , za symbol oznaczający tę samą liczbę, co sam symbol a ¹⁾. Na podstawie tej umowy znaki $(+)$ i $(-)$ będą mogły wchodzić do wzorów matematycznych nie tylko, jak dotychczas, w znaczeniu symbolów pewnych działań (mianowicie dodawania i odejmowania), ale jeszcze w znaczeniu nowem, określonym umową, którą przed chwilą przyjęliśmy. Żeby wyrazić, iż jeden ze znaków $(+)$ albo $(-)$ ma być rozumiany w tem nowem znaczeniu, orzekać będziemy, iż rozważany znak ma być rozumiany jako znak jakościowy. Znaki $(+)$ i $(-)$ zowią się w każdym razie przeciwnymi sobie znakami.

Zwróćmy się obecnie do pojęcia sumy algebraicznej i, zachowując bez zmiany oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się przy definiowaniu tego pojęcia, oznaczmy jeszcze przez S symbol takiej sumy, utworzony w sposób omówiony wyżej.

W symbolu złożonym S każdy ze składników

$$a_1, a_2, \dots a_k$$

¹⁾ Zamiast wyrażen „mniej a ” i „więcej a ”, używane są często wyrażenia „plus a ” i „minus a ”.

sumy algebraicznej, którą symbol ten przedstawia, opatrzoney będzie jednym ze znaków $+$ lub $-$, a znak taki określać będzie czy wyraz s_k ($1 \leq k \leq n$) ciągu

$$(15) \quad s_0, s_1, s_2, \dots, s_n,$$

którego pierwszy wyraz s_0 równa się modułowi dodawania μ , a ostatni przedstawia wartość rozważanej sumy algebraicznej, równa się wynikowi dodania, czy też wynikowi odjęcia liczby a_k od liczby s_{k-1} .

Na podstawie umowy przyjętej, możliwa jest jeszcze inna interpretacja symbolu S ; możemy przyjąć, że symbol ten oznacza ostatni wyraz ciągu

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n,$$

którego pierwszy wyraz równa się, jak w ciągu (15), modułowi dodawania μ , ale każdy dalszy, σ_k ($1 \leq k \leq n$), przedstawia wynik dodania do wyrazu σ_{k-1} liczby

$$+a_k \text{ lub } -a_k,$$

zależnie od tego, czy znak, znajdujący się po lewej stronie symbolu a_k w symbolu złożonym S jest znakiem $(+)$ czy też znakiem $(-)$.

Przy tej nowej interpretacji symbolu S , symbol ten przedstawiać będzie pewną sumę zwykłą. Oznaczmy tę sumę zwykłą przez T_n . Łatwo stwierdzić możemy, że zwykła suma T_n równa się tej sumie algebraicznej s_n , którą przedstawia symbol S przy pierwotnem znaczeniu tego symbolu. Istotnie, suma T_n jest sumą tylu liczb, ile wynosi liczba $n+1$; jeden ze składników sumy zwykłej T_n , mianowicie pierwszy składnik, równa się modułowi dodawania μ liczb względnych, a zbiór wszystkich innych zlewa się ze zbiorem wszystkich składników

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n,$$

których suma zwykła s'_n równa się sumie algebraicznej s_n na podstawie tw. I-go. Z tego wynika, że mamy

$$T_n = \mu + s'_n,$$

a ponieważ na podstawie definicji modułu dodawania mamy

$$\mu + s'_n = s'_n,$$

przeto, ze względu na równość

$$s'_n = s_n,$$

zgodnie z zapowiedzią zachodzi równość

$$I_n = s_n.$$

Obecnie pragniemy jeszcze omówić pewne uproszczenia, które wprowadzamy do symbolów sum algebraicznych. Pomiedzy elementami, które na podstawie wyżej podanej definicji symbolu S sumy algebraicznej wchodzi do symbolu S , znajduje się symbol μ modułu dodawania liczb względnych. Okoliczność ta była naturalnem następstwem brzmienia definicji sumy algebraicznej. Układając tę definicję, posługiwaliśmy się modulem dodawania w tym celu, żeby nie zacieśniać pojęcia sumy algebraicznej w ten sposób, iżby pierwszy składnik mógł być tylko składnikiem pierwszej kategorii. Obecnie jednak, korzystając z możności nadawania znaczenia jakościowego każdemu ze znaków $(+)$ i $(-)$, możemy usunąć z symbolu złożonego S symbol modułu dodawania μ i przyjąć w ten sposób uzyskany symbol S' za symbol tej sumy algebraicznej, którą przedstawiał symbol S , określając jednocześnie znaczenie symbolu S' w sposób następujący: symbol S' przedstawia liczbę względną, równą ostatniemu wyrazowi σ_n ciągu

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n,$$

którego pierwszy wyraz σ_1 równa się liczbie

$$+a_1 \text{ lub } -a_1,$$

zależnie od tego, czy po lewej stronie symbolu a_1 w symbolu S' znajduje się znak $(+)$ czy znak $(-)$, a każdy dalszy σ_k ($1 < k \leq n$) wynikowi dodania do wyrazu σ_{k-1} liczby

$$+a_k$$

lub

$$-a_k,$$

zależnie od tego, czy po lewej stronie symbolu a_k w symbolu złożonym S' znajduje się znak $(+)$ czy znak $(-)$. Istotnie, przy tej interpretacji symbolu S' , symbol ten przedstawia oczywiście tę zwykłą sumę, której równa się, na podstawie tw. I-go, suma

algebraiczna, którą przedstawiliśmy poprzednio przez S i może zatem rzeczywiście być przyjęty za symbol tej sumy.

Możemy wprowadzić jeszcze jedno drobne uproszczenie do symbolu sumy algebraicznej; uproszczenie to polega na opuszczaniu przy pierwszym składniku znaku jakościowego w tym przypadku, kiedy znak ten miałby być znakiem $+$. Ostatecznie stosujemy się przy symbolizowaniu sum algebraicznych do reguły następującej: *piszemy w jednym wierszu składniki sumy algebraicznej, którą pragniemy przedstawić, kładąc po lewej stronie każdego składnika drugiej kategorii znak jakościowy ($-$), a po lewej stronie każdego składnika pierwszej kategorii, który nie jest pierwszym składnikiem rozważanej sumy algebraicznej, znak jakościowy ($+$); jeżeli pierwszy składnik sumy algebraicznej należy do pierwszej kategorii, to kładziemy po lewej stronie jego znak jakościowy ($+$) tylko w przypadku, kiedy pragniemy z naciskiem zaznaczyć, że składnik ten należy do pierwszej kategorii, zwykle zaś opuszczamy ten znak.*

Jeżeli np. oznaczmy przez a , b , c i d cztery jakiegokolwiek liczby względne, to symbol

$$-a - b + c - d$$

przedstawiać będzie sumę algebraiczną, w której pierwszy, drugi i czwarty składnik należą do 2-giej kategorii, a trzeci do 1-szej; przy tymże znaczeniu symbolów a , b , c i d , symbol

$$a - b + c - d$$

przedstawiałby sumę algebraiczną, w której pierwszy i trzeci składnik należałyby do 1-szej kategorii, a drugi i czwarty do 2-giej.

Uważajmy symbol S jakiegokolwiek sumy algebraicznej, ułożony na podstawie ostatecznej reguły, dopiero co podanej. Znak ($+$) lub ($-$), który może znajdować się po lewej stronie pierwszego składnika, można oczywiście rozumieć tylko jako znak jakościowy, natomiast znak ($+$) lub ($-$), oddzielający jakikolwiek inny składnik b od składników niższego rzędu, mógłby być przyjęty i za znak działania, którym liczba b ma być skombinowana ze składnikami niższego rzędu.

Otóż na podstawie wyników uzyskanych poprzednio wartość symbolu S niezależna jest od tego, którą z tych interpretacji w rzeczywistości przyjmujemy, i ta okoliczność usprawiedliwia nadanie znakom ($+$) i ($-$) znaczenia jakościowego, zachowując jedno-

cześniej znaki te i nadal do oznaczania działań dodawania i odejmowania.

III. Oznaczmy przez S symbol jakiegokolwiek sumy algebraicznej, utworzony na podstawie ostatecznej reguły podanej wyżej, a przez S' symbol, na który przemieniłby się symbol S , gdybyśmy znak jakościowy każdego składnika w symbolu S przemienili na znak przeciwny, uważając przytem naturalnie pierwszy składnik w symbolu S za składnik o znaku jakościowym $(+)$, w przypadku, w którymby w rzeczywistości ten składnik w symbolu S nie był zaopatrzony w żaden znak jakościowy. Przy tych warunkach symbol S' przedstawiałby sumę algebraiczną, której wartość byłaby symetryczna wartości sumy S .

Żeby twierdzenie to uzasadnić zważmy, iż sumy algebraiczne S i S' uważane być mogą na podstawie wyników uzyskanych poprzednio, za sumy zwykłe, w których składniki równorzędne są, ze względu na sposób, w jaki każda z tych sum przemieniona być może na drugą, symetrycznymi pomiędzy sobą liczbami względnymi. Zatem twierdzenie, o które chodzi, zostanie uzasadnione, jeżeli się tylko udowodni twierdzenie następujące:

IV. Jeżeli w dwóch sumach s i s' liczb względnych składniki równorzędne są stale symetrycznymi pomiędzy sobą liczbami względnymi, to liczby względne, przedstawiające odpowiednio wartości tych sum, są także symetrycznymi pomiędzy sobą liczbami względnymi.

Otóż twierdzenie to możemy łatwo uzasadnić. Oznaczmy ogólnie przez a_k składnik rzędu k sumy s , przez a'_k składnik tego samego rzędu sumy s' , a przez n wspólną liczbę składników każdej z sum s i s' . W przypadku szczególnym, kiedy mamy $n = 2$, zachodzą wzory następujące:

$$\begin{aligned} s &= a_1 + a_2, \\ s' &= a'_1 + a'_2, \end{aligned}$$

skąd

$$s + s' = (a_1 + a'_1) + (a_2 + a'_2),$$

a ponieważ każda z sum

$$a_1 + a'_1 \quad \text{i} \quad a_2 + a'_2$$

równa się (§ 82, tw. VII) modułowi dodawania μ , ponieważ nadto na podstawie definicji modułu dodawania, mamy

$$\mu + \mu = \mu,$$

przeto mamy

$$s + s' = \mu,$$

skąd wynika (§ 82, tw. VII), że liczby s i s' są sobie symetryczne. Zatem twierdzenie zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy mamy $n = 2$. Załóżmy chwilowo, że twierdzenie zachodziłoby, gdybyśmy mieli

$$n = p, \quad (p \geq 2)$$

i przyjmijmy

$$n = p + 1.$$

Mamy tedy

$$\begin{aligned} s &= s_p + a_{p+1} \\ s' &= s'_p + a'_{p+1}, \end{aligned}$$

oznaczając przez s_p sumę p pierwszych składników sumy s , a przez s'_p sumę p pierwszych składników sumy s' .

Ponieważ liczby s_p i s'_p są pomiędzy sobą symetryczne na podstawie chwilowo przyjętego założenia, a liczby a_{p+1} i a'_{p+1} , ze względu na założenie twierdzenia, także są pomiędzy sobą symetryczne, przeto i liczby s i s' są pomiędzy sobą symetryczne, a to z tej przyczyny, iż uzasadniliśmy już wyżej twierdzenie w przypadku szczególnym, kiedy chodzi o sumy, z których każda jest sumą dwóch tylko składników.

Z uzyskanych wyników wnosimy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić, zachodzi w podanem brzmieniu. Ale, skoro zachodzi to twierdzenie, to ze względu na wyżej zaznaczony związek tw. III-go z twierdzeniem udowodnionem obecnie, a więc z twierdzeniem IV-tem, twierdzenie III-cie także niezawodnie zachodzi.

Twierdzenie III-cie ma wielkie znaczenie ze względu na technikę rachunkową, gdyż twierdzenie to umożliwia oczywiście przekształcenie wszelkiej kombinacji liczb względnych drogą dodawania i odejmowania (a więc i wszelkiej kombinacji sum algebraicznych drogą dodawania i odejmowania) na jedną sumę algebraiczną tych liczb, które rozważanej kombinacji ulegają.

§ 84. Mnożenie. Oznaczmy przez a , b , a' i b' cztery liczby bezwzględne i, zakładając na początek, że liczby te sprawdzają nierówności

$$\begin{aligned} a &\geq b \\ a' &\geq b', \end{aligned}$$

uważajmy iloczyn $(a - b) \cdot (a' - b')$.

Mamy

$$\begin{aligned}
 (a - b)(a' - b') &= (a - b)a' - (a - b)b' \\
 &= (a \cdot a' - b \cdot a') - (a \cdot b' - b \cdot b') \\
 &= (a \cdot a' - b \cdot a') + (b \cdot b' - a \cdot b') \\
 &= \{(a \cdot a' - b \cdot a') + b \cdot b'\} - a \cdot b' \\
 &= \{(a \cdot a' + b \cdot b') - b \cdot a'\} - a \cdot b' \\
 &= (a \cdot a' + b \cdot b') - (b \cdot a' + a \cdot b').
 \end{aligned}$$

Mamy więc

$$(a - b)(a' - b') = (a \cdot a' + b \cdot b') - (b \cdot a' + a \cdot b').$$

Kierując się tedy myślą takiego określenia mnożenia, iżby tw. II-gie z § 80-go zachodziło co do mnożenia, dochodzimy do następującej definicyi mnożenia liczb względnych:

Oznaczając przez (a, b) liczbę względną, przyjętą za mnożną, a przez (a', b') liczbę względną, przyjętą za mnożnik, określamy odnośny iloczyn jako wszelką liczbę względną, równą liczbie następującej:

$$(a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + a' b).$$

Przedewszystkiem obowiązani jesteśmy dowieść, że definicya ta czyni zadość tym warunkom, do których postanowiliśmy stosować się (§ 25) przy określeniu jakiegokolwiek działania. W tym celu winniśmy upewnić się, że powyższa definicya prowadzi do konsekwencyi następujących:

A) Jeżeli pewna liczba względna X uważana być może za iloczyn pewnej liczby względnej A , przyjętej za mnożną, przez pewną liczbę A' , przyjętą za mnożnik, to wszelka liczba względna X' , równa liczbie X , może także być uważana za iloczyn $A \cdot A'$.

B) Jeżeli pewna liczba względna X uważana być może za iloczyn $A \cdot A'$ dwóch liczb względnych A i A' , to liczba X może także być uważana za iloczyn $B \cdot B'$ wszelkich dwóch liczb względnych B i B' , sprawdzających równości

$$\left. \begin{aligned} B &= A \\ B' &= A'. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Warunek A oczywiście zachodzi na podstawie samego brzmienia definicyi iloczynu dwóch liczb względnych. Chodzi więc tylko o udowodnienie, że warunek B jest także spełniony. Uwidoczniając

pierwszy i drugi wyraz każdej z liczb względnych A, A', B i B' , przyjmijmy

$$\begin{aligned} A &= (a, b) \\ A' &= (a', b') \\ B &= (c, d) \\ B' &= (c', d'). \end{aligned}$$

Mamy tedy

$$(2) \quad \begin{cases} A \cdot A' = (aa' + bb', ab' + a'b) \\ B \cdot B' = (cc' + dd', cd' + c'd) \end{cases}$$

oraz

$$(3) \quad \begin{cases} a + d = c + b \\ a' + d' = c' + b' \end{cases}$$

na podstawie równości (1).

Oczywiście udowodnimy twierdzenie B , jeżeli tylko dowiemy, że równości (3) pociągają za sobą równość iloczynów $A \cdot A'$ i $B \cdot B'$. W tym zaś celu należy tylko upewnić się, że wskutek równości (3) wyrażenia P i Q , określone wzorami

$$(4) \quad \begin{cases} P = aa' + bb' + cd' + c'd \\ Q = cc' + dd' + ab' + a'b, \end{cases}$$

są także pomiędzy sobą równe. Z równości (3) mamy

$$(5) \quad \begin{cases} d = (c + b) - a \\ d' = (c' + b') - a'. \end{cases}$$

Podstawiając wartości te na d i d' do wzoru (4) na P , otrzymujemy:

$$P = aa' + bb' + c(c' + b') + c'(c + b) - (a'c + ac'),$$

czyli

$$(6) \quad P = aa' + bb' + cb' + c'b + 2cc' - (a'c + ac').$$

Podstawiając zaś wartości (5) na d i d' do wzoru (4) na Q , otrzymamy

$$Q = cc' + ab' + a'b + (c + b)(c' + b') + aa' - \\ - \{a(c' + b') + a'(c + b)\}$$

skąd

$$Q = 2cc' + ab' + a'b + bb' + cb' + c'b + aa' - \\ - \{ac' + ab' + a'c + a'b\}$$

a z tego

$$Q = aa' + bb' + cb' + c'b + 2cc' - (ac' + a'c). \quad (7)$$

Z równości (6) i (7) wynika równość

$$P = Q.$$

Równość ta nie tylko stanowi dowód twierdzenia B, które pozostawało do uzasadnienia, żeby ze stanowiska zasad rozdziału V-go (§ 25) powyższa definicya mnożenia liczb względnych wogóle mogła być uważana za definicyę pewnego działania na wielkościach oznaczonej kategorii, ale nadto wyraża jeszcze, iż podana przez nas definicya mnożenia liczb względnych określa mnożenie tych liczb jako działanie jednoznaczne. Ponieważ dalej, na podstawie samego brzmienia definicyi tej, mnożenie liczb względnych oczywiście wykonalne jest bez zastrzeżeń, przeto omawiana definicya czyni zadość i temu szczególnemu warunkowi, żeby mnożenie było zawsze działaniem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Ostatecznie, ze stanowiska ogólnej teoryi, rozwiniętej w rozdziale V-tym, usprawiedliwiliśmy w zupełności powyższą definicyę mnożenia, a ze względu na drogę, która przywiodła nas do tej definicyi, mamy pewność, iż co do mnożenia, tw. II-gie z § 80-go zachodzić będzie niezawodnie.

I. *Mnożenie liczb względnych posiada własność łączności.*

Na podstawie znanego twierdzenia (§ 28, tw. II) uzasadnimy w zupełności powyższe twierdzenie, jeżeli tylko podamy dowód na to, iż ono zachodzi w przypadku trzech czynników. W tym celu oznaczmy przez (a, b) , (a', b') i (a'', b'') trzy liczby względne. Mamy

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b),$$

zatem

$$\{(a, b) \cdot (a', b')\} (a'', b'') = (aa' + bb', ab' + a'b) \cdot (a'', b''),$$

skąd

$$\begin{aligned} & \{(a, b) (a', b')\} (a'', b'') = \\ & = (aa'a'' + a'bb'' + ab'b'' + a'bb'', aa'b'' + a'a''b + aa'b'' + bb'b''). \end{aligned} \quad (1)$$

Z drugiej znów strony mamy

$$(a', b') (a'', b'') = (a'a'' + b'b'', a'b'' + a''b'),$$

zatem

$$(a, b) \{(a', b') (a'', b'')\} = (a, b) (a'a'' + b'b'', a'b'' + a''b'),$$

przeto

$$(2) \quad (a, b) \{(a', b') (a'', b'')\} = \\ = (aa'a'' + ab'b'' + a'bb'' + a''b'b, aa'b'' + aa''b' + a'a''b + bb'b'').$$

Ze wzorów (1) i (2) wynika równość

$$\{(a, b) \cdot (a' b')\} (a'', b'') = (a, b) \cdot \{(a', b') \cdot (a'', b'')\}.$$

Równość ta wyraża, że w razie trzech czynników mnożenie liczb względnych rzeczywiście posiada własność łączności, a o to tylko jeszcze chodziło.

II. *Mnożenie liczb względnych posiada własność przemienności.*

Istotnie, z samej definicyi mnożenia liczb względnych wynika bezpośrednio, że iloczyn dwóch liczb względnych posiada własność przemienności. Zatem na podstawie tw. I-go obecnego paragrafu i tw. II-go z § 28-go, mnożenie liczb względnych posiada własność przemienności bez względu na liczbę czynników.

III. *Mnożenie liczb względnych posiada własność rozdzielności w stosunku do dodawania i odejmowania.*

Ze względu na tw. I-sze z § 30-go i na tw. II-gie z § 32-go, udowodnimy powyższe twierdzenie w całej ogólności, jeżeli tylko podamy dowód na to, że ono zachodzi przy iloczynie sumy dwóch składników przez jakąkolwiek liczbę względną. Otóż, oznaczając przez (a, b) , (a', b') i (a'', b'') trzy liczby względne jakiekolwiek, mamy

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

zatem

$$\{(a, b) + (a', b')\} (a'', b'') = (a + a', b + b') (a'', b''),$$

mamy więc

$$(1) \quad \{(a, b) + (a', b')\} (a'', b'') = \\ = (aa'' + a'a'' + bb'' + b'b'', ab'' + a'b'' + a''b + a''b').$$

Z drugiej strony mamy

$$(a, b) (a'', b'') = (aa'' + bb'', ab'' + a''b), \\ (a', b') (a'', b'') = (a'a'' + b'b'', a'b'' + a''b'),$$

skąd

$$(a, b) (a'', b'') + (a', b') (a'', b'') = \\ = (aa'' + bb'' + a'a'' + b'b'', ab'' + a''b + a'b'' + a''b').$$

Na podstawie równości tej i równości (1) mamy

$$\{(a, b) + (a', b')\} (a'', b'') = (a, b) (a'', b'') + (a', b') (a'', b'').$$

Ze względu na tw. II-gie równość ta stanowi zupełny dowód na to, że mnożenie liczb względnych posiada własność rozdzielności w tym przypadku szczególnym, do którego sprowadzilibyśmy wszystkie inne przypadki.

IV. *Warunek konieczny i wystarczający, ażeby iloczyn jakiegokolwiek skończonej liczby liczb względnych równał się modułowi dodawania, polega na tem, żeby przynajmniej jeden czynnik tego iloczynu sam równał się modułowi dodawania.*

Powiadam najpierw, że twierdzenie zachodzi w przypadku iloczynu dwóch tylko czynników. Istotnie, jeżeli jeden z czynników (a, b) iloczynu P dwóch liczb względnych modułowi dodawania równy nie jest, to liczby bezwzględne a i b sprawdzają albo nierówność

$$a > b, \quad (1)$$

albo nierówność

$$a < b. \quad (2)$$

Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy drugi czynnik przez (a', b') to ze względu na własność przemienności mnożenia liczb względnych którąkolwiek z liczb (a, b) lub (a', b') przyjęlibyśmy za mnożnik, mamy

$$P = (aa' + bb', ab' + a'b).$$

Zatem warunek konieczny i wystarczający, żeby iloczyn P równał się modułowi dodawania, polega na równości

$$aa' + bb' = ab' + a'b. \quad (3)$$

W razie nierówności (1) równość poprzedzająca równoważna jest równości

$$(a - b) a' = (a - b) b', \quad (4)$$

a w razie nierówności (2) — równości

$$(b - a) a' = (b - a) b'. \quad (5)$$

Otóż żadna z równości (4) lub (5) nie mogłaby zachodzić (§ 77, tw. VII), gdybyśmy mieli

$$a' \neq b',$$

a ponieważ jakiegokolwiek wartości, chociażby i równe sobie, miałyby liczby bezwzględne a i b , równość

$$a' = b'$$

zawsze pociąga za sobą równość (3); ponieważ więc iloczyn dwóch liczb względnych niezawodnie równa się modułowi dodawania, jeżeli jeden z czynników temu modułowi się równa, przeto w razie dwóch czynników twierdzenie zachodzi z pewnością.

Załóżmy chwilowo, że twierdzenie zachodzi jeszcze i w tym razie, kiedy liczba czynników ma pewną wartość k , i oznaczmy przez P iloczyn jakiegokolwiek $k + 1$ liczb względnych. Oznaczając jedną z tych liczb przez (a, b) , a przez P' iloczyn k liczb pozostałych, mamy

$$P = P' \cdot (a, b).$$

Ponieważ uzasadniliśmy już twierdzenie w przypadku dwóch czynników, przeto warunek konieczny i wystarczający, żebyśmy mieli

$$P = \mu,$$

gdzie oznaczyliśmy przez μ moduł dodawania, polega na tem, żeby zachodziła jedna przynajmniej z równości

$$P' = \mu \quad \text{albo} \quad (a, b) = \mu.$$

Z drugiej znów strony na podstawie chwilowo przyjętego założenia warunek konieczny i wystarczający, żeby zachodziła równość

$$P' = \mu,$$

polega na tem, żeby jeden przynajmniej z k czynników iloczynu P' równał się modułowi dodawania.

Zatem, gdyby twierdzenie zachodziło przy tylu czynnikach, ile wynosi liczba k , to ono zachodziłoby i w przypadku, w którymby liczba tychże była o jedność większa. Z uzyskanych wyników wnosimy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

V. Jeżeli oznaczmy przez (a, b) , (c, d) i (c', d') trzy liczby względne, to nierówność

$$(1) \quad (c, d) \neq (c', d')$$

równoważna jest nierówności

$$(2) \quad (a, b) \cdot (c, d) \neq (a, b) \cdot (c', d'),$$

w razie, ale tylko w razie, kiedy zachodzi nierówność

$$(a, b) \neq \mu, \quad (3)$$

gdzie oznaczyliśmy znowu przez μ moduł dodawania.

Istotnie, na podstawie własności rozdzielnosci mnożenia w stosunku do odejmowania mamy:

$$(c, d) \cdot (a, b) - (c', d') (a, b) = \{(c, d) - (c', d')\} (a, b),$$

zatem ze względu na definicję modułu dodawania związek (2) równoważny jest następującemu:

$$\{(c, d) - (c', d')\} (a, b) \neq \mu,$$

który znów na podstawie tw. IV-go równoważny jest układowi nierówności, jaki tworzą razem nierówność (3) i nierówność

$$(c, d) - (c', d') \neq \mu.$$

Ponieważ zaś ta ostatnia nierówność równoważna jest nierówności (1), przeto ostatecznie nierówność (2) równoważna jest układowi nierówności, jaki tworzą razem obie nierówności (1) i (3), a na tem właśnie polega twierdzenie, o które chodziło.

VI. Jeżeli w iloczynie P dwóch liczb względnych zastąpimy jeden czynnik przez liczbę czynnikowi temu symetryczną, to uzyskamy nowy iloczyn P' , który równać się będzie liczbie symetrycznej wartości iloczynu P .

Jeżeli oznaczmy przez A wspólny czynnik iloczynów P i P' , przez B drugi czynnik iloczynu P , a przez B' drugi czynnik iloczynu P' , to (§ 82, tw. VII) mieć będziemy

$$B + B' = \mu, \quad (1)$$

oznaczając przez μ moduł dodawania.

Z drugiej strony ze względu na własność przemienności mnożenia mamy w każdym razie

$$\begin{aligned} P &= A \cdot B \\ P' &= A \cdot B', \end{aligned}$$

skąd

$$P + P' = A (B + B'),$$

skąd znowu

$$P + P' = A \cdot \mu \quad (2)$$

na podstawie równości (1). Na podstawie tw. IV-go równość (2) pociąga za sobą równość

$$P + P' = \mu,$$

wyrażającą (§ 82, tw. VII) właśnie twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

VII. *Jakiegokolwiek liczby względne oznaczylibyśmy przez A i B , to jeżeli przyjmiemy*

$$P = A \cdot B,$$

zachodzić będą równości następujące:

$$(1) \quad (+A)(+B) = +P = P$$

$$(2) \quad (-A)(+B) = -P$$

$$(3) \quad (-A)(-B) = +P = P$$

$$(4) \quad (-A)(+B) = -P$$

gdzie oczywiście znaki $(+)$ i $(-)$ mają znaczenie jakościowe, określone w § 83-cim.

Istotnie, równość (1) zachodzi bezpośrednio na podstawie znaczenia znaku $(+)$ w symbolach

$$+A \text{ i } +B,$$

a równości (2), (3) i (4) wynikają kolejno z równości (1), (2), (3), na podstawie tw. VI-go.

§ 85. **Dzielenie.** Ze względu na własności mnożenia liczb względnych istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia liczb względnych (§ 31), a działanie to polega na wyznaczeniu liczby względnej (x, y) z równania

$$(1) \quad (a, b) \cdot (x, y) = (c, d),$$

gdzie (c, d) i (a, b) oznaczają dwie liczby względne dane, z których (c, d) przyjęta jest za dzielną, a druga (a, b) — za dzielnik; przy tych oznaczeniach liczba względna (x, y) , o wyznaczenie której chodzi, stanowi na podstawie ogólnych zasad rozdziału V-go, iloraz podziału liczby (c, d) przez liczbę (a, b) .

Przystępujemy obecnie do dyskusji równania (1). Gdyby dzielnik (a, b) równał się modułowi dodawania, to w takim razie (tw. IV-te z paragrafu poprzedzającego) iloczyn

$$(a, b)(x, y)$$